

01180



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

Facultad de Ingeniería

**Colapso de Burbujas de Vapor Por
Efectos Térmicos**

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

**Doctor en Ingeniería
(mecánica)**

Presenta:

Jorge Luis Naude de la Llave

Dirección de Tesis:

**Dr. Federico Méndez Lavielle
UNAM**



08/2005

11347525



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mi esposa Patricia Ochoa

A mi madre María Magdalena de la LLave

A mi Padre Jorge Naude

A mis hermanos Migue y Ma. Emilia

A mi tía Socorro, sus hijos y nietos

A mi Granthi Nij Ghar Sinkh

A mis tíos y primos De la Llave Ruisánchez

A mi prima Chelsy

A mi nana Julia

A mis tíos y primos Gutiérrez de la Llave

A mi tío Hugo y familia

A mis discipulos

Agradecimientos

Al Departamento de Termoenergía por la vastedad de recursos que me permitieron concluir este trabajo

A la DEP de la UNAM por apoyarme con la beca.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Jorge Luis Navarrete

FECHA: 31 de agosto del 2005

FIRMA: [Firma]

Resumen

En el presente trabajo, se plantea el modelo de colapso para una burbuja de vapor por efectos térmicos. Se plantean las ecuaciones completas para la fase de vapor y para la fase líquida, obteniéndose los parámetros que gobiernan el fenómeno a través del análisis por órdenes de magnitud, distinguiéndose los parámetros adimensionales J_a y β ; β mide la competencia entre el tiempo inercial y el tiempo térmico y J_a representa el número de Jakob del problema. Cuando $\beta \ll 1$ el colapso de la burbuja es controlado por los tiempos térmicos característicos y en el límite del número de Jakob muy grande, i. e. $J_a \gg 1$, el calor que la burbuja disipa ocurre a través de una capa límite térmica. Existen otros parámetros como α que representa el cociente de densidades, que combinado con β , al límite $\alpha\beta^2 \ll 1$, permiten como una primera aproximación despreciar los efectos internos de la burbuja, en temperatura, velocidad y presión, esclareciendo así los límites de validez del colapso de la burbuja por efectos térmicos. Una motivación adicional es que en la literatura experimental referente al colapso de burbujas siempre se menciona la falta de modelos teóricos con los cuales comparar los resultados experimentales. Finalmente las ecuaciones gobernantes adimensionalizadas que modelan el problema térmico se resolvieron mediante diferencias finitas para varios valores de los parámetros antes mencionados, estimando con ello la temperatura adimensional θ contra la posición ζ , y el radio adimensional a contra el tiempo τ .

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	6
2. ECUACIONES GENERALES, PARAMETRIZACIÓN Y ADIMENSIONALIZACIÓN	12
2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
2.2. ORDEN DE MAGNITUD	19
2.3. ECUACIONES GENERALES ADIMENSIONALIZADAS	22
2.4. ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS	26
2.5. LÍMITE TÉRMICO	29
2.6. REESCALAMIENTO DEL PROBLEMA	30
3. SOLUCION NUMÉRICA	35
3.1. DIFERENCIAS FINITAS	35
3.2. SOLUCIÓN POR SEMEJANZA DEL ORDEN CERO	38
4. RESULTADOS	42
5. CONCLUSIONES	67

NOMENCLATURA

a	radio de la burbuja adimensional,	$\frac{R}{R_0}$
C_p	calor específico a presión constante	$\frac{J}{kgK}$
h_{fg}	entalpía de vaporización	$\frac{J}{kgK}$
h	intervalo espacial	
i	contador espacial,	$0, 1, 2, \dots$
Ja	número de Jakob,	$\frac{\rho C_p \Delta T}{\rho_v h_{fg}}$
La	número de Laplace,	$\frac{R_0 \Delta p}{\sigma}$
n	contador temporal,	$-1, 0, 1, \dots$
p	presión adimensional,	$\frac{\bar{p} - P_{v,0}}{P_\infty - P_{v,0}}$
\bar{p}	presión dimensional	
Δp	diferencia de presión,	$P_\infty - P_{v,0} \frac{N}{m^2}$
$P_{v,0}$	presión inicial en el líquido no perturbado	$\frac{N}{m^2}$
P_∞	presión a la que se incrementa el líquido	$\frac{N}{m^2}$
Pr	número de Prandtl,	$\frac{\nu}{\alpha}$
r	coordenada radial	m
R	radio de la burbuja	m
t	tiempo dimensional	s
Δt	intervalo en el tiempo	s
T	temperatura dimensional	K
T_∞	temperatura en el líquido no perturbado	K
T_s	temperatura de saturación	K
ΔT	incremento de temperatura,	$T_s - T_\infty \quad K$
u	velocidad adimensional en el líquido	
\hat{u}	variable espacio tiempo,	$3a\zeta^2$
U	velocidad en el líquido	$\frac{m}{s}$
v	velocidad adimensional en el vapor	
V	velocidad en el vapor	$\frac{m}{s}$
\hat{v}	variable temporal	
x	coordenada adimensional para la región del vapor,	$\frac{r}{R_0}$

Letras griegas

α	parámetro adimensional,	$\frac{\bar{\rho}_{v,0}}{\bar{\rho}_l}$
$\bar{\alpha}$	difusividad térmica,	$\frac{\lambda}{\bar{\rho}C_p}$
α_0	parámetro adimensional,	$P_\infty/P_{v,0} - 1$
β	parámetro adimensional,	$\frac{Ja^2}{\left(R_0^2 \frac{\Delta p_v}{\bar{\rho}_l \bar{\alpha}^2}\right)^{1/2}} = \frac{\tau_I}{\tau_H}$
β_{00}	parámetro adimensional,	$T_s/T_\infty - 1$
$\bar{\beta}$	parámetro adimensional,	$\frac{C_p T_\infty}{h_{fg}}$
$\bar{\gamma}$	parámetro adimensional,	$\frac{\Delta p}{\bar{\rho} h_{fg}}$
δ_T	espesor de la la capa límite térmica,	$\frac{R_0}{Ja} \quad m$
ϵ	inverso del Jakob,	$1/Ja$
ε	relación de difusividades térmicas,	$\frac{\bar{\alpha}_v}{\bar{\alpha} Ja^2}$
$\bar{\varepsilon}$	parámetro adimensional,	$\alpha \rho Ja$
ζ	coordenada espacial,	ηJa
η	coordenada espacial adimensionalizada,	$\frac{\tau - R}{R_0}$
θ	Temperatura adimensional,	$\frac{T - T_\infty}{\Delta T}$
λ	conductividad térmica	$\frac{W}{mK}$
μ	viscosidad dinámica	$Pa \cdot s$
ν	viscosidad cinemática	$\frac{m^2}{s}$
ξ	variable de semejanza,	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{\pi(1-\hat{v})}}$
ρ	densidad adimensional,	$\frac{P_\infty T_\infty}{P_{v,0} T_s}$
ρ_v	densidad del vapor adimensional	
$\bar{\rho}$	densidad dimensional	$\frac{kg}{m^3}$
σ	coeficiente de tensión superficial	$\frac{N}{m^3}$
$\bar{\sigma}$	parámetro de proporcionalidad,	$\frac{1}{2} - \frac{1}{12r}$
τ	tiempo adimensional,	$\frac{t \bar{\alpha} Ja^2}{R_0^2}$
τ_I	tiempo característico inercial	
τ_H	tiempo característico térmico	
$\tau_{v,in}$	tiempo característico en el vapor	
τ_{cI}	tiempo de colapso inercial	

Superíndices

m exponente de compatibilidad

Subíndices

0 inicial

l fase líquida

v fase vapor

nu radio adimensional nuevo

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La dinámica de burbujas de vapor condensable y gas es un área de interés para el estudio de diversos fenómenos en la investigación básica y en aplicaciones de ingeniería; es decir, en la operación, diseño y construcción de equipos de uso común, como condensadores, calderas, cambiadores de calor, etc.

Los libros de Van Stralen [1], Nigmatullin [2], Brennen [3], Leighton [4] y Nakoryakov [5], ofrecen abundante información y aplicaciones relacionadas con la dinámica de burbujas. Dentro del estudio de los fenómenos de la dinámica de burbujas se encuentran la oscilación libre y forzada de burbujas, la cavitación inercial y térmica, la sonoluminiscencia, la propagación de ondas en líquidos con burbujas y la ebullición subenfriada Mayinger y Chen [6], entre otras.

El trabajo de Prosperetti y Plesset [7], es una revisión crítica de las líneas de estudio más importantes de la dinámica de burbujas; en este compendio se exponen varios de los puntos de vista con los que suele estudiarse la dinámica de burbujas, su crecimiento y colapso. A estos fenómenos de acuerdo al mecanismo límite que los origina se les distingue como el modo inercial y el térmico. El límite inercial es aquel en que los efectos responsables de hacer crecer o colapsar las burbujas, son únicamente mecánicos, tales como las fuerzas de presión, tensión superficial, esfuerzos viscosos, cinéticas, etc. En el modo térmico los efectos responsables de hacer crecer o colapsar a las burbujas, una vez que el equilibrio mecánico se ha alcanzado, pueden ser la conducción, convección de calor y el cambio de fase, entre otras.

Uno de los primeros trabajos en el que se estudia el modo inercial es el de Lord Rayleigh [8], donde se plantea una ecuación diferencial ordinaria que describe la evolución del radio de

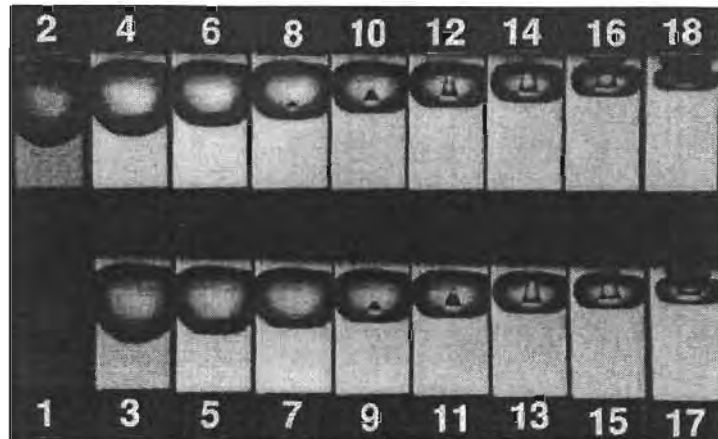


Figura 1-1: Colapso de una burbuja de vapor tomado de C. Brennen [3]

una cavidad hueca, llamada ecuación de Rayleigh. Las modificaciones que se han hecho a esta ecuación incluyen efectos de tensión superficial, efectos viscosos y el modelado de la presión dentro de la burbuja, que puede ser producido por la compresión de un gas ideal, obteniéndose la ecuación de Rayleigh-Plesset.

Otra modificación importante a la ecuación de Rayleigh es la forma de la presión externa, o forzante de la burbuja, que puede ser oscilatoria o pulsante y que también ha originado una serie de variantes a la ecuación de Rayleigh-Plesset, como se puede apreciar detalladamente en la obra de Leighton [4].

Las aplicaciones del modo inercial son numerosas, destacan principalmente la cavitación de burbujas en turbomáquinas; flujo de burbujas en estrangulamiento, sonoluminiscencia, aplicaciones médicas con ultrasonido, detonación de explosivos con ondas de presión y más recientemente en el desarrollo de una bomba para sangre sin piezas mecánicas entre muchas otras, como se menciona en las obras de Brennen [3], Leighton [4] y Nakoryakov [5].

El modo térmico se estudió por primera vez en el trabajo experimental de Bosnjankovic [9], donde una burbuja esférica se desplaza y crece al momento de ascender en un líquido caliente. Una de las hipótesis notables del trabajo anterior [9], es que el calor se transmite a través delgada capa límite que rodea a la burbuja y otra es que la entalpía de condensación proviene de un sobrecalentamiento externo desde el líquido.

La figura 1-1 muestra el colapso de una burbuja, filmada con una película de alta velocidad.

Otro trabajo de importancia central es el de Jakob [10] quién observó el crecimiento de las burbujas con una película de alta velocidad, de manera similar al caso mostrado en la fig. 1-1, en la que se puede medir el diámetro de la burbuja en cada instante. Estas mediciones estuvieron de acuerdo con las predicciones realizadas por Bosnjankovic [9]. En el ámbito teórico se tienen dos trabajos clásicos que han sido fundamentales en el estudio de la dinámica de burbujas, el de Foster y Zuber [11] y Plesset y Zwick [12]. En el primero se obtiene una ecuación integro-diferencial para predecir el perfil de temperaturas alrededor de la burbuja despreciando la curvatura de la burbuja y posteriormente, por medio de un balance de energía en la interfaz, obtener una expresión para la evolución del radio. Plesset y Zwick [12] encontraron una ecuación integro-diferencial sin despreciar la curvatura de la burbuja. El trabajo de Zwick [13] es un antecedente que indica la forma de obtener el perfil de temperaturas alrededor de una esfera inmóvil, al agregar movimiento a la esfera el perfil puede ser integrado y entonces integrar una ecuación para el radio como función del tiempo, de forma análoga al trabajo de Foster y Zuber

El primer trabajo en el que se describe el colapso por efectos térmicos es el de Levenspiel [14]. Este es un trabajo experimental, en el que se mide la evolución del radio con el tiempo con ayuda de una cámara rápida de 1000 cuadros por segundo. En este trabajo el interés primordial se centra en el cálculo del coeficiente de transferencia de calor como función del diámetro de la burbuja.

Para demostrar la hipótesis de Bosnjankovic, acerca de que el calor se transmite a través de una capa límite térmica delgada, en los trabajos de Birkhoff et al. [15] y Scriven [16], se menciona que esto ocurre siempre que el número de Jakob sea grande es decir:

$$J_a = \frac{\bar{\rho}_l C_p \Delta T}{\bar{\rho}_v h_{fg}} \gg 1$$

Esto también se menciona en los trabajos de Foster y Zuber [11] y Plesset y Zwick [12]. Es importante mencionar que el número de Jakob aparece por primera vez con ese nombre en el trabajo de Savic [17]. Físicamente el límite para el valor de Jakob $J_a \gg 1$, todo el calor sensible se utiliza en calentar a la burbuja y a una pequeña región circundante, en el caso contrario $J_a \ll 1$, el calor sensible debe calentar volúmenes del líquido circundante mucho mayores que el volumen de la burbuja, siendo éste último caso para la condensación muy difícil de lograr en

la realidad.

Un fenómeno asociado con el crecimiento y colapso de burbujas, es la ebullición subenfriada, donde una burbuja que se forma pegada a una pared o una boquilla, crece hasta despegarse y ascender a lo largo del líquido. La burbuja puede detenerse o moverse muy lentamente en una zona de líquido frío y colapsarse por efecto del subenfriamiento del líquido. Este fenómeno de crecimiento y colapso comenzó a ser tratado por Zuber [18] utilizando las teorías desarrolladas en las referencias [11] y [12], para comparar con los resultados experimentales. Entre los trabajos más recientes relativos a la ebullición subenfriada, se encuentran los de Mayinger [19] y Mayinger et. al. [6], [20] y [21] entre otros. Estos trabajos son experimentales y por medio de interferometría holográfica láser y película de alta velocidad, realizan mediciones indirectas en la interfaz de burbujas estacionarias y en movimiento para el fenómeno de ebullición subenfriada; en estos experimentos, con la misma técnica experimental mostrada en la fig. 1-1, miden la evolución del radio de la burbuja en el tiempo desde su formación, crecimiento y colapso. Para la parte del colapso, estos autores comparan sus mediciones con los modelos propuestos en [11] y [12]. La diferencia con Foster y Zuber [11] y Plesset y Zwick [12], es que la burbuja se encuentra anclada en una boquilla o en movimiento ascendente en el líquido. Sin embargo en estos trabajos [19], [6], [20] y [21] se menciona la necesidad de obtener mejores modelos teóricos con los cuales comparar sus resultados experimentales. Otros resultados de los autores anteriores es que para valores del $Ja = 60$ a 80 , el colapso es dominado por efectos inerciales, debido a que la transferencia de calor es tan rápida que el colapso puede llegar a ser instantáneo.

El trabajo de Florshuetz y Chao [22], es un trabajo teórico-experimental, donde se define el parámetro β como:

$$\beta = \frac{Ja^2}{\left(R_0^2 \frac{\Delta p_v}{\rho_l \alpha_l^2}\right)^{1/2}}$$

el cual se obtiene a partir de la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento y energía para una burbuja esférica. Este parámetro relaciona la competencia de los efectos térmicos con los inerciales. Cuando $\beta \ll 1$, se tiene el modo térmico de colapso (burbuja de vapor), cuando $\beta \gg 1$ se tiene el modo inercial de colapso (cavitación) y para valores de $\beta \sim 1$, ambos mecanismos compiten. El parámetro físicamente es la relación del tiempo característico de colapso inercial al tiempo característico de colapso térmico. En este mismo trabajo [22] se

obtiene una solución analítica del tiempo de colapso para el modo térmico a partir de la solución de Plesset y Zwick [12]; el problema que tiene es que el tiempo diverge cuando el radio tiende a cero y el colapso nunca se obtiene; a pesar de esto, se conoce ampliamente en muchos trabajos posteriores. Otro trabajo fundamental es el de Hsieh [23], donde se plantea el modelo completo de la dinámica de burbujas inmersas en un líquido que contiene otra sustancia tanto dentro como fuera de la burbuja.

Otras líneas de trabajo, tal como puede verse en Nakoryakov [5] y Nigmatullin [24], se han centrado en estudiar la influencia que el interior de la burbuja tiene sobre el colapso, así como la inclusión de una mezcla de vapor con un gas no condensable en el interior de la burbuja tal como puede verse específicamente en la ref. [24], donde también se utiliza el parámetro β . En este caso, se obtiene una solución numérica para las oscilaciones de una burbuja inmersa en un líquido subenfriado con $\beta \sim 1$. La motivación de este trabajo es el amortiguamiento de ondas de choque en tanques y condensadores mediante pantallas de burbujas.

Un trabajo de particular interés es el de A. D. Okhosimskii [25] quién estudia el fenómeno térmico para dos límites del número de Jakob: $Ja \rightarrow \infty$ y $Ja \rightarrow 0$. Para el primer caso obtiene la solución de Florshuetz [22] y una serie de soluciones numéricas que no contemplan que al final del colapso, el espesor de la capa límite térmica es del orden del radio de la burbuja, cambiando las hipótesis físicas del planteamiento original del problema. Esto produce que al final del colapso, con las teorías convencionales, la velocidad de la interfaz de la burbuja diverge, $\frac{dR}{dt} \rightarrow \infty$. Esto se confirma con el trabajo experimental de Pakleza et. al [26], quienes mediante la fotografía de alta velocidad pudieron por primera vez retratar los instantes finales del colapso, en donde se muestra esta divergencia. Esta divergencia como se cita en Mayinger et. al. [19], se debe a que los efectos inerciales dominan en este último instante, y que en un principio fueron descartados para el modo térmico. Para el segundo caso con $Ja \rightarrow 0$ la ecuación de interfaz se es igual a cero lo cual deja al fenómeno incompleto, teniéndose cuando más una burbuja estática que difunde calor.

El objetivo general del presente trabajo es plantear el modelo de colapso térmico, validando todas las suposiciones e hipótesis con las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en las fases vapor y líquido, con su correspondiente parametrización. Con esta parametrización se podrán indicar los límites del modelo, el escalamiento correcto de las ecuaciones y

predecir el comportamiento. Los parámetros principales son el J_a y β en los límites de $\beta \ll 1$ y $J_a \gg 1$; con estos valores es posible aplicar la teoría de la capa límite. Para comprobar el modelo se presenta la solución de las ecuaciones por el método de diferencias finitas, para los diferentes perfiles de temperatura y la evolución del radio en el tiempo. Aunque en el modelo matemático se desprecian los efectos inerciales y de compresibilidad que podrían suavizar el comportamiento divergente de la velocidad del radio, al final del colapso es posible ver este comportamiento divergente en la solución numérica. Lo anterior permite establecer que las soluciones numéricas obtenidas en el presente trabajo están en concordancia con las observaciones experimentales de Pakleza et. al [26].

Capítulo 2

ECUACIONES GENERALES, PARAMETRIZACIÓN Y ADIMENSIONALIZACIÓN

En la primera parte del capítulo se plantea el problema general para el colapso de una burbuja, mediante las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en ambas fases, junto con las ecuaciones para la interfaz de continuidad, cantidad de movimiento y energía. Además se plantean las hipótesis generales para el modo de colapso térmico. La finalidad de escribir las ecuaciones generales, es con el objeto de analizar término a término de las ecuaciones y poder justificar la hipótesis del modo térmico.

La forma de analizar las ecuaciones es mediante el análisis por órdenes de magnitud que se explica en la segunda parte del capítulo. Esta parte permite conocer la importancia relativa que tienen los términos que conforman cada ecuación. Es decir de acuerdo al conocimiento de la física planteada, se pueden discriminar aquellos términos que no juegan un papel relevante en el fenómeno. El objetivo del orden de magnitud es obtener las escalas características del fenómeno, es decir, velocidades, tiempos y longitudes características asociadas a la física del problema.

Históricamente el modo térmico de colapso se ha planteado igual y de hecho el presente trabajo termina planteando las mismas ecuaciones. Lo que no se ha hecho en los trabajos teóricos

como en Florshuetz y Chao [22], Hsieh [23], etc. es justificar a plenitud, bajo que condiciones se puede descartar la influencia del vapor en el interior de la burbuja en el proceso de colapso. En el presente trabajo esto se denota como el interior uniforme, que significa que la interfaz de la burbuja se encuentra a la misma presión, temperatura y densidad que todo su interior.

