# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## "GRUPOS DE HOMOTOPÍA EQUIVARIANTES DE RHODES"

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**M A T E M Á T I C O**

P R E S E N T A :

**N O É B Á R C E N A S T O R R E S**

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Grupos de homotopía equivariantes de Rhodes"

realizado por Bárcenas Torres Noé

con número de cuenta 300080151 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario Dr. Carlos Prieto de Castro

Propietario Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega

Propietario Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora

Suplente Dr. Sergey Antonyan Gzabski

Suplente Dr. Rolando Jiménez Benítez

**Consejo Departamental de** Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

# Grupos de homotopía equivariantes de Rhodes

Noé Bárcenas Torres

31 de agosto de 2005

# Índice general

## 0.1. Introducción

Una de las principales tareas de la topología es la solución del *problema del homeomorfismo*. Es decir, el problema de decidir cuándo dos objetos matemáticos son iguales desde el punto de vista de las transformaciones continuas. Este problema altamente difícil antecede a la topología propiamente dicha, pero es al mismo tiempo un poderoso motor para su desarrollo. Con el propósito de obtener una herramienta para la solución de este problema surgió la topología algebraica. Hablando con vaguedad, la topología algebraica estudia la relación entre las propiedades topológicas de un espacio y las propiedades algebraicas de determinadas construcciones asociadas a él, *sus invariantes*. Un invariante es un determinado objeto matemático (un conjunto, grupo, un anillo o módulo) que se asocia a un espacio, de tal manera que a espacios iguales desde el punto de vista de la topología se asignan invariantes isomorfos desde el punto de vista de su correspondiente teoría (conjuntos de la misma cardinalidad, grupos, anillos o módulos isomorfos).

Uno de los primeros invariantes que surgió en la topología algebraica es el grupo fundamental, introducido por Poincaré. Se construye a partir de las propiedades de deformación de trayectorias basadas en un punto. La utilidad más celebrada de esta construcción puede verse en el teorema de clasificación para variedades compactas y conexas de dimensión 2, donde dicho invariante constituye el rasgo distintivo para la caracterización. Una generalización natural del grupo fundamental son los grupos de homotopía. Son construidos a partir de las clases de homotopía de aplicaciones con dominios distinguidos -esferas de cierta dimensión- y con imagen en el espacio considerado. Desde el punto de vista teórico constituyen una construccción de importancia capital en la topología algebraica.

Otra gran idea en las matemáticas ha sido la de acción de grupo. Estrechamente vinculadas a la *regularidad* y la *simetría*, las acciones de grupos ponen de manifiesto muy pronto la relación que existe entre las propiedades algebraicas de un grupo y las propiedades topológicas de los espacios donde actúa. Es en este trance entre las propiedades topológicas de los espacios y las propiedades algebraicas de sus invariantes y los grupos que actúan en ellos que surge la topología algebraica equivariante. Dentro de ella, la teoría de homotopía equivariante trata de estudiar la relación entre invariantes homotópicos y propiedades de las acciones de grupos en un determinado espacio. En el presente trabajo estudiaremos una familia de invariantes homotópicos, introducida por F. Rhodes en una serie de artículos publicados a finales de los años sesenta del siglo pasado. Si bien el trabajo de Rhodes se aparta del discurso general de lo que es hoy en día la teoría equivariante, posee la ventaja de ser altamente consistente con los resultados clásicos. Los invariantes que estudiaremos generalizan a los grupos de homotopía tradicionales en varios sentidos. Además de contenerlos como subgrupos, varios de los resultados más útiles en la teoría homotópica clásica se traducen con alto grado de fidelidad. El ejemplo más distinguido de ello lo tenemos en el teorema equivariante de Seifert y Van Kampen, así como en la existencia de sucesiones de homotopía para una pareja de espacios. La familia de invariantes introducida por Rhodes es también utilizada con éxito para resolver problemas planteados por otras teorías. El impacto de sus resultados en otras areas de las matemáticas, como es la teoría de los sistemas dinámicos constituye uno de sus más convenientes aspectos.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Los grupos de homotopía

Una de las construcciones más fructíferas en la topología algebraica es sin lugar a dudas la de los grupos de homotopía. Los grupos de homotopía son un poderoso invariante algebraico que sirve para distinguir los espacios y en algunos casos responder negativamente a la cuestión de si dos espacios son homeomorfos o no. Para la definición de los invariantes algebraicos que estudiaremos resulta conveniente la siguiente

**Definición 1.** Sean $X$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Denotaremos por $(X, A)$ a la pareja conformada por ellos.

Las parejas de espacios requieren asignaciones que reflejen su estructura.

**Definición 2.** Sean $(X, A)$, $(Y, B)$ parejas de espacios topológicos. Una *aplicación de parejas* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ que satisface $f(A) \subset B$.

Un caso especial de parejas de espacios se presenta cuando el subespacio correspondiente consiste en el espacio singular.

**Definición 3.** Sea $X$ un espacio topológico y $* \in X$ un punto básico. Llamaremos espacio punteado a la pareja $(X, \{*\})$. Llamaremos *aplicaciones punteadas* a las aplicaciones entre espacios punteados.

**Observación 1.** En adelante y a menos que se establezca explícitamente lo contrario todos las aplicaciones y espacios en consideración serán punteados. Por comodidad, omitiremos de la notación para espacios punteados las llaves en la segunda coordenada. Así, escribiremos $(X, *)$ para denotar la pareja correspondiente. De la misma manera, llamaremos *pareja punteada* a $(X, B)$ si tanto $X$ como el subespacio $B$ son espacios punteados con el mismo punto básico.

En topología general, las componentes conectables por trayectorias de un determinado espacio arrojan profusa información acerca de los espacios bajo consideración. Generalizando esta idea, daremos la siguiente:

**Definición 4.** Sean $(X,*)$ y $(Y,*)$ espacios topológicos punteados y $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones punteadas. Decimos que $f$ es *homotópica a* $g$, en símbolos, $H : f \simeq g$ si existe una *homotopía*; es decir una aplicación continua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$. Si además $H$ satisface que $H(*,t) = *$, entonces diremos que $f$ y $g$ son punteadamente homotópicas mediante $H$.

**Lema 1.** *La relación* $f \simeq g$ *es de equivalencia*

*Demostración.* 1. Reflexividad: Sea $H : X \times I \longrightarrow Y$ dada por $H(x,t) = f(x)\ \forall t \in I$ . Se tiene que $H : f \simeq f$

2. Transitividad: Sean $H : f \simeq g$ y $K : g \simeq h$ entonces

$$HK(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Satisface que $HK(x,0) = H(x,0) = f(x),\ HK(x,1) = K(x,1) = h(x)$

3. Simetría: Sea $H : f \simeq g$. Entonces, la homotopía inversa $\overline{H}(x,t) = H(x,1-t)$ satisface que $\overline{H}(x,0) = g(x)$ ; $\overline{H}(x,1) = f(x)$

□

**Notación 1.** Denotaremos al conjunto de aplicaciones de un espacio $X$ a un espacio $Y$ por $M(X,Y)$. Denotaremos por $M(X,Y)_*$ al correspondiente conjunto de aplicaciones punteadas. Es posible dotar a estos conjuntos de una topología conveniente, la llamada *topología compacto-abierta.* Véase [1], p. 2 para una definición precisa. Denotaremos por $[X,Y]$ al correspondiente conjunto de clases de homotopía de aplicaciones y lo llamaremos *conjunto de homotopía.* Analogamente, $[X,Y]_*$ denotará el conjunto de clases de homotopía punteada. Ambos son el conjunto de componentes conectables por trayectorias de $M(X,Y))$, $M(X,Y)_*$, respectivamente. Compárese con la observación 8 más abajo.

**Observación 2.** Una relación de homotopía menos restrictiva que la punteada es la llamada *relativa a la frontera del intervalo.* Aparece al considerar aplicaciones cuyo dominio contiene como factor un intervalo. Dos aplicaciones $f, g : X \times I \longrightarrow Y$ son *homotópicas relativas a la frontera del intervalo* si existen dos puntos $*, *' \in Y$ y una aplicación $H : (X \times I) \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x,s,0) = f(x,s)$, $H(x,s,1) = g(x,s)$, $H(x,0,t) = *$, $H(x,1,t) = *'$. Es posible probar que la relación de homotopía relativa a la frontera del intervalo es de equivalencia en $M(X \times I, Y)$. Denotaremos a las respectivas clases por $[X \times I, Y]_{\text{rel } 0,1}$.

**Lema 2.** *La construcción $[\cdot,\cdot]$ es bifuntorial. Es decir, que para cada espacio $W$, las asignaciones $[W,\cdot]$ y $[\cdot,W]$ son funtores covariante y contravariante, respectivamente.*

*Demostración.* Probaremos la primera de las afirmaciones. La prueba de la segunda es totalmente análoga. Sean $f : Y \longrightarrow Z$, $g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones punteadas.

Consideremos $f_* : [W,Y] \longrightarrow [W,Z]$ $f_* : [\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$ y $g_* : [W,X] \longrightarrow [W,Y]$ $g_* : [\alpha] \longmapsto [g \circ \alpha]$, donde los corchetes denotan las respectivas clases de homotopía. Nótese que tal asignación está bien definida. Verifiquemos que es funtorial. Sea $id : Y \longrightarrow Y$ la aplicación identidad. Entonces, $id_*([g]) = [id \circ g] = [g] = id_{[X,Y]}[g]$. Ahora, sea $h : Z \longrightarrow W$. Consideremos $h \circ f : X \longrightarrow W$. Por definición, $(h \circ f)_*[g] = [h \circ f \circ g]$, pero $[h \circ f \circ g] = h_*[f \circ g] = h_* \circ f_*[g]$. De modo análogo se ve que $[\cdot, W]$ es un funtor contravariante. □

A continuación enunciamos un resultado de carácter técnico que será utilizado repetidamente en el desarrollo de nuestro trabajo:

**Observación 3.** Sean $X, Y$ espacios de Hausdorff y sea $Y$ localmente compacto. Entonces, existe un homeomorfismo $\varphi : M(I, M(X,Y)) \approx M(I \times X, Y)$ que determina un isomorfismo de conjuntos $\varphi_* : [I, M(X,Y)] \cong [I \times X, Y]$. Del mismo modo, se tiene un isomorfismo $[I, M(X,Y)_*]_* \cong [I \times X, Y]_*$.

*Demostración.* Véase [1], p. 5 □

Resulta conveniente la generalización de las relaciones de homotopía a las aplicaciones de parejas. De esa manera, tenemos la siguiente

**Definición 5.** Sean $(X,A)$, $(Y,B)$ parejas punteadas y $f$, $g$ aplicaciones punteadas. Una homotopía punteada de parejas de $f$ a $g$, en símbolos $H : f \simeq g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una homotopía $H : (X,A) \times I \longrightarrow Y$ que satisface: $H(a,t) \subseteq B \; \forall a \in A \; \forall t \in I$, $H(*,t) = * \; \forall t \in I$.

**Notación 2.** Llamaremos lazos con punto básico $*$ en $X$ a las aplicaciones de parejas $(I, \partial I) \longrightarrow (X, *)$. Denotaremos al conjunto de estas aplicaciones dotado de la topología compacto-abierta por $\Omega X$.

Las clases de homotopía de lazos en un espacio forman una importante construcción, pues la yuxtaposición induce una estructura conveniente desde el punto de vista topológico, como se hace patente en el siguiente lema.

**Lema 3.** *La* yuxtaposición de trayectorias, $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ *definida como sigue:*

$$\mu(\lambda,\sigma) = \begin{cases} \lambda(2t) & si\ t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \sigma(2t-1) & si\ t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

*es continua.*

*Demostración.* Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ un abierto básico de la topología compacto-abierta. Entonces existen $A_i$ , $C_i$, abierto y compacto de $X$ e $I$, respectivamente, tales que si $\varphi \in V_i$, entonces $\varphi(C_i) \subseteq A_i$. Consideremos $\lambda\sigma \in V$. Para $i \in \{1...n\}$, definamos $C_i' = \{t \in I \mid 2t \in C_i\}$ , $C_i'' = \{t \in I \mid 2t - 1 \in C_i\}$

Sea A $=\bigcup_i A_i$ y consideremos los siguientes conjuntos:

$$W_i' = \{\varphi \in M(I,X) \mid \varphi(C_i') \subseteq A\} \qquad W_i'' = \{\varphi \in M(I,X) \mid \varphi(C_i'') \subseteq A\}$$

$$W' = \bigcap_{i=1}^{n} W_i' \qquad W'' = \bigcap_{i=1}^{n} W_i''$$

Entonces, $W' \times W''$ es un abierto de $M(I,X) \times M(I,X)$. Nótese que $(\lambda, \sigma) \in W' \times W''$, pues por hipótesis $\lambda(2t) \in A_i \forall t \in C_i \ \forall i \in \{1...n\}$, de modo que $\lambda(t) \in A_i \subseteq A \ \forall t \in C_i'' \ \forall i \in \{1...n\}$. Así, $\lambda \in W'$ y análogamente $\sigma \in W''$.

Notemos que si $(\alpha, \beta) \in W' \times W''$, entonces $\alpha$ satisface que $\alpha(2t) \in A \ \forall t \in C_i$ y $\beta(2t-1) \in A \ \forall t \in C_i$ por lo cual $\mu(\alpha, \beta) \in V$

Entonces $\mu^{-1}(V)$ consiste en las parejas $(\alpha, \beta)\}$ que cumplen con la propiedad adicional de que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es un elemento de $V \ \forall t \in I$. Por lo cual, para tales $\varphi$, $\varphi(C) \subseteq A$. De donde $\mu^{-1}(V) = W' \times W''$ es un abierto y se concluye que $\mu$ es continua . □

**Observación 4.** Nótese que de acuerdo con el anterior resultado, la yuxtaposición de lazos induce una *multiplicación* en $\Omega X$. Esta multiplicación da a las clases de homotopia correspondientes una estructura de grupo donde el elemento neutro corresponde a la clase de la aplicación constante $c_{x_0} : I \longrightarrow \{x_0\}$, y los inversos corresponden a las clases de las *trayectorias inversas.* Es decir, si $\sigma : I \longrightarrow X$ es un lazo, entonces $\overline{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$ es el lazo inverso de $\sigma$.

