UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD Y SOLVENCIA DINAMICA DEL ENTE AFIANZADOR , UN CASO PARTICULAR DE LA TEORIA DEL RIESGO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA:

NESTOR GARCIA GARDUÑO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

ACT. RICARDO HUMBERTO SEVILLA AGUILAR

2005

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTÓNOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Estabilidad y Solvencia Dinámica del ente Afianzador, un caso particular de la Teoría del Riesgo."

realizado por Nestor García Garduño

con número de cuenta 09734256-8, quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	Act. Ricardo Humberto Sevilla Aguilar	
Propietario	M. en I. Fernando Eleazar Vanegas Chávez	
Propietario	Act. Fernando Pérez Márquez	Fernando Pérez M.
Suplente	Act. Felipe Zamora Ramos	
Suplente	Act. Irma Evelia Valencia Sepúlveda	

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

*A **Margarita** y **Joel**, mis padres*
quienes con esfuerzo, trabajo y sacrificios,
me guian en la carrera más difícil de todas:
la vida.

*A **Joel** y **Paul**, mis hermanos*
quienes con el juego,
emprendimos la tarea más importante:
la superación.

A mis amigos y profesores
quienes con el ejemplo,
comparten una disposición natural:
la sabiduría.

y

A Dios
quien me dio la oportunidad
de conocerlos.

"Será un día de trabajo
normal y, por encima de
todo, un agradecimiento a Dios
por el regalo de la vida."

Juan Pablo II

PREFACIO

Este trabajo esta enfocado a temas básicos de la Teoría del Riesgo. Se presenta tanto teoría general como aplicaciones practicas para el sector afianzador mexicano.

Se ha tenido como objetivo principal proporcionar elementos necesarios para la definición, formulación, análisis y solución a problemas básicos de esta teoría adaptada a las fianzas.

En cada capítulo se incluye teorías rigurosamente demostradas y técnicas, empleando métodos y procedimientos de carácter matemático, las cuales concluyen en aplicaciones de solvencia de dicho ente.

No obstante este trabajo presenta modelos y método de simulación que constituyen un importante papel en la obtención de resultados, dando la base para un estudio más profundo de la valoración de los riesgos en las fianzas.

Esto pone al alcance de los usuarios todos los elementos que le permitan una consulta e investigación rápida de los aspectos que le interesen en relación con la administración o prácticas de las operaciones de fianzas.

Aprovecho esta oportunidad para expresar de forma especial mi profundo agradecimiento al Act. Ricardo H. Sevilla Aguilar por su apoyo brindado en la elaboración y revisión de este trabajo. Más que amigo un gran maestro.

Al Mtro J. Heriberto Morales Gómez por haber sembrado la semilla de la ciencia en mi ser. Pilar principal en mi formación.

Finalmente doy gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, alma mater en todos los aspectos.

N. G. G.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La Teoría del Riesgo es una clase de modelos matemáticos que involucra en este caso en particular, un importante principio; analizando desviaciones de carácter aleatorio y proporcionando medidas para neutralizar sus efectos.

Este principio, la solvencia pone en evidencia el hecho de que los ingresos se produzcan antes que los pagos y el carácter aleatorio de estos pone en primer plano el objetivo de la estabilidad o solvencia de la compañía. Distinguiendo dos aspectos en la solvencia de una entidad, en nuestro caso la afianzadora:

- La Solvencia estática o capacidad técnico-financiera para hacer frente, en un momento dado, a las obligaciones contraídas.

- La Solvencia dinámica, que recoge los riesgos derivados de las fluctuaciones aleatorias, los derivados de la gestión y los derivados del mercado donde la empresa desarrolla su actividad.

La solvencia estática contempla la capacidad del afianzador en un momento dado para pagar las indemnizaciones derivadas de las primas. Si dichas primas representar el valor medio de las reclamaciones y ésta no se ha apartado de dicho valor medio, el afianzador contara con las disposiciones necesarias para compensar las reclamaciones si determino correctamente el beneficio –y por tanto calculó bien las provisiones técnicas de primas y de prestaciones– e invirtió aquellas disponibilidades de forma satisfactoria. Ahora bien, el importe de las reclamaciones puede experimentar fluctuaciones alrededor de su valor medio –que debe coincidir con las primas de riesgo– y de ahí surge el segundo aspecto, dinámico, de la solvencia. Los medios para lograr esta solvencia dinámica consisten en la exigencia de garantías financieras por encima de las provisiones técnicas de primas y de prestaciones y son fundamentalmente el margen de solvencia y las provisiones para desviación de las reclamaciones, es decir, elementos del patrimonio de la afianzadora que no están afectados a los compromisos contraidos en virtud de las primas ya emitidas.

Además, la suficiencia de las primas para cubrir las reclamaciones es una hipótesis de la Teoría del Riesgo que no siempre se pone de manifiesto con la claridad que sería de desear. Se supone que las primas de riesgo representan el valor medio de las reclamaciones y está es una previsión que en la práctica debe controlarse, tanto por la empresa misma como por las correspondientes autoridades de supervisión. Si las primas son insuficientes, las conclusiones derivadas de los cálculos actuariales para la determinación del margen mínimo de solvencia o de las provisiones técnicas de estabilización, han de ser revisados a la luz de tal realidad.

Suponiendo que las primas sean suficientes, la reclamación anual es una variable aleatoria y como tal fluctuara alrededor de su valor medio. Este riesgo de fluctuación justifica la necesidad del margen de solvencia adicional a las provisiones técnicas de primas y de reclamaciones.

Pero hay otros riesgos que comprenden la estabilidad de la afianzadora. Uno de ellos es el de alteraciones en las probabilidades básicas del proceso de riesgo. La probabilidad de que acaezca una reclamación puede variar año tras año, así como la distribución de probabilidades del tamaño o cuantía de cada reclamación; la inflación juega aquí un papel importante, al contribuir a que la probabilidad de que el valor de la reclamación supere un cierto costo o cuantía sea cada vez mayor.

Otros riesgos importantes que corre el afianzador son el de sufrir pérdidas en sus inversiones, el de experimentar incrementos inesperados en sus gastos de administración, el de insolvencia de sus reafianzadores, los cambios, etc. Estos riesgos son de tal naturaleza que su eliminación resulta prácticamente imposible; en unos casos, porque no se puede prever o cuantificar económicamente, y en otros, porque, aún siendo medibles, su reducción a límites inapreciables elevaría las garantías financieras a tales niveles que sería prácticamente insoportables para la economía del afianzador.

Por ello, hay que aceptar la imposibilidad del empeño de lograr la seguridad total, aunque también es cierto que los compromisos razonables entre riesgo y exigencias financieras son perfectamente posibles.

Por lo tanto, el margen de solvencia se proyecta hacia el porvenir y considera la solvencia en relación con la evolución prevista de las reclamaciones, el dinamismo de la empresa y del medio en que opera (Margen Mínimo de Solvencia Dinámica).

Es así como se toma el estudio la Solvencia Dinámica, con la finalidad de servir de introducción a la Teoría del Riesgo mediante el estudio de alguno de sus métodos, seleccionando los que presentan un interés más evidente y una aplicación más inmediata como las relativas al margen de solvencia.

Se ha organizado este trabajo del modo siguiente: en los dos primeros capítulos se presenta un panorama sobre las fianzas, en los restantes cinco se introduce a los modelos de la Teoría del Riesgo, para finalizar en dos capítulos con aplicaciones practicas sobre el sector afianzador mexicano.

En el capítulo 1, con la intención de apoyar el material que se presenta más adelante, se incluyen algunos aspectos que permitirá introducir en el tema de las fianzas, se definen los conceptos más comúnmente utilizados en el argot de fianzas.

En el capítulo 2 se analizan los ramos y subramos que la legislación mexicana prevé, con el propósito de facilitar al lector la comprensión y aprovechamiento del material que se presenta más adelante.

En el tercer capítulo se describe el objetivo de la Teoría del Riesgo, tanto individual como colectiva, así como los elementos para su generalización y su tratamiento en los capítulos posteriores.

En el capítulo 4 se realiza una descripción de los modelos de distribución referentes al número de reclamaciones.

En el capítulo 5 se exponen los modelos de distribución relacionados con el costo o cuantía de cada reclamación.

En el sexto capítulo se profundiza en la distribución de la reclamación anual. Haciendo énfasis en los métodos de recurrencia para la obtención de probabilidades de dicha función de distribución.

En el capítulo 7 se indica como se llega a la obtención de las estadísticas, empleando formulas que se trataron en los anteriores para concluir con la separación de los diversos ramos en tres grupos, los cuales serán de estudio en los siguientes capítulos.

En el capítulo 8 se profundiza en la función de distribución Gamma y en el empleo de la simulación estocástica para concluir con el calculo de las exigencias financieras necesarios para cada grupo definidos en el capítulo anterior.

En el noveno capítulo se profundiza en la función de distribución NP (Normal Power) sobre la solvencia global, aplicando nuevamente la simulación estocástica para las reclamaciones de un afianzador multirramos, concluyendo con los márgenes mínimos de solvencia.

Finalmente se incluyen los anexos necesarios para cuestiones complementarias tratadas a lo largo de este trabajo.

CAPÍTULO 1

LA FIANZA

La fianza es un contrato de origen civil que nació como consecuencia de la desconfianza del acreedor, quien para desvanecer su temor exigió e impuso como condición en la relación contractual, la presencia de un tercero ajeno y sin interés en la misma con la finalidad de que asumiera las responsabilidades del deudor para cumplir con la obligación, en caso de que este no lo hiciere.

Es así como los compromisos y negocios se deben garantizar mediante una fianza, por tanto, las personas físicas y morales que tengan este tipo de obligaciones económicas, y para su mejor desempeño, requieran de un servicio de afianzamiento y pronta resolución a tales obligaciones.

Durante muchos años esta actividad ha servido como útil instrumento de apoyo al crecimiento del país, al ser la fianza un instrumento que involucra una finalidad social y una imagen de respaldo.

En este capitulo se exponen los aspectos que intervienen en la operación de fianzas, se definirán algunos conceptos comúnmente empleados es esta operación y se abordara también, lo concerniente a las Garantías de Recuperación.

1.1 DEFINICIÓN Y CONCEPTO DE LA FIANZA

El Código Civil para el Distrito Federal en su Artículo 2794, nos define la fianza diciendo que:

“Una fianza es un contrato por el cual una persona se compromete con el acreedor a pagar por el deudor, si éste no lo hace”.

Asimismo cabe mencionar que el origen etimológico de la palabra fianza, proviene del latín “fidelitas”, “fidelis” y ésta a su vez en “fides” que significa fe o confianza, crédito o creencia, lealtad, fidelidad y honradez, garantía, protección, certeza o verosimilitud.

De acuerdo a la definición planteada, la fianza es un contrato que se deriva de un acuerdo de voluntades entre el acreedor y el deudor a través de un convenio o documento celebrado por ambos y que solicita expresamente el compromiso de la afianzadora por cumplir con el pago de la deuda ajena.

Por lo anterior, la fianza es un contrato accesorio unido a otro contrato principal o a una obligación ya contraída.

La obligación de la afianzadora estará condicionada a que exista un incumplimiento del deudor, en caso contrario, el acreedor no podrá cobrarle a la afianzadora.

1.2 CLASES DE FIANZAS

Existen en general, dos tipos de fianzas: las Fianzas Civiles y las Fianzas Mercantiles, en ocasiones también llamadas Fianzas Empresariales o de Empresa.

En México, las fianzas y los contratos que en relación con ellas otorguen o celebren las instituciones de fianzas, serán mercantiles para todas las partes que intervengan, ya sea como beneficiarias, solicitantes, fiadas, contrafiadoras u obligadas solidarias, excepción hecha de la garantía hipotecaria.[1]

En la época actual la fianza mercantil o de empresa constituye un instrumento de uso generalizado y de utilidad evidente, pues da seguridad y firmeza a todo género de relaciones contractuales que pueden traducirse en dinero o en pérdidas económicas y cuyo incumplimiento necesariamente ocasiona daños y perjuicios para el acreedor.

1.2.1 La Fianza Civil

Es la Fianza que puede otorgar cualquier ciudadano, como persona física, siempre que dicha persona convenga en manifestar capacidad de utilizar el goce de su patrimonio, así como demostrar solvencia amplia en relación con el objeto del afianzamiento y a satisfacción del beneficiario.

Como resultado a que la fianza civil no constituye un acto de comercio, al otorgar la fianza de este tipo no se puede hacer en forma de póliza, es decir, su otorgamiento no es sistemático, no tiene publicidad a través de los medios de

[1] Artículo 2 de la LFIF.

comunicación y no emplea intermediarios ni agentes, su uso es generalmente en operaciones de poca cuantía entre personas físicas.

1.2.2 La Fianza Mercantil o de Empresa

Es el contrato por el cual una institución afianzadora se compromete a titulo oneroso y mediante el pago de una prima y la expedición de una póliza, a pagar obligaciones de naturaleza económica, contraídas por un deudor o fiado ante un acreedor o beneficiario por si el fiado incumple.

La fianza de empresa representa un convenio relacionado con una operación, sistemática y profesional, ejercida por una institución de fianzas legalmente establecida y debidamente autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), esta operación se encuentra reglamentada y respaldada por la Ley Federal de Instituciones de Fianzas (LFIF).

En la época actual la fianza de empresa constituye un instrumento de uso generalizado y de utilidad evidente, pues da seguridad y firmeza a todo género de relaciones contractuales que pueden traducirse en dinero o en pérdidas económicas y cuyo incumplimiento necesariamente ocasiona daños y perjuicios para el acreedor.

1.3 LA FIANZA Y SU DIFERENCIA CON EL SEGURO

Es muy común que dentro del mercado afianzador exista confusión de términos con los que se usan en el seguro; y los clientes a menudo no distinguen entre uno y otro servicio.

Los agentes de seguros y fianzas deben saber explicar y marcar las diferencias que existen entre ambos servicios, para que los clientes puedan contratar las correctas coberturas y conozcan los sistemas de operación de cada instrumento.

La confusión proviene de la asociación que existe con el nombre ya que muchas empresas de otros países unen los nombres de seguros y fianza para identificarse, o bien, de que la mayoría de la gente que no ha tramitado fianzas, considera que tanto éstas como los seguros son los mismos, al considerarlos como reparadores de un daño y al pagar una prima en ambos casos para obtener el servicio. Esta situación siempre deberá ser aclarada por el agente de fianzas, en sus diferencias técnicas y operativas.

Podemos enumerar las similitudes y diferencias que existen entre el seguro y la fianza como son:

1.3.1 Similitudes

1. Los operan sociedades técnicamente organizadas y autorizadas por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para expedir fianzas o seguros.

   Se encuentran reguladas en sus operaciones por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF).

2. Las operaciones en ambos casos son a título oneroso, es decir, se paga a la institución autorizada para que ésta preste su servicio. Este desembolso es deducible de impuestos.

3. Ambos títulos, protegen a un beneficiario de un riesgo futuro.

1.3.2 Diferencias

	Fianzas	Seguros
Legislación	Código Civil para el Distrito Federal, Código de Comercio y la Ley Federal de Instituciones de Fianzas (LFIF).	Ley sobre el contrato y la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros (LGISMS).
Definición	Es un contrato por el cual una persona se compromete con el acreedor a pagar por el deudor, si este no lo hace.	Es un contrato indemnizatorio de pérdidas por la realización de un evento temido.
Relación Jurídica	Fiado, fiador, beneficiario y en su caso obligado solidario.	Asegurado y asegurador.
Obligación	Accesoria (Documento fuente).	Indemnizatoria de pérdidas.
Respalda	Incumplimiento de obligaciones.	Presentación de un siniestro.
Garantiza	El pago de la deuda ajena.	Pago de los daños ocasionados por el siniestro.
Riesgo	Incumplimiento de la obligación principal que depende de la voluntad del fiado.	Suceso futuro o incierto que se origina involuntariamente.
Tarifas	Se calcula en base a un porcentaje de la suma afianzada.	Se aplica en función a 3 factores técnicos empíricos: monto, duración e intensidad del riesgo.
Sistema de Responsabilidades	De contragarantías y reservas.	La mutualidad: el cobro de prima de muchos pagan los siniestros presentados.
Aspecto Comercial	Asesoramiento y capacidad de servicio al cliente en sus obligaciones.	Labor directa de venta para protección de contingencias futuras.

	Fianzas	Seguros
Textos	Para los tipo de fianzas, existen distintos textos que dependen del compromiso a garantizar, ya que cada obligación depende de diferentes clausulados en sus respectivos contratos.	Se encuentran ya identificados acordes al tipo de seguro que se contrate.
Cancelación	Se cancela cuando se extingue y comprueba la obligación garantizada, generalmente.	Se puede cancelar en cualquier momento, al concluir el periodo pagado o al realizar la indemnización.

1.4 PARTES QUE INTERVIENEN EN LA RELACIÓN JURÍDICA ESTABLECIDA EN VIRTUD DE UN CONTRATO DE FIANZA

De acuerdo a lo expresado en la definición, podemos decir que en un contrato de fianza intervienen:

1. **Documento fuente**. Es un instrumento en donde consta la obligación principal que se va a garantizar, dando origen o existencia a la fianza.

2. **Contrato solicitud**. Es un instrumento jurídico cuya finalidad es regular las relaciones del fiado y de sus obligados solidarios, frente a la afianzadora. Mediante la firma de este contrato se compromete el patrimonio del fiado y de sus obligados solidarios, cumpliendo así que la afianzadora tenga suficientemente garantizada la recuperación y pueda comprobar en cualquier momento las garantías que cuenten, cualquiera que sea el monto de las responsabilidades que contraigan mediante el otorgamiento de fianzas.

3. **Póliza**. Documento en el que se hace constar por escrito los términos y alcances de garantía que la afianzadora otorga al acreedor.

4. **Prima**. Es el pago que se compromete a realizar el fiado a la afianzadora, a cambio de realizar el contrato de una fianza.

5. **Intermediario o Agente**. Persona física o moral que contacta al fiado con la afianzadora a cambio de una remuneración (comisión), por la prestación de sus servicios.

6. **Acreedor o Beneficiario**. Es la persona física o moral que se verá favorecida en caso de incumplimiento del fiado, a través del pago que le efectúe la afianzadora como fiador.

7. **Afianzado o Fiado**. Es la persona que solicita la fianza para garantizar el cumplimiento de la obligación que ha contraído.

8. **Afianzadora o Fiador**. Es la persona que se compromete a respaldar al deudor o fiado en caso del incumplimiento de éste.

9. **Obligado Solidario**. Es la persona física o moral que se responsabiliza ante la afianzadora de hacer frente al compromiso que adquiere el fiado ante el beneficiario.

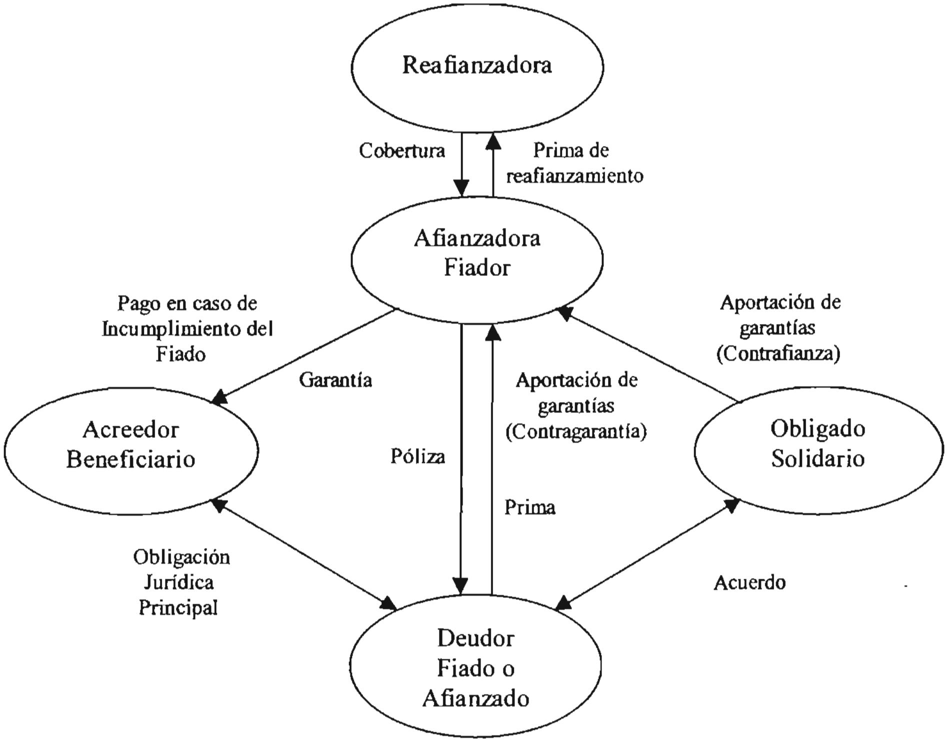
10. **Monto Afianzado**. Es el límite de responsabilidad que tiene la afianzadora y que se encuentra previsto en el contrato, en caso de presentarse la reclamación de la fianza.

11. **Garantía de Recuperación o Contragarantía**. Es el respaldo que por ley debe solicitar la institución de Fianzas, al suscribir la fianza correspondiente para respaldar el costo de las obligaciones en caso de que este incumpla.[2]

12. **Reafianzadora**. Es una institución legalmente autorizada (afianzadoras, aseguradoras y reaseguradoras) que se compromete, mediante el pago de una prima por parte de la afianzadora a tomar a su cargo parte del riesgo asumido directamente por la afianzadora en un contrato de fianza.

Los personajes jurídicos y su interdependencia los podemos presentar en el siguiente diagrama:

[2] El Artículo 22 de la LFIF menciona que "Las fianzas de fidelidad y las que se otorguen ante las autoridades judiciales del orden penal podrán expedirse sin garantías suficientes ni comprobables, exceptuando de esta regla a las fianzas penales que garanticen la reparación del daño y las que se otorguen para que obtengan su libertad provisional los acusados o procesados por delitos en contra de las personas en su patrimonio, pues en todos estos casos será necesario que la institución obtenga garantía suficiente y comprobable".



1.5 OPERACIÓN DE LA FIANZA

Cada fianza se cuantifica de acuerdo al monto de la obligación que específicamente se garantice y en consecuencia, no podrá ser reclamada por el acreedor por una suma mayor; en cambio, es susceptible de ser cubierta por la afianzadora íntegra o parcialmente según el grado de cumplimiento de la obligación por parte del fiado.

La extinción de la obligación principal (convenio entre deudor y acreedor) produce la de la fianza en forma automática.

Puede ser objeto de afianzamiento cualesquiera obligaciones de tipo mercantil, fiscal, administrativo y judicial, así como las relacionadas a la fidelidad de los empleados al servicio de una empresa y otras de carácter civil.

Para que una fianza pueda otorgarse es indispensable que legal y técnicamente, la empresa afianzadora tenga la certeza de que la obligación a garantizar se va a cumplir o ya se cumplió y que exista la posibilidad plena de recuperar lo que eventualmente tenga que pagar al acreedor (beneficiario) por falta o incumplimiento del deudor (fiado).

Por ello, la fianza de empresa debe otorgarse sólo cuando al solicitante de ella posea solvencia moral y económica comprobada, superior al importe de la obligación que por él se debe garantizar. De otra manera debe exigírsele la firma de uno o varios obligados solidarios.

1.6 GARANTÍAS DE RECUPERACIÓN O CONTRAGARANTIAS

Estas garantías representarán la recuperación de la afianzadora en el momento de que haya incumplido de la obligación jurídica principal y que son necesarias para la emisión de la póliza, cuya principal función es asegurar que la afianzadora cuente con los elementos suficientes para resarcirse de las reclamaciones procedentes pagadas, cualquiera que sea el monto de las responsabilidades que contraiga mediante el otorgamiento de fianza,[3] de esto depende en gran medida su solidez y estabilidad.

Conforme al Artículo 24 de la Ley Federal de Instituciones de Fianzas, las garantías de recuperación que las afianzadoras están obligadas a obtener pueden ser:

I. Prenda, hipoteca o fideicomiso;
II. Obligación solidaria;
III. Contrafianza; o
IV. Afectación en garantía.

También menciona que no se requerirá recabar la garantía de recuperación respectiva, cuando la institución de fianzas considere bajo su responsabilidad, que el fiado o sus obligados solidarios, sean ampliamente solventes y tengan suficiente capacidad de pago.

Las garantías de recuperación mencionadas anteriormente se pueden dividir en:

1. Garantías Personales.
2. Garantías Reales.

1.6.1 Garantías Personales

Este tipo de garantías surge cuando una o más personas se obligan al mismo tiempo que el deudor principal a garantizar el cumplimiento de la obligación. Asimismo, aumentan la posibilidad de pago al agregar otro patrimonio, a los del deudor.

---
[3] Artículo 19 de la LFIF.

Dentro de este tipo de garantías se encuentran:

1. **Obligación Solidaria**. Consiste en la obligación que una tercera persona moral o física, diferente del fiado, asume ante la institución afianzadora, solidarizándose con el fiado en la misma medida y términos de la obligación de éste último, es decir, se obliga a reembolsar a la afianzadora las cantidades que pague en caso de reclamación, sus intereses y otros aspectos que se pacten, así como los honorarios y gastos que se causen con motivo de la recuperación de garantías, comprometiendo para ello su patrimonio.

   Pueden constituirse dos o más obligados solidarios dependiendo del monto y riesgo de la fianza. En este caso, no se trata de diversas obligaciones, sino de una sola, cuyo cumplimiento puede exigirse a todos los obligados solidarios o a cualquiera de ellos.

2. **Contrafianza (Doble fianza).** Cuando una empresa extranjera debe garantizar el cumplimiento de una obligación en territorio mexicano solicita a una empresa afianzadora o de seguros extranjera (normalmente de su país de origen), la expedición de una fianza que garantice a una institución de fianzas mexicana el pago que ésta tuviera que realizar en caso de reclamación.

   La institución extranjera que emita la fianza respaldando la expedida en territorio nacional deberá estar inscrita en la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, quien establece lineamientos especiales para ello.

La Ley Federal de Instituciones de Fianzas en su Artículo 30, establece que la garantía que consista en obligación solidaria o contrafianza se aceptará cuando el obligado solidario o el contrafiador comprueben ser propietarios de bienes raíces o establecimiento mercantil, inscritos en el Reglamento Público de la Propiedad y de Comercio.

En todo caso, el monto de la responsabilidad de la institución no excederá del 80% del valor disponible de los bienes.

1.6.2 Garantías Reales

La seguridad la otorgan ciertos bienes del deudor, cuyo valor se encuentra específicamente afectado para el pago de determinada deuda. Son garantías reales los contratos de:

1. **Prenda**. Es un contrato por medio del cual, el deudor afecta un bien enajenable con el derecho real de prenda, para garantizar al acreedor el cumplimiento de una obligación y su preferencia en el pago.

La prenda consiste en efectivo o en valores, cualquiera que sea el monto de la fianza.[4]

2. **Hipoteca**. Es el contrato por medio del cual el deudor o un tercero concede a un acreedor el derecho a realizar el valor de un determinado bien enajenable, sin entregarle la posesión del mismo, para garantizar con su producto el cumplimiento de una obligación y su preferencia en el pago.

   Esta garantía deberá constituirse sobre bienes valuados por instituciones de crédito o sobre la unidad completa de una empresa industrial, caso en el que se comprenderán todos los elementos materiales, muebles o inmuebles afectos a la explotación, considerados en su conjunto, incluyendo los derechos de crédito a favor de la empresa.[5]

3. **Fideicomiso**. El fideicomiso es un contrato por medio del cual, una persona llamada fideicomitente, destina ciertos bienes a un fin licito determinado, encomendando la realización de ese fin a una institución fiduciaria, en beneficio del fideicomitente mismo o de un tercero que se conoce como fideicomisario.

   El fideicomiso sólo se aceptará como garantía cuando se afecten bienes o derechos presentes no sujetos a condición. En lo conducente, se aplicarán al fideicomiso las proporciones y requisitos exigidos por la Ley para las demás garantías.[6]

4. **Afectación en Garantía**. La institución de fianzas podrá afectar en garantía bienes inmuebles propiedad del fiado, del obligado solidario o de ambos en los casos siguientes:[7]

   - Cuando la fianza sea muy cuantiosa.
   - Cuando el fiado u obligado solidario no reúnan garantías al dos por uno, es decir, cuando el valor estimado de las garantías no sea por lo mismo el doble del costo de la obligación contraída.
   - En la expedición de fianzas penales y de crédito.

Como se ha expuesto, la calidad de las garantías esta determinada básicamente por la liquidez de las mismas, la cual depende de una correcta valuación del bien y del cuidado que se tenga en verificar la situación financiera y legal de éstas, asegurándose de que no existan gravámenes.

[4] Véase Artículo 26 de la LFIF.
[5] Artículo 28 de la LFIF.
[6] Artículo 29 de la LFIF.
[7] Véase Artículo 31 de la LFIF.

Por ello la necesidad de ponderar el valor de las mismas con un factor, el cual refleje exactamente su calidad y que incluya la liquidez como parámetro básico.

Estos factores aparecen en la siguiente tabla, difundida por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas en la circular F-1.2.3.

Tabla de Calificación de Garantías de Recuperación

Tipo de Garantía	Factor de Calificación de Garantías γ
Fianzas de Fidelidad y Judiciales que se ubiquen en los supuestos del Artículo 22 de la LFIF.	1.00
Carta de crédito de Instituciones Bancarias Mexicanas y de Instituciones Bancarias del Extranjero con calificación mayor o igual a la de las Instituciones Bancarias Mexicanas.	1.00
Prenda de Depósitos en Intermediarios Financieros Autorizados de Renta Fija.	1.00
Contrafianza de Instituciones del Extranjero con calificación mínima de A y registradas ante la SHCP.	1.00
Manejo Mancomunado de Cuentas Bancarias.	1.00
Fideicomisos otorgados o celebrados en Valores aprobados por la CNBV como objeto de inversión.	0.75
Prenda de Valores aprobados por la CNVB como objeto de inversión.	0.75
Hipoteca	0.75
Afectación en Garantías	0.75
Fideicomiso de Garantía Inmobiliaria.	0.75
Contrato de indemnidad de Empresa del Extranjero con calificación de valores.	0.75
Fideicomisos otorgados o celebrados en Otros Valores.	0.50
Prenda de otros valores	0.50
Fideicomisos otorgados o celebrados en Bienes Muebles.	0.50
Prenda de bienes Muebles.	0.50
Análisis financiero de Estados Financieros actualizados y debidamente firmados con Capital Contable suficiente para cubrir las responsabilidades asumidas.	0.40
Ratificación de firmas.	0.35
Presentación de Estados Financieros actualizados y debidamente firmados con Capital Contable suficiente para cubrir las responsabilidades asumidas o relación patrimonial verificada de personas físicas.	0.25
Consulta al sistema de garantía con suficiencia.	0.10
Fianzas No Garantizadas.	0.00

1.7 VIDA DE LA FIANZA

La operación de una fianza inicia con el momento en que esta se expide, a partir de este momento inicia un periodo durante el cual la fianza habrá de estar vigente.

Posteriormente a la expedición de una fianza se puede dar otras operaciones derivadas, tales como son:

- **Anulación**. Es decir que la obligación garantizada no se vaya a realizar, en cuyo caso el beneficiario de la misma deberá comunicarlo así a la afianzadora.

- **Prórroga**. Sólo podrá aceptarse, cuando los beneficiarios concedan a los fiados mayor tiempo para el cumplimiento de sus obligaciones o ampliación de plazos para el pago de sus adeudos y siempre que la afianzadora, en uno u otro caso dé su consentimiento por escrito, entregando un documento de prórroga así como el recibo correspondiente.

- **Renovación**. Transcurrida la primera anualidad pagada por prima inicial y derechos de una fianza de vigencia no definida, el solicitante está obligado a pagar por el siguiente año la suma correspondiente por concepto de renovación (prima y derechos) a la presentación del recibo que la afianzadora realice.

- **Cancelación**. Es la extinción de la obligación garantizada:

  a) Por devolución de la póliza original, por parte del cliente o del beneficiario.
  b) Por cancelación automática.
  c) Por autorización escrita del beneficiario.
  d) Por comprobación del cumplimiento de la obligación garantizada por parte del fiado.

CAPÍTULO 2

CLASIFICACIÓN DE LAS FIANZAS

En México, por necesidades del desarrollo de la actividad económica y social, se ha presentado la necesidad de afianzamiento, lo cual ha propiciado que la fianza de empresa represente un papel fundamental como apoyo para el buen éxito de las operaciones mercantiles, profesionales, industriales y de servicios en general.

Como consecuencia de esto y para dar un manejo administrativo de la fianza de empresa, las operaciones de fianzas están clasificadas y organizadas en ramos y subramos, establecidos en el Artículo 5 de la Ley Federal de Instituciones de Fianzas.[1]

Dada la multiplicidad de obligaciones que pueden ser garantizadas por las fianzas en este capítulo se analizara dichos ramos y subramos, incluyendo sus características generales y los tipos de fianzas que generalmente son practicados en el mercado.