El orden de magnitud además de darnos las escalas características, también nos puede dar algunos de los parámetros adimensionales relevantes. Las escalas características obtenidas se utilizan para adimensionalizar las ecuaciones en la tercera parte del presente capítulo. En esta parte se obtienen todos los parámetros involucrados en el fenómeno y partiendo de aquí comenzar el análisis de cada uno.

La cuarta parte parte analiza los parámetros relevantes y su influencia en las ecuaciones, además con valores experimentales de autores como Mayinger et. al. [6], Mayinger [19], Florshuetz y Chao [22], [20] y [21], es posible saber qué valores típicos toman los parámetros. De esta forma se pueden justificar las hipótesis y conocer los alcances y limitaciones del modelo.

Una vez justificado el modelo la última parte del capítulo plantea el reescalamiento de las ecuaciones, debido a que existe una capa límite térmica, que las ecuaciones resultantes no contemplan sin este reescalamiento.

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema físico que se analiza en el presente trabajo consiste en una burbuja de vapor esférica con simetría radial, es decir, no existe variación en las coordenadas angulares esféricas, de radio inicial R_0 , sumergida en un líquido subenfriado, de la misma sustancia del vapor como se muestra en la fig. 2-1. Inicialmente el sistema líquido-burbuja se encuentra a una temperatura uniforme T_∞ y con una presión de saturación $P_{v,0}$ que corresponde a la temperatura T_∞ . La burbuja se encuentra en equilibrio termodinámico y estático con el líquido, todo esto en un tiempo inicial $t = 0$. Un instante después se aplica un escalón de presión $\Delta P = P_\infty - P_{v,0}$, y como consecuencia de este incremento en la presión, se produce un incremento en la temperatura $\Delta T = T_s - T_\infty$, donde P_∞ corresponde a la presión de saturación para la temperatura T_s . A partir de aquí la burbuja empieza a liberar calor y como consecuencia de esto a condensarse y reducir su tamaño. El objetivo es describir el proceso de colapso de la burbuja por medio de la

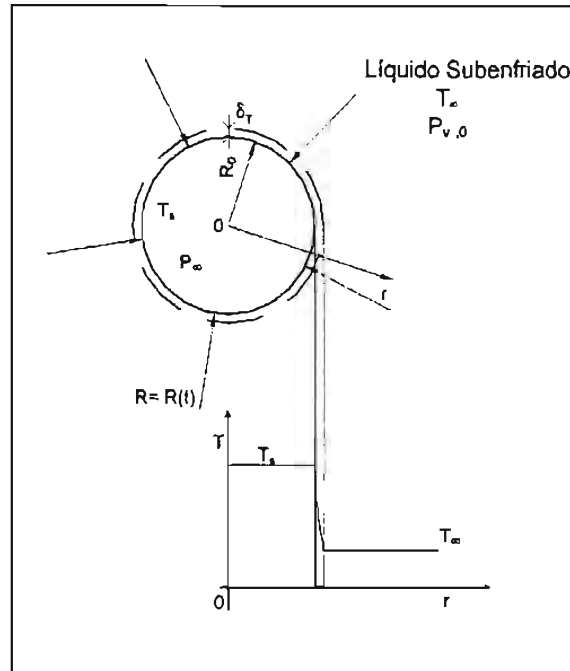


Figura 2-1: Esquema del problema, una burbuja que se encuentra a T_s inmersa en un líquido subenfriado a T_∞

evolución del radio a lo largo del tiempo. Esto implica resolver el perfil de temperaturas para la burbuja, y obtener de esta manera, la evolución del radio como función de estos perfiles.

El problema para el líquido y vapor con simetría radial se describe mediante las ecuaciones fundamentales de continuidad, cantidad de movimiento y energía válidas en cada fase junto con las ecuaciones de la interfaz de acuerdo con Hsieh [23]. Las variables en el vapor y en el líquido se representan mediante los subíndices v y l , respectivamente. De esta manera se tiene en coordenadas esféricasque:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\rho}_v V) + \frac{2 \bar{\rho}_v V}{r} = 0, \tag{2.1}$$

$$\bar{\rho}_v \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\partial \bar{p}_v}{\partial r} + \mu_v \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{2V}{r^2} \right] \quad (2.2)$$

$$\bar{\rho}_v c_{pv} \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + V \frac{\partial T_v}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial \bar{p}_v}{\partial t} + V \frac{\partial \bar{p}_v}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_v}{\partial r} \right) \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) \right) = 0, \quad (2.4)$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{\partial \bar{p}_l}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

$$c_{pl} \bar{\rho}_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + U \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = \frac{\lambda_l}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right). \quad (2.6)$$

donde r es la coordenada radial, t es el tiempo, U es la velocidad del líquido y V es la del vapor, T es la temperatura, \bar{p} es la presión, c_p es el calor específico, $\bar{\rho}$ es la densidad, μ es la viscosidad dinámica y λ la conductividad térmica para cada fase, Las ecs. (2.1)- (2.6), quedan escritas así suponiendo, que el vapor se comporta como un fluido compresible, con propiedades constantes y en estado transitorio y el líquido se considera un fluido incompresible, con propiedades constantes, excepto la densidad y en estado transitorio, junto con la suposición de que la burbuja es simétrica todo el tiempo durante el proceso y no existe variación con respecto a las coordenadas angulares.

De manera equivalente de la ref [23], las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía para la interfaz líquido-vapor pueden escribirse como:

$$\bar{\rho}_l \left(U - \frac{dR}{dt} \right) = \bar{\rho}_v \left(V - \frac{dR}{dt} \right), \quad (2.7)$$

donde $\frac{dR}{dt}$ es la velocidad con la que se mueve la interfaz, esta ecuación (2.7) representa el balance de masa entre ambas fases,

$$\bar{\rho}_l U \left(U - \frac{dR}{dt} \right) + \bar{p}_l - \frac{4\mu_l}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) = \bar{\rho}_v V \left(V - \frac{dR}{dt} \right) + \bar{p}_v - \frac{2\sigma}{R} \quad (2.8)$$

donde σ es el coeficiente de tensión superficial. Esta ecuación (2.8) representa la cantidad de movimiento en ambas fases siendo el lado derecho, el vapor y el izquierdo el líquido, el primer término del lado izquierdo es la cantidad de movimiento debida al flujo de masa, el segundo término es el esfuerzo normal, representado por la presión y el tercero el esfuerzo viscoso normal, el lado derecho es análogo al izquierdo. El último término del lado derecho es el esfuerzo debido a la tensión superficial,

$$\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=R} - \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho}_v \right) * \quad (2.9)$$

$$* \left[h_{fg} + \frac{4\mu_l}{3\bar{\rho}_l} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) - \frac{4\mu_v}{3\bar{\rho}_v} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} - U \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} + V \right)^2 \right],$$

además se exige la continuidad de las temperaturas en la interfaz $T_l(R_0, t) = T_v(R_0, t)$. En la ecuación anterior h_{fg} es la entalpía de vaporización. Esta ecuación representa el balance de energía en la interfaz, los términos del lado izquierdo representan la energía por conducción que ambas fases ceden a la interfaz, del lado derecho el flujo másico multiplica a la entalpía de vaporización, a la energía por efectos viscosos que cada fase cede a la interfaz y a la energía cinética que cada fase cede a la interfaz.

Las ecs. (2.1) a (2.3) del vapor tienen cuatro incógnitas, $\bar{\rho}_v$, V , \bar{p}_v y T_v , para completar el problema en el vapor se requiere una ecuación adicional, si se considera que el vapor se comporta

como gas ideal, se puede aplicar la ecuación de estado

$$\frac{\bar{P}_v}{\bar{\rho}_v} = \bar{R}_a T_v, \quad (2.10)$$

donde \bar{R}_a es la constante particular del gas, como se menciona en Aziz [28].

La burbuja al colapsarse efectúa un proceso de compresión en el vapor, de tal suerte que este cambio de estado entre el inicio y el final se observa en el cambio en las presiones ΔP . Para describir esto se necesita una ecuación adicional que permita conocer la relación entre las presiones y sus correspondientes temperaturas de saturación, esta es la ecuación de Clasius-Clapeyron linealizada y que se puede escribir como :

$$\frac{d\bar{p}_v}{dT_v} \sim \frac{P_\infty - P_{v,0}}{T_s - T_\infty} = \bar{\rho}_{v,0} \frac{h_{fg}}{T_\infty}, \quad (2.11)$$

la validez de esta ecuación supone valores pequeños para la diferencia de presiones ΔP .

Adicionalmente en el centro de la burbuja se tiene:

$$r = 0 : V(0, t) = \left(\frac{\partial T_v}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, \quad (2.12)$$

y para el líquido a distancias muy alejadas de la burbuja:

$$r \rightarrow \infty : U(\infty, t) \rightarrow 0, \quad \bar{p}_l(\infty, t) \rightarrow P_{v,0} + \Delta P = P_\infty \text{ y } T(\infty, t) \rightarrow T_\infty. \quad (2.13)$$

Al inicio del fenómeno se tiene una burbuja en reposo de radio inicial R_0 , y se encuentran en equilibrio termodinámico ambas fases a temperatura T_∞ , ésta última consideración es una aproximación ya que formalmente la presión de saturación que corresponde con T_∞ es $P_{v,0}$, para un líquido incompresible la variación de esta para un cambio moderado en la presión ΔP no es muy notorio; desde el punto del vapor, sin embargo si lo es, aunque para el tiempo en el que la burbuja se colapsa se puede considerar que el líquido lejos de la burbuja la temperatura se mantiene a T_∞ sin repercutir en la presión. Por estas dos razones la aproximación es aceptable.

Al escribir en su representación matemática para el tiempo $t = 0$ se tiene:

$$t = 0, U(r, 0) = V(r, 0) = 0, R(0) = R_0 \text{ y}$$

$$T_l(r, 0) = T_v(r, 0) = T_\infty, \bar{p}_l(r, 0) = \bar{p}_v(r, 0) = P_{v,0}. \quad (2.14)$$

El problema hasta aquí planteado considera al interior de la burbuja como un vapor que se comprime con movimiento cediendo calor al líquido que se mueve y se calienta, y a la interfaz como una región infinitamente delgada en la que las diversas fuerzas y formas de energía compiten para desplazarla. Este problema es extremadamente complicado ya que requiere la solución simultánea de seis ecuaciones diferenciales parciales ecuaciones acopladas con tres ecuaciones en la interfaz. En trabajos como los de Nakoryakov [5], Nigmatullin et al. [24] y Prosperetti [27] se puede apreciar la complejidad que representa el tratamiento de todas las ecuaciones simultáneas. En estos trabajos se efectúan aproximaciones donde se pueden descartar algunas ecuaciones o términos de estas, como se puede apreciar en el trabajo de Aziz [28], en el que para algunos valores del parámetro $\frac{C_p T_\infty}{h_{fg}}$ se puede descartar el gradiente de presiones en el interior de la burbuja ó como en el trabajo de Prosperetti [27] el número de Mach determina si el vapor se mueve o no, y con esto descartar la ecuación de cantidad de movimiento de vapor. El modo térmico de colapso se basa en las siguientes hipótesis:

1. La burbuja se mantiene esférica todo el tiempo inclusive al llegar al colapso.

Esta condición requiere que la simetría esférica de la burbuja se mantenga aún al llegar al colapso. Como se puede apreciar de los trabajos de Mayinger et. al [19], [20] y [21] la burbuja se mantiene esférica durante todo el proceso de colapso; sin embargo al llegar al colapso final, la burbuja se distorsiona o aún más llega a fragmentarse en burbujas más pequeñas esto último no se puede apreciar en las ecuaciones y el análisis de este fenómeno no ha sido realizado aún como se menciona en [27].

2. La interfaz de la burbuja se mantiene a T_s durante todo el proceso, siendo esta la temperatura de saturación.

La interfaz debe mantenerse al menos a la temperatura de saturación para mantener la condensación del vapor durante todo el proceso. En Nigmatullin et. al. [24], en Florshuetz et. al. [22] y en otros trabajos se menciona esto como una condición, pero las mediciones de Nordmann y Mayinger [6], [20] y [21] permiten justificar que lo anterior pueda considerarse como una buena hipótesis del trabajo.

3. El interior de la burbuja se mantiene a la misma presión y temperatura de la interfaz durante todo el proceso, es decir no hay gradientes de presión ni temperatura en el interior de la burbuja, conociéndose esto como “interior uniforme”.

4. El calor se transmite a través de una delgada capa límite.

5. Los efectos inerciales son despreciables, “modo térmico”.

Una de las evidencias físicas que distinguen el modo térmico del inercial, es la velocidad con la que se desplaza la interfaz. En el modo inercial la velocidad de la interfaz es diez veces mayor que en el térmico, esto se puede apreciar en el trabajo de Plesset y Prosperetti [7], donde el modo térmico se caracteriza porque la velocidad de la interfaz es tan lenta que ningún efecto de inercia es relevante, como se puede comprobar en las referencias [19], [20], [21].

6. El líquido es incompresible.

Esto debido a que la interfaz se mueve con un número de Mach muy bajo..

La validación de estas hipótesis se efectuará aplicando el orden de magnitud en las ecuaciones para obtener los parámetros que rigen al problema.

2.2. ORDEN DE MAGNITUD

El análisis de las ecuaciones por medio del orden de magnitud, se efectúa comparando término a término cada una de las cantidades involucradas y descubriendo así el peso que puedan tener de acuerdo con el fenómeno físico. La hipótesis principal es que el calor que se transmite hacia la fase líquida es el responsable del cambio de fase, esto se expresa en la ecuación de balance de energía en la interfaz (2.9), al comparar los términos de conducción de calor con el de energía de cambio de fase, en orden de magnitud; lo anterior es equivalente a escribir:

$$\bar{\rho}_{v,0} \frac{h_{fg} R_0}{t_c} \sim \frac{\lambda_l (T_s - T_\infty)}{\delta_T} = \frac{\lambda_l \Delta T}{\delta_T} \quad (2.15)$$

donde para $\bar{\rho}_v$ se utiliza como valor característico la densidad inicial del $\bar{\rho}_{v,0}$, para el radio de la burbuja R se utiliza como escala el radio inicial R_0 . El tiempo t se escala con t_c que es el tiempo característico de colapso y para la coordenada radial r la escala es δ_T , que representa el espesor térmico en el líquido y la escala para las temperaturas T_l y T_v es la diferencia de temperatura ΔT , definida como $\Delta T = T_s - T_\infty$. Todas estas propiedades están evaluadas a T_∞ . De la ec. (2.15) se puede obtener el tiempo característico del colapso

$$t_c \sim \bar{\rho}_{v,0} \frac{h_{fg} R_0 \delta_T}{\lambda \Delta T} \sim \frac{R_0^2}{\bar{\alpha}_l J_a} \frac{\delta_T}{R_0} \quad (2.16)$$

donde $\bar{\alpha}$ es la difusividad térmica del líquido y el número de Jakob J_a es la relación del calor sensible a la entalpía de vaporización y se define como:

$$J_a = \frac{\bar{\rho}_l c_{pl} (T_s - T_\infty)}{\bar{\rho}_{v,0} h_{fg}} \quad (2.17)$$

De la relación (2.16) se puede apreciar que el espesor normalizado δ_T/R_0 es una incógnita que deberá obtenerse mediante el análisis de orden de magnitud de la ecuación de la energía en el líquido, i.e. (2.6). En virtud del carácter transitorio del fenómeno se compara el término transitorio con el de conducción, obteniéndose la relación:

$$\frac{\bar{\rho}_l c_{pl} \Delta T}{t_c} \sim \frac{\lambda_l \Delta T}{\delta_T^2} \quad (2.18)$$

y en consecuencia se tiene que:

$$\frac{\delta_T}{R_0} \sim \left(\frac{\bar{\alpha}_l t_c}{R_0^2} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

Al combinar las relaciones (2.16) y (2.19), se obtiene finalmente el orden de magnitud del

tiempo característico del colapso:

$$t_c \sim \frac{R_0^2}{\bar{\alpha}_l J_a^2} \quad (2.20)$$

y el espesor adimensional se obtiene al sustituir (2.20) en (2.19);

$$\frac{\delta_T}{R_0} \sim \frac{1}{J_a}. \quad (2.21)$$

De la misma forma, la velocidad característica del líquido para el proceso de condensación se puede obtener comparando en la ec.(2.6), el término convectivo con el transitorio

$$\frac{U_c \Delta T}{\delta_T} \sim \frac{\Delta T}{t_c}, \quad (2.22)$$

al despejar la velocidad característica U_c , y sustituir las relaciones (2.20) y (2.19) se obtiene:

$$U_c \sim \frac{\delta_T}{t_c} = \frac{\bar{\alpha}_l}{R_0} J_a, \quad (2.23)$$

Con los resultados anteriores vale la pena aplicar el análisis a las ecuaciones del vapor con la finalidad de probar la tercera hipótesis acerca de la uniformidad en el vapor, de la ecuación de la energía en la burbuja de vapor (2.3), al comparar el término transitorio con el convectivo

$$\frac{\Delta T}{t_c} \sim V_c \frac{\Delta T}{R_0}, \quad (2.24)$$

se obtiene la velocidad característica del vapor:

$$V_c \sim \frac{\bar{\alpha}_l}{R_0} J_a^2, \quad (2.25)$$

que al sustituirla en la ecuación de cantidad de movimiento para el vapor, ec. (2.2), se puede comparar el transitorio con el gradiente de presión y se obtiene lo siguiente:

$$\bar{p}_{v,0} \frac{V_c}{t_c} \sim \frac{\Delta \bar{p}_v}{R_0} \quad (2.26)$$

donde $\Delta\bar{p}_v = P_\infty - P_{v,0}$.

Al sustituir el tiempo característico, ec. (2.20) y la velocidad característica del vapor, ec. (2.25) en la relación (2.26) se obtiene:

$$\left(\frac{Ja^2}{\left(R_0^2 \frac{\Delta\bar{p}_v}{\bar{\rho}_l \bar{\alpha}_l^2} \right)^{1/2}} \right)^2 \frac{\bar{\rho}_{v,0}}{\bar{\rho}_l} \sim 1, \quad (2.27)$$

este resultado preeliminar se debe a que se forzó la permanencia de los términos transitorio y el gradiente de presión, sin embargo como se verá más adelante este resultado no es válido. Los parámetros β y α se definen como:

$$\beta = \frac{Ja^2}{\left(R_0^2 \frac{\Delta\bar{p}_v}{\bar{\rho}_l \bar{\alpha}_l^2} \right)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\bar{\rho}_{v,0}}{\bar{\rho}_l} \quad (2.28)$$

donde β es el parámetro definido por Florshuetz y Chao [22] y por Nigmatullin [24], y representa la razón del tiempo que tarda una perturbación en la presión en propagarse de la interfaz hacia el centro de la burbuja de vapor al tiempo de colapso; es decir, la competencia del tiempo en que ocurre el fenómeno inercial τ_I al tiempo en que ocurre el fenómeno térmico τ_H y α es la relación de densidades del vapor al líquido. El producto $\alpha\beta^2$ debe de analizarse para distintos casos. En general $\alpha \ll 1$ para la mayoría de las sustancias, si el fenómeno ocurre lejos del punto crítico. Por lo tanto, dependiendo de los valores del producto $\alpha\beta^2$ se tienen los siguientes casos: a) $\alpha\beta^2 \ll 1$ se tiene interior uniforme con las dos restricciones $\beta \ll 1$ ó $\beta \sim 1$, si $\alpha\beta^2 \sim 1$ con $\beta \gg 1$ no existe el interior uniforme y $\alpha\beta^2 \gg 1$ tampoco existe el interior uniforme. Lo anterior puede apreciarse fácilmente mediante el análisis de las ecuaciones adimensionalizadas.