Además de satisfecer los axiomas algebraicos de grupo, la asignación $\mu$ tiene la ventaja de ser continua. Esta estructura conveniente convierte a $\Omega X$ en el ejemplo canónico de una clase de espacios que definiremos a continuación:

**Definición 6.** Sea X un espacio topológico punteado con punto básico $*$. Una aplicación $\mu : X \times X \longrightarrow X$ es una $H$-multiplicación si satisface:

1. *$e : X \longrightarrow X$, la aplicación constante con valor $*$ cumple con que las composiciones :*

$$X \xrightarrow{(e,id)} X \times X \xrightarrow{\mu} X \quad X \xrightarrow{(id,e)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

*son ambas homotópicas a la identidad de $X$. Es decir, que el diagrama siguiente conmuta salvo homotopía:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "(e,id)"'] \arrow[dr, "id"] & \\ X \times X \arrow[rr, "\mu"] & & X \\ & X \arrow[ul, "(id,e)"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Las composiciones $\mu \circ (\mu \times id)$,$\mu \circ (id \times \mu)$ son homotópicas.*

   *Es decir, el diagrama siguiente conmuta salvo homotopía*

$$\begin{tikzcd} & X \times X \times X \arrow[dl, "\mu \times id"'] \arrow[dr, "id \times \mu"] & \\ X \times X \arrow[dr, "\mu"'] & & X \times X \arrow[dl, "\mu"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3. *Existe una aplicación continua $j : X \longrightarrow X$ que determina inversos salvo homotopía. Esto es, tal que las composiciones*

$$X \xrightarrow{(id,j)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

$$X \xrightarrow{(j,id)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

*son ambas homotópicas a $e : X \longrightarrow X$. Equivalentemente, tal que el diagrama siguiente conmuta salvo homotopía:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "(id,j)"'] \arrow[dr, "e"] & \\ X \times X \arrow[rr, "\mu"] & & X \\ & X \arrow[ul, "(j,id)"] \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

*A un espacio que satisface 1 y 2 se la llama $H$-espacio. Si además satisface 3, diremos que $X$ es un $H$-grupo.*

La estructura de $H$-grupo en un espacio punteado $Y$ es una fuerte propiedad algebraica. Dota a $[X,Y]$ de una *estructura de grupo natural en* $X$, independientemente de las propiedades de $X$. De manera más precisa, se puede señalar la siguiente

**Definición 7.** Sea $W$ un espacio punteado. Diremos que $[X,W]$ tiene una estructura de grupo natural en $X$ si

1. *Para cada espacio punteado* $X$, $[X,W]$ *tiene una estructura de grupo tal que la clase de homotopía de la aplicación constante* $c_*: X \longrightarrow W$ *corresponde al elemento neutro del grupo, y si*

2. *Para cada aplicación punteada* $f: X \longrightarrow Y$, *la aplicación inducida* $f^*: [Y,W] \longrightarrow [X,W]$ *es un homomorfismo de grupos.*

**Proposición 1.** *Sean* $X$ *un espacio topológico y* $Y$ *un* $H$*-grupo. Entonces* $[X,Y]$ *posee una estructura de grupo natural en* $X$.

*Demostración.* Denotemos por $\mu$ , $j$ y $e$ a la $H$-multiplicación, la aplicación que determina $H$-inversos y la $H$-identidad, respectivamente. Definamos

$$m : [X,Y] \times [X,Y] \longrightarrow [X,Y]$$

$$([f],[g]) \longmapsto [\mu(f,g)]$$

Ante todo, tal multiplicación está bien definida, pues si $f \simeq h$ y $g \simeq k$, entonces por definición de $H$-multiplicación, $\mu(f,g) \simeq \mu(h,k)$ y por lo tanto, la anterior definición no depende de los representantes.

Sean $[f],[g],[h] \in [X,Y]$. Por la definición de $H$-multiplicación, $\mu(\mu(f,g),h) \simeq \mu(f,\mu(g,h))$,
de modo que $m(m([f],[g]),[h])) = m(f, m([g],[h]))$. Así, la operación $*$ es asociativa.

Consideremos la clase de homotopía de la aplicación $e$. Sea $[f] \in [X,Y]$. Entonces, por la definición de $H$-identidad, $\mu(id,e) \simeq \mu(e,id) \simeq id_{M(X,Y)}$. En particular, calculando en f se obtiene: $\mu(f,e) \simeq \mu(e,f) \simeq f$ y considerando las clases de homotopía, $[f]*[e] = [e]*[f] = [f]$, de forma que la clase de homotopía $[e]$ es el elemento neutro.

Sea $[f] \in [X,Y]$. Definamos $[f]^{-1} = [j(f)]$. Tal asignación está bien definida. Nótese que, por hipótesis $\mu(f,j(f)) \simeq \mu(j \circ f, f) \simeq e$. Considerando clases de homotopía, este hecho confirma que $[f]*[f]^{-1} = [f]^{-1}*[f] = [e]$. Así, $[X,Y]$ tiene estructura de grupo heredada de $\mu$. Por otra parte, el lema 2 garantiza la propiedad solicitada para los homomorfismos inducidos por aplicaciones punteadas. $\square$

**Observación 5.** La afirmación de la proposición anterior es algo más fuerte, a saber, existe una equivalencia entre las posibilidades de definir una estructura de grupo natural en $[X, Y]$ y una estructura de $H$-grupo en $Y$. Véase a este respecto [1], p.47.

La siguiente construcción es fundamental para definir el concepto dual de $H$-grupo. Recuérdese que la *cuña* de dos espacios $X \vee Y$, se define como el siguiente subespacio del producto topológico

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ o } y = y_0\}$$

Donde $x_0$ , $y_0$ son puntos básicos en $X$ y $Y$ , respectivamente. En un sentido categórico, la cuña de dos espacios topológicos es dual al producto de espacios punteados.

Más precisamente, se tiene:

**Proposición 2.** *Son propiedades de la cuña de dos espacios las siguientes:*

1. *Existen inclusiones* $i : X \hookrightarrow X \vee Y$, $j : Y \hookrightarrow X \vee Y$

2. *Dadas aplicaciones* $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$, *existe una única aplicación denotada por* $f \vee g : X \vee Y \longrightarrow X' \vee Y'$ *que satisface que* $f \vee g|_X = f \circ i$; $f \vee g|_Y = g \circ j$.

3. *Dadas aplicaciones* $h : X \longrightarrow Z$, $k : Y \longrightarrow Z$, *existe una única aplicación denotada por* $\langle h, k\rangle : X \vee Y \longrightarrow Z$*que las extiende. Es decir, que hace conmutar los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} X \vee Y \arrow[r, "\langle h,k\rangle"] & Z \\ X \arrow[u, hook] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \vee Y \arrow[r, "\langle h,k\rangle"] & Z \\ Y \arrow[u, hook] \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

*Demostración.* 1. Considérense las aplicaciones

$$X \longrightarrow X \vee Y \qquad Y \longrightarrow X \vee Y$$

$$x \longmapsto (x, y_0) \qquad y \longmapsto (x_0, y)$$

2. Defínase $f \vee g(x, y) = (f(x), g(y))$. Entonces, es claro que $f \vee g|_X = f \circ i$ y $f \vee g|_Y = g \circ j$.

3. Definamos

$$\langle h,k\rangle(x,y) = \begin{cases} h(x) & \text{si } y = y_0 \\ k(y) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

□

Con estas propiedades a nuestra disposición, consideremos la siguiente

**Definición 8.** Sea $X$ un espacio topológico punteado. Decimos que $\nu$ es una $H$-comultiplicación si satisface:

1. *$e : X \longrightarrow \{x_0\}$ (la aplicación constante con valor $x_0$) cumple que las composiciones*

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle e,id\rangle} X$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id,e\rangle} X$$

*son homotópicas a la aplicación $id : X \longrightarrow X$. Equivalentemente, que el diagrama siguiente conmuta salvo homotopía:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dd, "id"] \arrow[dr, "\nu"] & \\ X \vee X \arrow[dr, "\langle id,e\rangle"'] & & X \vee X \arrow[dl, "\langle e,id\rangle"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

*En este caso, decimos que $e$ es una $H$-coidentidad.*

2. *$\nu$ es $H$-coasociativa. Es decir, el diagrama siguiente conmuta salvo homotopía :*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ X \vee X \arrow[dr, "\nu \vee id"'] & & X \vee X \arrow[dl, "id \vee \nu"] \\ & X \vee X \vee X & \end{tikzcd}$$

3. *Existe una aplicación $j : X \longrightarrow X$ que determina $H$- coinversos. Esto es que las composiciones:*

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id,j\rangle} X$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle j, id \rangle} X$$

*son homotópicas a e. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\langle j,id \rangle"'] \arrow[dd, "e"] \arrow[dr, "\langle id,j \rangle"] & \\
X \vee X \arrow[dr, "\langle id,e \rangle"'] & & X \vee X \arrow[dl, "\langle e,id \rangle"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

*Un espacio con una H-comultiplicación H-coasociativa y una H-coidentidad se llama H-coespacio. Si además posee una aplicación que determina H-coinversos se llama H-cogrupo.*

De manera dual a la $H$-multiplicación, si $X$ es un $H$-cogrupo, induce una estructura de grupo natural en $[X, Y]$, independientemente de las propiedades de Y.

**Proposición 3.** *Sean $X$ un $H$-cogrupo y $Y$ un espacio topológico arbitrario. Entonces, $[X, Y]$ tiene una estructura de grupo natural determinada por la $H$-comultiplicación en $X$.*

*Demostración.* En la notación anterior, consideremos

$$m : [X, Y] \times [X, Y] \longrightarrow [X, Y]$$

$$([f], [g]) \longmapsto [\langle f, g \rangle \circ \nu]$$

Ante todo, tal asignación está bien definida, pues si $f \simeq h$ y $g \simeq k$, entonces, es posible verificar que $f \vee g \simeq h \vee k$ y en consecuencia, las composiciones $\langle f, g \rangle \circ \nu$, $\langle h, k \rangle \circ \nu$ son homotópicas, de donde es evidente la buena definición. Por otro lado, si $[f], [g], [h] \in [X, Y]$, entonces por la propiedad de $H$-coasociatividad, $(id \vee \nu) \circ \nu \simeq \nu \circ (\nu \vee id)$. Si se componen estas aplicaciones con $f$, $g$, y $h$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & X \vee X \arrow[r, "\nu \vee id"] & X \vee X \vee X \arrow[dr, "\langle f, \langle g,h \rangle \rangle"] & \\
X \arrow[ur, "\nu"] \arrow[dr, "\nu"'] & & & Y \\
 & X \vee X \arrow[r, "id \vee \nu"'] & X \vee X \vee X \arrow[ur, "\langle \langle f,g \rangle, h \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces el diagrama resulta conmutativo salvo homotopía. Así, se obtiene que $f \vee (g \vee h) \circ \nu \simeq (f \vee g) \vee h \circ \nu$ y considerando clases de homotopía , $([f]*[g])*[h] = [f]*([g]*[h])$, por lo cual $*$ es asociativa.

Sea $e$ la clase de homotopía de la aplicación constante. Sea $[f] \in [X, Y]$. Entonces, por la definición de $\nu$, las aplicaciones

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle e, id \rangle} X$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id, e \rangle} X$$

son homotópicas a $id_X$. Compóngase ahora con $f$ como sigue:

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle e, f \rangle} X$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id, f \rangle} X$$

En esa situación, ambas aplicaciones resultan homotópicas a $f \circ id_X = f$, de donde $e$ es efectivamente una $H$-coidentidad.

Por otro lado, si $j : X \longrightarrow X$ denota la aplicación que determina $H$-coinversos, dada $[f] \in [X, Y]$ definimos $[f]^{-1} = [f \circ j]$. Por hipótesis se tiene que las composiciones

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id, j \rangle} X$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle j, id \rangle} X$$

son homotópicas a $e$.

Si componemos con $f$ como sigue:

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle f, f \circ j \rangle} Y$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle f \circ j, f \rangle} Y$$

ambas aplicaciones resultan ser homotópicas a $e$. De ese modo, $[f]*[f]^{-1} = [e] = [f]^{-1}*[f]$. Por otro lado, el lema 2 de nueva cuenta garantiza el comportamiento funtorial, de donde $[X, Y]$ tiene una estructura de grupo natural. □

**Observación 6.** Análogamente a lo dicho en la observación 5, son equivalentes la posibilidad de definir una estructura de $H$-cogrupo en $X$ y una estructura natural de grupo en $[X, Y]$.

Como notamos anteriormente, uno de los ejemplos más característicos de $H$-espacios es el espacio de lazos en un espacio punteado dado. De manera dual, el ejemplo canónico para $H$-coespacios es el que describiremos a continuación. Recuérdese que se define la *suspensión reducida*, $\Sigma X$ de un espacio punteado $(X, x_0)$ como el espacio que resulta de identificar en el *cilindro sobre* $X$ la base y la tapa en dos puntos. En otras palabras, $\Sigma X = X \times I / X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$ Denotaremos por $x \wedge t$ la clase de equivalencia de $(x, t)$ en $\Sigma X$.

**Proposición 4.** *Sea* $\nu : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ *definida por*

$$\nu((x \wedge t)) = \begin{cases} (x \wedge (2t), x_0) & si\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (x_0, x \wedge (2t-1)) & si\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

*entonces,* $\nu$ *es una comultiplicación.*

*Demostración.* 1. Existencia de $H$-coidentidad :

Sea $x \wedge t \in \Sigma X$ ante todo, notemos que las composiciones $\langle id, e\rangle \circ \nu$ y $\langle e, id\rangle \circ \nu$ vienen dadas por

$$\langle id, e\rangle \circ \nu(x \wedge t) = \begin{cases} x \wedge 2t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\langle e, id\rangle \circ \nu(x \wedge t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ x \wedge (2t-1) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

Ahora, consideremos $H_1, H_2 : \Sigma X \times I \longrightarrow \Sigma X$ dadas como sigue:

$$H_1(x \wedge t, s) = \begin{cases} x \wedge \frac{2t}{1+s} & \text{si } t \in [0, \frac{1+s}{2}] \\ x_0 & \text{si } t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$$

$$H_2(x \wedge t, s) = \begin{cases} x_0 \wedge \frac{2t}{1+s} & \text{si } t \in [0, \frac{1+s}{2}] \\ x \wedge \frac{2t-1+s}{1+s} & \text{si } t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$$

entonces, $H_1$ y $H_2$ son homotopías de $\langle id, e\rangle \circ \nu$ y $\langle e, id\rangle \circ \nu$, respectivamente en $id_{\Sigma X}$. Así, $e$ es una $H$-coidentidad.

2. $H$-coasociatividad: De nuevo, daremos una expresión explícita para las composiciones involucradas:

$$id \vee \nu \circ \nu(x \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge (2t), x_0, x_0) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (x_0, x_0, x \wedge (4t-2)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (x \wedge (4t-3), x_0, x_0) & \text{si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$\nu \vee id \circ \nu(x \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge (4t), x_0, x_0) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ (x_0, x_0, x \wedge (4t-1)) & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (x \wedge 2t-1, x_0, x_0) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y consideraremos la homotopía $H_3$ definida como sigue:

$$H_3(x\wedge t,s)=\begin{cases}(x\wedge \frac{4t}{1+s},x_0,x_0) & \text{si } t\in[0,\frac{1+s}{4}]\\ (x_0,x_0,x\wedge(4t-1+s) & \text{si } t\in[\frac{1+s}{4},\frac{2+s}{4}]\\ (x\wedge\frac{4t-2-s}{2-s},x_0,x_0) & \text{si } t\in[\frac{2+s}{4},1]\end{cases}$$

$H_3$ es una homotopía de la primera aplicación en la segunda.

