



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE MODOS LOCALIZADOS EN GUÍAS  
DE ONDA USANDO PELÍCULAS DE JABÓN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :  
FÍSICO

P R E S E N T A :

CÉSAR BADILLO SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARÍA GABRIELA  
BÁEZ JUÁREZ

ASESOR DE TESIS: Dr. RAFAEL ALBERTO  
MÉNDEZ SÁNCHEZ



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

2005

m. 347549



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCIÓN ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Estudio de modos localizados en guías de ondas usando películas de jabón"

realizado por      Badillo Sánchez César

con número de cuenta 08411578-0      , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- Director de Tesis
- Propietario      Dra. María Gabriela Báez Juárez
- Propietario      Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez
- Propietario      Dr. Doroteo Mendoza López
- Suplente      M. en C. Augusto Cabrera Manuel
- Suplente      Fís. Ricardo César Arzate Trujillo

*Ma. Gabriela Báez Juárez*

*[Signature]*

*[Signature]*

*[Signature]*

*[Signature]*

Consejo Departamental de F



*Alicia Zarzosa Pérez*

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

## Agradecimientos

A DIOS, por la oportunidad de formar parte de este mundo que no deja de maravillarme.

A mi madre Emilia Sánchez González, por inspirarme el amor más puro, sincero y honesto.

A mi padre Apolinar Badillo Cuenca, por el ejemplo más grande de hombría, a través de sus actos día con día.

Gracias por la magnífica educación que recibí de ustedes, los amaré por siempre.

A mis hermanos: Julia, Dolores, María Eugenia, Jacinto y José Antonio. Porque cada uno representa el mejor regalo de DIOS. Sepan que el ser hermano de ustedes representa para mí, el orgullo más grande que, como ser humano, tengo.

A mis sobrinos de sangre Jesús, Carolina, Cecilia, Gabriela y Samanta.

A mi sobrina de corazón Laura. Porque este trabajo, represente una motivación en su futura vida académica, **ÁNIMO !**.

A mi esposa, amiga, compañera, etc. María Aracemi Carmona Vega, por la inmejorable e invaluable compañía, que me ha brindado en las diferentes etapas que me a tocado vivir junto a ella, gracias chaparrita.

A la gente que me ama, que me quiere, que me respeta y cree en mí, porque siempre estaré con ustedes, cueste lo que cueste.

A mis difuntos como un pequeño homenaje de mi parte.

Quiero también agradecer a mi directora de tesis la Dra. María Gabriela Báez Juárez, por el derroche de humanidad que a tenido conmigo. Gracias, nunca lo olvidaré !

A mi asesor de tesis el Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez, por la oportunidad de tratar a su encantadora familia en estos momentos de mi vida. Muchas gracias !

A mis sinodales la Dra. María Gabriela Báez Juárez, el Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez, el Dr. Doroteo Mendoza López, el M. en C. Augusto Cabrera Manuel y el Físico Ricardo César Arzate Trujillo. Por la contribución

al mejor entendimiento y realización de este trabajo gracias por sus valiosos comentarios y observaciones.

De una manera muy fraternal, quiero agradecer a Teresa Castelan Rubio, por las revisiones que le hizo a este trabajo, sus observaciones, preguntas y comentarios, orientaron la escritura de este trabajo. Muchas gracias, espero pronto revisar tu tesis.

El espacio, que me ofrecen estas líneas es insuficiente para nombrar a todos y cada uno de mis profesores y compañeros, que a lo largo de mi vida académica, me han acompañado. Por lo que recordándolos a todos les doy las gracias por el apoyo que siempre me brindaron.

Es momento de agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación profesional, social y de valores que me ha brindado.

Finalmente quiero agradecer al laboratorio de Sistemas Dinámicos de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco, por facilitarme sus instalaciones y equipo para el desarrollo de este trabajo.

César Badillo Sánchez, Septiembre de 2005.

## Resumen

Se sabe que en guías de onda cuánticas con dobleces ó protuberancias, existe al menos un estado ligado para los electrones localizados en estos sistemas. La existencia de dichos estados es sorprendente ya que clásicamente estos sistemas no tienen regiones prohibidas. Tales estados han sido observados también experimentalmente en cavidades de microndas cuasibidimensionales con geometrías similares. En este trabajo mostraremos un montaje experimental con el cual podemos observar de manera directa la existencia de estados ligados, en aros con geometrías similares a las reportadas en la literatura usando, como medio de propagación, una película de jabón. El montaje experimental que se utiliza está formado con equipo considerablemente más económico al referenciado anteriormente. Dicho equipo es de fácil manejo, lo cual lo hace accesible y didáctico. Esto acerca al estudiante a trabajos de investigación de frontera. En este trabajo se mide la frecuencia a la que se establecen dichos estados ligados y se muestra que efectivamente son localizados ya que su presencia es independiente de de la longitud de los brazos de los aros.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Revisión de la Literatura</b>	<b>3</b>
2.1. Estados ligados. . . . .	3
2.2. Guías de onda con dobleces. . . . .	4
2.3. Alambres cuánticos cruzados. . . . .	6
2.4. Guías de onda con un doblez. . . . .	11
2.5. Guías de onda con más de un doblez. . . . .	19
2.6. Guías de onda en cristales fotónicos. . . . .	27
2.7. Estados ligados múltiples en guías de onda en forma de tijera. . . . .	30
2.8. Resumen del capítulo. . . . .	33
<b>3. Fundamentos Teóricos</b>	<b>35</b>
3.1. Movimiento ondulatorio unidimensional. . . . .	35
3.2. La ecuación de onda bidimensional. . . . .	37
3.3. Modos normales de una membrana rectangular. . . . .	38
3.4. Guías de onda bidimensionales. . . . .	40
3.5. Estados localizados en guías de onda. . . . .	43
3.6. Resumen del capítulo. . . . .	48
<b>4. El experimento.</b>	<b>49</b>
4.1. Montaje experimental. . . . .	49
4.2. Desarrollo experimental. . . . .	50
4.2.1. Toma de datos. . . . .	51
4.3. La solución jabonosa óptima. . . . .	52
4.3.1. Preparación de solución. . . . .	54
4.4. Los aros y sus dimensiones. . . . .	54
4.4.1. El aro en forma de “L”. . . . .	56

4.4.2. El aro en forma de "Y". . . . .	57
4.4.3. El aro en forma de "X". . . . .	57
4.4.4. Procedimiento de fabricación de los aros, para cualquiera de sus geometrías . . . . .	59
4.5. Resumen del capítulo. . . . .	61
<b>5. Los resultados</b>	<b>63</b>
5.1. Velocidad de propagación de las ondas en las membranas jabonosas. . . . .	63
5.2. Discusión de resultados. . . . .	65
5.2.1. El rectángulo. . . . .	65
5.2.2. Estados localizados en la geometría "L". . . . .	66
5.2.3. Estados localizados en la geometría "Y". . . . .	69
5.2.4. Resultados de la geometría "X". . . . .	71
5.3. Resumen del capítulo. . . . .	74
<b>6. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A. Cálculo de la velocidad de propagación de las ondas en la membrana jabonosa</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La fenomenología de las guías de onda es bien conocida [1]. Se sabe que hay frecuencias de corte abajo de las cuales, no se transmiten señales. Sin embargo, Exner [2, 3] probó que, en superficies bidimensionales infinitas de anchura constante con dobleces tipo codos o con protuberancias, existe al menos un estado ligado abajo de la frecuencia de corte. Este estado queda atrapado en cierta región de la guía (localizado). Estos estados ya han sido observados experimentalmente con equipos costosos tales como cavidades de microondas. Dichos estados pueden afectar las propiedades de transporte de señales en las guías de onda y por lo tanto su eficiencia. En este trabajo se mostrara directamente la existencia de tales estados en guías de onda bidimensionales con un dispositivo sencillo, didáctico y de bajo costo.

En el capítulo 2 hacemos una revision de la literatura referente a estados localizados en guías de onda bidimensionales con dobleces o protuberancias. El objetivo principal de este capítulo, es mostrar diferentes dispositivos experimentales que se han utilizado para el estudio de estados ligados en dichos sistemas. Esto es de mucha importancia, ya que en esta tesis mostraremos un dispositivo experimental que nos permite observar directamente los estados ligados para motivar a estudiantes de primeros semestres de licenciatura a temas de frontera.

En el capítulo 3 se desarrolla la teoría básica de guías de onda bidimensionales y discutiré a nivel teórico la existencia de los estados ligados en guías de onda con dobleces y protuberancias. Comenzando con por el estudio del movimiento ondulatorio en una y dos dimensiones, lo cual nos permite, entre otras cosas, obtener la velocidad de propagación de las ondas en las membranas jabonosas que se utilizan en el experimento. Posteriormente se aborda

la teoría clásica de guías de onda en general, para después caracterizar a los estados localizados y analizar la existencia y evidencia experimental de tales estados en guías de onda con dobleces tipo “codos”.

En el capítulo 4 se describe en detalle el funcionamiento del dispositivo experimental que usamos para visualizar de manera directa estados localizados en guías de onda bidimensionales con dobleces tipo codos. Se discute las ventajas de nuestro montaje respecto a otros (cavidades de microondas, alambres cuánticos, etc.). El proceso de la toma de datos de frecuencias, se explica de manera detallada, así como los parámetros que manejamos para cada geometría.

En el capítulo 5 se muestra y se discuten los resultados obtenidos para cada geometría estudiada, fotos experimentales de los estados localizados (visibles directamente), y gráficas de la frecuencia en función de los parámetros del sistema (ángulo de doblez  $\theta$  y longitud de los brazos de la guía) para cada estado ligado. Se determina experimentalmente la velocidad de propagación  $v$  de las ondas en la película jabonosa empleada.

Finalmente se presentan en el capítulo 6 las conclusiones de este trabajo.

# Capítulo 2

## Revisión de la Literatura

En este capítulo se hace una revisión de algunos de los trabajos más representativos, de los estudios que se han hecho, sobre la existencia de estados ligados en guías de onda bidimensionales con dobleces. La fenomenología expuesta aquí sobre dichos estados ligados permitirá, entre otras cosas, la familiarización con los diversos dispositivos experimentales que se han usado para el estudio de estos sistemas. Asimismo, se tendrá la oportunidad de comparar algunos de los sofisticados métodos que se usan para la detección de los mismos. Lo anterior es muy importante ya que en el capítulo 5, se mostrara un montaje experimental muy didáctico, a través del cual, se pueden observar directamente los estados ligados y permiten a los estudiantes de licenciatura tener un acercamiento con temas de frontera.

### 2.1. Estados ligados.

El estudio y la caracterización de estados ligados se hará con detalle en el próximo capítulo. Por el momento sólo mencionaremos que los estados ligados se distinguen porque las funciones de onda que los caracterizan decaen exponencialmente con la distancia por lo que, se encuentran concentradas alrededor de zonas bien localizadas. Por su parte, la energía asociada a dichos estados es negativa. El estudio de estados ligados en guías de onda bidimensionales, tiene una gran relevancia desde el punto de vista práctico, ya que con el desarrollo de la tecnología, se han reducido de manera considerable las dimensiones de muchos sistemas que contienen como parte de sus componentes guías de onda dobladas o curvadas. Dada la existencia de estados ligados

en dichas guías, es posible tener problemas con la transmisión de señales.

La pregunta de la posible existencia de estados ligados en sistemas abiertos bidimensionales ha sido un clásico en la teoría de guías de onda. Recientemente este tema ha recobrado el interés de los investigadores, particularmente en el contexto de dispositivos mesoscópicos a bajas temperaturas, con aplicaciones a la tecnología de cómputo avanzado.

Los estados ligados debidos a condiciones particulares de frontera fueron estudiados ya a mitad del siglo pasado por F. Ursell [4]. Sin embargo, no fueron predichos en guías de onda curvadas sino hasta mucho tiempo después por Exner [2], quien estudió teóricamente guías de onda con dobleces y cruces, provocando esto, la aparición de estados confinados o ligados, los cuales surgen abajo de la frecuencia de corte en tales sistemas. Las implicaciones que puede tener esta fenomenología para posibles aplicaciones han sido ampliamente discutidas en muchos trabajos, algunos de los cuales serán brevemente expuestos a continuación.

## 2.2. Guías de onda con dobleces.

P. Exner y P. Seba [2] estudian el problema de una partícula moviéndose en una tira plana curvada, con condiciones a la frontera de Dirichlet (función nula en las fronteras), tal sistema puede ser visto como un alambre cuántico curvado con un sustrato plano (donde la dimensión vertical es separada). El método que aquí se emplea se extiende fácilmente a casos más generales de capas arbitrariamente dobladas o tubos en tres dimensiones ( $R^3$ ). En este trabajo se llama Q-guía u  $\Omega$  a la guía de onda cuántica. Los autores suponen que esta guía de onda cuántica es infinitamente suave en la frontera y que es curvada sólo dentro de la región ligada. Una "Q-guía" es llamada simplemente doblada si el signo de la curvatura  $\gamma$  no cambia de signo. Si  $\gamma$  es de signo cambiante, veremos que  $\Omega$  tiene dobléz múltiple. Dadas las consideraciones físicas anteriores, se estudia la guía de onda cuántica para describir el movimiento de una partícula cuántica en un tubo. Para generalizar el problema se hace uso de coordenadas curvilíneas naturales, para encontrar un operador unitario equivalente de una estructura más complicada, la cual actúa sobre la guía recta. Estimando este operador y usando el principio variacional se encuentra que, para un ancho lo suficientemente pequeño de la tira, al menos existirá un estado ligado antes del primer modo transversal de la energía.

Goldstone y Jaffe [5] también han estudiado la ecuación de onda sujeta a

condiciones en la frontera de Dirichlet en un tubo infinito de sección transversal constante que no sea exactamente recto, es decir, que esté curvada. Este sistema, en cualquier número de dimensiones contiene, al menos, un estado ligado. En este artículo los autores prueban este resultado, desarrollando métodos basados en la función de Green, con el fin de encontrar los eigenvalores de la energía, y resuelven algunos casos simples.

Los autores consideran como ejemplo, un tubo cilíndrico infinito con una protuberancia en su parte media. Una partícula restringida a moverse en este tubo puede tener bajo momentum transversal y por lo tanto baja energía transversal dentro de la protuberancia. Un estado ligado resulta debido a que la partícula cuántica se apachurra (*squeeze*) dentro de la sección cilíndrica del tubo a fin de propagarse hasta el infinito.

Un sistema que representa bien estas condiciones, es un tubo recto con un cambio lento de radio, el cual puede ser mapeado a un problema unidimensional en el cual el cambio de radio aparece como un cambio en el potencial. Una protuberancia corresponde a una atracción y, en una dimensión, una atracción sin importar cuan débil sea, es suficiente para producir ligaduras. Así los dobleces funcionan como las protuberancias. Para demostrar la afirmación anterior, Goldstone et al. consideran un canal infinito de ancho constante en el plano. El canal es construido como sigue: Sea  $C$  una curva parametrizada por su longitud  $s$ .  $C$  es recta en sus extremos, es decir para  $s < -s_l$  y  $s > s_1$ . En la parte central  $C$  se curva en un camino arbitrario. Por motivos de simplicidad suponen que  $C$  no tiene cruces ni enroscaduras, esto es, la tangente es única para cada punto. Para cada punto en  $C$  existe una normal unitaria en el mismo lado de  $C$ . El canal  $K$  es la región entre  $C$  y  $C'$  como se muestra en la figura 2.1. La comprobación de esta afirmación esta basada en principios variacionales.

En el experimento, debemos recordar que las guías de onda son de longitud finita y los conductores físicos tienen conductividad finita. Así, aunque los estados ligados se pueden formar, también se puede disipar muy rápidamente. Estos estados ligados pueden ser observados como: luz en una guía de onda o electrones en algún dispositivo de estado sólido entre otros.

Goldstone y Jaffe consideraron una guía lo bastante larga como para que el estado ligado sea levemente perturbado por la longitud finita de la misma. La función de onda para el estado ligado decae exponencialmente con la longitud de las secciones rectas. El resultado es una exponencial de amplitud pequeña para el estado ligado del túnel hacia afuera de las secciones rectas. El estado ligado se convierte en una resonancia centrada cerca de la energía

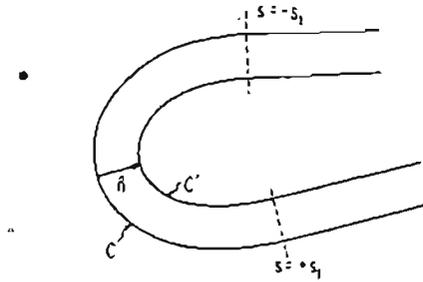


Figura 2.1: Canal en dos dimensiones construido a partir de una curva  $C$ , y su vector normal unitario  $\hat{n}$  (tomado del [5])

de la guía infinita con una pequeña pero notoria anchura. Tal resonancia puede ser excitada por la exposición de una guía infinita a una fuente externa (de radiación o partículas). La resonancia se ve como un incremento en la absorción de potencia a través de la guía, a cierta frecuencia abajo de la frecuencia de corte. En general, los estados ligados justamente abajo del continuo tienen mucha influencia en las amplitudes de la dispersión.

### 2.3. Alambres cuánticos cruzados.

La existencia de estados ligados en geometrías con dobleces ó intersecciones fue puesta de manifiesto por Schult [6] en 1989. En este trabajo, Schult consideró un sistema de alambres cruzados en ángulo recto como se muestra en la figura 2.2. Donde se puede ver que, clásicamente, un electrón no está atrapado, por lo que la presencia de un estado ligado en el sistema análogo cuántico no es un fenómeno obvio de explicar, ya que este sistema no tienen regiones "clásicamente prohibidas". Este descubrimiento hecho por Schult, Ravenhall y Wyld fue algo sorprendente.

Es importante notar que la forma detallada del potencial, el cual confina al electrón en el canal, no es importante en la determinación de la existencia de un estado ligado en la zona de intersección. El hamiltoniano asociado a una partícula clásica dentro de este sistema es  $H = p^2/2m$  ya que, el potencial considerado es cero dentro de los canales e infinito fuera de ellos.

Para el sistema análogo cuántico del arriba descrito, los autores calcularon numéricamente, a partir de la ecuación de Schrödinger, las funciones de onda

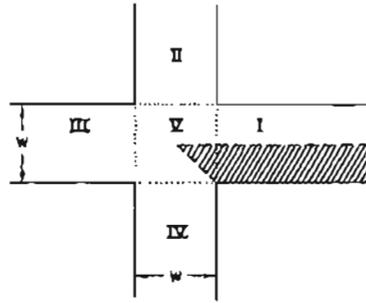


Figura 2.2: Potencial formado por dos alambres cruzados (tomado de [6])

en cada una de las las cinco regiones indicadas en la figura 2.2 con condición a la frontera de Dirichlet (función de onda igual cero en las orillas del canal), y sus correspondientes energías.

En las siguientes expresiones para las funciones de onda se propone que:

$$\begin{aligned}
 \psi_I &= \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \exp(-k_n x). && \text{en la región I} \\
 \psi_{II} &= \sum_n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{W}\right) \exp(-k_n y). && \text{en la región II} \\
 \psi_{III} &= \sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \exp(k_n x). && \text{en la región III} \\
 \psi_{IV} &= \sum_n d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{W}\right) \exp(k_n y). && \text{en la región IV} \\
 \psi_V &= \sum_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) (e_n \exp(-k_n x) + f_n \exp(k_n x)) \right. \\
 &\quad \left. + \sin\left(\frac{n\pi x}{W}\right) (g_n \exp(-k_n y) + h_n \exp(k_n y)) \right] && \text{para la región V.}
 \end{aligned}$$

Hay dos energías de estado ligado asociadas a un electrón ubicado en la intersección de los dos alambres que se muestran en la figura 2.2. Las energías correspondientes son  $E_1 = 0,66E_t$  y  $E_2 = 3,72E_t$ , donde el umbral de propagación de los electrones en el canal está dado por  $E_t = \hbar^2 \pi^2 / 2m^* W^2$  donde  $m^*$ , es la masa efectiva del electron y  $W$  es el ancho del canal.