2.3. ECUACIONES GENERALES ADIMENSIONALIZADAS

El objetivo de esta sección es escribir las ecuaciones generales que gobiernan el fenómeno de colapso de burbujas en forma adimensional. Para distinguir la función de los parámetros adimensionales que gobiernan el fenómeno, las ecuaciones de continuidad, momentum, energía

y de la interfaz se adimensionalizan mediante las siguientes variables, con ayuda de los valores característicos previamente obtenidos, del análisis de orden de magnitud desarrollado en la sección anterior:

$$x = \frac{r}{R_0}; \quad a = \frac{R}{R_0}; \quad u = \frac{UR_0}{\bar{\alpha}_l J_a}; \quad p = \frac{\bar{p}_l - P_{v,0}}{P_\infty - P_{v,0}}; \quad v_v = \frac{V}{\left(\frac{\bar{\alpha}_l J_a^2}{R_0}\right)}; \quad \rho_v = \frac{\bar{\rho}_v}{\bar{\rho}_{v,0}}$$

$$\tau = \frac{t\bar{\alpha}_l J_a^2}{R_0^2}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}; \quad p_v = \frac{\bar{p}_v - P_{v,0}}{P_\infty - P_{v,0}}; \quad \theta_v = \frac{T_v - T_\infty}{T_s - T_\infty}; \quad \eta = \frac{r - R(t)}{R_0}$$

Al sustituir estas variables en las ecuaciones originales (2.1) a (2.3), para el vapor, se tiene que:

Ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (v_v \rho_v) + \frac{2}{x} v_v \rho_v = 0 \quad (2.29)$$

Ecuación de momentum,

$$\alpha \beta^2 \left(\frac{\partial v_v}{\partial \tau} + v_v \frac{\partial v_v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p_v}{\partial x} = \alpha \beta^2 P_{rv} \epsilon \left[\frac{\partial^2 v_v}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial v_v}{\partial x} - \frac{2v_v}{x^2} \right] \quad (2.30)$$

Ecuación de la energía,

$$\rho_v \left(\frac{\partial \theta_v}{\partial \tau} + v_v \frac{\partial \theta_v}{\partial x} \right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial p_v}{\partial \tau} + v_v \frac{\partial p_v}{\partial x} \right) + \frac{\epsilon}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_v x^2 \frac{\partial \theta_v}{\partial x} \right). \quad (2.31)$$

Por otro lado las ecuaciones (2.4) a (2.5) para el líquido se transforman en las siguientes:

Continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[(a + \eta)^2 u \right] = 0 \quad (2.32)$$

Ecuación de cantidad de movimiento,

$$J_a \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{da}{d\tau} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + u \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{Ja^2}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{Pr}{J_a} \frac{1}{(a + \eta)^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(a + \eta)^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] - 2u \right\} \quad (2.33)$$

la ecuación de la energía

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{da}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{u}{J_a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{J_a^2 (a + \eta)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((a + \eta)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (2.34)$$

y la ecuación del gas ideal

$$\rho_v = \frac{1 + \alpha_0 p_v}{1 + \beta_0 \theta_v}. \quad (2.35)$$

Además de las ecuaciones en ambos medios, son necesarias las ecuaciones de balance para definir la interfaz tal que:

Continuidad,

$$u - J_a \frac{da}{d\tau} = \alpha J_a \rho \left(v_v - \frac{da}{d\tau} \right), \quad (2.36)$$

Cantidad de Movimiento

$$\begin{aligned} p_v - p + \alpha \beta^2 \rho v_v \left(v_v - \frac{da}{d\tau} \right) - \frac{4}{3} \text{Pr}_v \varepsilon \alpha \beta^2 \left(\frac{\partial v_v}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{v_v}{a} \right) \\ = \frac{\beta^2}{J_a^2} u \left(u - J_a \frac{da}{d\tau} \right) - \frac{4\beta^2 P_r}{3J_a^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} - \frac{u}{a} \right) + \frac{2}{L_a} \frac{1}{a}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

y la ecuación de la Energía

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} - \bar{\beta}_{00} \frac{\partial \theta_v}{\partial x} \Big|_{x=a} = J_a \rho \left(\frac{da}{d\tau} - v_v \right) * \left\{ 1 + \frac{4\bar{\gamma}\beta^2 P_r}{3J_a^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} - \frac{u}{a} \right) \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \frac{P_{rv} \varepsilon \bar{\gamma} \beta^2}{\rho} \left(\frac{\partial v_v}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{v_v}{a} \right) - \frac{\bar{\gamma} \beta^2}{2} \left[\left(\frac{da}{d\tau} - \frac{u}{J_a} \right)^2 - \left(\frac{da}{d\tau} - v_v \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

junto con la continuidad de las temperaturas, esto es, $\theta(0, \tau) = \theta_v(a, \tau)$.

Por las características propias del problema, las condiciones iniciales serían

$$\tau = 0; \quad u(\eta, 0) = v_v(x, 0) = 0; \quad \theta(\eta, 0) = \theta_v(x, 0) = 0; \quad a(0) = 1, \quad p(\eta, 0) = p_v(x, 0) = 0. \quad (2.39)$$

La coordenada adimensional η está localizada en la frontera de la burbuja, y va desde cero en la interfaz hasta infinito lejos de la burbuja, la forma que adopta η permite inmovilizar la interfaz teniéndose un sistema de referencia inercial para la evolución del radio de la burbuja.

Por otro lado la coordenada adimensional x mapea del centro de la burbuja $x = 0$ a la interfaz $x = a$.

Para el centro de la burbuja las condiciones (2.12), en forma adimensional, se transforman en:

$$v_v(0, \tau) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta_v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (2.40)$$

Por otro lado, las condiciones (2.13) lejos de la burbuja, pueden escribirse cómo:

$$\eta \rightarrow \infty; \quad u(\infty, \tau) = 0; \quad p(\infty, \tau) \rightarrow 1 \text{ y } \theta(\infty, \tau) = 0. \quad (2.41)$$

Los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones anteriores, se definen a continuación.

$$\beta = \frac{J_a^2}{\left(R_0^2 \frac{\Delta p}{\bar{\rho}_l \bar{\alpha}_l^2} \right)^{1/2}} = \frac{\tau_I}{\tau_H} \quad (2.42)$$

y representa la razón del tiempo de colapso provocado mecánicamente τ_I (tiempo inercial) al tiempo de colapso provocado por efectos térmicos τ_H (tiempo térmico) . El número de Jakob, J_a :

$$J_a = \frac{\bar{\rho}_l C_p (T_s - T_\infty)}{\bar{\rho}_{v,0} h_{fg}} \quad (2.43)$$

que es la razón del calor sensible a la entalpía de formación, el parámetro $\bar{\beta}$ que se obtiene de la ecuación (2.31) junto con la relación (2.11)

$$\bar{\beta} = \frac{C_p T_\infty}{h_{fg}}. \quad (2.44)$$

El parámetro ε es la razón de la longitud de penetración térmica del vapor a la del líquido

$$\varepsilon = \frac{\bar{\alpha}_v}{\bar{\alpha} J_a^2}, \quad (2.45)$$

el parámetro $\bar{\gamma}$ que se obtiene de la ec. (2.38):

$$\bar{\gamma} = \frac{\Delta p}{\bar{\rho} h_{fg}}, \quad (2.46)$$

el número de Prandtl en el líquido

$$Pr = \frac{\nu}{\bar{\alpha}}, \quad (2.47)$$

el número de Prandtl en el vapor

$$Pr_v = \frac{\nu_v}{\bar{\alpha}_v} \quad (2.48)$$

Los parámetros de la ecuación de estado, (2.35), se definen mediante las expresiones

$$\alpha_0 = P_\infty/P_{v,0} - 1 \quad \text{y} \quad \beta_0 = T_s/T_\infty - 1. \quad (2.49)$$

La razón de conductividades térmicas

$$\beta_{00} = \frac{\lambda_v}{\lambda_l} \quad (2.50)$$

y el parámetro de Laplace se define como

$$L_a = \frac{R_0 \Delta p}{\sigma}. \quad (2.51)$$

En general el problema de la evolución del radio a consiste en resolver el perfil de temperaturas en cada fase, pero como se puede apreciar las temperaturas y el radio a dependen simultáneamente uno del otro, al mismo tiempo las temperaturas dependen del espacio, el tiempo, las propiedades del líquido y el vapor, y del comportamiento dinámico y térmico de ambas fases esto queda expresado de la siguiente forma:

$$\theta = \theta(\eta, \tau, u, \beta, J_a, \varepsilon, \alpha, \bar{\beta}, \alpha_0, \beta_{00}, \beta_0, L_a, \rho_v, \theta_v, p_v, v_v) \quad (2.52)$$

$$a = a(\theta, \eta, \tau, u, \beta, J_a, \varepsilon, \alpha, \bar{\beta}, \alpha_0, \beta_{00}, \beta_0, L_a, \rho_v, \theta_v, p_v, v_v) \quad (2.53)$$

2.4. ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS

Con ayuda de las ecuaciones adimensionales anteriormente obtenidas, en la presente sección se analiza la validez de la hipótesis del interior uniforme así como la definición del límite térmico.

Dependiendo de los valores asumidos para el parámetro β existen dos casos de interés:

Con $\beta \ll 1$ el fenómeno es gobernado por efectos térmicos; ésto es, el tiempo de colapso por efectos térmicos es mucho mayor que el tiempo de colapso por efectos mecánicos.

Con $\beta \gg 1$ se tiene el fenómeno puramente inercial y de manera equivalente se puede establecer lo siguiente para los diferentes valores del número de Jakob: con $J_a \gg 1$ se tendrá el caso cuando el calor se difunde solo a través de una capa límite y para $J_a \ll 1$ es el caso cuando no existe una capa límite.

El parámetro $\varepsilon = \frac{\alpha_v}{\alpha J_a^2}$ en general es pequeño a pesar de que la difusividad térmica del vapor es mucho mayor que la del líquido; pero con el factor $1/J_a^2$ y considerando que $J_a \gg 1$, se mantiene $\varepsilon \ll 1$. El significado físico de ε representa la razón de la longitud de penetración térmica del vapor a la del líquido. Cuando $\varepsilon \ll 1$ significa que el vapor se calienta más rápido que el líquido y las variaciones de temperatura en el vapor se perciben instantáneamente como se puede ver en los trabajos de Aziz ([28]) y en Nigmatullin et. al. ([24]). En el lado derecho de la ec. (2.30) se puede ver que la combinación de parámetros $\alpha\beta^2 Pr_v \varepsilon \ll \alpha\beta^2 \ll 1$, permitiendo con esto desprestigiar los efectos viscosos en el vapor, comparados con los inerciales y con el gradiente de presiones.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores para $\beta \ll 1$ y $\alpha \ll 1$ se puede escribir la ec. (2.30) en primera aproximación como

$$\frac{\partial p_v}{\partial x} = 0, \quad (2.54)$$

que es equivalente a $p_v(x, \tau) = F(\tau)$. Por otro lado, en el límite $\alpha\beta^2 \ll \beta \ll 1$, el balance de cantidad de movimiento en la interfaz representado por la ec. (2.37) se reduce a la conocida relación Laplace-Young: $p_v(x = a, \tau) - p(\eta = 0, \tau) = 2/(aL_a)$, ya que términos de orden $Pr_v \varepsilon \alpha\beta^2$, β^2/Ja^2 y $Pr \beta^2/Ja^3$ son realmente muy pequeños comparados con la unidad. Por simplicidad, aún cuando en este trabajo puede generalizarse fácilmente la retención de los efectos de la tensión superficial, en el presente análisis no se tomaron en cuenta. De esta manera se tiene que

$$p_v(x, \tau) = p_v(x = a, \tau) = p(\zeta = 0, \tau) = F(\tau). \quad (2.55)$$

Para determinar la función $F(\tau)$ es indispensable obtener información de la fase líquida. Sin embargo se puede anticipar que $F(\tau) = 1$, pero se debe mencionar, que esta solución para la presión del vapor no satisface la condición inicial. Es por esto que, existe una escala de tiempo muy pequeña de orden, $\alpha\beta^2$ para la cual los términos inerciales en el vapor dentro de la burbuja son importantes (los términos viscosos correspondientes son aún más pequeños que los inerciales debido a que $\varepsilon \ll 1$ y Pr_v es de orden unidad). Sin embargo esta escala característica de tiempo es muy pequeña comparada con la escala de tiempo característica térmica. Por esto la hipótesis de uniformidad en la presión en el lado del vapor es una excelente aproximación, este resultado ha sido confirmado por diferentes autores. Con ayuda de la ec. (2.55) y combinando las ecs. (2.29) and (2.31) junto con la condición de frontera (2.40), se puede obtener la velocidad del vapor en términos de $F(\tau)$ y θ_v , tal que:

$$v_v = \frac{(\beta_0/\bar{\beta} - \alpha_0)}{[1 + \alpha_0 F(\tau)]} \frac{dF}{d\tau} \frac{x}{3} + O(\varepsilon). \quad (2.56)$$

Lo anterior implica consecuencias en la fase líquida. Por ejemplo al integrar la ec. (2.32) junto con la condición de interfaz (2.36), se puede obtener el perfil de velocidades en el líquido:

$$u(\eta, \tau) = \frac{Ja a^2}{(a + \eta)^2} \left[\frac{da}{d\tau} + \alpha\rho \left(v_v(a, \tau) - \frac{da}{d\tau} \right) \right]. \quad (2.57)$$

De esta forma, para conocer u se necesita al menos el radio adimensional a . Al sustituir la ec. (2.57) en (2.33) e integrándola una vez, con sus correspondientes condiciones de frontera para la velocidad y presión para la fase líquida, se tiene la ecuación de Rayleigh-Plesset para este problema,

$$\beta^2 \left[a \frac{d^2 a}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 \right] + \alpha\beta^2 \rho \left[\left(v_v(a, \tau) - \frac{da}{d\tau} \right) \frac{da}{d\tau} + a \frac{d}{d\tau} \left(v_v(a, \tau) - \frac{da}{d\tau} \right) - \frac{\alpha\rho}{2} \left(v_v(a, \tau) - \frac{da}{d\tau} \right)^2 \right] = p(\eta = 0, \tau) - 1, \quad (2.58)$$

en donde se puede apreciar que en el límite de $\alpha\beta^2 \ll \beta \ll 1$, los términos del lado izquierdo son despreciables. Entonces, $p(\eta = 0, \tau) - 1 = 0$ y con ayuda de la ec. (2.55), se tiene que $p_v(x, \tau) = p(\eta, \tau) = F(\tau) = 1$, esto indica que existe un campo de presiones uniforme en el

vapor interior así como en la fase líquida. Al llevar este resultado a la ec. (2.56), se obtiene $v_v(x, \tau) = v_v(a, \tau) = 0$. Por otro lado al integrar la ecuación de continuidad (2.29) con $v_v = 0$ y con ayuda de la ecuación de gas ideal (2.35), se tiene que la densidad del vapor y la temperatura del vapor son uniformes y están dadas por $\rho_v(x, \tau) = \rho = (1 + \alpha_0) / (1 + \beta_0)$ y $\theta_v(x, \tau) = \theta_v(x = a, \tau) = 1$. Este último resultado para la temperatura de vapor permite definir una condición de temperatura en la frontera para el líquido. De la ec. (2.40), se obtiene que $\theta(\eta = 0, \tau) = 1$. Esta condición de frontera se necesita para resolver la ecuación de la energía en el líquido y representa un salto de temperatura uniforme en la interfaz y corresponde desde luego a la temperatura de saturación. Estos resultados validan la hipótesis del interior uniforme para las propiedades de la burbuja de vapor. Con este resultado se sabe que, la influencia del vapor en el interior de la burbuja en el proceso de transferencia de calor de la burbuja hacia el líquido se refleja únicamente a través del parámetro ρ afectando con esto la evolución temporal del radio a , como se demostrará en la siguiente sección.

2.5. LÍMITE TÉRMICO

Por los comentarios expresados en la sección anterior, la ec. de la energía en el líquido (2.34) se transforma en:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{da}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left[\frac{a^2}{(a + \eta)^2} (1 - \alpha \rho) - 1 \right] = \frac{1}{J_a^2 (a + \eta)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((a + \eta)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right), \quad (2.59)$$

y la ecuación de balance de cantidad de movimiento en la interfaz (2.37)

$$p_v - p = \frac{2}{L_a} \frac{1}{a}, \quad (2.60)$$

donde el número de Laplace $L_a = \sigma / R_0 (P_\infty - P_{v,0})$ y la ecuación de balance de energía en la interfaz (2.38) se reduce a:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = J_a \rho_v \left(\frac{da}{d\tau} \right), \quad (2.61)$$

y para la densidad ρ_v , se utiliza la ecuación de estado (2.35)

$$\rho_v = \frac{1 + \alpha_0 p_v}{1 + \beta_0 \theta_v},$$

y las condiciones de frontera e inicial se pueden escribir como:

$$\eta = 0; \theta(0, \tau) = 1, \quad (2.62)$$

$$\eta \rightarrow \infty; \theta(\infty, \tau) = 0,$$

$$\tau = 0; \theta(\eta, 0) = 0; a(0) = 1,$$

y por consiguiente la temperatura depende de:

$$\theta = \theta(\eta, \tau, u, J_a, \beta, \alpha, \alpha_0, \beta_0, \rho_v) \quad (2.63)$$

y el radio

$$a = a(\theta, \tau) \quad (2.64)$$

2.6. REESCALAMIENTO DEL PROBLEMA

La ec. (2.59) y la ec.(2.61) contienen productos del parámetro J_a en la derivada espacial de mayor orden en el primer caso y en la derivada temporal en la segunda. Debido a que $J_a \rightarrow \infty$, el problema es singular como se define en el libro de Bender y Orzag [30]. Esto físicamente representa la existencia de una capa límite térmica, a través de la cual el calor se transmite de la superficie de la burbuja al líquido; permitiendo una variación muy grande en la temperatura en una región muy delgada en el espacio. Si el problema se intenta resolver tal como está expresado en las ecs. (2.59) a (2.62), la solución que se obtenga no será válida ya que nunca se apreciaría el efecto de dicha capa. La capa límite es la región por donde se transmite el calor al líquido y en esta región la temperatura varía desde su valor de saturación T_s hasta el valor T_∞ , es aquí donde el perfil de temperaturas se forma y se puede apreciar la variación de

temperatura con la posición. Fuera de esta capa lo único que se puede ver de la temperatura es una variación abrupta entre T_s y T_∞ . Un ejemplo de escalamiento erróneo se presenta en el trabajo de Okhosimskii [25], donde se puede apreciar que las ecuaciones de la energía y de la interfaz dependen del número de Jakob J_a . Las consecuencias de esto se ven en los resultados del colapso del radio a con el tiempo, el colapso final se presenta como un colapso lento y asintótico con el eje del tiempo, en otras palabras el colapso final no es apreciable en sus gráficas.

Tabla 2-1 Valores experimentales de los parámetros, para el agua como sustancia de trabajo de las referencias

([6])y ([20]) donde P_∞ está en bar y T_s está en centígrados

	ΔT	J_a	ρ	α	$\bar{\epsilon}$	$1/J_a$	β
$P_\infty = 4, T_s = 143$	3K	2,989	1,0760	0,0023	0,00729	0,3345	0,000026
	15K	2,84	1,502	0,0023	0,0453	0,0078	0,00047
	20K	17,123	1,7343	0,0023	0,0695	0,0584	0,000839
	83K	80	16	0,0023	2,95	0,0125	0,01788
$P_\infty = 2, T_s = 120$	8,3K	14,78	1,3281	0,00619	0,02349	0,0676	0,000578
	20K	31,8	1,889	0,00619	0,0719	0,0314	0,003
	30K	47,6	2,642	0,00619	0,1508	0,0209	0,00689
	36,6K	58,18	13,357	0,00619	0,2363	0,0171	0,0102
$P_\infty = 1, T_s = 99,6$	29,7K	89,53	2,981	0,00615	0,1641	0,0111	0,03913

Tabla 2-2 Valores experimentales de los parámetros, para el agua como sustancia de trabajo de la referencia

([22]) donde P_∞ está en kPa y T_s está en centígrados

	ΔT	J_a	ρ	α	$\bar{\epsilon}$	$1/J_a$	β
$P_\infty = 97,98, T_s = 99$	5K	15,1	1,1817	0,00602	0,00674	0,0662	0,00222
	6,3K	25,52	1,3309	0,00602	0,0204	0,039	0,00681
	12,4K	37,45	1,565	0,00602	0,0354	0,0267	0,0101
	13K	39,3	1,809	0,00602	0,0249	0,0254	0,0114

Tabla 2-3 Valores experimentales de los parámetros, para el R 113 como sustancia de trabajo de la referencia

([6]) donde P_∞ está en bar y T_s está en centígrados

	ΔT	J_a	ρ	α	ϵ	$1/J_a$	β
$P_\infty = 0,5, T_s = 27,3$	15,6K	40,6	1,831	0,00238	0,177	0,0246	0,3356
$P_\infty = 0,5, T_s = 27,3^\circ C$	12,8	17,51	1,529	0,0047	0,1258	0,057	0,0047
	40	54,73	4,37	0,0047	1,1284	0,0182	0,33
$P_\infty = 2, T_s = 68,8$	14,4	10,374	1,506	0,00942	0,147	0,0963	0,01234

En las tablas (2-1, 2, 3) se pueden apreciar aquellos casos en los que la hipótesis del modo térmico es válida, por ejemplo $J_a = 25,52$ con un $\beta = 0,00681$, del trabajo de Florshuetz [22] en el que se conserva el interior uniforme y el modo térmico de colapso es válido. Estos casos son los de burbujas formadas y colapsadas experimentalmente, es decir ejemplos de burbujas reales que dan idea del valor de los parámetros a los que puede sujetarse el fenómeno.