3. Consideremos la aplicación $j:\Sigma X\longrightarrow\Sigma X$ dada por $x\wedge t\longmapsto x\wedge(1-t)$. Afirmamos que $j$ determina $H$-coinversos. Notemos que las composiciones $\langle id,j\rangle\circ\nu$ y $\langle j,id\rangle\circ\nu$ vienen dadas por las siguientes reglas de correspondencia:

$$\langle id,j\rangle\circ\nu(x,t)=\begin{cases}x\wedge 2t & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ x\wedge(1-(2t-1)) & \text{si } t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$\langle j,id\rangle\circ\nu=\begin{cases}x\wedge 2(1-t) & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ x\wedge 1-2t & \text{si } t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

y definamos las siguientes homotopías:

$$H_4(x\wedge t,s)=\begin{cases}x\wedge 2(1-s)t & \text{si } t\in[0,\frac{1}{1+s}]\\ x\wedge 2(1-s)(1-t) & \text{si } t\in[\frac{1}{1+s},1]\end{cases}$$

$$H_5(x\wedge t,s)=\begin{cases}x\wedge(2(1-s)(1-t)) & \text{si } t\in[0,\frac{1}{1+s}]\\ x\wedge(1-(1-s)(2t)) & \text{si } t\in[\frac{1}{1+s},1]\end{cases}$$

$H_4$ y $H_5$ son homotopías que comienzan en las respectivas composiciones y terminan en $e$. Así, $j$ determina $H$-coinversos.

□

**Observación 7.** De una manera análoga a lo descrito para $\Omega X$, $\nu$ da a $[\Sigma X,Y]$ estructura de grupo.

No es sorprendente la dualidad que se manifiesta entre $\Omega X$ y $\Sigma X$ a la luz del siguiente resultado:

**Proposición 5.** *Existe un homeomorfismo $M(\Sigma X,Y)\xrightarrow{\varphi}M(x,\Omega Y)$ tal que el homomorfismo inducido $[\Sigma X,Y]\xrightarrow{\varphi_*}[X,\Omega Y]$ es isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Sea $f:\Sigma X\longrightarrow Y$. Definamos $\varphi(f)=g$, donde $g\in M(X,\Omega Y)$ satisface que $g(x)(t)=f(x\wedge t)$. Por otro lado, sea $\psi:M(X,\Omega Y)\longrightarrow M(\Sigma X,Y)$ definida por $\psi(g)(x\wedge t)=f(x)(t)$. Notemos que $\varphi$ y $\psi$ son aplicaciones continuas que cumplen con que las composiciones $\varphi\circ\psi$, $\psi\circ\varphi$ son iguales a $id_{M(\Sigma X,Y)}$ e

$id_{M(X,\Omega Y)}$, respectivamente. Como consecuencia de la observación 16, tales aplicaciones resultan continuas. Consideremos el homomorfismo inducido $\varphi_*$. Sea $[g] \in [X, \Omega Y]$. Entonces la clase de homotopía de la aplicación $f : \Sigma X \longrightarrow Y$ que satisface que $f(x \wedge t) = g(x)(t)$ es tal que $\varphi_*([f]) = [g]$. Por lo cual, $\varphi_*$ es epimorfismo. Ahora, sea $[f] \in \ker(\varphi_*)$. Entonces, por definición de $\varphi_*$, f es homotópicamente trivial, de donde $\ker(\varphi_*) = \{e\}$ □

La anterior proposición muestra la riqueza de estructura que aparece al considerar espacios homeomorfos a una doble suspensión reducida de otro. En este caso, las estructuras de $H$-cogrupo en $[\Sigma\Sigma X, Y]$, y $H$-grupo en $[\Sigma X, \Omega Y]$ son compatibles en el sentido de la última proposición. A continuación, probaremos que las esferas de dimensión *suficientemente grande* poseen esta conveniente propiedad.

**Lema 4.** *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\mathbb{S}^n \approx \Sigma\mathbb{S}^{n-1}$

*Demostración.* Notemos que $\mathbb{S}^n$ está encajado como un *ecuador* en $\mathbb{S}^{n+1}$. En otras palabras, el subespacio $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid x_{n+2} = 0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$. Definamos $H_+ = \{(x_1, \ldots x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid x_{n+2} \geq 0\}$. De la misma manera, sea $H_- = \{(x_1, \ldots x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1} \mid x_{n+2} \leq 0\}$. Observemos que $\mathbb{S}^{n+1} = H_+ \cup H_-$, y $H_+ \cap H_- = \mathbb{S}^n$ Sea $p : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la proyección dada por $(x_1, \ldots x_{n+1}, x_{n+2}) \xmapsto{p} (x_1, \ldots x_{n+1})$. Entonces, al restringir a $H_+, H_-$, respectivamente, $p$ determina homeomorfismos $p_+ : H_+ \longrightarrow E^{n+1}$, $p_- : H_- \longrightarrow E^{n+1}$. (Donde $E^{n+1}$ denota la $n+1$-célula). Sea $s = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{S}^n$ A continuación, definamos $\varphi : \Sigma\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ como sigue:

$$\varphi([x,t]) = \begin{cases} p_+^{-1}(2tx + (1-2t)s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ p_-^{-1}((2-2t)x + (2t-1)s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Notemos que $\varphi$ está bien definida. Además, es continua, puesto que si $x \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{S}^{n+1}$, entonces $p_+(x) = p_-(x)$, pues ambas son iguales a $(x, 0)$. Por otro lado es una aplicación cerrada, pues el espacio $\Sigma\mathbb{S}^n$, al ser un producto e identificación de espacios compactos, es compacto. Por último, el espacio $\mathbb{S}^n$ satisface el axioma de separación de Hausdorff, pues está definido como un subespacio euclidiano y de la topología general -véase[7], p.184-, toda aplicación continua entre un espacio compacto y uno de Hausdorff es cerrada.

Aún más, $\varphi$ es biyectiva, pues si $z \in \mathbb{S}^{n+1}$, entonces $z \in H_+ \cup H_-$. Si $z \in H_+$, entonces existe $t \in [0,1]$ tal que $p_+(2tp_+(z) + (1-2t)s) = z$. De la misma manera, si $z \in H_-$, existe $t \in [0,1]$ tal que $p_-((2-2t)x + (2t-1)s) = z$. De ese modo, $\varphi$ es suprayectiva. Por otro lado, si $[x,t] \neq [y,s] \in \Sigma\mathbb{S}^n$, entonces o bien $t \neq s$, en cuyo caso $\varphi([x,t]) \neq \varphi([y,t])$. Análogamente, si $x \neq y$, entonces $\varphi([x,t]) \neq \varphi([y,t])$. En todo caso, la aplicación es inyectiva y en consecuencia, biyectiva. En resumen, se ha construido una aplicación biyectiva, continua y cerrada entre los espacios en consideración, de manera que determina un homeomorfismo.

**Corolario 1.** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^n \approx \Sigma^n \partial I$

□

Con estos resultados y definiciones a nuestra disposición, estamos en posibilidad de definir los grupos de homotopía

**Definición 9.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\pi_n(X,*) = [\mathbb{S}^n, X]_*$.

Del anterior lema es inmediato el siguiente

**Corolario 2.** $\pi_n(X, x_0)$ *Es un grupo*

*Demostración.* Por el lema 4, $\mathbb{S}^n \approx \Sigma\mathbb{S}^{n-1}$. Así,$[\mathbb{S}^n, X]_* \cong [\Sigma\mathbb{S}^{n-1}, X]_*$ por la proposición 5, y por la observación 4, el lado derecho tiene estructura de grupo. □

**Observación 8.** Se tiene un isomorfismo

$$\pi_n(X,*) \cong \pi_0(M(\mathbb{S}^n, X)_*)$$

Si la dimensión de la esfera considerada es *suficientemente grande*, es posible dotar a este grupo de dos estructuras aparentemente distintas; una de ellas originada en las propiedades de $[\Sigma\mathbb{S}^{n-1}, X]$ y otra debida a las de $[\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X]$, que no sólo coinciden, sino que dan origen a una estructura especial. De modo más general, el siguiente resultado relaciona dos estructuras multiplicativas como las anteriores en un grupo:

**Proposición 6.** *Sean* $\bullet, * : G \times G \longrightarrow G$ *dos multiplicaciones en el grupo* $G$ *que poseen identidad común y que cumplen que dados* $x, y, z, w \in G$, *se tiene que* $x*y \bullet z*w = x*z \bullet y*w$. *Entonces* $*$ *y* $\bullet$ *coinciden y dotan a* $G$ *de una estructura abeliana y asociativa .*

*Demostración.* Sean $x, y \in G$. Puesto que ambas operaciones poseen identidad común, $x \bullet y = x*e \bullet y*e$ y por la segunda propiedad, $x*e \bullet y*e = x*y \bullet e*e = x*y$. Así, $*$ y $\bullet$ coinciden.

Ahora, $x*(y*z) = x \bullet e*y \bullet z = (x*y) \bullet z = (x*y)*z$ y la estructura es asociativa.

Finalmente $x*y = e \bullet x*y \bullet e = e*y \bullet x*e = y \bullet x = y*x$ y por lo tanto, la estructura es conmutativa □

Obsérvese que las dos estructuras definidas en $\pi_n(X)$ originadas en la posibilidad de expresar a $\mathbb{S}^n$ como una doble suspensión, satisfacen las hipótesis de la proposición anterior. De esta manera, hemos demostrado el siguiente

**Corolario 3.** *Los grupos* $\pi_n(X, x_0)$ *son abelianos si* $n \geq 2$.

Los grupos de homotopía de un determinado espacio admiten una generalización a la categoría de parejas de espacios. A continuación desarollaremos de manera somera la construcción de éstos. Mayores detalles pueden encontrarse en [1].

**Definición 10.** En el intervalo n-dimensional, llamaremos *frontera parabólica*, $J^{n-1}$ al subespacio formado por el conjunto de puntos

$$J^{n-1} = \overline{\partial I^n \times I - I^{n-1} \times \{1\}}$$

**Definición 11.** Sea $n \geq 2$, y $(X, A)$ una pareja de espacios punteada. Definimos el n- ésimo grupo de homotopía de la pareja, $\pi_n(X, A)$ como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $f : I^n \longrightarrow X$, sujetas a las condiciones adicionales:

1. $f(\partial I^n) \subset A$
2. $f(J^{n-1}) = *$

En símbolos,

$$\pi_n(X, A) = [I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, *]$$

**Proposición 7.** *En el conjunto $\pi_n(X, A)$ se satisfacen:*

1. *$\pi_n(X, A)$ tiene una estructura de grupo determinada por la yuxtaposición de aplicaciones en $I^n$.*
2. *$\pi_n(X, A)$ es abeliano si $n \geq 4$.*
3. *$\pi_n(X, \{*\}) \cong \pi_n(X)$*
4. *La construcción $\pi_n(X, A)$ es funtorial*

*Demostración.* Véase [1], p.86 □

Los grupos de homotopía permiten construir una sucesión exacta larga, que contiene varios invariantes del tipo de homotopía de la pareja en consideración. A continuación recordaremos de manera breve esta construcción.

**Proposición 8.** *Existe un* homomorfismo de conexión $\partial : \pi_n(X, A) \longrightarrow \pi_n(A)$

*Demostración.* La asignación $|_{\partial I^n}: M(I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, *) \longrightarrow M(\partial I^n, J^{n-1}; A, *) \simeq M(\mathbb{S}^n, *; A, *)$ , dada por $f \longmapsto f\,|_{\partial I^n}$ induce un homomorfismo con la propiedad solicitada. □

Como consecuencia de este resultado y la funtorialidad de $\pi_n(X, A)$, se tiene el siguiente

**Teorema 1.** *Existe una sucesión de grupos de homotopía dada por*

$$\ldots \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \pi_{n-1}(X, A) \ldots$$

## 1.2. Acciones de Grupos.

En la matemática en general, la noción de simetría de un determinado objeto juega un papel fundamental. Esta noción está íntimamente ligada al concepto de grupo. En la teoría equivariante se introducen nuevas estructuras, de manera que ambos enfoques coinciden.

**Definición 12.** Sea G un grupo. Si además posee una estructura topológica tal que las aplicaciones

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G \qquad (\ )^{-1} : G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto xy \qquad x \longmapsto x^{-1}$$

son continuas, entonces diremos que G es un grupo topológico.

La idea de simetría está vinculada a la *regularidad* de ciertas transformaciones de un espacio en sí mismo. Una manera de formalizar esta idea de regularidad reside en el concepto de acción de grupo.

**Definición 13.** Sean $X$ un espacio topológico y G un grupo topológico. Una acción izquierda del grupo G en $X$ es una aplicación continua $\mu : G \times X \longrightarrow X$ que satisface:

1. $\mu(e, x) = x \ \forall x \in X$
2. $\mu(g \cdot h, x) = \mu(g, \mu(h, x))$

En esta situación, diremos que $X$ es un $G$-espacio.

**Notación 3.** Cuando no haya confusión, denotaremos a $\mu(g, x)$ por $g \cdot x$. Si H es un subgrupo de G, denotaremos por $X^H$ al conjunto $\{x \in X \mid h \cdot x = x \ \forall h \in H\}$ y lo llamaremos el *conjunto de puntos fijos.*

**Observación 9.** Si A y B son, respectivamente subconjuntos de G y $X$, denotaremos por $A \cdot B$ al conjunto $\{g \cdot x \mid x \in A \ y \ x \in B\}$. Es fácil verificar que si A, B son abiertos (respectivamente, compactos), entonces $A \cdot B$ es abierto (respectivamente, compacto).

**Definición 14.** Sea $\mu : G \times X \longrightarrow X$ una acción de grupos.

1. *Llamaremos* conjunto de isotropía *de $x$ al subrupo $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$*
2. *Diremos que la acción $\mu$ es* libre *si $G_x = \{e\}$ para cada $x \in X$.*
3. *Diremos que es* transitiva *si para cada pareja $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.*

4. *Diremos que es* pareja *si cada punto $x \in X$ posee una vecindad $U$ con la propiedad de que $g \cdot U \cap U = \phi$ para cada $g \in G$.*

La siguiente proposición contiene algunos resultados básicos sobre acciones de grupos:

**Proposición 9.** *Sean $X$ un $G$-espacio y $x \in X$. Entonces, se tiene:*

1. *El conjunto de isotropía, $G_x$ es un subgrupo de $G$.*

2. *La relación $x \sim y \iff y = g \cdot x$ es de equivalencia. Llamaremos* órbita *a la clase de equivalencia de $x$ y la denotaremos por $Gx$.*

3. *Si $g \in G$ es fijo, la aplicación $\varphi_g : X \longrightarrow X$ dada por $x \xmapsto{\varphi_g} g \cdot x$ es un homeomorfismo de X, llamado la translación por G.*

*Demostración.* 1. Claramente $e \in G_x$. Ahora, sean $g, h \in G_x$ Entonces $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (x) = x$. Así, $gh \in G_x$. Por otro lado, $x = e \cdot x = g^{-1}g \cdot x = g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1}x$ y por lo tanto, $g^{-1} \in G_x$.