Por otro lado, Schult y colaboradores calcularon las probabilidades de transmisión y reflexión en el caso de la propagación para un rango de energías ligeramente superiores al umbral de paridad impar. Algunas observaciones

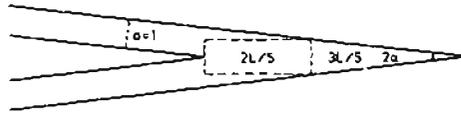


Figura 2.3: Caja rectangular (línea discontinua) insertada en una guía de onda doblada a un ángulo agudo  $2\alpha$ . La longitud del lado de la caja es arbitrariamente larga cuando  $\alpha \rightarrow 0^\circ$ . (tomado del [7])

importantes alrededor de los resultados de este trabajo en fenómenos relacionados con este problema son los siguientes: el caso de paridad impar es equivalente al caso de un alambre con la mitad de ancho, doblado en ángulo recto. Esto es un sistema en forma de “L” para el cual se encontró por lo tanto un estado ligado con número de onda  $kW = 0,96\pi$ .

Basados en los criterios antes mencionados, la geometría “T” es una candidata inmediata en la cual se espera la existencia de estados ligados. Esta geometría con tres brazos abiertos de igual ancho, tiene justamente un estado ligado, para  $kW = 0,90\pi$ .

Los métodos usados por Schult et al. sirven para investigar la existencia de estados ligados y la importancia de su presencia en sistemas con esquinas agudas. En estas observaciones se basa parte del trabajo que, en esta tesis, desarrollamos ya que utilizamos geometrías similares y variamos la curvatura de las mismas.

Por su parte Avishai et al. [7] también han estudiado, numéricamente, la existencia de los estados ligados en guías bidimensionales con condiciones a la frontera de Dirichlet en dominios abiertos. La geometría de particular interés que ellos estudian corresponde al llamado “broken strip” (Bs), esto corresponde a un tubo doblado abierto en sus extremos, el cual está hecho de dos canales de igual ancho intersectados a un ángulo arbitrario distinto de cero. Avishai y coautores han mostrado, con sus estudios, la existencia de al menos un estado ligado para un ángulo arbitrariamente pequeño y más de un estado ligado para “broken strip” (BS) ángulos agudos. Para ángulos pequeños, se encuentra que la energía de amarre tiene una relación cuártica con el ángulo de doblez.

Como ya hemos mencionado, la pregunta de la posible existencia de modos

atrapados por geometrías particulares es un clásico en la teoría de guías de onda. Recientemente este tema ha recobrado el interés de los investigadores particularmente en el contexto de dispositivos mesoscópicos, con aplicaciones a la tecnología de computo avanzado a bajas temperaturas. La longitud de coherencia de propagación del electrón en el diámetro de varios circuitos (alambres) bajo consideración, requiriendo un amplio tratamiento cuántico. Es decir, dado un alambre con ancho  $a$  y partículas (portadoras de carga) moviéndose dentro de él, con una masa efectiva  $m^*$ , la cuantización en la propagación transversal de dichas partícula define el umbral para el continuo de la energía  $E_l = \hbar^2/(2m^*a^2)$  de las mismas. Un eigenvalor del hamiltoniano para la propagación abajo de  $E_l$  corresponde a un estado atrapado cuya influencia en el funcionamiento de dispositivos mesoscópicos puede ser muy importante.

En su trabajo Avishai et al. estudian el caso de dos mitades de alambre que se acoplan (bidimensionalmente) en ángulo agudo, como el  $BS$  que se muestra en la figura 2.3 con un valor pequeño de  $2\alpha$  para el ángulo del extremo de la  $BS$ . Ellos consideran que si se inserta, dentro de la  $BS$ , una caja rectangular como se muestra en la figura, la distancia entre sus dos extremos es  $L = a/\sin(\alpha)$ , donde  $a$  es el diámetro del tubo. La dimensión longitudinal de la caja puede escogerse de tal manera que sea igual a  $2L/5$ . Entonces la dimensión transversal de la caja puede ser escogida para que el largo sea  $6a/(5\cos(\alpha))$ . La energía del estado fundamental en esta caja es por tanto (considerando  $\hbar^2/(2m^*) = 1$ ):

$$E_{box}^0 = \frac{\pi^2 \left[ \frac{25}{4} \sin(\alpha)^2 + \frac{25}{36} \cos(\alpha)^2 \right]}{a^2}, \quad (2.1)$$

la cual, para  $\alpha$  suficientemente pequeño, es más pequeño que el umbral  $(\pi/a)^2$  del continuo. Los estados excitados longitudinales en la caja también pueden ser obtenidos. Consideremos un estado con  $n$  nodos a lo largo de la dirección longitudinal de la caja de largo  $2L/5$ . La energía asociada a este estado es,

$$E_{box}^n = \frac{\pi^2 \left[ \frac{25}{4} n^2 \sin(\alpha)^2 + \frac{25}{36} \cos(\alpha)^2 \right]}{a^2}. \quad (2.2)$$

Nuevamente es posible elegir  $\alpha$  lo suficientemente pequeño para tener energías abajo del umbral. Esto prueba que, para  $\alpha$  lo suficientemente pequeña, se tiene la posibilidad de encontrar muchos estados ligados.

En el problema general de la existencia de al menos un estado ligado en un  $BS$  con un valor arbitrario para el ángulo de doblez, la idea básica es que

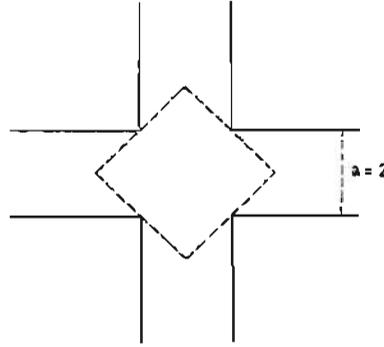


Figura 2.4: Caja cuadrada insertada en la intersección de dos guías de onda cruzadas. (tomado del [7])

el rompimiento de la invariancia traslacional de una guía simple puede ser representada por una fuerza adicional.

Avishai et al. encontraron que hay un estado ligado para todos los valores de  $\epsilon$  (donde  $\alpha = \pi/2 - \epsilon$ ) y el comportamiento de la energía de atrapamiento como función de  $\epsilon$  es muy suave. Para encontrar estados ligados en un sistema de tipo cruz, consideraron la geometría que se muestra en la figura 2.4. Note que en esta figura, la longitud de los lados de la caja cuadrada insertada en la cruz es de  $a\sqrt{2}$ . Aquí la energía del estado base de la caja está degenerada con el umbral del continuo. Cualquier pequeña protuberancia en la caja puede llevar a la energía del estado base abajo del umbral. Este es un argumento a favor de la existencia de un estado ligado para la cruz completa. Al aplicar un método variacional, se puede mostrar que el eigenestado de la cruz tiene una paridad negativa con respecto a  $x$  y  $y$  abajo del umbral del continuo, el cual está en  $\pi^2$  cuando  $a = 2$ . Un estado ligado con tal estructura nodal en una cruz con  $a = 2$  se reduce justamente a un estado ligado en una  $BS$  de forma  $L$  con parámetros  $a = 1$  y  $\alpha = \pi/4$ . Las estimaciones numéricas hechas por los autores en este artículo muestran, de manera sistemática, la existencia de estados ligados superiores para los correspondientes eigenvalores. En particular, para  $n_{max} = 30$  obtienen  $E = 0,94\pi^2$ . Este es un resultado significativo ya que también es reportado por Schult et al.[6] y por Exner et al.[2, 3].

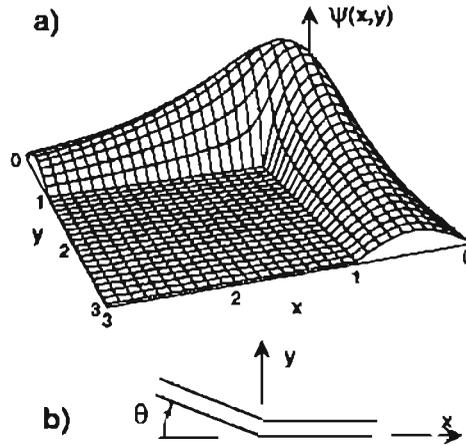


Figura 2.5: Esquema de una guía de onda doblada.

## 2.4. Guías de onda con un doblez.

El estudio de los estados localizados en guías de onda bidimensionales ha sido estudiado como función de diversos parámetros. Tal es el caso de los trabajos de Carini et al [8], quienes estudiaron alambres cuánticos (llamados también guías de onda cuánticas por Exner y Seba [2, 3], en forma de “L” de ancho constante, variando el ángulo de doblez. Ellos estudiaron la propagación de modos  $TE$  de microondas en guías de onda rectangulares planas; donde midieron frecuencias de resonancia, por absorción de potencia para varios ángulos de doblez. Estas frecuencias fueron comparadas con resultados teóricos de los eigenvalores para estados ligados (resonancias) en geometrías de forma de “L”.

La existencia de estados ligados en sistemas que no tienen regiones “clásicamente prohibidas” tiene diversas implicaciones en posibles aplicaciones en sistemas electrónicos de baja dimensionalidad con condiciones a la frontera similares. Quizá igual o más notable sea el resultado reciente de Goldstone y Jaffe [5] (anticipado por el trabajo de Exner[2, 3]) de que “al menos un estado ligado aparecerá para todas las superficies bidimensionales de ancho constante (excepto las líneas rectas, las cuales no poseen estados ligados). En realidad, los resultados de Goldstone y Jaffe son válidos para un tubo infinito de sección transversal constante, en cualquier número de dimensiones. Se sabe que una protuberancia en una guía de onda bidimensional puede ser mapeada a una

dimensión cuando la protuberancia transversal aparece como una atracción efectiva, la cual siempre produce un estado ligado en una dimensión. En la figura 2.5 se muestra un sistema rectangular de ancho constante, con condiciones a la fornera de Dirichlet, que ha sido muy estudiado. Es posible, sin pérdida de generalidad, normalizar el ancho de esta guía a la unidad. Para identificar el estado ligado en este sistema se debe notar que el Hamiltoniano es simétrico bajo la reflexión con respecto a la diagonal, por lo tanto basta considerar sólo la mitad del sistema. Para un dobléz en ángulo recto los autores predicen un estado ligado con  $k^2 = 0,929\pi^2$ . Una gráfica del estado ligado para la función de onda  $\psi$  es mostrado en la figura 2.5;  $\psi$  está concentrada alrededor del centro del dobléz, se desvanece en las fronteras, y decrece exponencialmente en los extremos de la guía de onda. Para reproducir dicho estado ligado experimentalmente, se usó la geometría para un dobléz con ángulo variable que se muestra en la figura 2.5. Mientras que pares de barras de aluminio (de 0,953 cm de grueso) se mantienen entre dos placas largas fabricadas de aluminio, las cuales, forman los lados de las dos secciones rectas de la guía de onda. Cuando son ensambladas las partes correspondientes, los brazos de la cavidad miden aproximadamente 15 cm de largo. El ancho  $a$  de las secciones rectas de la guía de onda se ajusta desplazando las placas paralelas de aluminio de ancho 1,905 cm (una respecto a la otra), mientras que el dobléz se construye para cada caso. El extremo de cada una de las barras interiores de ancho de 0,953 cm fueron preparadas para un ángulo de  $30^\circ$  para que, en contacto, estas produzcan la esquina interior aguda entre las secciones de la guía de onda.

La frecuencia de corte calculada por Carini y coautores, para las secciones de la guía de onda es  $f_{co} = c/2a$ , aproximadamente 7,87 GHz con una incertidumbre asociada de 0,01 GHz. Para determinar la frecuencia del estado ligado, se disminuye el acoplamiento del coaxial hasta que: a) el acoplamiento es mucho más bajo que el crítico (cuando toda la potencia incidente es absorbida) y b) el decremento adicional no afecta la frecuencia de resonancia o ancho de banda de la resonancia. La figura 2.6 muestra la tasa de potencia reflejada  $R(f)$  para el dobléz de  $90^\circ$ .

El estado ligado aparece como un prominente mínimo en  $R(f)$  a 7,585 GHz, mostrado por la flecha izquierda en la figura. La resonancia ocurre abajo de la frecuencia de corte calculada, indicada por la flecha derecha. La longitud de decaimiento del modo es de 2,3 cm, mientras que la longitud de las secciones rectas de la guía de onda es más que seis veces esta cantidad.

Por su parte, los estados ligados pueden ser calculados numéricamente

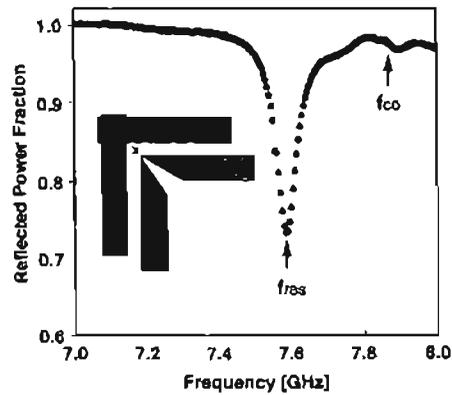


Figura 2.6: Datos experimentales de la tasa de potencia reflejada a potencia incidente como una función de la frecuencia incidente. (tomado del [8])

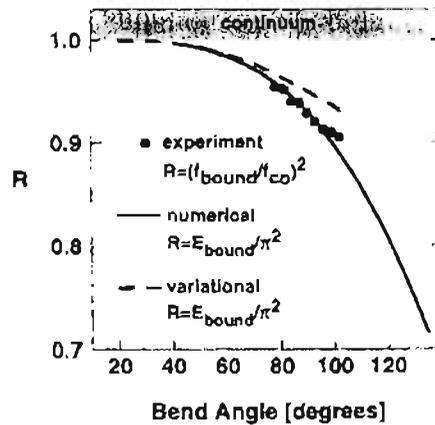


Figura 2.7: Eigenvalores de un estado ligado como función del ángulo de doblez. Los puntos negros representan las medidas experimentales, la curva continua representa los valores numéricos, para los eigenvalores de la energía y la curva discontinua representa la estimación variacional para los eigenvalores de la energía. (tomado de [8])

usando un método variacional a partir de la ecuación,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\psi(x, y, t), \quad (2.3)$$

y la solución general a la ecuación (2.3) en términos de los eigenestados  $\phi_k(x, y)$  del Hamiltoniano es,

$$\psi(x, y, t) = \sum_k a_k \phi_k(x, y) e^{-E_k t}, \quad (2.4)$$

donde  $E_k$  es la eigenenergía del  $k$ -ésimo estado y cada componente decae a cero exponencialmente. Si periódicamente se normaliza la función de onda, entonces para tiempos largos el estado con energía más bajo dominará, alcanzando así primero el estado base y posteriormente estados de energía más alta.

En la figura 2.7, la curva discontinua muestra los eigenvalores variacionales obtenidos por Carini et al. como una función del ángulo de doblez  $\theta$ . Los círculos sólidos en negro corresponden a los valores experimentales obtenidos para las guías de onda dobladas mientras que la curva sólida corresponde a los eigenvalores numéricos obtenidos por un método de relajación. Estos resultados muestran claramente la existencia de estados ligados en estos sistemas y la correspondiente variación de la energía de dichos estados con el ángulo de doblez. Para guías de onda reales, la presencia de una resonancia abajo de la frecuencia de corte afecta la propagación de ondas alrededor de la frecuencia de corte. Para alambres cuánticos, la presencia de un electrón ligado en el doblez puede seriamente afectar las propiedades de conductancia de tales sistemas.

Posteriormente, en su trabajo de 1993 [9] Carini et al. presentaron resultados experimentales y teóricos de estados ligados en guías de onda rectangulares dobladas. Tales estados fueron observados en guías de onda electromagnéticas y alambres cuánticos. Para cierta clase de guías de onda dobladas se pueden producir modos  $TE$  confinados. Estos modos  $TE$  están directamente relacionados con los estados ligados de campos escalares en los espacios bidimensionales curvados donde las guías de onda son construídas. Para dobleces lo suficientemente agudos, se pueden producir multiples modos  $TE$  ligados. Los autores calculan las energías de estados ligados y las configuraciones del campo para esta particular clase de guías de onda dobladas con ángulo muy agudo. Dichas guías de onda fueron construídas experimentalmente y las energías de estado ligado y los campos son directamente medidos

y comparados con las predicciones teóricas. Las propiedades de los campos electromagnéticos en guías de onda han sido estudiadas por décadas, muchas características de la naturaleza y transmisión de los campos electromagnéticos en tales guías también han sido estudiadas. Como ya hemos mencionado, es bien conocido que los dobleces en las guías de onda producen reflexión, y que la resonancia de reflexión se eleva cuando los dobleces son introducidos dentro de las guías de onda. Estudios recientes indican que la introducción de dobleces dentro de las guías de onda, generalmente conllevan estados confinados o modos aislados, los cuales existen abajo de la frecuencia de corte para la guía de onda. En tales estados confinados los campos  $E$  y  $B$  son grandes en la región del doblez y decaen exponencialmente con la extensión de la guía de onda. Tales estados confinados son interesantes no solo por las aplicaciones intrínsecas en guías de onda electromagnéticas sino, además, por las analogías con alambres cuánticos. Es posible hacer una correspondencia entre las soluciones de las ecuaciones tridimensionales de Maxwell de una guía de onda y la ecuación bidimensional de Schrödinger en un canal o alambre cuántico.

En este trabajo, Carini et al. examina guías de onda dobladas, en las cuales se presentan varios estados ligados. Donde la energía de amarre tanto del estado base como del resto de los estados ligados superiores, dependen, principalmente del tamaño del ángulo de doblez. Carini et al. explican que, la energía de ligadura en tales sistemas se va a cero conforme el ángulo de doblez se va a cero. Asimismo, la energía de ligadura se incrementa cuando se incrementa el ángulo de doblez. Para dobleces lo suficientemente agudos, es posible producir estados ligados múltiples. La geometría particular que emplean se muestra en la figura 2.8. Los autores muestran que, conforme el ángulo exterior de doblez  $\theta_e \rightarrow \pi$ , el número de estados ligados se incrementa dramáticamente. Ambas cosas ocurren por el doblez y por el espacio adicional en las esquinas de la guía de onda (una protuberancia existe en esta región). La energía del estado más bajo confinado para una guía de onda doblada decrece monótonamente como función de  $\theta$ . Para valores lo suficientemente pequeños de  $\theta$ , un segundo estado ligado aparece y más estados ligados pueden ser encontrados para  $\theta$  muy pequeña.

En el interior del doblez, se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura 2.8 y si se consideran los eigenvalores de la energía para un campo escalar, el cual satisface la ecuación de Helmholtz dentro y se desvanece en los lados del rectángulo de longitud  $L$  y ancho  $W$ . La energía de tales estados es  $E_{nm} = \pi^2 \left[ \frac{n^2}{W^2} + \frac{m^2}{L^2} \right]$  para valores  $(n,m)$  enteros distintos de cero. Para un

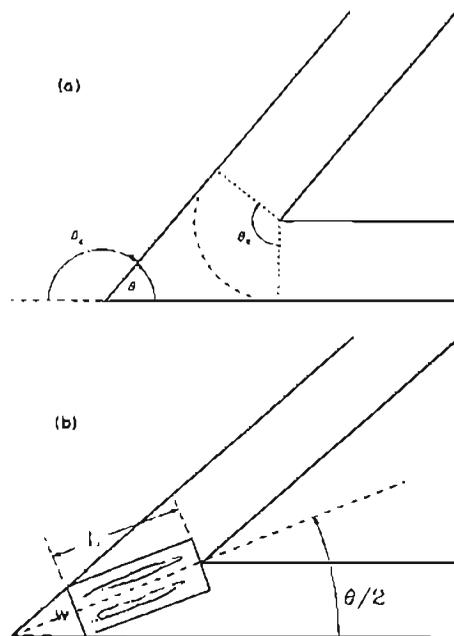


Figura 2.8: a)Superficie bidimensional agudamente doblada; b)Superficie doblada de la parte (a), con un rectángulo inscrito de longitud  $L$  y ancho  $W$ . (tomado de [9])

sistema doblado con un ángulo interior  $\theta$ , la longitud del rectángulo inscrito está relacionada con el ancho por  $L = \csc(\frac{\theta}{2})[\frac{1-W \cos(\frac{\theta}{2})}{2}]$ . Para un ángulo  $\theta$ , pueden calcularse las dimensiones del rectángulo inscrito con la energía del estado base más bajo. Usando estas dimensiones se encuentra que, como  $\theta \rightarrow 0$ , las eigenenergías de los estados de la caja se aproximan al límite de la forma,

$$E_{nm} \rightarrow \frac{\pi^2}{4}[n^2 + (2n^2 + m^2)\theta^{\frac{2}{3}} + \dots]. \quad (2.5)$$

Para cada solución de la Ec.(2.5) con una energía abajo de la energía de corte para la propagación, se tiene un estado ligado en la guía de onda. Las energías de tales estados han sido calculadas, y se encontró que todas las energías de los estados ligados se aproximan a  $\pi^2/4$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ . El correspondiente número de estados ligados se incrementa rápidamente para  $\theta$  muy pequeña. Este comportamiento resulta del hecho de que cuando  $\theta \rightarrow 0$  estas guías de onda tienen una cantidad infinita de espacio adicional, relativo a un sistema doblado de ancho constante.