El reescalamiento se efectúa con un cambio de variable en el espacio $\zeta \sim 1$ tal que

$$\zeta = \frac{\eta}{\epsilon^m} \quad (2.65)$$

donde $\epsilon = 1/J_a$ y representa un parámetro de perturbación, tomando en cuenta que $J_a \gg 1$ y m es un exponente que se debe obtener de las ecuaciones. Al sustituir el cambio de variable (2.65) en la ecuación (2.59), se obtiene que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{da}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta \epsilon^m} \left[\frac{a^2}{(a + \zeta \epsilon^m)^2} (1 - \alpha \rho_v) - 1 \right] = \frac{\epsilon^{2-2m}}{(a + \zeta \epsilon^m)^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(a + \zeta \epsilon^m)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right]. \quad (2.66)$$

El lado derecho de la ec. (2.66) contiene al parámetro ϵ^{2-2m} , para que el término de conducción se conserve, se debe cumplir que

$$2 - 2m = 0 \quad (2.67)$$

por lo tanto $m = 1$. Por otro lado los términos que contienen al binomio $(a + \zeta\epsilon)^2$ no permiten ver la relación directa del parámetro ϵ con los productos que lo contienen de forma independiente, es por esto que los cocientes $\frac{a^2}{(a+\zeta\epsilon)^2}$ y $\frac{1}{(a+\zeta\epsilon)^2}$ deben linealizarse con ayuda de la expansión

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \dots \quad (2.68)$$

tal que:

$$\frac{a^2}{(a + \zeta\epsilon^m)^2} \sim \left(1 - \frac{2\epsilon\zeta}{a} + \frac{4\epsilon^2\zeta^2}{a^2}\right) \left[1 - \frac{4\epsilon^2\zeta^2}{a^2\left(1 - \frac{2\epsilon\zeta}{a}\right)} + \dots\right] \quad (2.69)$$

y

$$\frac{1}{(a + \zeta\epsilon)^2} \sim (1 - 2\epsilon\zeta + 4\epsilon^2\zeta^2) \left[1 - \frac{4\epsilon^2\zeta^2}{(1 - 2\epsilon\zeta)} + \dots\right] \quad (2.70)$$

Al despreciar los términos de orden ϵ^2 , y sustituyendo las aproximaciones, (2.69) y (2.70) en (2.66) se tiene:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{2\zeta}{a} \frac{da}{d\tau} \frac{\partial\theta}{\partial\zeta} \left[1 - \alpha\rho_v + \frac{\bar{\epsilon}a}{2\zeta}\right] = -\frac{2\epsilon}{a} \frac{\partial\theta}{\partial\zeta} \left[1 - \frac{3\zeta^2}{2a} \frac{da}{d\tau} (1 - \alpha\rho_v)\right] \quad (2.71)$$

donde $\bar{\epsilon} = \alpha\rho_v J_a$, es un parámetro que mide la relación del calor sensible a la entalpía de vaporización multiplicado por el cociente de las densidades que tiene el vapor dentro de la burbuja en el inicio y al final del proceso.

El lado derecho de la ec. (2.71) es de orden ϵ y por lo tanto es un efecto de orden superior, los términos de orden en $\alpha\rho_v$ y a $\bar{\epsilon}$, son términos que provienen del interior de la burbuja. Ambos términos, tal como se justifica en [25] no son tomados en cuenta, sin embargo a pesar de ser pequeños y suponer el interior uniforme existe un efecto de corrección debido al cambio en la densidad en el interior, que ha sido mencionado en Florshuetz et. al.[22].

Por otro lado al combinar la ec. (2.35) con (2.60), se tiene una expresión para la densidad, que toma en cuenta los efectos de la tensión superficial mediante el parámetro L_a :

$$\rho_v = \rho \left\{ 1 + \frac{2\alpha_0}{aL_a} \right\} \quad (2.72)$$

donde ρ se define como:

$$\rho = \frac{P_\infty T_\infty}{P_{v,0} T_s}. \quad (2.73)$$

Para los valores de las propiedades del líquido el parámetro $L_a \sim 10^4$, y por lo mismo es posible no tomarlo en cuenta para el problema. De esta manera el último término en la ec. (2.72) puede despreciarse y la ec. (2.61) con la nueva variable puede reescribirse como:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \rho \left(\frac{da}{d\tau} \right). \quad (2.74)$$

El problema de la singularidad expresado en la ec. (2.59) para $J_a \gg 1$ queda eliminado en (2.71), ya que la derivada de mayor orden permanece para cualquier valor de J_a , mientras que la ec. (2.61) el problema consistía en que la ecuación de frontera se perdía dejando a la derivada del radio $\frac{da}{d\tau} = 0$, un resultado inconsistente para el problema, que se traduce en que la burbuja nunca cambia de tamaño.

Finalmente las condiciones de frontera e inicial se pueden escribir para la nueva variable como:

$$\zeta \rightarrow \infty : \quad \theta(\infty, \tau) = 0 \quad (2.75)$$

$$\tau = 0 : \quad \theta(\zeta, 0) = 0; \quad a(0) = 1 \quad (2.76)$$

$$\zeta = 0 : \quad \theta(0, \tau) = 1$$

Capítulo 3

SOLUCION NUMÉRICA

3.1. DIFERENCIAS FINITAS

Para resolver el sistema de ecs. (2.71)-(2.75) se propone una solución por diferencias finitas, basada en el método implícito de tercer nivel en el tiempo, descrito en Nogotov [32],

$$r\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + r\theta_{i-1}^{n+1} = (1 + \bar{\sigma}) (\theta_i^{n+1} - \theta_i^n) - \bar{\sigma} (\theta_i^n - \theta_i^{n-1}) \quad (3.1)$$

donde r es un parámetro geométrico que mide la apertura de los pasos temporal y espacial, $\bar{\sigma}$ es un parámetro de estabilidad para el método, n , es el paso en el tiempo e i es el paso en la coordenada espacial.

Este método modela una ecuación de tipo parabólico, para una segunda derivada en el espacio con una primera derivada en el tiempo de la variable dependiente, tal que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.2)$$

el lado izquierdo de (3.1) representa la forma discretizada de la segunda derivada espacial y el lado derecho la derivada temporal. Éste método a diferencia de otros métodos implícitos similares, como por ejemplo, el Crank-Nicholson o el Totalmente Implícito, agrega un paso en el tiempo adicional en la variable es decir, un tiempo anterior al inicio del fenómeno en θ_i^{n-1} . Este tiempo físicamente no tendría sentido ya que antes de comenzar el fenómeno no hay datos, sin embargo lo que quiere decir y que en este trabajo se utiliza, es iniciar numéricamente el

fenómeno en este tiempo $n - 1$. La razón por la que se usa un tiempo adicional es que la variación inicial de la temperatura θ con el tiempo es muy grande. Este método está pensado para grandes variaciones de la variable dependiente con respecto al tiempo. De los trabajos de Florshuetz et. al [22] y de Okhosimskii [25] se sabe que la temperatura en el inicio tiene estas grandes variaciones, la soluciones analíticas y numéricas de la temperatura presentada en estos trabajos así lo confirman. Afortunadamente el problema térmico tiene una solución analítica para el orden cero en la temperatura, esto es verificable en los trabajos de [22] y [25]. Para adaptar la ec. (3.1) a la ec. (2.71) se requiere definir la primera derivada espacial en la temperatura así como la derivada del radio de la burbuja $\frac{da}{d\tau}$. La primera derivada espacial se puede escribir con una diferencia central cómo

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{2h} \quad (3.3)$$

Para la derivada temporal en el radio es necesario definirla con el esquema de la derivada temporal utilizada para la temperatura

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{(1 + \bar{\sigma})(a^{n+1} - a^n) - \bar{\sigma}(a^n - a^{n-1})}{\Delta t} \quad (3.4)$$

donde h es el intervalo espacial uniforme y Δt es el intervalo temporal también uniforme. El último problema es escribir la ec. (2.74) en diferencias finitas, en este caso la derivada espacial de la temperatura [lado izq.de(2.74)], no se puede definir cómo (3.3), ya que requiere de dos datos adicionales para converger, la derivada espacial se define como una derivada de tercer orden hacia adelante como se describe en Ferziger et. al. [33]

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{-\theta_{i+2}^{n+1} + 6\theta_{i+1}^{n+1} - 3\theta_i^{n+1} - 2\theta_{i-1}^{n+1}}{6h} \quad (3.5)$$

El procedimiento consiste en, resolver la ec. (2.71), inicializandola con datos conocidos para θ_i^n , θ_i^{n-1} , a^{n+1} , a^n y a^{n-1} se obtiene θ_i^{n+1} y se sustituye en la ec. (2.74) para así despejar la nueva a_{nu}^{n+1} que es diferente de la a^{n+1} que se usó como dato; esta nueva a_{nu}^{n+1} se regresa a la temperatura en un proceso iterativo hasta que el radio a_{nu}^{n+1} nuevo sea numéricamente el mismo que el anterior con una tolerancia preestablecida.

Al escribir la ec. (2.71) tomando en cuenta las ecs. (3.1), (3.3) y (3.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}
& -\theta_{i-1}^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} r - \frac{i}{\Delta t} \left(\frac{(1+\bar{\sigma})(a^{n+1}-a^n) - \bar{\sigma}(a^n - a^{n-1})}{a^n} \right) \\ * \left[1 - \alpha\rho + \bar{\varepsilon} \frac{a^{n+1}}{2ih} - \frac{3\varepsilon ih}{2a^{n+1}} (1 - \alpha\rho) \right] + \Delta t \epsilon \end{array} \right\} + \\
& \quad + (1 + \bar{\sigma} + 2r) \theta_i^{n+1} - \\
& -\theta_{i+1}^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} r + \frac{i}{\Delta t} \left(\frac{(1+\bar{\sigma})(a^{n+1}-a^n) - \bar{\sigma}(a^n - a^{n-1})}{a^n} \right) * \\ * \left[1 - \alpha\rho + \bar{\varepsilon} \frac{a^{n+1}}{2ih} - \frac{3\varepsilon ih}{2a^{n+1}} (1 - \alpha\rho) + \Delta t \epsilon \right] \end{array} \right\} = \\
& \quad = (1 + 2\bar{\sigma}) \theta_i^n - \bar{\sigma} \theta_i^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

y para la ec. (2.74) tomando en cuenta (3.4) y (3.5), se tiene,

$$\frac{-\theta_{i+2}^{n+1} + 6\theta_{i+1}^{n+1} - 3\theta_i^{n+1} - 2\theta_{i-1}^{n+1}}{6h} = \rho \left(\frac{(1 + \bar{\sigma}) (a^{n+1} - a^n) - \bar{\sigma} (a^n - a^{n-1})}{\Delta t} \right), \tag{3.7}$$

donde los puntos de la malla están definidos como

$$\zeta_i = ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \tag{3.8}$$

$$\tau^n = n\Delta t, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.9)$$

y $r = \Delta t/h^2$. En las últimas dos ecuaciones $\bar{\sigma}$ es un factor de peso definido en [32] como:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12r}, \quad (3.10)$$

el problema tiene la desventaja que debe inicializarse con valores correspondientes en las variables para los tiempos n y $n - 1$, la ventaja es que el problema tiene solución analítica para el orden cero (ϵ^0) de la ec. (2.71), de acuerdo con [22] y [25]. la siguiente sección trata de como se obtiene esta solución.

3.2. SOLUCIÓN POR SEMEJANZA DEL ORDEN CERO

Para inicializar el problema se requieren valores para el perfil de la temperatura y también una distribución para el radio. Esta información puede obtenerse para el caso de la temperatura, de la solución analítica del orden cero de la ec (2.71). Haciendo una expansión asintótica para la temperatura y otra para el radio en potencias de ϵ tal que:

$$\theta = \epsilon^0\theta_0 + \epsilon\theta_1 + \dots \quad (3.11)$$

$$a = \epsilon^0a_0 + \epsilon a_1 + \dots \quad (3.12)$$

al aplicar (3.11) y (3.12) en (2.71) y en (2.74) y separar los factores de ϵ de las mismas potencias se tiene:

$$\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial\theta_0}{\partial\tau} + \frac{2\zeta}{a} \frac{da}{d\tau} \frac{\partial\theta_0}{\partial\zeta} = 0 \quad (3.13)$$

esta ecuación junto con la condición (2.74)

$$\left. \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \rho \frac{da_0}{d\tau} \quad (3.14)$$

y sujeta a las condiciones (2.75) se puede resolver aplicando un cambio de variable que colapse el tiempo con el espacio para generar una ecuación diferencial ordinaria homogénea integrable. Las nuevas variables que incluyen al espacio y al tiempo a través de a son:

$$\hat{u} = 3a\zeta^2 \quad ; \quad \hat{v} = \frac{a^3}{\rho}, \quad (3.15)$$

al aplicar la regla de la cadena en las derivadas de la temperatura en (3.13) con (3.15) y sabiendo de la ec. (2.74) que

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} \quad (3.16)$$

se tiene:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{u}^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{v}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \hat{u}} \right|_{\hat{u}=0} \quad (3.17)$$

donde las condiciones (2.75) se transforman en

$$\hat{u} \rightarrow \infty; \quad \theta(\infty, \hat{v}) = 0 \quad (3.18)$$

$$\hat{u} = 0; \quad \theta(0, \hat{v}) = 1 \quad (3.19)$$

$$\hat{v} = 1; \quad \theta(\hat{u}, 1) = 1 \quad (3.20)$$

El problema (3.17) sujeto a (3.18) es un problema que acepta solución por semejanza, ya que la variable en infinito se hace cero y en cero se hace uno, para resolver esto se propone una

variable de semejanza que cumpla con las condiciones (3.18), tal que

$$\xi = \frac{\hat{u}}{\sqrt{\pi(1-\hat{v})}}. \quad (3.21)$$

y la ec. (3.17) en términos de la variable ξ se transforma en:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - 2\xi \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (3.22)$$

con las condiciones

$$\xi \rightarrow \infty; \theta(\infty) = 0 \text{ y } \xi = 0; \theta(0) = 1, \quad (3.23)$$

la ec. (3.22) es una ecuación ordinaria homogénea que se puede integrar directamente bajo los límites que imponen las condiciones (3.23) obteniéndose el perfil de temperaturas para el orden cero

$$\theta = \text{erfc } \xi = \text{erfc} \frac{\hat{u}}{\sqrt{\pi(1-\hat{v})}} = \text{erfc} \frac{3a^2\zeta}{\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{a^3}{\rho}\right)}. \quad (3.24)$$

Para obtener el radio a como función del tiempo τ se sustituye (3.24) en (3.16) y al integrarla bajo la condición $a(0) = 1$ se tiene:

$$\tau = \frac{\pi}{4} \rho \left(\frac{2}{3a} + \frac{a^2}{3} - 1 \right) \quad (3.25)$$

que es la solución que también obtuvo mediante otro procedimiento Florshuetz et. al. [22], para la evolución del radio con el tiempo.

La ec. (3.6) describe un sistema tridiagonal, este se resuelve utilizando una subrutina para matrices tridiagonales obtenida del IMSL, el programa fuente ingresa los valores en forma de vectores para formar la matriz tridiagonal de acuerdo con la regla impuesta por (3.6). Los valores óptimos de los parámetros que se usaron para construir la malla numérica son para $h = 0,01414\dots$ y para $\Delta t = 0,0001$ atendiendo a que un valor de convergencia recomendado en Nogotov [32] y en Ferziger et. al. [33] es $r = 0,5$ donde $r = \Delta t/h^2$. El tamaño de la malla

es de 900 nodos y se requirieron en algunos casos iteraciones hasta de 60000 veces, según la ec. (3.10) el valor de $\bar{\sigma} = 1/3$.

La condición de frontera (2.75) impone que la temperatura en la interfaz tenga el valor de 1, al discretizar la temperatura para θ_i^n y escribirla cómo vector se tiene lo siguiente

$$\theta_i^n = 1, 0, 0, \dots$$

el programa toma estos valores y no converge, es por eso que se requieren valores para un tiempo posterior, que en realidad con fines de convergencia se requirieron de dos, estos valores son tomados de la discretización de la ec. (3.24) junto con la ec. (3.25). Estos valores son progresivos de acuerdo con el mallado de las ecs. (3.8) y (3.9), para ambas ecuaciones se tiene que:

$$\theta_i^{n-1} = 1, 0,317, 0,0455, 0,0027, \dots, 0 \quad (3.26)$$

$$\theta_i^n = 1, 0,479, 0,1573, 0,0338, 0,0046, \dots, 0$$

y para el radio

$$a^{n-1} = 1, a^0 = 0,9887, a^n = 0,9481 \quad (3.27)$$

Por otro lado la tolerancia que se buscó mantener para el criterio de convergencia en las iteraciones para el radio nuevo a_{nu}^{n+1} , se expresa $|a_{nu}^{n+1} - a^{n+1}| \simeq 10^{-6}$.

Para poder comparar la solución del orden cero (3.13) con los trabajos previos de Florshuetz [22] y Okhosimskii [25], se efectuó la corrida numérica de la ec. (3.13) junto con la ec. (2.74) sujetas a las condiciones (2.75) y se obtuvo la solución (3.25), como más adelante puede verse en la fig. (4-1) del capítulo 4, esta comprobación permitió trabajar la ec. (3.6) que es la esencia del presente trabajo.

Los resultados se obtienen de un programa que se presenta en el apéndice, escrito en lenguaje fortran 77 para UNIX y aparecen en el capítulo de resultados en las figs. (4-1) a la (4-36).

Capítulo 4

RESULTADOS

En la fig. (4-1) se grafica la solución analítica (3.25) con la solución numérica del problema (2.71)-(2.75) para los parámetros $\alpha = \bar{\varepsilon} = 0$ y $\rho = 1$, identificadas en la gráfica como la solución de Florschuetz y la numérica como $J_a \gg 1$. Se puede apreciar que ambas coinciden, lo que sugiere que el método numérico empleado es correcto. Las demás gráficas son las soluciones numéricas del problema descrito por (2.71)-(2.75), para los números de Jakob, 5, 10, 20, 50, comparándose estas con los mismos casos del problema descrito en Okhosimskii [25]. Para el caso del numérico y el analítico se puede apreciar que el radio a nunca llega a colapsarse ya que la ec. (3.25) para $a = 0$ produce una indeterminación. Este resultado físicamente representa una burbuja que puede disipar energía a lo largo del tiempo infinitamente.

Para los números de Jakob finitos se puede ver que el colapso es más rápido al utilizar el modelo descrito por (2.71)-(2.75), que para los mismos casos de Okhosimskii [25], esto se debe a que el problema por él descrito, depende explícitamente de los números de Jakob, J_a y haber efectuado un escalamiento incorrecto, ya que el problema por ser singular requiere un tratamiento propio de las técnicas de la teoría de la capa límite como se menciona en Bender et al. [30] . para $J_a \gg 1$. En este problema existe una capa límite por donde el calor se transfiere y la temperatura varía de manera importante en una región muy pequeña. Ignorar la capa límite es equivalente a ignorar la física fundamental del problema.

Al comparar las curvas del colapso en la fig. (4-1) para los mismos números de Jakob J_a con los de [25], se observa que el arranque sigue la misma trayectoria y que la tendencia es la de separarse al alcanzar aproximadamente la mitad del tamaño original de la burbuja $a \sim 0,5$. Al

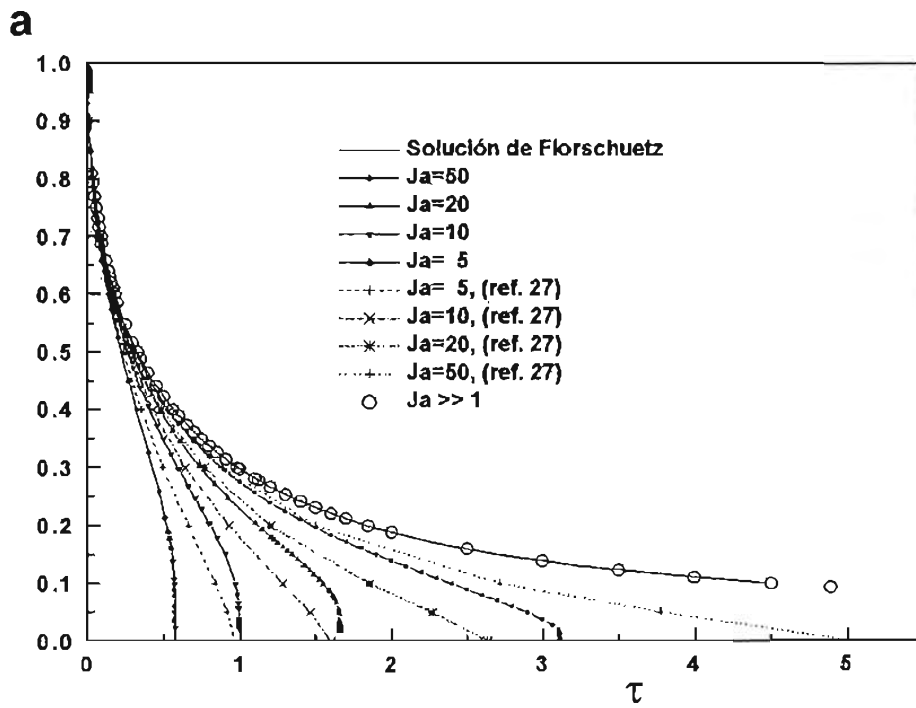


Figura 4-1: Evolución del radio con el tiempo, ec. (3.25) y solución numérica comparada para $J_a = 5, 10, 20$ y 50 con [25]

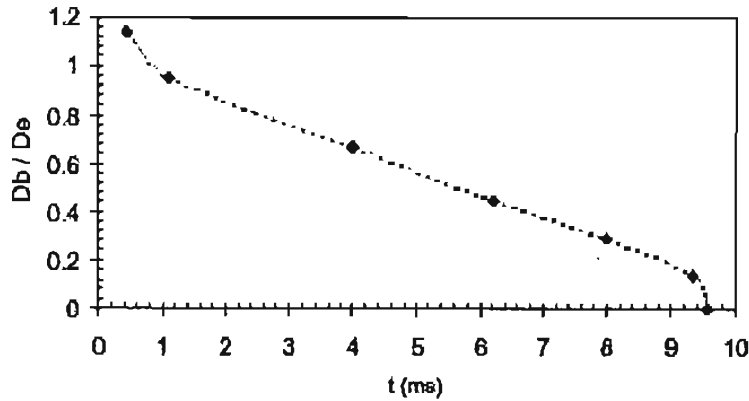


Figura 4-2: Evolución del radio con el tiempo de ref. [26]

correr el tiempo, las curvas se separan para colapsar por separado en un tiempo casi del doble de una con respecto a la otra. Un punto importante es la forma del colapso, en nuestro caso el colapso es abrupto y el radio cae con una pendiente muy grande $da/d\tau \rightarrow \infty$, mientras en [25] el colapso es suave. Al comparar con el trabajo experimental de Pakleza et. al. [26], quienes midieron con una cámara rápida (4500 cuadros por segundo), se puede confirmar este efecto en el momento del colapso en la fig. (4-2).