2. Por la definición de acción de grupo, $e \cdot x = x$. Por lo cual, $x \sim x$. Por otro lado, si $x \sim y$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$ entonces $x = e \cdot x = (g^{-1} \cdot g) \cdot x = g^{-1}y$ y por lo tanto, $y \sim x$. Ahora, si $y \sim z$, existe $h \in G$ tal que $h \cdot y = z$. Nótese que $z = h \cdot y = h \cdot (g \cdot x) = hg \cdot x$, de donde $x \sim z$.

3. La aplicación $\varphi_g$ es continua por ser la restricción de la acción a $\{g\} \times X \approx X$, que es continua por definición. Por otro lado, la aplicación $\varphi_{g^{-1}}$ dada por $x \xmapsto{\varphi_{g^{-1}}} g^{-1} \cdot x$ es continua y satisface que $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id_X$, por lo cual $\varphi_g$ es un homeomorfismo.

$\square$

Como se observó en la anterior proposición, la acción del grupo determina una relación de equivalencia en el espacio X. Como es natural, es posible formar el espacio cociente determinado por esta relación de equivalencia, llamado espacio de órbitas de la acción de G en $X$ y denotado por $X/G$. En particular, resulta conveniente preguntarse acerca de las propiedades de la aplicación cociente. Señalaremos algunas a continuación

**Proposición 10.** *Sean $X$ y $G$ espacios de Hausdorff con $G$ compacto. Defínase*

$$p : X \longrightarrow X/G \quad x \longmapsto G \cdot x$$

*Entonces se tiene lo siguiente:*

1. *$p$ es una aplicación cerrada.*

2. *$p$ es una aplicación propia.*

3. *$X$ es compacto si y sólo si $X/G$ lo es.*

*Demostración.* 1. Sea $C \subset X$ cerrado. $p^{-1}(p(C)) = GC$ es cerrado como consecuencia de la observación 9. Así, p(C) es cerrado.

2. Sea $C \subset X/G$ un conjunto compacto y $\{U_\alpha\}_\Lambda$ una cubierta abierta de $p^{-1}(C)$. Ahora, nótese que si $c \in C$ es arbitrario, $\{c\}$ es un conjunto cerrado, pues el espacio es de Hausdorff. Así, $\{c\}$ es compacto. Por otra parte, $\{p(U_\alpha)\}_\Lambda$ forma una cubierta abierta de $\{c\}$, así que es posible construir una familia finita $\Lambda_c \subset \Lambda$ tal que $\{c\} \subset \bigcup_{\Lambda_c} p(U_\Lambda)$, y en consecuencia, para esa misma familia, . $p^{-1}(\{c\}) \subset U_c = \bigcup_{\Lambda_c} U_\alpha$ .

   Consideremos el conjunto $V_c = X/G - p(X - U_c)$. Entonces puesto que, por 1, p es una aplicación cerrada y $X - U_c$ es cerrado, $V_c$ es un conjunto abierto. Es claro que $c \in V_c$ $\forall c \in C$. De modo que la familia $\{V_c\}_{c\in C}$ forma una cubierta abierta de C. Por compacidad, es posible extraer una subcubierta finita $\{V_{c_i}\}_{i\leq n}$. Por último, puesto que $C \subset \bigcup_{i\leq n} V_{c_i}$, se sigue que $P^{-1}(C) \subset \bigcup_{i\leq n} p^{-1}(V_{c_i}) \subset \bigcup_{i\leq n} U_i$, de modo que $p^{-1}(C)$ es compacto.

3. Si $X$ es compacto, entonces es evidente que $X/G$ lo es, pues es la imagen bajo $p$ de $X$. Inversamente, si $X/G$ es compacto, por (2), lo es $p^{-1}(X/G) = X$.

□

En la teoría de acciones de grupos existen una gran cantidad de resultados combinatorios útiles para el conteo. Enunciamos uno en el siguiente lema:

**Lema 5.** *Sean $G$ un grupo, $x \in X$ un $G$-espacio. Entonces existe una biyección $G/G_x \longrightarrow G \cdot x$*

*Demostración.* Sea $\varphi : G/G_x \longrightarrow G \cdot x$ dada por

$$g \cdot G_x \xmapsto{\varphi} g \cdot x$$

Ante todo, tal función está bien definida, pues si $g \sim h$, entonces $g^{-1}h \in G_x$, de donde $g^{-1}h \cdot x = x$ y por lo cual, $h \cdot x = g \cdot x$. Por otro lado, la aplicación es claramente suprayectiva y si $g \in G_x$, $h \in G_x$ cumplen que $g \cdot x = h \cdot y$, entonces $gh^{-1} \in G_x$ y por lo tanto, $gG_x = hG_x$. Así, $\varphi$ es una aplicación biyectiva entre los conjuntos en cuestión.

□

Cuando se trabaja con cierta clase de objetos en matemáticas, digamos *una categoría*, es de vital importancia pensar en las asignaciones que conservan determinada propiedad característica de los objetos, *los morfismos*. En el caso de $G$-espacios, estas asignaciones se denominan aplicaciones equivariantes y la siguiente es su

**Definición 15.** Sean $X$ y $Y$ $G$-espacios. Una aplicación continua $\varphi : X \longrightarrow Y$ es equivariante si para cada $g \in G$, $x \in X$, se tiene que $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$.

**Observación 10.** Una aplicación equivariante $f$ es compatible con la identificación $p$ en el espacio de órbitas $X/G$ y, por lo tanto, determina una aplicación $\tilde{f} : X/G \longrightarrow Y/G$.

**Observación 11.** Es inmediato ver que si $\varphi$ es una aplicación equivariante, entonces $G_x \subset G_{\varphi(x)}$. Si además, $G_x = G_{\varphi(x)}$, diremos que la aplicación es isovariante.

Al estudiar una determinada clase de aplicaciones desde el punto de vista de la topología algebraica, es conveniente considerar sus propiedades homotópicas, en relación con las propiedades que las definen. Ése es el objetivo de la siguiente

**Definición 16.** Sean $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ aplicaciones equivariantes y considérese la estructura de $G$-espacio en $X \times I$ originada por la acción definida en $X \times I$ como sigue: $g \cdot (x, t) = (g \cdot x, t)$. Una homotopía equivariante de $f_0$ a $f_1$ es una aplicación equivariante $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(0, x) = f_0(x)$; $H(1, x) = f_1(x)$. Escribiremos en símbolos $H : f_0 \simeq^G f_1$.

**Observación 12.** La relación definida por la homotopía equivariante es de equivalencia en el espacio de las aplicaciones correspondientes.

## 1.3. Aplicaciones cubrientes

En esta sección estableceremos algunas propiedades de una clase singular de funciones, las aplicaciones cubrientes. En un nivel intuitivo, las aplicaciones cubrientes son funciones continuas con una cierta trivialidad local. Recordemos a este respecto la siguiente

**Definición 17.** Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación continua. Diremos que $p$ es una aplicación cubriente si cada $x \in X$ posee una vecindad $U$ con la propiedad de que $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha U_\alpha$, donde $U_\alpha$ es abierto en $\tilde{X}$ y $p\,|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.

**Notación 4.** Dada una aplicación cubriente $p : \tilde{X} \longrightarrow X$, llamaremos a $\tilde{X}$ el *espacio cubriente*, y a $X$ la *base*. En caso de que $\tilde{X}$ sea un espacio simplemente conexo, diremos que la aplicación y el espacio cubriente son *universales*. Si el *subgrupo característico*, $p_*(\pi_1(\tilde{X}))$, es normal en $\pi_1(X)$, diremos que la aplicación es *regular*.

Las aplicaciones cubrientes universales probarán tener importancia en el desarrollo de este trabajo. Uno de los resultados clásicos que precisaremos es el siguiente:

**Teorema 2.** *Sea $X$ un espacio con la propiedad de que cada punto $x \in X$ posee una vecindad abierta $U$ de manera que el homomorfismo inducido por la inclusión $i_* : \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ es el homomorfimo trivial. Entonces, es posible dotar a $[I, X]_{rel\ 0,1}$ de una topología que lo vuelve un espacio cubriente universal sobre $X$.*

*Demostración.* Consideremos la aplicación $p : [I, X]_{rel\,0,1} \longrightarrow X$ definida mediante $[\alpha] \longmapsto \alpha(1)$. Ante todo, tal aplicación está bien definida. Por otro lado, si consideramos en $\tilde{X} = [I, X]_{rel\,0,1}$ la topología cuya base consta de los conjuntos $(U, \alpha) = \{\ \beta \mid \beta \simeq \alpha\alpha'\}$, donde $\alpha'(I) \subset U, \}$, es posible probar -véase [7] p.443- que el espacio es simplemente conexo y la aplicación definida anteriormente es una cubriente universal. □

Es de nuestro interés estudiar la relación existente entre las propiedades algebraicas de una acción de grupos y las propiedades topológicas de su aplicación cociente asociada. Con mayor precisión, se tiene el siguiente

**Lema 6.** *Sea $G$ un grupo discreto que actúa parejamente en el espacio $X$. Entonces, la aplicación cociente $p : X \longrightarrow X/G$ es cubriente.*

*Demostración.* Sea $x \in X$. Por la propiedad de la acción, existe una vecindad $U_x$ de $x$ tal que $g \cdot U_x \cap U_x = \phi$. Consideremos la órbita correspondiente $G \cdot x$. Sea $V = p(U)$. Notemos que $p^{-1}(V) = \coprod_{g \in G} U_g$. Además, la aplicación $p$ restringida a cada uno de estos conjuntos determina un homeomorfismo con $V$. □

## 1.4. La propiedad de levantamiento de homotopías

Dentro de la categoría topológica, es de singular interés determinar los objetos que tienen propiedades *proyectivas* con respecto a las homotopías. En un nivel impreciso, esto quiere decir que el problema de hallar una homotopía de manera que sea compatible con cierta aplicación y tenga una condición inicial posee al menos una solución. Con algo más de rigor se tiene

**Definición 18.** Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua y $\mathcal{C}$ una familia de espacios topológicos. Decimos que posee la *$\mathcal{C}$-propiedad de levantamiento de homotopías* si para cada espacio $X \in \mathcal{C}$, cada aplicación $f$ y cada homotopía $H$ como en el siguiente diagrama, existe una homotopía $K$ que lo hace conmutar

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "K"] & B \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{C}$ coincide con todos los espacios topológicos, entonces diremos que $p$ es una fibración de Hurewicz o sencillamente fibración. Si $\mathcal{C}$ coincide con la clase de los cubos $I^q$, diremos que es una fibración de Serre.

**Proposición 11.** *Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación cubriente. Entonces $p$ es una fibración de Serre.*

*Demostración.* Consideremos el problema

$$\begin{tikzcd} I^q \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^q \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "K"] & B \end{tikzcd}$$

Para cada $b \in B$, existe una vecindad $U_b$ de $b$ de manera que $p^{-1}(U_b) = \sqcup \tilde{U}_i$, y $p|_{\tilde{U}_i}$ es un homeomorfismo. Puesto que $I^{q+1}$ es compacto, existe una cubierta finita del intervalo $\tilde{U}_{b1}, \dots, \tilde{U}_{bn}$ de manera que las correspondientes restricciones son homeomorfismos. Por la propiedad del número de Lebesgue, existen reales $t_1, \dots, t_n$ de manera que los intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ satisfacen que si $C$ es una cara de dimensión $r$ en el cubo, $C \times [t_i, t_{i+1}] \subset U_i$. Definiremos la homotopía $K$ en estos conjuntos, usando inducción en la dimensión del factor $C$. Si $C$ es una cara de dimensión cero (vértice), definimos $K(c,t) = p|_{U_c}^{-1}(H(c,t))$. Ahora, supongamos que la aplicación $K$ se ha definido para todas las caras de dimensión menor o igual que $r$. Sea $\tilde{C}$ una cara de dimensión $r$. Por hipótesis de inducción, $K$ está definida en $\tilde{C} \times \{t_j\} \cup \partial\tilde{C} \times [t_j, t_{j+1}]$. De esa manera, podemos completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{C} \times \{t_j\} \cup \partial\tilde{C} \times [t_j, t_{j+1}] \arrow[r, "p|^{-1}"] \arrow[d, hook] & \tilde{U}_i \arrow[d, "id"] \\ \tilde{C} \times [t_j, t_{j+1}] \arrow[r, "H|"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{K}"] & \tilde{U}_i \end{tikzcd}$$

Por último, si componemos la aplicación $\tilde{K}$ con $p|_{\tilde{U}_i}$, obtenemos la aplicación $K$ solicitada. □

**Ejemplo 1.** La aplicación exponencial, $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $e(t) = cos(t) + isen(t)$ es una fibración de Serre.

*Demostración.* Hagamos notar que es una aplicación cubriente. En vista de la proposición 11, basta con ello. Recuérdese que de la teoría de variable compleja, dado un abierto $U \neq \mathbb{S}^1$, se tiene que $e^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ con la propiedad de que $e|_{U_n}$ es un homeomorfismo, cuyo inverso es un logaritmo complejo. Como consecuencia, $e$ es una aplicación cubriente □

El estudio de diversas propiedades de espacios topológicos converge en el siguiente resultado, que posee valiosas aplicaciones en la teoría.

**Proposición 12.** *Sea $\mu : G \times X \longrightarrow X$ una acción pareja de grupos, con $G$ discreto. Entonces, la aplicación cociente $p : X \longrightarrow X/G$ es una fibración.*

*Demostración.* Es inmediata a la luz del lema 6 y la proposición 11 □

**Observación 13.** Retomemos el ejemplo 1. En él se ha demostrado que la aplicación exponencial es una fibración. Esto significa que, dado un lazo $\lambda : 1 \simeq 1$, es posible resolver el siguiente problema

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ I \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\lambda}"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

sujeto a la restricción adicional de que $\tilde{\lambda}(0) = 1$. Además, $\tilde{\lambda}(1) \in \mathbb{Z}$. Se define el *grado* de un lazo $\lambda$ como el entero $\tilde{\lambda}(1)$. Este invariante resulta de capital importancia para la determinación del grupo fundamental del círculo. Véase a este respecto [7].