Para observar experimentalmente el estado ligado más bajo en una guía de onda electromagnética doblada, a diferentes ángulos, los autores construyeron el dispositivo mostrado en la figura 2.8 con ángulo de doblez variable. Con este sistema miden la frecuencia de los estados ligados para microondas como una función del ángulo de doblez  $\theta$  entre  $60^\circ$  y  $120^\circ$ . Esta cavidad esta formada de placas paralelas de latón. Las placas son rodeadas aparte por pares de barras fabricadas de aluminio. Las barras definen los lados de las secciones rectas de la guía de onda, y sus grosores ( $b=0.953$  cm) y longitud (20 cm) determinan la altura y longitud de las guías de onda, respectivamente. Durante la construcción de la estructura, las barras paralelas de aluminio (1.905 cm de ancho y 0.94 cm de grueso) facilitan el cuidado de los lados interior y exterior de la guías de onda. Las placas paralelas de latón, dan una guía de onda con un ancho,  $a = 1,905$  cm, el cual implica una frecuencia de corte para el modo  $TE_{01}$  de  $f_{co} = c/2a = 7,87$  GHz. La frecuencia de corte real puede ser determinada experimentalmente usando un procedimiento similar para construir una cavidad rectangular con el mismo ancho y una longitud  $l \gg a$ , y entonces es posible medir la frecuencia  $f_n$  de los primeros  $TE_{01n}$  modos. Un ajuste lineal de los datos lleva a que  $f_n^2 = f_{co}^2 + n^2(\frac{c}{2l})^2$ , dando  $f_{co} = (7,780 \pm 0,015)$  GHz. Un estado ligado aparece cuando decrece agudamente la potencia reflejada, esto es, como absorción resonante de potencia, para frecuencias de microondas abajo de la frecuencia de corte.

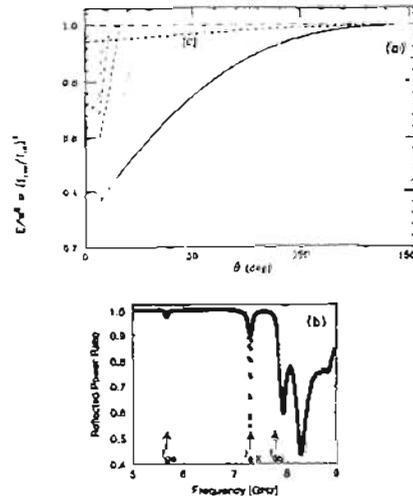


Figura 2.9: a) Eigenenergías para un estado ligado de una guía agudamente doblada como función del ángulo interior de dobléz ( $\theta$ ); b) Medida experimental de la tasa de potencia reflejada a potencia incidente como función de la frecuencia incidente. (tomada de [9])

En la figura 2.9, se muestran los eigenvalores del estado ligado (dividido por  $\pi^2$ ) como una función del ángulo de doblez interior  $\theta$  de la guía de onda. Se puede notar que todas las energías de los estados ligados tienden hacia  $\pi^2/4$  en el límite cuando  $\theta \rightarrow 0^\circ$  como se dijo previamente. El caso del número de estados ligados que se incrementa rápidamente cuando decrece el ángulo  $\theta$ , es ilustrado por Carini et al. con ejemplos particulares. Para un ángulo de doblez  $\theta > 27,5^\circ$  tiene un estado ligado aislado; abajo de este ángulo se tienen dos estados ligados. Un tercer estado ligado aparece para  $\theta = 18^\circ$ , un cuarto estado aparece alrededor de  $11^\circ$  y un quinto cerca de  $9^\circ$ . En la figura 2.9 se muestra la tasa de potencia reflejada  $R(f)$  medida experimentalmente para un doblez con  $\theta = 22,5^\circ$ . El estado base aparece como un mínimo prominente en  $R(f)$  cercano para la frecuencia de resonancia para un acoplamiento pequeño,  $f_{gs} = 5,666$  GHz. Ambas resonancias ocurren abajo de la medida de la frecuencia de corte para la guía de onda,  $f_{\infty} = 7,78$  GHz (equivalente a una energía cuántica de  $\pi^2$ ), indicado por la flecha a la derecha.

## 2.5. Guías de onda con más de un doblez.

En su trabajo de 1997 Carini y colaboradores [10] construyeron cavidades electromagnéticas (EM) dobladas, para las cuales se encontraron las frecuencias a las cuales ocurre el confinamiento del campo  $EM$ . La densidad de energía electromagnética asociada a dichas frecuencias fue mapeada experimentalmente y comparada con predicciones teóricas de las eigenfunciones y energías de los correspondientes estados ligados en geometrías similares. El acuerdo entre teoría y experimento fue muy bueno y el estudio de la existencia de los estados ligados a nivel cualitativo resulta muy ilustrativo. El trabajado de Carini et al. en este trabajo más reciente, constituye un paso más en el estudio de las guías de onda con dobleces ya que la mayoría de los trabajos previos consideraban el caso de un alambre cuántico conteniendo un sólo doblez mientras que en el trabajo mencionado los autores examinaron un sistema con dos dobleces en ángulo recto como se muestra en la figura 2.10 a la cual denominamos como "Z". El ancho de la sección recta es  $W$  y la altura del doblez es  $H$ . Se consideró el caso más simple, en que las regiones rectas de la guía son infinitamente largas. La función de onda asociada a un electrón satisface, dentro de dicha región, la ecuación de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x, y) = 0, \quad \psi|_S = 0. \quad (2.6)$$

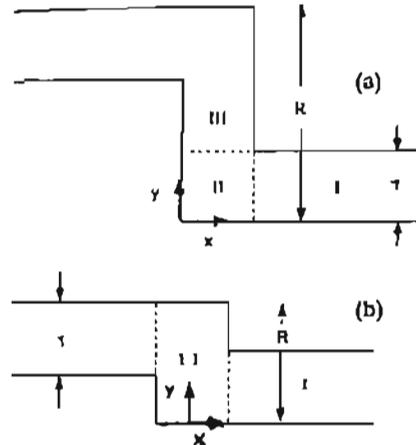


Figura 2.10: a) La tasa de aspecto  $R > 2$  es el caso de discontinuidad cuántica en el doblez. b) La tasa de aspecto  $1 < R < 2$  es el caso de continuidad cuántica en el doblez. (tomada de [10])

Donde  $S$  es la frontera de la región. En esta ecuación el número de onda  $k$  se relaciona con la energía  $E$  de modo que  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . La ecuación (2.6) puede ser solucionada por regiones según se muestra en la figura 2.10. En cada región se requiere que la función se anule en la frontera y la posible separación de la ecuación, para que la función de onda tenga una dependencia en el eje  $y$  de la forma  $\sin(\frac{n\pi y}{W})$  para  $n$  entero. Esta condición de cuantización transversal produce una energía umbral, es decir, la energía mínima permitida para la libre propagación de esta función a lo largo de la guía,

$$E_l = \frac{(\hbar\pi)^2}{2mW^2}. \quad (2.7)$$

El alambre de la figura 2.10 tiene uno o dos estados ligados, los cuales aparecen como estados aislados con energía abajo de  $E_l$ . La función de onda del estado ligado es grande en la vecindad del doblez, y decae exponencialmente con la distancia a la región de los dobleces.

Como ya se ha mencionado los alambres cuánticos doblados, son ejemplo de sistemas cuyos estados ligados no se explican con el tradicional argumento a partir de un potencial ligado, el cual crea regiones clásicamente permitidas y prohibidas. En su lugar, se observa que la presencia de dobleces o protuberancias localizadas en estos alambres producen fuerzas atractivas locales

efectivas las cuales dan origen a estados ligados. Como la atracción efectiva en un alambre doblado es proporcional al cuadrado de la curvatura del alambre, la magnitud de la energía de amarre se incrementa cuando la curvatura aumenta.

Diversas guías de onda bidimensionales rectangulares pueden ser construídas a partir de algunas curvas bidimensionales  $\sigma$  en el plano  $X - Y$ . Un campo escalar  $\psi$  que satisface la ecuación de Helmholtz y que satisface la condición a la frontera, puede ser asociado a la curva construída. Las guías de onda se generan trasladando la curva  $\sigma$  normalmente en la dirección  $Z$ . Para identificar la guía de onda construída con una guía de onda electromagnética, los campos  $E$  y  $B$  pueden ser construídos a partir de  $\psi$  como sigue:

$$E(x, y) = ik\hat{z}\psi(x, y), B(x, y) = -\hat{z} \times \nabla\psi. \quad (2.8)$$

Los campos  $E$  y  $B$  de la ecuación (2.8) satisfacen las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera para los modos  $TE$  en la guía de onda, donde el número de onda  $k$  del electrón está relacionado con la frecuencia  $f = \omega/2\pi$  de la siguiente manera:

$$k \rightarrow \frac{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}f}{c}. \quad (2.9)$$

El análisis teórico para encontrar las funciones de onda asociadas a un electrón en un alambre cuántico puede ser obtenido usando diversas técnicas tales como expansión en series; método de relajación; método de transferencia matricial o el método cuántico de transmisión de frontera. El método más común es el de expansión en series que a continuación se ilustra con el fin de calcular los estados ligados en la función de onda correspondiente a la geometría de la "Z". Para comenzar, se divide la guía en tres secciones como se muestra en la figura 2.10. La región  $I$  está definida por  $[x \geq 1, 0 \leq y \leq 1]$ ; donde la función de onda  $\psi_I$  en coordenadas cartesianas satisface las condiciones a la frontera dadas por,

$$\psi_I(x, y)|_{y=0} = \psi_I(x, y)|_{y=1} = 0; \quad \psi(x, y) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Usando separación de variables en coordenadas cartesianas, la función  $\psi$  puede ser expresada como:

$$\psi_I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y)e^{-\alpha_n x}, \quad (2.11)$$

donde  $\alpha_n = \sqrt{n^2\pi^2 - k^2}$ . La región *II* está definida por  $[0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$ . En esta región *II* las condiciones de frontera son,

$$\psi_{II}(x, y)|_{y=0} = \psi_{II}(x, y)|_{x=0} = \psi_{II}(x, y)|_{x=y=1} = 0. \quad (2.12)$$

Mientras que la función de onda en esta zona queda,

$$\psi_{II}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \sin(n\pi y) \sinh(\alpha_n x) + C_n \sin(n\pi x) \sinh(\alpha_n y)]. \quad (2.13)$$

Finalmente, en la región *III*, definida por  $[0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq R - 1]$ , las condiciones a la frontera son:

$$\psi_{III}(x, y)|_{x=0} = \psi_{III}(x, y)|_{x=1} = 0, \quad (2.14)$$

$$\psi_{III}^S(1 - x, R - y) = \psi_{III}^S(x, y), \quad (2.15)$$

$$\psi_{III}^A(1 - x, R - y) = -\psi_{III}^A(x, y), \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

donde los superíndice *S* y *A* indican la existencia de un estado ligado simétrico y uno antisimétrico respecto a la recta  $y = R/2$ . La correspondiente función de onda asociada a esta tercera región es,

$$\psi_{III}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x) F_n[\alpha_n(y - R/2)] \quad (2.18)$$

donde,

$$F_n^S(t) = \cosh(t) \quad (n - \text{impar}) = \sinh(t) \quad (n - \text{par}), \quad (2.19)$$

$$F_n^A(t) = \sinh(t) \quad (n - \text{impar}) = \cosh(t) \quad (n - \text{par}). \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

Los coeficientes son determinados a partir de la condición de que tanto la función de onda  $\psi$  como su derivada normal sean continuas en las fronteras que separan las regiones *I*, *II* y *III*. Las ecuaciones resultantes pueden ser expresadas como una matriz de  $N \times N$ ; esta muestra que la condición para un estado ligado es  $\det(Z) = 0$ , donde  $Z = TS - 1$ , y

$$T_{nk} = \frac{k\pi(-1)^k d_{nk}}{\alpha_n \sinh(\alpha_n) F_{n+1}(\alpha_n[1 - \frac{R}{2}]) / F_n(\alpha_n[1 - R/2]) - \cosh(\alpha_n)} \quad (2.22)$$

$$S_{nk} = \frac{(-1)^{k+1} k\pi \exp(-\alpha_n) d_{nk}}{\alpha_n}, \quad (2.23)$$

$$d_{nk} = \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi \sinh(\alpha_k)}{\alpha_k^2 + (n\pi)^2}. \quad (2.24)$$

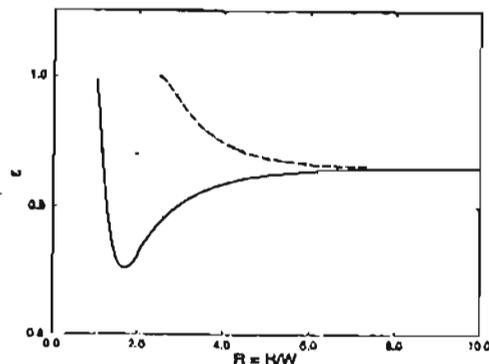


Figura 2.11: Gráfica de  $\epsilon$  vs  $R$  de estados ligados en el alambre con dos dobleces; curva continua, estados ligados simétricos, curva discontinua estados ligados antisimétricos. (tomado de [10])

Los estados ligados ocurren para los valores de  $k^2$  para los cuales  $\det[Z(k^2)] = 0$ . En la figura 2.11, se muestra la energía de los estados ligados simétrico y antisimétrico como una función de la tasa de aspecto  $R = H/W$ . El continuo principia para  $k^2 = \pi^2$ . En términos del parámetro  $\epsilon = k^2/\pi^2$  se tiene que, cuando  $R \rightarrow 1$ ,  $\epsilon \rightarrow 1$ , para  $R \leq 2,5$ , solo el estado simétrico es ligado mientras que el estado antisimétrico no es ligado para valores pequeños de  $R$ .

Cuando  $R$  se incrementa después de 1, la energía se incrementa alcanzando un máximo para  $R \approx 1,7$ . Cuando  $R$  se incrementa más, la energía de amarre decrece. Para  $R \geq 2,5$ , aparacen tanto el estado simétrico como el estado antisimétrico. Tanto el estado ligado simétrico como el antisimétrico tienen en su función de onda un pico en cada esquina del alambre cuántico.

Para valores muy grandes de  $R$  se observa que los estados ligados simétrico y antisimétrico se aproximan a alguna energía,  $\epsilon = 0,930$ . Este valor de  $\epsilon$  corresponde a la energía para un alambre infinitamente largo de ancho unitario con un simple doblez en ángulo recto. En este caso, la función de onda para el estado ligado es muy pequeña excepto para un pico en cada doblez en ángulo recto. El número de estados ligados, y sus localizaciones, están completamente determinados por la geometría del alambre cuántico doblado. A condición de que la longitud del alambre cuántico con dos dobleces sea mucho más largo que sus otras dimensiones. Las propiedades de los estados

ligados están completamente determinadas por el ancho  $W$  del alambre y por la tasa de aspecto  $R = H/W$ . Para  $R < 2,5$ , se tiene solo un estado ligado simple mientras que para  $R > 7$ , las energías de los dos estados ligados se colapsan (se degeneran), esto es, el estado simétrico y el estado antisimétrico aparecen esencialmente a la misma energía.

Por su parte Wang, Berggren, and Ji [11, 12] estudiaron también la conductancia en alambres cuánticos con dos dobleces. Examinaron tunelaje de electrones en estos alambres cuánticos. Muchos de los resultados obtenidos por Carini et al. coinciden con las conclusiones de Wang y colaboradores. Tal es el caso en que para valores suficientemente grandes de la tasa de aspecto  $R$  las funciones de onda, tanto para el estado ligado simétrico como para el estado ligado antisimétrico, tienen un pico en las esquinas del alambre. También coinciden en que cuando se incrementa  $R$ , la distancia entre la energía para los estados simétrico y antisimétrico decrece. Sin embargo, no hay un acuerdo con Wang y colaboradores en la afirmación, que estos últimos establecen, acerca de que todas las geometrías con discontinuidad de doble esquina rectangular con tasa de aspecto  $R > 2$ , pueden tener tanto estado ligado simétrico como antisimétrico. Como puede verse en la figura 2.11, no aparece estado ligado antisimétrico para  $R < 2,5$ ; para estas geometrías, el estado antisimétrico está en el continuo.

Para comparar los resultados del modelo teórico desarrollado anteriormente, Carini y colaboradores contruyeron una cavidad de microondas con geometría tipo "Z" para observar los campos eléctricos confinados en una guía de onda electromagnética con dos dobleces en ángulo recto. La estructura fue hecha de dos piezas de aluminio. En la figura 2.12 (parte superior) se muestra una de las piezas; la otra es una imagen al espejo. El área sombreada está desplazada 0,635 cm hacia arriba respecto de la parte clara. Cuando la segunda pieza es invertida, el espacio vacío entre los platos forma una guía de onda de doble doblez. El ancho de la guía de onda es  $W = 1,905$  cm y su profundidad es de  $D = 0,635$  cm. El movimiento relativo de los dos platos en la dirección, que indica la doble flecha, produce una variación continua de  $H$  manteniendo fijo  $W$ . Con este sistema pudieron variar continuamente la tasa de aspecto  $R = H/W$  sobre un rango de  $1 < R < 6$ , midieron las frecuencias para los estados ligados, y mapearon la densidad de energía electromagnética para los mismos.

En tal estructura, las ondas se propagan con frecuencias abajo de  $c/2D$ , que en este caso corresponde a 23,6 GHz, teniendo solo la componente perpendicular del campo eléctrico distinta de cero, a lo largo de los platos, esto

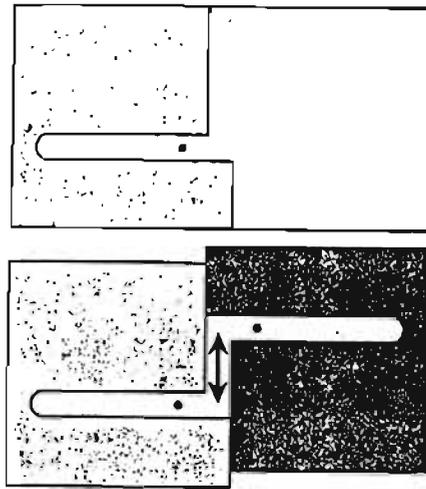


Figura 2.12: Vista esquemática de la estructura de la guía de onda usada en el experimento. (tomado de [10])

para satisfacer las condiciones de frontera en la periferia de las superficies conductoras. Las frecuencias de resonancia se midieron tomando cuenta los pequeños agujeros (los puntos en negro que se muestran en la figura 2.12, que se encuentran ubicados justo fuera de los dobleces), que proporcionan un espacio libre para líneas coaxiales semirígidas de 0,141 pgs. La frecuencia de corte para el modo propagante más bajo  $TE_{01}$  en esta guía de onda, es  $f_{co} = c/2W = 7,87$  GHz. La frecuencia de corte real en el experimento se obtiene ajustando dicha estructura para que  $R = 1$ .