2.1 RAMOS Y SUBRAMOS DE FIANZAS

Con el propósito de dar una visión completa de los ramos y subramos practicados en el sector afianzador mexicano, se analizará cada una de las siguientes fianzas:

I. Fianzas de fidelidad.

II. Fianzas judiciales.

III. Fianzas administrativas.

IV. Fianzas de crédito.

V. Fideicomisos de Garantía.

---

[1] Publicada en el Diario Oficial de la Federación el 16 de enero de 2002.

Con la característica de que el ramo V, Fideicomisos de Garantía es una operación que pueden realizar las afianzadoras en forma adicional a las operaciones de fianzas, no obstante es establecida como ramo en la Ley.[2]

2.2 RAMO I. FIANZAS DE FIDELIDAD

Las fianzas de fidelidad son un instrumento que garantizan las responsabilidades pecuniarias por hechos que provengan de conductas delictuosas de uno o de varios empleados contra los bienes del patrón o de otros que éste le haya confiado y de los cuales sea responsable jurídicamente, cometiendo delitos de infidelidad patrimonial como son: robo, fraude, abuso de confianza o peculado, teniendo la característica de que es la única que es solicitada y pagada por el beneficiario.

Para este ramo no se requiere comprobación de solvencia económica (garantías), sino únicamente moral por parte de los fiados.[3]

2.2.1 Subramo 1. Individuales

Garantiza la reparación del daño ocasionado por un solo empleado ya sea administrativo o de ventas, cometiendo el delito de robo, fraude, abuso de confianza o peculado, ejecutado en perjuicios del patrón y sus bienes o aquellos que le hayan sido confiados.

Características Generales

- Afianza a empleados con más riesgo de incurrir en algún delito, por la función que desempeña.
- No se requiere garantías de respaldo o recuperación.
- Tiene un alto costo administrativo.
- Se otorga una póliza para cada uno de los empleados sujetos a riesgo.
- Generalmente se aplica deducibles a la cobertura básica.

Teniendo los siguientes tipos de fianzas:

Individual para Personal Administrativo. Garantiza las responsabilidades de un solo empleado cuya actividad sea esencialmente de índole administrativo.

Individual para Vendedores. Garantiza las responsabilidades de un solo empleado que circunstancialmente realice actividades de venta de productos o servicios.

[2] Véase Artículo 16 fracción XV de la LFIF.
[3] Véase Artículo 22 de la LFIF.

Individual para Agentes de Seguros y de Ventas. Garantiza las responsabilidades de un solo empleado en ese puesto especifico.

2.2.2 Subramo 2. Colectivas

Garantiza la reparación del daño ocasionado por varios empleados ya sean administrativos o de ventas, cometiendo el delito de robo, fraude, abuso de confianza o peculado, ejecutado en perjuicios del patrón y sus bienes o aquellos que le hayan sido confiados.

Características Generales

- Tiene un monto único y global para todos los empleados.
- Puede rotarse el personal sin modificar la póliza. No se hacen movimientos de altas o bajas, sólo se hacen ajustes anuales.
- Se pueden incluir a los empleados de las filiales o sucursales.
- En caso de reclamación se puede restablecer el monto de la fianza.

El sector afianzador maneja pólizas mucho más practicas como son:

Fianza de Cédula. Garantiza el pago del daño patrimonial propiciado por un grupo de empleados administrativos o de ventas, con montos individuales diferentes indicados por el beneficiario.

En este tipo de fianza, se expide una sola póliza para varios empleados, la cual tiene una vigencia común, además de tener la opción de imponer un deducible.

Fianza Global. Garantiza el pago del daño patrimonial propiciado por uno o varios empleados administrativo de una empresa, siendo obligación del beneficiario incluir a todo su personal en este puesto especifico.

Para estas fianzas, el personal que ingrese queda automáticamente afianzado, el monto es el mismo para todo el personal siendo de carácter no acumulativo y se tiene la opción de imponer un deducible.

Fianza Combinada. Garantiza el pago del daño patrimonial propiciado por uno o varios empleados administrativos o de ventas de una empresa.

En este tipo de fianzas, la póliza contiene un tope máximo a pagar en caso de reclamación múltiple, opera con un deducible, cuenta con un monto individual que puede ser igual o diferente, además existe la reinstalación del monto sobre el tope máximo a pagar.

Fianza de Monto Unico para Vendedores. Garantiza el pago del daño patrimonial que pueda causar uno o varios vendedores, comisionistas o personal que desarrolle actividades similares de una empresa siendo obligación del beneficiario incluir a todo su personal es este puesto especifico.

Para esta fianza, el monto es de carácter no acumulativo y opera con un deducible sobre pérdidas.

Fianza Global de Responsabilidad Limitada. Garantiza el pago del daño patrimonial propiciado por los empleados, ya sean administrativos o de ventas (según sea el caso) de una empresa, agrupados en tres diferentes niveles de responsabilidad, es decir, según el nivel de riesgo en que estén comprendidos.

En este tipo de fianza, el pago de las reclamaciones se efectúan según el nivel en que se encuentre el afianzado y no se incluye a obreros.

Fianza Global por Estratos. Garantiza el pago del daño patrimonial propiciado por todo el personal administrativo o de ventas (según sea el caso) de una empresa, agrupada en tres estratos integrados con tres montos globales independientes, conservando entre sí una proporción determinada del monto afianzado total, es decir, la contratación es por un monto general, dividido en tres montos globales independientes a saber.

Para estas fianzas, el pago de las reclamaciones se efectúa según el estrato a que correspondan y no se incluye a obreros.

Fianza Global de Obreros. Garantiza el pago del daño patrimonial propiciado por el personal obrero de una empresa.

Fianza de Exceso a la Global. Se expide para cubrir responsabilidades de aquellos empleados que representan un riesgo mayor al de todos los demás (tesoreros, cajeros o administradores).

En estas fianzas, se tiene un monto especifico para él o los empleados a quienes se les contrata esta cobertura, por lo tanto, esta cobertura se traduce en una fianza Individual o de Cédula con sus características particulares.

Coberturas Adicionales

Con el propósito de que se dé una mayor diversificación de las responsabilidades las instituciones de fianzas pueden operar coberturas adicionales para las Fianzas de Fidelidad, las cuales son solicitadas por instrucciones del beneficiario, según sus necesidades.

Cobertura de Tarjeta de Crédito Empresarial. Garantiza el pago de daño patrimonial que se cause por delitos cometidos por empleados derivados del mal manejo de tarjetas de crédito empresarial.

Considerando que el monto será del 50% de la cobertura básica, realizándose la contratación de este documento desde el inicio de la vigencia de dicha cobertura y es necesario dar a conocer las políticas de uso de la tarjeta.

Cobertura de Exceso de Pérdida. Cubre el exceso de pérdida sobre el monto afianzado de la cobertura básica en un solo evento, siempre y cuando una sola reclamación exceda hasta 50% del monto afianzado de dicha cobertura.

En esta cobertura se rehabilita sólo el monto de la cobertura básica, realizándose la contratación desde el inicio de dicha cobertura, operando en Fianzas Global y Monto Unico para Vendedores.

Cobertura de Incremento Automático de Monto. Para esta, el monto de la fianza será incrementado periódicamente y en forma automática de acuerdo con el porcentaje fijado por el cliente, este porcentaje esta acorde al valor del bien en el futuro y aplicado sobre el monto de la cobertura básica.

Se realiza su contratación desde el inició de la cobertura básica y opera en las Fianzas Individuales, Cédula, Global, Combinada y Monto Unico para Vendedores.

2.3 RAMO II. FIANZAS JUDICIALES.

Las fianzas judiciales son aquellas que se originan por asuntos ventilados ante los diversos juzgados, garantiza las responsabilidades de los daños y perjuicios que pudiera ocasionarse a la parte contraría y a terceros con motivo de la interposición de un juicio por parte del fiado. También garantiza la libertad de personas sujetas a proceso.

Todas las fianzas judiciales se expiden ante el juzgado que está llevando el juicio, quien fungirá como beneficiario.

Para este ramo, se requiere de la presentación de garantías suficientes y comprobables, a excepción de las Fianzas Judiciales que Amparan a los Conductores de Vehículos Automotores.[4]

[4] Véase Artículo 22 de la LFIF.

2.3.1 Subramo 1. Penales

Garantiza la libertad de personas sujetas a proceso. Tienen por objeto evitar que el reo evada la acción de la justicia cuando obtiene el derecho a disfrutar de la libertad provisional, condicional, preparatoria, etc.

Características Generales

- Siempre se otorga ante un Juez o Tribunal Judicial en materia Penal.
- La fianza se extingue cuando el Juez dicta la sentencia.
- No se puede afianzar personal que haya cometido actos relacionados con delitos sexuales y homicidio calificado, que atenten contra la libertad de las personas, contra la seguridad de la nación o contra la salud.

Dentro de este ramo encontramos las fianzas de:

Libertad provisional. Garantiza la presentación del acusado ante la autoridad judicial, durante el procedimiento penal, es decir, que el fiado no se sustraiga de la justicia una vez que ha obtenido su libertad provisional, en el lapso que dure el proceso y se dicte la sentencia correspondiente.

Las fianzas de este tipo, a su vez se clasifican en:

- Homicidio.
- Patrimonial.
- Fuero militar.
- Contrabando.
- Delitos imprudenciales.
- Delitos contra la salud.
- Reparación del daño.
- Arraigo domiciliario.
- Interés social.

Libertad Preparatoria. Después de que el procesado ha cumplido un porcentaje de la pena de prisión impuesta en su sentencia puede existir la posibilidad de obtener su libertad. Esta fianza garantiza que el fiado, al obtener su libertad preparatoria, se presente ante la autoridad judicial correspondiente por el tiempo restante de la sentencia, cuantas veces sea requerido.

Libertad Condicional. Se otorga para que una persona obtenga su libertad al existir una sentencia condenatoria. Garantiza que el acusado se presente ante la autoridad cada vez que ésta lo requiera.

Reparación del Daño. Garantiza el resarcimiento de los daños y perjuicios ocasionados por la comisión de un delito.

Sanción Pecuniaria. Garantiza el pago de una multa de tipo administrativo y la reparación del daño, que se deriven de un procedimiento penal que se siga en contra del fiado y que se hará efectiva si se emite una resolución en su contra.

2.3.2 Subramo 2. No Penales

Son las que tienen como objeto garantizar, que alguna persona que resulte culpable en un proceso judicial, pueda cumplir con la sentencia definitiva ya sea a favor o en contra, para que de esta forma se puedan resarcir los daños a la persona perjudicada, es decir, garantiza el pago de los daños y perjuicios que pudieran ocasionarse a la parte contraria y a terceros, en procedimientos judiciales.

Características Generales

- Solo pueden ser exigidas por autoridades judiciales en materia civil, mercantil y laboral.
- El monto afianzado es simplemente determinado por el Juez competente.

Dentro de este subramo, podemos mencionar las siguientes modalidades:

Divorcios para Pagos de Pensión Alimenticia. Garantiza el pago de la pensión alimenticia a favor de aquellos que tienen el derecho de exigirla por ley a través de un mandato judicial o convenio entre las partes divorciantes.

Embargo Precautorio. Garantiza los posibles daños y perjuicios que se pudieran ocasionar al deudor por el acreedor en la práctica de un embargo.

Sustitución de Embargo. Garantiza los posibles daños y perjuicios que se pudieran generar al solicitar la sustitución de un embargo por una fianza a favor del acreedor original.

Amparo. Garantiza los posibles daños y perjuicios que se pudieran ocasionar por la suspensión provisional o definitiva de una sentencia civil, mercantil, penal, fiscal o laboral.

Desempeño de Sindico, Interventor, Gestor Judicial o Albacea. Garantiza al fiel desempeño y manejo que realizan los fiados en su calidad de Sindico, Interventor, Gestor Judicial o Albacea respecto del patrimonio que se les encomienda.

2.3.3 Subramo 3. Judiciales que Amparen a los Conductores de Vehículos Automotores

Estas fianzas surgen con la necesidad de garantizar las obligaciones del afianzado, derivadas de actos de responsabilidad civil por daños a terceros, en accidentes automovilísticos.

Características Generales

- No necesita de garantías de Recuperación.
- Debe existir un contrato de Seguros de Automovilista con cobertura por Responsabilidad Civil.
- Estas fianzas se conocen como Proliber.

2.4 RAMO III. FIANZAS ADMINISTRATIVAS

Las fianzas administrativas garantizan cualquier obligación que se derive de contratos, leyes o de contenido económico, celebrada entre un particular (fiado), persona física o moral, y una entidad de la Administración Pública Federal (beneficiario), es decir, que el gobierno federal es el principal consumidor de este ramo, el cual es el más amplio por la diversidad de conceptos afianzables, sin más limitación que observar la validez y legalidad de la obligación por garantizar.

Para este ramo, se debe exigir Garantías de Recuperación, suficientes y comprobables.

2.4.1 Subramo 1. De Obra

Este ramo tiene por objeto garantizar concursos o licitaciones, anticipos, cumplimientos, vicios ocultos y buena calidad establecidos en los contratos de obra, principalmente en la industria de la construcción.

Características Generales

- Garantiza obligaciones derivadas de contratos de obra celebrados.
- Los fiados solicitantes son: fabricantes, constructores, proveedores, proyectistas, etc.
- Los beneficios son por lo regular Secretarias de Estado, Organismos Públicos Descentralizados o Empresas Particulares.

2.4.2 Subramo 2. De Proveeduría

Dentro de estas fianzas encontramos, aquellas que tienen como objeto garantizar concursos o licitaciones, anticipos, cumplimientos y buena calidad de los diferentes pedidos o contratos que en su momento se les soliciten a los distintos proveedores.

Características Generales

- Garantiza obligaciones derivadas de caso toda clase de contratos mercantiles.
- Se cancelan cuando el beneficiario, contraparte del contrato, lo autoriza.

A continuación se mencionan diferentes tipos de fianzas que se expiden ante estos dos grupos para garantizar distintas obligaciones:

Concurso o Licitación. Garantiza el sostenimiento de la oferta que el participante hace al que convoca al concurso, mediante presentación de presupuesto y cotizaciones que en caso de ganar, no rehusará celebrar el contrato.

Anticipo. Garantiza la debida inversión y amortización del anticipo que el contratista o proveedor reciba para ejecutar la obra o compra de materia prima o equipo que vaya a necesitar para cumplir con el contrato, siendo la obligación de la afianzadora el pago de lo que hubiera dejado de invertir el fiado, ya sea total o parcialmente.

Cumplimiento. Garantiza el cumplimiento por parte del fiado de las obligaciones derivadas del contrato que celebra con el beneficiario de la fianza en cuanto a tiempo de entrega, usando exactamente los materiales indicados o bien, en caso de pedidos, los equipos contratados, con las especificaciones exigidas.

Buena Calidad. Garantiza la buena ejecución o calidad de los trabajos ejecutados, o de los equipos suministrados en caso de que aparecieren defectos de construcción de mano de obra, o mala calidad de materiales empleados, comprometiéndose el fiado a repararlos; en caso contrario, se hará exigible la fianza.

2.4.3 Subramo 3. Fiscales

Las Fianzas Fiscales garantizan las obligaciones fiscales de particulares (persona moral o física) frente al Estado en su carácter de fisco o titular de la Secretaria de Hacienda y Crédito Publico.

Características Generales

- El beneficio es la Tesorería de la Federación, Autoridades Hacendarías Estatales, Municipales, o el Instituto Mexicano del Seguro Social.
- Los fiados son los contribuyentes en general (personas físicas o morales, cualquiera que sea el giro de su actividad económica).

Dentro de este tipo de fianzas se encontráran las siguientes:

Inconformidad. Garantiza el pago del posible adeudo fiscal de que el fiado es requerido y por el cual ha presentado su inconformidad, que en el caso de no proceder, deberá liquidar con los recargos correspondientes.

Convenios de Pago en Parcialidades. Garantiza el pago del adeudo fiscal existente en parcialidades (mensuales, bimestrales, trimestrales, etc.) incluyendo los posibles recargos o intereses del crédito requerido.

Devolución del IVA. Garantiza el retorno del pago del Impuesto al Valor Agregado devuelto al causante, en caso de que el cálculo fuera incorrecto y no tuviera derecho a dicha devolución.

Importación Temporal de Vehículos (Programa Paisano). Garantiza el retorno al país de origen del vehículo que ingresó temporalmente a territorio mexicano.

Clausura. Garantiza el posible interés fiscal de cinco años anteriores, provenientes del aviso o baja de obligaciones así como los recargos que se puedan derivar por tal motivo.

Subvaluación de Mercancías. Garantiza las diferencias que resulten de las contribuciones y demás impuestos aplicables, entre el precio estimado por la autoridad aduanera y el valor declarado por el importador en el pedimento de importación.

2.4.4 Subramo 4. De Arrendamiento

Tiene por objeto garantizar el exacto cumplimiento del pago de las rentas mensuales derivado del alquiler de bienes muebles (maquinaria o equipo) o inmuebles (casa habitación, local comercial, terreno o nave industrial), durante el tiempo que el arrendador convenga con el fiado, teniendo la posibilidad de garantizar otros conceptos como las cuotas de mantenimiento, administración y servicios.

Características Generales

- Garantiza el cumplimiento, en tiempo y forma, de las rentas establecidas en un contrato de arrendamiento.
- Se afianzan rentas derivadas del arrendamiento de: bienes muebles (maquinaria o equipo) o bienes inmuebles (casa- habitación, local comercial, terreno o nave industrial).

- Adicionalmente se puede garantizar adeudos por concepto de luz, agua, gas teléfono, etc., y cualquier daño, siempre y cuando esté contemplado en el contrato principal.
- Generalmente su cancelación es automática, posterior al término del contrato.

2.4.5 Subramo 5. Otras Fianzas Administrativas

Son en general todas aquellas fianzas cuyas características pueden ser diferentes a las citadas con anterioridad.

Dentro de éstas, las fianzas más frecuentes son:

Boletaje. Garantiza el buen manejo del boletaje encomendado por las aerolíneas para su comercialización a las agencias de viajes con base en el contrato de comisión mercantil que celebran.

Sorteos y Rifas. Garantiza que el bien físico o monetario se haga realmente efectivo, en la fecha estipulada del sorteo, entregándolo al premiado en el evento, respondiendo, en caso contrario la afianzadora.

Condóminos. Garantiza el pago de las cuotas de mantenimiento, administración y servicios.

Concesiones, Licencias o Permisos. Garantiza el cumplimiento de las obligaciones impuestas al concesionario por quien otorga la concesión (gobierno o particulares), es decir, garantiza el buen desarrollo de la actividad que le ha sido autorizada con base en las normas establecidas.

2.5 RAMO IV. FIANZAS DE CRÉDITO

Son aquellas que garantizan, en fechas determinadas establecidas bajo contrato, el pago del crédito otorgado por la compra de bienes y servicios, o bien, del financiamiento obtenido a través de distintos beneficiarios.

El monto de la fianza será por el 100% del crédito obtenido por el fiado, cobrándose por anticipado el período completo por el que durará el adeudo y pudiéndose negociar deducibles con el beneficiario en caso de presentarse una reclamación.

Al igual que para el Ramo III, en las Fianzas de crédito es necesario que la institución afianzadora obtenga garantías suficientes y comprobables, para su expedición.

Características Generales

- No se garantizan créditos directos.
- El fiado puede ser una persona física o moral.[5]
- El beneficiario debe estar constituido como persona moral.
- No se pueden afianzar operaciones con efectos retroactivos.
- Toda operación afianzada debe estar por escrito.

2.5.1 Subramo 1. Suministro

Tienen como objeto garantizar el pago de productos suministrados en los plazos consignados en el contrato respectivo.

Características Generales

- Garantizan los créditos que otorga PEMEX por la entrega de productos derivados de la petroquímica, gas, grasas y solventes.
- El beneficiario en todos los casos es PEMEX.

Dentro de este subramo se encuentran:

Suministro Gas. Garantiza el pago de los productos suministrados por PEMEX Petroquímica Básica (beneficiario), a los Distribuidores de Gas (fiados), hasta por el importe equivalente a la Línea de Crédito individual fijada por Petróleos Mexicanos y/o PEMEX Petroquímica a cada Distribuidor de Gas expresada en el contrato celebrado entre éstos.

Suministro Refinación. Garantiza el pago de los productos suministrados por PEMEX Refinación (beneficiario), a los Distribuidores (fiados), de éstos hasta por el importe equivalente a la Línea de Crédito individual fijada por Petróleos Mexicanos y/o PEMEX Refinación a cada Distribuidor expresada en el contrato celebrado entre éstos.

Suministro de Lubricantes. Garantiza el pago de los productos suministrados por Mexicana de Lubricantes MEXLUB (beneficiario), a los Distribuidores de esos productos (fiado), hasta por el importe equivalente a la Línea de Crédito individual fijada por MEXLUB y/o PEMEX a cada Distribuidor expresada en el contrato celebrado entre éstos.

Suministro Petroquímica Secundaria. Garantiza el pago de los productos suministrados por PEMEX Petroquímica Secundaria (beneficiario), a los Distribuidores de sus productos (fiado), hasta por el importe equivalente a la Línea

[5] Cuando el fiado sea persona física deberá contar adicionalmente con un seguro de vida a favor de la institución de fianzas, que cubra cuando menos el saldo insoluto, así como la temporalidad del crédito (véase Circular F-20.1, 17-mayo-2000 del Anexo I).

de Crédito individual fijada por Petróleos Mexicanos y/o PEMEX Petroquímica Secundaria y cada Distribuidor expresada en el contrato celebrado entre éstos.

Suministro para Estaciones de Servicio. Garantiza el pago de los productos suministrados por PEMEX Refinación (beneficiario), a las Estaciones de Servicio (fiados), hasta por el importe equivalente a la Línea de Crédito individual fijada por Petróleos Mexicanos y/o PEMEX Refinación a cada Distribuidor expresada en el contrato celebrado entre éstos.

2.5.2 Subramo 2. Compraventa

Estas fianzas tienen como objeto el garantizar el pago del crédito otorgado en operaciones para la adquisición de bienes o servicios, así como el pago de mercancía otorgada a proveedores de bienes y servicios y empresas manufactureras en general.

Características Generales

- Se pueden garantizar operaciones únicas, es decir una sola venta de mercancías.
- Se pueden garantizar operaciones revolventes, diversas ventas durante un periodo determinado.
- Su cancelación es automática, de acuerdo al término establecido en la póliza.

En este subramo se encuentran:

Compraventa de Bienes y Servicios o de Distribución Mercantil. Garantiza el pago derivado de operaciones de compra-venta de bienes y servicios de acuerdo a los plazos establecidos en el contrato de compraventa o de distribución mercantil.

Crédito para la Adquisición de Activos Fijos o Bienes de Consumo Duradero. Garantiza el pago del crédito otorgado para la adquisición de activos fijos o bienes de consumo duradero.

2.5.3 Subramo 3. Financieras

Las Fianzas Financieras tienen como objeto garantizar el pago derivado de crédito respaldado con certificados y bonos de prenda, así como créditos otorgados por instituciones financieras para la exportación e importación de bienes y servicios.

Características Generales

- Está enfocado principalmente a la empresa e industria.

- Las operaciones crediticias a afianzar deberán estar autorizadas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV).
- Los títulos a garantizar deberán estar inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios.
- Los beneficiarios de esta fianza pueden ser tanto personas físicas como personas morales particulares.

En este subramo se encuentran los siguientes tipos de fianzas:

Factoraje Financiero. Garantiza el pago del crédito cuando se realiza compra de cartera vigente de alguna empresa, anticipando un porcentaje de la cartera vencida. Es un medio para obtener liquidez para las compañías.

Crédito para el Apoyo a la Micro y Pequeña Empresa. Garantiza el pago de créditos derivados de programas especiales de apoyo a al micro y pequeña empresa que ejecuten las Instituciones Nacionales de Crédito.

Importaciones y Exportaciones. Garantiza el pago de los créditos que le son otorgados a los fiados por instituciones financieras, generalmente bancos, para efectuar operaciones mercantiles a través de la importación o exportación de bienes o servicios.

Arrendamiento Financiero. Garantiza el pago de las rentas no cubiertas por el fiado en un convenio de arrendamiento financiero, es decir, un contrato de arrendamiento al final del cual el arrendatario tiene el derecho de comprar el bien a un precio que deberá ser menor al valor del mercado, o bien volver a rentar el bien a cambio de una renta menor a la originalmente pactada.

2.5.4 Subramo 4. Otras Fianzas de Crédito

Son todas aquellas fianzas de crédito cuyo objeto y características son diferentes a las mencionadas anteriormente.

Dentro de este tipo de fianzas se encuentran las siguientes:

Pago de Distribuidores. Garantiza a las empresas que utilizan distribuidores, como medio de comercialización, el pago de la mercancía en venta.

Pagos de Servicios Médicos y Hospitalarios. Garantiza el pago de los servicios médicos otorgados por hospitales, en caso de que el fiado (paciente) no lo realice.

2.6 RAMO V. FIDEICOMISOS DE GARANTÍA

Los Fideicomisos de Garantía son contratos en los que la institución de fianzas, es nombrada fiduciaria en un fideicomiso de garantía el cual podrá estar o no relacionada con las pólizas de fianzas que la afianzadora expida.[6]

Los objetivos de este ramo de fianzas son:

a) Que el fiduciario reciba y mantenga la propiedad fiduciaria del patrimonio fideicomitido, permitiendo al depositario el uso y el goce de los bienes muebles e inmuebles fideicomitidos.
b) Que el fiduciario proceda a invertir las cantidades en efectivo aportadas al fideicomiso en los términos y condiciones que se determinen.
c) Que el fiduciario, con el patrimonio fideicomitido cubra a la afianzadora, en el caso de que esta institución de Fianzas le sea reclamada y cubra cualquier importe relativo a la fianza que expida.
d) Que el fiduciario garantice al fideicomisario (institución de fianza) y al beneficiario de la fianza, con el patrimonio que se especifica en el contrato.
e) Que el fiduciario una vez que reciba la reclamación de pago, en caso de incumplimiento de las obligaciones de pago a cargo de los fideicomitentes, proceda al remate de los bienes fideicomitidos (el fiduciario llevará acabo el remate de dichos bienes en Subasta Pública, ante Fedatario Público), a fin de que le pague a la afianzadora y demás acreedores hasta donde alcance, el importe del saldo de su adeudo más intereses y gastos de ejecución que en su caso se originen.

Características Generales

- El fideicomiso está integrado por las siguientes partes:

  1. Fideicomitentes.
  2. Fiduciario: Institución de Fianzas.
  3. Fideicomisario en primer lugar: Institución de Fianzas.
  4. Fideicomisarios en segundo lugar: los propios fideicomitentes, una vez que se haya dado cumplimiento a todas y cada una de las obligaciones garantizadas mediante el contrato.

- Las afianzadoras podrán recibir un fideicomiso, cantidad adicional de efectivo, valores, bienes muebles e inmuebles y derechos, según el requerimiento del fideicomitente, o adquirir ese tipo de activos con los recursos fideicomitidos.
- La institución de fianzas responderá civilmente por los daños y perjuicios que se causen por el incumplimiento de los términos señalados en el fideicomiso.

[6] Véase Artículo 16 fracción XV, de la LFIF.

2.6.1 Subramo 1. Relacionados con Pólizas de Fianzas

Es el contrato en el que la afianzadora, en su carácter de fiduciaria, es designada fideicomisaria en los fideicomisos en los que se transmita la propiedad de los bienes fideicomitidos y que tenga por fin servir como instrumento de pago de obligaciones incumplidas, en el caso de las fianzas otorgadas por las propias instituciones.

2.6.2 Subramo 2. Sin relación con Pólizas de Fianzas

Es un contrato por el cual la institución de fianzas, es nombrada fiduciaria en un fideicomiso en el que, al constituirse, se transmita la propiedad de los bienes fideicomitidos y que tengan por fin servir como instrumento de pago de obligaciones incumplidas.

CAPÍTULO 3

TEORÍA DEL RIESGO

El objeto de la teoría del riesgo es el de proporcionar un modelo de naturaleza estocástica respecto a las fluctuaciones de las operaciones de fianzas, a fin de instrumentar las medidas necesarias para garantizar la solvencia dinámica de la empresa.

Lógicamente este modelo será susceptible de aplicación a todas aquellas instituciones financieras (bancos, fondos de inversión, etc.) en donde se den los mismos principios científicos, en cuanto a la naturaleza aleatoria derivada de sus operaciones específicas.

Pero estas medidas deben ser compatibles con el objeto del beneficio correspondiente a la actividad afianzadora, y sin que tampoco encarezca excesivamente el precio de la fianza.

Por otra parte se puede conseguir el mismo grado de estabilidad o solvencia con distintas combinaciones (λ, S, M) con lo cual se presenta un problema de elección que exige dar entrada a criterios económicos.

Toda teoría del riesgo relaciona las siguientes magnitudes:

- Carteras $\left\{\begin{array}{l}\text{Número de pólizas}\\ \text{Distribuciones básicas}\\ \text{Grado de homogeneidad}\end{array}\right\}$ .... $= C$
- Reservas de fianzas en vigor .... $= S$
- Reafianzamiento .... $= M$
- Recargo de seguridad .... $= \lambda$
- Indice de estabilidad o probabilidad de ruina .... $= \varepsilon$

Es decir:

$$\Psi[C, S, M, \lambda, \varepsilon] = 0$$

El índice de estabilidad ε es un elemento subjetivo que podemos fijar, como valor estándar.

Así, por ejemplo, para una cartera dada C y fijado el índice de estabilidad ε se tiene una relación entre las otras tres magnitudes:

$$\psi[S, M, \lambda] = 0$$

En la literatura actuarial sobre esta materia encontramos dos clases de teorías del riesgo: Individual y Colectiva. A continuación veremos las hipótesis básicas de ellas dejando el estudio de la teoría del riesgo colectiva para los Capítulos siguientes.

3.1 TEORÍA DEL RIESGO INDIVIDUAL

Considera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que acontece en todas las pólizas individuales que componen su cartera. Es decir, las reclamaciones totales en un período de tiempo determinado (por ejemplo, un año) será la suma de las variables aleatorias correspondientes a las reclamaciones anuales de cada una de las pólizas individuales.

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n$$

ζ= Reclamaciones totales de la cartera.
ζ_i = Reclamación de la póliza i-ésima ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Asumiendo que los sumandos son variables independientes, con la misma función de distribución $F(X_i)$, la variable suma (ζ) tendrá por función de distribución

$$F(X) = F(X_1) \cdot F(X_2) \cdot F(X_3) \cdot \ldots \cdot F(X_n) = F^{n(*)}(X_i)$$

es decir, la convolución n-ésima de $F(X_i)$.

De acuerdo con el teorema central del límite la distribución de ζ será aproximadamente normal si el número de sumandos (número de pólizas) es suficientemente grande.

3.1.1 Elementos

Consideremos una cartera C formada por n pólizas distribuidas en h categorías homogéneas $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$.

Cada categoría j (j = 1, 2, ..., h) está formada por pólizas cuyos factores de riesgo tienen el mismo nivel.

Denominemos ζ_{ij} la variable aleatoria asociada a la reclamación anual de la póliza i pertenece a la categoría homogénea j. Es decir,

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{21} + \zeta_{31} + \ldots + \zeta_{n_1 1} = \sum_{i=1}^{n_1} \zeta_{i1}$$

siendo ζ_1 la reclamación anual total de la primera categoría.

Los parámetros de ζ_{i1} son

$$E[\zeta_{i1}] = P_1 \quad ; \quad \sigma^2[\zeta_{i1}] = \sigma_1^2 \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n_1$$

Análogamente para las restantes categorías resulta

$$\zeta_2 = \zeta_{12} + \zeta_{22} + \ldots + \zeta_{n_2 2} = \sum_{i=1}^{n_2} \zeta_{i2}$$

$$\left.\begin{aligned} E[\zeta_{i2}] &= P_2 \\ \sigma^2[\zeta_{i2}] &= \sigma_2^2 \end{aligned}\right\} \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n_2$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\zeta_h = \zeta_{1h} + \zeta_{2h} + \ldots + \zeta_{n_h h} = \sum_{i=1}^{n_h} \zeta_{ih}$$

$$\left.\begin{aligned} E[\zeta_{ih}] &= P_h \\ \sigma^2[\zeta_{ih}] &= \sigma_h^2 \end{aligned}\right\} \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n_h$$

$\{\zeta_h\}$ = Reclamación anual de la h^a categoría.

La variante ζ (reclamación anual de toda la cartera) es:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_h$$

con parámetros (asumiendo la hipótesis de independencia de los sumandos)

$$E[\zeta] = m = E[\zeta_1] + E[\zeta_2] + E[\zeta_3] + \ldots + E[\zeta_h] = \sum_{j=1}^{h} n_j P_j$$

$$\sigma^2[\zeta] = \sigma^2 = \sigma^2[\zeta_1] + \sigma^2[\zeta_2] + \sigma^2[\zeta_3] + \ldots + \sigma^2[\zeta_h] = \sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2$$

Si el número total de pólizas que componen la cartera es suficientemente grande aplicando el teorema central del límite se puede aproximar ζ por el modelo normal (m, σ) (Figura 1).