**Observación 14.** La anterior observación admite una modificación interesante. Consideremos una trayectoria $\sigma : 1 \simeq \eta$, no necesariamente un lazo. Consideremos la homotopía de trayectorias relativa a los extremos. De acuerdo con los resultados expuestos hasta el momento, el problema

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ I \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\sigma}"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

sujeto a la condición adicional de que $e^{2\pi i \tilde{\sigma}(1)} = \eta$ admite una única solución para $\tilde{\sigma}$. A diferencia del ejemplo anterior, $\tilde{\sigma}(1)$ no es necesariamente un número entero. Sin embargo, si definimos la aplicación $\partial : [I, \mathbb{S}^1]_{rel\, 0,1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mediante $\partial([\sigma]) = [\tilde{\sigma}(1)]$, donde $[\cdot]$ representa la *función mayor entero*, la aplicación resulta bien definida. En adelante nos referiremos a ella como el *grado generalizado* de una trayectoria. Una aplicación relacionada será de capital importancia en los ejemplos del siguiente capítulo.

# Capítulo 2

# Los grupos de homotopía equivariantes

## 2.1. Construcción

El capítulo anterior mostró algunas propiedades de los grupos de homotopía y dio un panorama general de la teoría de $G$-espacios. A continuación, construiremos una familia de invariantes algebraicos asociados a un $G$-espacio que muestra la estrecha relación entre las propiedades algebraicas y topológicas de éste. Como vimos en el capítulo anterior, las clases de homotopía de aplicaciones de determinados espacios resultan de interés fundamental dentro de la topología algebraica. En este mismo orden de ideas, conviene dar las siguientes definiciones.

**Definición 19.** Introduzcamos la relación de equivalencia en $I^n$ dada por

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$$

$$\textit{si } x_i = y_i + 1 \textit{ o } y_i = x_i + 1 \textit{ para algún } i \in \{2, \ldots, n\}$$

En otras palabras, $\sim$ identifica todos los pares de lados opuestos, a excepción del último.

**Observación 15.** El espacio cociente $C^n$ obtenido por medio de la relación de equivalencia antes descrita resulta ser homeomorfo al producto del toro $(n-1)$-dimensional y el intervalo. En símbolos:

$$C^n \approx \mathbb{T}^{n-1} \times I$$

**Observación 16.** Alternativamente, el espacio anteriormente construido puede verse como la imagen de un espacio distinguido. Considérese la aplicación cociente $p : I^n \longrightarrow I^n/\partial I^n$. Como es conocido de la topología general, se tiene un homeomorfismo $\theta : I^n/\partial I^n \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^n$. Por otro lado, según hemos probado en el corolario 1, existe un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\approx} \Sigma^n \partial I$. Sea $\psi$ la aplicación dada por $\psi = \varphi \circ \theta \circ p$. Nótese que, puesto que todos los espacios en consideración son compactos y satisfacen el axioma de separación de Hausdorff, la aplicación $\psi$ es continua y cerrada. Por otro lado, es claramente suprayectiva pues $\varphi$ es un homeomorfismo. En resumen, $\psi$ es una aplicación continua, suprayectiva y abierta. Por un resultado de topología básica, es una identificación. Finalmente, sea $q : I^n \longrightarrow C^n$ la aplicación cociente. Obsérvese que $q$ es una aplicación compatible con la identificación $\psi$, pues si $q(x) = q(y)$, $y$ y $x$ difieren por una unidad en alguna de sus coordenadas distintas de la última. En particular, ambos pertenecen a la frontera de $I^n$, por lo cual $p(x) = p(y)$ y en consecuencia $\psi(x) = \psi(y)$. Así, existe una aplicación $\bar{\psi}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I^n \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "q"] & I^n/\partial I^n \overset{\theta}{\approx} \mathbb{S}^n \arrow[d, "\approx\varphi"] \\
(\mathbb{T}^{n-1} \times I, \mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}, \mathbb{T}^{n-1} \times \{1\}) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (\Sigma^n \partial I, x \wedge 0, x \wedge 1)
\end{tikzcd}$$

**Notación 5.** Denotaremos la terna

$$(\mathbb{T}^{n-1} \times I, \mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}, \mathbb{T}^{n-1} \times \{1\})$$

por $(\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N)$.

**Definición 20.** Sean $X$ un $G$-espacio y $g \in G$. Decimos que $f : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$ es una *aplicación de orden* $g$ o *hipertrayectoria* si satisface $f(0, x_2, \dots, x_n) = *$, $f(1, x_2, \dots, x_n) = g \cdot *$. Equivalentemente, es posible considerar una aplicación de orden $g$ como una aplicación de ternas $f : (\mathbb{T}, S, N) \longrightarrow (X, *, g \cdot *)$. Denotaremos por $M_*^G(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)$ al conjunto de todas las aplicaciones de orden g. En símbolos:

$$M_*^G(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X) = \{f : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X \mid f(S) = * \ , \ f(N) = g \cdot * \ g \in G\}$$

La observación 16 permite asociar a cada hipertrayectoria una aplicación que tiene un dominio con propiedades homotópicas convenientes para la construcción de ciertos objetos algebraicos. De manera más precisa, se tiene la siguiente

**Proposición 13.** *Existe una asignación* $M_*^G(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X) \longrightarrow M(\Sigma\partial I^n, x \wedge 0, x \wedge 1)$ *Además, dicha asignación respeta la relación de G-homotopía.*

*Demostración.* Sea $f$ una hipertrayectoria. En la notación de la observación 16, considérese el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
I^n \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "q"] & I^n/\partial I^n \overset{\theta}{\approx} \mathbb{S}^n \arrow[d, "\approx\varphi"] \\
(C^n, \{0\} \times I^{n-1}, \{1\} \times I^{n-1}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & (\Sigma\partial I^n, x \wedge 0, x \wedge 1) \arrow[d, dashed, "f'"] \\
 & (X, *, g \cdot *)
\end{tikzcd}$$

Por la observación 16, existe una aplicación $f'$ que hace conmutar el diagrama anterior. Esto prueba la primera afirmación. Para verificar la segunda, nótese que el intervalo $[0,1]$ es un espacio localmente compacto, por lo cual la aplicación producto $\psi \times id_I : (\mathbb{T}^{n-1} \times I, \mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}, \mathbb{T}^{n-1} \times \{1\}) \times I \longrightarrow (\Sigma^n \partial I, x \wedge 0, x \wedge 1) \times I$ es una identificación. Sea $H : f_0 \simeq f_1$ una homotopía. Por la propiedad universal de las identificaciones, existe una única aplicación $\bar{H}$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{T}^{n-1}, S, N) \times I \arrow[r, "\psi \times id_I"] \arrow[d, "H"'] & (\Sigma^n \partial I, x \wedge 0, x \wedge 1) \times I \arrow[dl, dashed, "\bar{H}"] \\
(X, *, g \cdot *) &
\end{tikzcd}$$

Nótese que $H(x,i) = f_i(x)$ para $i = 0,1$. Por la unicidad de las aplicaciones involucradas, $\bar{H}(x,i) = f_i'(x)$ para $i = 0,1$. □

Es necesario introducir relaciones de homotopía en el conjunto de aplicaciones que hemos construido. La siguiente definición establece la relación de homotopía que dará origen al invariante algebraico que nos ocupa.

**Definición 21.** Sean $f_0, f_1 : (\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N) \longrightarrow (X, *, g \cdot *)$ dos hipertrayectorias. Diremos que son *G-homotópicas* si existe una *G-homotopía*; es decir, una aplicación de ternas $H : (\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N) \times I \longrightarrow (X, *, g \cdot *)$ tal que $H(x,0) = f_0(x)$, $H(x,1) = f_1(x)$. En símbolos, escribiremos $f_0 \simeq_G f_1$.

La relación de homotopía recién introducida tiene importantes propiedades determinadas por la homotopía usual. Más precisamente, se tiene el siguiente

**Lema 7.** *La relación $\simeq_G$ es de equivalencia en $M_*^G(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)$*

*Demostración.*

1. Reflexividad: La homotopía constante $H : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$ dada por $H(w,t) = f(w,t)$ prueba que $f \simeq_G f$.

2. Transitividad: Si $H : f \simeq_G f'$ y $K : f' \simeq_G f''$, entonces la $G$-homotopía $HK$,
$$HK(w,s,t) = \begin{cases} H(w,s,2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(w,s,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
permite afirmar que $f \simeq_G f''$.

3. Simetría: Si $H : f \simeq_G f'$, la $G$-homotopía $\bar{H}$ definida mediante $\bar{H}(w,s,t) = H(w,s,1-t)$ permite concluir que $f' \simeq_G f$.

□

En vista del anterior resultado, podemos introducir el conjunto que será objeto de nuestro estudio.

**Definición 22.** Denotaremos por $\pi_n^G(X,*)$ al conjunto de clases de $G$-homotopía de hipertrayectorias. En símbolos,

$$\pi_n^G(X,*) = M_*^G(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)/ \simeq_G$$

Denotaremos por $[f,g]$ la clase de homotopía de una hipertrayectoria en el anterior conjunto, y lo llamaremos *elemento de orden* $g$.

**Observación 17.** Nótese que las restricciones de la definición 21 nos permiten pensar a $\pi_n^G(X,*)$ como la unión de una familia de conjuntos de homotopía. Dado un elemento $g \in G$ es posible construir el conjunto de clases de homotopía relativa a la frontera del intervalo de las aplicaciones del orden correspondiente. De esa manera,

$$\pi_n^G(X,*) = \bigcup_{g\in G} [\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N; X, *, g\cdot *]_{rel\, 0,1}$$

**Observación 18.** Alternativamente, es posible pensar a cada hipertrayectoria como una clase de homotopia relativa a la frontera del intervalo de una aplicación $f : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$, donde se han seleccionado como extremos de la trayectoria a $*$ y $g \cdot *$.

La yuxtaposición de aplicaciones cuyo dominio contiene como factor un intervalo, cual es el caso de $\mathbb{T}^{n-1} \times I$, permite dar a las clases de homotopía una estructura adicional.

**Definición 23.** Sean $[f,g]$ y $[f',g']$ elementos de orden $g$ y $g'$, respectivamente. Definimos el *producto* $[f,g][f',g']$ en $\pi_n^G(X)$ *como la clase de homotopía* $[h, gg']$ *de la yuxtaposición de las aplicaciones* $f$ *y* $g \cdot f'$ *en* $M_*^G(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)$. *Es decir,* $[f,g][f',g'] = [h, gg']$, *donde*

$$h(w,t) = \begin{cases} f(w,2t) & si\ t \in [0,\frac{1}{2}] \\ g\cdot f'(w,2t-1) & si\ t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

*Véase la figura 2.1*

Es inmediato verificar que la anterior definición es independiente de los representantes de las clases de homotopía involucradas. Para establecer con más precisión algunas propiedades de $\pi_n^G(X,*)$ necesitamos el siguiente resultado de carácter técnico.

**Proposición 14.** *Sean* $f \in M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N; X, *, *')$, $f' \in M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N; X, *', *'')$, $f'' \in M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, S, N; X, *'', *''')$. *Entonces se tiene:*

1. $f(f'f'') \simeq (ff')f''$

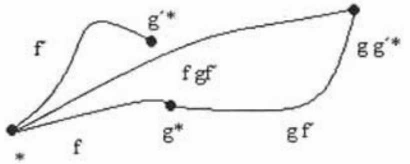


Figura 2.1: La yuxtaposicion de hipertrayectorias

*2.* $c_* f \simeq f$, $f c_{*'} \simeq f$

*3.* $f\bar{f} \simeq c_*$, $\bar{f} f \simeq c_{*''}$

*Donde la relación de homotopía es relativa a la frontera del intervalo.*

*Demostración.* Considérese la homotopía $H$ definida como sigue

$$H(w,s,t) = \begin{cases} f(w, \frac{4s}{2-t}) & \text{si } s \in [0, \frac{2-t}{4}] \\ f'(w, 4s+t-2) & \text{si } s \in [\frac{2-t}{4}, \frac{3-t}{4}] \\ f''(w, \frac{4s+t-3}{t+1}) & \text{si } s \in [\frac{3-t}{4}, 1] \end{cases}$$

Claramente, $H : f(gh) \simeq (fg)h$ y esto verifica 1. Por otra parte, si se definen $K$ y $K'$ como sigue

$$K(w,s,t) = \begin{cases} * & \text{si } s \in [0, \frac{1-t}{2}] \\ f(w, \frac{2s+t-1}{t+1}) & \text{si } s \in [\frac{1-t}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K'(w,s,t) = \begin{cases} f(w, \frac{2s+t-1}{t+1}) & \text{si } s \in [0, \frac{1-t}{2}] \\ *' & \text{si } s \in [\frac{1-t}{2}, 1] \end{cases}$$

entonces, es inmediato verificar que $K$ y $K'$ son homotopías que prueban 2. Por último, consideremos las aplicaciones $L$ y $L'$ definidas a continuación

$$L(w,s,t) = \begin{cases} f(w, 2s(1-t)) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(w, 2(1-s)(1-t)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$L'(w,s,t) \begin{cases} f(w, 2(1-s)(1-t)) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(w, 2s(1-t)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se tiene que $L : \bar{f}f \simeq c_*$, $L' : f\bar{f} \simeq c_{*'}$, con lo cual queda probada la afirmación 3. $\square$

Los resultados establecidos hasta el momento permiten enunciar el siguiente

**Teorema 3.** *$\pi_n^G(X,*)$ con el producto introducido en la definición 23 es un grupo tal que el elemento neutro es la clase de homotopía de la aplicación constante de orden $e$ con valor en el punto básico.*

*Demostración.* Es inmediata de la proposición 14. $\square$

**Lema 8.** *En el grupo $\pi_n^G(X,*)$ se satisfacen:*

1. *Si $f \simeq_{\mathrm{rel}\,0,1} c_*$ es una aplicación de orden $e$, entonces $[f,e]$ es el elemento neutro de $\pi_n^G(X,*)$*

2. *Si $[f,g] \in \pi_n^G(X,*)$, entonces el inverso de $[f,g]$ es $[g^{-1}\cdot\bar{f}, g^{-1}]$*

*Demostración.* 1. Sea $[f',g] \in \pi_n^G(X,*)$. Por la proposición 14, $f'f \simeq f'c_* \simeq f'$ y $ff' \simeq c_*f' \simeq f'$ como aplicaciones en $M_*^G(X,*)$. Así, $[f,e][f',g] = [f',g] = [f',g][f,g]$.

2. Sea $[f',g] \in \pi_n^G(X,*)$. Nótese que $[f',g][g^{-1}\cdot\bar{f}',g^{-1}]$ corresponde al elemento $[f'g\cdot g^{-1}\bar{f}',e]$ en $[\mathbb{T}^{n-1}\times I,S,N;X,*,*]$. $[f'gg^{-1}\cdot\bar{f}'] = [f] = [\bar{f}'][f']$, donde el lado derecho representa la multiplicación originada en la yuxtaposición de aplicaciones en el intervalo. Así, utilizando la proposición 14, $[f',g][g^{-1}\cdot\bar{f}',g^{-1}] = [f,e] = [g^{-1}\cdot\bar{f}',g^{-1}][f',g]$.