Un tratamiento apropiado de datos muestra que  $[f(p)]^2 = f_{co}^2 + p^2(\frac{c}{2L_{eff}})^2$  dando ( $f_{co} = 7,850 \pm 0,003$ ) GHz y  $L_{eff} = 27,05$  cm (los extremos de la cavidad están rodeados con un  $radio = 0,953$  cm, el cual hace que  $L_{eff}$  sea un poco más pequeña que la longitud física). En la fig.2.13 se muestran las frecuencias de los estados ligados como función de la razón de aspecto  $R = H/W$  en la estructura de la guía de onda tipo "Z" de la figura 2.12. Los símbolos representan los resultados experimentales para los estados simétrico y antisimétrico respectivamente. Las líneas representan las frecuencias de resonancia determinadas teóricamente a partir de la razón de la energía del estado ligado y el umbral de energía para la propagación libre:  $f_l = f_t \sqrt{E_l/E_t}$ .

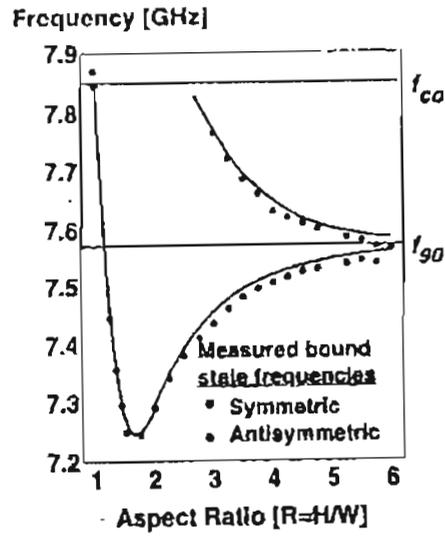


Figura 2.13: Frecuencias de estados ligados, simétricos y antisimétricos como una función de la tasa de aspecto  $R = H/W$ , en la estructura de la guía de onda con doble doblez. (tomado de [10])

La frecuencia  $f_{co}$  de corte para el primer modo propagante  $TE_{01}$ , fue determinada y es de 7,85 GHz y es representada por la línea horizontal en la figura 2.13 El valor teórico para la frecuencia de un estado ligado aislado, con un doblez de  $90^\circ$  con el mismo ancho fue ( $f_{90} \approx 0,966f_{co}$ ) este es indicado por la línea horizontal discontinua.

## 2.6. Guías de onda en cristales fotónicos.

En este trabajo, Mekis et al. [13], investigan el mecanismo para la aparición de estados ligados en guías de onda en cristales fotónicos bidimensionales y lo comparan con los mecanismos correspondientes para guías convencionales. Ellos muestran que la periodicidad del cristal fotónico está relacionada con la creación de estados ligados. Goldstone y Jaffe [5] probaron que los dobleces, se comportan de manera semejante a las protuberancias en una guía. En los trabajos de Carini y colaboradores [8, 9, 10], se calculan las energías de estados ligados simples y multiples en guías de onda cuánticas dobladas, estos resultados se comparan con experimentos en microondas. Tales estudios han tenido una nueva motivación generada por un interés en la miniaturización de dispositivos semiconductores. Donde las propiedades de transporte a través de alambres cuánticos son influenciadas por la existencia de estados localizados. Habiendo un buen estudio de estados ligados en guías de onda con dobleces es relevante para la construcción de circuitos integrados a pequeña escala. También existe el interés corriente en el diseño de circuitos integrados optoelectrónicos o totalmente ópticos. Un conjunto de componentes esenciales en estos circuitos son ondas electromagnéticas. Tradicionalmente, dos tipos principales de guías de onda son usadas en el control de propagación lineal de ondas electromagnéticas ( $EM$ ): guías metálicas para microondas y guías dieléctricas para ( $EM$ ) en la región visible. En estructuras bidimensionales ( $2D$ ) que implican simetría plana, lo cual implica que los modos en las guías de onda pueden tener polarización ( $TM$ ) o polarización ( $TE$ ). Es posible reformular el problema para guías de onda metálicas en términos de un campo escalar simple. En la frontera la amplitud del campo es cero para modos ( $TM$ ) y el campo derivado vale para modos ( $TE$ ). Notaremos que en el caso de guías de onda dieléctricas con un contraste dieléctrico alto, los campos son similares a los de una guía metálica. Sin embargo, los estados pueden acoplarse a modos en el espacio libre, estos decaerán en resonancias y no en estados ligados. Como una alternativa a estas componentes conven-

cionales (metálicas o dieléctricas) son usados materiales “photonic band gap (*PBG*)” en la construcción de bloques de dispositivos que comprenden circuitos totalmente ópticos. Se ha demostrado que tales guías pueden transmitir ondas *EM* eficientemente a través de formas con esquinas. La pregunta de cuando existen estados ligados en guías de onda *PBG* dobladas, aparecen naturalmente. En este trabajo los autores estudian las condiciones y el mecanismo para la aparición de estados ligados en tales guías. Por simplicidad, solo se consideran cristales fotónicos bidimensionales. Sin embargo, el análisis presentado se aplica además a cristales tridimensionales. Los resultados de este estudio muestran que las guías de onda *PBG*, a diferencia de las convencionales, poseen brechas entre sus modos. Estas brechas hacen posible que los estados ligados existan en dobleces cerca de la frecuencia de corte para modos guiados. Además muestran que la aparición de estados ligados en dobleces puede ser descrita en un armazón puramente unidimensional y que estos estados son casi iguales a los modos de la cavidad bidimensional. Las relaciones de dispersión para las guías de onda *PBG* son calculadas resolviendo la ecuación de Maxwell en el dominio de frecuencias dado para las configuraciones dieléctricas. Una supercelda con condiciones de frontera periódicas es tomada como el dominio computacional. La longitud de la celda corresponde a la periodicidad del dieléctrico en la dirección de la guía, mientras que el ancho fue tomado por distintos enrejados constantes. El cristal fotónico simulado, en este sentido, contiene guías de onda paralelas uniformemente espaciadas. La distancia entre las guías es incrementada tomando celdas unitarias hasta que las frecuencias obtenidas para los eigenmodos cortos dependan del tamaño de la celda. El dominio computacional usado es rectangular y es ligado por una capa de material perfectamente adherida para minimizar reflexiones atrazadas. Modos con un rango ancho de frecuencias son excitados por una fuente dipolar con un perfil Gaussiano. Los modos que permanecen transitorios unos decaen en estados ligados y otros en resonancias. Las resonancias pueden ser fácilmente distinguidas de los estados ligados ya que estos últimos, tienen un factor característico esencialmente infinito cuando una supercelda bastante larga es usada. Además, en las configuraciones de guías de onda, las resonancias ocurren a frecuencias a las que la velocidad de grupo en la guía de onda es cero. Las frecuencias de todos los estados ligados pueden ser identificados usando un pulso pequeño en el tiempo. En la brecha de modos fotónicos se obtienen soluciones con valores del número de onda  $k$  complejo, éstas no son soluciones físicas a las ecuaciones de Maxwell. Pasarán a ser físicos si la periodicidad del cristal se rompe al introducir un defecto.

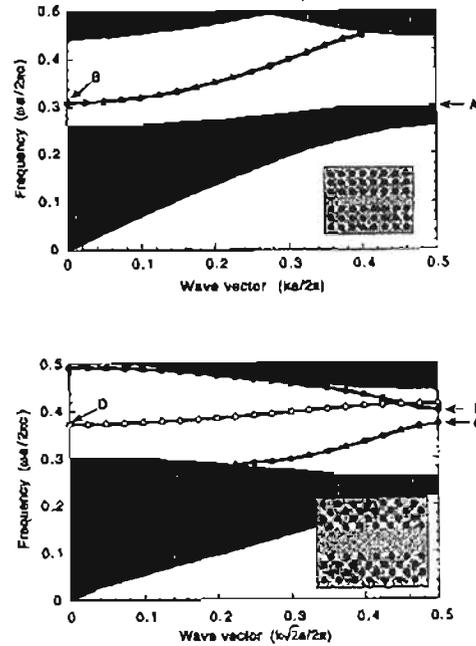


Figura 2.14: Relaciones de dispersión para guías de onda de dos cristales fotónicos. La geometría de las guías de onda es mostrada en los recuadros. (tomado de [13])

Si se considera un arreglo cuadrado de varillas altamente dieléctricas, paralelas e infinitamente largas en aire. Al remover una hilera de varillas se rompe la periodicidad en una dirección particular. Si los parámetros del cristal son tales que hay una brecha de bandas completa para los vectores de onda perpendiculares a las varillas, entonces este defecto puede introducir modos que decaen exponencialmente lejos del defecto. Es decir un defecto actúa de manera semejante a una guía de onda: Las ondas de frecuencias reales pueden propagarse en la guía.

En la figura 2.14 se muestra la estructura de banda para la guía creada por desaparición de una hilera de varillas en la dirección 10 del cristal. Encontramos un modo guiado dentro de la brecha de bandas. El campo eléctrico de este modo tiene simetría par con respecto al plano del espejo a lo largo del eje de la guía. Este modo produce una reproducción del modo fundamental de

una guía de onda dieléctrica convencional; este tiene perfil sinusoidal dentro de la guía y decae exponencialmente fuera de ella. En la figura 2.14 la guía de onda se ha creado por eliminación de tres hileras de varillas en la dirección 11 del cristal. En esta figura se denotan con puntos negros los modos pares y con puntos blancos los modos impares. Hay ahora tres modos guiados, dentro de la brecha que pueden otra vez ser clasificados de acuerdo con la simetría respecto del plano de espejo a lo largo del eje de la guía. El primer y el tercer modo son pares, mientras que el segundo es impar. Generalmente es cierto que el número de bandas dentro de la brecha de bandas es igual al número de hileras de varillas removidas cuando se crea la guía. Esto puede ser entendido de un simple conteo de los estados en el cristal. Si se repitiera esto para todas las hileras de varillas, tendríamos  $N$  estados localizados en un cristal de  $N \times N$ . Sin embargo, para algunos  $k$ 's los modos pueden tener frecuencias fuera de la brecha de bandas y la banda entera puede no ser contenida en la brecha, como es el caso, por ejemplo, de la banda de modos más baja en la figura 2.14. Para  $k$  pequeño, las relaciones de dispersión se comportan parecidos a los modos guiados convencionalmente en una guía de onda metálica con corte en  $\omega - \omega_{corte} \propto |k|^2$ . Las frecuencias de los modos no crecen indefinidamente cuando se incrementa  $|k|$ , como en el caso de guías de onda dieléctricas y metálicas.

Los estados ligados pueden ser creados incrementando el ancho de la guía, por ejemplo, removiendo otra hilera de varillas en una sección de la guía.

## 2.7. Estados ligados múltiples en guías de onda en forma de tijera.

Bulgakov et al. [?] al igual que varios autores, estudiaron estados ligados haciendo uso de la ecuación bidimensional de Helmholtz con condiciones a la frontera de Dirichlet en una geometría abierta dada por dos guías rectas del mismo ancho, las cuales se cruzan a un ángulo  $\theta$ . Semejante a una unión de cuatro terminales con un  $\theta$  sintonizado, el cual puede realizarse experimentalmente si en una estructura en ángulo recto es llenado por una ferrita. Es conocido que para  $\theta = 90^\circ$ , hay un estado ligado propio y un eigenvalor inmerso en el continuo. En este trabajo, los autores muestran que el número de eigenvalores llega a ser grande cuando la asimetría se incrementa y las energías de los estados ligados se incrementan como función de  $\theta$ , en el

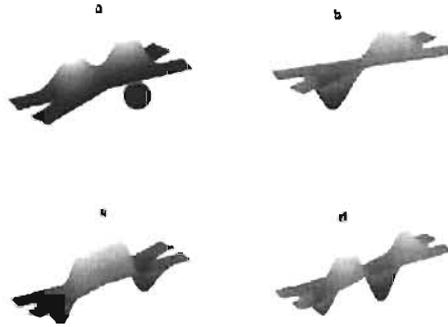


Figura 2.15: Los primeros dos estados ligados para tijeras con  $\theta = 30^\circ$ . (tomado de [14])

intervalo  $(0^\circ, 90^\circ)$ .

Los autores consideran un sistema de dos guías de onda rectas del mismo ancho  $d$ , las cuales se cruzan a un ángulo  $\theta$  distinto de cero, esta geometría se muestra en la figura 2.15. Tales uniones, son llamadas “tijeras”, cambian el espectro del sistema cuando el ángulo  $\theta$  varía en el intervalo de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  como se muestra en la Fig. 2.16. Dicho sistema tiene una simetría de espejo con respecto al eje del ángulo complementario  $180^\circ - \theta$  y los estados ligados existen en pares correspondiéndoles una paridad diferente. Cuando el ángulo  $\theta$  disminuye, los estados llegan a ser fuertemente ligados, la brecha de energía entre miembros (par e impar) decaen exponencialmente rápido. Los autores estudian el comportamiento de los estados alrededor del valor crítico  $\theta_c$  donde los estados ligados surgen desde el continuo.

Si un sistema tiene una simetría de espejo, hay una descomposición natural del Hamiltoniano en sus partes par e impar respectivamente, las cuales hacen posible considerar una mitad de la estructura con condiciones de Neumann y otra con condiciones de Dirichlet sobre el eje de simetría. En el caso de las tijeras se tienen dos simetrías de espejo, una respecto al eje del ángulo  $\theta$  (primer eje) y el otro respecto al segundo ángulo  $180^\circ - \theta$  (segundo eje). Estas simetrías permiten reducir la geometría en estudio a un cuarto de la misma. En este caso la dependencia del ángulo de los eigenvalores puede ser estudiado por teoría de perturbación usando una transformación de escala de la variable longitudinal. Las consideraciones descritas nos llevan a las siguientes conclusiones. *i)* Cada estado ligado es par con respecto al eje del espejo. *ii)* Con respecto al segundo eje, los estados ligados pueden tener una

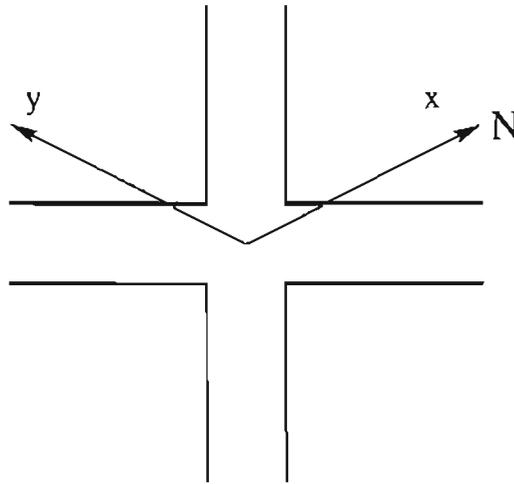


Figura 2.16: Vista esquemática de unas tijeras con  $\theta = 90^\circ$ . (tomado de [14])

o otra paridad, la cual es alternativa si los estados ligados son arreglados de acuerdo con sus energías. *iii*) Conforme  $\theta$  se hace pequeño nuevos estados ligados surgen del continuo. El número  $N$  de estados ligados satisface la desigualdad  $N \geq 2c\pi^{-1}(90^\circ/\theta)$  con  $c = (1 - 2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$  "aproximadamente igual a 0.225". Si estamos lejos de  $\theta = 90^\circ$ , donde conocemos que  $N = 1$ , los resultados anteriores se hacen asintóticamente exactos cuando  $\theta \rightarrow 0^\circ$ . *iv*) Todas las energías de estado ligado son funciones de  $\theta$  que se incrementan monótonamente.

La dependencia del ángulo de las energías de estado ligado tienen diferentes regímenes. En el régimen de acoplamiento débil arriba del ángulo crítico  $\theta_c$  aparecen nuevos estados ligados. El análisis numérico de los autores muestra que la energía de ligadura de los estados acoplados débilmente se comporta como  $\simeq \pi^2 - \gamma(\theta_c - \theta)^2$  con alguna constante  $\gamma$ , la cual depende del estado particular. Por otra parte los estados fuertemente ligados corresponden a  $\theta$  pequeños y son determinados por el potencial unidimensional dado por el eigenvalor transversal más bajo.

La estructura de las tijeras puede ser realizadas experimentalmente con un dispositivo de microondas. Sin embargo en tal ambiente no es fácil variar la geometría continuamente. La meta de los autores de este trabajo es usar una estructura de un ángulo fijo si la parte posterior se suple por una ferrita con una anisotropía magnética axial y un campo magnético externo aplicado.

## 2.8. Resumen del capítulo.

En este capítulo se hizo una revisión de algunos de los principales trabajos desarrollados sobre estados ligados en guías de onda con dobleces. Esto nos ha permitido familiarizarnos con la fenomenología de dichos estados y sus características principales: Función de onda localizada alrededor de los dobleces o protuberancias en las guías; decaimiento exponencial de las mismas como función de la longitud de los brazos de las guías y energías asociadas a dichos estados que están por debajo de las frecuencias de corte para la propagación de señales en estos sistemas.

Hemos visto los distintos puntos de vista desde los cuales se ha abordado el problema de estados ligados en guías de onda dobladas, el cual tiene varios parámetros que se han explorado, desde la geometría de los sistemas, el ángulo de doblez  $\theta$ , así como el número de dobleces y la aplicación a diversos sistemas físicos (cavidades de microondas, alambres cuánticos, fibras ópticas y cristales fotónicos entre otros.)

De todo lo anterior hemos podido ver los diversos dispositivos modernos empleados para la detección de estados ligados en guías de onda dobladas y tenemos entonces una gran variedad de ejemplos que nos permitirán ver las ventajas del dispositivo que usamos en esta tesis para visualizar de manera más sencilla y didáctica este problema.



# Capítulo 3

## Fundamentos Teóricos

En este capítulo desarrollamos la herramienta matemática que usaremos a lo largo de este trabajo. Partimos del estudio del movimiento ondulatorio en una dimensión, el cual nos permite introducir los conceptos básicos de ondas tales como, longitud de onda, frecuencia, número de onda y velocidad de propagación de la misma. Posteriormente introducimos la ecuación de onda bidimensional y sus soluciones en una membrana rectangular por el método de separación de variables. Con lo cual tenemos la solución temporal y los correspondientes patrones estacionarios (modos normales) de esta geometría que son bien conocidos. Esto, nos permitirá obtener la velocidad de las ondas en cualquier medio de propagación, en particular en las membranas jabonosas que usamos en los experimentos. Posteriormente describimos la fenomenología básica de guías de onda en general, cuya diferencia básica con las geometrías cerradas es que las primeras son cavidades abiertas en sus extremos. Finalmente caracterizamos a los estados localizados y discutimos la aparición experimental de dichos estados en guías de onda con dobleces tipo “codos”, que es el objetivo de nuestro estudio.

### 3.1. Movimiento ondulatorio unidimensional.

Sabemos por la teoría que un movimiento ondulatorio unidimensional se representa, en general, por una expresión del tipo:

$$\Psi(x, t) = f(x \pm vt), \quad (3.1)$$

la cual representa una onda que viaja en la dirección del eje  $X$ . La

cantidad  $\Psi(x, t)$  puede representar muy diversas variables físicas, tales como deformaciones en sólidos, presión en una columna de aire, un campo eléctrico o magnético, etc. Un caso de especial importancia es aquel en el que  $\Psi(x, t)$  es una función armónica, la cual se representa como:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin[k(x - vt)]. \quad (3.2)$$

Dentro de las principales características de este tipo de ecuación, tenemos que tiene dos tipos de periodicidad: una en el tiempo y la otra en el espacio, como veremos a continuación. Si en la onda armónica dada por (3.2) sustituimos en el argumento a  $x$  por  $x + \frac{2\pi}{k}$ , tenemos que:

$$\Psi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \Psi_0 \sin\left(kx + 2\pi - kv t\right) = \Psi_0 \sin[k(x - vt) + 2\pi]. \quad (3.3)$$

usando la identidad,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad (3.4)$$

en la ecuación (3.3) llegamos a

$$\Psi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \Psi_0 \sin[k(x - vt)] \cos(2\pi) + \cos[k(x - vt)] \sin(2\pi) = \Psi_0 \sin[k(x - vt)]. \quad (3.5)$$

Esto quiere decir que  $\lambda = 2\pi/k$  es el periodo espacial de la onda armónica. Es decir, el perfil de la onda se repite en el espacio cada longitud  $\lambda$ . La cantidad  $\lambda$  se define como la longitud de onda, mientras que  $k = 2\pi/\lambda$ , representa el número de longitudes de onda que caben en el período fundamental  $2\pi$  de la función armónica y se denomina número de onda.