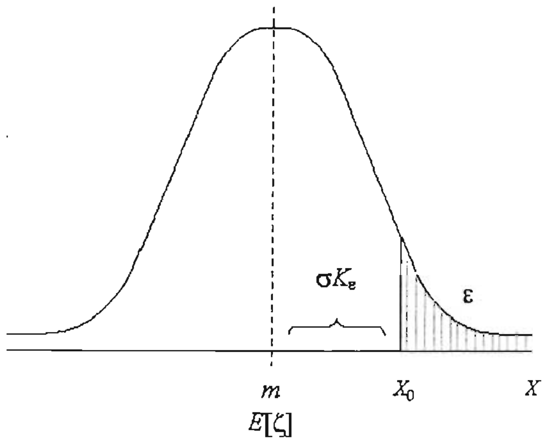


Figura 1

$$\int_{X_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \varepsilon$$

Fijando un índice de estabilidad o probabilidad de ruina ε tal que $P[\zeta > X_0] = \varepsilon$ resulta:

$$P[\zeta > X_0] = P\left[\frac{\zeta - m}{\sigma} > \frac{X_0 - m}{\sigma}\right] = P\left[v > \frac{X_0 - m}{\sigma}\right] = P[v > K_\varepsilon] = \varepsilon$$

K_ε se obtiene de las tablas de la distribución Normal (0, 1) una vez fijado ε. Como

$$X_0 = \sigma \cdot K_\varepsilon + m$$

la diferencia

$$D = X_0 - m = \sigma \cdot K_\varepsilon$$

debe cubrirse con las magnitudes de estabilidad del ente afianzador.

3.1.2 Magnitudes de estabilidad

1. *Recargo técnico o de seguridad* (λ).

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j \geq D$$

de donde se deduce que

$$\lambda \geq \frac{K_\varepsilon \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{h} n_j P_j}$$

2. *Reservas de fianzas en vigor* (S).

El recargo técnico (λ) y las reservas de fianzas en vigor (S) deben cumplir la condición:

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j + S \geq D$$

es decir,

$$\lambda \geq \frac{K_\varepsilon \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2} - S}{\sum_{j=1}^{h} n_j P_j} \qquad (\lambda \text{ variable de decisión})$$

o bien,

$$S \geq K_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2} - \sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j \qquad (S \text{ variable de decisión})$$

3. *Reafianzamiento cedido* (M).

   Denominando $P_j(M)$ la reclamación media anual de cada póliza de la categoría j, neta de reafianzamiento, y $\sigma_j(M)$ la desviación típica de la reclamación a cargo de la cedente, la ecuación básica del modelo es:

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j(M) + S \geq K_{\varepsilon} \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2(M)}$$

   ecuación en la que considerados como datos λ y S figura M (retención propia) como variable de decisión.

En general, el mismo índice de estabilidad ε se puede alcanzar actuando sobre S, λ o M. Esta indeterminación técnica se resolverá dando entrada a criterios económicos, en función de la información proveniente de los subsistemas de tarificación, mercado del sector afianzador y del reafianzador, capacidad de financiación de las reservas de fianzas en vigor, etc., es decir, considerando el enfoque sistemático de la compañía afianzadora.

Sin embargo, a la teoría del riesgo individual se le señalan los inconvenientes siguientes:

a) Que no siempre es admisible la hipótesis de independencia de las variantes sumandos.

b) Que si los grupos homogéneos son de pequeño tamaño no es posible la aplicación del teorema central del límite.

c) Que esta teoría *NO DA RESPUESTAS* a preguntas como la siguiente: ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía se arruine en el futuro?.

d) Que la cartera tiene, en general, una movilidad que dificulta su aplicación.

3.2 TEORÍA DEL RIESGO COLECTIVO

La denominación de riesgo colectivo es porque interviene como un todo la colectividad de los afianzados. Ello se contrapone a la manera de pensar individual que se fija primordialmente en el riego correspondiente a cada póliza o afianzado.

3.2.1 Elementos

Esta teoría se basa en los siguientes supuestos:

a) Opera con sumas de riesgo tanto positivas como negativas.
b) Opera con un tiempo τ llamado operacional en donde τ es igual al número medio de reclamaciones en el tiempo físico $[0, t)$. Es decir, $\tau = t \cdot E[v]$.

c) Ocurrida una reclamación dará lugar a una indemnización de costo o cuantía X_k. Esta variable aleatoria tendrá distribución $V(x)$ independiente del tiempo. Representaremos por,

$$C_r = \int_0^\infty x^r \cdot dV(x) = \text{Momento de orden } r$$

para $r = 1$, C_1 = Media = Costo medio

$$\varphi_x(is) = \int_0^\infty e^{is \cdot x} \cdot dV(x) = \text{Función característica}$$

d) Las primas de riesgo (es decir sin recargos de seguridad ni recargos comerciales) que son la esperanza matemática de las reclamaciones.

3.2.2 Proceso de Riesgo

En lo sucesivo consideraremos especialmente el caso de suma de riesgos positivas.

Este proceso se supone que satisface las hipótesis siguientes:

1. Es de incrementos independientes. Es decir:

$$X(\tau_0 + h) - X(\tau_0) \quad \text{y} \quad X(\tau_1 + \mu) - X(\tau_1)$$

son independientes. Ello equivale a suponer que el acaecimiento y el costo o la cuantía de una reclamación no tienen influencia en el acaecimiento o cuantía del siguiente.

2. Es de incrementos estacionarios. Es decir:

$$X_{(\tau_0 + h)} - X_{(\tau_0)}$$

depende solamente de h y no de τ_0. Esto supone que los riesgos son independientes del tiempo, o sea, que el número de reclamaciones y su cuantía es independiente de que estemos situados, por ejemplo, en el año 2001 o en el 2002.

3. Las funciones muestrales del proceso son funciones de salto. Ello supone que ocurrida una reclamación se paga inmediatamente.

Con estas hipótesis la distribución conjunta de cualquier número finito de variables $X_{(\tau 1)}, X_{(\tau 2)}, X_{(\tau 3)}, \ldots, X_{(\tau n)}$, estará completamente determinada por estas propiedades.

CAPÍTULO 4

LA DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE RECLAMACIONES

El estudio del comportamiento estadístico de las reclamaciones puede acometerse de varias formas:

a) Considerar a las reclamaciones correspondientes a cierto periodo de tiempo (por ejemplo, un año), como una variable aleatoria, y estudiar su distribución.

b) Considerar como tal variable a los cocientes entre reclamaciones y primas referentes a un ejercicio.

c) Examinar el comportamiento estadístico de dos variables aleatorias que intervienen en la determinación de una reclamación: el número de reclamaciones y la cuantía o costo de cada una de ellas.

Según la tercera de las posibilidades expuestas, la cartera de pólizas se considera como un conjunto integrado por una colectividad de riesgos, que da lugar a una corriente o flujo de reclamaciones; el volumen de dicho flujo depende del número de reclamaciones y de su importe. Este punto de vista, propio de la Teoría de Riesgo Colectivo, fue adoptado por F. Lundberg.[1]

4.1 EL PROCESO DE POISSON

Vamos a suponer que cierto hecho acaece aleatoriamente a lo largo del tiempo (por ejemplo, las reclamaciones a cargo de una entidad afianzadora) y que, de acuerdo con las características del fenómeno que genera tal hecho, puede aceptarse que concurren las siguientes hipótesis:

[1] F. Lundberg, *Some supplementary researches on the collective risk*, 1932.

1) Estacionariedad: la probabilidad de acaecimiento del suceso en un cierto intervalo $\Delta t = t_2 - t_1 = (t_1, t_2)$ depende de su duración Δt, pero no de t_1. Es decir, que la probabilidad de que acaezcan k sucesos en (t_1, t_2) y en (t_3, t_4) son iguales si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = \Delta t$, aunque $t_1 \neq t_3$.

2) Independencia: el número de sucesos en el intervalo (t_1, t_2) es independiente del número de sucesos en (t_3, t_4), siendo disjuntos ambos intervalos. Esto quiere decir que el acaecimiento de un suceso no influye en la probabilidad de acaecimiento de otro posterior a él.

3) No simultaneidad de sucesos: La formulación precisa de esta hipótesis es la siguiente. Si designamos por $P_{\Delta t}[v > 1]$ a la probabilidad de que acaezca más de un suceso en el intervalo de duración Δt, (siendo v el número aleatorio de eventos en el intervalo Δt), entonces se acepta que

$$P_{\Delta t}[v > 1] = o(\Delta t)$$

siendo $o(\Delta t)$ un infinitésimo de orden superior a Δt, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Esta hipótesis significa que es prácticamente imposible el acaecimiento de 2 o más eventos durante el período de tiempo Δt lo bastante breve, o dicho de otro modo: fijada una probabilidad ε todo lo pequeña que se quiera, siempre es posible encontrar un intervalo suficientemente corto para que la probabilidad de 2 o más sucesos en él no sea mayor a ε.

Se trata de calcular ahora la probabilidad de que acaezcan k sucesos en un intervalo de tiempo de duración $t = t_2 - t_1$, (t es un número real positivo). Empezamos por calcular $P_t[v = 0]$; pero encontramos la dificultad de que la duración t no está expresada necesariamente por un número racional. Para ello procedemos así: sea s un número entero y consideramos un periodo de s unidades de tiempo. Subdividimos a este período en w intervalos, de forma que

$$\frac{s-1}{w} \leq t < \frac{s}{w}$$

Consideremos ahora uno cualquiera de los s intervalos y llamemos q a la probabilidad de que no acaezca en él ningún suceso. En virtud de la primera hipótesis (estacionariedad) esta probabilidad es constante en el tiempo y sólo depende de la duración de cada intervalo; al ser ésta fija (e igual a la unidad) podemos considerar a q como una constante. Designando por $P_{s/w}[v = 0]$ a la probabilidad de no ocurrencia en cada intervalo de los w en que hemos dividido el periodo de s unidades (recordando que s y w son números naturales), tendremos, conforme a la segunda hipótesis (independencia) que:

$$\left(P_{s/w}[v=0]\right)^{w} = q^{s}$$

o bien

$$P_{s/w}[v=0] = q^{s/w} \qquad (A)$$

Como quiera que

$$\frac{s-1}{w} \leq t < \frac{s}{w}$$

y dado el carácter no creciente de la probabilidad de no ocurrencia $P_t[v = 0]$ al aumentar la duración t, podemos afirmar que

$$P_{s/w}[v=0] \leq P_t[v=0] \leq P_{(s-1)/w}[v=0]$$

Si aumentamos ahora el número w de subdivisiones del período de duración s unidades, e incrementamos también el número de éstas, de forma que el cociente s/w se aproxime a t, es decir,

$$\lim_{\substack{w\to\infty \\ s\to\infty}} \frac{s}{w} = t$$

entonces resulta que la expresión (A), en el límite, se transforma en

$$P_t[v=0] = q^{t}$$

Como $0 < q < 1$ (los casos extremos $q = 0$ y $q = 1$ no interesan: el primero porque contradice la hipótesis tercera y el segundo por equivaler a la no ocurrencia de eventos en un intervalo de cualquier longitud), resulta que puede encontrarse siempre un número n real y positivo tal que

$$e^{-n} = q$$

Por tanto,

$$P_t[v=0] = e^{-nt} \qquad (B)$$

Desarrollando en serie e^{-nt} tenemos:

$$P_t[v=0]=1-nt+\frac{(nt)^2}{2}-...=1-nt+o(t)$$

En virtud de la tercera hipótesis (no simultaneidad) podemos afirmar que

$$P_t[v=0]+P_t[v=1]+o(t)=1$$

y por tanto,

$$P_t[v=1]=nt+o(t) \qquad (C)$$

(prescindimos de examinar en cada caso si el signo de $o(t)$ es positivo o negativo y convenimos en considerarlo siempre positivo).

Al resultado (C) se puede llegar también mediante un razonamiento intuitivo. Si, en virtud de la tercera hipótesis (no simultaneidad) prescindimos por el momento de la posibilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo de longitud pequeña, resulta que, elegida ésta con un valor $t = t_0$, sólo existen dos posibilidades: que acaezca 1 evento durante el intervalo t_0 o que no ocurra ninguno. Como la probabilidad de acaecimiento es constante (primera hipótesis, de estacionariedad), podemos concluir que si multiplicamos por 2 la longitud del intervalo y ésta pasa a ser $2 \cdot t_0$, la probabilidad de que ocurra un suceso en él se duplicará y, en general, la relación entre la probabilidad y t será de la forma $P_t[v = 1] \cong n \cdot t$ siendo n una constante. Hay que agregar $o(t)$ para tener en cuenta la probabilidad de dos o más sucesos.

Para calcular $P_t[v = k]$ comenzamos por determinar la expresión de $P_{t+\Delta t}[v = k]$. En virtud de las hipótesis primera y segunda (estacionariedad e independencia, respectivamente) tenemos que esta probabilidad es

$$\begin{aligned}P_{t+\Delta t}[v=k]&=P_t[v=k]\cdot P_{\Delta t}[v=0]+P_t[v=k-1]\cdot P_{\Delta t}[v=1]+\sum_{i=2}^{k}P_t[v=k-i]\cdot P_{\Delta t}[v=i]=\\&=P_t[v=k]\cdot[1-n\Delta t+o(\Delta t)]+P_t[v=k-1]\cdot[n\Delta t+o(\Delta t)]+o(\Delta t)\end{aligned}$$

Si ahora reducimos todas las expresiones infinitesimales a una sola, obtenemos, después de calcular el límite de $\Delta P_t[v = k]/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$, la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP_t[v=k]}{dt}=-n\cdot P_t[v=k]+n\cdot P_t[v=k-1] \qquad (D)$$

Para integrarla hacemos

$$P_t[v=k]=r_t(k)\cdot e^{-nt}$$

siendo $r_t(k)$ una función desconocida; con ello (D) se convierte en

$$r_t^{'}(k)=n\cdot r_t(k-1)$$

De (B) concluimos que $r_t(0)=1$ y por tanto

$$r_t^{'}(1)=n$$

con lo que $r_t(1)=nt+A$ (siendo A una constante arbitraria) y la probabilidad $P_t[v=1]$ puede expresarse así:

$$P_t[v=1]=(n\cdot t+A)\cdot e^{-nt}=(nt+A)\cdot[1-nt+o(t)]$$

Comparando esta expresión con (C) deducimos que $A=0$. Aplicando el mismo proceso para $k=2$, se obtiene:

$$r_t^{'}(2)=n\cdot r_t(1)=n^2\cdot t$$

por tanto

$$r_t(2)=\frac{(nt)^2}{2}$$

(se considera nula a la constante arbitraria, igual que antes). Y, en general,

$$r_t^{'}(k)=n\frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$r_t(k)=\frac{(nt)^k}{k!}$$

Con ello el problema está resuelto, pues hemos llegado a la expresión

$$P_t[v=k]=e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!} \qquad (E)$$

que formula la ley de Poisson, es decir: probabilidad de obtener k sucesos en un período de duración cualquiera, t, con parámetro nt. Notemos que si tomamos como intervalo la unidad, la probabilidad es

$$P_1[v=k]=e^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

Podemos comprobar ahora que, según habíamos formulando como tercera hipótesis, se cumple

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_t[v>1]}{t}=0$$

En efecto, aplicando (E), el límite es

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-nt}\cdot(1+nt)}{t}$$

Podemos utilizar la Regla de L'Hôpital (pues las funciones en el numerador y denominador son derivables) y resulta,

$$\lim_{t\to 0}\left[n\cdot e^{-nt}\cdot(1+nt)-n\cdot e^{-nt}\right]=0$$

En la practica puede expresarse el problema de calcular $P[v \geq k]$ cuando el parámetro nt y el número k son grandes. En tal caso, la aplicación de (E) puede entrañar dificultades al intervenir cantidades con mayor número de dígitos que el admitido por la computadora. Esto puede soslayarse utilizando la fórmula de Stirling para calcular $k!$ cuando k es grande.[2]

$$k!\cong\sqrt{2\pi k}\cdot\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Además, hay que sustituir las potencias de k, e y n por el número elevado al respectivo logaritmo. De esta manera llegamos a la fórmula (para k grande)

$$p_k=P[v=k]\cong\frac{e^T}{Q}$$

siendo:

[2] Anexo 1. A.

$$T = k \cdot (\log n - \log k + 1) - n$$
$$Q = \sqrt{2\pi k}$$

Si tenemos en cuenta que, según (E) se tiene

$$p_{k-1} = p_k \cdot \frac{k}{n}$$

puede programarse el cálculo de $P[v \leq k]$ con los pasos siguientes:

1. Calcular T y Q con el valor k.
2. Calcular p_k.
3. Obtener $p_{j-1} = p_j \cdot j/n$ para k-1, k-2, ..., 0
4. Sumar las probabilidades p_j para $j = 0, 1, 2, ..., k$.

Otro método para calcular la función de distribución de la variable de Poisson v (de parámetro n) se basa en la relación

$$P[v \leq k] = 1 - \Gamma[n; k+1]$$

en donde $\Gamma[n; k+1]$ es la función de distribución gamma.[3]

4.1.1 La Función Generatriz de la Distribución de Poisson. Calculo de sus Momentos

Si v se distribuye según la Ley de Poisson de parámetro n, su función generatriz $g(s)$ será:

$$g(s) = E\left[e^{vs}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ks} \cdot P[v = k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ks} \frac{e^{-n} \cdot n^k}{k!} = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(ne^s\right)^k}{k!} = e^{-n} \cdot e^{ne^s} = e^{n(e^s - 1)}$$

puesto que la última suma es el desarrollo en serie de e^x siendo $x = ne^s$.

Podemos ahora calcular los momentos a_i. Sabiendo que

$$a_i = g^i(0)$$

y teniendo en cuenta que $g(0) = 1$, llegamos a

[3] Anexo 1. B.

$$a_1 = g'(0) = n$$
$$a_2 = g''(0) = n(n+1)$$
$$a_3 = g'''(0) = n(1+3n+n^2)$$

Obtenemos ahora los momentos centrales μ_2 y μ_3:

$$\text{Varianza} = \mu_2 = E[v-a_1]^2 = a_2 - a_1^2 = n$$
$$\mu_3 = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3 = n$$

El coeficiente de asimetría γ (siempre positivo) es:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{+\sqrt{n}}$$

El parámetro n de la distribución de Poisson se identifica, por tanto, con la media y con la varianza. El tratarse de una distribución uniparamétrica supone, evidentemente, una desventaja al restarle versatilidad como modelo para representar fenómenos. Pero desde otro punto de vista, ello puede significar una ventaja en la practica, cuando hay falta de información: sólo con la estimación de la media se dispone de un modelo utilizable si puede admitirse las tres hipótesis en que esta distribución se fundamenta.

4.1.2 El proceso de Poisson y el tiempo operativo

Una de las hipótesis esenciales a este proceso es la estacionariedad. El número de sucesos –en nuestro caso, reclamaciones– en (t_1, t_2) depende de la longitud del intervalo, pero no de su posición a lo largo del eje temporal. Hay que reconocer que esta hipótesis no suele darse en las aplicaciones prácticas de la Teoría del Riesgo; porque el número medio de reclamaciones de una entidad afianzadora en una unidad de tiempo (un año), que designamos por n es proporcional al volumen de la cartera y ésta, habitualmente, crece en el tiempo. Por tanto n no es constante como requiere el proceso de Poisson.

Lundberg introdujo en 1909 el concepto de tiempo operativo para poder prescindir de la hipótesis de estacionariedad, o mejor dicho, poder contar con ella en el modelo aunque no se dé en la realidad.

La idea para nuestro estudio es ésta: medir el tiempo tomando como unidad el número medio de reclamaciones, en lugar del año. Si la cartera crece, el tiempo operativo transcurrirá cada vez más deprisa, pero el número medio de reclamaciones en cada periodo unitario de tiempo operativo será constante.

Borch dice que el empleo del tiempo operativo explica tal vez el escaso uso de la Teoría del Riesgo: en efecto, lo que en la realidad interesa es conocer la solvencia al término de cada año natural, teniendo poco sentido practico las divisiones de éste impuestas por el empleo del tiempo operativo.[4]

4.2 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

También conocida como distribución de Pascal, desempeña un importante papel en la Teoría del Riesgo,[5] utilizándose frecuentemente en aquellos casos en que no resulta adecuada la distribución de Poisson para modelizar la del número de reclamaciones de una cartera.

Suele definirse como aquélla que da la probabilidad de que, al realizar $m = k + h$ experimentos en los que la probabilidad de éxito es p haya habido exactamente k fallos antes de alcanzar el éxito h-esimo, es decir:

$$P[v=k]=\binom{h+k\text{-}1}{k}p^h q^k \qquad (F)$$

(siendo $p + q = 1$).

Sin embargo, aquí enfocamos a esta distribución de otra forma, a fin de poner de manifiesto su utilidad para representar el comportamiento del número de reclamaciones en casos en que no exista independencia entre ellos, sino que el acaecimiento de uno aumente la probabilidad del próximo. Este es el caso en que interviene el contagio.

Supongamos una urna con N bolas, de las que N_1 son blancas y el resto N_2 son negras. Efectuamos m veces el experimento consistente en extraer al azar una bola y devolverla nuevamente a la urna junto con A bolas del mismo color que la extraída. De esta forma, la siguiente bola tendrá una probabilidad mayor de ser del mismo color que ella (contagio). La probabilidad de extraer k bolas negras en los m experimentos del proceso descrito, denominado Proceso de Polya-Eggenberger, será:

$$P[v=k]=\binom{m}{k}\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(N_1+iA)\cdot\prod_{i=0}^{m-k-1}(N_2+iA)}{\prod_{i=0}^{m-1}(N+iA)} \qquad (G)$$

[4] Borch, *The Mathematical Theory of Insurance*, 1974

[5] E. Prieto, *Aplicaciones al seguro de la distribución binomial negativa*; Anales del Instituto de Actuarios Españoles, núm. 13.

Observemos que esta distribución es una generalización de la binomial, en que las probabilidades p y q no son constantes, sino que varían al añadir bolas de uno u otro color, según el de la extraída en cada experimento.

Supongamos ahora que efectuamos una extracción en cada intervalo de tiempo de duración $1/m$. Si hacemos que $m \to \infty$ y simultáneamente que $N \to \infty$ (de forma que la probabilidad de extraer una bola negra en un experimento tienda a cero) siendo constante la media n del número de las extraídas en los m experimentos, estamos ante un proceso similar al que nos condujo a la distribución de Poisson a partir de la binomial.

Se trata, por tanto, de calcular el límite de (G) cuando $N \to \infty$, $m \to \infty$ y $mN_1/N \to n$.

Llamemos h al cociente

$$h = \frac{N_1}{A}$$

de forma que $1/h = A/N_1$ es un índice de la heterogeneidad de las probabilidades sucesivas, como consecuencia de añadir las bolas del mismo color que el obtenido en cada extracción. (Si $h = \infty$ no hay contagio). La expresión (G) puede transformarse en:

$$P[v = k] = \binom{m}{k} \frac{N_1^k N_2^{m-k} \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 + \frac{iA}{N_i}\right) \cdot \prod_{i=0}^{m-k-1}\left(1 + \frac{iA}{N_2}\right)}{N^m \cdot \prod_{i=0}^{m-1}\left(1 + \frac{iA}{N}\right)}$$

Tengamos ahora en cuanta que

$$\frac{A}{N_1} = \frac{1}{h}\ ;\ \frac{A}{N_2} = \frac{n}{h(m-n)}\ ;\ \frac{A}{N} = \frac{n}{m \cdot h}$$

Por otra parte,

$$\frac{N_1}{N} = \frac{n}{m}\ ;\ \frac{N_2}{N} = \frac{m-n}{m}$$

Formulamos ahora la probabilidad-límite buscada utilizando la función gamma[6] en lugar de las expresiones factoriales;[7] para ello, antes de calcular el límite, hacemos:

$$\prod_{i=0}^{k-1}\left(1+\frac{i}{h}\right)=\frac{1}{h^k}\prod_{i=0}^{k-1}(h+i)=\frac{(h+k-1)!}{h^k(h-1)!}$$

Análogamente:

$$\prod_{i=0}^{m-k-1}\left(1+\frac{i\cdot n}{h(m-n)}\right)=\left[\frac{n}{h(m-n)}\right]^{m-k}\cdot\frac{\left(\frac{mh}{n}-h+m-k-1\right)!}{\left(\frac{mh}{n}-h-1\right)!}$$

$$\prod_{i=0}^{m-1}\left(1+\frac{i\cdot n}{mh}\right)=\left[\frac{n}{mh}\right]^{m}\cdot\frac{\left(\frac{mh}{n}+m-1\right)!}{\left(\frac{mh}{n}-1\right)!}$$

De aquí que:

$$P[v=k]=\binom{h+k-1}{k}\cdot\frac{\Gamma[m+1]\cdot\Gamma\left[\frac{mh}{n}-h+m-k\right]\cdot\Gamma\left[\frac{mh}{n}\right]}{\Gamma[m-k+1]\cdot\Gamma\left[\frac{mh}{n}-h\right]\cdot\Gamma\left[\frac{mh}{n}+m\right]}$$

Para valores grandes de n el cociente

$$\frac{\Gamma[n+p]}{\Gamma[n]}$$

se aproxima a n^p, según se deduce fácilmente de la fórmula de Stirling para factoriales.[8] Haciendo uso de esta propiedad, queda:

[6] Para un estudio más detallado sobre la Función Gamma, véase Capítulo 6, apartado 6.3.
[7] Recordando que, para n entero, $\Gamma[n]=(n-1)!$.
[8] Anexo 1.A.

$$P[v=k]=\binom{h+k-1}{k}\cdot\frac{(m-k+1)^k\left(\dfrac{mh}{n}-h\right)^h}{\left(\dfrac{mh}{n}+m-h-k\right)^{h+k}}\xrightarrow[m\to\infty]{}\binom{h+k-1}{k}\cdot\frac{\left(\dfrac{h}{n}\right)^h}{\left(\dfrac{h}{n}+1\right)^{h+k}}=$$

$$=\binom{h+k-1}{k}\cdot\left(\frac{h}{n+h}\right)^h\cdot\left(\frac{n}{n+h}\right)^k$$

que es la expresión de la probabilidad de k sucesos, distribuidos según la ley binomial negativa.

Observemos que la expresión consta de dos parámetros: el de heterogeneidad, h (a mayor valor de h, menos grado de contagio) y la media n. Si hacemos

$$\frac{h}{n+h}=p \quad ; \quad \frac{n}{n+h}=1-p=q$$

obtenemos la expresión (F), utilizada al principio. Si tenemos en cuenta que

$$\binom{h+k-1}{k}=\binom{-h}{k}(-1)^k$$

podemos expresar (F) de la siguiente forma:

$$P[v=k]=\binom{-h}{k}p^h\cdot(-q)^k$$

frecuente al presentar la función de probabilidad de la binomial negativa. Observemos que es también el término general del desarrollo del binomio con exponente negativo

$$(1-q)^{-h}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-h}{k}(-q)^k=p^{-h}$$

Si multiplicamos ambos lados de la igualdad anterior por p^h obtenemos,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-h}{k}(-q)^k\cdot p^h=1$$

que demuestra la equivalencia a la unidad de

$$\sum_{k=0}^{\infty} P[v=k]$$

y justifica la denominación de *binomial negativa.*

4.2.1 La Función Generatriz de la Distribución Binomial Negativa. Calculo de sus momentos

Si v se distribuye Binomial Negativa con parámetro (h, p), su función generatriz $g(s)$ será:

$$g(s)=E\left[e^{vs}\right]=\sum_{k=0}^{\infty} e^{ks}\cdot P[v=k]=\left(\frac{p}{1-qe^{s}}\right)^{h}$$

Determinamos los momentos respecto al origen a_i; y teniendo en cuenta que

$$a_i=g^{i}(0)$$

Los momentos de la variable v distribuidas según la Binomial Negativa son:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= n\\
a_2 &= n+n^2\left(1+\frac{1}{h}\right)\\
a_3 &= n+3n^2\left(1+\frac{1}{h}\right)+n^3\left(1+\frac{3}{h}+\frac{2}{h^2}\right)\\
\sigma^2 &= n+\frac{n^2}{h}\\
\gamma &= \frac{1}{\sigma^3}\left[n+\frac{3n^2}{h}+\frac{2n^3}{h^2}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (H)$$

Sí $h \to \infty$ queda

$$\sigma^2=n$$
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Estos resultados sugieren que la Binomial Negativa tiende a la distribución de Poisson al aumentar h.

CAPÍTULO 5

LA DISTRIBUCIÓN DEL COSTO O CUANTIA DE CADA RECLAMACIÓN

En las aplicaciones practicas no siempre en necesario recurrir a una ley analítica para representar la distribución de η (costo o cuantía de cada reclamación), sino que en ciertas ocasiones basta el conocimiento de los dos o tres primeros momentos de la variable, obtenidos mediante estimaciones sobre datos observados. Sin embargo, cuando interesa la distribución en valores grandes de η las estadísticas disponibles suelen ser insuficientes y en tal supuesto se recurre a una función analítica en el tramo de valores $\eta > L$.

Pero si la disponibilidad de datos es insuficiente para todo el rango de η y no sólo para sus valores superiores, no hay más remedio que utilizar funciones que resulten lo más adecuada posible al comportamiento de η.

En resumen, las situaciones que pueden darse con respecto a la variable *costo de cada reclamación*, son:

a) Conocimiento estadístico o empírico suficiente de η. En tal caso no es necesario recurrir a modelo alguno si nos basta el conocimiento de dos o tres momentos de η.

b) Conocimiento suficiente sólo para valores pequeños o moderados de η, es decir, hasta $\eta \leq L$. Puede ajustarse una función que modelice η en el tramo $\eta > L$.

c) Conocimiento de η limitado a estimaciones de sus dos o tres primeros momentos, interesando conocer el comportamiento de esta variable con mayor detalle. Puede ser aconsejable utilizar una o varias funciones para representar el comportamiento de η.

En las aplicaciones prácticas se desarrolla el caso c) de los tres vistos anteriormente. No es fácil disponer de estadísticas sobre el costo de las reclamaciones en cada ramo. Se cuenta tan sólo con el conocimiento de la media de esta distribución; obtener algún valor razonable para la desviación típica ha exigido formular ciertas hipótesis, lo que da idea de la "moderación" de los datos estadísticos accesibles para obtener aplicaciones prácticas de los métodos presentados. En dichas aplicaciones se utilizan el modelo logarítmico-normal, aunque también se expondrán brevemente otras distribuciones como la de Pareto por su especial importancia en la cuestión que ahora abordamos.

5.1 LA DISTRIBUCIÓN LOGARÍTMICO - NORMAL

Se trata de una función que suele dar resultados satisfactorios para representar las probabilidades asociadas a η (= costo de cada reclamación).

Sea τ una variable aleatoria normal con parámetros (μ, σ); η se distribuye según la ley logarítmico-normal si $\eta = w + e^{\tau}$; la función de densidad de η es de deducción inmediata:

$$S(Z) = P[\eta \leq Z] = P\left[e^{\tau} \leq Z - w\right] = P[\tau \leq \log(Z - w)] = \phi[\log(Z - w)]$$

en donde $\phi(t)$ representa la función de distribución de τ.

Por consiguiente,

$$S'(Z) = \frac{1}{Z - w} \cdot \phi'[\log(Z - w)] = \frac{1}{(Z - w) \cdot \sigma \cdot \sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\log(Z-w)-\mu]^2}$$

Obtendremos a continuación las expresiones de la media, desviación típica y asimetría de la variable logarítmico-normal. Para ello observemos que si $T(s)$ es la función generatriz de la variable τ (distribuida normalmente con parámetros μ, σ) el momento respecto al origen a_j de la variable logarítmico-normal η - w es:

$$a_j = E\left[(\eta - w)^j\right] = E[e^{\tau j}] = T(j)$$

Ahora bien, recordemos que la función generatriz de la distribución normal (μ, σ) es:

$$T(s) = e^{s\mu + \frac{1}{2}s^2\sigma^2}$$

y por lo tanto:

$$a_j = T(j) = e^{j\mu + \frac{1}{2}j^2\sigma^2}$$

De aquí obtenemos los tres momentos siguientes de la variable η - $w = e^{\tau}$:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \\ a_2 &= e^{2\mu + 2\sigma^2} \\ a_3 &= e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

El valor medio de η será $m = E[\eta] = w + \exp[\mu + (\sigma^2/2)]$ y la desviación típica

$$\sigma_\eta = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} = a_1 \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

Observemos que

$$R = \frac{a_2}{a_1^2} = e^{\sigma^2}$$

(es decir, que si $w = 0$ se sigue que $R = E[\eta^2/m^2]$. El tercer momento nos permite calcular el coeficiente de asimetría γ_η:

$$\gamma_\eta = \frac{E(\eta - m)^3}{\sigma_\eta^3} = \frac{a_3 - 3a_2a_1 + 2a_1^3}{\sigma_\eta^3} = \frac{e^{3\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 2}{(e^{\sigma^2} - 1)^{\frac{3}{2}}} = (R + 2) \cdot \sqrt{R - 1}$$

La media, desviación típica y coeficiente de asimetría de la variable logarítmico-normal $\eta = w + e^{\tau}$ (τ es normal con parámetros μ, σ) son:

$$\left.\begin{aligned} m &= w + e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \\ \sigma_\eta &= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \\ \gamma_\eta &= (R + 2) \cdot \sqrt{R - 1} \qquad (\text{siendo } R = e^{\sigma^2}) \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

En lo sucesivo nos encontramos con el problema de determinar los parámetros w, μ y σ que especifican la función de distribución que mejor se adapte a unos datos cuya media, desviación típica y coeficiente de asimetría son conocidos. Es decir, se trata de calcular los tres parámetros w, μ y σ conociendo m, σ_η y γ_η.