El efecto del colapso final no se había podido observar en los trabajos anteriormente citados [19], [14], [22], etc. ya que este fenómeno ocurre en un tiempo tan corto que no se había podido fotografiar, hasta el trabajo de Pakleza et. al. [26]. Se puede ver de la ec. (2.71) que los términos de orden ϵ , son generados por la curvatura de la burbuja, en la fig (4-1) se puede apreciar que al no tomarlos en cuenta se genera la solución de Florshtuetz et. al. [22] que es la misma para $J_a \gg 1$. Para valores finitos del número de Jakob, estos efectos son los responsables de disminuir el tiempo de colapso separando las curvas de la curva para $J_a \gg 1$ y para nuestro caso, estos términos de orden ϵ son los responsables del colapso final abrupto.

La interpretación física de lo anterior es que, para tiempos muy cortos y próximos al inicio del fenómeno, el mecanismo de transferencia de calor dominante es la conducción, la burbuja conduce como una esfera en cuya periferia existe una capa límite delgada, el espesor de esta capa es función del Jakob y mientras mayor sea éste más delgada es la capa comparada con el radio de la burbuja. De esta manera, la aproximación plana de conducción es válida en el

inicio, como se desarrolla en algunas soluciones anteriormente propuestas [11], [5] y [22]. Sin embargo, al transcurrir el tiempo los efectos de convección y de curvatura son apreciables; ya que al reducirse el radio a el efecto de curvatura se incrementa continuamente hasta el colapso y el efecto convectivo, se incrementa debido a que la velocidad $da/d\tau$ también lo hace, llegando a valores divergentes como ya se mencionó. En el colapso final el efecto de curvatura es más dominante, ya que el espesor de la capa límite es comparable con el radio que la burbuja tiene en ese momento, invalidando así la hipótesis inicial de una capa límite delgada durante todo el fenómeno. Por otra parte la forma en la que el colapso final se lleva a cabo tan abruptamente y la variación del radio $da/d\tau \rightarrow \infty$ hace pensar que los efectos dominantes para esta situación son los inerciales y no son los de transferencia de calor como ocurrió durante casi todo el fenómeno. Lo anterior ha sido ilustrado con los resultados de Mayinger et. al. [19], [20] y [21]. En estos trabajos entre otras cosas se define hasta donde es válido el límite térmico y para $Ja > 80$ los efectos inerciales son claramente dominantes.

Las figs., (4-3), (4-4), (4-5) y (4-6) corresponden a los perfiles de temperatura para los números de Jakob 5, 10, 20 y 50; respectivamente y en ellas se puede apreciar el espesor de la capa límite entre los valores máximo y mínimo de la temperatura adimensional θ como función de la posición ζ para varios tiempos. Por ejemplo, para $Ja = 5$, se puede apreciar que la temperatura avanza en la posición hasta el tiempo $\tau \sim 0,3$, para valores de $\tau \geq 0,3$, la temperatura en las posiciones más alejadas comienza a decrecer, hasta alcanzar prácticamente el perfil inicial. Esto es así porque al reducir la burbuja su tamaño, disminuye el área de transferencia, perdiendo capacidad para disipar calor al líquido y en algún momento la energía contenida en la burbuja también debe terminarse. Esto es importante ya que lo anterior no está reportado en la literatura especializada, por ejemplo en [25] los perfiles ahí presentados siempre son crecientes, lo cual es un resultado inconsistente ya que la energía térmica durante el proceso transitorio debe disminuir. Las figs. (4-4), (4-5) y (4-6) a primera vista muestran un incremento de la capa límite con el número de Jakob que es el parámetro que identifica el espesor de la capa límite térmica en la escala de ζ , sin embargo, físicamente ocurre lo contrario, ya que en la escala original η , el espesor de la capa disminuye con el Jakob Ja .

Las graficas anteriores muestran el comportamiento del radio y la temperatura para valores de los parámetros $\alpha = \bar{\epsilon} = 0$ y $\rho = 1$, esto con el fin de probar el modelo con las teorías

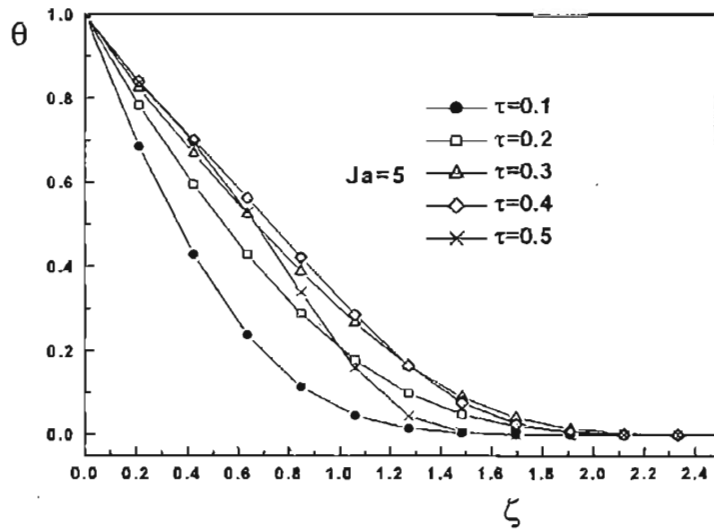


Figura 4-3: Temperatura contra posición, $Ja=5$

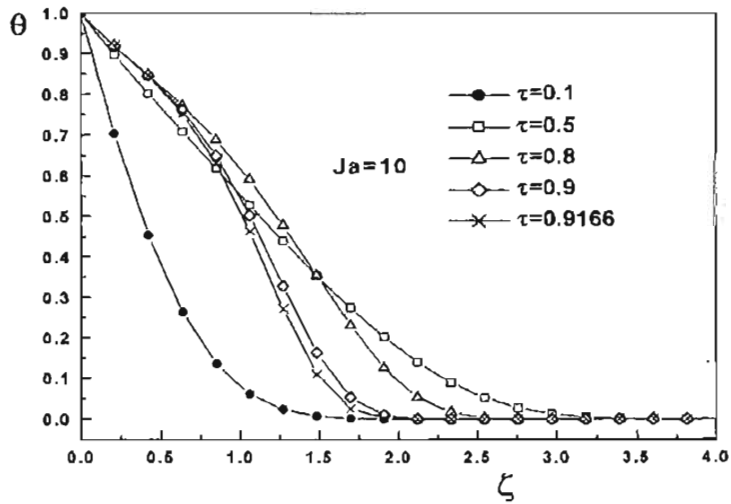


Figura 4-4: Temperatura contra posición para $Ja=10$

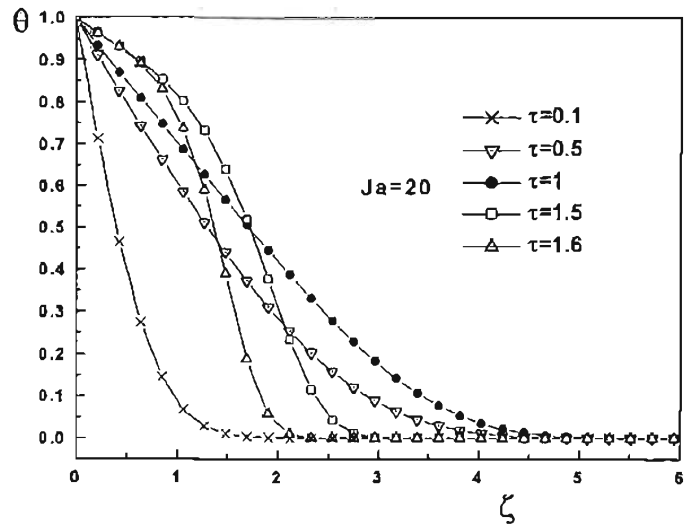


Figura 4-5: Temperatura contra posición $Ja=20$

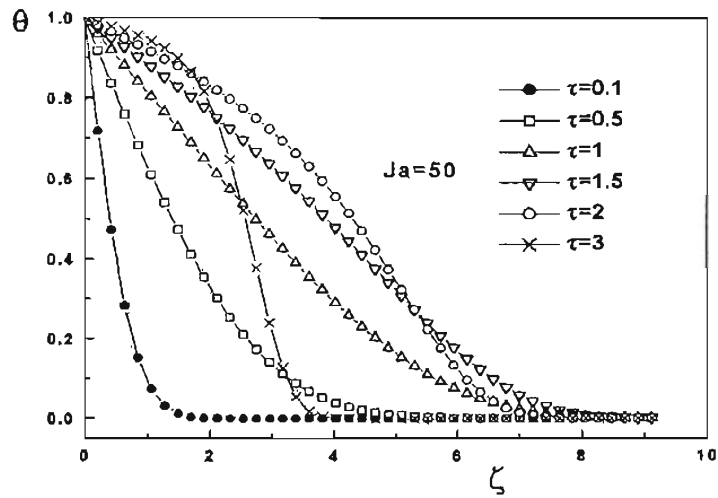


Figura 4-6: Temperatura contra posición para $Ja=50$

anteriormente planteadas en la literatura [22] y [25]. Para probar el modelo completo y detallar los efectos que producen en la evolución del radio y en el perfil de temperaturas los parámetros α y ρ , se efectúan las corridas numéricas del modelo descrito por (2.71)-(2.75).

Los parámetros α y ρ no son independientes del J_a , esto es debido a que el Jakob y los otros dos parámetros dependen de la temperatura de saturación T_s y no es posible asignar valores arbitrarios a ninguno de ellos. Algunos valores representativos de dichos parámetros obtenidos de la literatura especializada se pueden apreciar en la Tabla 4-1 y la Tabla 4-2. En la Tabla 4-1 y en las tres primeras columnas de la Tabla 4-2 se tienen los datos extrapolados de las referencias [20] y [22] para el caso del agua; y en las tres últimas columnas de Tabla 4-2 se tienen los datos extrapolados para el caso del Refrigerante 113, también de la referencia [20]. Las fig. 8 corresponde a la evolución del radio para un valor fijo de α variando J_a y su correspondiente ρ . A cada figura de la evolución del radio a contra el tiempo τ le corresponde una distribución de temperatura en el tiempo y espacio y que aquí vienen graficadas con las figs. (4-7), (4-8), (4-9), (4-10), (4-11) y (4-12).

Tabla 4-1 Valores de los parámetros utilizados en el modelo descrito por (2.71)-(2.75), extrapolados para el caso del agua de las referencias [20] y [22].

$\alpha = 0,000602$	$J_a = 10$	$\rho = 1,162$	$\alpha = 0,000619$	$J_a = 10$	$\rho = 1,2177$
	$J_a = 15$	$\rho = 1,1804$		$J_a = 15$	$\rho = 1,3452$
	$J_a = 20$	$\rho = 1,2489$		$J_a = 20$	$\rho = 1,4829$
	$J_a = 25$	$\rho = 1,3226$		$J_a = 25$	$\rho = 1,6877$
	$J_a = 30$	$\rho = 1,4$		$J_a = 30$	$\rho = 1,8198$
	$J_a = 40$	$\rho = 1,5761$		$J_a = 40$	$\rho = 2,2515$

Tabla 4-1 Valores de los parámetros utilizados en el modelo descrito por (2.71)-(2.75), extrapolados en las tres primeras columnas para el caso del agua de las referencias [20] y [22] y las tres últimas para el caso del R113 de la referencia [20].

$\alpha = 0,0023$	$J_a = 10$	$\rho = 1,39$	$\alpha = 0,00238$	$J_a = 10$	$\rho = 1,24$
	$J_a = 15$	$\rho = 1,5$		$J_a = 15$	$\rho = 1,388$
	$J_a = 20$	$\rho = 1,948$		$J_a = 20$	$\rho = 1,555$
	$J_a = 25$	$\rho = 2,788$		$J_a = 25$	$\rho = 1,763$
	$J_a = 40$	$\rho = 4,086$		$J_a = 40$	$\rho = 1,97$

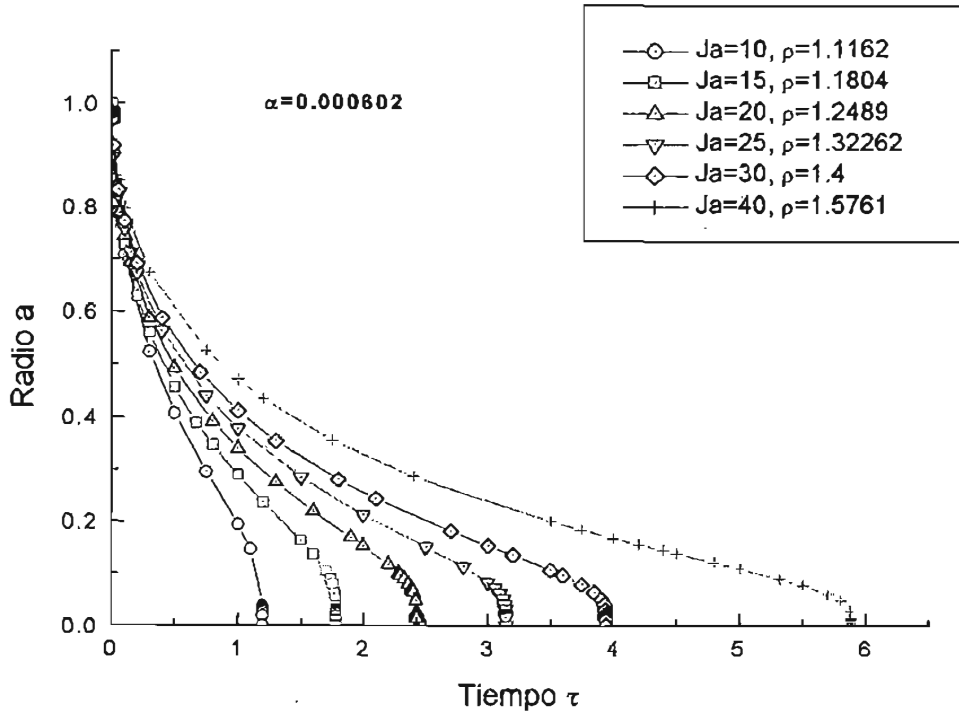


Figura 4-7: Evolución del radio con el tiempo para el agua con $\alpha = 0,000602$

En la fig. (4-7) se puede apreciar que al aumentar el Jakob el tiempo de colapso se incrementa comparado con el obtenido en la fig. (4-1).

En la fig. (4-8) se puede apreciar la evolución de la temperatura en el tiempo y lo primero que se observa es que el espesor de la capa límite aumenta con el Jakob, por ejemplo; para $J_a = 10$ en la escala de ζ se tiene un espesor aproximado de $\zeta \sim 2,6$, mientras que para $J_a = 40$ el espesor $\zeta \sim 5$. Cuando la capa límite alcanza un valor máximo, entonces, la parte más alejada de la capa límite comienza a regresar hacia el valor inicial y en algunos casos hasta llegar a exhibir el perfil inicial. Este regreso de la temperatura comienza cuando la burbuja ha adquirido menos de la tercera parte de su tamaño inicial aproximadamente $a \sim 0,3$. La explicación física es que la burbuja al contraerse ha disipado suficiente energía térmica, lo cual impide seguir calentando el líquido. Además al contraerse la burbuja, disminuye su área de transferencia, por lo tanto le es más difícil disipar energía térmica. En las demás figuras se puede apreciar el mismo