La ecuación (3.5) también se puede escribir como:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin(kx - \omega t). \quad (3.6)$$

donde  $\omega = kv$ .

Repetiendo el proceso anterior, usado para definir el periodo espacial  $\lambda$ , pero ahora para mostrar el periodo temporal, tenemos que en la ecuación (3.6) podemos cambiar el argumento  $t$  por  $t + \frac{2\pi}{\omega}$  sin que dicha ecuación se altere. De manera que también podemos definir el periodo temporal  $P = 2\pi/\omega$  de  $\Psi(x, t)$ . Podemos escribir  $\omega = 2\pi\nu$ , donde  $\nu = 1/P$  es el número de

ciclos por unidad de tiempo realizados por la función de onda en cada punto del espacio  $x$  (llamada frecuencia) y  $\omega$  es la frecuencia angular de la misma.

Si igualamos las diferentes expresiones obtenidas para  $\omega$  tenemos que:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda}, \quad (3.7)$$

de donde

$$v = \lambda\nu, \quad (3.8)$$

siendo ésta la relación fundamental entre la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda en un medio determinado. Esta relación es de gran utilidad para determinar la velocidad de propagación de las ondas en el medio de propagación, en particular las membranas jabonosas que usamos en nuestros experimentos.

## 3.2. La ecuación de onda bidimensional.

En la sección anterior usamos el caso más simple de movimiento ondulatorio, ondas armónicas unidimensionales para definir las principales cantidades físicas que caracterizan a una función de onda. En éste capítulo introducimos la ecuación que describe la propagación de una onda en un medio determinado. Ésta es conocida como la ecuación de onda, que escribimos a continuación:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \quad (3.9)$$

donde  $\Psi$ , es la función de onda o perturbación que se propaga en el medio;  $v$ , es la velocidad de propagación de la onda en el medio y  $t$  es el tiempo. En coordenadas rectangulares el Laplaciano  $\nabla^2$ , para el caso de dos dimensiones espaciales que nos interesa, se escribe:

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (3.10)$$

La ecuación (3.9) típicamente se resuelve por el método de separación de variables. Para ello se propone una solución de la forma,

$$\Psi(x, y, t) = \phi(x, y)\tau(t). \quad (3.11)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.9) tenemos,

$$\tau(t)\nabla^2\phi(x, y) = \frac{\phi(x, y)}{v^2} \frac{\partial^2\tau(t)}{\partial t^2}. \quad (3.12)$$

Reagrupando ahora los términos de esta ecuación obtenemos la expresión

$$\frac{v^2}{\phi(x, y)}\nabla^2\phi(x, y) = \frac{1}{\tau(t)} \frac{\partial^2\tau(t)}{\partial t^2}, \quad (3.13)$$

de tal manera que en el lado izquierdo tenemos solo la parte espacial  $\phi(x, y)$  de la función de onda  $\Psi(x, y, t)$  mientras que en el lado derecho solo aparece la parte temporal  $\tau(t)$  de la misma. La igualdad anterior solo se satisface si ambos lados son iguales a una y la misma constante de forma independiente. A esta constante se le llama constante de separación de variables y la denotaremos por  $-\omega^2$  así,

$$\nabla^2\phi(x, y) = -\frac{\omega^2}{v^2}\phi(x, y) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2\tau(t)}{\partial t^2} = -\omega^2\tau(t). \quad (3.15)$$

### 3.3. Modos normales de una membrana rectangular.

Un caso de especial interés para nosotros, es el de una membrana rectangular con sus cuatro lados fijos ya que, una de las geometrías que estudiamos en este trabajo ( la geometría  $L$ ) se convierte en un rectángulo de lados  $a$  y  $b$  respectivamente, para el caso en que la geometría no esta doblada.

Ahora aplicamos el mismo procedimiento de separación de variables a la primera de las dos ecuaciones anteriores para, a su vez, expresar la parte espacial como un producto de funciones de las coordenadas  $x$  y  $y$  de forma independiente. Así que proponemos  $\phi(x, y) = X(x) Y(y)$  y sustituyendo esto en la ec.(3.14) llegamos a

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2 X(x) Y(y) = 0, \quad (3.16)$$

donde hemos usado la expresión (3.10) del Laplaciano en coordenadas rectangulares y hemos llamado  $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ . Dividiendo la ec. (3.16) por el producto  $X(x)Y(y)$  y reordenando los términos llegamos a la igualdad

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\left( \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 \right). \quad (3.17)$$

Usando una vez más el teorema de separación de variables introducimos una segunda constante de separación  $-k_x^2$  a la cual se igualan ambos lados de la ecuación anterior de manera independiente. Así

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 X, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 Y, \quad (3.19)$$

donde  $k_y^2 = k^2 - k_x^2$ . Notemos que ambas ecuaciones tienen la misma forma que la ec. (3.15) y por lo tanto la misma forma de sus soluciones, es decir,

$$\tau(t) = T_0 \sin(\omega t) + T_1 \cos(\omega t) \quad (3.20)$$

$$X(x) = X_0 \sin(k_x x) + X_1 \cos(k_x x) \quad (3.21)$$

$$Y(y) = Y_0 \sin(k_y y) + Y_1 \cos(k_y y) \quad (3.22)$$

Entonces la solución general es

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \phi(x, y)\tau(t) \\ &= \{[X_0 \sin(k_x x) + X_1 \cos(k_x x)] \\ &\times [Y_0 \sin(k_y y) + Y_1 \cos(k_y y)] \\ &\times [T_0 \sin(\omega t) + T_1 \cos(\omega t)]\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Las condiciones de frontera que debe satisfacer la onda en una membrana fija a cualquier tiempo son

$$\Psi(0, y, t) = 0, \Psi(a, y, t) = 0, \Psi(x, 0, t) = 0, \Psi(x, b, t) = 0. \quad (3.24)$$

Lo anterior es debido a que, en nuestros sistemas, las funciones de onda deben permanecer fijas al aro en todo momento. Si sustituimos la primera de las condiciones en (3.23), tenemos que:

$$\Psi(0, y, t) = [X_0 \sin(0) + X_1 \cos(0)][Y_0 \sin(k_y y) + Y_1 \cos(k_y y)]T_0 \sin(\omega t) = 0. \quad (3.25)$$

donde hemos escogimos  $T_1 = 0$  en la dependencia temporal para que la función  $\Psi(x, y, 0) = 0$ . Reduciendo tenemos que:

$$\Psi(0, y, t) = X_1[Y_0 \sin(k_y y) + Y_1 \cos(k_y y)][T_0 \sin(\omega t)] = 0. \quad (3.26)$$

Así, tenemos que  $X_1 = 0$ . Si ahora aplicamos la segunda condición de frontera, tenemos

$$\Psi(a, y, t) = [X_0 \sin(k_x a)][Y_0 \sin(k_y y) + Y_1 \cos(k_y y)][T_0 \sin(\omega t)] = 0. \quad (3.27)$$

lo cual implica que  $k_x a = n\pi$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Usando las condiciones de frontera restantes sobre la coordenada  $y$  como se hizo para  $x$ , tenemos que  $Y_1 = 0$  y  $k_y b = m\pi$  con  $m = 1, 2, 3, \dots$ . De aquí tenemos que  $k_x = n\pi/a$  y  $k_y = m\pi/b$ .

Las cantidades  $k_x$  y  $k_y$  son las componentes en el plano  $X - Y$  del vector  $k$  paralelo a la dirección de propagación y de magnitud  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$  entonces,

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (3.28)$$

Sustituyendo aquí los valores encontrados para  $k_x$  y  $k_y$  tenemos que, para una membrana, rectangular con sus cuatro lados fijos,

$$k = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}. \quad (3.29)$$

Si utilizamos la relación  $k = 2\pi\nu/v$ , tenemos que las posibles soluciones estacionarias (llamadas modos normales) a la ecuación de onda, en nuestra membrana rectangular, se localizan a frecuencias dadas por,

$$\nu = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}. \quad (3.30)$$

### 3.4. Guías de onda bidimensionales.

A diferencia de los patrones estacionarios que aparecen en cavidades cerradas como la membrana rectangular de la sección anterior, las guías de onda son cavidades largas y abiertas en sus extremos, en las que existe la posibilidad de generar ondas viajeras. Esto es, las señales (ondas) que entran por uno de sus extremos se reciben en el otro. En la figura 3.1 se muestra una guía bidimensional donde se ha establecido una onda viajera cuyo vector

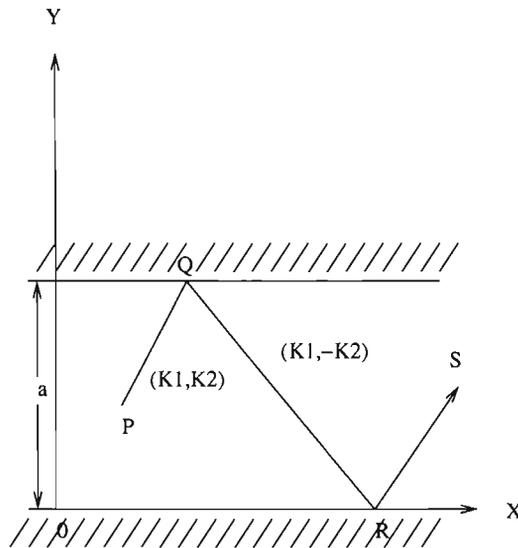


Figura 3.1: Diagrama esquemático de un rayo propagándose dentro de una guía de ondas.

de propagación está dado por  $\vec{k} = (k_1, k_2)$ . Dentro de la guía, dicha onda sufre sucesivas reflexiones, propagándose a lo largo de la dirección que no está limitada espacialmente. El vector de propagación  $\vec{k}' = (\vec{k}_1, -\vec{k}_2)$  corresponde a la primera reflexión de nuestra onda en las paredes de la guía. El resultado de la interferencia de estas dos ondas da lugar a un movimiento ondulatorio dado por

$$\Psi(x, y, t) = A \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + B \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)], \quad (3.31)$$

el cual debe cumplir con las siguientes condiciones a la frontera.

$$\Psi(x, 0, t) = 0, \quad (3.32)$$

y

$$\Psi(x, a, t) = 0, \quad (3.33)$$

sustituyendo la primera condición de frontera en Ec. (3.31) y reagrupando términos tenemos que

$$\Psi(x, 0, t) = (A + B) \sin[\omega t - k_1 x] = 0, \quad (3.34)$$

de donde tenemos que  $A = -B$ , por lo que la Ec.(3.31) queda como sigue:

$$\Psi(x, y, t) = A[\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)], \quad (3.35)$$

donde hemos hecho  $\alpha = \omega t - k_1 x$  y  $\beta = k_2 y$ . Usando la siguiente identidad,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad (3.36)$$

llegamos a

$$\Psi(x, y, t) = -2A \cos \alpha \sin \beta, \quad (3.37)$$

con esto tenemos que la Ec. (3.31) se reduce a:

$$\Psi(x, y, t) = -2A \sin(k_2 y) \cos(\omega t - k_1 x). \quad (3.38)$$

Por otro lado tenemos que:

$$\Psi(x, a, t) = -2A \sin(k_2 a) \cos(\omega t - k_1 x) = 0 \quad (3.39)$$

de aquí podemos ver que  $\sin(k_2 a) = 0$ . Esto sucede cuando  $k_2 a = n\pi$ , lo que nos lleva a  $k_2 = n\pi/a$ . Así, tenemos que la Ec. (3.39) nos queda como sigue,

$$\Psi(x, y, t) = -2A \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos(\omega t - k_1 x), \quad (3.40)$$

Esta ecuación representa una onda que se propaga en la dirección  $X$ .

Recordando ahora que  $k_2 = n\pi/a$  entonces

$$k^2 = k_1^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad (3.41)$$

así,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \quad (3.42)$$

y dado que  $k = \frac{\omega}{v}$  tenemos que

$$k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \quad (3.43)$$

lo cual implica que:

$$\omega = v \sqrt{k_1^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}. \quad (3.44)$$

Finalmente, de la ecuación (3.42) tenemos que, debido a que  $k_1$  debe de ser un número real mayor o igual a cero, para que una onda se propague a lo largo de la guía de onda. Si usamos el hecho de que  $k^2 = \omega^2/v^2$

$$\frac{\omega^2}{v^2} > \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad (3.45)$$

así,

$$\omega^2 > \frac{v^2 n^2 \pi^2}{a^2}, \quad (3.46)$$

y usando  $\omega = 2\pi\nu$  tenemos que;

$$\nu = \frac{vn}{2a} \quad (3.47)$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Esta es la condición que debe cumplirse para que haya propagación,  $n$  determina el modo de vibración transversal establecido.

### 3.5. Estados localizados en guías de onda.

Imagine una partícula clásica en un movimiento unidimensional, sujeta a un potencial como el que se muestra en la figura 3.2. En esta figura se grafican la energía potencial  $E_p$  como función de la posición  $x$ , por lo que en el eje Y tenemos representada la energía potencial  $E_p$  para cualquier posición  $x$ . Las líneas horizontales en esta figura, representan algunos valores de energía total  $E$  que puede tomar una partícula que se aproxima desde infinito. De tal manera que la energía cinética  $E_k$  de la partícula es la distancia vertical que hay entre la línea horizontal y la curva de la energía potencial  $E_p$ , esto es,

$$E_k = E - E_p. \quad (3.48)$$

Si analizamos el caso en que la partícula tiene la energía indicada por la recta horizontal (1), tenemos que la región a la derecha del punto  $B$  está prohibida para la partícula. Esto se debe a que en esta zona  $E_p$  es mayor que su energía total dada por la recta (1). Esto implicaría una energía cinética negativa, lo

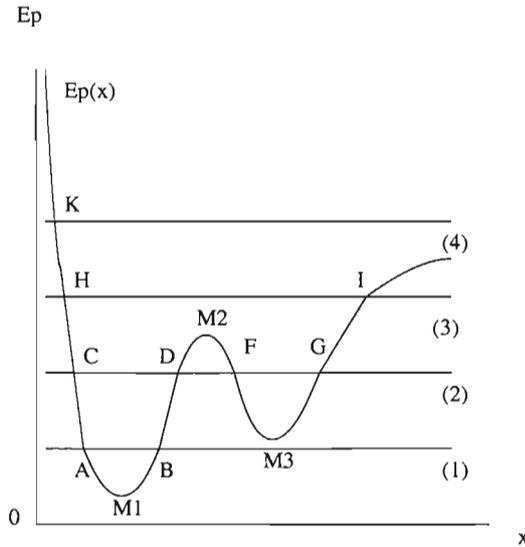


Figura 3.2: Gráfica de la energía potencial como función de la posición unidimensional.

cuál es imposible si recordamos que  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Esto mismo sucede para puntos que están a la izquierda del punto  $A$ . De estas observaciones se concluye que las partículas con esta energía se encuentran confinadas entre los puntos  $A$  y  $B$ . Estos puntos, se llaman puntos de retorno ya que en ellos la  $E_k = 0$ . Esto es, la partícula cambia la dirección de su movimiento en dichos puntos y permanece oscilando entre ambos.

Para el caso en que la partícula tiene la energía indicada por la horizontal (2), tenemos que hay dos regiones permitidas para el movimiento de la partícula. Una oscilando entre los puntos  $C$  y  $D$  y otra oscilando entre los puntos  $F$  y  $G$ . Debido al mismo argumento usado en el caso anterior, la partícula se encuentra restringida a moverse en estas dos regiones. Es importante hacer notar que una vez que la partícula se encuentra ubicada en cualquiera de las dos regiones, ya no puede estar en la otra región. Para que esto sucediera, la partícula tendría que pasar por la región entre los puntos  $D$  y  $F$ , lo cual no está permitido. Por otro lado, si el valor de la energía total corresponde al caso indicado por la línea horizontal (3), la partícula se encuentra confinada entre los puntos  $H$  e  $I$ . Finalmente, en el nivel de energía indicado por la horizontal (4), la partícula se puede aproximar desde el infinito hasta el punto  $K$  por lo que, en este caso, la partícula ya no está

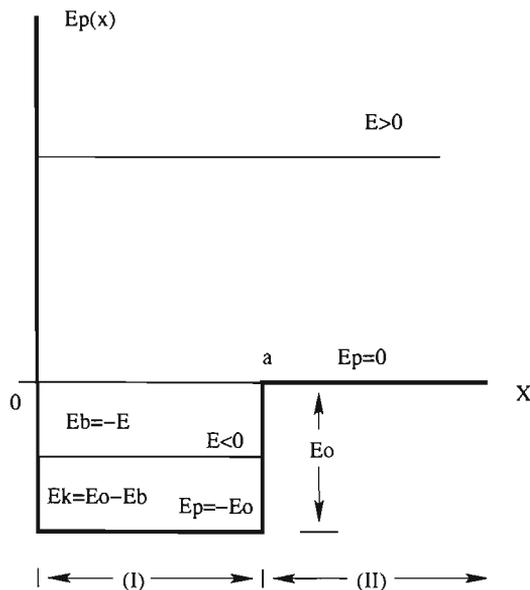


Figura 3.3: Pozo de potencial rectangular limitado en  $x = 0$  por una pared de potencial. (tomado de [1])

ligada por el potencial y puede ocupar cualquier posición a la derecha del punto  $k$  sin restricciones a diferencia de los casos anteriores.

El análogo cuántico del ejemplo anterior corresponde a estudiar la ecuación de Schrödinger con un potencial similar. Tal ecuación, para problemas en una dimensión, tiene la siguiente forma,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p(x)\Psi = E\Psi. \quad (3.49)$$

donde  $\Psi$  es la función de onda cuya amplitud al cuadrado ( $|\Psi|^2$ ) nos da la probabilidad de que la partícula se encuentre en algún lugar del espacio al tiempo  $t$ .

Por simplicidad escojamos un potencial atractivo de pozo cuadrado como el que se muestra en la figura 3.3 con potencial infinito en  $x = 0$  y  $E_p = 0$  para  $x > a$ . Si la energía total es positiva  $E > 0$  la partícula simplemente es clásicamente dispersada por el potencial. Pero si  $E < 0$ , la partícula clásica queda confinada a la región I, entre las posiciones  $x = 0$  y  $x = a$ . En esta región, la energía potencial es negativa  $E_p(x) = -E_0$  (potencial atractivo) y

esto hace que la ecuación de Schrödinger se convierta en,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} - E_0\Psi = E\Psi. \quad (3.50)$$

ó

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0. \quad (3.51)$$

con  $k^2 = \frac{2m(E_0+E)}{\hbar^2}$  dentro de la zona  $I$ . La solución para esta ecuación está dada por

$$\Psi_I(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx). \quad (3.52)$$

Si además imponemos las condiciones de frontera, es decir  $\Psi_I = 0$  para  $x = 0$ , tenemos que  $B = -A$ , de donde

$$\Psi_I(x) = A \left( \exp(ikx) - \exp(-ikx) \right) = C \sin(kx) \quad (3.53)$$

con  $C = 2iA$ . En la región II, correspondiente a  $x > a$  la ecuación de Schrödinger con  $E_p(x) = 0$  está dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi \quad (3.54)$$

ó

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \alpha^2\Psi = 0 \quad (3.55)$$

donde  $\alpha^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ . La solución para esta ecuación es

$$\Psi_{II}(x) = D \exp(-\alpha x). \quad (3.56)$$

Esta solución refleja la situación de que experimentalmente la probabilidad de encontrar una partícula en esa región es muy pequeña, pero distinta de cero. Esto constituye una de las características que distinguen, la mecánica cuántica de la mecánica clásica. En mecánica cuántica, la región en la cual una partícula puede encontrarse no tiene porqué ser, en general, de fronteras bien definidas. Ahora como  $\Psi_{II}(x)$  es una exponencial negativa (ó decreciente), la probabilidad de encontrar la partícula con  $E < E_0$  en la región II (para  $x > a$ ), disminuye rápidamente cuando  $x$  crece.