Obtendremos las expresiones de dichos parámetros en función de las tres características conocidas por el siguiente método: El valor de γ_η nos permite llegar al de R por medio de la última ecuación de (B) y éste a su vez al de σ. Efectivamente

$$\sigma = \sqrt{\log R} \qquad (C)$$

Cuando en los datos del problema no entra la asimetría calcularemos R (mediante el cociente a_2/m^2), y admitiremos que $w = 0$, es decir, que $\eta = e^{\tau}$; por tanto los estadísticos de dicho cociente corresponden a la variable η.

Si tomamos logaritmos en la expresión de σ_η de (B), llegamos a:

$$\mu = \log \sigma_\eta - \frac{1}{2}\log(R-1) - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad (D)$$

Por último para conocer w no tenemos más que hacer

$$w = m - e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

5.2 LA DISTRIBUCIÓN DE PARETO

Es de la forma siguiente:

$$S(Z) = P[\eta \leq Z] = 1 - c^b \cdot Z^{-b}$$

Si $c > Z$ la función toma valores negativos y por ello sólo está definida como función de distribución para $Z \geq c$. Además se exige que $b > 0$.

La función de densidad es:

$$S'(Z) = \frac{b \cdot c^b}{Z^{b+1}}$$

y la media,

$$m = \int_c^\infty Z \cdot S'(Z)dZ = \frac{b}{b-1} \cdot c$$

Observemos que si $b \leq 1$ la integral no converge.[1] El momento de orden i equivale a:

$$E[\eta^i] = \int_c^\infty Z^i S'(Z)dZ = \frac{b}{b-i} c^i$$

pero dicho momento sólo existe si $b > i$ según puede deducirse al observar la convergencia de la integral.

A la vista de la función de densidad se puede concluir que, para c constante, cuanto menor sea b más elevado es el valor de la función para cada punto de la abscisa, en valores suficientemente grandes de Z. Esto hace que el uso de la función a partir de cierto valor de Z origine valores más *conservadores*, es decir, haga más probables reclamaciones de elevadas cuantías, cuanto menor sea el parámetro b. En concreto, si $b_1 < b_2$ concluimos que

$$S'(Z;b_1) > S'(Z;b_2)$$

para

$$Z > \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{\frac{1}{r}} \cdot c$$

en donde

$$r = b_2 - b_1$$

La función de densidad de Pareto tiene la propiedad de que converge lentamente a cero cuando $Z \to \infty$ y de aquí que se utilice para representar el comportamiento estadístico de las reclamaciones de elevada cuantía. Es frecuente que los datos empíricos disponibles sean poco representativos para valores extremos de Z; en tal caso la distribución $S(Z)$ se construye en dos tramos:

1°. Formado por las frecuencias observadas y

---

[1] Buhlmann, en *Mathematical Methods in Risk Theory*, 1970, pág. 18, al presentar la distribución de Pareto especifica como exigencia del parámetro b que sea mayor que cero. En cambio, Beard, Pentikäinen y Pesonen, en *Risk Theory*, 1984, pág. 74, exigen $b > 1$. La explicación está en que para definir la función basta $b > 0$; para la existencia de la media se requiere $b > 1$.

2º. A partir de un cierto valor L, por la distribución de Pareto.[2]

5.3 LA DISTRIBUCIÓN DE WEIBULL

La función de distribución de la exponencial es

$$F(x) = 1 - e^{-cx} \qquad (x \geq 0)$$

Una generalización natural de esta distribución es la de Weibull, cuya función presenta la forma

$$W(x) = 1 - e^{-cx^a}$$

(para $x > 0$ y siendo positivos los parámetros)

La función de densidad es, por tanto:

$$W'(x) = a \cdot c \cdot x^{a-1} \cdot e^{-cx^a}$$

y el momento de orden j:

$$a_j = ac\int_0^\infty x^{j+a-1} \cdot e^{-cx^a} dx = \frac{\Gamma\left[\frac{j}{a}+1\right]}{c^{\frac{j}{a}}}$$

según se comprueba fácilmente mediante el cambio de variable $cx^a = t$. Esta distribución tiene moda cuando $a > 1$ en el punto

$$x = \left(\frac{a-1}{ac}\right)^{\frac{1}{a}}$$

5.4 LA DISTRIBUCIÓN BETA

Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}$$

$$(0 \leq x \leq 1 \; ; p > 0 \; ; q > 0)$$

[2] Recordemos que para valores grandes de η (costo de cada reclamación) las estadísticas disponibles suelen ser insuficientes y en tal supuesto se recurre a una función analítica en el tramo de valores $\eta > L$.

Se trata, por tanto, de una distribución que depende de dos parámetros, p y q, definida en el intervalo de la variable [0, 1]. Cuando el rango de x es más amplio puede recurrirse a la transformación

$$x' = \frac{x}{k}$$

La distribución beta puede ser útil para representar la relación entre el importe del daño cubierto y el capital afianzado.[3] Cuando los parámetros p y q son mayores que la unidad, la moda se encuentra en el punto

$$x = \frac{p-1}{p+q-2}$$

El momento de orden j es:

$$a_j = E[\varsigma^j] = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 x^{p+j-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx = \frac{B(p+j;q)}{B(p,q)}$$

Y de aquí, para $j = 1$ y 2 respectivamente:

$$a_1 = \frac{B(p+1;q)}{B(p,q)} = \frac{\Gamma[p+1]\Gamma[q]\Gamma[p+q]}{\Gamma[p+q+1]\Gamma[p]\Gamma[q]} = \frac{p}{p+q}$$

$$a_2 = \frac{B(p+2;q)}{B(p,q)} = \frac{\Gamma[p+2]\Gamma[q]\Gamma[p+q]}{\Gamma[p+q+2]\Gamma[p]\Gamma[q]} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}$$

[3] Hogg y Klugman, *Loss Distributions*, New York, 1984.

CAPÍTULO 6

LA RECLAMACIÓN ANUAL Y SU DISTRIBUCIÓN

6.1 LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA RECLAMACIÓN TOTAL DEL EJERCICIO

Conocidas las funciones de distribución del número de reclamaciones ν y del importe de cada uno de ellos η se trata de establecer la ley de distribución de las reclamaciones totales anuales ξ, es decir, la expresión de $P[\xi \leq X]$, para, a partir de ella, deducir la media, la desviación típica y el coeficiente de asimetría.

Presentaremos la cuestión de la siguiente forma: si llamamos $S_k(X)$ a la probabilidad de que $\xi \leq X$ condicionada a que $\nu = k$ tenemos:

$$F(X) = P[\xi \leq X] = \sum_{k=0}^{\infty} P[\nu = k] \cdot S_k(X)$$

Observemos que el último miembro de la igualdad es la suma de probabilidades de los sucesos disjuntos *reclamación total $\leq k$ siendo el número de reclamaciones igual a k*. Por tanto, el resultado de la suma es la probabilidad de que $\xi \leq X$ sea cual fuere el número de reclamaciones, distribuidas según Poisson.

Ahora bien, cuando los importes de las reclamaciones son independientes entre sí, $S_k(X)$ es la convolución k-esima de la variable aleatoria η (que representa el costo o la cuantía de cada reclamación), y que designamos por $S^{k*}(X)$.

En consecuencia,

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P[\nu = k] \cdot S^{k*}(X) \qquad (A)$$

que representa la función de distribución compuesta de Poisson; su forma analítica es de tan difícil obtención que en las aplicaciones prácticas es sustituida por aproximaciones. Antes de examinar algunas de ellas, deduciremos la función generatriz de la Poisson-compuesta, que designaremos por $g(s)$. Siendo $g_\eta(s)$ la función generatriz de la variable η (costo o cuantía de cada reclamación) y suponiendo que los importes de las reclamaciones $1, 2, ..., k$ son independientes entre sí $\forall k$ tenemos:

$$g(s) = E[e^{\xi s}] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{s\sum_{i=0}^{k}\eta_i} \right) \cdot P[v = k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[E\left(e^{s\eta_i}\right)\right]^k \cdot P[v = k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [g_\eta(s)]^k \cdot P[v = k]$$

Ahora bien, las probabilidades $P[v = k] = p_k$

$$P[v = k] = \int_0^\infty e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} \cdot H'(q)dq$$

Por tanto,

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} [g_\eta(s)]^k \cdot \int_0^\infty e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} \cdot H'(q)dq =$$

$$= \int_0^\infty e^{-nq} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[nq\, g_\eta(s)]^k}{k!} H'(q)dq =$$

$$= \int_0^\infty e^{-nq\{1-g_\eta(s)\}} \cdot \frac{h^h}{\Gamma[h]} \cdot e^{-hq} \cdot q^{h-1}dq$$

En la última expresión se ha sustituido $H'(q)$.[1] Efectuamos ahora el cambio de variable

$$[n - ng_{\eta}(s) + h] \cdot q = t$$

que nos permite escribir

$$g(s) = \frac{h^{n}}{\Gamma[h]} \cdot [n - n \cdot g_{\eta}(s) + h]^{-h} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot t^{h-1} dt =$$
$$= \left[\frac{n}{h}(1 - g_{\eta}(s) + 1 \right]^{-h}$$

Obtenida la función generatriz deduciremos los 3 primeros momentos respecto al origen, que designaremos por a_1, a_2 y a_3.

$$a_1 = g'(0) = n\, g'_{\eta}(0) = n \cdot m$$

ya que:

$$g'_{\eta}(0) = m$$

y

$$g_{\eta}(0) = 1$$

$$g''(s) = n \cdot g''_{\eta}(s) \cdot \left[\frac{n}{h}(1 - g_{\eta}(s)) + 1 \right]^{-h-1} + n^2 \frac{h+1}{h} [g'_{\eta}(s)]^2 \cdot \left[\frac{n}{h}(1 - g_{\eta}(s)) + 1 \right]^{-h-2}$$

Por tanto

[1] Supongamos que la variable de estructura x tiene como función de distribución $H(q)$ la de Pearson, de forma que su función de densidad $H'(q)$ será:

$$H'(q) = \frac{h^{h}}{\Gamma[h]} e^{-hq} \cdot q^{h-1}$$

Se trata, por tanto de una ley de distribución gamma de parámetro h en donde la variable es hq con el fin de que el valor medio de la variable aleatoria x así distribuida sea la unidad. En efecto

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} qH'(q)dq = \frac{1}{h\Gamma[h]} \int_{0}^{\infty} e^{-hq} (hq)^{h} d(hq) = 1$$

$$a_2 = g''(0) = n \cdot a_2 + n^2 m^2 + \frac{n^2 m^2}{h}$$

Finalmente

$$g'''(s) = n \cdot g'''_\eta(s) \cdot \left[\frac{n}{h}(1-g_\eta(s))+1\right]^{-h-1} + n^2 \frac{h+1}{h} \cdot g''_\eta(s) \cdot g'_\eta(s) \cdot \left[\frac{n}{h}(1-g_\eta(s))+1\right]^{-h-2} +$$

$$+ 2n^2 \cdot \frac{h+1}{h} \cdot g''_\eta(s) \cdot g'_\eta(s) \cdot \left[\frac{n}{h}(1-g_\eta(s))+1\right]^{-h-2} + n^3 \cdot \frac{(h+1)(h+2)}{h^2} \cdot [g'_\eta(s)]^3 \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{n}{h}(1-g_\eta(s))+1\right]^{-h-3}$$

$$a_3 = g'''(0) = na_3 + 3n^2 a_2 m\left(1+\frac{1}{h}\right) + n^3 m^3\left(1+\frac{3}{h}+\frac{2}{h^2}\right)$$

A partir de estos resultados podemos obtener la varianza y el coeficiente de asimetría de la variable ξ (= reclamaciones del ejercicio):

$$\sigma_\xi^2 = a_2 - a_1^2 = na_2 + \frac{n^2 m^2}{h}$$

Hacemos la hipótesis de que la prima de riesgo equivale al valor medio de las reclamaciones. Por tanto las primas de riesgo anuales P importan el producto $n{\cdot}m$ y queda, designado el cociente a_2/m^2 como r:

$$\sigma_\xi^2 = P^2 \cdot \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{h}\right)$$

Deduciremos el coeficiente de asimetría γ_ξ de manera análoga, con el resultado:

$$\gamma_\xi = [a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3] \cdot \frac{1}{\sigma_\xi^3} = \left[na_3 + \frac{3n^2 a_2 m}{h} + \frac{2n^3 m^3}{h^2}\right] \cdot \frac{1}{\sigma_\xi^3}$$

Se obtienen, en resumen, las 3 expresiones siguientes, de gran utilidad para nuestro propósito:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_\xi = a_1 = E[\xi] = P = n \cdot m \\ &\sigma_\xi = P \cdot \sqrt{\frac{r}{n} + \frac{1}{h}} \\ &\gamma_\xi = \frac{na_3 + \dfrac{3a_2 nP}{h} + 2\dfrac{P^3}{h^2}}{\sigma_\xi^3} \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

En efecto, estas formulas permiten estimar las principales características de la distribución de las reclamaciones totales, según se verá más adelante.

Observemos que en el *caso Poisson* (es decir, si la media del número anual de reclamaciones no es aleatoria y por tanto $h = \infty$) tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\xi = P \cdot \sqrt{\frac{r}{n}} \\ &\gamma_\xi = \frac{na_3}{\sigma_\xi^3} \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

6.2 LA APROXIMACIÓN *NP* A LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LAS RECLAMACIONES TOTALES

La dificultad práctica de obtener la expresión analítica de $F(X)$ ha planteado la necesidad de hacer uso de aproximaciones que permitan estimar probabilidades de sucesos relacionados con valores de ξ.

En su obra "Risk Theory", Beard, Pentikäinen y Pesonen dedican especial atención a la aproximación NP "Normal Power", demostrando con datos empíricos que los resultados prácticos de ésta son mejores. No nos detendremos ahora en la deducción de la ecuación que, según la aproximación NP, permite pasar de valores de una variable Normal (0, 1) a valores de la Poisson compuesta estándar $(\xi - nm)/\sigma_\xi$. Destacaremos tan sólo por el momento el resultado de esta transformación, que es, para valores de $(X - nm)/\sigma_\xi > 1$, la siguiente:

$$x = \frac{X - nm}{\sigma_\xi} = y + \frac{1}{6}\gamma_\xi (y^2 - 1) \qquad (D)$$

en donde y representa el valor de la variable Normal (0, 1) al que corresponde igual probabilidad que a la Poisson compuesta estándar. Por ejemplo, si y_0 es el valor tal que $Prob[variable\ Normal\ (0, 1) > y_0] = \varepsilon$ entonces el cálculo del valor de $x_0 = (X_0 - nm)/\sigma_\xi$ para el que $(\xi - nm)/\sigma_\xi > x_0$ resulta inmediatamente, sin más que aplicar (D) para $y = y_0$.

La serie que resulta en la deducción de la aproximación NP no es convergente, por lo que la bondad de la aproximación no mejora con el número de términos de la serie que la transformación incluya. Suele dar resultados adecuados la expresión consignada anteriormente, en que juegan la media, la desviación típica y la asimetría de ξ.

Ahora comparemos con la transformación logarítmica introducida en el Capítulo anterior; ésta se basa en una expresión que genera resultados de igual sentido que la NP (es decir, prolongación hacia la derecha de la función de densidad normal, aunque su forma es exponencial, y no parabólica como en la transformación NP). El carácter exponencial de la logarítmica sugiere que para valores pequeños de y, ésta ofrecerá valores de x inferiores a los de la NP. En cambio, a partir de cierto umbral se alcanzarán valores de x más altos en la logarítmico-normal que en la NP.

Es decir, que para valores muy alejados de la reclamación anual media, la transformación logarítmica generaría probabilidades demasiado altas para ser verosímiles en carteras de tamaños usuales. En cambio, para una solo póliza sí puede resultar adecuada y por ello se utiliza en la distribución de la cuantía o tamaño de cada reclamación.

Las anteriores observaciones sirven para ilustrar por qué la variable logarítmico-normal no es adecuada para aproximar la compuesta de Poisson, a pesar de que se basa sobre un principio análogo al de la transformación NP.

6.3 LA APROXIMACIÓN GAMMA

Caso distinto es el de la función gamma que sí es comúnmente utilizada para representar la variable ξ (compuesta de Poisson). Beard, Pentikäinen y Pesonen afirman que la función gamma con 3 parámetros da lugar, al aproximar la función de Poisson compuesta, a resultados muy parecidos a los de la aproximación NP.[2] Precisan que en la zona más relevante a efectos prácticos, ambas aproximaciones dan valores muy parecidos.

Por otra parte, H. L. Seal,[3] cita las palabras de Bohman y Esscher en su trabajo *Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribution functions and stop loss premiuums*. En este trabajo, publicado en *Skandinavian Actuarial Journal* en 1964, afirmaban los autores que la aproximación gamma proporciona una gran exactitud en amplias partes del campo de su investigación, preguntándose Seal por qué no se usa con mayor profusión. Los resultados que aporta este último autor, en las tablas que incluyen en su artículo, son mejores en

[2] Beard, Pentikäinen, Pesonen, *Risk Theory*, Tercera edición, pág. 121.
[3] H. L. Seal, *Approximations to Risk Theory's F(x, t) by means of the gamma distribution*. Astin Bulletin, 1977.

la aproximación gamma que en la NP en 27 de 38 valores, subrayando que, de 12 casos en que las desviaciones de la media son 4, 5 ó 6 veces la desviación típica, en 9 rinde resultados más satisfactorios la gamma.

En el Capítulo siguiente se contienen los resultados de este propio trabajo.

La función de distribución gamma

$$\Gamma[X,\alpha]=\frac{1}{\Gamma[\alpha]}\int_0^X e^{-u}\cdot u^{\alpha-1}du$$

tiene el inconveniente de contar con un solo parámetro, α, para adaptarse a las distribuciones empíricas. De aquí que se utilice la siguiente función

$$\Gamma[AX+B;\alpha]=\frac{1}{\Gamma[a]}\int_0^{AX+B} e^{-u}\cdot u^{\alpha-1}du$$

la cual tiene 3 parámetros para optimizar el ajuste a la función $F(X) = P[\xi \leq X]$; ξ tiene como media μ_ξ y como desviación típica σ_ξ. Se trata de determinar A, B y α de forma que $F(X)$ quede aproximada por $\Gamma[AX+B;\ \alpha]$.

Para ello empezamos tipificando la variable ξ de forma que

$$\frac{\xi-\mu_\xi}{\sigma_\xi}=\delta \quad \text{y} \quad \frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi}=x$$

$$F(X)=P[\xi\leq X]=P[\delta\leq x]=F(x)\cong\frac{1}{\Gamma[\alpha]}\int_0^{AX+B} e^{-u}\cdot u^{\alpha-1}du$$

Ahora bien, en la distribución gamma el momento respecto a cero de orden i, que designaremos por a_i es:

$$a_i=\frac{\Gamma[\alpha+i]}{\Gamma[\alpha]}$$

Por otra parte sabemos que al estar δ tipificada, han de ser $a_1(\delta) = 0$ y $a_2(\delta) =1$; $a_3(\delta) = \gamma_\xi$ (pues la tipificación no altera la asimetría). Por tanto:

$$a_1(A\delta+B)=Aa_1(\delta)+B=B$$

pero en la distribución gamma $a_1 = \Gamma[\alpha+1]/\Gamma[\alpha] = \alpha$. Luego

$$B = a$$

Análogamente,

$$a_2(A\delta + B) = A^2 \cdot a_2(\delta) + B^2 + 2ABa_1(\delta) = A^2 + B^2 = \alpha(\alpha+1)$$

Por tanto

$$A = \sqrt{\alpha}$$
$$a_3(A\delta + B) = A^3 a_3(\delta) + 3A^2 Ba_2(\delta) + 3AB^2 a_1(\delta) + B^3 = A^3\gamma_\xi + 3A^2B + B^3 =$$
$$= \alpha\sqrt{\alpha} \cdot \gamma_\xi + 3\alpha^2 + \alpha^3 = \alpha(\alpha+1)(\alpha+3)$$

de donde resulta que

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_\xi^2}$$

La función de distribución gamma que se utiliza como aproximación de la Poisson compuesta de media μ_ξ, desviación típica σ_ξ y asimetría γ_ξ es, por consiguiente:

$$F(X) \cong \Gamma[AX + B;\alpha] = \Gamma\left[\frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi}\sqrt{\alpha} + \alpha;\alpha\right] = \frac{1}{\Gamma[\alpha]}\int_0^{\frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi}\sqrt{\alpha}+\alpha} e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} du \qquad (E)$$

(siendo $\alpha = 4/\gamma^2_\xi$).

Finalmente formularemos unas breves observaciones acerca de los ventajas de las aproximaciones NP y gamma, respectivamente:

1. La aproximación NP, con su transformación explícita de la Normal (0, 1) a la Poisson compuesta, permite formular con mayor facilidad expresiones útiles para la Teoría del Riesgo. Así, al ser

$$\frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi} = y + \frac{\gamma_\xi}{6}(y^2 - 1)$$

designando por y_0 el valor tal que

$$Prob[v.\ a.\ \text{Normal }(0,1) > y_0] = \varepsilon$$

Tendremos que, para la probabilidad de insolvencia ε el margen de solvencia necesario U será tal que

$$Prob[\xi > X] = Prob[\xi > P(1+\lambda) + U] = \varepsilon$$

siendo λ el recargo de seguridad y P las primas puras del ejercicio.

Por tanto, el valor de X que hace que $P[\xi > X] = \varepsilon$ es

$$\frac{X - \mu_\xi}{\sigma_\xi} = y_0 + \frac{\gamma_\xi}{6}(y_0^2 - 1)$$

$$X = \left[y_0 + \frac{\gamma_\xi}{6}(y_0^2 - 1) \right] \cdot \sigma_\xi + \mu_\xi$$

Como suponemos que $P = \mu_\xi$, o lo que es lo mismo, que la tarifa es correcta (lo cual es una hipótesis básicas de la Teoría del Riesgo cuya importancia es capital) resulta:

$$U = \left[y_0 + \frac{\gamma_\xi}{6}(y_0^2 - 1) \right] \cdot \sigma_\xi - \lambda P$$

Ecuaciones como ésta son, posibles cuando se utiliza la aproximación NP y en ello radica, tal vez, su gran ventaja, que permite poner de relieve las relaciones entre las variables que intervienen en la Teoría del Riesgo.

2. La aproximación gamma, además de sus mejores resultados prácticos tiene el atractivo, de carácter teórico, de que cuando el tamaño de la cartera crece y el número de reclamaciones se distribuye según la Binomial Negativa, la correspondiente variable de Poisson compuesta tiende a la función Gamma. Este hecho es puesto de manifiesta por Beard, Pentikäinen y Pesonen:[4] si $n \to \infty$ (es decir, para grandes carteras) la desviación típica de ξ/P tiende a $\sigma(x)$ y la asimetría de dicha variable tiende a $\gamma(x)$. En efecto deduciremos por (B) que:

$$\sigma_{\frac{\xi}{P}} = \sqrt{\frac{r}{n} + \frac{1}{h}} = \sqrt{\frac{a_2}{nm^2} + \sigma^2(x)}$$

expresión que tiende a $\sigma(x)$ si $n \to \infty$.

[4] Beard, Pentikäinen, Pesonen, *Risk Theory*, Tercera edición.

De forma análoga se demuestra nuestra anterior afirmación respecto al límite de $\gamma_{\xi/P}$ si $n \to \infty$.

3. Un inconveniente de la aproximación NP, deriva de que su uso correcto exige tres expresiones, según otros tantos tramos de la variable y.

En el Capítulo 8 tendremos ocasión de estudiar la aplicación práctica de la aproximación Gamma.

6.4 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Dado su carácter simétrico, no suele resultar adecuada para representar el comportamiento de las reclamaciones, sin embargo, sirve en la práctica como soporte de ciertas normas en materias de solvencia dinámica en que las garantías financieras (margen de solvencia o provisiones técnicas de estabilización) se fijan legalmente como múltiplo de la desviación típica de las reclamaciones anuales, o de la tasa de ésta respecto de las primas.

6.5 MÉTODO DE RECURRENCIA PARA OBTENER LAS PROBABILIDADES DE LA FUNCIÓN DE LAS RECLAMACIONES

Al principio de este Capítulo, se hizo referencia a la dificultad de obtener la forma analítica de la función de distribución $F(X)$ de las reclamaciones total ξ. En esta sección vamos a presentar un método de recurrencia debido a Adelson[5] y desarrollado por Panjer[6] que permite conocer, en ciertos casos, las probabilidades de $F(X)$ con un gran ahorro de cálculos.

Dada la función de distribución $S(Z)$ de una variable ζ, se denomina convolución k-esima de la misma a la función $S^{k^*}(Z)$, que da la probabilidad de que la suma

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k$$

no sea superior a Z, siendo las ζ_i independientes y equidistribuidas.

Por ejemplo, si la variable ζ representa el costo de la reclamación y éste sólo puede asumir los valores 5 y 10 millones de pesos con probabilidades, respectivamente, de

[5] *Compound Poisson Distributions*, en *Operations Research Quaterly*, núm. 17, 73-75.
[6] *The Aggregate Claims Distribution and Stop-loss Reinsurance*, en *Transactions of the Society of Actuaries, XXXII*; basándose principalmente en el artículo de H. H. Panjer, publicado en el Boletín de Astín (junio de 1981): *Recursive Evaluation of a family of compound distributions.*

$$s(5) = 0.7$$
$$s(10) = 0.3$$

tendremos las siguientes probabilidades para la convolución segunda de $S(Z) = P[\zeta_i \leq Z]$, que designamos por $S^{2*}(Z)$:

$$S^{2*}(10) = P[\zeta_1 + \zeta_2 \leq 10] = 0.7^2 = 0.49$$
$$S^{2*}(15) = P[\zeta_1 + \zeta_2 \leq 15] = 0.49 + \binom{2}{1} \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.91$$
$$S^{2*}(20) = P[\zeta_1 + \zeta_2 \leq 20] = 0.91 + 0.3^2 = 1$$

Las probabilidades de cada uno de los puntos 10, 15 y 20 son, por tanto:

$$s^{2*}(10) = 0.49$$
$$s^{2*}(15) = 0.42$$
$$s^{2*}(20) = 0.09$$

Análogamente, si $k = 3$ reclamaciones, los valores de la función $S(Z)$ estarían concentrados en los puntos $Z = 15, 20, 25$ y 30, con las probabilidades siguientes:

$$S^{3*}(15) = 0.7^3 = 0.343$$
$$S^{3*}(20) = 0.343 + \binom{3}{1} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.784$$
$$S^{3*}(25) = 0.784 + \binom{3}{2} \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.973$$
$$S^{3*}(30) = 0.973 + 0.3^3 = 1$$

Las probabilidades en cada punto 15, 20, 25 y 30 son:

$$s^{3*}(15) = 0.343$$
$$s^{3*}(20) = 0.441$$
$$s^{3*}(25) = 0.189$$
$$s^{3*}(30) = 0.027$$

6.5.1 Relaciones que Derivan de la Convolución

Antes de formular de manera general la primera de estas relaciones procederemos a ilustrar valiéndonos del ejemplo anterior. Consideremos el valor $s^{3*}(25) = 0.189$. Esta claro que:

$$s^{3*}(25) = s^{2*}(20) \cdot s(5) + s^{2*}(15) \cdot s(10) = 0.09 \cdot 0.7 + 0.42 \cdot 0.3 = 0.189$$

En efecto mediante 3 reclamaciones se puede llegar a la suma de 25 millones de pesos por dos caminos:

Suma de 2 reclamaciones	Valor de la 3ª reclamación	Total
20 →	5 →	25
15 →	10 →	25

En general el esquema sería (para ζ discreta):

$$\begin{array}{ccc} \text{Suma de } k\text{-1 reclamaciones} & \text{Importe de la } k\text{-esima reclamación} & \text{Total} \\ \left.\begin{array}{cc} 0 & x \\ 1 & x-1 \\ 2 & x-2 \\ \cdots & \cdots \\ y & x-y \\ \cdots & \cdots \\ x & 0 \end{array}\right\} & & x \end{array}$$

La probabilidad de que la suma de $k-1$ reclamaciones sea y es, por definición de convolución:

$$s^{k*}(x) = \sum_{y=0}^{x} s^{(k-1)*}(y) \cdot s(x-y) \qquad (F)$$

Si ζ es continua la anterior relación se convierte en:

$$s^{k*}(x) = \int_{0}^{x} s^{(k-1)*}(y) \cdot s(x-y)dy \qquad (G)$$

siendo $s^{k*}(x)$ la densidad de la distribución de $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_k$ es decir, la derivada de $S^{k*}(x)$.

Vamos a calcular ahora la probabilidad de que, siendo la suma total de 3 reclamaciones igual a 25, el último de ellos tenga por importe 5, por ejemplo. Este hecho implica que la suma de los dos primeros es 20, suceso cuya probabilidad ya conocemos:

$$s^{2*}(20) = 0.09$$

Luego la probabilidad de que las dos primeras reclamaciones sumen 20 y el tercero sea de 5 es (0.09)(0.7). Ahora bien, como se trata de condicionar tal suceso al hecho de que la suma total de las tres reclamaciones es 25, habrá que dividir $s(5)\cdot s^{2*}(20)$ entre $s^{3*}(25)$ para obtener la probabilidad buscada:

$$s[5 \mid \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 25] = \frac{s(5)\cdot s^{2*}(20)}{s^{3*}(25)} = \frac{1}{3}$$

De igual forma la probabilidad de que la tercera reclamación sea de 10, sabiendo que la suma total de los tres es también 25, será:

$$s[10 \mid \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 25] = \frac{s(10)\cdot s^{2*}(15)}{s^{3*}(25)} = \frac{2}{3}$$

Estas dos probabilidades nos permiten calcular el valor medio de la última (tercera) reclamación, condicionado al hecho de que la suma de los tres es 25:

$$E[\zeta_3 \mid \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 25] = \frac{1}{3}\cdot 5 + \frac{2}{3}\cdot 10 = 8.33 \quad \text{mil pesos}$$

En general, el valor medio de la reclamación $(k+1)$-esimo, condicionado al hecho de que la suma de las $k+1$ reclamaciones es x, será:

$$E\left[\zeta_{k+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k+1}\zeta_i = x\right] = \sum_{y=0}^{x} y\cdot P\left[\zeta_{k+1} = y \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k+1}\zeta_i = x\right] = \sum_{y=0}^{x} y\cdot \frac{s(y)\cdot s^{k*}(x-y)}{s^{(k+1)*}(x)}$$

Ahora bien, hemos supuesto que las variables ζ se distribuían de igual forma; por tanto, las probabilidades asignadas a cada valor de la última coincidirán con las asignadas al respectivo valor de cualquiera de las anteriores. Quiere ello decir que los razonamientos precedentes, referidos a la última variable ζ_{k+1} son válidos también para cualquiera de las anteriores; en conclusión, el valor medio de cualquiera de las $k+1$ variables ζ_k, condicionado a que la suma total sea x, será:

$$\frac{x}{k+1}$$

Por tanto:

$$E\left[\zeta_i \middle| \sum_{i=1}^{k+1} \zeta_i = x\right] = \sum_{y=0}^{x} y \cdot \frac{s(y)\cdot s^{k*}(x-y)}{s^{(k+1)*}(x)} = \frac{x}{k+1}$$

Si $s(x)$ es continua:

$$E\left[\zeta_i \middle| \sum_{i=1}^{k+1} \zeta_i = x\right] = \int_0^x y \cdot \frac{s(y)\cdot s^{k*}(x-y)}{s^{(k+1)*}(x)} dy = \frac{x}{k+1} \qquad (H)$$

6.5.2 Un Tipo Especial de Distribuciones

Panjer parte de una familia de distribuciones de *conteo* (en nuestro caso, de distribuciones del número de reclamaciones) que tiene la propiedad siguiente:[7]

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = a + \frac{b}{k+1} \qquad (I)$$

siendo constantes a y b.

Observemos que la distribución de Poisson y la Binomial Negativa tiene esta propiedad. En efecto, en lo referente a la primera, llegamos en el Capítulo 4, a una expresión equivalente a:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n}{k+1}$$

Luego en la distribución de Poisson $a = 0$ y $b = n$ (que en la media o parámetro único de dicha distribución).