$\square$

Como es habitual en la topología algebraica, el objeto recién construido tiene relevantes propiedades en relación con determinada colección de morfismos. Estas propiedades se expresan en la siguiente

**Proposición 15.** *La asignación $(X,*) \longmapsto \pi_n^G(X,*)$ es un funtor de la categoría de los $G$-espacios punteados y aplicaciones $G$-equivariantes punteadas en la categoría de grupos.*

*Demostración.* Sea $\varphi : (X,*) \longrightarrow (Y,*)$ una aplicación equivariante y punteada. Definamos $\varphi_* : \pi_n^G(X,*) \longrightarrow \pi_n^G(Y,*)$ por $\varphi_*([f,g]) = [\varphi\circ f, g]$. Nótese que si $f$ representa la clase de homotopía de un elemento de orden $g \in G$, entonces $\varphi\circ f$ representa un elemento del mismo orden en el grupo correspondiente, pues $\varphi(f(x,0)) = \varphi(*) = *$ por tratarse de una aplicación punteada y $\varphi(f(x,1)) = \varphi(g\cdot *) = g\cdot\varphi(*) = g\cdot *$ por tratarse de una aplicación equivariante. Por otro lado, $\varphi_*$ es un homomorfismo de grupos, pues $\varphi_*([f,g][f',g']) = \varphi_*([f(g\cdot f'),gg']) = [\varphi\circ(f(g\cdot f')),gg'] = [(\varphi\circ f)\varphi\circ(g\cdot f'),gg']$. Ahora, puesto que la aplicación $\varphi$ es equivariante, el elemento anterior es igual a $[(\varphi\circ f)g\cdot(\varphi\circ f'),gg'] = [\varphi\circ f,g][\varphi\circ f',g'] = \varphi_*([f,g])\varphi_*([f',g'])$, por lo cual $\varphi_*$ es un homomorfismo de grupos.

Por otro lado, sea $\psi : (Y, *) \longrightarrow (Z, *)$ una aplicación equivariante y continua. Considérese $\psi \circ \varphi : (X, *) \longrightarrow (Z, *)$. En esa situación, $(\psi \circ \varphi)_*$ está dada por $(\psi \circ \varphi)_*([f.g]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f, g] = [\psi \circ (\varphi \circ f), g] = \psi_*([\varphi \circ f, g]) = \psi_* \circ \varphi_*([f, g])$. Así, $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$. Por último, nótese que si $id : (X, *) \longrightarrow (X, *)$, entonces $id_*[f, g] = [id \circ f, g] = [f, g] = id_{\pi_n^G(X,*)}$, por lo que $id_* = 1_{\pi_n^G(X,*)}$, lo cual prueba que la asignación es funtorial. □

Una de las construcciones más importantes en toda categoría es sin lugar a dudas la del producto. La categoría de *grupos de transformaciones*-es decir, aquélla formada por espacios topológicos punteados con acciones de grupos definidas en ellos, cuyos morfismos consisten en aplicaciones punteadas y compatibles con homomorfismos entre los grupos que actúan- no es una excepción, como se puede constatar en la siguiente

**Definición 24.** Dados dos espacios $X$ y $Y$, donde se han definido acciones de los grupos $G$ y $G'$, respectivamente, introducimos la *acción producto* de $G \times G'$ en el producto topológico $X \times Y$ mediante $(g, g') \cdot (x, y) = (g \cdot x, g' \cdot y)$.

La construcción de los grupos de homotopía equivariantes tiene un conveniente comportamiento con respecto del producto en la categoría correspondiente. De manera más precisa, se tiene el siguiente

**Teorema 4.** *Sean $X$ y $Y$ $G$- y $G'$-espacios, respectivamente. Consideremos $X \times Y$ con la ación producto definida en él. Entonces, existe un isomorfismo $\varphi$ : $\pi_n^{G \times G'}(X \times Y, *, *) \cong \pi_n^G(X, *) \times \pi_n^{G'}(Y, *)$*

*Demostración.* Defínase el homomorfismo mediante $\eta = \eta_G \times \eta'_{G'}$, donde $\eta_G = proy_{X*}$ y $\eta_{G'} = proy_{Y*}$. Es claro que al aplicación es suprayectiva, pues si $([f, g], [f', g']) \in \pi_n^G(X) \times \pi_n^{G'}(Y)$, el elemento $[f \times f', (g, g')]$ satisface que $\varphi([f \times f', g, g']) = ([f, g], [f', g'])$. Por último, la aplicación es inyectiva, pues si $[f, e]$ es tal que $proy_X \circ f$ y $proy_Y \circ f$ son nulhomotópicas mediante $H$ y $K$, respectivamente, entonces la aplicación $H \times K$ determina una nulhomotopía de $f$. Así, $\varphi$ es un isomorfismo □

La anterior definición de los grupos de homotopía de un $G$-espacio hizo uso de la noción de espacio punteado. Aun cuando en la anterior discusión el punto básico permaneció fijo, cabe la cuestión de determinar el efecto del cambio de punto básico. Como es sabido por la construcción del grupo fundamental, la yuxtaposición de trayectorias permite establecer un *isomomorfismo de conjugación* entre los grupos fundamentales con puntos básicos en la misma componente conectable por trayectorias. De un modo más preciso, se tiene la siguiente

**Proposición 16.** *Sea $\sigma : * \simeq *'$ una trayectoria. Defínase $\eta_\sigma : \pi_1(X, *) \longrightarrow \pi_1(X, *')$ dado por $[\alpha] \xmapsto{\eta_\sigma} [\bar{\sigma}\alpha\sigma]$. Entonces $\eta_\sigma$ es un isomorfismo.*

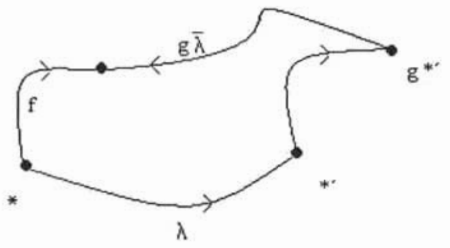


Figura 2.2: El isomorfismo de conjugación

*Demostración.* Ante todo, tal aplicación es un homomorfismo, pues $\eta_\sigma(\alpha\beta) = [\bar{\sigma}\alpha\beta\sigma] = [\bar{\sigma}\alpha\sigma\bar{\sigma}\beta\sigma] = [\eta_\sigma(\alpha)\eta_\sigma(\beta)]$. Por otro lado, $\eta_{\bar{\sigma}}$ es otro homomorfismo de grupos tal que $\eta_{\bar{\sigma}} \circ \eta_\sigma = 1_{\pi_1(X,*)}$ y $\eta_\sigma \circ \eta_{\bar{\sigma}} = 1_{\pi_1(X,*')}$. Por lo cual, ambos son isomorfismos inversos. □

Es posible generalizar estas ideas para definir un *isomorfismo de conjugación* en los grupos $\pi_n^G(X,*)$. La única dificultad que se advierte es la imposibilidad de yuxtaponer una trayectoria con una aplicación de orden g. Esta dificultad se resuelve por medio de la siguiente

**Observación 19.** Dada una trayectoria $\lambda : I \longrightarrow X$, definimos la *hipertrayectoria asociada*, $\tilde{\lambda} : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$ como sigue:

$$\tilde{\lambda}(w,t) = \lambda(t)$$

**Notación 6.** En lo sucesivo, abusaremos de la notación y escribiremos la trayectoria $\lambda : I \longrightarrow X$ y la hipertrayectoria asociada $\tilde{\lambda}$ con el mismo símbolo.

En vista del anterior resultado, es posible establecer el siguiente

**Teorema 5.** *Sea $\lambda : * \simeq *'$ una trayectoria. En la notación del lema anterior, consideremos la aplicación asociada $\lambda$ y la función $\eta_\lambda : \pi_n^G(X,*') \longrightarrow \pi_n^G(X,*)$ dada por $[f,g] \longmapsto [\lambda(fg\cdot\bar{\lambda}), g]$ (véase la figura 2.2). Entonces $\eta_\lambda$ es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* $\eta_\lambda$ es un homomorfismo, pues $\eta_\lambda([f,g][f',g']) = \eta_\lambda([f(g\cdot f'), gg']) = [\lambda f(g\cdot f')gg'\cdot\bar{\lambda}, gg'] = [\lambda f(g\cdot(\lambda\bar{\lambda})(g\cdot f')gg'\cdot\bar{\lambda}, gg'] = [\lambda fg\cdot\bar{\lambda}, g)][\lambda f'g'\cdot\bar{\lambda}, g'] = \eta_\lambda([f,g])\eta_\lambda([f',g'])$. Por otro lado, la función $\eta_{\bar{\lambda}}$ satisface que $\eta_\lambda \circ \eta_{\bar{\lambda}} = 1_{\pi_n^G(X,*)}$, $\eta_{\bar{\lambda}} \circ \eta_\lambda = 1_{\pi_n^G(X,*')}$. De esa manera, ambos son isomorfismos inversos. □

**Observación 20.** En adelante, y en vista del teorema anterior omitiremos el punto básico del símbolo $\pi_n^G(X,*)$ cuando no sea relevante su papel.

El isomorfismo de conjugación en $\pi_n^G(X)$ es una importante construcción. A continuación enumeraremos algunas importantes consecuencias del teorema 5. La primera consecuencia de la existencia del *isomorfismo de conjugación* es la posibilidad de definir isomorfismos de grupos de homotopía equivariantes para determinados puntos del $G$-espacio. Para formular con detalle esta última afirmación, precisamos la siguiente

**Observación 21.** Recuérdese que en un grupo $G$ se define el *centro* de $G$, $Cen(G)$ como el conjunto de elementos de $G$ que conmutan con todos los elementos del grupo. En símbolos: $c \in Cen(G) \iff gc = cg\ \forall g \in G$. Es sencillo probar que $Cen(G)$ es un subgrupo de $G$.

**Teorema 6.** *Sea $H$ un subgrupo de $Cen(G)$. Sea $C_*$ la componente conectable por trayectorias de $*$ en $X$. En la notación del capítulo 1, sea $*' \in H \cdot C_*$. Entonces, existe un isomorfismo $h_\sharp : \pi_n^G(X,*) \cong \pi_n^G(X,*')$*

*Demostración.* En vista de la existencia del isomorfismo de conjugación, basta considerar el caso en que $*' = h \cdot *$ para algún $h \in Cen(G)$. En esa circunstancia, considérese la aplicación

$$h_\sharp : \pi_n^G(X,*) \longrightarrow \pi_n^G(X, h\cdot *)$$

$$[f,g] \longmapsto [hf,g]$$

Nótese que es un homomorfismo de grupos, pues $h_\sharp([f,g][f',g']) = h_\sharp([fg\cdot f', gg']) = [h\cdot(fgf'), gg']$. Obsérvese que un representante $l$ de esta última clase de homotopía satisface que $l(0,x) = h\cdot *$, $l(1,x) = g\cdot(h\cdot *)$. Por otro lado, $h_\sharp([f,g]) = [h\cdot f, g]$ y $h_\sharp([f',g']) = [h\cdot f', g']$. Así, $h_\sharp([f,g])h_\sharp[f',g'] = [h\cdot f, g][h\cdot f', g'] = [h\cdot f(g\cdot(h\cdot f')), gg']$. Puesto que $h \in Cen(G)$, se tiene que $hg = gh$. En particular, $[h\cdot f(g\cdot(h\cdot f')), gg'] = [h\cdot f(hg\cdot f'), gg']$. En conclusión, $h_\sharp([f,g][f',g']) = [h\cdot f(g\cdot(h\cdot f')), g, g'] = [h\cdot f, g][h\cdot f', g'] = h_\sharp([f,g])h_\sharp([f',g'])$. Finalmente, es claro que $h_\sharp$ es suprayectivo, de modo que sólo resta verificar que es inyectivo. Sea $[f,e] \in \ker h_\sharp$. Entonces, $h\cdot f \simeq 0$. Se concluye que $f \simeq 0$ , por lo cual $\ker h_\sharp = \{e\}$ y por lo tanto, $h_\sharp$ es un isomorfismo. □

Por último, el isomorfismo de conjugación permite establecer la relación que existe entre grupos de homotopía de $G$-espacios del mismo tipo de homotopía cuyas equivalencias homotópicas no son necesariamente equivariantes y punteadas. Para establecer de manera más precisa esta afirmación es necesario formular el siguiente

**Lema 9.** *Sean $\psi, \psi' : X \longrightarrow Y$ aplicaciones homotópicas. Entonces existe una trayectoria $\lambda$ tal que $\psi_*([f,g]) = \varphi_\lambda(\psi'([f,g])$.*

*Demostración.* Sea $[f, g] \in \pi_n^G(X)$. Por hipótesis, existe una homotopía $H : \psi \simeq \psi'$. Sea $\lambda : I \longrightarrow Y$ dada por $\lambda(t) = H(*, 0, t)$. Consideremos la aplicación asociada $\lambda$. Construyamos la homotopía

$$K(w, s, t) = \begin{cases} H(*, \frac{3s}{1-t}) & \text{si } t \in [0, \frac{1-t}{3}] \\ H(f(w, \frac{3s+t-1}{2t-1}, t)) & \text{si } t \in [\frac{1-t}{3}, \frac{t+2}{3}] \\ g \cdot H(*, \frac{3s-t-2}{3-t-2}) & \text{si } t \in [\frac{t+2}{3}, 1] \end{cases}$$

Tras verificar algunos detalles elementales de continuidad de la aplicación $K$, es inmediato que $K : \lambda(\psi \circ f)g \cdot (\bar{\lambda}) \simeq_G (\psi' \circ f)$. Finalmente, por la definición del isomorfismo de conjugación,
$\psi'_*([f, g]) = \varphi_\lambda(\psi_*([f, g]))$ □

**Corolario 4.** *Si $X$ y $Y$ son espacios del mismo tipo de homotopía equivariante punteada, entonces $\pi_n^G(X)$ y $\pi_n^G(Y)$ son isomorfos como grupos*

*Demostración.* Sean $k : X \longrightarrow Y$ y $k' : Y \longrightarrow X$ inversos homotópicos punteados. En ese caso, existe una homotopía equivariante y punteada $H : k \circ k' \simeq id_Y$. En la notación del lema 9, sea $\lambda$ la trayectoria descrita por el punto básico. Nótese que puesto que la homotopía es punteada, la trayectoria $\lambda$ es trivial. Por lo cual, en vista del anterior lema, $(k \circ k')_*([f, g]) = \varphi_{c_*}(id_*([f, g]) = id_*([f, g]) = [f, g]$. Análogamente se concluye que $(k'_* \circ f)_*([f', g']) = [f', g']$. Por último, como consecuencia de la funtorialidad, estos últimos homomorfismos de grupos coinciden con $k_* \circ k_*$ y $k \circ k'_*$, respectivamente. Por lo cual, $k_*$ y $k'_*$ determinan isomorfismos de grupos inversos. □

**Observación 22.** La condición de ser aplicación equivariante y punteada de la homotopía entre las aplicaciones del corolario anterior es redundante. Es posible probar el resultado anterior bajo la hipótesis de una equivalencia homotópica usual. La demostración involucra detalles técnicos elementales que no incluiremos.