Por otro lado, debido a las condiciones de continuidad que deben de satisfacer tanto la función de onda como su derivada en  $x = a$ , es decir,

$$\begin{aligned}\Psi_I|_{x=a} &= \Psi_{II}|_{x=a} \\ \frac{d\Psi_I}{dx}|_{x=a} &= \frac{d\Psi_{II}}{dx}|_{x=a},\end{aligned}\quad (3.57)$$

se tiene que

$$C \sin(k_i a) = D \exp(-\alpha a). \quad (3.58)$$

y

$$k_i C \cos(k_i a) = -\alpha D \exp(-\alpha a). \quad (3.59)$$

Si dividimos estas ecuaciones miembro a miembro tenemos que:

$$k_i \cot(k_i a) = -\alpha. \quad (3.60)$$

sustituyendo aquí los valores de  $k_i$  y  $\alpha$  se tiene que

$$\sqrt{\frac{2m(E_0 - E_b)}{\hbar}} \cot\left(\sqrt{\frac{2m(E_0 - E_b)}{\hbar}} a\right) = \sqrt{-\frac{2mE_b}{\hbar}}. \quad (3.61)$$

Esta ecuación expresa una condición para los posibles niveles de energía permitidos en el interior del pozo. El número de niveles de energía permitidos depende del valor del producto entre  $E_0$  y  $a^2$ . Dependiendo del valor de  $E$  se tiene, ninguno, uno, dos, tres, etc. posibles niveles de energía. Estos estados son conocidos como estados ligados y entre sus principales características tenemos que, la energía asociada a dichos estados es negativa; las funciones de onda que caracterizan a dichos estados decaen exponencialmente fuera de cierta área y está localizado en la zona del potencial distinto de cero.

El análisis anterior nos permite caracterizar a los llamados estados ligados, que son un concepto surgido en la mecánica cuántica. Dichos estados surgen a partir del estudio de sistemas cuánticos análogos a sistemas clásicos con potenciales particulares. Hasta hace unos años, éste era el camino típico a través del cual aparecían los estados ligados. Sin embargo, en trabajos recientes, relacionados con el estudio de guías de onda, se ha mostrado que los estados ligados pueden ser establecidos en guías de onda con dobleces o protuberancias. La presencia de estos estados ligados ha podido observarse experimentalmente en cavidades de microondas y alambres cuánticos principalmente. Tal es el caso de los trabajos de Schult, Ravenhall y Wyld [6],

sobre la existencia de estados ligados en sistemas con esquinas o dobleces como el que se muestra en la figura 2.2 del capítulo 2 (potencial formado por dos alambres cruzados). Estos autores reportan cálculos para determinar si el confinamiento de un electrón en la intersección de dichos alambres produce efectos cuánticos que puedan modificar notoriamente el funcionamiento de dispositivos que funcionen con dichas configuraciones. Diversos trabajos con geometrías similares se han estudiado. Entre los que se encuentran los trabajos de Carini et al [8, 10].

En estos últimos sistemas, se observa que la presencia de dobleces o protuberancias producen fuerzas atractivas locales efectivas, las cuales dan origen a los estados ligados. La atracción efectiva en un alambre doblado es proporcional al cuadrado de la curvatura del alambre, la magnitud de la energía de amarre se incrementa cuando la curvatura se incrementa.

### 3.6. Resumen del capítulo.

En este capítulo se hizo una revisión detallada de los principales conceptos necesarios para fundamentar de manera formal nuestro trabajo. En temas como son el movimiento ondulatorio (en una y dos dimensiones), guías de onda y caracterización de estados ligados están estrechamente relacionados con el funcionamiento de las guías de onda. Explicamos también el mecanismo tradicional a partir del cual surgen los estados ligados y que difiere del camino por el cual surgen estados con las mismas características en guías de onda dobladas. Esto nos ha permitido calcular la velocidad de propagación de ondas en la película de jabón. En este trabajo (este cálculo se presenta de manera detallada en el siguiente capítulo). Por otro lado nos permitió familiarizarnos, con la fenomenología de las guías de onda, y las características fundamentales que presentan los estados ligados.

# Capítulo 4

## El experimento.

En este capítulo, explicamos de manera detallada, los elementos que conforman el dispositivo experimental que utilizamos en este trabajo, así como las ventajas que ofrece este dispositivo en comparación, con los dispositivos que se usan en otros experimentos. Detallaremos también, las características y ventajas, de la solución jabonosa que utilizamos, así como algunos comentarios, acerca de los usos que se le han dado en otros tipos de experimentos. Explicamos de manera detallada las características y ventajas principales del material con el que se construyeron los aros. Del mismo modo abordaremos las características principales de los diferentes tipos de geometrías de nuestros aros, así como el procedimiento detallado de su construcción. Finalmente comentaremos el proceso de la toma de datos que se llevó a cabo en este trabajo.

### 4.1. Montaje experimental.

El dispositivo experimental que utilizamos en este trabajo se presenta de manera esquemática en la Figura (4.1). Este dispositivo consta de un generador de funciones modelo PI-9587C y un vibrador mecánico modelo SF-9324, ambos aparatos de la marca Pasco Scientific. En el pivote del vibrador se colocan aros de alambre magneto calibre No. 9. Dentro de las ventajas que ofrece este dispositivo, respecto de los dispositivos que se usan para estudiar estados ligados, (cavidades de microondas y alambres cuánticos entre otros), se encuentra el costo del equipo que nosotros utilizamos, ya que es muchísimo más accesible que los otros. Por otro lado, el montaje que usamos

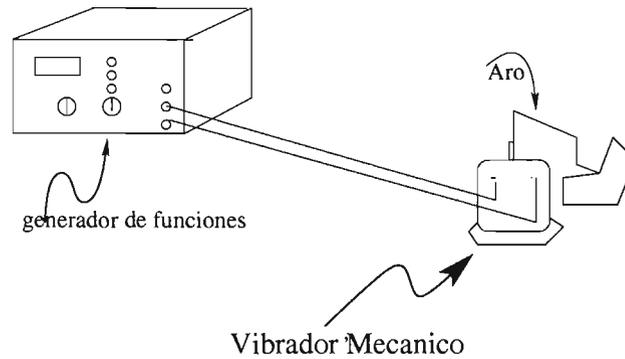


Figura 4.1: Diagrama esquemático, del dispositivo experimental usado en este trabajo.

es completamente portátil y se encuentra en cualquier laboratorio de física de docencia desde niveles de educación media y superior. Esto permite acercar a los alumnos de la manera más sencilla y didáctica a temas de frontera en la ciencia. Una ventaja aún más interesante del equipo que estamos utilizando en este trabajo, es la posibilidad de observar de manera directa, estados ligados en guías de onda bidimensionales, lo cual no es inmediato con otros procedimientos pues hay que mapear los campos electromagnéticos. Debemos mencionar también que el dispositivo experimental que usamos en esta tesis, ya ha sido utilizado exitosamente en otro trabajo [16]. En éste trabajo el dispositivo fue utilizado para observar modos normales en aros bidimensionales de forma arbitraria tales como el estadio y la elipse por mencionar algunos.

## 4.2. Desarrollo experimental.

El aro fabricado de alambre magneto (el proceso de fabricación de los aros será explicado en una sección posterior) debe estar sujeto al vibrador a través de su pivote. Debido a que el grosor del alambre no coincide con el del diámetro interno del pivote del vibrador, fue necesario usar masking tape para hacer que embonaran perfectamente. Este detalle técnico es importante ya

que cuando el equipo está funcionando, el alambre comienza a rotar respecto del pivote, impidiendo que se pueda establecer ningún patrón estacionario (incluyendo los estados ligados).

Otro detalle técnico, que debemos cuidar, es la forma de colocar los aros en el pivote del vibrador mecánico, y es que el plano de nuestro aro quede perfectamente perpendicular al pivote (paralelo a la superficie que sostiene al vibrador). Esto para evitar que la película de jabón, se adelgace por escurrimiento en alguno de sus extremos. Los cuidados anteriores nos garantizar que la ubicación (en espacio y frecuencia) de los estados ligados en el aro, se debe solamente a las características de la película y los parámetros que estamos manejando para cada caso.

En el experimento, el generador de funciones controla al vibrador mecánico. Utilizando una señal senoidal. La escala de frecuencia que utilizamos en nuestro trabajo fue la de 0,001 Hz a 99,999 Hz con una sensibilidad de 0,001 Hz. Esto debido a que fue la escala que mejor se ajustó a las necesidades experimentales del trabajo. Dadas las dimensiones de nuestras guías de onda, sólo necesitamos frecuencias comprendidas entre DC y 30 Hz. Por otro lado la sensibilidad de esta escala tiene un barrido de frecuencias muy fino, lo que nos permite hacer las lecturas experimentales de las frecuencias asociadas a los estados localizados con una precisión bastante buena.

Otro de los parámetros que debemos considerar en el generador de funciones es la amplitud de oscilación con la que entrega la señal al vibrador mecánico. Esta amplitud a lo largo del experimento la mantuvimos fija, y se escogió tomando en cuenta la mejor resistencia de la película de jabón a las vibraciones mecánicas con los patrones de estados estacionarios mejor definidos, es decir, la amplitud que favorece la mejor observación de los estados localizados en el aro. Debemos mencionar que para amplitudes arriba de cierto valor, ocurren también fenómenos no lineales que no son descritos por nuestro modelo de ecuación de onda bidimensional y es por ello que la amplitud debe quedar fija por debajo de este umbral. Sin embargo, queremos hacer notar que la película de jabón permite estudiar efectos no lineales.

#### 4.2.1. Toma de datos.

El procedimiento de la toma de datos en el experimento se lleva a cabo de la siguiente manera: una vez elegida la geometría del aro fijamos los parámetros que vamos a estudiar, los cuales son el ángulo de doblez y la longitud de los brazos del aro. Posteriormente colocamos la película de jabón en

nuestro aro, cuidando de drenar por completo la solución jabonosa excedente, esto se logra inclinando ligeramente el aro sobre la charola que contiene la solución jabonosa para que la solución escurra a través de una de sus esquinas. Una vez concluída esta parte se procede a montar el aro en el pivote del vibrador mecánico.

Ahora estamos listos para poner a funcionar nuestro dispositivo. Fijamos la amplitud de la señal senoidal y procedemos a variar la frecuencia en el generador de funciones en el intervalo que hemos escogido hasta que, de manera clara y nítida podamos identificar las características del estado ligado que esperamos en el aro según la teoría. Hay que decir que el establecimiento del estado ligado no ocurre de manera espontánea en un único valor fijo de frecuencia. Lo que ocurre a nivel experimental es que el patrón que buscamos, comienza a definirse en algún valor de frecuencia  $f_i$  y desaparece en un valor superior  $f_f$  que establece un intervalo de frecuencias asociado a dicho estado. La frecuencia que asociamos al estado ligado es cuando obtenemos la vibración máxima al variar la frecuencia. Para la toma de fotografías utilizamos una cámara de video marca sony modelo DCR-DVD203.

### 4.3. La solución jabonosa óptima.

En la literatura existen muchas fórmulas para hacer películas jabón con diversos fines. Una de las más importantes es la Ref. [17]. Sin embargo, en nuestro trabajo, para poder elegir la mejor solución jabonosa que se adapte a nuestras necesidades, probamos tres recetas, las cuales ya se habían probado en trabajos anteriores [16, 18, 19].

A continuación mostramos las soluciones jabonosas con las que probamos inicialmente sus propiedades (resistencia, duración, etc). La primera:

1. 1.4 grs. de trietanolamina
2. 100 grs. de glicerina al 85 % (es decir, 85 gr de glicerina con 15grs. de agua destilada)
3. 2 grs. de ácido oléico.
4. Shampoo comercial (shampoo Mennen).

Esta solución tuvo problemas ya que, las películas de jabón que con ella hicimos, tendían a romperse muy rápido, dificultando con ello trabajar frecuencias cerca de la del estado ligado.

La segunda solución,

1. 45 grs. de agua
2. 16 grs. de glicerina
3. 25 grs. de shampoo (mennen).
4. 3 cucharadas soperas de miel

Esta solución jabonosa tenía una buena duración, pero no se adhería adecuadamente al aro. De estas tres recetas la que mejor se ajustó a los requerimientos del experimento, es la tomada de la Ref. [18]. La solución jabonosa que se obtiene de esta receta, es larga duración de las películas que se obtienen de ella, hasta 6 horas en ausencia de vibración y gran resistencia a los cambios de tensión superficial debidos a vibraciones mecánicas. En nuestro caso tenemos una duración promedio de 1 hora, sujeta a vibraciones en los aros, y con los parámetros ya establecidos, cuya fórmula damos a continuación,

1. 1.4 grs. de trietanolamina
2. 100 grs. de glicerina al 85 % (es decir, 85 gr. de glicerina con 15 grs. de agua destilada )
3. 2 grs. de ácido oléico.

Cabe mencionar que esta solución ha sido utilizada para hecer demostraciones de fenómenos de interferencia óptica [18], al ser iluminada por luz monocromática. La interferencia constructiva generada en la membrana se manifiesta en la película con aspectos brillantes coloreados. Si la interferencia es destructiva se manifiesta como una zona oscura.

Para poder observar estos fenómenos se ha hecho de montajes especiales, en particular Walker [18] utilizó uno, en el cual hace uso de un bote de té, en el cual por ejemplo, se han utilizado a las películas de jabón como espejos concavos para poder reflejar, fenómenos de interferencia sobre pantallas de proyección. Los fenómenos de interferencia son provocados excitando las membranas jabonosas con ondas de sonido, al ubicar bocinas próximas a la película de jabón. Las fluctuaciones en la presión del aire distorsionan la película, variando la dirección en la cual la luz es reflejada. Las fluctuaciones

además, cambian la densidad y grosor de la película generando colores que son creados por interferencia constructiva de las ondas reflejadas. En algunos rangos de frecuencia la película empieza a resonar con el sonido, es decir, partes de la película vibran vigorosamente y tales movimientos crean patrones hermosos de vórtices y chorros simétricos en la película.

### 4.3.1. Preparación de solución.

Como mencionamos en la sección anterior en este trabajo usamos la receta número 3 de la sección anterior. Para obtener la solución jabonosa se mezclan los elementos de manera ordenada (agregando uno a uno los elementos), tal solución tiene que estar en reposo durante 24 horas antes de poder hacer las primeras películas. Es recomendable guardar la solución en un frasco color ámbar sellado herméticamente. Esto es con el fin de evitar la rápida degradación que sufre la solución, ya que uno de sus componentes, el ácido oléico se oxida rápidamente al contacto con el medio ambiente. En el caso particular de nuestro experimento, debemos decir que la solución jabonosa no nos provocó ningún problema, ya que la pudimos utilizar durante largo tiempo (por espacio hasta de 3 meses), sin que los cambios en sus propiedades influyeran en los resultados de nuestras mediciones.

## 4.4. Los aros y sus dimensiones.

Parte importante de nuestro dispositivo experimental son los aros y para su elaboración se probaron inicialmente tres tipos de materiales: alambre galvanizado, alambre magneto y alambre recocado. El material que mejor se ajustó a las necesidades del experimento fue el alambre magneto, ya que nos proporcionó una mejor adhesión de la película jabonosa al aro de alambre. Este material nos ofrece también una rigidez muy adecuada al experimento, ya que evita al máximo las resonancias propias del aro bajo la acción del vibrador mecánico. Una ventaja más de este material es que se pueden soldar las piezas de una manera muy sencilla con cualquier soplete comercial portátil (aquí usamos un soplete desechable marca Linmex). Este material en el mercado se encuentra en una amplia gama de calibres, el grosor que más se ajustó a las necesidades del experimento fue el de calibre *no. 9*, del cual están hechos todos nuestros aros.

Como antes mencionamos, el objetivo de este trabajo es el estudio de

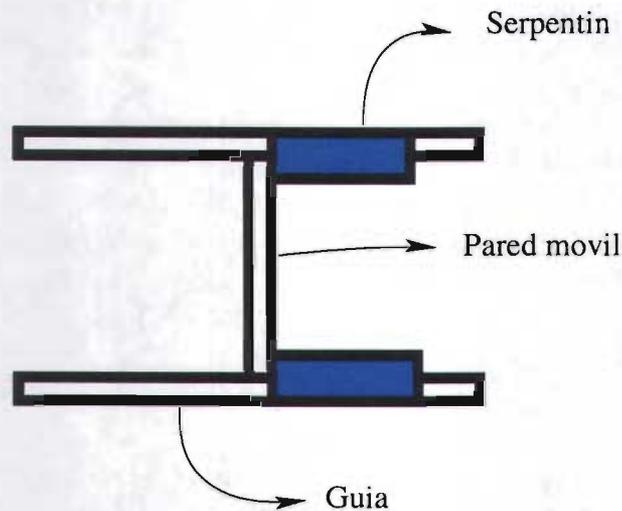


Figura 4.2: Diagrama esquemático del mecanismo que sirve para ir ajustando la longitud de los aros.

estados localizados en guías de onda bidimensionales con dobleces en algún ángulo  $\theta$  dado. Una guía de onda ideal tiene una longitud infinita. Éste es un hecho que en la práctica no se puede crear. Sin embargo, puede aproximarse si una de las dimensiones del sistema ( $b$ ) es mucho mayor que la otra. En el montaje experimental que usamos, fue suficiente con usar una proporción de dos a uno entre las dimensiones de largo y ancho para poder observar los estados ligados sin que estos dependieran de la longitud de los brazos de la guía. El ancho que fijamos para los brazos fue de 5 cm para todos los aros que fabricamos. Los aros fueron diseñados para que la longitud de sus brazos pudiera variar (esto es, la longitud puede ir aumentando o disminuyendo, de acuerdo a nuestras necesidades).

Este ajuste lo podemos ir haciendo de continuamente a partir de 3.5 cm y hasta 10.5 cm medidos desde el vértice interior de cada geometría. El tener la posibilidad de ir variando la longitud de los brazos de nuestros aros, es importante para nuestro experimento, ya que uno de los objetivos que queremos probar, es que el modo de vibración que se observa en nuestro aro es un modo de vibración localizado, es decir que su presencia no depende de la longitud de los brazos del aro.

El mecanismo que se utilizó para ir variando la longitud de nuestros aros,

se muestra en la figura 4.2 estas piezas se hacen con el mismo material de los aros y se ajustan exactamente al ancho de los mismos, es decir, tienen 5 cm de tamaño. **Para desplazar estas piezas en el aro, usamos un material llamado serpentín**, el cual colocamos antes de que el aro sea soldado. Éste serpentín se escoge de manera que, en su diámetro interior podamos colocar **exactamente** dos alambres magneto de calibre No. 9. El uso de este dispositivo nos evita el trabajo de fabricar un aro para cada longitud de los brazos a un ángulo fijo determinado. De esta manera, la fabricación de los aros, queda sujeta únicamente al **parámetro del ángulo de doblez** entre sus brazos.