En cuanto a la binomial negativa, obtuvimos igualmente en el Capítulo 4, una expresión que podemos ahora escribir así:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = (h+k)\cdot\frac{q}{k+1} = \frac{h-1}{k+1}\cdot q + q$$

$$\left(\text{siendo} \quad q = 1 - p = \frac{n}{n+h}\right)$$

es decir, que:

[7] *Recursive Evaluation of a family of compound distributions.* (Artículo citado).

$$a = q$$
$$b = (h-1)q$$

Es obvio que la distribución geométrica, caso particular de la binomial negativa cuando en ésta hacemos $h = 1$, cumple también esta propiedad. Entonces, el valor de los parámetros a y b es:

$$a = q$$
$$b = 0$$

Por último, en el caso de la binomial tenemos:

$$p_k = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

por tanto,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = -\frac{p}{q} + \frac{(N+1)p}{q} \cdot \frac{1}{k+1}$$

luego

$$a = -\frac{p}{q} \quad ; \quad b = \frac{(N+1)p}{q}$$

B. Sundt y W. Jewell han demostrado que las cuatro distribuciones mencionadas son las únicas que gozan de la propiedad (I).[8]

6.5.3 Obtención del Método de Recurrencia

Panjer razona sobre la base de funciones $s(x)$ que son continuas. Obtenida la relación de recurrencia, ésta se hace operativa suponiendo que $s(x)$ es discreta.

Designemos por $f(X)$ a la función de densidad de ξ, variable que, como de costumbre, representa las reclamaciones del ejercicio. Si derivamos (A) obtenemos:

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P[v = k] \cdot s^{k^*}(X) = P[v = 0] + \sum_{k=1}^{\infty} P[v = k] \cdot s^{k^*}(X) \qquad (J)$$

[8] *Further Results on Recursive Evaluation of Compound Disistributions*, Boletín de Astín, junio de 1981.

y por tanto, para $X > 0$:

$$f(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P[v=k]\cdot s^{k*}(X)=P[v=1]\cdot s(X)+\sum_{k=2}^{\infty}P[v=k]\cdot s^{k*}(X)=P[v=1]\cdot s(X)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}P[v=k+1]\cdot s^{(k+1)*}(X)$$

En virtud de (I) hacemos

$$P[v=k+1]=P[v=k]\cdot\left(a+\frac{b}{k+1}\right)$$

luego:

$$f(X)=P[v=1]\cdot s(X)+\sum_{k=1}^{\infty}P[v=k]\cdot\left(a+\frac{b}{k+1}\right)\cdot s^{(k+1)*}(X)$$

Ahora bien:

$$a\cdot s^{(k+1)*}(X)+\frac{b}{k+1}\cdot s^{(k+1)*}(X)=a\int_0^X s(y)\cdot s^{k*}(X-y)dy+b\int_0^{\infty}\frac{y}{X}\cdot s(y)\cdot s^{k*}(X-y)dy$$

según se deduce de (F), (G) y (H) respectivamente. En consecuencia,

$$f(X)=P[v=1]\cdot s(X)+\sum_{k=1}^{\infty}P[v=k]\cdot\int_0^X s(y)\cdot s^{k*}(X-y)\cdot\left(a+\frac{b}{X}y\right)dy$$

Pero habíamos visto que, para $X > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P[v=k]\cdot s^{k*}(X)=f(X)$$

Sustituyendo, queda:

$$f(X)=P[v=1]\cdot s(X)+\int_0^X\left(a+\frac{by}{X}\right)\cdot s(y)\cdot f(X-y)dy \qquad (K)$$
$$(\text{para } X>0)$$

Para $X = 0$ es $f(0) = P[v = 0]$.

Este resultado, para el caso en que $s(X)$ es una función continua, constituye la base del algoritmo recurrente que vamos a examinar a continuación.

Si $s(Z)$ es discreta, con probabilidades en los puntos $Z = 1, 2, 3, \ldots$ la función $f(X)$ será asimismo discreta. Suponemos que dichos puntos son equidistantes entre sí. La diferencia entre dos contiguos es un valor que denominamos ***unidad de reclamación***, de forma que tanto los valores de Z como los de X serán medidos en dicha unidad de ahora en adelante. Por ejemplo, si $s(Z)$ sólo puede tomar los valores 5, 10, 15, 20, ... la unidad de reclamación es 5 y la masa probabilística de $s(Z)$ se concentra en los puntos $1, 2, 3, 4, \ldots, i$, en donde i representa un número entero de unidades de reclamación. Los valores de X (= reclamaciones) sólo podrán ser números enteros de unidades de reclamación.

Si Z es discreta, la expresión (K) se transforma en:

$$f(X)=P[v=1]\cdot s(X)+\sum_{y=1}^{X-1}\left(a+\frac{by}{X}\right)\cdot s(y)\cdot f(X-y)$$

Pero

$$P[v=1]=P[v=0]\cdot(a+b)=f(0)\cdot(a+b)$$

y por tanto,

$$f(X)=f(0)\cdot(a+b)\cdot s(X)+\sum_{y=1}^{X-1}\left(a+\frac{by}{X}\right)\cdot s(y)\cdot f(X-y)=\sum_{y=1}^{X}\left(a+\frac{by}{X}\right)\cdot s(y)\cdot f(X-y)$$

Si los puntos en que se concentra la probabilidad distribuida según $s(X)$ son $1, 2, 3, \ldots, N$ está claro que el factor $s(y)$ de cada término de la suma será cero a partir de $y > N$. Por tanto, haciendo

$$v=\min(N,X)$$

queda, definitivamente:

$$f(X)=\sum_{y=1}^{v}\left(a+\frac{by}{X}\right)\cdot s(y)\cdot f(X-y) \qquad (L)$$

que es la fórmula de recurrencia cuando $s(X)$ es una función discreta.

Si comparamos (L) con (J) que expresa la forma usual de $f(X)$, se pone de manifiesto la gran ventaja del algoritmo de Panjer (L). En él no aparecen convoluciones y por tanto el número de cálculos para llegar al valor de $f(X)$ es de orden X; en cambio, en (J) interviene $s^{k*}(X)$ que requiere la obtención de $s^{0*}(X)$, $s^{1*}(X)$, $s^{2*}(X)$, ..., $s^{(k-1)*}(X)$ es decir, k probabilidades, que es necesario introducir en (F) para llegar a la convolución k-esima. A partir de ésta, mediante (J) obtendríamos $f(X)$ todo lo cual exige un número de cálculos del orden X^2.

6.5.4 Aplicación del Algoritmo de Recurrencia

El uso de (L) requiere que la función $s(Z)$ sea discreta y además, que las probabilidades se concentren en N puntos equidistantes 1, 2, 3, ..., N.

Si $s(Z)$ es continua, será necesario un proceso previo de *discretización* de dicha función, que inmediatamente dará lugar a errores en el cálculo de $f(X)$. Cuando el costo ζ de cada reclamación carece de límite superior, como la aplicación del algoritmo (L) exige la existencia de un valor máximo para dicho costo, aparece otro elemento causante de errores, más o menos importantes según lo elevado que sea el valor máximo de ζ que se introduzca en el cálculo: cuando mayor sea dicho máximo N, menor será el error cometido por este concepto, pero más laborioso será el proceso de cálculo.

Cuando $s(Z)$ es una función muy asimétrica –como sucede frecuentemente en la práctica– el error cometido al discretizarla tiende a ser superior.

La aplicación de (L) exige, pues, elegir un rango para ζ, así como la determinación de los puntos i = 1, 2, 3, ..., N en que se concentran las probabilidades. Cada punto significa un número entero de unidades de reclamación, en que medimos tanto Z como X. Acto seguido, hay que calcular las probabilidades asignadas a cada punto. Estas probabilidades son:

- En el punto 1: $s(1) = \int_0^{1.5} s(Z)dZ$

- En el punto 2: $s(2) = \int_{1.5}^{2.5} s(Z)dZ$

...	...

- En el punto i: $s(i) = \int_{i-0.5}^{i+0.5} s(Z)dZ$

...	...

- En el punto N: $s(N) = 1 - S(N - 0.5)$

Además, la aplicación de (L) exige conocer el valor de $f(0)$; conocida la función de probabilidad del número de reclamaciones, se obtiene inmediatamente; no hay más que tener en cuenta que

$$f(0) = P[v = 0]$$

Cuando el número anual de reclamaciones se distribuye según la ley de Poisson $a = 0$ y $b = n$; por tanto (L) es:

$$f(X) = \sum_{y=1}^{v} \frac{ny}{X} \cdot s(y) \cdot f(X-y)$$

En caso de que dicho número anual de reclamaciones siga la ley binomial negativa $a = q$ y $b = (h - 1)q$ y el algoritmo (L) presenta la forma:

$$f(X) = \sum_{y=1}^{v} q\left[1 + \frac{(h-1)y}{X}\right] \cdot s(y) \cdot f(X-y)$$

en donde y representa los valores $1, 2, ..., N$ y X es igualmente una variable discreta medida en unidades de reclamación.

CAPÍTULO 7

OBSERVACIONES ESTADÍSTICAS

El carácter práctico de este trabajo aconseja el empleo de cifras obtenidas a partir de observaciones estadísticas. Con ello, los resultados de nuestras aplicaciones pueden servir de contraste, en alguna medida, sobre la adecuación de las vigentes normas en materia de solvencia del sector afianzador. Por tal razón se ha procurado utilizar datos basados en la experiencia mexicana.

7.1 OBTENCIÓN Y ELABORACIÓN DE LOS DATOS

El estudio de la estabilidad de la empresa afianzadora ha de analizar el comportamiento estadístico de los riesgos cubiertos, el cual dependerá de la composición de la cartera. En consecuencia, se considerarán en lo sucesivo datos estadísticos para los principales ramos. Clasificando a estos en riesgos de masa, grandes riesgos y riesgos especiales.

La fuente de datos estadísticos procede de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF).

De esta, se han obtenido series, para los años 1994 a 2004 de las siguientes magnitudes:[1]

- Número de Pólizas. En este formato se indica el número de pólizas del directo que se encuentren en vigor durante el periodo, en los rubros correspondientes según la vigencia pactada.

- Número de Reclamaciones Pagadas. Se indica el número de reclamaciones que se pagaron durante el periodo.

- Monto de Reclamaciones Pagadas. Pagos efectuados durante el periodo (cifras expresadas en millones de pesos).

[1] Anexo 3.

Los ramos para los que se han obtenido los datos son:

- Fidelidad.
- Judiciales.
- Administrativas.
- Crédito.

Omitiéndose Fideicomisos de Garantía, ya que su naturaleza es de operación.[2]

A continuación se detalla el proceso que describe la obtención de dichas cifras, utilizadas en los siguientes Capítulos de este trabajo; encontrándose en el Anexo 3, los datos obtenidos para la elaboración de los cuadros que se presentan.

A partir de los datos obtendremos lo siguiente:

- El valor medio de cada reclamación (severidad), que designamos por m, resultado de dividir la suma de los monto de reclamaciones pagadas de los 11 años considerados, entre la suma de las 11 cifras de las reclamaciones pagadas.
- Número medio de las reclamaciones pagadas n.
- Desviación típica del número de reclamaciones pagadas, que llamamos σ.
- Parámetro de h (índice de heterogeneidad, para la Distribución Binomial Negativa). Lo calculamos mediante la fórmula, (véase Capítulo 4, H) [índice multiplicado por diez para facilidades de cálculos]:

$$\frac{1}{h} = \frac{\sigma^2 - n}{n^2}$$

En el Cuadro 1, se encuentran los datos correspondientes a cada Ramo de los incluidos en nuestro estudio.

Cuadro 1

Ramos	m	n	σ	h	$\sigma_x^2 = \frac{1}{h}$
Fidelidad	0.325	1,576	514.546	94	0.0106
Judicial	0.180	2,386	1,039.316	53	0.0189
Administrativas	0.740	8,797	3,285.937	72	0.0139
Crédito	1.946	1,383	1,795.831	6	0.1686

[2] Véase Capitulo 2, apartado 2.6.

Una vez calculado lo anterior se operará de la siguiente forma. Para el parámetro $R = a_2 / a_1^2$ o *índice de riesgo* (véase Capítulo 5, *B*), que es el cociente entre el momento de segundo orden respecto a cero y el cuadrado de la media, todo ello referente a la distribución logarítmico-normal (véase Capítulo 5, apartado 5.1).

Conocido R obtenemos inmediatamente $a_2 = R \cdot m^2$, y la desviación típica de la variable *cuantía o tamaño de cada reclamación* que designamos por σ_η cuyo valor es (véase Capítulo 5, *B*)

$$\sigma_\eta = m \cdot \sqrt{R-1}$$

7.2 DISTRIBUCIONES BÁSICAS

7.2.1 La Distribución Binomial Negativa y Logaritmico - Normal

Por su mayor generalidad, se utilizará la binomial negativa para representar la distribución del número de reclamaciones.

Calcularemos la media de dicha distribución a través del cociente entre el volumen de la cartera en primas de riesgo anuales y el valor medio de cada reclamación (severidad).

La desviación típica será, según (Capítulo 4, *H*)

$$\sigma = \sqrt{n + \frac{n^2}{h}}$$

Así, para la cartera de Fidelidad en que las primas de riesgo sean $P = 150$ mdp (expresada en Millones de Pesos) la media n del número de reclamaciones será $n = 1500 / 0.325 = 4613$ reclamaciones con una desviación típica de 479.643 reclamaciones.

La asimetría es, según (Capítulo 4, *H*):

$$\gamma = \left(n + \frac{3n^2}{h} + \frac{2n^3}{h^2} \right) \cdot \frac{1}{\sigma^3}$$

Para los datos anteriores su valor será:

$$\gamma = 0.206$$

Como modelo de la distribución del tamaño de cada reclamación se elige la función logaritmico-normal, cuya función de densidad es (véase Capítulo 5, apartado 5.1):

$$S'(Z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot Z}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\log Z-\mu]^2}$$

En el supuesto de contar con la distribución de frecuencias empíricas, no se hubiera tenido que recurrir a una expresión analítica, pudiéndose evitar la desventaja de suponer un modelo teórico al conocimiento empírico disponible del fenómeno. A partir de la distribución de frecuencias se hubieran calculado los momentos necesarios para los cálculos posteriores.

Hay que reconocer, sin embargo, que no es fácil contar con datos estadísticos que permitan aceptar como suficiente –para las aplicaciones prácticas– el conocimiento de $S(Z)$ en valores grandes de la variable Z, que son los menos frecuentes y sin embargo, los que más interesan para estudiar los problemas de solvencia y reafianzamiento. Por ello, es usual adaptar, a las frecuencias empíricas disponibles hasta un cierto valor de la variable, una función de distribución de Pareto u otra. (Capítulo 5, apartado 5.2).

En el caso presente, sin embargo, no disponemos de distribución de frecuencias y por tanto es indispensable optar por una expresión analítica. Elegida la logarítmico-normal (Capítulo 5, apartado 5.1) sólo queda estimar los parámetros μ y σ a partir de los datos disponibles.

Los datos para la fianza de Fidelidad son, según se vio con anterioridad,

$$m = 0.325$$
$$a_2 = 1.305$$
$$\sigma_\eta = 1.095$$

Para determinar la relación entre los momentos de una variable logarítmico-normal η y otra variable τ distribuida normalmente con parámetros (μ, σ) tenemos en cuenta que

$$\eta = e^{\tau}$$

(Suponemos, por consiguiente, que $w = 0$; véase Capítulo 5, apartado 5.1).

Al admitir que $w = 0$ podemos aplicar (Capitulo 5, C) como

$$\sigma^2 = \log \mathrm{R}$$

En la fianza de Fidelidad, $R = 12.346$ (Cuadro 2). Por tanto $\sigma^2 = 2.513$. En este ramo $\sigma_\eta = 1.095$; con este dato la formula (véase Capítulo 5, *D*) nos permite obtener que $\mu = -2.380$.

Según este procedimiento se calculan, por ramo, los respectivos parámetros μ y σ^2 cuyos valores se exponen en el Cuadro 2. Los momentos respecto al origen de la variable *tamaño o cuantía de cada reclamación* resultan de las cifras obtenidas y se detallan también en el Cuadro.

Cuadro 2

PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN DEL COSTO DE CADA RECLAMACIÓN Y LA DISTRIBUCIÓN LOGARÍTMICO-NORMAL QUE LA REPRESENTA

Ramos	m	$R = \frac{a_2}{m^2}$	$a_2 = R \cdot m^2$	$\sigma_\eta = m\sqrt{R-1}$	γ_η	$a_3 = \gamma_\eta \sigma_\eta^3 + 3ma_2 - 2m^3$	σ^2	μ
Fidelidad	0.325	12.346	1.305	1.095	48.323	64.683	2.513	-2.380
Judicial	0.180	14.674	0.473	0.664	61.659	18.290	2.686	-3.060
Administrativas	0.740	15.564	8.524	2.824	67.032	1,528.214	2.745	-1.674
Crédito	1.946	12.096	45.812	6.483	46.952	13,043.944	2.493	-0.581

En la distribución logarítmico-normal la asimetría depende únicamente del parámetro R que denominábamos *índice de riesgo*. En efecto, la asimetría de la función $S'(Z)$ logarítmico-normal de parámetros μ y σ^2 es:

$$\gamma_\eta = \left(a_3 - 3ma_2 + 2m^3\right) \cdot \frac{1}{\sigma_\eta^3}$$

Sustituyendo los momentos m, a_2 y a_3 por sus valores según (Capítulo 5, *A*) –ya que tales expresiones son aplicables al ser $\eta = e^\tau$ y $w = 0$– obtenemos que

$$\gamma_\eta = (R+2) \cdot \sqrt{R-1}$$

7.2.2 La Distribución de Poisson-Compuesta. Valor de sus Parámetros

Según se expuso en el Capítulo 6, apartado 6.1, el importe ξ de las reclamaciones anuales, para cada ramo, modalidad o subramos en que se haya dividido la cartera, se distribuye como una variable aleatoria de Poisson compuesta, cuya función de distribución $F(X)$ es:

$$F(X) = P[\xi \leq X] = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu \cdot S^{\nu*(X)}$$

en donde

p_v = Probabilidad de que el número de reclamaciones del ejercicio considerado sea en la sección de la cartera de que se trate, igual a v.

$S^{v*}(X)$ = Convolución v-sima de la función $S(X)$ de distribución del costo de cada reclamación (véase Capítulo 6, apartado 6.5.1).

Calcularemos la media, desviación típica y coeficiente de asimetría de la variable (reclamación anual: Poisson Compuesta) valiéndose de las fórmulas (Capítulo 6, B).

Los datos requeridos para el cálculo de estos parámetros son ya conocidos (ver Cuadros 1 y 2). Sólo resta determinar el tamaño de la cartera a través del volumen P de primas puras. Así, por ejemplo, para una cartera en que $P = 150$ obtenemos

$$n = \frac{150}{m}$$

En el Cuadro 3 se recogen los resultados de los cálculos, por ramos, para una cartera de tamaño $P = 150$ (primas de riesgo).

Cuadro 3

Ramos	m	$n = \frac{150}{m}$	σ_ξ	γ_ξ
Fidelidad	0.325	461	28.991	1.374
Judicial	0.180	835	28.656	0.895
Administrativas	0.740	203	45.183	3.490
Crédito	1.946	77	85.581	2.337

Del Cuadro 3 se obtiene una información relevante para evaluar las exigencias financieras del afianzador. Se observa en el que las desviaciones típicas de las reclamaciones totales σ_ξ se agrupan en torno a 3 tramos de valores: el más bajo comprende el intervalo de 28 a 29; el medio de 45; y el superior esta representado por 85. Ello sugiere que los diversos ramos considerados podrían clasificarse, en atención a su distinto grado de variabilidad –y por tanto, como se ve en el Capítulo 6 según las exigencias financieras necesarias– en 3 grupos:

Cuadro 4

Grupos	Ramos
I. Riesgos de Masa	- Fidelidad - Judiciales
II. Grandes Riesgos	Administrativas
III. Riesgos Especiales	Crédito

Según se observa en el cuadro anterior, los datos utilizados apoyan la tesis de la conformidad de discriminar las carteras en 3 grupos de ramos. Este reducido número de grupos permite no salirse de los límites de la sencillez en las aplicaciones practicas, es decir, permite distinguir los ramos para una generalización de los mismos en los cálculos efectuados dando así la ventaja de dar crédito al fenómeno indudable de la distinta variabilidad estadística de la reclamación anual según se trate de ramos comprendidos en uno u otro grupo.

Estos grupos se han seleccionado por su carácter de representativos de los riegos que contienen (subramos o modalidades), incluir cada uno de los ramos en uno u otro grupo seria objeto de los correspondientes estudios estadísticos actuariales.

El presente trabajo solo pretende aplicar los métodos o técnicas descritos de la Teoría del Riesgo, y de paso, llamar la atención sobre la conveniencia del análisis de las exigencias financieras según las características estadísticas del riego afianzado.

Cabe plantearse el problema de si, desde un punto de vista actuarial, el concepto de ramo es adecuado para proceder al análisis de la solvencia. Deben, sin embargo, reconocerse las dificultades practicas de utilizar otras clasificaciones de riesgos.

En consecuencia, se mostró como se obtuvieron los datos que se manejaran a lo largo de este trabajo y como aplicación práctica, estudiaremos las necesidades de solvencia para cada uno de los grupos descritos anteriormente basados en datos de la experiencia mexicana.

CAPÍTULO 8

LA ALEATORIEDAD DE LOS RESULTADOS TECNICOS Y LA SOLVENCIA

En este Capítulo se aplicara algunas cuestiones examinadas en los anteriores; para ello, se estudiará la determinación del margen de solvencia mínimo U al comienzo del ejercicio, necesario para garantizar una determinada probabilidad de solvencia $1 - \psi$ al final del mismo, todo ello, sin introducir la posibilidad de efectuar cesiones de reafianzamiento.

Observemos que:

a) La solvencia se contrasta sólo al final del ejercicio comparando la cifra de primas de riesgo con las reclamaciones, ambas referidas a todo el ejercicio; a su cierre se enfrentan dichas primas con las reclamaciones imputables al mismo.

b) Se calculará el margen mínimo U de forma que garantice la solvencia en el ejercicio considerado, y no necesariamente en los posteriores. El horizonte temporal, es, por tanto, anual.

   Se trata, por tanto, de resolver la ecuación en U:

$$P[\xi \leq P + U] = 1 - \psi$$

en donde, como siempre, ξ representa la reclamación anual (variable aleatoria), P las primas de riesgo anuales y U el margen mínimo de solvencia; ψ es la probabilidad de insolvencia admitida.

Resolver la ecuación anterior implica conocer la función de distribución de ξ. En el Capítulo 6 se estudiaron algunas de sus aproximaciones (suponiendo que ξ es una variable compuesta de Poisson). Es ahora conveniente contrastar los resultados numéricos de dos de ellas –la NP y la gamma– con los que genera la simulación de la propia variable ξ, a fin de mostrar si tales aproximaciones aparecen o no como adecuadas. Los propósitos de este ejercicio o experimento de simulación son, por tanto:

a) Justificar el empleo que en este trabajo haremos de las aproximaciones mencionadas.[1]

b) Ilustrar una forma práctica en que puede llevarse a cabo un contraste entre la fórmula adoptada en cada caso concreto y la variable que ésta pretende modelizar.

Lo anterior exige la simulación aleatoria, la cual, se examina profundamente en el Anexo 2.

8.1 EL COMPORTAMIENTO ESTADÍSTICO DE LAS RECLAMACIONES. SU OBTENCIÓN EMPÍRICA MEDIANTE SIMULACIÓN

Es evidente que en los distintos tipos de fianzas (ramos, subramos y/o grupos de éstos que presenten suficiente homogeneidad) dan lugar a distribuciones muy dispares de las cifras de la reclamación anual. Este hecho justifica el planteamiento de la estabilidad del afianzador en función de los riesgos que cubra (Capítulo 7, apartado 7.2.2) y tal es el punto de vista que se adoptará en este Capítulo.

Según se indico al principio de este Capítulo, se simulara la reclamación anual de una cartera de fianzas; las características de esa cartera responden a los datos estadísticos observados (con las salvedades expresadas en el Capítulo 7) a fin de que las conclusiones que alcancemos tengan alguna referencia a la realidad.

La simulación será de 2000 ejercicios, y se refiere a una cartera cuya reclamación anual no presente un coeficiente de asimetría superior a la unidad. Por otra parte, no puede utilizarse carteras de gran volumen, porque el tiempo requerido para efectuar la simulación crecería demasiado. Por tal razón se ha elegido la cartera de Fidelidad con unas primas de riesgo anuales de $P = 150$ mdp. Los Cuadros 1, 2

[1] Pentikäinen, *Approximative Evaluation of the Distribution Function of Aggregete Claims*, se contiene un gran número de comparaciones entre los resultados de varias aproximaciones, y los de la función de distribución exacta. En general, la conclusión que deriva de estas comparaciones es la bondad de las aproximaciones, siempre que el coeficiente de asimetría sea moderado (inferior a 1).

y 3 del Capítulo 7 contienen los parámetros necesarios para definir el comportamiento estadístico de ξ (reclamación anual):

$m =$	(costo o cuantía media de la reclamación) =	0.325
$h =$	(parámetro de heterogeneidad) =	94
$n =$	(número medio anual de reclamaciones) =	461

El número de reclamaciones se supone distribuido según la ley binomial negativa (Capítulo 4, apartado 4.2); su parámetro p es obtenido mediante la relación

$$p = \frac{h}{n+h}$$

y es en nuestro caso 0.169265.

Como se expreso anteriormente, para realizar este estudio fue necesario efectuar una simulación estocástica,[2] en la cual se realizaron los siguientes cálculos:

- Distribución del número de reclamaciones en cada ejercicio: El proceso se inicia generando un número aleatorio que signifique el número de reclamaciones del ejercicio, distribuido según la ley binomial negativa.[3]

- Distribución de la cuantía de cada reclamación: Se ha simulado la distribución logaritmico-normal[4] que para el ramo de Fidelidad (Cuadro 2 del Capítulo 7) tiene los parámetros $\mu = -2.380$ y $\sigma^2 = 2.513$.

Fijado el número de reclamaciones de un ejercicio, a través del proceso descrito para simular la variable binomial negativa, se simula igual número de cifras aleatorias –que representan el costo de cada una de las reclamaciones– distribuidas según la ley logaritmico-normal.

- Distribución de las reclamaciones totales: es, la suma de los costos de todas las reclamaciones habidas en el experimento correspondiente al mismo.

Las cifras obtenidas son las reflejadas en el Cuadro 1, distribuidas por ramos.

[2] Véase Anexo 2.
[3] Véase Capítulo 4, apartado 4.2 y Anexo 2, apartado 2.6.
[4] Véase Capítulo 5, apartado 5.1 y Anexo 2, apartado 2.2.

Cuadro 1
RESULTADO DE LA SIMULACIÓN (2000 EJERCICIOS)
DISTRIBUCIÓN DE LAS RECLAMACIONES DE CADA EJERCICIO (en mdp)

De	Hasta	Núm. Ejerc. (Frecuencia)
25	37.5	0
37.5	50	2
50	62.5	25
62.5	75	166
75	87.5	379
87.5	100	488
100	112.5	423
112.5	125	261
125	137.5	138
137.5	150	65
150	162.5	36
162.5	175	8
175	187.5	4
187.5	200	2
200	212.5	2
212.5	225	1
225	237.5	0

Las dos primeras columnas determinan el rango de las reclamaciones totales de cada ejercicio, la tercera columna señala el número de ejercicios que están comprendidos en este intervalo. Por ejemplo, ha habido 25 ejercicios cuyas reclamaciones quedan comprendidas entre 50 y 62.5 mdp.

Más adelante se comparan las frecuencias relativas de esta simulación con las probabilidades calculadas según los modelos NP y gamma, respectivamente.

8.2 APLICACIÓN DE LA APROXIMACIÓN NP

Ante todo, es necesario calcular los tres parámetros (P; σ_ξ; γ_ξ) de la función de densidad de la variable ξ, representativa de la reclamación anual de la cartera considerada.

Utilizando las formulas (Capítulo 6, B) y teniendo en cuenta que el volumen de primas de riesgo es $P = 150$, obtenemos, a partir del Cuadro 3 del Capítulo 7, para las Fianzas de Fidelidad (es decir, una cartera de iguales características a la simulada):

$$\sigma_\xi = 28.991$$
$$\gamma_\xi = 1.374$$

La transformación NP para $x > 1$ es, según (Capítulo 6, *D*) la siguiente:

$$x = y + \frac{1}{6}\gamma_\xi\left(y^2 - 1\right)$$

En donde x e y representan, respectivamente, las variables tipificadas de Poisson compuesta y Normal. En el Capítulo siguiente examinaremos con detalle por qué la anterior transformación es sólo válida para $x > 1$. Aquí es suficiente su versión abreviada porque estamos interesados exclusivamente en el comportamiento estadístico de la reclamación anual en valores extremos de x (es decir, para valores grandes de la variable).

Ahora bien, para conocer la función de densidad de la reclamación ξ, cuando se acepta como suficiente la transformación NP necesitamos despejar y en la anterior expresión, a fin de sustituir su valor en la función de distribución normal, $N(y)$. El valor de $y > 0$ en función de x es (poniendo, por comodidad γ en lugar de γ_ξ):

$$y = -\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6}{\gamma}x}$$

La función de densidad de ξ será:

$$f(X) = F'(X) \approx \frac{dy}{dX} N'(y)$$

en donde

$$\frac{dy}{dX} = \frac{6}{\gamma\sigma_\xi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6}{\gamma} \cdot \frac{X - P}{\sigma_\xi}}}$$

La representación gráfica de esta función se muestra más adelante.

8.3 APLICACIÓN DE LA APROXIMACIÓN GAMMA

Según (Capítulo 6, *E*) la función de distribución gamma que se utiliza como aproximación de la Poisson compuesta de media $\mu_\xi = P$, desviación típica σ_ξ y asimetría γ_ξ es:

$$F(X) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi}\sqrt{\alpha}+\alpha} e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} du$$

en donde

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_\xi^2}$$

La función de densidad $f(X)$ será:

$$f(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sigma_\xi \cdot \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi}\sqrt{\alpha}-\alpha} \cdot \left(\frac{X-\mu_\xi}{\sigma_\xi}\sqrt{\alpha} + \alpha \right)^{\alpha-1} \qquad (A)$$

Aplicando esta aproximación a la cartera descrita en el apartado anterior, se tiene:

$P =$ 150 mdp
$\sigma_\xi =$ 28.991 mdp
$\gamma_\xi =$ 1.374
$\alpha =$ 2.120

El ejemplo práctico de la distribución gamma plantea el problema de calcular el valor de la expresión $\Gamma(\alpha)$ para valores no enteros del parámetro. En valores grandes de éste se ha utilizado la fórmula de Stirling (Anexo 1.A.):

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \cdot \sqrt{2\pi\alpha}$$

Si α es grande, con el fin de evitar que resulten cifras demasiado elevadas al realizar cálculos en que intervenga la función de densidad $f(X)$, suele resultar conveniente tomar el logaritmo de

$$\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}$$

e incluirlo en el exponente que aparece en la función $f(X)$.

Sustituyendo en (A) los valores de α, $\Gamma(\alpha)$, σ_ξ y μ_ξ resulta la función de densidad correspondiente. Esta función sólo está definida para $x > 35.2$; puede convenirse que para los restantes valores de la variable de densidad es nula.

La representación gráfica de la función obtenida se encuentra en la figura 1, que permite su comparación con la fórmula NP vista anteriormente, para los parámetros $P = 150$; $\sigma_\xi = 28.991$; $\gamma_\xi = 1.374$ y valores $x \leq 50$ (para tramos inferiores a 48.7 no está definida), cuyo trazo es continuo y sólo es válida como aproximación de la Poisson compuesta para $x > 1$, es decir, para $x > 123.164$. Según se dijo con anterioridad, resulta notable la similitud de valores entre ambas aproximaciones, confirmándose así la valoración de Beard, Pentikäinen y Pesonen, en el sentido de que las dos dan resultados muy parecidos, al menos para los valores de ξ que suelen intervenir en las aplicaciones prácticas. Hacen notar también estos autores que, cuando la simetría llega a 2, ambos métodos dejan de ser fiables como aproximación de la Poisson compuesta.

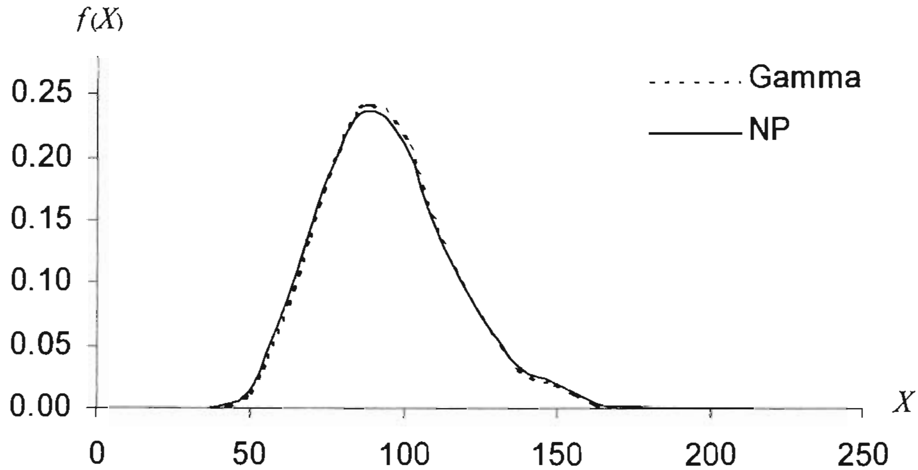


Figura 1

Puede observarse a simple vista la gran similitud entre la aproximación NP y la Gamma.