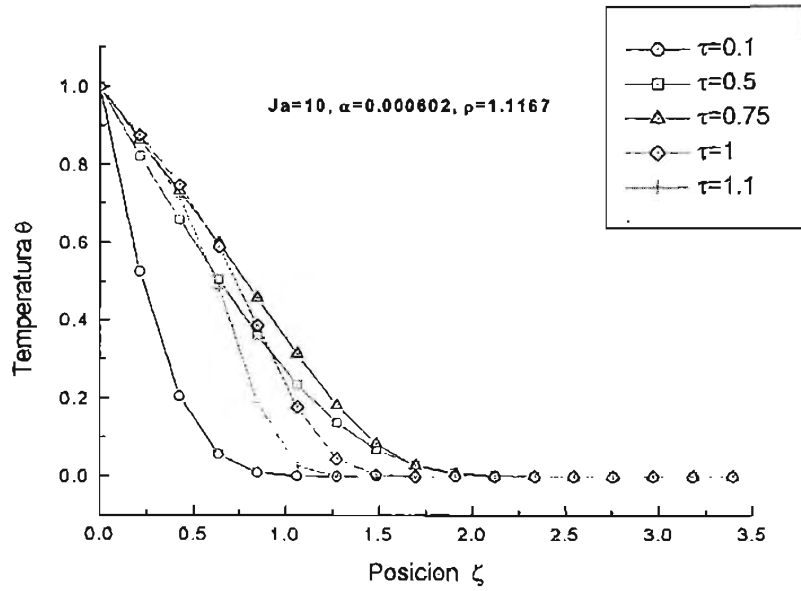


Figura 4-8: Temperatura contra posición con $Ja=10, \alpha = 0,000602$

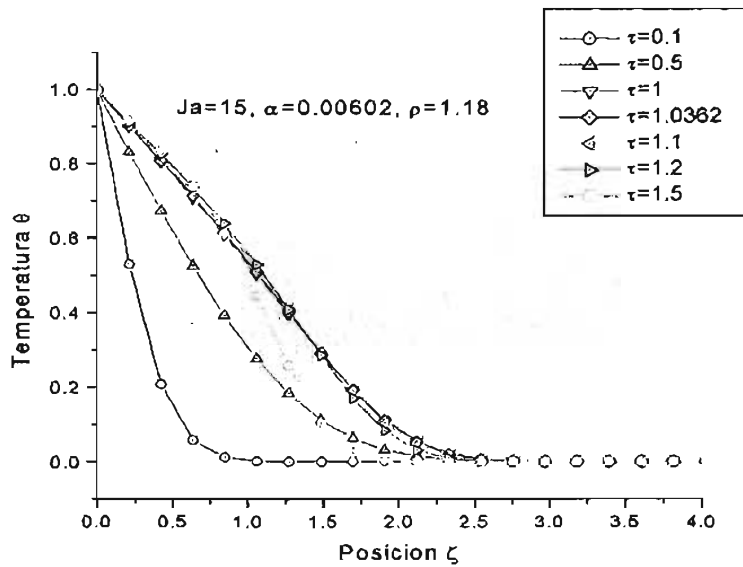


Figura 4-9: Temperatura contra posición con $Ja=15, \alpha = 0,000602$

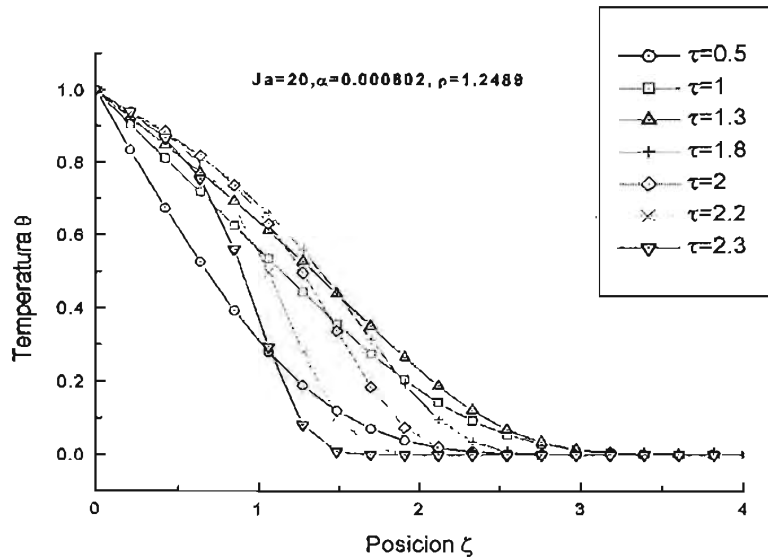


Figura 4-10: Temperatura contra posición con $Ja=20, \alpha = 0,000602$

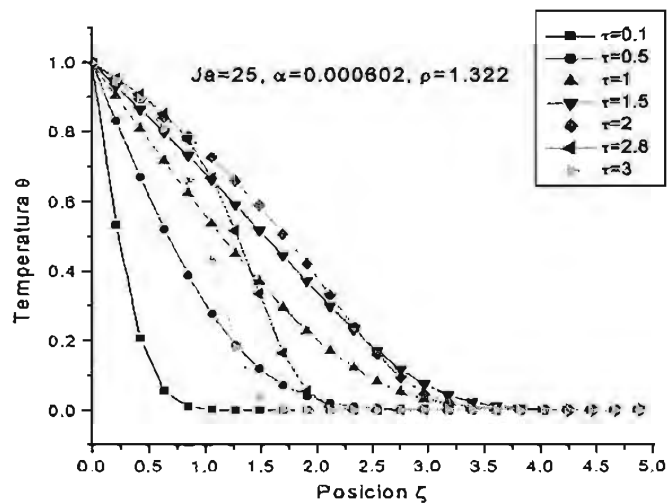


Figura 4-11: Temperatura contra posición con $Ja=25, \alpha = 0,000602$

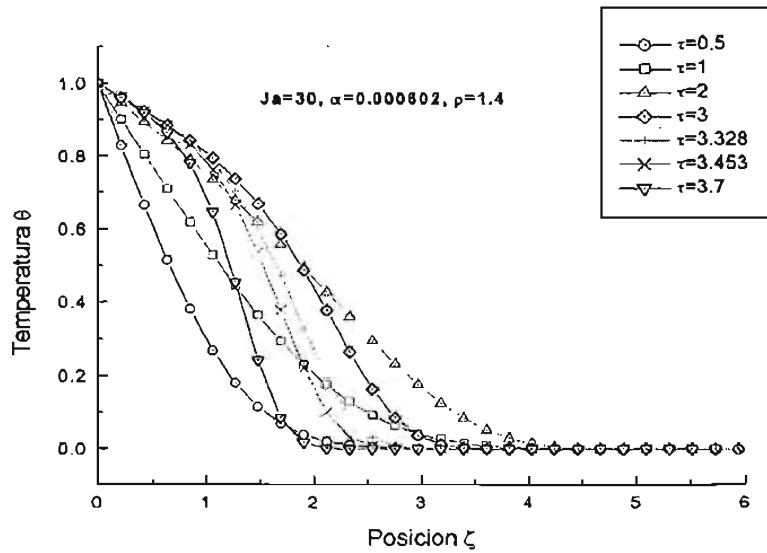


Figura 4-12: Temperatura contra posición con $Ja=30, \alpha = 0,000602$

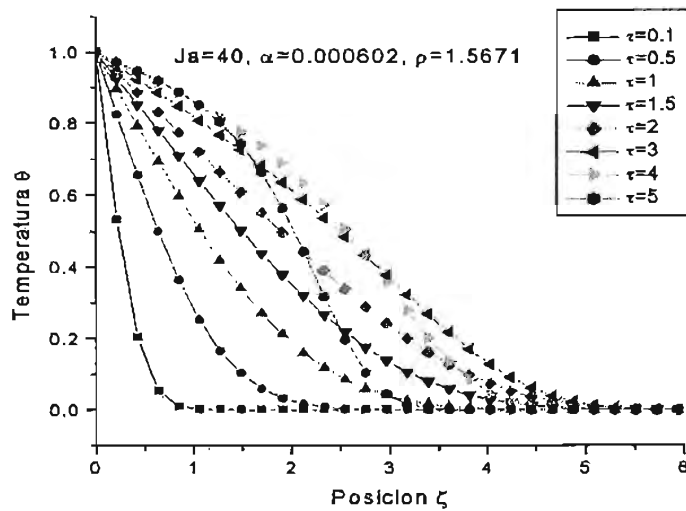


Figura 4-13: Temperatura contra posición con $Ja=40, \alpha = 0,000602$

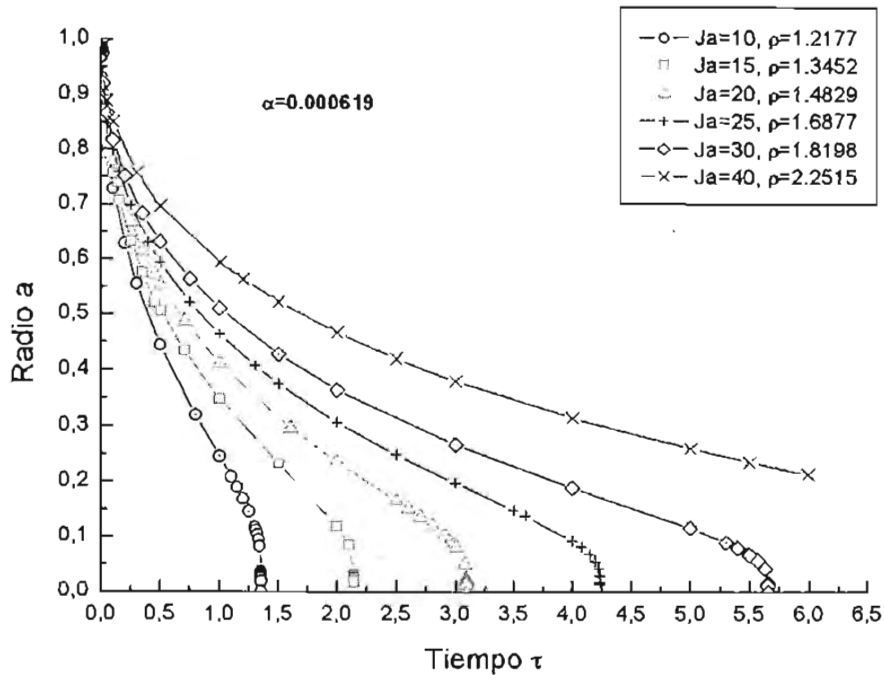


Figura 4-14: Evolución del radio con el tiempo para $\alpha = 0,000619$

comportamiento, aunque conforme aumenta el Jakob, aumenta el tiempo de colapso y permite graficar mayor cantidad de temperaturas, como las que se aprecian en las figs. (4-9), (4-10), (4-11), (4-12) y (4-13).

En la figura (4-14) se gráfica para un $\alpha = 0,000619$, y se observa que el tiempo de colapso crece con ambos parámetros pero con ρ crece aún más y para el valor de Jakob 40 no se alcanza a ver el colapso. Las figs. (4-15), (4-16), (4-17), (4-18), (4-19) y (4-20), son las temperaturas contra la posición donde se pueden ver las mismas tendencias al colapsarse que en las gráficas anteriores, pero con un ligero crecimiento en la capa límite.

La fig. (4-21) es la evolución del radio a contra el tiempo τ para $\alpha = 0,0023$, para los $J_a = 10, 15, 20, 30$ y 40 con sus respectivas ρ para el agua. El número de Jakob, para valores mayores de 25, el programa no puede registrar el colapso, demostrándose así que al aumentar tanto α como ρ el tiempo de colapso se incrementa, siendo ambos parámetros amortiguantes del colapso.

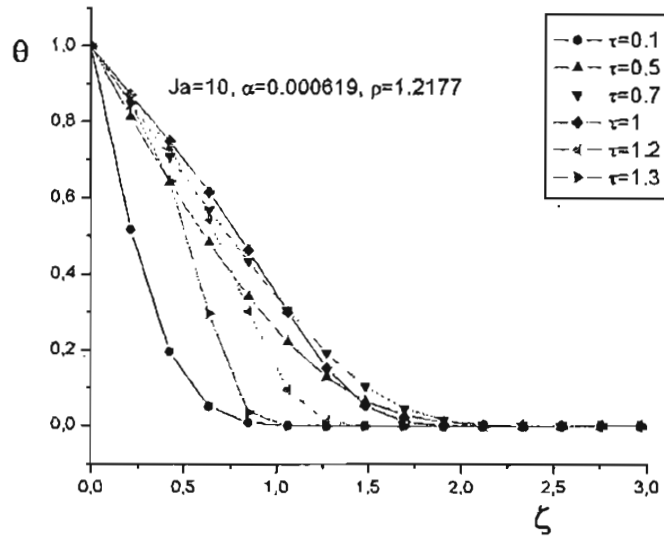


Figura 4-15: Temperatura contra posición con $Ja=10$ y $\alpha = 0,000619$

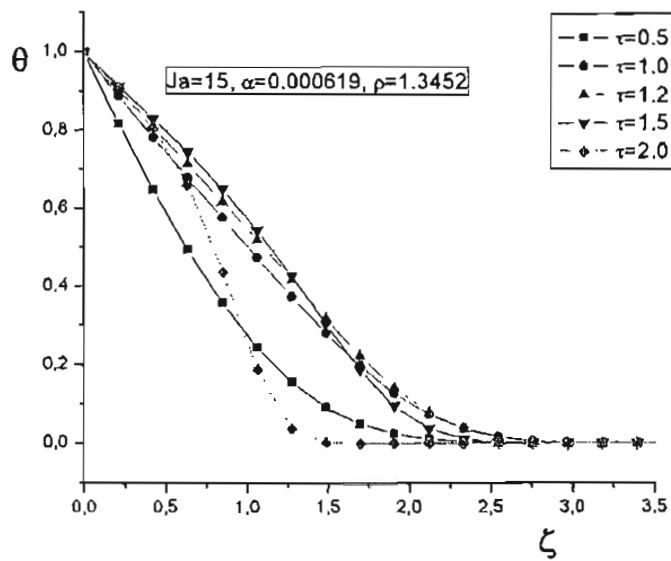


Figura 4-16: Temperatura contra posición con $Ja=15$ y $\alpha = 0,000619$

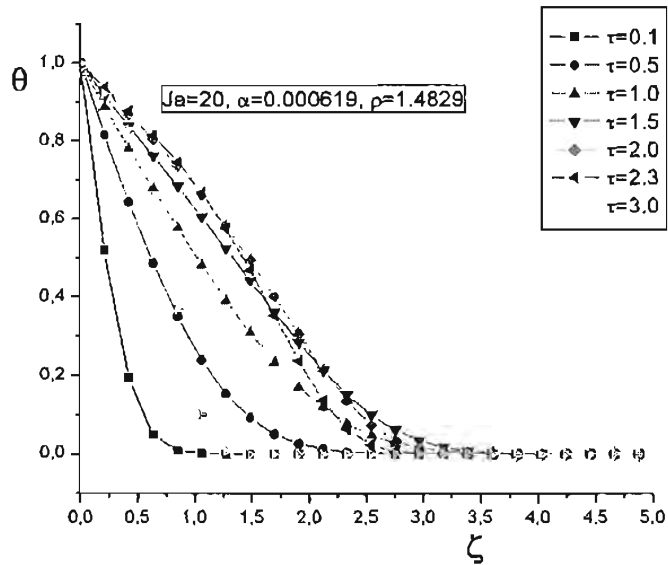


Figura 4-17: Temperatura contra posición con $Ja=20$ y $\alpha = 0,000619$

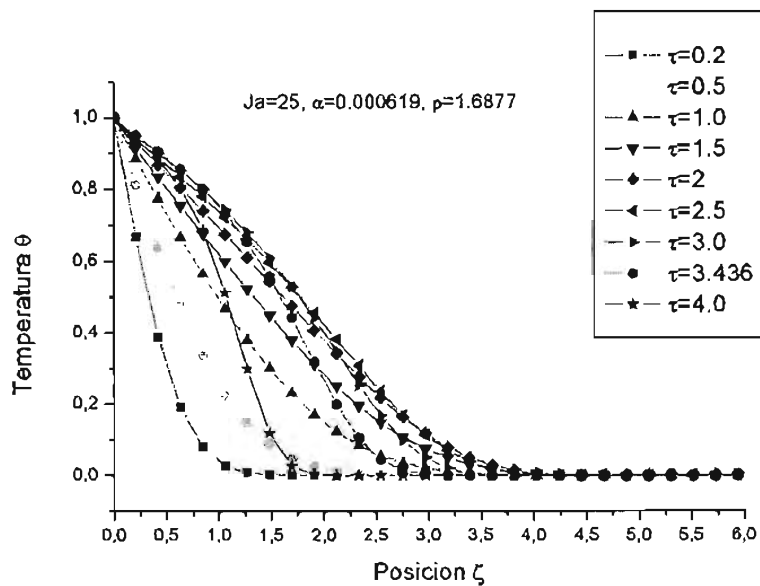


Figura 4-18: Temperatura contra posición con $Ja=25$ y $\alpha = 0,000619$

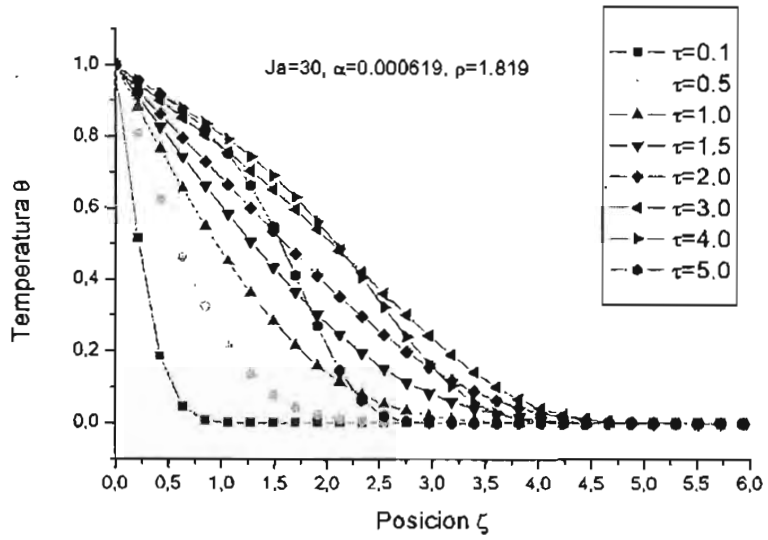


Figura 4-19: Temperatura contra posición con $Ja=30$ y $\alpha = 0,000619$

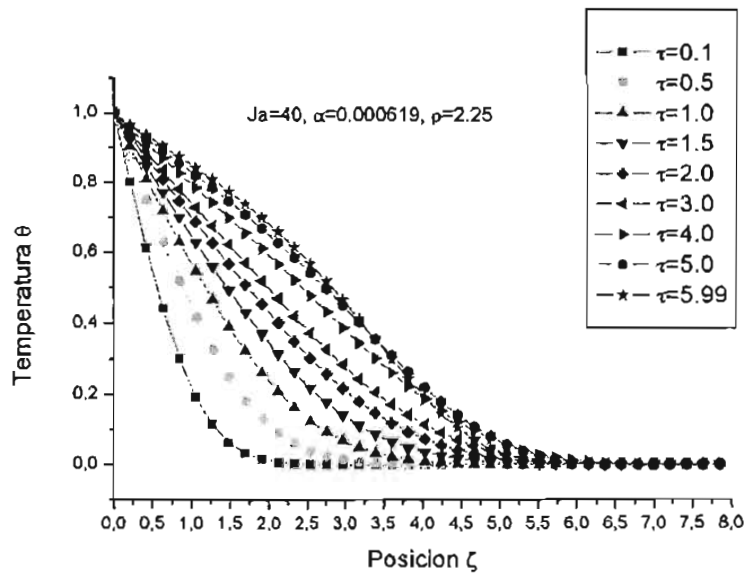


Figura 4-20: Temperatura contra posición con $Ja=40$ y $\alpha = 0,000619$

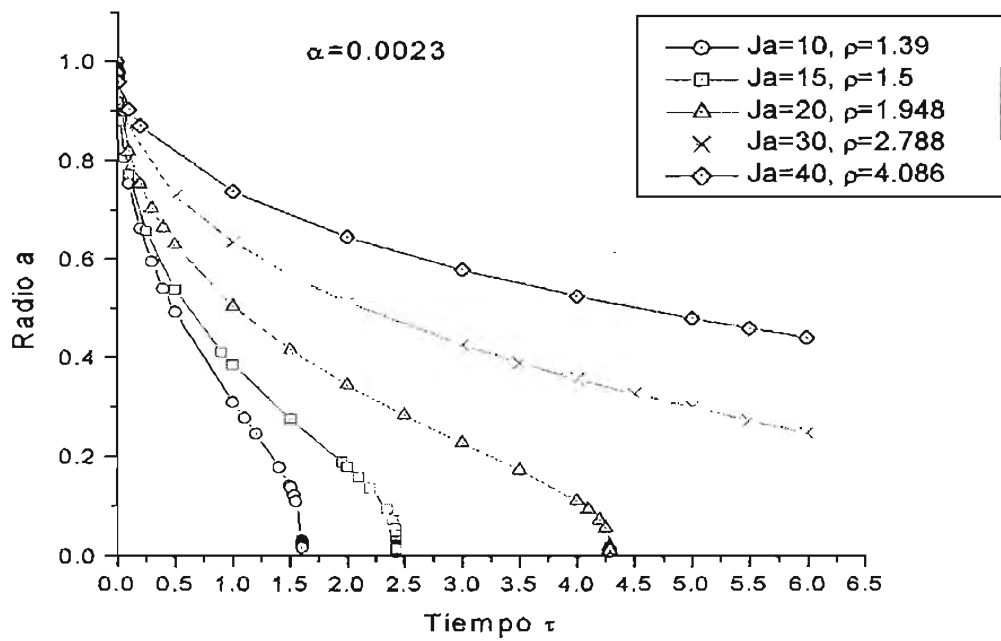


Figura 4-21: Evolución del radio con el tiempo con $\alpha = 0,0023$

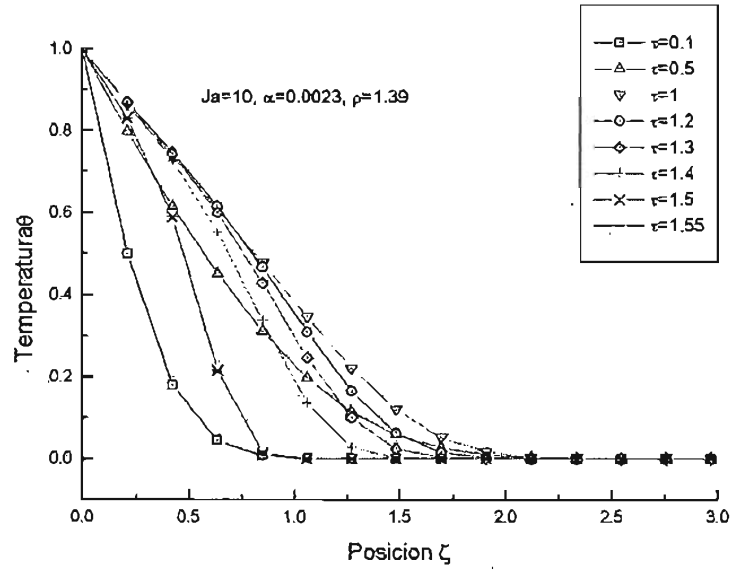


Figura 4-22: Temperatura contra posición con $Ja=10, \alpha = 0,0023$

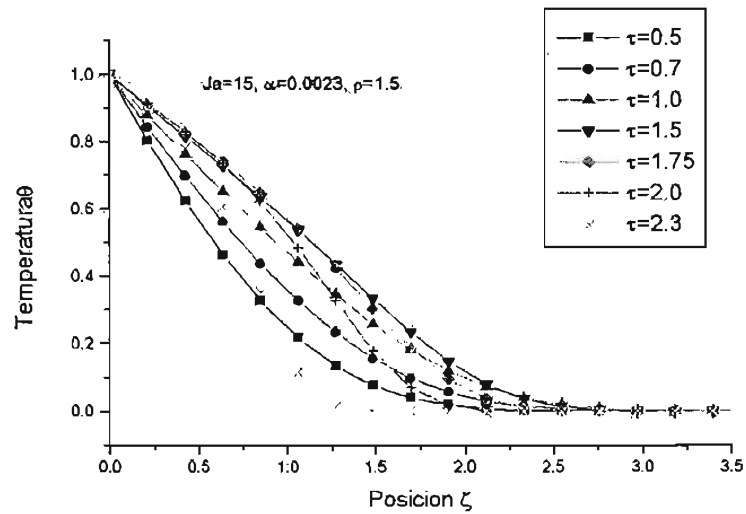


Figura 4-23: Temperartura contra posición con $Ja=15, \alpha = 0,0023$

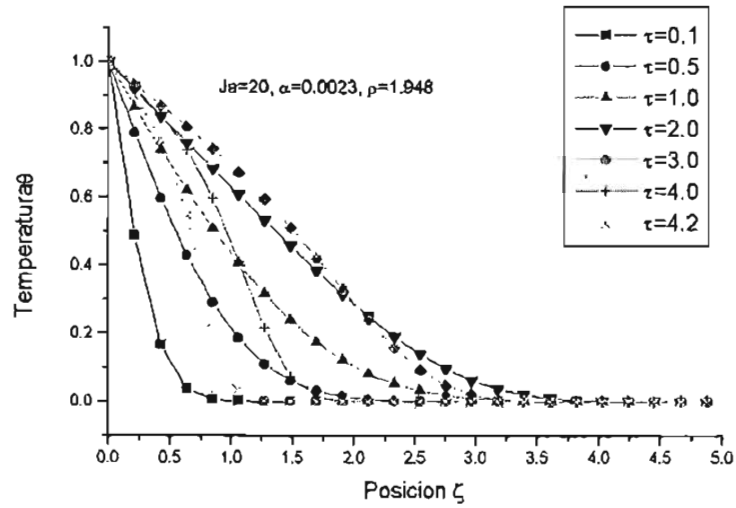


Figura 4-24: Temperatura contra posición con $Ja=20, \alpha = 0,0023$

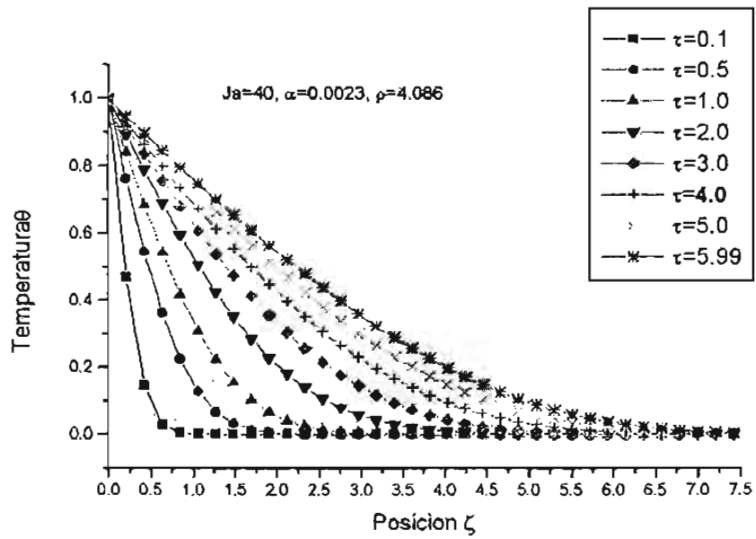


Figura 4-25: Temperatura contra posición con $Ja=40, \alpha = 0,0023$

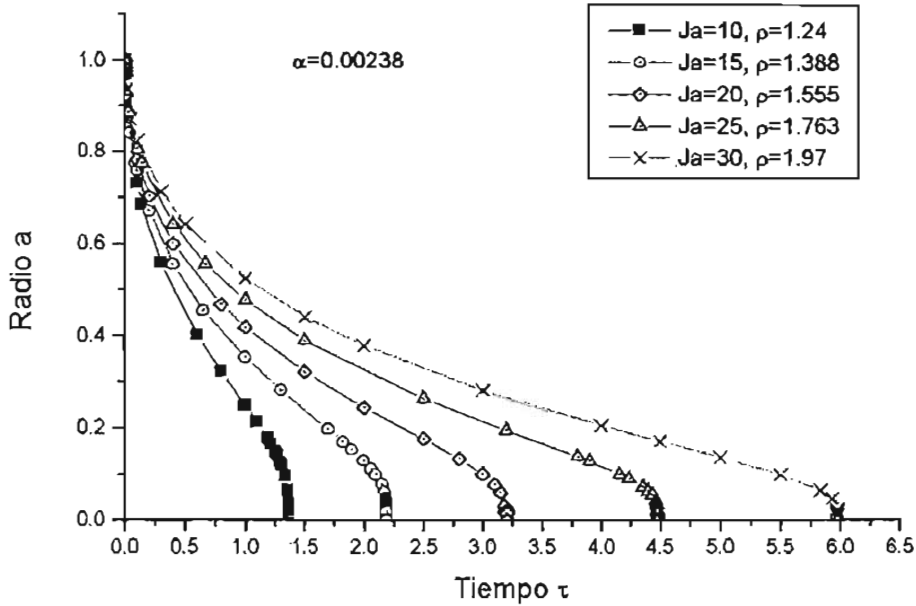


Figura 4-26: Evolución del radio con el tiempo para el refrigerante 113, con $\alpha = 0,00238$

En las figs. (4-22), (4-23), (4-24) y (4-25) se grafican las temperaturas correspondientes para los radios de la fig. (4-21), y como se puede apreciar al incrementarse J_a (en la escala de ζ), α y ρ , se incrementa el espesor de la capa límite, debido a que el efecto de amortiguamiento de los parámetros α y ρ permite que la burbuja desprenda más energía térmica, aumentando con ello el espesor de la capa límite.