#### 4.4.1. El aro en forma de “L”.

En la figura 4.3, se muestra de manera esquemática el aro en forma de “L”, una de las geometrías que estudiamos en este trabajo. En esta figura podemos observar **las marcas** que determinan la longitud de los brazos del aro. Estas marcas nos sirven de referencia para fijar la pared móvil. De esta forma iremos variando los distintos tamaños de los aros, para cada ángulo de doblez. La longitud de los brazos para este aro se mide a partir de su vértice interno. En la figura 4.3 podemos observar, como se esta considerando el ángulo de doblez, entre los **brazos** de este aro, este ángulo **en todas** las geometrías lo denotamos con la **letra griega  $\theta$** . Para esta **geometría se** consideraron siete ángulos de doblez distintos, a saber  $\theta = 0^\circ, 25^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 90^\circ, 115^\circ$  y  $135^\circ$ . A fin de poder variar este parámetro, fue necesario fabricar un aro para cada ángulo de doblez.

Esta geometría tiene un caso límite para  $\theta = 0^\circ$ , el cual corresponde a la geometría del rectángulo, muy estudiada en la literatura de modos normales. Para este caso particular, es posible calcular exactamente las frecuencias de sus modos normales a partir de la ecuación de onda bidimensional. Esto nos da la oportunidad de comparar de manera precisa y confiable los datos experimentales que obtengamos en este trabajo, con los datos teóricos correspondientes a la literatura, una vez que introduzcamos las dimensiones del sistema para escalar las frecuencias teóricas a nuestro sistema. Debemos resaltar algo muy importante, que **en este caso no esperamos la existencia de estado ligado alguno** pues la guía no tiene ningún doblez, es decir, las frecuencias que vamos a reportar **deben corresponder al primer modo normal asociado a cada uno de los diferentes rectángulos que se forman según la longitud de los brazos**, la anchura queda fija en 5 cm. De esta manera, este aro nos permitirá comprobar que el procedimiento experimental que esta-

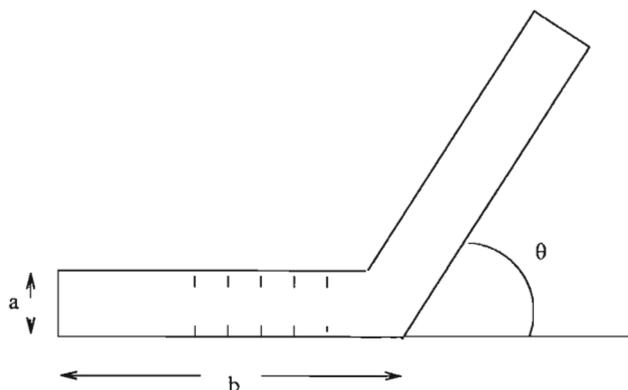


Figura 4.3: En esta figura, se muestra la geometría tipo “L”, de ancho “a” y longitud de brazos “b”.

mos usando en este trabajo es correcto al comparar las frecuencias obtenidas experimentalmente con las teóricas asociadas a los modos normales correspondientes. Por otro lado podremos, a través del ajuste del espectro teórico a las dimensiones de nuestro sistema, determinar la velocidad de propagación de las ondas en la película de jabón. Esto último lo hacemos en el apéndice.

#### 4.4.2. El aro en forma de “Y”.

La figura 4.4 muestra la geometría del aro en forma de “Y”, la cual se puede considerar como una extensión del caso de la “L”. Para este caso las longitudes de cada brazo del aro se toman a partir del vértice de unión de cada par de brazos, teniendo también un rango de longitud de 3,5 cm hasta 10,5 cm. Para esta geometría escogimos seis diferentes ángulos de doblado a saber  $\theta = 0^\circ, 25^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 115^\circ$  y  $135^\circ$ . El ángulo de doblado se fija moviendo solo los brazos superiores del aro, y se mide a partir de la línea que se encuentra dibujada en el esquema 4.4. El caso límite  $\theta = 0^\circ$ , es un aro en forma de “T”.

#### 4.4.3. El aro en forma de “X”.

En la figura 4.5, se muestra la geometría en forma de “X”. Ésta también puede verse como una extensión del caso de la geometría tipo “L”, ya que posee dos ejes de simetría, que dividen a la figura en cuatro zonas en forma

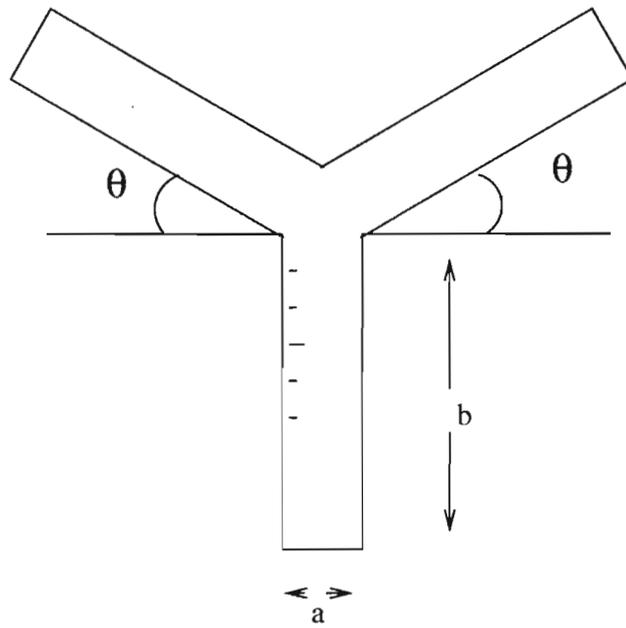


Figura 4.4: En esta figura, se observa la geometría tipo "Y", de ancho  $a$  y longitud de brazos  $b$ .

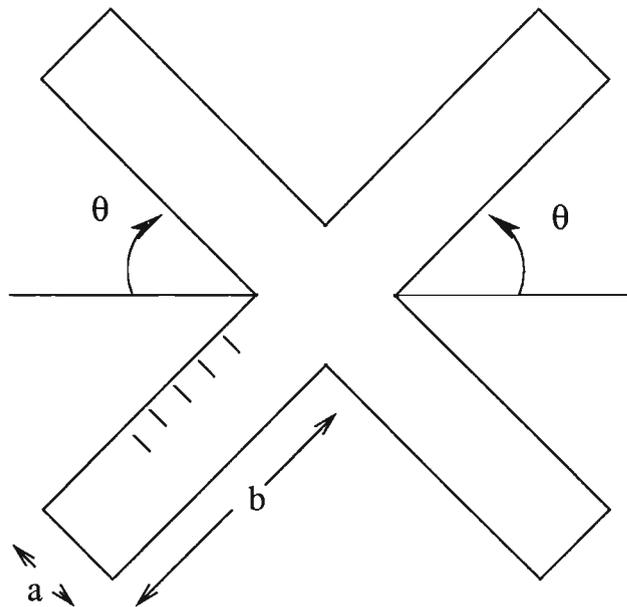


Figura 4.5: En esta figura, se observa la geometría tipo “X”, de ancho  $a$  y longitud de brazos  $b$ .

de “L”. En este caso las longitudes de cada brazo se miden a partir de los vértices superior e inferior ubicados sobre el eje de simetría vertical de la figura. Al igual que las geometrías anteriores, también tiene un rango de longitud de sus brazos de 3,5 cm, hasta 10,5 cm, medidos a partir de los vértices correspondientes. Para esta geometría el ángulo de doblez se mide desde la línea que se indica en el esquema. El número de ángulos elegidos disminuyó debido a que en este caso se presentan dos simetrías de espejo, una respecto al eje del ángulo  $\theta$ , y la otra respecto al eje asociado al segundo ángulo complementario  $180^\circ - \theta$ . Estas simetrías reducen el rango de variación del ángulo de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , es decir, la geometría de estudio queda limitada a un cuadrante. Es por esto que sólo trabajaremos tres ángulos de doblez  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ . Otros casos resultan difíciles de lograr para esta geometría de cuatro brazos. .

#### 4.4.4. Procedimiento de fabricación de los aros, para cualquiera de sus geometrías

El proceso de fabricación consta de cuatro etapas:

1. Diseño del aro con dimensiones ya definidas.
2. Corte del alambre.
3. Enderezado y limado del alambre magneto.
4. Soldado de las piezas.

A continuación detallamos en que consiste cada etapa:

1. El aro es dibujado sobre una pieza de loseta de barro, en el tamaño real que va tener. Con el fin de estar haciendo rectificaciones de dimensiones y forma en todo momento. Se hace en barro ya que sobre esa pieza soldaremos el aro.
2. El corte del alambre se hace dejando un margen extra de 5 mm en las medidas ya que en la etapa del doblado y enderezado, el alambre tiene un poco de modificación en su tamaño.
3. En esta etapa es indispensable que la superficie en la que se va a enderezar el alambre sea completamente plana, para que el material no quede con deformaciones locales (lo cual afectaría nuestras mediciones, ya que estaríamos introduciendo una protuberancia al sistema). Con esto aseguramos que nuestros aros (guías) tengan un ancho siempre constante. Una vez enderezado el aro, se compara la pieza con el dibujo hecho en la pieza de barro con el fin de saber cual es el excedente de alambre y el ángulo al cual se van a limar las puntas. Esto es importante ya que permite que nuestros aros tengan los ángulos especificados para cada caso.
4. Para soldar las piezas las colocamos sobre la loseta de barro y las sujetamos con *masking-tape*, para evitar que se muevan por el calentamiento o por movimientos involuntarios provocados en la loseta. Antes de cerrar por completo el aro se le coloca en los brazos un pedazo de serpentín, el cual va a permitir que podamos ajustar nuestro aro en todas sus longitudes. El diámetro del serpentín es tal que podemos introducir dos alambres magneto en él, según se muestra en la figura 4.2, que formarán la pared móvil. Una vez soldado el aro se procede con la lima a retirar cualquier residuo de soldadura. Por último se gradúan los aros, es decir, se hacen marcas sobre los brazos del aro con la misma lima. Nosotros usamos espaciamentos de un centímetro.

## 4.5. Resumen del capítulo.

En este capítulo, explicamos en detalle, el dispositivo experimental que se utiliza en este trabajo, sus características y ventajas a nivel docencia, sobre otros dispositivos que se utilizan en el estudio de modos localizados en guías de onda bidimensionales con dobleces tipo codos. Hicimos también una descripción detallada de los aros (que en este trabajo reproducen bastante bien, el comportamiento de una guía de onda bidimensional con dobleces), y sus parámetros característicos. La variación de estos parámetros nos permitirá mostrar algunas de las propiedades de los estados ligados, las cuales discutimos en el capítulo de resultados.



# Capítulo 5

## Los resultados

En este capítulo presentamos todos los resultados experimentales que obtuvimos sobre estados ligados en guías de onda bidimensionales con dobleces. Presentaremos el cálculo de la velocidad de propagación de las ondas en las membranas jabonosas, a partir de los datos experimentales que se tienen para la geometría “L”, en el límite de su ángulo de doblez  $\theta = 0^\circ$  (el rectángulo). Presentaremos también, gráficas de las frecuencias a las cuales se establece el primer estado ligado en cada geometría como función de la longitud de sus brazos y para los distintos ángulos de doblez. También presentamos fotografías que muestran el primer estado ligado en las diferentes guías de onda bidimensionales que estudiamos.

### 5.1. Velocidad de propagación de las ondas en las membranas jabonosas.

En esta sección, describimos el proceso de la determinación experimental de la velocidad de propagación en el medio: nuestra película de jabón. Para esto, usamos el caso límite de la geometría de tipo “L” descrita anteriormente. Ésta corresponde al caso de ángulo  $\theta = 0^\circ$ . Esta geometría corresponde exactamente a la geometría de un rectángulo de ancho  $a$  (el cual está fijo 5 cm.), y de largo  $b$  el cuál iremos variando según sea el caso. Debido a que el rectángulo es la geometría más sencilla que tiene solución analítica exacta, la usamos para estimar el valor de la velocidad de las ondas en la membrana jabonosa.

Para este fin consideramos las ecuaciones del capítulo 3. Como primer

paso mediremos la frecuencia, a la cuál se establece el primer modo de vibración en el rectángulo, como función de la longitud “b” de los brazos (de 6,4 cm. a 18,4 cm.). La tabla de frecuencias se presenta en el apéndice. De la teoría desarrollada en el capítulo 3, sabemos que la velocidad de propagación en el medio, en términos de la frecuencia esta dada por,

$$v = \lambda \nu, \quad (5.1)$$

con  $\lambda = 2\pi/k$ , la longitud de la onda asociada a una membrana bidimensional y donde el número de onda  $k$  satisface,

$$k^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad (5.2)$$

recordando que  $n, m$  son enteros positivos. Despejando  $v$  de la Ec. (5.1) y reemplazando  $\lambda$  en términos del número de onda  $k$  según la ecuación 5.2 tenemos que,

$$\nu^2 = \frac{v^2}{4\pi^2} \left( \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \right). \quad (5.3)$$

Como estamos considerando únicamente el primer modo del rectángulo tenemos que  $n, m = 1$ . Así, la ecuación anterior se reduce a,

$$\nu^2 = \frac{v^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \quad (5.4)$$

Esta última ecuación establece la dependencia entre la frecuencia  $\nu$  y el largo  $b$  de nuestro aro rectangular. Las dimensiones del aro rectangular que usamos en el experimento tiene un ancho fijo  $a = 5$  cm y su longitud  $b$  varia desde 6,4 cm hasta 18,4 cm a intervalos de 2 cm. Se registró la frecuencia a la cual se establece el primer modo normal de dicha membrana para cada longitud  $b$  antes mencionada. En el apéndice mostramos la tabla de datos correspondiente. Asimismo, se presentan los cálculos detallados, usando el método de ajuste por mínimos cuadrados, entre las variables  $X_i = 1/b^2$  y  $Y_i = \nu^2$  respectivamente. Por el momento solo daremos el resultado final, que nos proporciona el método para la velocidad de propagación de la onda en nuestras membranas jabonosas, el cuál fue de  $v = 77,14$  cm/s.

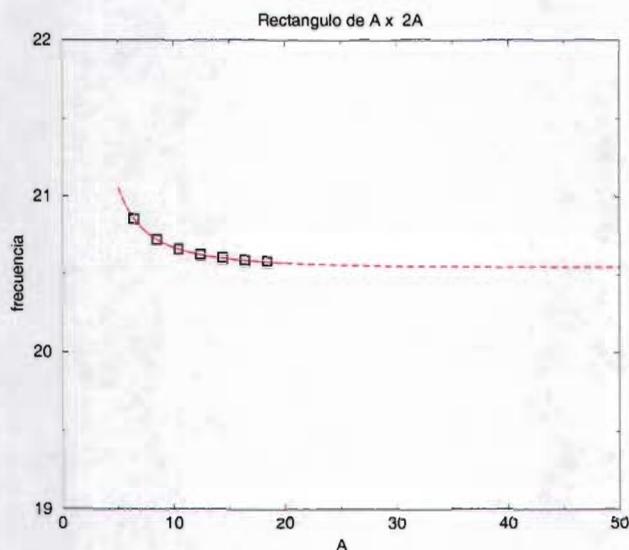


Figura 5.1: Gráfica experimental y teórica, para el primer modo normal ( $n=1, m=1$ ), para el rectángulo.

## 5.2. Discusion de resultados.

### 5.2.1. El rectángulo.

Como vimos en el capítulo anterior, la geometría tipo “L”, en el caso límite para  $\theta = 0^\circ$ , nos da la oportunidad, de poder comprobar que el procedimiento experimental, que estamos llevando a cabo es el correcto. En este caso particular, es posible comparar los datos experimentales que obtuvimos, contra las fórmulas teóricas que se obtuvieron en el capítulo 3. En la figura 5.1, se muestra la gráfica de la frecuencia del primer modo normal del rectángulo como función de la longitud de sus brazos ( $b$ ). Podemos observar que los datos experimentales (símbolos cuadros), coinciden plenamente con los datos proporcionados por la teoría (línea discontinua). Esto confirma entonces que el procedimiento experimental que seguimos en este trabajo es adecuado pues podemos reproducir resultados conocidos y además nos permitió determinar la velocidad de las ondas en el medio (película de jabón).

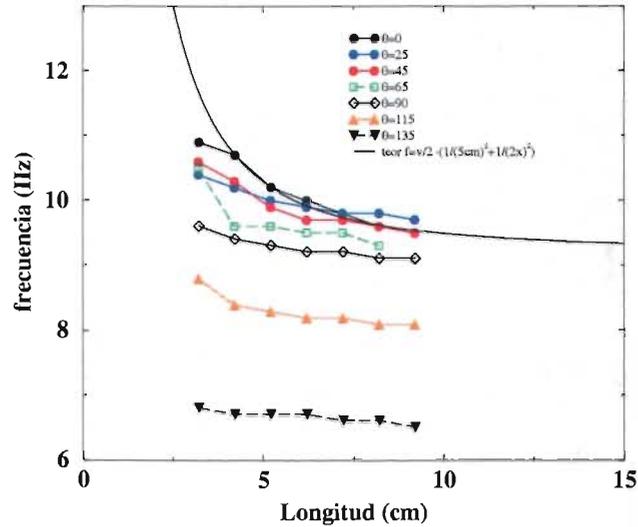


Figura 5.2: Gráfica de la frecuencia contra longitud de la geometría tipo “L” para cinco distintos ángulos  $\theta$ .

### 5.2.2. Estados localizados en la geometría “L”.

Como vimos en la teoría, una de las características principales de los estados ligados o localizados, es que aparecen a frecuencias inferiores a la frecuencia de corte (frecuencias asociadas a modos transversales propagantes), para la guía de onda sin doblar, es decir, tales estados ligados surgen antes de que la guía de onda comience a transmitir.

En la figura 5.2 podemos observar la frecuencia a la que aparece el primer estado localizado como función del tamaño de los brazos de la guía. En ésta gráfica las diversas curvas corresponden a cada uno de los ángulos de doblez de la guía en forma de “L”. También se incluye la gráfica, que corresponde al ángulo  $\theta = 0^\circ$  (el rectángulo), la cuál tomamos como referencia, ya que ésta corresponde a la frecuencia de corte de la guía asociada al primer modo de propagación. Como podemos observar todas las curvas, para los distintos ángulos de doblez, están por debajo de la curva para el caso en que  $\theta = 0^\circ$ , tal como esperábamos según nuestro razonamiento anterior. Debemos notar que, a partir de cierta longitud (7,5 cm), el comportamiento de todas las curvas se vuelve constante, es decir, es independiente de la longitud de los brazos (aún si los brazos de la guía fueran mucho más largos, acercándose

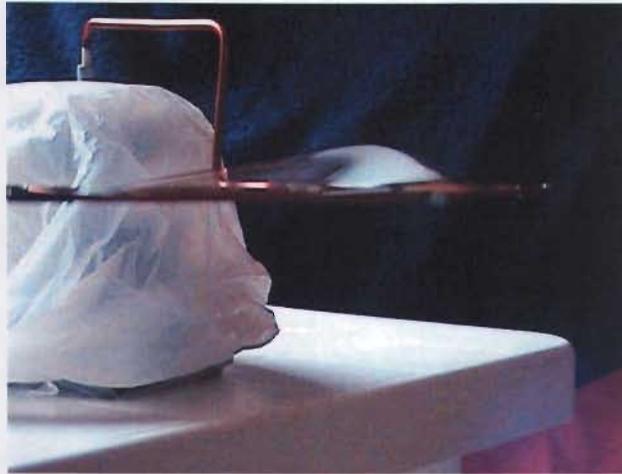


Figura 5.3: Primer estado ligado, para la geometría tipo “L.” a un ángulo de doblez de  $\theta = 45^\circ$

a una guía de onda ideal). Esto nos indica que el estado vibrante que observamos se encuentra “atrapado” localizado en una zona (la cual corresponde a la vecindad del doblez, como veremos más adelante). Finalmente debemos notar también que dichas curvas tienden a una constante la cual se acerca asintóticamente a la frecuencia de corte conforme el ángulo  $\theta$  crece. Por todo lo anterior, podemos afirmar que el modo que estamos observando a estas frecuencias, en la película de jabón, corresponde al primer estado localizado de la guía en forma de “L”. Como mencionamos en el capítulo 4, en este trabajo obtuvimos también imágenes fotográficas del primer estado ligado, para cada una de las geometrías, para todas las longitudes de sus brazos, y para cada ángulo de estudio. En cada una de las siguientes secciones presentaremos algunas de estas fotografías.