En el Cuadro 2 pueden compararse las aproximaciones Gamma y NP con respecto a los resultados de la simulación efectuada. Los datos de las columnas segunda, tercera y cuarta presentan las frecuencias relativas (en caso de la simulación) y probabilidades (en caso de las aproximaciones) que corresponden a los intervalos de la variable *reclamación total* que se enumeran en la primera columna. Todos los cálculos se refieren a la hipotética cartera de Fianzas de Fidelidad con un volumen de prima de riesgos anuales de 150 mdp mencionada anteriormente.

Cuadro 2
COMPARACIÓN DE RESULTADOS
(Cartera de Fianzas de Fidelidad de 150 mdp)

Reclamaciones Totales	Frecuencias (Simulación)	Probabilidades	
		Gamma	NP
37.5 - 50	0.0010	0.000912	0.000662
50 - 62.5	0.0125	0.012604	0.013909
62.5 - 75	0.0830	0.082432	0.086267
75 - 87.5	0.1895	0.184841	0.183043
87.5 - 100	0.2440	0.242220	0.236113
100 - 112.5	0.2115	0.214689	0.211030
112.5 - 125	0.1305	0.133025	0.133021
125 - 137.5	0.0690	0.071556	0.072967
137.5 - 150	0.0325	0.031425	0.032541
150 - 162.5	0.0180	0.018997	0.019846
162.5 - 175	0.0040	0.003783	0.003952
175 - 187.5	0.0020	0.001767	0.001719
187.5 - 200	0.0010	0.000801	0.000813
200 - 212.5	0.0010	0.000894	0.000882
212.5 - 225	0.0005	0.000432	0.000315
225 - 237.5	0.0000	0.000092	0.000063

A la vista de los datos del Cuadro 2 puede observarse que la aproximación Gamma se acerca más a los resultados de la simulación, que podemos adoptar como valores verdaderos de las probabilidades a aproximar. No obstante, por la similitud de las estimaciones según el método Gamma y el NP, consideraremos a ambos prácticamente equivalentes entre sí. En este Capítulo utilizaremos el primero de ellos, y en el siguiente, el método NP.

8.4 APLICACIÓN PRÁCTICA: CÁLCULO DE LAS EXIGENCIAS FINANCIERAS PARA CADA GRUPO DE RAMOS

Una adecuación completa de los requisitos de solvencia a las características del riesgo afianzado exigiría:

A) Una discriminación de la cartera en grupos homogéneos de riesgos que incluso podría ir más allá de la simple clasificación por ramos. Así, por ejemplo, dentro del ramo de Fidelidad o de Crédito, cabe distinguir riesgos de muy diversa naturaleza.[5]

B) Una valoración de las fluctuaciones estadísticas de la entidad afianzadora de que se trate, a la vista de las específicas características de su cartera.

[5] Véase Capítulo 2.

C) Una revisión periódica y frecuente de las valoraciones realizadas.

Sin embargo, según se observa en el Capítulo 7, apartado 7.2.2, los datos utilizados apoyan la tesis de la conveniencia de discriminar las carteras en 3 grupos de ramos. Este reducido número de grupos permite no salirse de los límites de la sencillez en las aplicaciones, con la ventaja de dar crédito al fenómeno indudable de la distinta variabilidad estadística de la reclamación anual según se trate de ramos comprendidos en uno u otro grupo.

En consecuencia, y como aplicación práctica, se estudiara a continuación las necesidades de solvencia para cada uno de los grupos I, II y III definidos en el Capítulo 7, apartado 7.2.2. Abordaremos este estudio sobre los supuestos siguientes:

Por razones de sencillez se considerara el ramo particular en total (en su caso) como suficientemente representativo del los respectivo subramos que contiene.

Por las razones apuntadas en el apartado anterior, se utilizara la función gamma como aproximación de la distribución Poisson-compuesta correspondiente a cada grupo.

Cuestión fundamental es la selección de la probabilidad de solvencia. Se ha elegido como probabilidad de *ruina* 1/3% es decir, aproximadamente 0.3%.

El costo o cuantía mínima del margen de solvencia para una cartera de un volumen P_0 en cualquiera de los grupos se obtiene resolviendo la ecuación:

$$P[\xi > P_0 + U] = 0.003 \qquad (B)$$

Hipótesis fundamental en lo que sigue es la referente a la tarifa, que se supone correctamente calculada para la cobertura del riesgo. El recargo de seguridad, de ser positivo, no haría sino disminuir por su importe la cuantía mínima de U, por lo que se supone nulo. Se calculara la probabilidad conforme a la aproximación gamma con los parámetros aplicables a cada supuesto y que veremos en el Capítulo siguiente.

Por último, se debe de tener presente que todos los cálculos se refieren a un horizonte temporal de un año, la cual tiene la ventaja de conducir a resultados prácticos.

8.4.1 Fianzas del Grupo I.

Al aumentar el volumen de la cartera –medido en número anual medio de reclamaciones–, la función de densidad de la variable *reclamación anual* se va haciendo más simétrica y menos dispersa, aproximándose a la normal. De aquí que sea necesario calcular el importe mínimo del margen de solvencia U para diversos tamaños de la cartera. De esta forma es posible construir una función empírica $U = f(P)$ que puede aproximarse después mediante expresiones analíticas sencillas que permitan relacionar el margen mínimo de solvencia con el tamaño de la cartera.

Puesto que se empleara en los cálculos la aproximación gamma, habremos de partir de la expresión (Capítulo 6, *E*) cuya aplicación exige conocer los valores de μ_ξ, σ_ξ y γ_ξ. En consecuencia se calcularan estos parámetros para diversos tamaños de cartera (medidos, como siempre, en primas de riesgo) para lo cual se aplicaran las fórmulas antes vistas (Capítulo 6, *B*).

Para las Fianzas de Fidelidad el tamaño medio de reclamaciones m es de 0.325.[6] Por lo tanto, el número medio anual de reclamaciones es

$$n = \frac{P}{m}$$

Por ejemplo, cuando $P = 200$, $n = 615.384$; los demás datos necesarios para aplicar las expresiones (Capítulo 6, *B*) los obtendremos de los Cuadros 1 y 2 del Capítulo 7, es decir:

$$\begin{aligned} R &= 12.346 \\ h &= 94 \\ a_2 &= 1.305 \\ a_3 &= 64.683 \end{aligned}$$

para estos valores corresponden los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} \mu_\xi &= 200 \\ \sigma_\xi &= 38.654 \\ \gamma_\xi &= 0.614 \end{aligned}$$

Al ser el parámetro $\alpha = \frac{4}{\gamma_\xi^2}$,[7] resulta que, en este caso $\alpha = 10.609$. Sustituyendo en (*A*) los valores anteriores resulta la función de densidad correspondiente.

Sin embargo, es más práctico utilizar la función Gamma:

[6] Cuadro 2 del Capítulo 7.
[7] Véase Capítulo 6, *E*.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-t}\cdot t^{\alpha-1}dt$$

y obtener las probabilidades deseadas a través de los límites de integración. Por ejemplo, para $P[\xi \leq X_0]$ el límite superior sería:

$$x_0 = \frac{X_0 - P}{\sigma_\xi}\cdot\sqrt{\alpha}+\alpha$$

El resolver (B) para distintos valores de P (Prima de riesgo) da lugar a otras tantas soluciones o valores de U (margen mínimo de solvencia). Los resultados se expresan en el Cuadro 3.

Cuadro 3
MARGEN MÍNIMO DE SOLVENCIA
(Grupo I)

Tamaño cartera P (mdp)	U (mdp)	U/P
100	54	0.54
150	81	0.54
200	108	0.54
500	269	0.54
1,000	538	0.54
1,500	807	0.54
2,000	1,076	0.54
3,000	1,614	0.54
5,000	2,690	0.54

Obsérvese la gran estabilidad del cociente U/P para tamaños muy considerados de la cartera. Este fenómeno es consecuencia de la modesta variabilidad de los riesgos incluidos en el Grupo I, que presentan dispersiones reducidas y asimetrías moderada.

El significado de las cifras contenidas en el cuadro 3 es el siguiente: por ejemplo se necesitan 81 mdp como margen mínimo de solvencia (U) exigibles para una cartera (P) con prima de riesgo de 150 mdp, dando así la garantía de solvencia de la compañía.

Si suponemos que la prima de riesgo es un 60% de la prima comercial, y aceptamos el 54% como valor del cociente U/P para todos los tamaños de cartera podríamos formular como regla práctica en las fianzas del Grupo I (riesgos de masa) que el margen de solvencia debe ser, como mínimo, 32.4% de las primas comerciales.[8]

8.4.2 Fianzas del Grupo II

En el Grupo II la desviación típica y asimetría son menores al doble a las del Grupo I, según se trate de carteras de pequeño o de gran tamaño.

Utilizando igual procedimiento que el detallado en el apartado anterior, observemos los pares de valores (P, U) que se reflejan a continuación.

Cuadro 4
MARGEN MÍNIMO DE SOLVENCIA
(Grupo II)

Tamaño cartera P (mdp)	U (mdp)	U/P
100	55	0.55
150	82	0.55
200	109	0.55
500	273	0.55
1,000	547	0.55
1,500	820	0.55
2,000	1,094	0.55
3,000	1,641	0.55
5,000	2,734	0.55

Al igual que sucede en las Fianzas del Grupo I, se observa una estabilidad en el cociente U/P para tamaños muy considerados de la cartera. Consecuencia de la modesta variabilidad de los riesgos incluidos en el Grupo II.

El significado de las cifras en el cuadro 4 es el siguiente: empleando la misma lógica que los resultados del grupo I, se necesitan 82 mdp como margen mínimo de solvencia (U) exigibles para una cartera (P) con prima de riesgo de 150 mdp, garantizando la solvencia de la compañía.

En este caso, también se supondrá que, las primas de riesgo representan el 60% (suponiendo el mismo porcentaje de gastos en este grupo que el anterior, para fines comparativos, en realidad los gastos son diferentes para cada ramo) de las

[8] Valor obtenido al realizar el producto de la prima de riesgo por el valor del cociente U/P, cuyo resultado es el margen mínimo de solvencia para cualquier tamaño de P.

primas comerciales, aceptamos el coeficientes *U/P* igual a 0.55% equivalente al 33% sobre dicha "prima comercial".

8.4.3 Fianzas del Grupo III

El Grupo III (riesgos especiales) es el que presenta alguna fluctuación en cuanto a las reclamaciones, las cuales originarán exigencias mayores en la solvencia.

Aplicando igual método que el empleado en los Grupos I y II, obtenemos los siguientes resultados:

Cuadro 5
MARGEN MÍNIMO DE SOLVENCIA
(Grupo III)

Tamaño cartera *P* (mdp)	*U* (mdp)	*U/P*
100	177	1.77
150	265	1.76
200	352	1.76
500	880	1.76
1,000	1,760	1.76
1,500	2,640	1.76
2,000	3,520	1.76
3,000	5,280	1.76
5,000	8,800	1.76

Si comparamos los cocientes *U/P* del Grupo III con los demás Grupo observamos una diferencia entre el tamaño mínimo y máximo de la cartera *P*, a comparación de los otros grupos.

La explicación de este fenómeno es la siguiente: la desviación típica y asimetría del Grupo II es análoga a la del Grupo I, debido principalmente, a la selección del riesgo, en comparación con el Grupo III (Fianzas de Crédito), ya que los montos manejados son iguales o superiores a los parámetros que fija la propia institución.

El significado del cuadro 5 es el siguiente: empleando la misma lógica que los resultados del grupo I y II, se necesitan 265 mdp como margen mínimo de solvencia (*U*) exigibles para una cartera (*P*) con primas de riesgo de 150 mdp, garantizando la solvencia de la compañía.

Como se puede observa en el cuadro 5, la relación U (margen mínimo de solvencia) es mayor a P (Prima de riesgo), por lo tanto a fin de traducir los datos a normas de fácil aplicación, procedemos de la siguiente forma:

Si las primas de riesgo representan, aproximadamente, el 55% de las primas comerciales (porcentaje asumido para no capitalizar más en el riesgo) los coeficientes 1.77% y 1.76% equivalen a 97.4% y 96.8% respectivamente y el volumen de 100 a 150 mdp de estas primas, aproximadamente, por lo que podemos formular las siguientes normas:

- Primera: El margen mínimo de solvencia equivale al 97.4% de las primas comerciales, sin que pueda ser inferior a 100 mdp. Si las primas superan los 150 mdp, dicho porcentaje se aplicará sólo a este importe.

- Segunda: Si las primas comerciales del ejercicio superan los 150 mdp, a las que excedan de esta cifra se aplicará el 96.8%, sumándose el resultado al obtenido según la regla anterior.

Estas reglas para el cálculo del margen de solvencia mínimo en cada uno de los grupos a los que se ha llegado, se desprende una marcada linealidad en la ley que relaciona primas con margen mínimo, en forma análoga a las normas establecidas.

Esto es especialmente llamativo en los Grupos I y II en que la proporcionalidad es total, al ser único el porcentaje y el Grupo III en que, si bien hay dos tramos, los porcentajes de cada uno son muy similares entre sí.

Por supuesto que cuanto más se discrimine a cada grupo, mejor responderán las exigencias financieras que de ello resulten a la realidad de los riesgos cubiertos.

Es por ello que, el tomar riesgos con gran variabilidad, puede hacer insolvente a la Afianzadora; una medida para prever este problema es contar con elementos suficientes para resarcirse de las reclamaciones procedentes pagadas (garantías), de esto dependerá en gran medida su solidez y estabilidad, misma que le permitirá cumplir con eficacia las obligaciones contraídas ante sus clientes beneficiarios de las pólizas.

CAPÍTULO 9

SOLVENCIA GLOBAL

9.1 EL COMPORTAMIENTO ESTADÍSTICO DE LA RECLAMACIÓN GLOBAL

En el capitulo anterior se examino el efecto sobre la solvencia de las fluctuaciones estadísticas de las reclamaciones. Sin embargo, la realidad muestra que un gran número de afianzadoras se dedican a realizar operaciones encuadradas en varios ramos distintos.

Por otra parte, no sería correcto calcular el margen mínimo de solvencia de una afianzadora *multirramo*, por medio de la simple suma de los márgenes mínimos de cada uno de los grupos en que opere. La reclamación total es una variable aleatoria que se distribuye según una función que es convolución de las tres funciones de distribución de cada uno de los grupos de ramos, ello suponiendo que las reclamaciones anuales de cada una sean estadísticamente independientes de las restantes.

En este capitulo seguiremos considerando los tres grupos ya conocidos; las conclusiones que alcancemos podrían también aplicarse a otras carteras, divididas según criterios diferentes.

Lo que interesa, por tanto, es conocer la función de distribución $F(X)$ de la variable aleatoria *reclamación global anual* que designamos es este Capitulo mediante ξ (para distinguirla de ξ_1, ξ_2 y ξ_3, que expresan las reclamaciones anuales de cada uno de los tres grupos de ramos), y si las ξ_i son independientes, será la convolución de $F_1(X)$, $F_2(X)$ y $F_3(X)$. Las funciones $F_i(X)$ fueron definidas y estudiadas en el Capítulo 6, (si bien entonces las designábamos sin subíndice, puesto que allí estudiábamos cada grupo de ramos por separado, sin relación con los otros dos). Por ejemplo, la función de densidad $F'_1(X) = f_1(X)$, aproximada mediante la función Gamma y la transformación NP, esta representada gráficamente en la figura 1 del Capítulo 8 para una cartera de 150 mdp de primas de riesgo anuales.

El problema, al considerar la cartera de una afianzadora en forma global (es decir, constituida por pólizas de los tres grupos de ramos) es doble: en primer lugar, trata de establecer que tipo de función de distribución corresponde a la variable $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ y en concreto si es una Poisson compuesta. En segundo lugar, qué posibles fórmulas pueden utilizarse para aproximar aquella función de distribución y poder derivar conclusiones prácticas paralelas a las que obtuvimos –aunque para cada grupo por separado– en el Capitulo 7.

Por lo que se refiere a la primera cuestión comenzamos recordando que, según ya vimos en el Capítulo 6 las funciones $F_i(X)$ tendrán como expresión:

$$F_i(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P_i(v = k) \cdot S_i^{k^*}(X) \qquad (A)$$

en donde $P_i(v = k)$ es la probabilidad de que en el ejercicio ocurran exactamente k reclamaciones en la cartera del grupo i-ésimo; $S_i^{k^*}(X)$ es la convolución k-esima de la función de distribución del tamaño o cuantía de cada reclamación del grupo i-esimo, es decir, la probabilidad de que la suma de los importes de k reclamaciones no supere el valor de X.

Recordemos también que el número medio de reclamaciones de la cartera de cada grupo no es constante, sino que, para mayor generalidad se supone aleatorio como consecuencia de la acción de una variable de estructura x sobre la media general del número de reclamaciones de esa cartera, que es n. Por lo tanto, x es una variable aleatoria de media 1, que toma valores al azar, año tras año.

Si ahora consideramos varias carteras distintas existen dos posibilidades:

A) Que el valor aleatorio de x sea en cada año, idéntico para las tres carteras. Esta es una hipótesis para cuya adopción carecemos de soporte teórico o evidencia empírica. Si la adoptáramos, podríamos razonar de la siguiente manera: Aplicando (A) al conjunto de las tres carteras (grupos de ramos I, II y III), tendríamos que $P(v = k)$ representaría ahora el número total de reclamaciones del ejercicio (para el conjunto de la compañía), que respondería a una distribución binomial negativa, igual que cuando se trataba de un solo grupo de ramos. La función S^{k^*}, dependerá de la relación que las medias anuales del número de reclamaciones guarden entre sí. Estas medias anuales $\overline{v_i}$ ($i = 1, 2, 3$) son para cada grupo de ramos, iguales al producto $x_i \cdot n_i$; siendo n_i la media del número de reclamaciones de la cartera del grupo i. Ahora bien, por hipótesis las x_i de cada ejercicio son iguales entre sí por lo que la media anual es $\overline{v_i} = x \cdot n_i$ siendo constante ejercicio tras ejercicio la relación entre cada $\overline{v_i}$ y las restantes.

En consecuencia la forma de la función S^{k^*} no se ve alterada de un ejercicio a otro como consecuencia de la variabilidad aleatoria de las $\overline{v_i}$.

B) La segunda alternativa, que es la que adoptaremos aquí por presentarse como la más realista, consiste en admitir la independencia entre las x_i, de forma que el valor de x_1 por ejemplo, en un determinado ejercicio no guarda relación alguna preestablecida con el de x_2 ó x_3. Consecuencia de ello es que la relación entre el valor de $\overline{v_i} = x_i \cdot n_i$ y el de las otras dos $\overline{v_i}$, en cada ejercicio, varía aleatoriamente año tras año. Habrá ejercicios por tanto, en que aumentará la proporción del número medio de reclamaciones del Grupo I, por ejemplo, sobre los otros dos; al ser menor el costo de cada uno de dichas reclamaciones, la función S^{k^*} no será la misma que en aquellos años en que suceda lo contrario.

Concluimos, pues, que en esta segunda hipótesis la función S^{k^*} no es estable, sino que se altera aleatoriamente y que, por lo tanto, el proceso de suma que recoge el importe anual de las reclamaciones de los tres grupos no es ya, en general, un proceso compuesto de Poisson.[1]

Ahora bien, la conclusión que acabamos de obtener no impide, en sí misma, que podamos seguir utilizando aproximaciones prácticas a la función

$$F(X) = P[\xi \le X] \qquad (B)$$

Beard, Pentakäinen y Pearson afirman que la transformación NP no sólo es útil para aproximar la distribución de Poisson simple, sino otras (lo cual se comprobó al utilizarla en el Capitulo 8 para aproximar la compuesta).

En consecuencia, es razonable que intentemos utilizar la aproximación NP (u otra, como la Gamma) a nuestra nueva función (B).

9.2 LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN DE RECLAMACIÓN TOTAL

Como se hizo en el Capitulo 8, se utilizarán los parámetros μ_ξ, σ_ξ y γ_ξ (media, desviación típica y asimetría, respectivamente), de la variable aleatoria ξ, que en este Capítulo representa la reclamación anual global, en lugar de un grupo de ramos, aisladamente considerados, que era el significado que se le atribuyó en el Capitulo 8.

Se adoptará la hipótesis de independencia entre las variables ξ_i (i = 1, 2, 3) que representan la reclamación anual del grupo i-esimo.

[1] Beard, Pentikäinen y Pesonen, obra citada, pagina 94.

Tenemos, por tanto, que ξ es una suma de tres variables aleatorias independientes:

$$\xi = \sum_{i=1}^{3} \xi_i$$

La media μ_ξ de ξ será:

$$\mu_\xi = \mu_{\xi_1} + \mu_{\xi_2} + \mu_{\xi_3}$$

siendo cada μ_{ξ_i} la media de ξ_i.

La desviación típica σ_ξ tiene como expresión:

$$\sigma_\xi = \sqrt{E\left[\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \mu_{\xi_1} - \mu_{\xi_2} - \mu_{\xi_3}\right]^2} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \sigma_{\xi_3}^2}$$

Calcularemos el coeficiente de asimetría de la siguiente forma:

$$E\left[\xi - \mu_\xi\right]^3 = \gamma_\xi \cdot \sigma_\xi^3$$

$$E\left[\xi - \mu_\xi\right]^3 = E\left[\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \mu_{\xi_1} - \mu_{\xi_2} - \mu_{\xi_3}\right]^3 = \sum_{i=1}^{3} E\left[\xi_i - \mu_{\xi_i}\right]^3$$

Por tanto,

$$\gamma_\xi = \frac{\sum_{i=1}^{3} E\left[\xi_i - \mu_{\xi_i}\right]^3}{\sigma_\xi^3}$$

Tenemos, en resumen las tres expresiones siguientes, que serán de utilidad en lo sucesivo:

$$\left.\begin{aligned} \mu_\xi &= \sum_{i=1}^{3} \mu_{\xi_i} \\ \sigma_\xi &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sigma_{\xi_i}^2} \\ \gamma_\xi &= \frac{\sum_{i=1}^{3} \gamma_{\xi_i} \sigma_{\xi_i}^3}{\sigma_\xi^3} \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

9.3 APLICACIÓN DE LA APROXIMACIÓN *NP* A LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA RECLAMACIÓN GLOBAL: CONSIDERACIONES GENERALES.

En el Capítulo 6, apartados 6.2 y 6.3, se hizo referencia al uso de las aproximaciones NP y Gamma, respectivamente; el Cuadro 2 del Capítulo 8 contiene una comparación entre los resultados de ambas formulas, que pone de manifiesto su similitud. Los cálculos contenidos en el Capítulo 8, apartado 8.4, se han basado en dicha función Gamma. En este se utilizará la aproximación NP con el fin de ilustrar su uso.

El procedimiento que se usará para justificar la aceptación del método NP será el mismo que el seguido en el Capítulo 8, apartado 8.1, para defender el uso que allí se hizo de la Gamma, es decir, proceder a una simulación de la cartera.

Ahora bien, la aplicación que se requiere de la aproximación NP exige que se profundice en su estudio. En el Capítulo 6, apartado 6.2, se dio una formula de esta transformación que es inadecuada para los actuales propósitos. La expresión, siguiente define una función que no es monótona:

$$x = y + \frac{\gamma_\xi}{6}(y^2 - 1) \qquad (D)$$

(en donde $x = \dfrac{X - \mu_\xi}{\sigma_\xi}$ e y representa la variable analítica correspondiente a una variable aleatoria Normal (0, 1)).

En efecto se ve en la figura 1, que existen valores negativos de y para los cuales la función es decreciente, lo que la inhabilita como formula útil.

Así como en el Capitulo 8 nuestro interés se centraba en la forma de la distribución para valores grandes de la variable, aquí nos interesa la función para cualquier valor de aquélla.

La razón está en que se va a necesitar la distribución de probabilidades de una variable suma de otras tres. Todos los valores posibles de éstas (y no sólo los grandes) con sus respectivas densidades son ahora relevantes para obtener la convolución correspondiente.

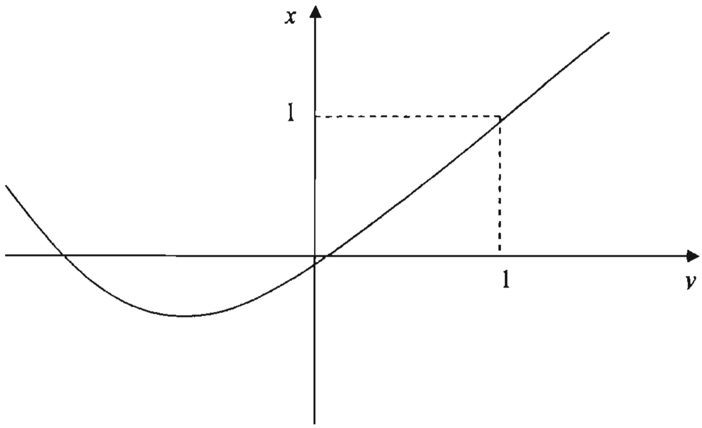


Figura 1

Es necesario, por tanto, buscar otra relación distinta de la (D) que defina, junto con ella, una función monótona. Dicha función ha de ser cóncava en todo su dominio de definición a fin de que de lugar al desplazamiento buscado de densidades hacia la derecha.

9.4 LA TRANSFORMACIÓN NP

La función de densidad a que da lugar está transformación; esta compuesta de tres tramos distintos; siguiendo el razonamiento descrito en el Capítulo 8, apartado 8.2 obtendremos, según la formula de transformación NP para $x \geq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{9}+1+\frac{2\gamma}{3}x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{\gamma}+\sqrt{\frac{9}{\gamma^2}+1+\frac{6}{\gamma}x}\right]^2}$$

Podemos resumir en una solo expresión a las dos versiones de la transformación NP para $y < 1$ si utilizamos la función $\varepsilon(x)$, que definimos así:[2]

$\varepsilon(x) = 0$ para $x < 0$
$\varepsilon(x) = 1$ para $x \geq 0$

Escribimos esta expresión, utilizando $\varepsilon(x)$, de la siguiente forma:

[2] Beard, Pentikäinen y Pesonen, obra citada, página 116.

$$y = x - \frac{\gamma}{6}\left(x^2 - 1\right) + \frac{\gamma^2}{36}\left(4x^3 - 7x\right)\cdot \varepsilon\left(x_0 - x\right)$$

Por tanto, la función de densidad NP para $x < 1$ será:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[1 - \frac{\gamma}{3}x + \frac{\gamma^2}{36}\left(12x^2 - 7\right)\cdot \varepsilon\left(x_0 - x\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[x - \frac{\gamma}{6}\left(x^2-1\right) + \frac{\gamma^2}{36}\left(4x^3 - 7x\right)\varepsilon\left(x_0 - x\right)\right]^2}$$

Observamos ahora que $\varepsilon(x)$ es una función de salto que nos produce una discontinuidad de $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Por otra parte, para $x = 1$ la función $f(x)$ nos da valores ligeramente distintos según tomemos la versión de ésta para $x \geq 1$ o para $x < 1$. Resultado de ello es que la función de densidad presenta dos puntos de discontinuidad por salto en $x = x_0 = -\sqrt{7}/2$ y en $x = 1$.

Es así como la transformación NP constituye un instrumento adecuado para aproximar la función de distribución (B) correspondiente a la variable representativa de la reclamación anual de una cartera compuesta de varios ramos distintos.

9.5 APLICACIÓN PRACTICA

9.5.1 La Simulación de las Reclamaciones de un Afianzador *Multirramos*

De lo dicho en el Capítulo 6, apartado 6.2 y aplicado en el Capítulo 8, apartado 8.2 se deduce que la transformación NP puede ser útil para aproximar cualquier función de distribución, siempre que la practica confirme tal utilidad. Solo en supuestos restrictivos son convergentes las series que intervienen en la transformación.

El hecho de que la función (B) no corresponda, en general, a una variable de Poisson compuesta, no impide, por tanto, que nos preguntemos válidamente sobre si es susceptible de aproximación por el método NP. Ello, según adelantamos en el apartado 9.3 exige la simulación de una cartera compuesta o *multirramos*. Se trata, por tanto, de simular la reclamación de un elevado número de ejercicios, de forma parecida a lo que se efectuó en el Capitulo 8, apartado 8.1, si bien aquí se cuenta con una importante ventaja: se supone admitir que la reclamación anual de cada grupo de ramos queda suficientemente representada por la aproximación NP (Cuadro 2 del Capítulo 8); el procedimiento de simulación será, por tanto, mucho más breve. Para simular una cartera compuesta de los tres Grupos puede procederse con arreglo al procedimiento siguiente:

- Obtener tres números aleatorios y_i normales (0, 1) (véase Anexo 2.1).

Recordando la formulación completa de la transformación NP, para distintos intervalos de y_i, se obtiene:

- Si $y_i \geq 1$ determinar x_i como $x = y + \frac{\gamma}{6}(y^2 - 1)$.

- Si $-\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\gamma}{8}\right) \leq y_i < 1$, calcular x_i como $x = \frac{3}{\gamma} - \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 - \frac{6}{\gamma} y}$.

- Si $y_i < -\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\gamma}{8}\right)$, resolver x_i como $x = \sqrt[3]{D - Q} - \sqrt[3]{D + Q} + \frac{1}{2\gamma}$.

  Siendo:

  γ = coeficiente de asimetría.

  $$D = \sqrt{P^3 + Q^2}$$

  $$Q = \frac{17}{8\gamma^3} + \frac{5}{16\gamma} - \frac{9y}{2\gamma^2}$$

  $$P = \frac{11}{4\gamma^2} - \frac{7}{12}$$

- A partir de estos tres momentos aleatorios x_1, x_2 y x_3 así obtenidos, calcular las reclamaciones de cada grupo de ramos, multiplicando por su desviación típica y añadiendo la media. Así obtenemos ξ_i o la reclamación anual de grupo i (i = 1, 2, 3).

- Sumar $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, obteniendo así la reclamación anual de la cartera.

- Repetir el proceso un elevado número de veces.

Salta a la vista la diferencia entre este procedimiento de simulación y el descrito en el Capítulo 8, apartado 8.1: mientras que allí requeríamos un número aleatorio por cada reclamación del ejercicio, ahora nos bastan tres para simular toda la reclamación anual, lo que supone una rapidez mucho mayor.

Introducir tres carteras elevaría el tiempo necesario a límites poca prácticos por lo que se impone el método global que adoptamos ahora: simular directamente la reclamación anual de cada ramo y sumar las tres cifras.

Utilizando el método global, se ha simulado para 10,000 ejercicios el total de las reclamaciones de las tres carteras correspondientes a los grupos que venimos considerando. Se han introducido en el correspondiente programa los datos siguientes:

Cartera Grupos	Reclamación Media en mdp	Desviación Típica	Asimetría
I	150	28.991	1.374
II	1,500	286.563	0.105
III	200	114.108	1.223

Los valores de la desviación típica y los coeficientes de asimetría se obtienen de los Cuadros del Anexo 4, respectivamente para el grupo I, II y III. Por (*C*) obtenemos los parámetros de la cartera combinada:

$$\mu_\xi = 1{,}850$$
$$\sigma_\xi = 309.806$$
$$\gamma_\xi = 0.145$$

El Cuadro 1 recoge el resultado de la simulación:

Cuadro 1
DISTRIBUCIÓN DE LAS RECLAMACIONES TOTALES

Desde	Hasta	Núm. De Ejercicios	Frec. Relativa
462	693	0	0.0000
693	924	8	0.0008
924	1,155	96	0.0096
1,155	1,386	542	0.0542
1,386	1,617	1,605	0.1605
1,617	1,848	2,784	0.2784
1,848	2,079	2,647	0.2647
2,079	2,310	1,588	0.1588
2,310	2,541	576	0.0576
2,541	2,772	124	0.0124
2,772	3,003	27	0.0027
3,003	3,234	3	0.0003
3,234	3,465	0	0.0000
	Total	10,000	1.0000

Las dos primeras columnas determinan las cifras de la reclamación total anual entre las cuales está comprendida la correspondiente a cierto número de ejercicios, que se señala en la tercera columna. Por ejemplo, ha habido 96 ejercicios cuyas reclamaciones quedan comprendidas entre 924 y 1,155 mdp.

9.5.2 El Margen Mínimo de Solvencia

El problema que afrontamos ahora es el determinar el margen mínimo que garantice la solvencia técnica del afianzador que opere en varios ramos distintos. La probabilidad de insolvencia (ruina) queda establecida en el 1/3% es decir, la misma que la utilizada en los cálculos del Capitulo 8, apartado 8.4.