## 2.2. Relaciones con otros grupos

En la construcción clásica de los conjuntos de homotopía, los espacios de funciones y los conjuntos de homotopía de éstos se encuentran íntimamente relacionados con los grupos de homotopía del espacio original. En el ámbito de la teoría equivariante, se tienen varios resultados similares. A continuación enunciaremos algunos de ellos. En un artículo de 1949, [3] R.H. Fox introdujo un grupo de homotopía de aplicaciones cuyo dominio es el toro $n$-dimensional. En la notación de este trabajo, tal grupo puede verse sumergido en lo que hemos llamado $\pi_n^G(X)$. Consideremos para este fin la siguiente

**Proposición 17.** *Sea $\tau_n(X)$ el conjunto de elementos de orden $e$ en $\pi_n^G(X)$. Entonces $\tau_n(X)$ es un subgrupo.*

*Demostración.* Ante todo, la clase de homotopía de la hipertrayectoria constante con valor en el punto básico pertenece al conjunto en cuestión. Sean $[f,e]$,$[f',e] \in \tau_n(X,*)$. De acuerdo con la regla de multiplicación definida en la definición 23, $[f,e][f',e] = [ff',e]$, donde $ff'$ denota la yuxtaposición de estas aplicaciones. De esa manera, $ff'$ es de nuevo un elemento de orden $e$. Por último, como consecuencia de la proposición 14, se tiene que el inverso de un elemento de orden e,$[f,e]$ es $[\bar{f},e^{-1}] = [\bar{f},e]$. Nótese que $\bar{f}$ es de nueva cuenta una aplicación de orden $e$. En conclusión, $\tau_n(X)$ es un subgrupo de $\pi_n^G(X)$. □

**Definición 25.** Llamaremos $n$-ésimo grupo de homotopía toroidal, o $n$-grupo de Fox al subgrupo anteriormente descrito. En lo sucesivo, lo denotaremos por $\tau_n(X)$.

**Observación 23.** Nótese que en el caso $n = 1$, el grupo $\tau_1(X)$ coincide con el grupo fundamental, $\pi_1(X)$. Las aplicaciones de orden $e$ coinciden con los lazos y la $G$-homotopía coincide con la homotopía punteada de lazos.

Bajo ciertas hipótesis que estableceremos a continuación, el cálculo de los grupos $\pi_n^G(X)$ se reduce esencialmente al cálculo de $\tau_n(X)$.

**Teorema 7.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectable por trayectorias. Supóngase además que existe un punto fijo bajo la acción. Entonces $\pi_n^G(X) \cong \tau_n(X) \times G$.*

*Demostración.* En vista del teorema 5, es suficiente probar el resultado cuando el punto básico es fijo bajo la acción del grupo. Notemos que en este caso, cada aplicación $f$ de orden $g$ satisface $f(\mathbb{T}^{n-1} \times 0) = f(\mathbb{T}^{n-1} \times 1) = *$. De esa manera, es posible definir la aplicación $\varphi : \pi_n^G(X) \longrightarrow \tau_n(X) \times G$ dada mediante $[f,g] \overset{\varphi}{\longmapsto} ([f],g)$. Ante todo, la aplicación $\varphi$ es un homomorfismo de grupos, pues $\varphi([f,g][f',g']) = \varphi([fg\cdot f',gg']) = (fg\cdot f',gg')$. Puesto que la acción de g sobre el punto básico es trivial, se tiene que el anterior elemento en $\tau_n(X,*) \times G$ coincide con $(ff',gg') = \varphi([f,g])\varphi([f',g'])$. De ese modo, $\varphi$ es un homomorfismo. Es claramente suprayectivo, pues si $(f,g) \in \tau_n(X,*) \times G$, el elemento $[f,g]$ en $\pi_n^G(X)$ satisface que $\varphi([f,g]) = (f,g)$. Por último, es inyectivo pues si $[f,e] \in \ker\varphi$, entonces $f \simeq 0$ como aplicación en $\pi_n^G(X,*)$. De esa manera, $\varphi$ determina el isomorfismo. □

**Observación 24.** Desafortunadamente, el recíproco del teorema anterior -que constituiría un teorema de punto fijo- no es cierto(véase a este respecto el ejemplo 6. Sin embargo, forma una condición necesaria para la existencia de puntos fijos. Desde luego, puede usarse para responder negativamente a la pregunta de si una acción posee puntos fijos o no.

Una propiedad importante del grupo $\tau_n(X)$ reside en el hecho de que es posible determinarlo mediante un grupo fundamental. Al menos teóricamente, este hecho nos dota de una conveniente herramienta de cálculo. Resumimos este hecho en el siguiente

**Teorema 8.** *Sea $X$ un $G$-espacio. Existe un isomorfismo $\pi_1(M(\mathbb{T}^{n-1}, X), c_*) \cong \tau_n(X, *)$*

*Demostración.* Notemos que si $\lambda$ es un lazo en $M(\mathbb{T}^{n-1}, X)$, entonces determina para cada $t \in I$ una aplicación $\lambda(t) : \mathbb{T}^{n-1} \longrightarrow X$. Así, un lazo en este espacio de funciones puede verse de manera canónica como una aplicación $\lambda : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$. Obsérvese que, puesto que $\lambda$ es un lazo, $\lambda$ está además sujeta a la condición $\lambda(\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}) = * = \lambda(\mathbb{T}^{n-1} \times \{1\})$. Es fácil verificar que la asignación anteriormente descrita preserva las homotopías. De esa manera, la función $\varphi : \pi_1(M(\mathbb{T}^{n-1}, X) \longrightarrow \tau_n(X, *)$ dada por

$$[\lambda] \stackrel{\varphi}{\longmapsto} [\lambda, e]$$

está bien definida. Además, es claramente suprayectiva, pues si $[f, e] \in \tau_n(X, *)$, el lazo $\lambda(t)(w) = f(w, t)$ satisface que $\varphi([\lambda]) = [f, e]$. Finalmente, es inyectiva pues si $\varphi([\lambda]) \simeq_G 0$, entonces $\lambda \simeq 0$. En conclusión, $\varphi$ determina el isomorfismo solicitado. □

**Observación 25.** Recuérdese que en la notación de la observación 3, se tiene un homeomorfismo

$$M(I, M(Z, X)) \stackrel{\approx}{\longrightarrow} M(Z \times I, X)$$

de manera que los conjuntos de homotopía resultan isomorfos mediante el homomorfismo inducido. En particular, si consideramos $Z = \mathbb{T}^{n-1}$, obtenemos

$$[I, M(\mathbb{T}^{n-1}, X)]_* \cong [\mathbb{T}^{n-1} \times I, X]_*$$

Esto constituye una prueba más del hecho que establece el anterior teorema. Es decir, $\tau_n(X, *) \cong \pi_1(M(\mathbb{T}^{n-1}, X), c_*)$.

De los teoremas 8 y 7 es inmediato el siguiente

**Corolario 5.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectable por trayectorias y tal que existe un punto con la propiedad de ser fijo por la acción del grupo $G$. Entonces, si se define $Y = M(\mathbb{T}^{n-1}, X)$, existe un isomorfismo*

$$\pi_n^G(X, *) \cong \pi_1(Y, c_*) \times G$$

□

Es posible generalizar estas ideas para obtener una representación de $\pi_n^G(X)$ en términos del primer grupo de homotopía equivariante de un determinado espacio. Este hecho demuestra que la teoría de grupos de homotopía equivariante no es en realidad tan general. Desde esta perspectiva, el cálculo de los grupos $\pi_n^G(X)$ se reduce al problema de determinar $\pi_1^G(W, *)$ para un espacio conveniente. De manera más precisa, tenemos el siguiente

**Teorema 9.** *Se tiene un isomorfismo* $\varphi : \pi_n^G(X,*) \longrightarrow \pi_1^G(M(\mathbb{T}^{n-1},X),c_*)$

*Demostración.* Sea $\psi$ el homeomorfismo descrito en la observación 25. Notemos que dicha asignación es compatible con las $G$-homotopías. De esa manera, se tiene un homomorfismo de grupos $\varphi = \psi_*$

$$[I, M(\mathbb{T}^{n-1},X)_*]_*^G \xrightarrow{\varphi} [\mathbb{T}^{n-1}\times I, X]_*^G$$

Observemos que el homomorfismo $\varphi$ es suprayectivo. De acuerdo con la observación 16 del capítulo 1, tal asignación determina el isomorfismo. $\square$

El grupo de homotopía $\pi_n^G(X,*)$ mantiene una relación estrecha con otros invariantes homotópicos clásicos. En particular, cuenta con algunos subgrupos y cocientes de interés en la teoría no equivariante. Como ya se ha hecho notar, el grupo de homotopía toroidal puede verse sumergido en $\pi_n^G(X)$. Si a una aplicación que representa un elemento en este último subgrupo se le imponen ciertas condiciones adicionales, es posible recuperar propiedades de homotopía clásica. La siguiente definición impone una de las primeras condiciones a tales familias.

**Definición 26.** Sea $N \subset [\mathbb{T}^{n-1}\times I, X]_*^G$ el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $f$ tales que su restricción a los ejes de $\mathbb{T}^{n-1}$ es constante con valor en el punto básico y $f(w,0) = f(w,1) = *$. Es decir, $f\mid_{\bigcup W_i} = c_*$, donde $W_i$ es el subespacio de $\mathbb{T}^{n-1}$ definido mediante

$$W_i = \{(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},1,\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_{n-1} \mid \zeta_j \in \mathbb{S}^1\ \forall j\}$$

Resulta natural la pregunta de si estas condiciones están relacionadas con la estructura algebraica de $\pi_n^G(X)$. El siguiente resultado responde afirmativamente a esa pregunta.

**Lema 10.** *El conjunto $N$ es un subgrupo de $\pi_n^G(X)$.*

*Demostración.* Ante todo, la clase de homotopía de la aplicación constante con valor en el punto básico es una de las que se consideran en $N$. Notemos, además, que las clases de homotopía en cuestión corresponden por construcción a elementos de $\tau_n(X)$. De esa manera, sus elementos son de la forma $[f,e],[f',e]$, donde $f,f'$ son aplicaciones con la propiedad antes mencionada. Es claro que si $f$ es una aplicación con la propiedad de ser constante en $\bigcup W_i$, $\bar{f}$ también posee tal propiedad. Resta probar que el producto de dos aplicaciones en $N$ permanece en $N$. Sean $[f,e],[f',e]$ dos de ellos. Recuérdese que $[f,e][f',e] = [ff',e]$. Notemos que la regla de correspondencia de $ff'$ es la siguiente:

$$ff'(w,t) = \begin{cases} f(w,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ f'(w,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Así, si $t \in I$ y $w \in W_i$, entonces ocurren dos posibilidades.

1. $t \leq \frac{1}{2}$, en cuyo caso, $ff^{'}(w,t) = f(w,2t) = *$
2. $t \geq \frac{1}{2}$, en cuyo caso, $ff^{'}(w,t) = f^{'}(w,2t-1) = *$

Así, $ff^{'}|_{\bigcup W_i} = c_*$. □

La relación entre el subgrupo $N$ y otros invariantes de la topología algebraica convencional se anticipa en la siguiente

**Observación 26.** Recuérdese que se tienen identificaciones $p : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ y $q : I^{n-1} = \Pi_{i=1}^{n-1} I \longrightarrow I^{n-1}/\partial I^{n-1} \approx \mathbb{S}^{n-1}$. Consideremos la aplicación producto $\Pi p$ determinada por la familia $p$. Puesto que el intervalo es un espacio compacto, $\Pi p$ es una identificación. Además, q es una aplicación compatible con la identificación antes descrita. Por la propiedad universal de las identificaciones, $q$ induce una aplicación $r$ de manera que el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \Pi_{i=1}^{n-1} I \arrow[r, "\Pi p"] \arrow[d, "q"'] & \Pi_{i=1}^{n-1} \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{T}^{n-1} \arrow[dl, dashed, "r"'] \\ \mathbb{S}^{n-1} \approx I^{n-1}/\partial I^{n-1} & \end{tikzcd}$$

Nótese, además, que la aplicación $r$ que se ha construido es una identificación, pues todos los espacios en consideración son compactos y de Hausdorff. En consecuencia, si se considera la aplicación cociente canónica $q^{'} : \mathbb{S}^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbb{S}^n$, es posible definir una identificación $p^{'}$ mediante la composición $p^{'} : \mathbb{T}^{n-1} \times I \xrightarrow{r \times id_I} \mathbb{S}^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times I \xrightarrow{q^{'}} \mathbb{S}^n$.