En la figura 5.3, presentamos la fotografía para la geometría tipo “L”, cuando la longitud de sus brazos es de 9,5 cm, en este caso el ángulo de doblez es de  $\theta = 45^\circ$ , la frecuencia a la que aparece el primer estado ligado, en este caso es de 9,5 Hz. En esta imagen podemos apreciar claramente, como la amplitud de vibración está localizada alrededor de la vecindad del doblez.

En la figura 5.4, se presenta la fotografía, para la geometría tipo “L”, cuando la longitud de cada uno de sus brazos es de 10,5 cm y el ángulo



Figura 5.4: Primer estado ligado, para la geometría tipo “L.” un ángulo de doblado de  $\theta = 65^\circ$

de doblado es  $\theta = 65^\circ$ , la frecuencia a la que se presenta el primer estado ligado, en este caso es de 9,3 Hz. En esta fotografía el modo vibrante, está por debajo del plano del aro, lo cual nos permite, resaltar de manera muy clara que el estado localizado se encuentra nuevamente alrededor del doblado de la geometría.

La figura 5.5 muestra la geometría tipo “L”, cuando la longitud de cada uno de sus brazos es de 10,5 cm. Para este caso el ángulo de doblado es  $\theta = 115^\circ$  y la frecuencia a la que se observa el primer estado ligado es de 8,3 Hz.

Como podemos observar estas fotografías corresponden a la longitud de brazos donde sabemos, las curvas tienden a tener un comportamiento constante. En las fotografías también podemos observar que en esta geometría tipo “L” el patrón estacionario está localizado alrededor del área del doblado, es decir, su presencia no depende de la longitud de los brazos del aro. Estos dos resultados ilustran dos de las características más importantes de los estados ligados (según la literatura que revisamos en el capítulo 2), en guías de onda bidimensionales con dobleces tipo codos, por lo que podemos afirmar, que el modo vibrante que estamos observando, es precisamente un estado ligado en esta geometría.



Figura 5.5: Primer estado ligado, para la geometría tipo “L.” un ángulo de doblez de  $\theta = 115^\circ$

### 5.2.3. Estados localizados en la geometría “Y”.

Igual que para el caso de la geometría tipo “L”, que presentamos en la sección anterior, tenemos que para la geometría tipo “Y”, también hay una gráfica de la frecuencia experimental a la que detectamos el primer estado ligado de esta geometría como función de la longitud de los brazos de este aro, para cada uno de los ángulos de estudio. Debemos comentar que, en este caso, no contamos con una gráfica de referencia como el caso límite del rectángulo. Nuevamente podemos observar en la figura 5.6, el comportamiento constante de las distintas curvas a partir de la longitud de 6 cm de los brazos del aro. Incluso este comportamiento es más marcado que para la geometría tipo “L”.

En la figura 5.7, se muestra la imagen para la geometría tipo “Y”, cuando la longitud de cada uno de sus brazos es de 4,5 cm, en este caso el ángulo de doblez es  $\theta = 45^\circ$ , la frecuencia a la que se presenta el primer modo vibrante, en este caso es de 4,580 Hz. En esta fotografía se puede observar también que el patrón se encuentra alrededor de la zona de convergencia de los tres brazos del aro.

En la figura 5.8, se muestra la fotografía, para la geometría tipo “Y-griega, cuando la longitud de cada uno de los brazos es de 9,5 cm, en este caso el ángulo de doblez es de  $\theta = 45^\circ$ , la frecuencia a la que se presenta

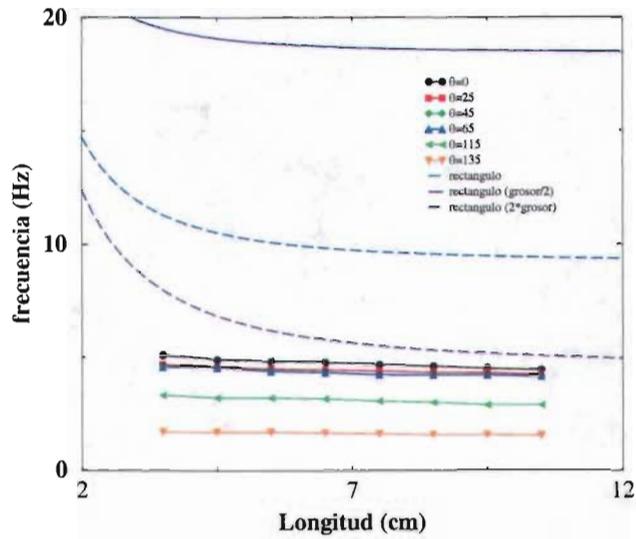


Figura 5.6: Gráfica frecuencia contra longitud de la geometría tipo “Y”, para cuatro distintos ángulos  $\theta$ .



Figura 5.7: Primer estado ligado, para la geometría tipo “Y”, a un ángulo de dobléz de  $\theta = 45^\circ$



Figura 5.8: Primer estado ligado, para una geometría tipo “Y”, a un ángulo de doblez de  $\theta = 45^\circ$ , con una longitud de brazos de 9,5 cm

el primer modo vibrante, en este caso es de 4,251 Hz. Al igual que en la fotografía anterior, aquí también se puede observar de manera clara, que el modo vibrante, se encuentra ubicado en las vecindad del doblez de la geometría.

En la figura 5.9, se muestra la fotografía, para la geometría tipo “Y”, cuando la longitud de cada uno de sus brazos es de 10,5 cm, en este caso el ángulo de doblez es de  $\theta = 135^\circ$ , la frecuencia a la que se presenta el primer modo vibrante, es de 1,593 Hz. Nuevamente el estado está localizado.

De las fotografías anteriores podemos observar, que el modo vibrante se encuentra localizado alrededor del doblez, independientemente de la longitud de los brazos del aro. Además que las frecuencias para el modo vibrante, no se distinguen considerablemente, a pesar de que los ángulos de doblez sí variaron de manera considerable. Como en el caso de la geometría tipo “L”, la imagen corresponde a un estado localizado en nuestra geometría.

#### 5.2.4. Resultados de la geometría “X”.

En la figura 5.10 tenemos la correspondiente gráfica de la frecuencia como función de la longitud de los brazos del aro para la geometría “X”. En ella las distintas curvas corresponden a los distintos ángulos considerados en el

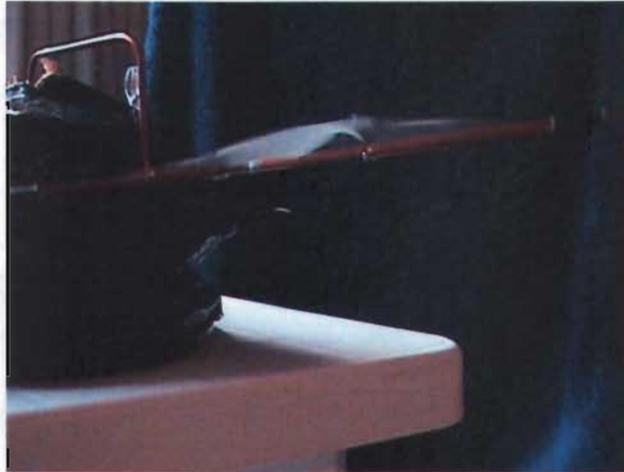


Figura 5.9: Primer estado ligado, para una geometría tipo “Y”, a un ángulo de doblez de  $\theta = 135^\circ$

estudio. Podemos apreciar, que a partir de la longitud de los brazos de 7 cm, otra vez tenemos el comportamiento constante. A medida que el ángulo de doblez crece, las frecuencias asociadas al estado ligado se van acercando entre sí.

En la figura 5.11, se muestra la geometría tipo “X”, para la longitud de sus brazos de 4,5 cm. El ángulo de doblez es de  $\theta = 0^\circ$ . La frecuencia a la que se presenta el primer estado ligado es de 1,782 Hz. En este caso el modo vibrante, se encuentra localizado en la región de intersección de los brazos.

En la figura 5.12, se observa la guía en forma de “X”, cuya longitud de sus brazos es de 8,5 cm. El ángulo de doblez es de  $\theta = 0^\circ$ , la frecuencia a la que se presenta el primer estado ligado es de 1,592 Hz. Nuevamente se observa un patrón localizado.

De las fotografías anteriores podemos observar, que el modo vibrante se encuentra localizado alrededor del doblez, y que no depende de la longitud de los brazos del aro. Además que las frecuencias para el modo vibrante, no se diferencian considerablemente, a pesar de que los parámetros en el aro sí fueron modificados. Por lo que como en el caso de la geometría tipo “Lz” la geometría tipo “Y”, aquí también el patrón observado, corresponde a un estado localizado en nuestra geometría.

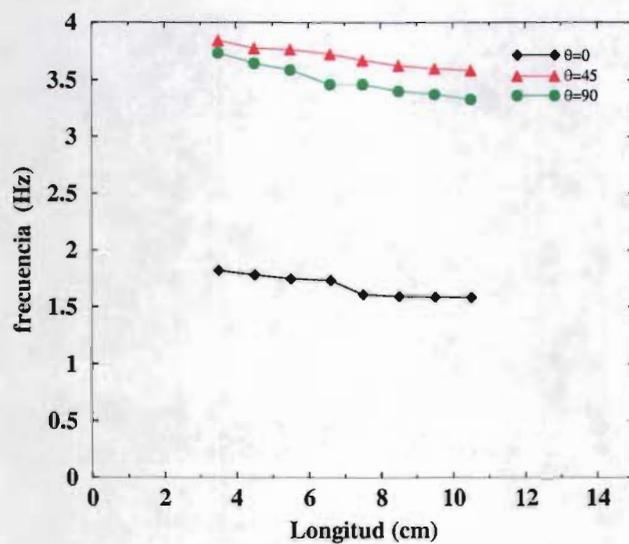


Figura 5.10: Gráfica de la frecuencia contra longitud de los brazos para el aro "X" para tres ángulos distintos.



Figura 5.11: Primer estado ligado, para una geometría tipo "X", a un ángulo de doblado de  $\theta = 0^\circ$

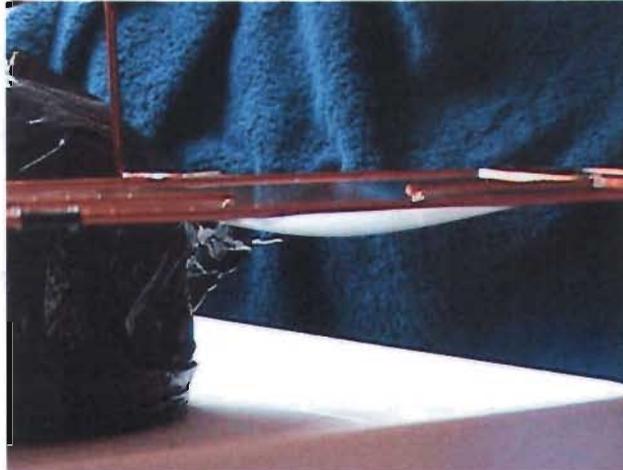


Figura 5.12: Primer estado ligado, para una geometría tipo “X”, a una ángulo de doblez  $\theta = 0^\circ$ , con una longitud de brazos de 8,5 cm

### 5.3. Resumen del capítulo.

En este capítulo se hizo el cálculo de la velocidad de propagación, en las películas de jabón, haciendo uso de los datos experimentales que obtuvimos para el caso límite de la geometría tipo “L”. También en este capítulo hicimos la **presentación**, de todos los resultados experimentales que encontramos en **este trabajo**, para **estados ligados**, en guías de onda bidimensionales con dobleces. Estos muestran de manera indiscutible que, en nuestro dispositivo experimental, con nuestras geometrías, hemos podido observar estados ligados que es uno de los objetivos principales de este trabajo.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo hemos utilizado un dispositivo experimental, que ha probado su gran eficiencia para estudiar y mostrar, de manera didáctica y muy sencilla temas de frontera y de gran importancia en las ciencias físicas con aplicación a la ingeniería y el uso de nuevas tecnologías. En el caso particular de este trabajo, nos permite observar directamente la existencia de estados ligados (atrapados) en guías de onda bidimensionales con dobleces tipo codos. La existencia de tales estados tiene importantes consecuencias en el comportamiento de las guías de onda tradicionales y sus aplicaciones en áreas tales como teoría cuántica, radiofísica, electrodinámica y acústica por mencionar sólo algunas. Basados en los resultados presentados en el capítulo de resultados, podemos decir que el procedimiento experimental seguido en este trabajo, a través del uso del dispositivo experimental propuesto, que es posible observar directamente los estados ligados, que se generan en guías de onda bidimensionales con dobleces tipo codos. Esto es una gran ventaja sobre otros métodos más costosos y sofisticados que ya fueron discutidos en el capítulo 2. Estos patrones de estados ligados pudieron ser fotografiados para poder identificar a simple vista las características principales de un estado ligado (decaimiento exponencial, localización e independencia del tiempo).

Por otro lado, podemos afirmar que el experimento, resultó muy accesible, ya que los estados ligados pudieron ser observados muy fácilmente, aún para longitudes cortas de los brazos de cada una de las geometrías que utilizamos. Sin tener por esto pérdida de información en la visualización de los estados ligados. Las posibilidades que nos ofrece el uso del dispositivo experimental que aquí se presentó, van más allá de los resultados que aquí se reportan, ya que debemos mencionar que es posible observar más estados ligados que

el primero en cada guía de las geometrías que aquí hemos estudiado, sin embargo tales resultados son, por sí mismos, objeto de trabajos posteriores e independientes.

# Apéndice A

## Cálculo de la velocidad de propagación de las ondas en la membrana jabonosa

En este apéndice detallamos el procedimiento para evaluar velocidad de propagación de las ondas en la membrana jabonosa. Esto se hace a través del método de ajuste de una línea recta a un conjunto de datos por mínimos cuadrados. Para ello, partimos de la siguiente tabla de datos experimentales longitud  $b$  contra frecuencia  $\nu$  explicada en la sección 3:

$b$ (cm)	$\nu$ (Hz)
6,400	10,900
8,400	10,700
10,400	10,200
12,400	10,000
14,400	9,800
16,400	9,600
18,400	9,500

La relación teórica entre la frecuencia  $\nu$  y la longitud  $b$  de nuestro aro, para establecer el primer modo normal, está dada por la ecuación 3.30 para

$n, m = 1$  y es la siguiente:

$$\nu^2 = \frac{v^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

Donde podemos renombrar variables haciendo  $Y = \nu^2$  y  $X = 1/b^2$  para establecer una relación lineal entre las nuevas variables,

$$Y = \frac{v^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + X \right). \quad (\text{A.2})$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación de una recta en el plano  $X - Y$  dada por  $Y = mX + d$ , podemos identificar a la pendiente  $m$  con la velocidad de la onda  $v$  como  $m = v^2/4$  y a la correspondiente ordenada al origen  $d$  con  $d = v^2/4a^2$ .

Podemos ahora, obtener directamente la velocidad de propagación en el medio aplicando las fórmulas para la pendiente y la ordenada al origen derivadas del método de mínimos cuadrados:

$$m = \frac{N \sum_i X_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i Y_i}{N \sum_i X_i^2 - (\sum_i X_i)^2} \quad (\text{A.3})$$

y

$$d = \frac{\sum_i X_i^2 \sum_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i (X_i Y_i)}{N \sum_i X_i^2 - (\sum_i X_i)^2}. \quad (\text{A.4})$$

Ahora que hemos identificado a  $X_i, Y_i$  con las variables físicas correspondientes y que sabemos todas las cantidades que debemos obtener a partir de ellas, podemos usar la siguiente tabla de datos que nos ayuda a evaluar la pendiente  $m$  y su respectiva ordenada al origen  $d$ .

$b^{-2}(cm^{-2})$	$\nu^2(Hz^2)$	$\nu^2 b^{-2}(Hz^2)(cm^{-2})$	$b^{-4}(cm^{-4})$
0.0244	118.810	2.8989	0.000595
0.0142	114.490	1.6257	0.000202
0.0092	104.040	0.9572	0.000085
0.0065	100	0.6500	0.000042
0.0048	96.040	0.4610	0.000023
0.0037	92.160	0.3410	0.000014
0.0029	90.250	0.2617	0.000008

En la tabla anterior observamos los valores de  $\Sigma_i Y_i = 715,79(Hz^2)$  y el valor de  $\Sigma_i X_i = 0,065 \text{ cm}^2$  y el valor de  $\Sigma_i X_i, Y_i = 7,1955 \text{ Hz}^2 \text{ cm}^{-2}$  y el valor de  $\Sigma_i X_i^2 = 0,000969 \text{ cm}^{-4}$ . Sustituyendo estos valores en las ecuaciones para la pendiente y la ordenada al origen tenemos que:

$$m = \frac{7(7,1955) - 0,065(715,79)}{7(0,000969) - (0,0042)} = \frac{3,8422}{0,002583} = 1354,75 \pm 199,2 \left( \frac{\text{Hz}^2}{\text{cm}^{-2}} \right). \quad (\text{A.5})$$

y

$$c = \frac{(0,000969)(715,79) - 0,065(7,1955)}{7(0,000969) - (0,0042)} = \frac{0,2259}{0,002583} = 89,54 \pm 2,344(\text{Hz}^2). \quad (\text{A.6})$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación (A.1) tenemos que la velocidad de propagación tiene un valor de

$$v = \sqrt{4(1354,75 \pm 199,2)(\text{Hz}^2)(\text{cm}^{-2})} = 73,614 \pm 5,4120(\text{cm/s}). \quad (\text{A.7})$$



# Bibliografía

- [1] Alonso, Finn. “VII Campos y ondas”, Addison-wesley iberoamericana, 1985.
- [2] P. Exner and P. Seba, J. Math. Phys. **30**, 2574 (1989).
- [3] P. Exner, Phys. Lett. A **141**, 213 (1989).
- [4] F. Ursell, Proc. R. Soc. Lond, Ser. A **47**, 79 (1952).
- [5] J.Goldstone and R.L.Jaffe, Phys. Rev.B **45**, 14100 (1992).
- [6] R. L. Schult, D. G. Ravenhall y H. W. Wyld, Phys. Rev. B, **39** (1989).
- [7] Y.Avishai, D. Bessis, B. G. Giraud y G. Mantica, Phys. Rev. B **44**, 8028 (1991).
- [8] J.Carini, J.T.Londergan, Kieran Mullen, and D.P. Murdock, Phys.Rev. B **46**, 15538 (1992).
- [9] J. Carini, J.T.Londergan, Kieran Mullen, and D.P. Murdock, Phys. Rev. B **48**, 4503 (1993).
- [10] J. P. Carini, J.T.Londergan and D.P. Murdock, Phys. Rev. B **55**, 9842 (1997).
- [11] C.-K. Wang, K.-F. Berggren y Z.-L. Ji, J. Appl. Phys. **77**, 2564 (1995).
- [12] C.-K. Wang, Semicond. Sci. Technol. **10**, 1131 (1995).
- [13] Attila Mekis, Shanhui Fan, y J.D. Joannopoulos, Phys. Rev. B **58**, 4809 (1998).

- [14] Evgeny N. Bulgakov, Pavel Exner, konstantin N. Pichugin y Almas F. Sadreev, *Phys. Rev. B*, **66**, 155109 (2002).
- [15] Alonso, Finn. "VI Mécanica", Fondo educativo interamericano, 1970.
- [16] Pedro Cuatlayol Anrubio "Modos normales en membranas usando películas de jabón". Tesis de licenciatura, Facultad ciencias UNAM, Noviembre 1996.
- [17] Isenberg, C. "The Science off Soap Films and Soap Bubbles" Dover Pub. 1978
- [18] Walker, J. "Music and Ammonia Vapor Excite The Color Pattern of a Soap Film", *Sci. Am.* 236(8),92-95(1987).
- [19] E,Arcos, G.Baez, P.A.Cuatlayol, M,L,M.Prian, R.A.Mendez-Sanchez y H.Hernandez-Saldaña. *Am.Jour.Phys*, 66(7), 1998.