Se trata de obtener una regla práctica de fácil interpretación y aplicación, que se adapte razonablemente a los resultados de nuestros cálculos en orden a las exigencias financieras mínimas. Para este fin, procederemos de la siguiente forma:

a) Para carteras compuestas por dos grupos (véase Capítulo 7, apartado 7.2.2) distintos: elaboración de una tabla de doble entrada que dé, para diversos volúmenes de cada una de las dos carteras, el margen mínimo de solvencia.

b) Para carteras integradas por ramos de los tres grupos: elaboración de una tabla que refleje el margen mínimo para diversas combinaciones de volúmenes es cada cartera.

Comenzamos por considerar una cartera compuesta por los grupos de ramos I y II. Supongamos que el volumen de cada grupo (medido en primas de riesgo, o lo que es lo mismo, en reclamación media anual) es de 1000 mdp, respectivamente. Para esta cifra, los cuadros del Anexo 4 para los respectivos grupos nos dan los datos siguientes:

Grupo	Tamaño Cartera (mdp)	σ	γ
I	100	19.327	4.430
II	100	19.104	2.616

Por medio de (C) obtenemos los parámetros de la cartera total I + II:

$$\mu_\xi = 200 \text{ mdp}$$
$$\sigma_\xi = 27.2 \text{ mdp}$$
$$\gamma_\xi = 2.502$$

Para calcular el margen mínimo de solvencia utilizaremos la aproximación NP. Sea y_0 tal que $P[\theta > y_0] = \varepsilon$ siendo $\theta \sim N(0, 1)$. La relación entre la variable correspondiente a la reclamación anual y la normal (0, 1) es (aproximadamente):

$$\frac{X - \mu_\xi}{\sigma_\xi} = y + \frac{\gamma}{6}\left(y^2 - 1\right)$$

Por lo tanto adoptamos la hipótesis de que las primas de riesgo equivalen a la reclamación media anual, es decir, $P = \mu_\xi$ tendremos que el margen mínimo U que garantiza la solvencia con probabilidad $1 - \varepsilon$ cumplirá la ecuación:

$$P[\xi > X] = P[\xi > P + U] = \varepsilon$$

Por tanto,

$$U = y_0 \cdot \sigma_\xi + \frac{\gamma}{6}\sigma_\xi\left(y_0^2 - 1\right) \qquad (E)$$

Esta expresión relaciona explícitamente el margen de solvencia con la desviación típica y la asimetría de la reclamación; evidentemente, el margen depende también de la probabilidad ε a través de y_0. La expresión es una manifestación más de la superioridad del método NP sobre otros (como el de la Gamma, que utilizamos en el Capítulo 8) como instrumento de la Teoría del Riesgo.

Para $\varepsilon = 1/3\%$ el valor de y_0 es aproximadamente, 2.75. Sustituyendo en (E) los valores correspondientes resulta que $U = 149.11$ mdp.

En el Cuadro 2 se aplica este proceso a diversas combinaciones de volúmenes de las carteras I y II.

El significado de las cifras contenidas en este Cuadro es el siguiente: ante todo, la primera columna y la primera fila, que se hallan encabezadas por I y II, respectivamente, contienen la desviación típica y la asimetría de la cartera cuyos volúmenes son, respectivamente, 100, 200, 500, 1 000, y 2 000 mdp.

Debajo a estas cifras, señaladas con P^*, esta el margen mínimo de solvencia calculado según la expresión (E) para las primas de riesgo.

En las casillas internas del Cuadro se indican la desviación típica y asimetría que corresponden a la cartera suma de las dos que concurren en cada casilla así como el margen de solvencia U obtenido también mediante (E).

Cuadro 2

II / I	$\sigma = 19.104$ $P = 100$ $P^* = 107$ $\gamma = 2.616$	$\sigma = 38.208$ $P = 200$ $P^* = 124$ $\gamma = 0.457$	$\sigma = 95.521$ $P = 500$ $P^* = 277$ $\gamma = 0.133$	$\sigma = 191.042$ $P = 1{,}000$ $P^* = 548$ $\gamma = 0.108$	$\sigma = 382.084$ $P = 2{,}000$ $P^* = 1{,}094$ $\gamma = 0.104$
$\sigma = 19.327$ $P = 100$ $P^* = 147$ $\gamma = 4.430$	$\sigma = 27.2$ $U = 149.11$ $U^* = 174.20$ $\gamma = 2.502$	$\sigma = 42.8$ $U = 152.04$ $U^* = 182.02$ $\gamma = 0.732$	$\sigma = 97.5$ $U = 285.04$ $U^* = 302.55$ $\gamma = 0.160$	$\sigma = 192.0$ $U = 551.33$ $U^* = 561.04$ $\gamma = 0.111$	$\sigma = 382.6$ $U = 1{,}095.66$ $U^* = 1{,}100.76$ $\gamma = 0.104$
$\sigma = 38.654$ $P = 200$ $P^* = 132$ $\gamma = 0.614$	$\sigma = 43.1$ $U = 150.17$ $U^* = 161.59$ $\gamma = 0.670$	$\sigma = 54.4$ $U = 172.03$ $U^* = 171.13$ $\gamma = 0.380$	$\sigma = 103.0$ $U = 298.97$ $U^* = 297.66$ $\gamma = 0.138$	$\sigma = 194.9$ $U = 558.71$ $U^* = 558.57$ $\gamma = 0.106$	$\sigma = 384.0$ $U = 1{,}099.38$ $U^* = 1{,}099.52$ $\gamma = 0.103$
$\sigma = 96.635$ $P = 500$ $P^* = 274$ $\gamma = 0.075$	$\sigma = 98.5$ $U = 280.57$ $U^* = 287.67$ $\gamma = 0.090$	$\sigma = 103.9$ $U = 295.20$ $U^* = 292.45$ $\gamma = 0.083$	$\sigma = 135.9$ $U = 384.54$ $U^* = 366.84$ $\gamma = 0.073$	$\sigma = 214.1$ $U = 608.34$ $U^* = 593.50$ $\gamma = 0.084$	$\sigma = 394.1$ $U = 1{,}125.14$ $U^* = 1{,}117.01$ $\gamma = 0.096$
$\sigma = 193.271$ $P = 1{,}000$ $P^* = 540$ $\gamma = 0.038$	$\sigma = 194.2$ $U = 542.57$ $U^* = 546.63$ $\gamma = 0.040$	$\sigma = 197.0$ $U = 550.23$ $U^* = 549.05$ $\gamma = 0.039$	$\sigma = 215.6$ $U = 602.05$ $U^* = 586.79$ $\gamma = 0.039$	$\sigma = 271.8$ $U = 762.54$ $U^* = 725.02$ $\gamma = 0.051$	$\sigma = 428.2$ $U = 1{,}213.75$ $U^* = 1{,}182.87$ $\gamma = 0.077$
$\sigma = 386.541$ $P = 2{,}000$ $P^* = 1077$ $\gamma = 0.032$	$\sigma = 387.0$ $U = 1{,}077.91$ $U^* = 1{,}080.07$ $\gamma = 0.032$	$\sigma = 388.4$ $U = 1{,}081.75$ $U^* = 1{,}081.29$ $\gamma = 0.032$	$\sigma = 398.2$ $U = 1{,}108.51$ $U^* = 1{,}100.20$ $\gamma = 0.031$	$\sigma = 431.2$ $U = 1{,}201.03$ $U^* = 1{,}169.48$ $\gamma = 0.032$	$\sigma = 543.5$ $U = 1{,}522.97$ $U^* = 1{,}447.24$ $\gamma = 0.048$

Por ejemplo, para una cartera compuesta de 200 mdp de prima de riesgo de la fianza del Grupo I y 500 del Grupo II corresponde un margen mínimo de solvencia de 298.97 mdp. Recordemos que los cuadros 3 y 4, del Capítulo 8 nos dan, para ambas carteras I y II consideradas por separado, unos márgenes mínimos de 108 y 273 mdp respectivamente, cuya suma, como no podía menos de suceder, es superior a 298.97.

Si pretendemos, como en otras ocasiones a lo largo de este trabajo, llegar a una regla fácil de formular, podemos utilizar las cifras del Cuadro para observar que una expresión sencilla que nos permite llegar a una cifra de márgenes que son cercanas a las resultantes de dicho cuadro, en función de los márgenes mínimos de las carteras I y II es la siguiente:

$$U^* = M + \frac{m^2}{M} \cdot 0.33 \qquad (F)$$

siendo:

M = margen de solvencia mayor de la cartera (I ó II).
m = margen de solvencia menor.
U^* = margen mínimo de solvencia de la cartera I + II.

Es decir, supongamos que los tamaños respectivos de las carteras I y II son, respectivamente, 200 y 500 mdp. Los márgenes mínimos exigibles para las mismas consideradas aisladamente serán de 132 y 277 mdp según la fórmula (*E*). (Obsérvese la similitud de estas cifras con las de los Cuadros 3 y 4 del Capítulo 8, que obtuvimos mediante la aproximación Gamma).

El margen mayor de ambos es 277, luego $M = 277$ y $m = 132$. La fórmula (*F*) nos da

$$U^* = 277 + \frac{(132)^2}{277} \cdot 0.33 = 297.66$$

El valor exacto según la tabla es 298.97.

En cada una de las casillas interiores del Cuadro se indica, con U^* el margen de solvencia calculado con la expresión (*F*) que se aproxima mucho al valor según (*E*).

En los Cuadros números 3 y 4 se contienen las cifras correspondientes a las carteras I más III y II más III, respectivamente.

Cuadro 3

III / I	$\sigma = 57.054$ $P = 100$ $P^* = 574$ $\gamma = 6.681$	$\sigma = 114.108$ $P = 200$ $P^* = 466$ $\gamma = 1.223$	$\sigma = 285.270$ $P = 500$ $P^* = 906$ $\gamma = 0.388$	$\sigma = 570.539$ $P = 1{,}000$ $P^* = 1{,}769$ $\gamma = 0.321$	$\sigma = 1{,}141.079$ $P = 2{,}000$ $P^* = 3{,}524$ $\gamma = 0.309$
$\sigma = 19.327$ $P = 100$ $P^* = 147$ $\gamma = 4.430$	$\sigma = 60.2$ $U = 549.29$ $U^* = 586.33$ $\gamma = 5.823$	$\sigma = 115.7$ $U = 469.26$ $U^* = 481.83$ $\gamma = 1.193$	$\sigma = 285.9$ $U = 907.23$ $U^* = 913.49$ $\gamma = 0.387$	$\sigma = 570.9$ $U = 1{,}770.07$ $U^* = 1{,}773.35$ $\gamma = 0.321$	$\sigma = 1{,}141.2$ $U = 3{,}523.98$ $U^* = 3{,}525.65$ $\gamma = 0.309$
$\sigma = 38.654$ $P = 200$ $P^* = 132$ $\gamma = 0.614$	$\sigma = 68.9$ $U = 483.43$ $U^* = 583.97$ $\gamma = 3.899$	$\sigma = 120.5$ $U = 470.91$ $U^* = 478.93$ $\gamma = 1.059$	$\sigma = 287.9$ $U = 911.01$ $U^* = 911.99$ $\gamma = 0.379$	$\sigma = 571.8$ $U = 1{,}772.10$ $U^* = 1{,}772.59$ $\gamma = 0.319$	$\sigma = 1{,}141.7$ $U = 3{,}525.00$ $U^* = 3{,}525.27$ $\gamma = 0.308$
$\sigma = 96.635$ $P = 500$ $P^* = 274$ $\gamma = 0.075$	$\sigma = 112.2$ $U = 422.25$ $U^* = 674.71$ $\gamma = 0.926$	$\sigma = 149.5$ $U = 503.40$ $U^* = 519.96$ $\gamma = 0.564$	$\sigma = 301.2$ $U = 937.70$ $U^* = 933.12$ $\gamma = 0.332$	$\sigma = 578.7$ $U = 1{,}786.28$ $U^* = 1{,}783.41$ $\gamma = 0.308$	$\sigma = 1{,}145.2$ $U = 3{,}532.16$ $U^* = 3{,}530.70$ $\gamma = 0.306$
$\sigma = 193.271$ $P = 1{,}000$ $P^* = 540$ $\gamma = 0.038$	$\sigma = 201.5$ $U = 594.98$ $U^* = 742.95$ $\gamma = 0.185$	$\sigma = 224.4$ $U = 662.63$ $U^* = 673.94$ $\gamma = 0.185$	$\sigma = 344.6$ $U = 1{,}033.09$ $U^* = 1{,}046.16$ $\gamma = 0.227$	$\sigma = 602.4$ $U = 1{,}837.08$ $U^* = 1{,}824.14$ $\gamma = 0.274$	$\sigma = 1{,}157.3$ $U = 3{,}557.78$ $U^* = 3{,}551.15$ $\gamma = 0.296$
$\sigma = 386.541$ $P = 2{,}000$ $P^* = 1077$ $\gamma = 0.032$	$\sigma = 390.7$ $U = 1{,}096.63$ $U^* = 1{,}178.47$ $\gamma = 0.052$	$\sigma = 403.0$ $U = 1{,}133.02$ $U^* = 1{,}143.88$ $\gamma = 0.056$	$\sigma = 480.4$ $U = 1{,}372.57$ $U^* = 1{,}330.43$ $\gamma = 0.098$	$\sigma = 689.2$ $U = 2{,}036.71$ $U^* = 1{,}987.63$ $\gamma = 0.188$	$\sigma = 1{,}204.8$ $U = 3{,}660.47$ $U^* = 3{,}633.25$ $\gamma = 0.264$

Cuadro 4

III / II					
	$\sigma = 57.054$ $P = 100$ $P^* = 574$ $\gamma = 6.681$	$\sigma = 114.108$ $P = 200$ $P^* = 466$ $\gamma = 1.223$	$\sigma = 285.270$ $P = 500$ $P^* = 906$ $\gamma = 0.388$	$\sigma = 570.539$ $P = 1{,}000$ $P^* = 1{,}769$ $\gamma = 0.321$	$\sigma = 1{,}141.079$ $P = 2{,}000$ $P^* = 3{,}524$ $\gamma = 0.309$
$\sigma = 19.104$ $P = 100$ $P^* = 107$ $\gamma = 2.616$	$\sigma = 60.2$ $U = 545.85$ $U^* = 580.49$ $\gamma = 5.780$	$\sigma = 115.7$ $U = 468.13$ $U^* = 474.65$ $\gamma = 1.185$	$\sigma = 285.9$ $U = 907.01$ $U^* = 909.78$ $\gamma = 0.386$	$\sigma = 570.9$ $U = 1{,}770.01$ $U^* = 1{,}771.46$ $\gamma = 0.321$	$\sigma = 1{,}141.2$ $U = 3{,}523.96$ $U^* = 3{,}524.70$ $\gamma = 0.309$
$\sigma = 38.208$ $P = 200$ $P^* = 124$ $\gamma = 0.457$	$\sigma = 68.7$ $U = 482.57$ $U^* = 582.77$ $\gamma = 3.911$	$\sigma = 120.3$ $U = 470.10$ $U^* = 477.45$ $\gamma = 1.057$	$\sigma = 287.8$ $U = 910.76$ $U^* = 911.23$ $\gamma = 0.379$	$\sigma = 571.8$ $U = 1{,}772.00$ $U^* = 1{,}772.20$ $\gamma = 0.319$	$\sigma = 1{,}141.7$ $U = 3{,}524.96$ $U^* = 3{,}525.07$ $\gamma = 0.308$
$\sigma = 95.521$ $P = 500$ $P^* = 277$ $\gamma = 0.133$	$\sigma = 111.3$ $U = 425.84$ $U^* = 618.25$ $\gamma = 0.985$	$\sigma = 148.8$ $U = 504.70$ $U^* = 521.10$ $\gamma = 0.587$	$\sigma = 300.8$ $U = 937.56$ $U^* = 933.71$ $\gamma = 0.335$	$\sigma = 578.5$ $U = 1{,}786.05$ $U^* = 1{,}783.71$ $\gamma = 0.309$	$\sigma = 1{,}145.1$ $U = 3{,}532.00$ $U^* = 3{,}530.85$ $\gamma = 0.306$
$\sigma = 191.042$ $P = 1{,}000$ $P^* = 548$ $\gamma = 0.108$	$\sigma = 199.4$ $U = 603.15$ $U^* = 748.22$ $\gamma = 0.252$	$\sigma = 222.5$ $U = 668.71$ $U^* = 680.29$ $\gamma = 0.233$	$\sigma = 343.3$ $U = 1{,}034.72$ $U^* = 1{,}016.07$ $\gamma = 0.241$	$\sigma = 601.7$ $U = 1{,}837.00$ $U^* = 1{,}825.86$ $\gamma = 0.277$	$\sigma = 1{,}157.0$ $U = 3{,}557.39$ $U^* = 3{,}552.02$ $\gamma = 0.297$
$\sigma = 382.084$ $P = 2{,}000$ $P^* = 1{,}094$ $\gamma = 0.104$	$\sigma = 386.3$ $U = 1{,}113.99$ $U^* = 1{,}194.50$ $\gamma = 0.122$	$\sigma = 398.8$ $U = 1{,}148.99$ $U^* = 1{,}160.47$ $\gamma = 0.120$	$\sigma = 476.8$ $U = 1{,}382.52$ $U^* = 1{,}344.01$ $\gamma = 0.137$	$\sigma = 686.7$ $U = 2{,}040.07$ $U^* = 1{,}994.86$ $\gamma = 0.202$	$\sigma = 1{,}203.3$ $U = 3{,}660.36$ $U^* = 3{,}636.88$ $\gamma = 0.267$

Una vez obtenidos los Cuadros 3 y 4, que nos confirman que la expresión (*F*) es adecuada para determinar el margen mínimo de solvencia de una cartera compuesta de dos grupos distintos, nos falta tan solo estudiar el caso de la cartera integrada por los tres grupos. El método que utilizaremos es el mismo que el empleado en el caso de los dos grupos diferentes. En el Cuadro 5 se han dispuesto los datos de la siguiente forma: la primera columna desde la izquierda, está encabezada por la indicación I *y* II, la cual esta dividida en dos *sub-columnas*. La primera de ellas indica el tamaño conjunto de la cartera de los grupos I y II, mediante el volumen total de primas de riesgo P. Las cifras P^* indican los márgenes mínimos de solvencia par los grupos I y II respectivamente. La segunda *sub-columna* especifica la distribución entre ambos grupos del tamaño o volumen conjunto indicando en la primera, junto con la desviación típica y la asimetría que, según las fórmulas (*C*) corresponden a la combinación del tamaño del grupo I y II de que se trata.

La primera fila o filas superiores detalla tres tamaños distintos de la cartera del Grupo III, con su desviación típica y coeficiente de asimetría. El margen mínimo de solvencia se indica como P^*.

Las casillas interiores del Cuadro 5 dan los datos correspondientes a la combinación concurrente en cada una. Por ejemplo, supongamos una cartera compuesta de los siguientes volúmenes anuales de primas de riesgo:

Grupo I	....	100 mdp
Grupo II	....	500 mdp
Grupo III	....	500 mdp

Los datos correspondientes a esta combinación están en la segunda casilla interior (contada desde arriba y desde la izquierda) la cual nos da los datos siguientes:

$$\sigma = 301.5$$
$$U = 939.23$$
$$\gamma = 0.334$$

El margen es, por tanto, muy inferior a la suma de los tres que se requerirían para los indicados volúmenes si se consideraran aisladamente y que son, según se ve en el Cuadro, 147, 277 y 906 respectivamente.

Cuadro 5

<table>
<tr><td colspan="2">III
I y II</td><td>$\sigma = 57.054$
$P = 100$
$P^* = 574$
$\gamma = 6.681$</td><td>$\sigma = 285.270$
$P = 500$
$P^* = 906$
$\gamma = 0.388$</td><td>$\sigma = 1,141.079$
$P = 2,000$
$P^* = 3,524$
$\gamma = 0.309$</td></tr>
<tr><td>$P^* = 147$
$P = 200$
$P^* = 107$</td><td>$\sigma = 27.2$
I = 100
II = 100
$\gamma = 2.502$</td><td>$\sigma = 63.2$
$U = 527.31$
$U^* = 593.20$
$\gamma = 5.113$</td><td>$\sigma = 286.6$
$U = 908.69$
$U^* = 918.16$
$\gamma = 0.385$</td><td>$\sigma = 1,141.4$
$U = 3,524.33$
$U^* = 3,527.13$
$\gamma = 0.309$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P^* = 147$
$P^* = 277$
$P = 600$
$P^* = 274$
$P^* = 107$</td><td>$\sigma = 97.5$
I = 100
II = 500
$\gamma = 0.160$</td><td>$\sigma = 113.0$
$U = 429.71$
$U^* = 777.88$
$\gamma = 0.964$</td><td>$\sigma = 301.5$
$U = 939.23$
$U^* = 942.18$
$\gamma = 0.334$</td><td>$\sigma = 1,145.2$
$U = 3,532.38$
$U^* = 3,533.30$
$\gamma = 0.306$</td></tr>
<tr><td>$\sigma = 98.5$
I = 500
II = 100
$\gamma = 0.090$</td><td>$\sigma = 113.8$
$U = 425.03$
$U^* = 771.98$
$\gamma = 0.900$</td><td>$\sigma = 301.8$
$U = 939.14$
$U^* = 937.83$
$\gamma = 0.331$</td><td>$\sigma = 1,145.3$
$U = 3,532.51$
$U^* = 3,532.18$
$\gamma = 0.306$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P^* = 274$
$P^* = 548$
$P = 1,500$
$P^* = 540$
$P^* = 277$</td><td>$\sigma = 214.1$
I = 500
II = 1,000
$\gamma = 0.084$</td><td>$\sigma = 221.6$
$U = 655.33$
$U^* = 808.93$
$\gamma = 0.190$</td><td>$\sigma = 356.7$
$U = 1,065.39$
$U^* = 1,235.62$
$\gamma = 0.217$</td><td>$\sigma = 1,161.0$
$U = 3,565.93$
$U^* = 3,559.51$
$\gamma = 0.294$</td></tr>
<tr><td>$\sigma = 215.6$
I = 1,000
II = 500
$\gamma = 0.039$</td><td>$\sigma = 223.0$
$U = 649.19$
$U^* = 809.89$
$\gamma = 0.147$</td><td>$\sigma = 357.6$
$U = 1,063.73$
$U^* = 1,041.51$
$\gamma = 0.206$</td><td>$\sigma = 1,161.3$
$U = 3,566.16$
$U^* = 3,558.84$
$\gamma = 0.293$</td></tr>
<tr><td>$P^* = 1,077$
$P = 4,000$
$P^* = 1,094$</td><td>$\sigma = 543.5$
I = 2,000
II = 2,000
$\gamma = 0.048$</td><td>$\sigma = 547.2$
$U = 1,537.38$
$U^* = 1,547.81$
$\gamma = 0.055$</td><td>$\sigma = 614.4$
$U = 1,738.08$
$U^* = 1,697.52$
$\gamma = 0.072$</td><td>$\sigma = 1,264.2$
$U = 3,796.01$
$U^* = 3,746.93$
$\gamma = 0.231$</td></tr>
</table>

La siguiente fórmula da unos resultados aproximados al margen de solvencia teórico según (*E*):

$$U^* = M + \frac{m_1^2 + m_2^2}{M} \cdot 0.33 \qquad (G)$$

siendo:

M = Margen de solvencia mayor de la cartera (I, II ó III).
m_1 y m_2 = Márgenes de solvencia de las otras dos carteras.
U^* = Margen mínimo de solvencia de la cartera I + II + III.

Por ejemplo, para la combinación antes descrita tendríamos las cifras siguientes. La cartera del Grupo I, con 100 mdp exige un margen mínimo de 147 mdp; la cartera del Grupo II, con 500 mdp exige un margen mínimo de 277 mdp y la cartera del Grupo III, con 500 mdp de volumen de prima de riesgo requiere un margen mínimo de 906. Luego, en este caso $M = 906$; $m_1 = 277$; $m_2 = 147$. La fórmula (*G*) nos da:

$$U^* = 906 + \frac{(277)^2 + (147)^2}{906} \cdot 0.33 = 942.18$$

El margen mínimo calculado según (*E*) es de 939.23.

Las casillas interiores del Cuadro 5 indican, con U^*, el margen calculado mediante la fórmula empírica (*G*) que produce resultados muy similares a los teóricos.

En los Cuadros 6 y 7 se contienen las cifras correspondientes a las carteras I - III más II y II – III más I.

Cuadro 6

<table>
<tr><td colspan="2">II
I y III</td><td>$\sigma = 19.1$
$P = 100$
$P^* = 107$
$\gamma = 2.616$</td><td>$\sigma = 95.5$
$P = 500$
$P^* = 277$
$\gamma = 0.133$</td><td>$\sigma = 382.1$
$P = 2{,}000$
$P^* = 1{,}094$
$\gamma = 0.104$</td></tr>
<tr><td>$P^* = 147$
$P = 200$
$P^* = 574$</td><td>$\sigma = 60.2$
I = 100
III = 100
$\gamma = 5.823$</td><td>$\sigma = 63.2$
$U = 527.02$
$U^* = 593.20$
$\gamma = 5.115$</td><td>$\sigma = 112.9$
$U = 429.44$
$U^* = 777.88$
$\gamma = 0.963$</td><td>$\sigma = 386.8$
$U = 1{,}115.39$
$U^* = 1{,}200.97$
$\gamma = 0.122$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P^* = 147$
$P^* = 906$
$P = 600$
$P^* = 274$
$P^* = 574$</td><td>$\sigma = 285.9$
I = 100
III = 500
$\gamma = 0.387$</td><td>$\sigma = 286.5$
$U = 908.70$
$U^* = 918.16$
$\gamma = 0.385$</td><td>$\sigma = 301.4$
$U = 939.21$
$U^* = 942.18$
$\gamma = 0.334$</td><td>$\sigma = 477.2$
$U = 1{,}383.62$
$U^* = 1{,}350.69$
$\gamma = 0.137$</td></tr>
<tr><td>$\sigma = 112.2$
I = 500
III = 100
$\gamma = 0.926$</td><td>$\sigma = 113.8$
$U = 424.97$
$U^* = 771.98$
$\gamma = 0.900$</td><td>$\sigma = 147.4$
$U = 476.95$
$U^* = 808.93$
$\gamma = 0.445$</td><td>$\sigma = 398.2$
$U = 1{,}144.13$
$U^* = 1{,}217.26$
$\gamma = 0.113$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P^* = 274$
$P^* = 1{,}769$
$P = 1{,}500$
$P^* = 540$
$P^* = 906$</td><td>$\sigma = 578.7$
I = 500
III = 1,000
$\gamma = 0.308$</td><td>$\sigma = 579.0$
$U = 1{,}787.09$
$U^* = 1{,}785.30$
$\gamma = 0.308$</td><td>$\sigma = 586.5$
$U = 1{,}803.11$
$U^* = 1{,}797.60$
$\gamma = 0.296$</td><td>$\sigma = 693.5$
$U = 2{,}055.97$
$U^* = 2{,}008.67$
$\gamma = 0.196$</td></tr>
<tr><td>$\sigma = 344.6$
I = 1,000
III = 500
$\gamma = 0.227$</td><td>$\sigma = 345.1$
$U = 1{,}034.57$
$U^* = 1{,}017.50$
$\gamma = 0.226$</td><td>$\sigma = 357.6$
$U = 1{,}063.83$
$U^* = 1{,}041.51$
$\gamma = 0.206$</td><td>$\sigma = 514.5$
$U = 1{,}477.29$
$U^* = 1{,}432.95$
$\gamma = 0.111$</td></tr>
<tr><td>$P^* = 1{,}077$
$P = 4{,}000$
$P^* = 3{,}524$</td><td>$\sigma = 1{,}204.8$
I = 2,000
III = 2,000
$\gamma = 0.264$</td><td>$\sigma = 1{,}206.5$
$U = 3{,}664.70$
$U^* = 3{,}634.80$
$\gamma = 0.263$</td><td>$\sigma = 1{,}210.1$
$U = 3{,}672.66$
$U^* = 3{,}640.97$
$\gamma = 0.261$</td><td>$\sigma = 1{,}265.4$
$U = 3{,}799.10$
$U^* = 3{,}746.93$
$\gamma = 0.231$</td></tr>
</table>

Cuadro 7

II y III		I: $\sigma = 19.3$ $P = 100$ $P^* = 147$ $\gamma = 4.43$	I: $\sigma = 96.6$ $P = 500$ $P^* = 274$ $\gamma = 0.075$	I: $\sigma = 386.5$ $P = 2{,}000$ $P^* = 1{,}077$ $\gamma = 0.032$
$P^* = 107$ $P = 200$ $P^* = 574$	$\sigma = 60.2$ $\mathrm{II} = 100$ $\mathrm{III} = 100$ $\gamma = 5.780$	$\sigma = 63.2$ $U = 527.64$ $U^* = 593.20$ $\gamma = 5.116$	$\sigma = 113.9$ $U = 425.21$ $U^* = 771.98$ $\gamma = 0.900$	$\sigma = 391.2$ $U = 1{,}098.02$ $U^* = 1{,}182.52$ $\gamma = 0.052$
$P^* = 107$ $P^* = 906$ $P = 600$	$\sigma = 285.9$ $\mathrm{II} = 100$ $\mathrm{III} = 500$ $\gamma = 0.386$	$\sigma = 286.6$ $U = 908.60$ $U^* = 918.16$ $\gamma = 0.385$	$\sigma = 301.8$ $U = 939.06$ $U^* = 937.83$ $\gamma = 0.331$	$\sigma = 480.8$ $U = 1{,}373.58$ $U^* = 1{,}439.54$ $\gamma = 0.098$
$P^* = 277$ $P^* = 574$	$\sigma = 111.3$ $\mathrm{II} = 500$ $\mathrm{III} = 100$ $\gamma = 0.985$	$\sigma = 113.0$ $U = 429.79$ $U^* = 777.88$ $\gamma = 0.964$	$\sigma = 147.4$ $U = 477.12$ $U^* = 808.93$ $\gamma = 0.445$	$\sigma = 402.2$ $U = 1{,}127.85$ $U^* = 1{,}202.72$ $\gamma = 0.049$
$P^* = 277$ $P^* = 1{,}769$ $P = 1{,}500$	$\sigma = 578.5$ $\mathrm{II} = 500$ $\mathrm{III} = 1{,}000$ $\gamma = 0.309$	$\sigma = 578.8$ $U = 1{,}787.16$ $U^* = 1{,}787.53$ $\gamma = 0.309$	$\sigma = 586.5$ $U = 1{,}803.34$ $U^* = 1{,}797.60$ $\gamma = 0.297$	$\sigma = 695.8$ $U = 2{,}052.67$ $U^* = 2{,}002.02$ $\gamma = 0.183$
$P^* = 548$ $P^* = 906$	$\sigma = 343.3$ $\mathrm{II} = 1{,}000$ $\mathrm{III} = 500$ $\gamma = 0.241$	$\sigma = 343.8$ $U = 1{,}036.07$ $U^* = 1{,}215.95$ $\gamma = 0.241$	$\sigma = 356.6$ $U = 1{,}065.19$ $U^* = 1{,}235.62$ $\gamma = 0.216$	$\sigma = 517.0$ $U = 1{,}469.16$ $U^* = 1{,}690.05$ $\gamma = 0.084$
$P^* = 1{,}094$ $P = 4{,}000$ $P^* = 3{,}524$	$\sigma = 1{,}203.3$ $\mathrm{II} = 2{,}000$ $\mathrm{III} = 2{,}000$ $\gamma = 0.267$	$\sigma = 1{,}205.0$ $U = 3{,}664.10$ $U^* = 3{,}639.25$ $\gamma = 0.266$	$\sigma = 1{,}208.7$ $U = 3{,}672.19$ $U^* = 3{,}644.31$ $\gamma = 0.263$	$\sigma = 1{,}265.3$ $U = 3{,}798.63$ $U^* = 3{,}746.93$ $\gamma = 0.231$

En esta aplicación utilizamos la aproximación NP. Sus resultados, al menos para valores grandes de x son muy similares a los derivados de la función Gamma (véase Cuadro 2 del Capítulo 8). El método NP tiene diversas ventajas una de ellas es que hace posible expresiones como (E) que, conociendo la desviación típica y la asimetría de la función de reclamación anual –las cuales a su vez, se calculan mediante las formulas del Capítulo 6, B ó C– permiten obtener el margen mínimo de solvencia que garantiza ésta con una probabilidad 1 - ε.

En caso de que la afianzadora realice operaciones pertenecientes a dos o tres de los grupos de ramos es posible calcular el margen conjunto según las expresiones (F) ó (G). Sin embargo, estas fórmulas deberían completarse con una regla especial para el caso en que el margen correspondiente a alguno de los grupos fuera menor al correspondiente mínimo absoluto definido en el Capítulo 8, apartado 8.4.3. En tal supuesto debe aplicarse tal mínimo como margen correspondiente al Grupo de que se trate.

En general, el problema de calcular el margen mínimo de solvencia en caso de que la cartera esté integrada por varios ramos, exige un margen total igual a la suma de los dos o tres márgenes de cada uno de los grupos, respectivamente, esto tendría dos ventajas: la primera, la simplicidad y la segunda, que implica plantear la solvencia separadamente para cada grupo, de forma que se garantiza la estabilidad de éste sin necesidad de recurrir a los posibles excedentes en los restantes.