La fig. (4-26) es la evolución del radio con el tiempo para el refrigerante 113, para $\alpha = 0,00238$, con $J_a = 10, 15, 20, 25$ y 30 , con sus correspondientes ρ , este caso, el tiempo de colapso es menor a pesar de tener α similares que para el caso de la fig. (4-21). El parámetro que en este caso retrasa el colapso es ρ y sus correspondientes perfiles de temperatura se grafican en las figs. (4-27), (4-28), (4-29), (4-30) y (4-31).

Para comprobar el efecto de los parámetros, las figs.(4-32), (4-33), (4-34), (4-35) y (4-36)

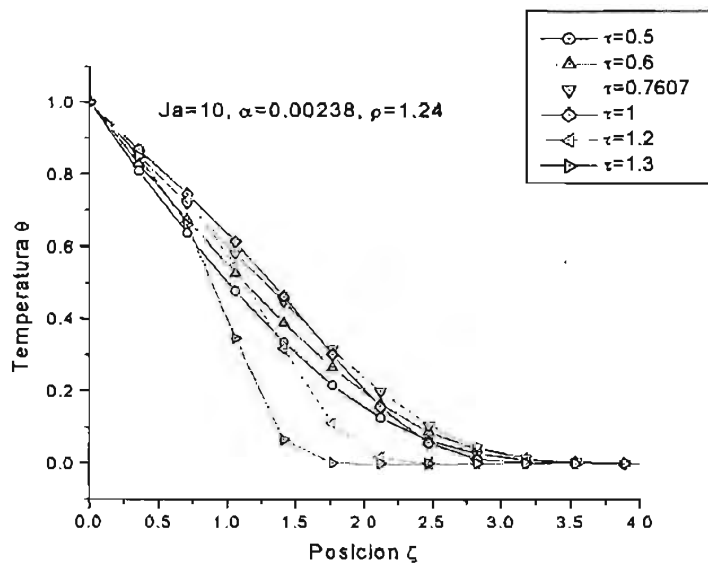


Figura 4-27: Temperatura contra posición con $Ja=10, \alpha = 0,00238$

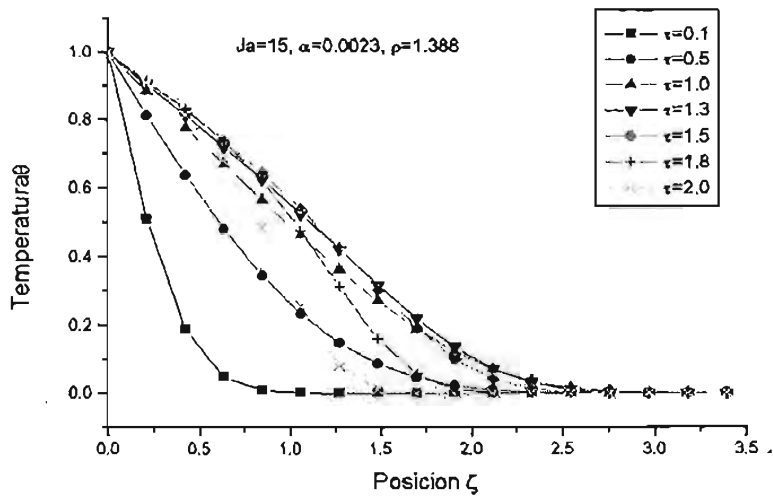


Figura 4-28: Temperatura contra posición con $Ja=15, \alpha = 0,00238$

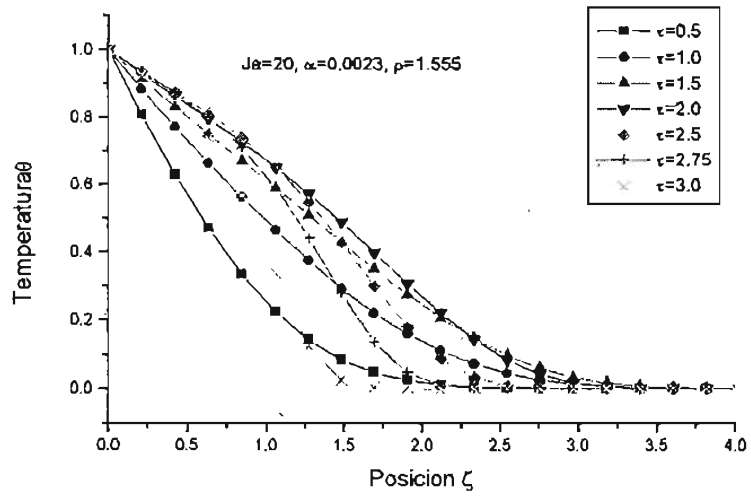


Figura 4-29: Temperatura contra posición con $Ja=20$, $\alpha = 0,00238$

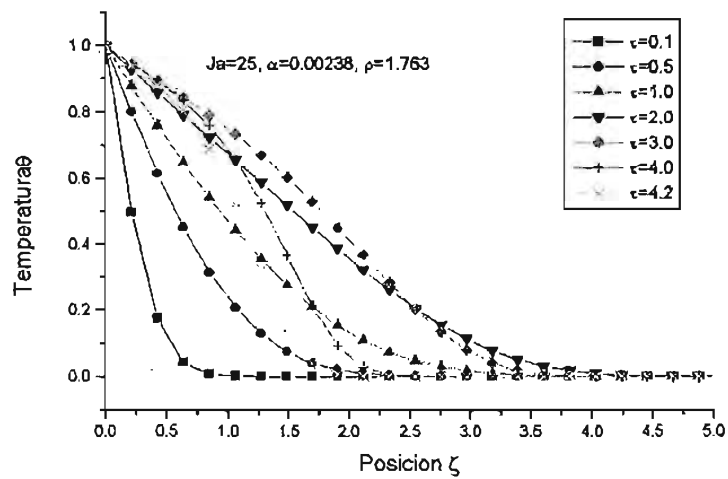


Figura 4-30: Temperatura contra posición con $Ja=25$, $\alpha = 0,00238$

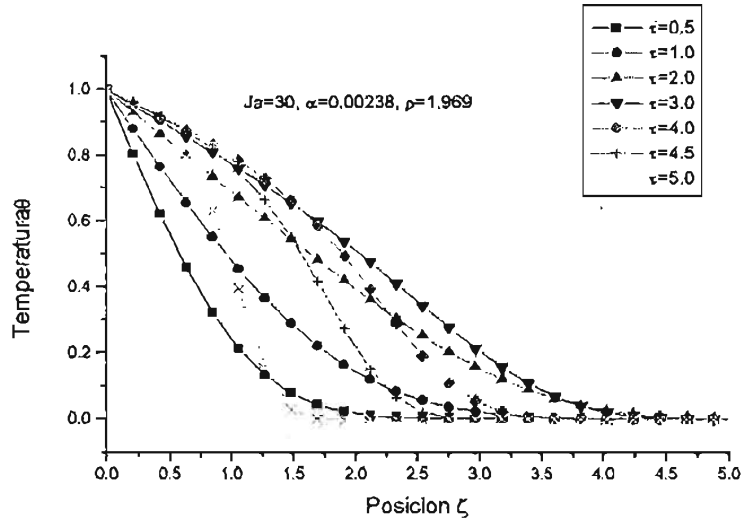


Figura 4-31: Temperatura contra posición con $Ja=30, \alpha = 0,00238$

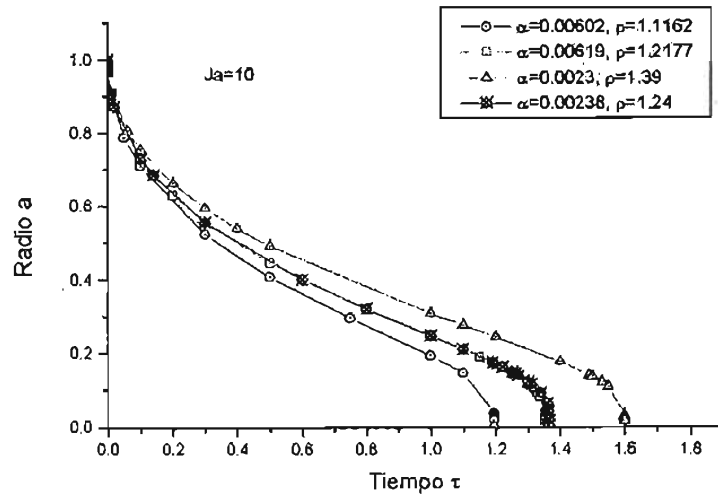


Figura 4-32: Evolución del radio con el tiempo para $Ja=10$

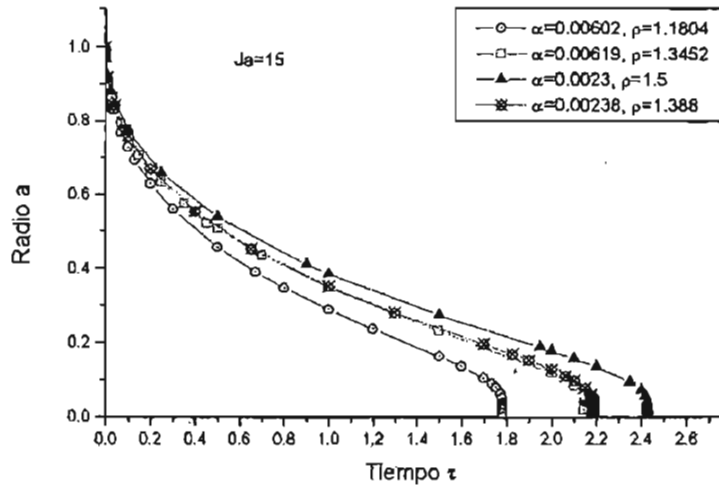


Figura 4-33: Evolución del radio con el tiempo para $Ja=15$

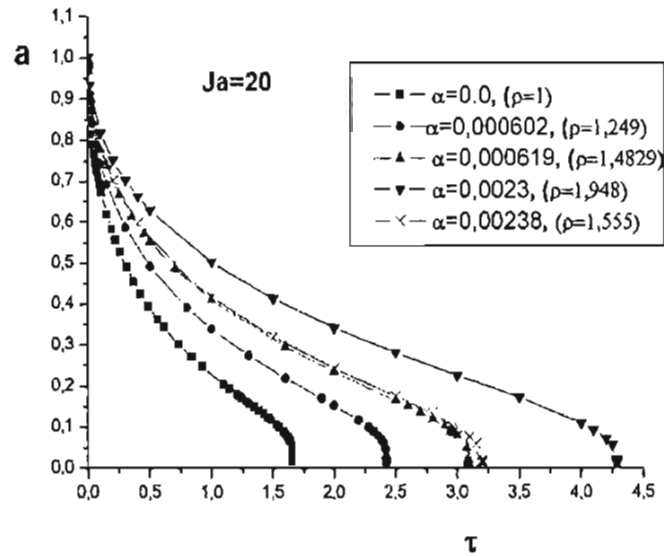


Figura 4-34: Evolución del radio con el tiempo para $Ja = 20$

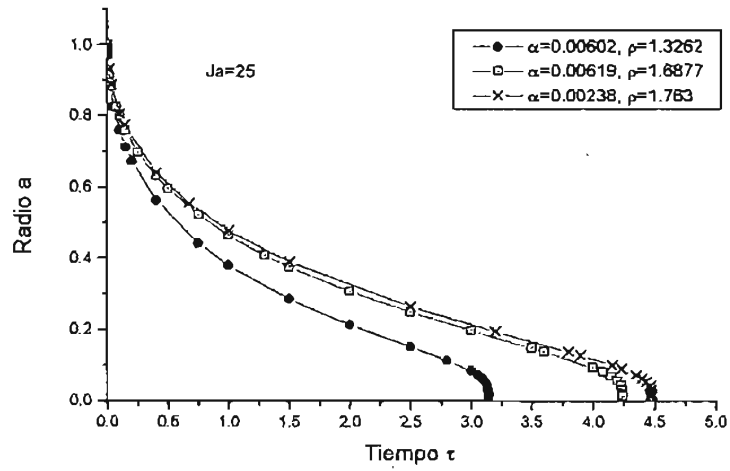


Figura 4-35: Evolución del radio con el tiempo para $Ja=25$

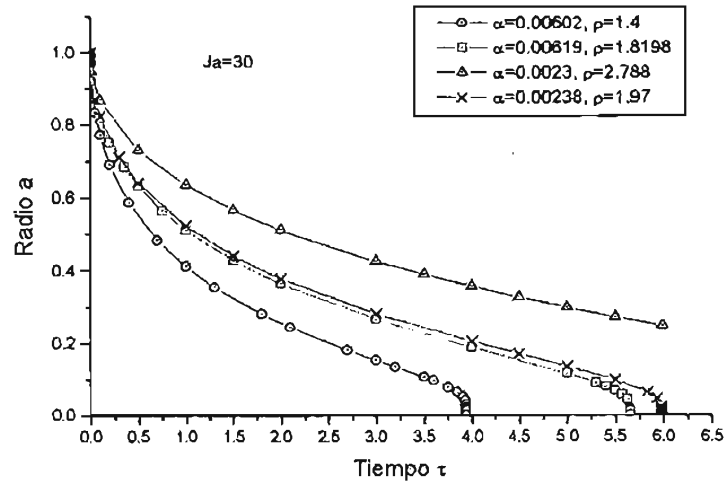


Figura 4-36: Evolución del radio con el tiempo para $Ja=30$

se grafican para el mismo Jakob, distintos valores de α y sus respectivos ρ . En la fig. (4-34), se agrega la curva para $J_a = 20$, con $\alpha = 0$ y $\rho = 1$, tomada de la fig. (4-1), en donde claramente se ve que los parámetros α y ρ retrasan el colapso, y no tomarlos en cuenta, puede llevar a un error muy importante, ya que se aprecia un adelanto en el colapso respecto de su más cercana hasta del 40 %.

En todas las figuras se observa que al incrementarse el Jakob, el tiempo para que se colapse la burbuja también aumenta. Al incrementarse el parámetro α , el tiempo para que la burbuja se colapse también aumenta y de igual forma al incrementarse el parámetro ρ , el tiempo para que la burbuja se colapse también aumenta. Sin embargo, se pensaba inicialmente que ρ era un parámetro de menor relevancia y como puede verse ahora, es de mayor influencia en el fenómeno, sobre todo al final del colapso, por encima del parámetro α . Esto se puede comprobar al examinar las figs. de la (4-32) a la (4-36), para valores de α similares $\alpha = 0,000602$ y $\alpha = 0,000619$, por ejemplo, en el tiempo de colapso final se observa una diferencia del 20%, en cambio para $\alpha = 0,000619$ y $\alpha = 0,0023$, se tiene en un caso $\rho = 1,217$ en el primer caso y $\rho = 1,39$ en el segundo, no solo el tiempo de colapso final, sino toda la evolución del radio a con el tiempo es casi idéntica, siendo el parámetro dominante ρ .

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En el presente trabajo el problema del colapso de una burbuja de vapor ha sido estudiado ampliamente con un número importante de variantes; concretamente en este análisis se esclarecieron los límites de validez del colapso de la burbuja por efectos térmicos. La motivación principal es por un lado que al revisar la literatura experimental, como los trabajos de Mayinger et. al. [19], [20], etc. Pakleza et. al. [26], entre otros, se menciona siempre la falta de modelos teóricos con los cuales comparar dichos experimentos. La otra línea de trabajos teóricos tales como los de Florshuetz et. al. [22], Nigmatullin et. al. [2] y Okhosimskii [25] entre otros, no justifican plenamente el estudio del fenómeno con un interior uniforme, ignoran la presencia de la capa límite alrededor de la burbuja, despreciando así los efectos físicos relevantes para el fenómeno. La falta de trabajos teóricos más recientes es una motivación adicional no sólo para el presente trabajo sino para continuar el estudio de mejores modelos. Del lado experimental se continúan produciendo trabajos como el caso de [26] y en el caso de Peng et. al. [34]. Una línea de investigación en ingeniería es en la formación de hidratos tal como se menciona en Gumerov y Chahine [35], otra es la relacionada con la micro biología como se describe en [34] y en el mismo trabajo con aplicaciones en los inyectores de tinta en las nuevas impresoras tal como se aprecia en Aden et. al. [36] y finalmente los experimentos de burbujas en corrientes con obstrucción como se menciona en Gaston et. al. [37]. Estos tres ejemplos demuestran que existe un interés en seguir desarrollando el estudio del colapso con mejores técnicas y además es un tema vigente.

Las conclusiones se dividen en dos partes, las conclusiones referentes a la modelación y las

conclusiones referentes a los resultados.

Conclusiones de la modelación La formulación original toma el problema completo del vapor con el líquido y por medio del análisis por órdenes de magnitud se obtuvieron los parámetros relevantes del problema, siendo en primer lugar β y J_a los parámetros dominantes. Por como está formulado el problema el parámetro β es el cociente del tiempo en el que ocurre el fenómeno inercial dividido por el tiempo en el que ocurre el fenómeno térmico, como en los casos reportados en la literatura en [22], Plesset y Prosperetti [7] y en Nigmatullin et. al. [2].

El valor del parámetro $\beta \ll 1$ representa que el tiempo de colapso inercial es muy pequeño comparado con el tiempo para el colapso por efectos térmicos, los valores citados en las tablas (2-1) a (2-3) muestran una variedad de casos reales en los que esto se cumple.

El número de Jakob, J_a , desde los primeros trabajos como el de Plesset y Zwick [12], discrimina cómo se va a transferir el calor. Si $J_a \gg 1$ existe una capa límite delgada cuyo espesor es función del J_a , mientras este se incrementa el espesor de la capa disminuye. Sin embargo en la variable reescalada ζ el incremento del J_a incrementa la penetración de calor. Esto se puede ver en las figuras que contienen al perfil de temperaturas por ejemplo (4-30) a (4-32).

Una limitación de los trabajos anteriores como el de Okhosimskii [25] es que no se sabe el valor máximo que puede alcanzar el número de Jakob J_a para el que el modelo es válido. Por ejemplo en la ec. (2.42), se puede apreciar que β es función del J_a^2 , por lo tanto un valor excesivo $J_a \rightarrow \infty$ como se propone en [25], invalida la hipótesis de que $\beta \ll 1$ y además como se menciona en [19], para $J_a \geq 80$, el colapso vuelve a ser dominado por la inercia y deja de ser el fenómeno térmico, todo esto también se puede ver en las tablas (2-1) a (2-3) para los últimos valores de β .

El parámetro α , que es el cociente de densidades del vapor al líquido, siempre cumple con $\alpha \ll 1$; este parámetro a pesar de ser secundario aparece en el producto $\alpha\beta^2$ y por lógica siempre cumple con $\alpha\beta^2 \ll 1$, este producto aparece multiplicando a los términos inerciales en la ecuación de cantidad de movimiento en el vapor (2.30) y en este caso garantiza que la presión en el interior de la burbuja es uniforme para el fenómeno térmico. Adicionalmente para el caso del fenómeno inercial cuando $\beta \sim 1$ el producto $\alpha\beta^2 \ll 1$ se mantiene, por lo tanto el fenómeno

inercial también cumple con el interior uniforme.