Pero si consideramos el margen de solvencia, no como una provisión técnica, sino como un patrimonio propio deja de ser apropiado el planteamiento anterior, pues el capital social, reservas y otros elementos se corresponden con la empresa en su conjunto y no es fácil su atribución en porciones a diversas ramas de actividad. Por esta razón, hay que plantearse el problema del margen mínimo correspondiente a la totalidad del negocio, aunque éste se integre de riesgos de diferentes grupos.

A partir de esta conclusión, podemos calcular el margen mínimo de solvencia para cualquier cartera compuesta, si conocemos sus parámetros (media, varianza y coeficiente de asimetría).

Los cuadros 2, 3, 4, 5, 6 y 7, dan los resultados del cálculo del margen para distintas posibilidades en cuanto a la composición de las carteras; estos resultados nos permiten inferir leyes sencillas que sirven para determinar el margen mínimo global en función de los exigidos por cada grupo de ramos, separadamente.

CONCLUSIONES

Son varios los factores que configuran la probabilidad de solvencia en un compañía afianzadora, como pueden ser: el carácter particular o individual para cada empresa, la política de reafianzamiento, la de selección de riesgo y la de inversiones y otros tantos campos de la decisión empresarial.

Asimismo, la aleatoriedad pone en primer plano el objetivo de la Estabilidad y Solvencia del ente Afianzador, problema que, además se agrava en un contexto inflacionista en el que los costos de las reclamaciones se ven incrementados con relación a las previsiones contenidas en las primas.

Por tal razón, el único enfoque que en rigor sería satisfactorio al plantear la solidez del ente afianzador es el que exigiera la evaluación individual de sus riesgos, a la vista de sus particulares circunstancias.

Este punto de vista exige un estudio estadístico-actuarial que, en base al volumen de primas, calidad de los riesgos cubiertos, recargo de seguridad, plenos de retención, distribución del tamaño o cuantía del siniestro y probabilidad de ruina, determinará el margen mínimo de solvencia y no solo capitales y reservas para poder operar en el mercado

En cuanto al beneficio, este se debe de obtener periodificando el ingreso, lo que implica que, para mantener la estabilidad del pasivo, el precio de la fianza deba llevar un componente (recargo de seguridad) a fin de cubrir el riesgo de empresa, además de contar con elementos suficientes para resarcirse de las reclamaciones procedentes pagadas (garantías), de esto dependerá en gran medida su solidez y estabilidad, misma que le permitirá cumplir con eficacia las obligaciones contraídas, componente que es preciso detraer (dotando la correspondiente Provisión) antes de definir el beneficio imputable técnicamente al ejercicio que se cierra.

Respecto al control por parte de la administración pública, esta debe vigilar cuidadosamente la solvencia de la entidad a fin de defender los legítimos intereses de los afianzados, ya que la eficiencia en la tarificación (primas equitativas) es función que incumbe, en general al mercado, especialmente si se garantiza una adecuada transparencia informativa de cara al afianzado.

En este trabajo se mostró una forma del calculo del margen mínimo de solvencia empleando técnicas de la Teoría del Riesgo, las cuales mostraron elementos suficientes para generalizar en una solvencia global.

Por ejemplo, supongamos a una afianzadora con los siguientes volúmenes de primas comerciales:

Grupo	Primas comerciales (en mdp)
I	300
II	2000
III	80

Para aplicar la fórmula G del Capítulo 9 hemos de conocer los márgenes mínimos de cada grupo de ramos:

Para el Grupo I, en virtud del Capítulo 8, apartado 8.4.1 sabemos que el margen es, como mínimo, el 32.4% de las primas comerciales, en este caso 97.2 mdp.

Para el Grupo II, el margen mínimo según Capítulo 8, apartado 8.4.2 el margen es, como mínimo, el 33% de las primas comerciales, en este caso 660 mdp.

El margen del Grupo III (véase Capítulo 8, apartado 8.4.3), es el 97.4% de las primas comerciales hasta un volumen de éstas de 150 mdp, sin que el margen pueda ser inferior a 100 mdp. Al ser las primas comerciales de 80 mdp, el margen sería de 77.9 mdp, por lo tanto prevalece el límite de 100 mdp.

Tenemos por tanto, los márgenes mínimos siguientes:

Grupo	Margen mínimo (mdp)
I	97.2
II	660
III	100

Para aplicar la formula G del Capítulo 9 tenemos que el margen mayor es 660. Luego $M = 606$; $m_1 = 100$; $m_2 = 97.2$. El margen conjunto será:

$$U^* = 606 + \frac{100^2 + 97.2^2}{606} \cdot 0.33 = 616.59 \text{ mdp}$$

El hecho de que las fórmulas F y G del Capítulo 9 den resultados aceptables en el ejemplo práctico desarrollado no significa que puedan utilizarse en supuestos diferentes.

Por otro lado, la simulación constituye un medio para evaluar la solvencia dinámica de cada entidad afianzadora. Su flexibilidad permite adaptarse a las características especiales de cada empresa (calidad de riesgo, tasas de crecimiento, recargos de seguridad, etc.) y su sencillez y eficacia (cuando el número de simulaciones es suficientemente alto) permiten concebirlo como el procedimiento que, quizá en un futuro relativamente próximo, sea adoptado en la auditoría de las empresas afianzadoras e incluso en el control de su solvencia por parte de la Administración.

No es absurdo pensar que la legislación de control en lugar de fijar unas reglas sencillas y generales para la determinación del margen mínimo de solvencia (e incluso para el recargo de seguridad y provisión de estabilización), cambie radicalmente de orientación y opte por precisar pautas y criterios para elaborar programas de simulación. Dichos programas constituirían así un *test* a que las empresas habrían de someterse con cierta periodicidad (o quizá, cuando se encontraran en determinadas situaciones, acreedoras de medidas cautelares por parte de la Administración).

Una pregunta que lícitamente cabe formularse es si resulta necesario el control de la Administración Pública sobre la solvencia. Borch[1] ha dedicado atención a este tema y concluye que la necesidad de control depende de la propia entidad: si ésta se propone objetivos a largo plazo, el control no es necesario, pues sus gestores marcarán unos niveles de solvencia superiores a los que cuenta, con el exclusivo fin de proteger a los afianzados.

En general, el método empleado para calcular el margen de solvencia de cada grupo es el siguiente: una vez calculados los principales parámetros de la distribución de las reclamaciones anuales (media, varianza y coeficiente de asimetría) se justifica, mediante simulación que la aproximación Gamma es aceptable como ley representativa de dicha reclamación anual, así como también la transformación NP.

Justificando empíricamente (a través del experimento de simulación) el uso de la función Gamma, no hay más que calcular el margen que, junto con las primas dé

---

[1] Karl Borch, *Is Regulation and Supervision of Insurance Companies Necessary?*. Scand. Actuarial Journal, 1981.

lugar a una probabilidad de ruina no superior a la deseada (en nuestro caso 1/3%) de que las reclamaciones exceda a dicho recurso.

En cuanto al margen de solvencia general, se comienza por determinar los parámetros de la distribución de la reclamación global (suma de las reclamaciones de cada grupo de ramos) y se cuestionan las condiciones en que las que dicha distribución sigue siendo de Poisson compuesta. Al concluir que ello es cierto sólo en condiciones restrictivas, se abandona la hipótesis y se plantea la pregunta de sí, aún distribuyéndose de otra forma, es o no aplicable la aproximación NP. La respuesta se intenta por medio de un experimento de simulación, en cuyo planteamiento necesitamos utilizar la transformación NP para todos los valores posibles de las variables que en ella intervienen. Ello nos lleva a justificar las fórmulas que componen esta transformación. Se dedica atención a este tema, que no es examinado con suficiente detalle en la bibliografía que se empleo.

Obtenidas las formulas constitutivas de la aproximación NP, se efectúa una simulación de las reclamaciones aceptando en lo sucesivo dicha ley como modelo de la distribución de la reclamación global.

ANEXO 1

CUESTIONES COMPLEMENTARIAS

A. FORMULA DE STIRLING

B. OTRO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN POISSON

A. FORMULA DE STIRLING

Varias veces hemos tenido necesidad de recurrir a esta fórmula (por ejemplo, al hacer cálculos relacionados con la distribución gamma), que sirve para aproximar el valor de $n!$ cuando n es grande. La formula es:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

Observemos que no se trata de que el lado derecho de la anterior expresión converja hacia el valor de $n!$ cuando $n \to \infty$. Al crecer n, el error absoluto de la aproximación sobre el verdadero valor de $n!$ aumenta también. La utilidad de la aproximación radica en que el error relativo cometido tiene a cero al aumentar n. Por ejemplo, $50!$ es 3.041409×10^{64}, mientras que la fórmula de Stirling da 3.036344×10^{64}; análogamente $60!$ es 8.320987×10^{81} y según la aproximación de Stirling, 8.309438×10^{81}. El error absoluto, en el primer caso es 5.065×10^{61}; en el segundo, 1.1549×10^{79}, es decir, mayor. En cambio, el error relativo en el primer supuesto es:

$$\frac{3.041409}{3.036344} - 1 = 0.00167$$

y en el segundo,

$$\frac{8.320987}{8.309438} - 1 = 0.00139$$

y menor, por tanto, que el primero.

De entre los diversos métodos para demostrar la fórmula de Stirling utilizaremos el empleado por R. C. Buck.[1]

Sea x una variable real y

$$\Gamma[x+1] = \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^x du = x!$$

(si x es un número entero).

Hacemos ahora el cambio de variable $u = xt$. Tenemos

[1] Buck, *Advanced Calculus*, Mc Graw Hill, 1965.

$$\frac{\Gamma[x+1]}{x^{x+1}} = \int_0^\infty [e^{-t} \cdot t]^x \, dt$$

Se trata de calcular la anterior integral para valores grandes de x. Para ello, denominamos $g(t)$ (y, por brevedad, también g) a la función:

$$g(t) = e^{-t} \cdot t$$

Cuando $t = 0$ la función g se anula; además, dicha función es creciente en $[0, 1]$, presenta un máximo en $t = 1$ y para todo $t > 1$ es decreciente y siempre positiva; el valor máximo es $g(1) = e^{-1}$. Por tanto podemos dividir el intervalo de integración $(0, \infty)$ en tres subintervalos: $(0, 1 - \delta)$; $[1 - \delta, 1 + \delta]$; $(1 + \delta, \infty)$ (siendo $\delta > 0$):

$$\frac{\Gamma[x+1]}{x^{x+1}} = \int_0^{1-\delta} g^x dt + \int_{1-\delta}^{1+\delta} g^x dt + \int_{1+\delta}^{\infty} g^x dt \qquad (A)$$

El valor de las integrales primera y tercera queda acotado como sigue:

$$k = \int_0^{1-\delta} g^x dt \leq A^x \cdot (1-\delta) < A^x$$

$$L = \int_{1+\delta}^{\infty} g^x \cdot dt < B^{x-1} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt = B^{x-1}$$

siendo

$$A = g(1-\delta) < e^{-x}$$
$$B = g(1+\delta) < e^{-x}$$

Veamos ahora el valor al que tiende la integral cuando $x \to \infty$; obsérvece que con ella no podemos proceder de igual manera que con las otras dos integrales, porque no existe un número $c < e^{-x}$ tal que podamos hacer:

$$I = \int_{1-\delta}^{1+\delta} g^x dt \leq \int_{1-\delta}^{1+\delta} c^x dt = 2c^x \delta$$

puesto que el máximo, e^{-1} se alcanza en $t = 1$, pertenece al intervalo de integración, y la función es continua en él. De aquí que para estudiar el valor de I hayamos de seguir otro procedimiento.

A fin de que los límites de integración sean $+\delta$ y $-\delta$ hacemos el cambio de variable $t = s + 1$.

$$I = \int_{1-\delta}^{1+\delta} g^x dt = \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-(s+1)x} \cdot (s+1)^x ds =$$

$$= e^{-x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-sx} (s+1)^x ds = e^{-x} \cdot J \qquad (B)$$

$$(J = \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-sx} (s+1)^x ds)$$

Consideremos ahora el valor de J. La expresión $e^{-s} \cdot (s+1)$ vale 1 si $s = 0$; desarrollamos en serie su logaritmo y obtenemos:

$$\log\left[e^{-s}(s+1)\right] = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \ldots - s$$

$$= -\frac{s^2}{2}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot (-s)^i\right]$$

en donde k_i son números positivos menores que 1 ($k_1 = 2/3$; $k_2 = 1/2$; ...). La expresión entre corchetes tiende a 1 cuando $s \to 0$. Si la designamos por $h(s)$ podemos expresar (B) de la siguiente forma:

$$I = e^{-x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{xs^2}{2} h(s)} ds$$

Como $h(s) \to 1$ cuando $s \to 0$, será siempre posible encontrar valores de s lo suficientemente próximos a 0 tales que

$$1 - \varepsilon < h(s) < 1 + \varepsilon$$

por pequeño que sea $\varepsilon > 0$.

Por tanto, el valor de la integral I estará acotado así:

$$e^{-x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{xs^2}{2}(1+\varepsilon)} ds \leq I \leq e^{-x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{xs^2}{2}(1-\varepsilon)} ds \qquad (C)$$

Necesitamos ahora obtener el valor al que tiende una integral de la forma

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-cxs^2} ds$$

(siendo c una constante positiva), cuando $x \to \infty$. Para ello, consideramos la expresión:

$$H(x) = \sqrt{x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-cxs^2} ds$$

Hagamos

$$t = s\sqrt{cx} \qquad ; \qquad ds = \frac{dt}{\sqrt{cx}}$$

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{-\delta\sqrt{cx}}^{\delta\sqrt{cx}} e^{-t^2} dt$$

Si tenemos en cuenta que (recordemos la integral de Gauss):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

y hacemos $x \to \infty$ llegamos a

$$H(\infty) = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-cxs^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

y por consiguiente

$$\sqrt{x} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{xs^2}{2}(1 \pm \varepsilon)} ds \to \sqrt{\frac{2\pi}{1 \pm \varepsilon}} \qquad (D)$$

Si multiplicamos (C) por $e^x\sqrt{x}$ y aplicamos (D) para

$$c = \frac{1 \pm \varepsilon}{2}$$

queda, para todo x suficientemente grande:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon}} \leq e^x\sqrt{x}\cdot I \leq \sqrt{\frac{2\pi}{1-\varepsilon}}$$

Si además $\delta \to 0$ resulta que

$$lim\left(e^x\sqrt{x}\cdot I\right)=\sqrt{2\pi}$$

El producto de $e^x\sqrt{x}$ por las integrales K y L es, de acuerdo con los respectivos resultados que obtuvimos antes:

$$e^x\sqrt{x}\cdot K<(eA)^x\sqrt{x}$$
$$e^x\sqrt{x}\cdot L<\frac{1}{B}(eB)^x\sqrt{x}$$

como A y B son ambos menores que e^{-1} resulta

$$\left.\begin{array}{r}(eA)^x\cdot\sqrt{x}\to 0\\ \frac{1}{B}(eB)^x\cdot\sqrt{x}\to 0\end{array}\right\}\quad \text{cuando } x\to\infty$$

y por tanto

$$\frac{\Gamma[x+1]}{x^{x+1}}\cdot e^x\sqrt{x}\to\sqrt{2\pi}\qquad (\text{si } x\to\infty)$$

y de aquí definitivamente (para x grande):

$$\Gamma[x+1]\approx\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}$$

Si x es un número natural, resulta la fórmula de Stirling:

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

B. OTRO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN POISSON

Un método más para el cálculo de la función de distribución de la variable de Poisson v (de parámetro n) se basa en la relación

$$P[v \leq k] = 1 - \Gamma[n; k+1] \qquad (E)$$

en donde $\Gamma[n;\, k+1]$ es

$$\Gamma[n; k+1] = \frac{1}{\Gamma[k+1]} \int_0^n e^{-t} \cdot t^k \, dt$$

al ser

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^k \, dt = \Gamma[k+1]$$

tenemos que

$$P[v \leq k] = \frac{1}{\Gamma[k+1]} \int_n^\infty e^{-t} t^k \, dt$$

Integrando por partes, resulta

$$\int_n^\infty e^{-t} \cdot t^k \, dt = e^{-n} \cdot n^k + k \int_n^\infty e^{-t} \cdot t^{k-1} \, dt$$

$$k \int_n^\infty e^{-t} \cdot t^{k-1} \, dt = k \cdot e^{-n} n^{k-1} + k(k-1) \int_n^\infty e^{-t} \cdot t^{k-2} \, dt$$

....

$$k(k-1) \ldots 3 \int_n^\infty e^{-t} \cdot t^2 \, dt = k(k-1) \ldots 3 \cdot e^{-n} \cdot n^2 + k! \int_n^\infty e^{-t} \cdot t \, dt$$

$$k! \int_n^\infty e^{-t} \cdot t \, dt = k! \cdot e^{-n} \cdot n + k! \cdot e^{-n}$$

Por tanto:

$$P[v \leq k] = \frac{1}{k!} e^{-n} \left[n^k + kn^{k-1} + k(k-1)n^{k-2} + .. + k!n + k! \right] =$$

$$= e^{-n} \left[\frac{n^k}{k!} + \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + ... + n + 1 \right] = \sum_{i=0}^{k} P[v = i]$$

Con ello queda demostrada la relación (E).

ANEXO 2

LA SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA O MÉTODO DE MONTECARLO Y SU APLICACIÓN PRÁCTICA

La capacidad de las computadoras para generar números aleatorios uniformemente distribuidos en forma continua en el intervalo [0, 1] puede aprovecharse para simular fácilmente un modelo aleatorio, como es, por ejemplo, el resultado técnico de una entidad aseguradora.

La simulación estocástica es también conocida como *Método de Montecarlo*, término introducido por John von Neumann durante la segunda guerra mundial para designar estas técnicas, utilizadas en los trabajos de investigación del *Proyecto Manhattan*, los cuales dieron lugar a la primera fisión nuclear en los laboratorios atómicos de Los Alamos (Nuevo México, Estados Unidos); el término hace referencia a la aleatoriedad propia de los juegos de azar (casino de Montecarlo).

El problema primordial a resolver en los métodos de simulación estocástica es el de transformar los números aleatorios R_i generados por el ordenador y distribuidos uniformemente [0, 1] en números aleatorios distribuidos según la función que interese en cada caso.

Hay dos métodos para transformar un número aleatorio R_i, uniforme [0, 1] en otro, x_i, distribuido según una función de distribución dada, $F(x)$:

a) Si $F(x)$ es discreta, el procedimiento puede ser el siguiente: obtenido R_i, se elige el mayor valor x, tal que $R_i \leq F(x_i)$ y el número aleatorio buscado es x_i.

Por ejemplo, si deseamos simular una variable de Poisson con parámetro $n = 0.1$ tenemos (redondeando hasta la milésima más próxima):

x_i	$F(x_i)$
0	0.905
1	0.995
2	1.000

Si $R_i = 0.567$, por ejemplo, el mayor x_i que cumple $R_i \leq F(x_i)$ es 0; luego el primer número aleatorio a emitir será 0, al igual que en todos los casos en que $R_i \leq 0.905$. Deriva de ello que el 90.5% de los números aleatorios R_i darán lugar a la emisión de un 0. Si $R_i = 0.927$, el mayor x_i para el que $R_i \leq F(x_i)$ es 1; es claro, pues, que en el 9% de los casos se emitirá un 1. Finalmente, sólo se emitirá un 2 en el 0.5% de las ocasiones. La obtención de las probabilidades $F(x_i)$ con más decimales conduciría a una mayor exactitud en los resultados del proceso.

b) Cuando $F(x_i)$ es continua y su forma analítica permite obtener su inversa F^{-1} el procedimiento es también muy sencillo:

- Generar R_i.

- Calcular $x_i = F^{-1}(R_i)$

Por ejemplo, si se trata de simular la variable aleatoria de Pareto, cuya función de distribución dada por:[1]

$$S(Z) = 1 - c^b \cdot Z^{-b}$$

tendremos que S^{-1} es:

$$S^{-1} = \frac{c}{(1-R)^{1/b}}$$

Por tanto, el algoritmo para generar números aleatorios distribuidos según Pareto, será:

1) Generar R_i.

2) Aplicar S^{-1} y emitir el resultado.

3) Volver a 1).

c) En la mayoría de las aplicaciones $F(x)$ no reúne la condición exigida para aplicar el método anterior (tal es el caso, por ejemplo, de la distribución normal, gamma, etc.). En tal supuesto, hay que acudir a procedimientos especiales. A continuación se examinan algunos.

2.1 Distribución normal

Un método posible es generar una serie de N números aleatorios y sumarlos. La suma será, aproximadamente normal con parámetros

$$\left(\frac{1}{2}N, \frac{1}{12}N\right)$$

este procedimiento tiene el inconveniente de su lentitud. Otras posibilidades, que es la que utilizaremos en este trabajo, son las fórmulas de Box y Muller:[2] a partir

[1] Véase Capitulo 5, apartado 5.2.

de dos números aleatorios uniformes [0, 1] obtendremos otros dos, distribuidos normalmente con parámetros (0, 1):

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \cos(2\pi R_1)\cdot\sqrt{-2\cdot\log R_2} \\ N_2 &= \cos(2\pi R_1)\cdot\sqrt{-2\cdot\log R_2} \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

en donde N_1 y N_2 son los números aleatorios independientes de distribución Normal (0, 1) y R_1 y R_2 son los uniformes (0, 1).

La demostración de las anteriores fórmulas la realizaremos mediante los pasos siguientes:

1. Designemos por u a una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo [0, 1], y sean ξ_1 y ξ_2 dos variables aleatorias cualesquieras.

Si se cumple que

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)} = u \qquad (B)$$

podemos afirmar que ξ_1 y ξ_2 son independientes y normalmente distribuidas, con parámetros (0, 1).

Para demostrar esta proposición recordemos que la función de densidad de una variable X_2^2 con dos grados de libertad es

$$k(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{(para } x > 0\text{)}$$

Por tanto

$$P\left[X_2^2 \le x\right] = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\frac{u}{2}}du = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

Sea $F(x)$ la función de distribución de la suma $\xi_1^2 + \xi_2^2$ es decir

$$F(x) = P\left[\xi_1^2 + \xi_2^2 \le x\right]$$

la condición (B) equivale a

[2] Reuven Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, Nueva York, 1981. Véase B. D. Ripley, *Stochastic Simulation*, Nueva york, 1987.

$$P\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)} \le u\right] = u$$

Ahora bien

$$P\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)} \le u\right] = P\left[\xi_1^2 + \xi_2^2 \ge -2\cdot\log u\right] = 1 - P\left[\xi_1^2 + \xi_2^2 \le -2\cdot\log u\right] =$$
$$= 1 - F(-2\cdot\log u) = u$$

La última relación de igualdad es consecuencia de (B). Despejamos la función de distribución, haciendo además $-2\cdot\log u = t$ por lo que $e^{-t/2} = u$. Por tanto,

$$F(t) = 1 - e^{-t/2}$$

que es precisamente la probabilidad de que $X_2^2 \le t$ Es decir que $\xi_1^2 + \xi_2^2 = X_2^2$ y tanto ξ_1 como ξ_2 son normales (0, 1) e independientes entre sí.

2. Sean ahora u_1 y u_2 dos variables aleatorias uniformemente distribuidas en [0, 1] e independientes.

Hacemos la siguiente transformación:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{-2\cdot\log u_1}\cdot\cos(2\pi\cdot u_2)\\ \xi_2 &= \sqrt{-2\cdot\log u_2}\cdot\cos(2\pi\cdot u_2)\end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Esta claro que ξ_1 y ξ_2 cumplen la relación (B). En efecto:

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)} = e^{\log u_1} = u_1$$

Luego las variables ξ_1 y ξ_2, definidas por (C) son independientes y normales (0, 1), como queríamos demostrar.

Por tanto el algoritmo para obtener números aleatorios distribuidos Normal (μ, σ) es:

1) Generar R_1.

2) Generar R_2.

3) Aplicar (A).

4) Resultado $\begin{cases} \sigma N_1 + \mu \\ \sigma N_2 + \mu \end{cases}$

5) Volver a 1).

2.2 Distribución logarítmico-normal

El procedimiento es:

1) Obtener N mediante (A).

2) Resultado:

$$w + e^{\sigma N + \mu}$$

(siendo w, μ y σ los parámetros de la distribución logarítmico-normal.[3]

3) Volver a 1).

2.3 Distribución de Poisson

El procedimiento, cuando el parámetro n es pequeño, ha quedado descrito en el inciso *a* de este Anexo. Si n es mayor que 10, puede utilizarse la aproximación normal, teniendo en cuenta que

$$\frac{x - n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

2.4 Distribución de Pareto

(Véase inciso *b* de este Anexo).

2.5 Distribución binomial negativa[4]

Para obtener el algoritmo debe tenerse en cuenta que si consideramos el número k de *fracasos* en un experimento repetido $m = k + h$ veces, en que se han obtenido h *éxitos*, siendo la probabilidad de éxito igual a p, dicho número k de fracasos se distribuye según la binomial negativa. Si la probabilidad de éxito es p, en el

[3] Véase Capítulo 5, apartado 5.1.

[4] Reuven Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, Nueva York, 1981.

experimento de simulación definiremos convencionalmente como *éxito* el suceso $R_i \leq p$. Por tanto, el algoritmo es (los parámetros h y p tienen el significado visto en el Capítulo 4, apartado 4.2):

1) Hacer $x = 0$ e $y = 0$.

2) Generar R_i.

3) Si $R_i > p$ ir a 7).

4) Hacer $y = y + 1$.

5) Si $y = h$ emitir x; volver a 1).

6) Volver a 2).

7) Hacer $x = x + 1$.

8) Volver a 2).

ANEXO 3

DATOS PARA LOS DIVERSOS RAMOS

RAMO I. FIDELIDAD*

Año	Número de Afianzados	Número de Pólizas	Número de Reclamaciones Pagadas	Monto de Reclamaciones Pagadas
1994	220,868	22,659	1,054	22,611,000
1995	278,735	32,878	1,910	32,641,000
1996	112,713	26,618	2,169	41,468,000
1997	78,867	32,506	1,468	30,784,000
1998	98,017	29,429	1,602	43,115,296
1999	67,328	29,330	1,546	54,996,737
2000	125,380	27,842	1,516	59,595,000
2001	3,658,217	127,232	2,107	129,787,365
2002	3,315,766	315,225	4,709	183,991,213
2003	3,563,634	440,095	2,929	169,956,824
2004	2,552,267	389,106	523	29,844,012

RAMO II. JUDICIAL*

Año	Número de Afianzados	Número de Pólizas	Número de Reclamaciones Pagadas	Monto de Reclamaciones Pagadas
1994	36,098	33,678	989	6,087,000
1995	68,585	114,193	869	10,509,000
1996	76,503	101,971	1,875	21,342,000
1997	72,954	101,608	1,791	23,763,000
1998	75,814	112,841	2,083	26,869,539
1999	87,240	129,176	2,241	30,516,028
2000	91,754	141,586	2,315	35,839,000
2001	470,636	463,002	5,444	99,158,310
2002	984,580	1,206,231	9,365	249,063,639
2003	1,249,067	1,766,395	9,541	210,670,739
2004	465,231	651,704	1,960	33,815,320

(*) FUENTE: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

RAMO III. ADMINISTRATIVAS*

Año	Número de Afianzados	Número de Pólizas	Número de Reclamaciones Pagadas	Monto de Reclamaciones Pagadas
1994	573,309	1,415,675	9,949	163,412,000
1995	875,320	1,404,029	16,912	304,394,000
1996	1,046,833	949,162	11,571	337,856,000
1997	636,703	1,099,208	7,703	278,069,000
1998	1,186,467	1,265,384	8,709	380,772,547
1999	1,484,968	1,399,306	7,963	350,890,202
2000	1,307,882	1,438,328	9,095	920,990,000
2001	4,474,906	2,402,006	9,282	3,165,042,829
2002	8,911,038	5,288,481	21,391	2,296,324,344
2003	10,430,955	6,795,189	18,925	2,342,652,208
2004	5,563,022	3,008,969	2,210	594,981,256

RAMO IV. CRÉDITO*

Año	Número de Afianzados	Número de Pólizas	Número de Reclamaciones Pagadas	Monto de Reclamaciones Pagadas
1994	87,673	28,235	5,370	89,690,000
1995	71,337	102,821	4,376	80,281,000
1996	15,593	28,809	1,871	114,889,000
1997	9,806	12,093	417	105,299,000
1998	8,122	10,044	609	110,810,582
1999	11,170	12,572	272	339,756,000
2000	12,996	21,627	503	208,067,000
2001	288,176	37,566	1,104	768,152,005
2002	301,991	80,222	1,136	807,453,802
2003	81,850	90,369	1,108	1,990,351,925
2004	37,960	42,399	130	75,418,447

(*) FUENTE: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

ANEXO 4

PARÁMETROS DE DIVERSAS CARTERAS PARA LA DISTRIBUCIÓN GAMMA

GRUPO I
Siniestralidad Anual

Tamaño de la Cartera (mdp) P	σ_ξ	γ_ξ	α
100	19.327	4.430	0.204
150	28.991	1.374	2.120
200	38.654	0.614	10.609
500	96.635	0.075	715.841
1,000	193.271	0.038	2,789.680
1,500	289.906	0.033	3,567.435
2,000	386.541	0.032	3,843.127
3,000	579.812	0.032	4,023.567
5,000	966.354	0.031	4,103.472

GRUPO II
Siniestralidad Anual

Tamaño de la Cartera (mdp) P	σ_ξ	γ_ξ	α
100	19.104	2.616	0.584
150	28.656	0.895	4.991
200	38.208	0.457	19.133
500	95.521	0.133	225.388
1,000	191.042	0.108	341.542
1,500	286.563	0.105	363.577
2,000	382.084	0.104	370.620
3,000	573.125	0.103	375.228
5,000	955.209	0.103	377.364

GRUPO III Siniestralidad Anual			
Tamaño de la Cartera (mdp) P	σ_ξ	γ_ξ	α
100	57.054	6.681	0.090
150	85.581	2.337	0.732
200	114.108	1.223	2.674
500	285.270	0.388	26.594
1,000	570.539	0.321	38.799
1,500	855.809	0.312	41.109
2,000	1,141.079	0.309	41.856
3,000	1,711.618	0.307	42.351
5,000	2,852.697	0.306	42.584

BIBLIOGRAFÍA

1. *Anuario Estadístico de Seguros y Fianzas*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. 1994 - 2004.

2. Beard, R. E. et al. *Risk Theory: The Stochastic Basic of Insurance*. USA. Chapman and Hall. 3ª edition. 1984.

3. Borch, K. *The Mathematical Theory of Insurance*. 1974.

4. Bowers, Newton L. et al. *Actuarial Mathematics*. USA. The Society of Actuaries. 1986.

5. Bühlmann, Hans. *Mathematical Methods in Risk Theory*. Germany. Springer-Verlag. 1970.

6. Canavos, G. *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos*. México. McGraw-Hill. 1987.

7. Daykin, C. D. et al. *Practical Risk Theory for Actuaries*. Great Britain. Chapman and Hall. 1994.

8. Dorfman, Mark S. *Introduction to Risk Management and Insurance*. USA. Prentice Hall. 5ª edition. 1994.

9. Feller, William. *An introduction to Probability theory and it's Aplications*. USA. John Wiley & Sons. 3ª edition.

10. Gerber, Hans U. *An Introduction to Mathematical risk theory*. USA. Huebner Foundation. 1980.

11. Hoel et al. *Introduction to Stochastic Processes*. USA. Houghton Mifflin Co.

12. Hogg y Klugman. *Loss Distributions*. 1984.

13. Jordan, Charles W. *Life Contingences*. USA. The Society of Actuaries. 1967.

14. Latorre Llorens, Luis. *Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora*. MAPFRE.

15. *Ley Federal de Instituciones de Fianzas y Disposiciones Conexas.*

16. Lundberg F. Some supplementary researches on the collective risk. Skandinavisk Aktuaritidskrift. 1932.

17. Molina Bello, Manuel. *La fianza*. México. McGraw-Hill.

18. Mood. A. M. et al. *Introduction to the Theory of Statistics*. New York. McGraw-Hill. 1974.

19. Nieto de Alba, Ubaldo y Vegas Asensio, Jesus. *Matemática Actuarial*. MAPFRE.

20. Operations Research Quaterly. *Compound Poisson Distributions*, núm. 17.

21. Panjer H. H. *Recursive Evaluation of a family of compound distributions.* Astin Bulletin. 1981.

22. Pentikäinen T. *Approximative Evaluation of the Distribution Function of Aggregete Claims*

23. Prieto Pérez, E. *Aplicaciones al seguro de la distribución binomial negativa.* Anales del IAE. Núm. 13.

24. Rantala J. *Solvency of Insurers and Equalization Reserves*. Helsinki. 1982.

25. Seal H. L. *Approximations to Risk Theory's F(x, t) by means of the gamma distribution*. Astin Bulletin. 1977.

26. Transactions of the Society of Actuaries XXXII. *The Aggregate Claims Distribution and Stop-loss Reinsurance.*

27. Vaughan, Emmet J. y Therese Vaughan. *Fundamentals of Risk and Insurance*. USA. John Wiley & Sons. 7ª edition. 1996.