Al integrar la ec. (2.54) con la condición (2.55), se tiene que $p_v(x, \tau) = p(\eta, \tau) = F(\tau) = 1$, con este resultado en la ec (2.56) se tiene que $v_v = 0$ lo que indica que, todos los cambios en la temperatura, presión y velocidad en el vapor del interior de la burbuja son despreciables. Por lo tanto se puede considerar que el interior de la burbuja cumple con la hipótesis del interior uniforme. Esto permite plantear el problema únicamente para el líquido.

Para el límite de $J_a \gg 1$ el problema es singular para la temperatura en la posición, ya que matemáticamente se pierde la derivada de mayor orden, quedando una condición de frontera sin cumplirse, como puede verse en la ec. (2.59). Físicamente se tiene la presencia de una capa límite, es decir la variación de la temperatura ocurre en una región muy pequeña. Es por esto que el problema tuvo que ser reescalado en la variable espacial η con una nueva $\zeta = \eta J_a$.

El parámetro ρ mide la variación puntual de la densidad en el interior de la burbuja desde el inicio hasta el final del colapso. A pesar de ser un parámetro secundario respecto de los demás, demostró ser de relevancia al momento del colapso ya que es un factor de amortiguamiento del colapso retrasando este como se puede ver en las figs. de la 4-32 a la 4-36. Este factor puede alcanzar números mucho mayores de la unidad, y en algunos casos puede carecer de sentido físico. Este es un punto importante para ser desarrollado en trabajos posteriores.

La forma en la que está planteado el problema térmico, todos los efectos inerciales son despreciados, al ver los resultados, por ejemplo las figs. (4-1), (4-7), etc., el inicio es una caída abrupta lo que sugiere que en algún momento $\frac{da}{d\tau} \rightarrow \infty$, este comportamiento si existe lo hace en un lapso de tiempo muy corto. Este comportamiento sugiere que los efectos inerciales en este breve lapso de tiempo tienen mayor importancia que los térmicos, la presente modelación no permite examinar este comportamiento. Este es otro punto importante que requiere mayor atención para trabajos posteriores.

Haciendo referencia al punto anterior, al examinar las figs. (4-1), (4-7), etc., durante el colapso final ocurre un fenómeno similar al inicial $\frac{da}{d\tau} \rightarrow \infty$, los efectos inerciales son dominantes durante un breve periodo de tiempo sobre los térmicos, sin embargo con la presente formulación no es posible distinguir estos efectos con detalle. La explicación física que se tiene, es que cuando la burbuja alcanza un diámetro muy pequeño las fuerzas inerciales que equilibraban a la burbuja no la pueden sostener más provocando con esto que el colapso se acelere. Estudios

que esclarezcan lo que ocurre en estos instantes, requieren una reformulación del problema. Al examinar las ecs. (2.38) y (2.58) se puede pensar que de la ecuación de la energía en la frontera los términos inerciales sean importantes cuando $\frac{da}{d\tau} \rightarrow \infty$ y en consecuencia la ecuación de Rayleigh también influya en el colapso.

Conclusiones de los resultados En la fig (4-1) se encuentra graficada la evolución del radio con el tiempo para varios J_a . Con los valores particulares de $\alpha = 0$ y $\rho = 1$, la tendencia es que al crecer el J_a el tiempo de colapso se incrementa, siendo el límite superior la solución analítica de Florshuetz et. al. [22], expresada por la ec. (3.25); esta ecuación sirvió para probar y calibrar el método numérico al resolver el problema de orden cero expresado por la ec. (3.13).

En la fig (4-1), también se comparan los resultados numéricos para varios J_a , con los resultados de Okhosimskii [25]; la forma de las curvas es similar desde $a = 1$, hasta $a \sim 0,5$. En el presente trabajo el colapso tiende a adelantarse con respecto al de Okhosimskii [25], esto se debe a que Okhosimskii [25] no escala las ecuaciones apropiadamente, perdiendo de vista que existe una capa límite. Al comparar el comportamiento de la fig. (4-1) con el de la fig. (2-1), que es del trabajo experimental de Pakleza et. al [26], se puede ver que son similares, pero sobre todo en el colapso final. Este instante del colapso final no se había podido fotografiar hasta este trabajo [26], siendo en este caso el colapso final notablemente diferente del de [25]. Al examinar la ec. (2.71), se puede ver que el término del lado derecho es el primer orden en Jakob J_a , este término incluye los efectos de curvatura, al no tomarlos en cuenta en el orden cero, esta es únicamente una ecuación de difusión para una superficie plana, que al inicio del fenómeno son muy importantes, pero al correr del tiempo los términos de primer orden comienzan a ser importantes e incluso al llegar al colapso final superan en importancia a los del orden cero.

Físicamente al inicio, la burbuja tiene un radio R que es muchas veces mayor que el espesor de la capa límite δ_T , por lo tanto, al comparar el espesor con el radio se asemeja a un espesor plano, entonces se puede desprestigiar la curvatura. Por otro lado, al disminuir el radio cerca del colapso ocurre que $R \sim \delta_T$, entonces los efectos de esfericidad anteriormente desprestigiados y expresados por el primer orden de J_a en (2.71) son los dominantes. Además el radio al disminuir en tamaño, permite que las fuerzas inerciales vuelvan a ser importantes acelerando el colapso.

En las figs (4-1), (4-7), (4-14), (4-21) y (4-26) se describe cómo para un J_a mayor, el tiempo

de colapso también es mayor. El inicio del colapso es abrupto para luego estabilizarse por un tiempo y al final del colapso el radio vuelve a caer abruptamente. En las figs. (4-7), (4-14), (4-21) y (4-26) se aprecia un incremento en el tiempo de colapso al incrementarse α y ρ .

Las figs. (4-32) a (4-36), muestran la evolución del radio con el tiempo para el mismo número de Jakob J_a , para diferentes valores de α y ρ . Al comparar la influencia de cada uno sobre el fenómeno se aprecia que para valores semejantes de α y diferentes de ρ el tiempo de colapso se incrementa de forma más notoria al incrementar ρ que al incrementar α , volviendo α un parámetro secundario frente a ρ , en el colapso térmico. Sin embargo el parámetro α es más influyente que el β para sostener la hipótesis del interior uniforme.

Para el colapso final, el tamaño de la malla propuesto no permite detallar el comportamiento en los últimos instantes de vida de la burbuja; es decir, los argumentos físicos que sugieren que el colapso en ese instante es controlado por la inercia no son apreciables con el esquema propuesto. Sin embargo al reducir el tamaño de la malla en dos órdenes, aún no se puede apreciar este fenómeno, debido a lo abrupto del colapso. Esto sólo puede lograrse con un nuevo reescalamiento del problema previamente escalado para una nueva escala de tiempo que incluya el colapso final. Se puede sugerir un esquema de escalas múltiples como una línea para trabajos futuros, ya que existen visiblemente tres escalas, la inicial, la intermedia y la del colapso final.

Los perfiles de temperatura graficados en las figs. (4-3) a (4-6), (4-8) a (4-13), (4-15) a (4-20), (4-22) a (4-25) y (4-27) a (4-31), muestran la tendencia de crecer con el J_a . Sin embargo al compararlos con los de las figs. (4-3) a (4-6), son más delgados para el mismo J_a .

La explicación de esto es que la influencia de los parámetros α y ρ en la ec. (2.71) ocurre principalmente en los términos de convección, estos aceleran dramáticamente la transferencia de calor por convección permitiendo transferir más energía, razón por la cual los perfiles de temperatura en las figs. (4-13), (4-15) a (4-20), (4-22) a (4-25) y (4-27) a (4-31), son más delgados que en (4-3) a (4-6) para los mismos J_a . Esto trae como consecuencia que la capa límite se sature de energía en un tiempo menor que en el caso de las figs. (4-3) a (4-6), provocando con esto que el calor se transfiera al líquido en un tiempo más largo, permitiendo que el radio de la burbuja se estabilice durante un tiempo más prolongado, alargando el tiempo de colapso aún más.

Los trabajos a futuro deben centrarse en estudiar las escalas de tiempo que gobiernan los

tres aspectos del colapso, el inicio, la estabilización intermedia y el colapso final. Para el inicio se necesita una descripción exacta de los fenómenos inercial y térmico acoplados, para la etapa intermedia, el modelo tiene una muy buena descripción y para el colapso final, además de acoplar los fenómenos, se deben retener los términos cinéticos de la ecuación de la energía en la frontera (2.38). Estas afirmaciones a priori, sólo se pueden confirmar con la solución analítica del problema térmico, que sería otro trabajo a considerarse. Para determinar el papel definitivo que juegan los parámetros α y ρ , se requiere una mejor descripción del problema del vapor en el interior de la burbuja.

Bibliografía

- [1] Sjoerd Van Stralen & Robert Cole, *Boling Phenomena Physicochemical and Engineering Fundamentals and Applications*, vol. 1, Hemisphere Publishing Corporation (1979).
- [2] R. I. Nigmatullin, *Dynamics of Multiphase Media*, Vol. 1, Hemisphere publ. Corp. (1990).
- [3] C. E. Brennen, *cavitation and Bubble Dynamics*, oxford Engineering Science Series 44, Oxford University Press, New York (1995).
- [4] T. G. Leighton, *TheAcoustic Bubble*, Academic Press, 1994.
- [5] V. E. Nakoryakov. B. G. Pokusaev and I. R. Shreiber, *Wave Propagation in Gas-Liquid Media*, CRC Press, (1993).
- [6] F. Mayinger and Y. M. Chen, *Heat Transfer at the Phase Interface of Condensing Bubbles*, *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference*, vol. 4, p.p. 1913-1918 (1986).
- [7] M. Plesset and A. Prosperetti, *Bubble Dynamics and Cavitation*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, V. 9 145-185 (1977)
- [8] Lord Rayleigh, *Philosophal Magazine*, V. 34 (1917).
- [9] F. Bosnjankovic, *Verdampfung und Flussigkeitsuberhitzung*, *Tech .Mech Thermodynam.* 1, 358 (1930).
- [10] M. Jakob, *Z. Ver. dtsch. Ing.* 76, 1161 (1932).
- [11] H. K. Foster & N. Zuber, *Growth of a Vapor Bubble in a Superheated Liquid*, *J. of Appl. Physics*, v. 25, N. 4, (1954).

- [12] Plesset M. S. and Zwick, The Growth of Vapor Bubbles in Superheated Liquids, J. of Appl. Physics, Vol. 25, No. 4 (1954).
- [13] M. S. Plesset y S. A. Zwick, A Nonsteady Heat Diffusion Problem with Spherical Symmetry, Journal of Applied Physics, vol. 23, no. 1, pp. 95-98, (1952).
- [14] Octave Levenspiel, Collapse of Steam Bubbles in Water, Ind. Engineering and Chemistry, vol. 51, N. 6, p. 787, (1959).
- [15] G. R. Birkhoff, W. J. Margulies & W. A. Horning, Physics of Fluids, vol. 1, p. 201, (1958).
- [16] L. E. Scriven, Chem. Eng. Sci., vol. 10, vol. 1, (1959).
- [17] P. Savic, The Cooling of a Hot Surface by Drops Boiling in Contact with It, Nat., Res., Coun., of Canada, Div. of Mech. Eng. Rep. MT-37 (1958).
- [18] Novak Zuber, The Dynamics of Vapor Bubbles in Nonuniform Temperature Fields, Int. J. of Heat and Mass Transfer, vol. 2, pp. 83-98, (1961).
- [19] F. Mayinger and B. Bucher Subcooled Boiling
- [20] Dieter Nordmann and F. Mayinger, Temperature, Pressure, and Heat Transfer near Condensing Bubbles
- [21] D. Nordmann, Interferometric Investigations of Bubble Growth and Collapse in Subcooled Liquids, Proceedings of The NATO Advanced Study Institute on Two-Phase Flows and Heat Transfer. Aug. 16-27, Istanbul (1976).
- [22] L. W. Florshuetz and B. T. Chao, On the Mechanics of Vapor Bubble Collapse, ASME Journal of Heat Transfer May (1965).
- [23] Din Yu Hsieh, Some Analytical Aspects of Bubble Dynamics, ASME, Journal of Basic Engineering, 991-1005 December (1965).
- [24] R. I. Nigmatullin, N. S. Khabeev and F. B. Nagiev, Dynamics, Heat and Mass Transfer of Vapour-Gas Bubbles in a Liquid, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 24, No. 6, pp. 1033-1044 (1981).

- [25] A. D. Okhostsimskii, The thermal regime of vapour bubble collapse at different Jakob Numbers, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, No. 8, pp. 1569-1576, (1988).
- [26] J. Pakleza, M. C. Duluc, T. A. Kowalevski, Experimental Investigation of Vapour Bubble Growth, *Heat Transfer*, Vol. 3, 479-484, Elsevier (2002).
- [27] A. Prosperetti, Thermal Behaviour of Oscillating Gas Bubbles, *J. of Fluid Mech.* V. 222, pp. 587-616, (1991)
- [28] N. Abdel Aziz, Influence of condensation on the distribution of velocities in a vapor bubble under compression, *Acoust. Physics*, Vol. 39 (6), Nov-Dec. (1993).
- [29] F. Mayinger and Y. M. Chen, Heat Transfer at the Phase Interface of Condensing Bubbles, *Proceedings of The 8th Int. Heat Transfer Conference*, Vol., 1913-1918, (1986).
- [30] Carl M. Bernder y Orzag, *Advanced Numerical Methods for Engineering and Scientists*, Mc Graw Hill, (1978).
- [31] B. B. Mikic, W. M. Rosenhow y P. Griffith, On Bubble Growth Rates, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 13, 657 (1970).
- [32] E. F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat Transfer*, Mc Graw Hill Book Company, New York, (1978).
- [33] J. H. Ferziger, M Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, New York, (1978).
- [34] Peigang Deng, Yi-Kueng Li, Ping Cheng, The Growth and Collapse of A Micro-Bubble Under Pulse Heating, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 43, 4041-4050, (2003).
- [35] N. A. Gumerov y G. L. Chahine, *Dynamics of Bubbles In Conditions of Gas Hydrate Formation*, Dynaflow Inc.
- [36] J. Aden, J. Bohorquez, D. Collins, M. Crook, A. García y U. Hess, The Third Generation HP Thermal Inkjet Printhead Design of HP 1200C, *HP Journal* Feb. (1994).
- [37] M. J. Gaston, J. A. Reizes y G. M. Evans, Modelling of Bubble Dynamics in a Venturi Flow with a Potential flow Method, *Chem . Eng. Sci.*, V. 56, (2001).

Apéndice

Programa para calcular el tiempo de colapso de una burbuja


```

        WRITE (4,100) CAR(1), (I*H, I=0,N,25)
100  FORMAT (1X,A3,45F8.5)
        WRITE (5,106) CAR(2), CAR(3)
106  FORMAT (1X,A10,A10)
        WRITE (3,120) CAR(2), CAR(4)
120  FORMAT (1X,A8,A10)
        PRINT*, "T"
        WRITE (*,200)T, ((U(I,J),I=1,1),J=0,N,25)
200  FORMAT (F7.4, 45F7.4)
c    WRITE (4,107) CAR(2)
c 107 FORMAT (' ',1X,A7)
        WRITE (4,108) T, ((U(I,J),I=1,1),J=0,N,25)
108  FORMAT (F7.4,45F8.5)
        WRITE (5,109) T, RAD(1)
109  FORMAT (2F10.6)
c    WRITE (3,121) T, DT(1)
c 121 FORMAT (2F12.7)
        DO 11 I=1,29900

        T=T+K
        DO 19 Q=1,M-1
        DO L=2,N
        A(L)=- (R-L*((1+SIG)*(AAA(I,Q)-AAA(I-1,Q))-SIG*(AAA(I-1,Q)-
& AAA(I-2,Q))))*(1-1.5*EP*L*H/AAA(I,Q))/AAA(I,Q)-EP*K/(H*
& AAA(I,Q)))
        END DO
        DO L=1,N
        B(L)=1.0+SIG+2*R
        END DO
        DO L=1,N-1
        C(L)=- (R+L*((1+SIG)*(AAA(I,Q)-AAA(I-1,Q))-SIG*(AAA(I-1,Q)-
& AAA(I-2,Q))))*(1-1.5*EP*L*H/AAA(I,Q))/AAA(I,Q)+EP*K/(H*
& AAA(I,Q)))
        END DO
        G(1)=(2*SIG+1)*U(I,1)-SIG*U(I-1,1)+U(I-1,0)*
& (R-((1+SIG)*(AAA(I,Q)-AAA(I-1,Q))-SIG*(AAA(I-1,Q)-
& AAA(I-2,Q))))*(1-1.5*EP*L*H/AAA(I,Q))/AAA(I,Q)-EP*K/(H*
& AAA(I,Q)))
        DO L=2,N-1
        G(L)=(2*SIG+1)*U(I,L)-SIG*U(I-1,L)
        END DO
        G(N)=(2*SIG+1)*U(I,N)-SIG*U(I-1,N)

        CALL TRIDIAG (A, B, C, UX, G, N)
        U(I+1,0)=1.0000001
        DO J=1,N
        U(I+1,J)=UX(J)
        END DO
        RAD(I+1)= RAD(I)+SIG2*(RAD(I)-RAD(I-1))/(1+SIG2)+
& (K*R)**0.5*(-U(I+1,3)+6*U(I+1,2)-3*U(I+1,1)-2.0000002)/

```

```

PROGRAM JAKOB
INTEGER*4 I, J, L, N, M, S
PARAMETER (N=900,M=30, S=30000)
REAL*8 A(2:N), B(N), C(1:N-1),U(0:N,0:S), G(N), UX(N)
REAL*8 RAD(-1:S), AAA(-1:S,M), compar(M), DT(1:S)
REAL*8 H, K, R, T, SIG, SI1, SIG2, EP
CHARACTER*7 CAR(4)
CAR(1)='X='
      CAR(2)='TAU'
CAR(3)='RADIO'
CAR(4)='DERIV'
OPEN(4,FILE='TEMPERJ25.DAT')
OPEN(5,FILE='RADIOJ25.DAT')
OPEN(3,FILE='DTEMPE25.DAT')
K=0.0001
H=0.01414122
R=0.5
SIG=0.5-1.0/(12*R)
SIG2=0.77
EP=1.0/25
T=0.0
U(0,0)=1.0000001
U(0,1)=0.3173106
U(0,2)=0.0455003
U(0,3)=0.0026998
U(0,4)=0.0000633
U(0,5)=0.0000006
DO J=6,N
U(0,J)=0.0
END DO
T=T+K
U(1,0)=1.0000001
U(1,1)=0.4795002
U(1,2)=0.1572992
U(1,3)=0.0338948
U(1,4)=0.0046777
U(1,5)=0.000407
U(1,6)=0.0000221
U(1,7)=0.0000007
DO J=8,N
U(1,J)=0.0
END DO
DT(1)=(-U(1,3)+6*U(1,2)-3*U(1,1)-2*U(1,0))/(6*H)
RAD(-1)=1.0000001
RAD(0)=0.9887587
RAD(1)=0.9841274
  AAA(-1,1)=RAD(-1)
    AAA(0,1)=RAD(0)
    AAA(1,1)=RAD(1)
PRINT "(A7, 10F7.4)", CAR(1), (I*H, I=0,N)

```

```

& (6*(1+SIG2))
DT(I)=(-U(I+1,3)+6*U(I+1,2)-3*U(I+1,1)-2.0000)/(6*H)
AAA(I-1,Q+1)=RAD(I)
AAA(I-2,Q+1)=RAD(I-1)
AAA(I,Q+1)=RAD(I+1)
c compar(Q)=ABS(RAD(I+1)-AAA(I,Q))
c IF (compar(Q).LT.0.00001) GOTO 19
AAA(I+1,1)=RAD(I+1)
19 CONTINUE

```

```

WRITE (*,201) T, (U(I,J),J=0,N,25)
201 FORMAT (F7.5,45F7.4)
WRITE (4,101) T, (U(I,J),J=0,N,25)
101 FORMAT (F7.4,45F8.5)
WRITE(5,102) T, RAD(I)
102 FORMAT (2F10.6)
c WRITE (3,122) T, DT(1)
c 122 FORMAT (2F12.7)
11 CONTINUE
END

```

```

SUBROUTINE TRIDIAG(AA,BB,CC,UU,RR,N)
INTEGER N, NMAX
REAL*8 AA(2:N), BB(N), CC(1:N-1), RR(N), UU(N)
PARAMETER (NMAX=3000)
INTEGER J
REAL BET, GAM(NMAX)
IF (BB(1).EQ.0.)PAUSE 'TRIDIAG: REWRITE EQUATIONS'
BET=BB(1)
UU(1)=RR(1)/BET
DO 50 J=2,N
GAM(J)=CC(J-1)/BET
BET=BB(J)-AA(J)*GAM(J)
IF(BET.EQ.0.)PAUSE 'TRIDIAG FAILED'
UU(J)=(RR(J)-AA(J)*UU(J-1))/BET
50 CONTINUE
DO 52 J=N-1,1,-1
UU(J)=UU(J)-GAM(J+1)*UU(J+1)
52 CONTINUE
RETURN
END

```