La anterior observación sugiere el hecho de que una familia de aplicaciones en $M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)$ con propiedades convenientes determina aplicaciones cuyo dominio es la esfera. Como se recordará, tales aplicaciones resultan de particular interés en la teoría no equivariante, pues representan elementos en el $n$-grupo de homotopía clásico. Las propiedades adecuadas para conseguir ésto son precisamente las que definen al subgrupo $N$. De manera más precisa, podemos enunciar la siguiente

**Proposición 18.** *Se tiene un homomorfismo de grupos $N \longrightarrow \pi_n(X)$.*

*Demostración.* Consideremos la identificación $p^{'}$ definida en la observación 26. Sea $f$ un representante de una clase de homotopía en $N$. Notemos que la aplicación $f$ es compatible con $p^{'}$, de manera que existe una aplicación $\tilde{f}$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{n-1} \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p^{'}"'] & X \\ \mathbb{S}^n \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, la aplicación resulta punteada. Notemos que dos aplicaciones $G$-homotópicas en N son homotópicas en el sentido usual, pues el elemento de $G$ que define la $G$-homotopía es el idéntico. En consecuencia, si se define la aplicación $\varphi : N \longrightarrow \pi_n(X)$ mediante $[f,e] \longmapsto [\bar{f}]$, la asignación está bien definida . $\square$

Finalmente, podemos resumir los resultados expuestos en el siguiente

**Teorema 10.** *Para un $G$-espacio $X$, se tienen las siguientes afirmaciones*

1. *$\tau_n(X)$ es un subgrupo normal de $\pi_n^G(X)$*

2. *$\tau_n(X)$ posee un subgrupo isomorfo a $\pi_n(X)$*

*Demostración.* 1. Sea $[f,g] \in \pi_n(X)$ y $[h,e] \in \tau_n(X).[f,g]^{-1}[h,e][f,g] = [fg \cdot hg \cdot \bar{f}, gg^{-1}] \in \tau_n(X)$

2. A la luz de la proposición 18, existe un homomorfismo de grupos $N \longrightarrow \pi_n(X)$ dado por $[f,e] \longmapsto [\bar{f}]$. A continuación, construiremos un homomorfismo inverso, mostrando así que existe un isomorfismo entre ambos objetos. Para ello, hagamos notar que, en virtud de la proposición 7, es posible considerar a $\pi_n(X)$ como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de ternas $[I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, *, *]$. Por otro lado, la identificación $p : I^n \longrightarrow \mathbb{T}^{n-1} \times I$ permite construir una aplicación de ternas, que denotamos por $M : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{T}^{n-1} \times I, E \times I, N \cup S)$, donde $E$ representa el subespacio de $\mathbb{T}^{n-1}$ que hemos convenido en llamar *ejes*. Verifiquemos que esta asignación determina un homomorfismo en las clases de homotopía de nuestro interés. Sea $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I; X, *, *)$ una homotopía de ternas. Notemos que $H$ es compatible con la identificación $p$, de manera que existe una aplicación $\tilde{H}$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathbb{T}^{n-1} \times I \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, puesto que $H$ es una homotopía de ternas, $\tilde{H}$ es una $G$-homotopía. De esa manera, se tiene un homomorfismo de grupos

$$M_* : [I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, *, *] \longrightarrow [\mathbb{T}^{n-1} \times I, E \times I; X, *]_*^G$$

inverso para el construido en la proposición 18.

$\square$

Si además se suponen algunas condiciones extras sobre el espacio y la acción, salta a la vista la profunda interrelación entre los invariantes algebraicos que son nuestro objeto de estudio. La primera condición que se presenta es la que brinda las hipótesis del siguiente

**Teorema 11.** *Sea $X$ un $G$-espacio con acción pareja. Supóngase además que $G \cdot *$ es un espacio discreto. Entonces $\tau_n(X/G)$ es un cociente de $\pi_n^G(X)$*

*Demostración.* Consideremos la aplicación cociente de órbitas $r : X \twoheadrightarrow X/G$. Si dotamos a $X/G$ con la acción trivial de $G$, esta aplicación resulta equivariante y punteada. Como consecuencia de la proposición 15, se tiene un homomorfismo inducido $r_* : \pi_n^G(X) \longrightarrow \pi_n^G(X/G)$. Notemos que, de acuerdo con el teorema 7, la imagen de este homomorfismo puede ser considerada en $\tau_n(X/G) \times G$ salvo isomorfismo. Consideremos la proyección en la primera coordenada. Denotemos por $\varphi$ el homomorfismo dado por la composición de todos estos homomorfismos. Es decir,

$$\varphi : \pi_n^G(X) \xrightarrow{r_*} \pi_n(X/G) \cong \tau_n(X/G) \times G \longrightarrow \tau_n(X/G)$$

Probaremos que el anterior homomorfismo es suprayectivo. Sea $[f, e] \in \tau_n(X/G)$. Las condiciones impuestas a la acción permiten concluir que la aplicación cociente es una fibración. Por tanto, de acuerdo con los resultados del primer capítulo, posee la propiedad de levantamiento de homotopías. La hipótesis sobre la órbita permite plantear el siguiente problema.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}^{n-1} \arrow[r, "c_*"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "r"] \\
\mathbb{T}^{n-1} \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "f'"] & X/G
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad de levantamiento de homotopías de $r$, existe $f'$ como en el diagrama anterior. Además, como $G \cdot *$ es discreta, $f'$ representa un $g$-elemento para alguna $g \in G$. Tal aplicación satisface que $\varphi([f', g]) = [f, e]$. En conclusión, la aplicación es suprayectiva. Como consecuencia de los teoremas de isomorfismo

$$\pi_n^G(X)/\ker\varphi \cong \tau_n(X/G)$$

□

Un caso particular del cálculo de $\pi_n^G(X)$ se presenta cuando éste es el grupo trivial. En esta situación, $\pi_1^G(X)$ nos permite obtener información tanto de las propiedades homotópicas del espacio $X$ como de la acción del grupo $G$. De manera más precisa, se tiene

**Proposición 19.** *Sea $X$ un $G$-espacio tal que $\pi_1^G(X) = 0$. Entonces $G$ es trivial y $X$ es 1-conexo.*

*Demostración.* Ante todo notemos que la acción tiene puntos fijos, pues todos los $g$-elementos $[f, g]$ son en realidad $e$-elementos. Como consecuencia del teorema 7, se tiene que $\pi_1^G(X) \cong \tau_1(X) \times G$. Por último, nótese que por hipótesis este grupo es trivial, de manera que tanto $G$ como $\pi_1(X)$ lo son. □

La propiedad de ser conectable por trayectorias permite definir una importante relación entre el grupo que actúa y el grupo de homotopía equivariante. A saber, $G$ es siempre un cociente del grupo de homotopía equivariante cuando el espacio es conectable por trayectorias. Este hecho y una situación dual -cierto encaje de G en $\pi_n^G(X)$- serán de particular interés en el próximo capítulo.

**Lema 11.** *Si el espacio $X$ es conectable por trayectorias, Se tiene un epimorfismo $p : \pi_n^G(X) \longrightarrow G$*

*Demostración.* Definamos la aplicación $p([f, g]) = g$ Para cada $g \in G$, consideremos $\lambda_g : * \simeq g \cdot *$. Si $\lambda_g$ es la aplicación asociada, se tiene que $p([\lambda_g, g]) = g$, por lo cual $p$ es un epimorfismo. □

## 2.3. Ejemplos

La sección anterior mostró algunas relaciones entre los grupos de homotopía equivariantes y otros invariantes asociados a los $G$-espacios. En esta sección utilizaremos esos resultados para calcular los grupos de homotopía equivariantes en algunos casos sencillos.

**Ejemplo 2.** Consideremos $\mathbb{S}^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$, con la estructura multiplicativa inducida por la del plano complejo. Definamos una acción de $\mathbb{S}^1$ en sí mismo mediante la siguiente regla de correspondencia

$$\eta \cdot \zeta = \eta\zeta$$

Es claro que tal asignación determina una acción de grupo. Además, tal acción es libre, pues si $\eta\zeta = \zeta$, entonces $\eta\zeta\bar{\zeta} = \zeta\bar{\zeta} = 1$.

Consideremos el problema de calcular $\pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1, 1)$. Un $\eta$-elemento es una clase de homotopía $[f, \eta]$, donde $f$ es una aplicación con dominio en $* \times I$ y que satisface $f(0) = 1, f(1) = \eta$. De manera intuitiva, es posible afirmar que la clase de homotopía de $f$ dependerá de *cuántas vueltas* a $\mathbb{S}^1$ describa un punto sobre la trayectoria. A diferencia del caso del grupo fundamental, donde las clases de homotopía de lazos quedan determinadas por un cierto número entero asociado a uno de sus levantamientos, el cálculo del grupo $\pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1)$ requiere de elementos adicionales.

**Teorema 12.**

$$\pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$$

*Demostración.* Consideremos la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1)$ definida mediante $r \longmapsto [f_r, e^{2r\pi i}]$, donde $f_r : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f_r(t) = e^{2r\pi i t}$. Notemos que las aplicaciones $f_r e^{r\pi i} f_{r'}$ y $f_{rr'}$ resultan homotópicas mediante una homotopía relativa a la frontera del intervalo. Por otra parte, según una propiedad elemental de la aplicación exponencial, $e^{2\pi i(r+r')} = e^{2\pi ir}e^{2\pi ir'}$. Así, $\varphi$ es un homomorfismo de grupos. Si $r \in \ker\varphi$, entonces se tiene que $\varphi(r) = [f_r, 1]$ es un 1-elemento. Es decir, $r \in \mathbb{Z}$. Pero, por otra parte, $f_r \simeq c_1$. Así, $r = 0$ y la aplicación $\varphi$ es inyectiva. Por último, si $f : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ representa un $\eta$-elemento, sea $\partial f$ el grado generalizado introducido en la observación 14, y $t_f \in [0,1)$ tal que $e^{\pi i t_f} = \eta$. Notemos que el número real $r = \partial f + t_f$ satisface que $\varphi(r) = [f, \eta]$. Así, la aplicación es suprayectiva y, por lo tanto, determina un isomorfismo de grupos. $\square$

**Ejemplo 3.** Consideremos la acción del grupo $\mathbb{S}^1$ en el plano complejo por rotación. De manera más precisa, definamos la acción $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\mu(\zeta, \eta) = \zeta\eta$$

Es claro que tal acción tiene como punto fijo al origen del plano complejo. En consecuencia, es posible aplicar el teorema 7 para concluir que

$$\pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}) \cong \pi_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{S}^1$$

Recuérdese que el plano complejo es simplemente conexo, de manera que $\pi_1(\mathbb{C}) = \{e\}$. Así, $\pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^1$

**Observación 27.** El anterior ejemplo puede ser formulado en términos más generales, a saber: Si $X$ es un $G$-espacio simplemente conexo, entonces $\pi_1^G(X) \cong G$

**Ejemplo 4.** Defínase la acción de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{S}^1$ por conjugación compleja $\zeta \longmapsto \bar{\zeta}$. Bajo tal acción, son puntos fijos 1 y $-1$. De nuevo, como consecuencia del teorema 7, $\pi_1^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

**Ejemplo 5.** Sea $G = \mathbb{Z}_2$ actuando como una *reflexión en un eje* en el toro de dimensión 2, $\mathbb{T}^2$. Es decir, si $\mathbb{T}^2 = \{(\zeta, \eta) \mid \zeta, \eta \in \mathbb{S}^1\}$ , definimos para $[n] \in \{[0], [1]\}$ la acción de grupos $\nu(\bar{n}, (\zeta, \eta)) = (\zeta, \bar{\eta})$. En vista del teorema 4, y de los resultados obtenidos en el ejemplo 4, podemos afirmar que se tiene: $\pi_1^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{T}^2) \cong \pi_1^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

**Ejemplo 6.** Consideremos la acción de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo mediante traslación. Es decir, consideremos la aplicación

$$\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

Calculemos $\pi_1^{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^2)$. Para ello, notemos que si se selecciona al origen como punto básico, un $x$-elemento es la clase de homotopía relativa al intervalo de una trayectoria $\sigma : 0 \simeq x$. Puesto que $\mathbb{R}^2$ es un espacio simplemente conexo, cualesquiera dos de estas trayectorias son homotópicas. De esa manera, el epimorfismo introducido en el lema 13

$$\varphi : \pi_1^{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (\sigma, x) \longmapsto x$$

resulta inyectivo y, en consecuencia, determina un isomorfismo de grupos. Obsérvese que la acción considerada carece de puntos fijos, aún cuando se tiene

$$\pi_1^{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \pi_1(\mathbb{R}^2)$$

De esa manera, un inverso del teorema 7 resulta falso.

# Capítulo 3

# Extensiones de grupos

## 3.1. $G$-espacios y conectividad

Consideremos en un $G$-espacio el problema de la *conexidad* de la órbita. Es decir, si es posible asignar a cada elemento $g \cdot *$ en la órbita del punto básico $*$ una trayectoria en $X$ que conecte a ambos. En el caso de que el $G$-espacio sea conectable por trayectorias, este hecho está garantizado y no permite obtener ninguna conclusión acerca del grupo y el espacio en consideración. Sin embargo, si a esta condición añadimos una que restrinja las propiedades homotópicas de las trayectorias, es posible obtener mayor información acerca del espacio y de la acción. En particular, resulta natural la pregunta acerca de la compatibilidad de una de tales asignaciones con las operaciones definidas en $\pi_1^G(X)$.

**Definición 27.** Sea $X$ un $G$-espacio. Diremos que $X$ es *$n$-conectivo* si para cada $g \in G$, existe una aplicación $w_g : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$ tal que

1. $w_g(\mathbb{T}^n \times 0) = g \cdot *$
2. $w_g(\mathbb{T}^{n-1} \times 1) = *$
3. $w_{gg'} \simeq g \cdot w_{g'} \bar{w}_g$.

A continuación, describiremos la relación que existe entre la $n$-conectividad de un $G$-espacio y el caso más particular de la conectividad por trayectorias que fue discutida de manera imprecisa en el primer párrafo de este capítulo. El siguiente resultado resuelve esta cuestión.

**Proposición 20.** *Sea $X$ un $G$-espacio. Son equivalentes*

1. *$X$ es 1-conectivo*
2. *$X$ es $n$-conectivo para cada $n \in \mathbb{N}$*

*Demostración.* 2. $\Longrightarrow$ 1. Es inmediato.

□

1. $\Longrightarrow$ 2. Sean $X$ un $G$-espacio 1-conectivo, $g \in G$ y $w_g$ la trayectoria correspondiente. Si se considera la aplicación $w_g$ asociada en el sentido de la observación 19, el siguiente diagrama resulta conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times I \arrow[r, "w_g"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X \\ \mathbb{T}^{n-1} \times I \arrow[ur, "w_g"'] & \end{tikzcd}$$

Para cada $g \in G$, selecionemos la aplicación $w_g$ construida de acuerdo con la observación 19. Como consecuencia de la observación 19, tal asignación respeta las homotopías, de manera que la familia $(\tilde{w_g})_{g\in G}$ satisface la condición de homotopía de la definición anterior. □

En vista de la proposición 20, aplicaremos el calificativo de *conectivo* a un espacio que satisfaga cualquiera de las condiciones equivalentes ahí descritas. La propiedad de ser conectivo puede ser caracterizada mediante los invariantes homotópicos que hemos introducido. Considérese a este respecto el siguiente

**Lema 12.** *Son equivalentes para un $G$-espacio:*

1. *$X$ es conectivo*

2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un monomorfismo $G \longrightarrow \pi_n^G(X)$ tal que todo $g \in G$ tiene asociado un elemento de orden $g$ en $G$*

3. *Existe un monomorfismo $G \longrightarrow \pi_1^G(X)$ con la propiedad antes descrita.*

*Demostración.* 1. $\Longrightarrow$ 2. Por hipótesis, existe una familia $(w_g)_{g\in G}$ con las propiedades de la definición 27. Definamos la aplicación $\varphi : G \longrightarrow \pi_n^G(X)$ mediante $g \longmapsto [\overline{w_g}, g]$. Notemos que por definición, $\varphi(gg') = [\overline{w_{gg'}}, gg']$. Por la condición de homotopía, $w_{gg'} \simeq g \cdot w_{g'} w_g$. Así, $\varphi(gg') = [\overline{g \cdot w_{g'} w_g}, gg'] = [\overline{w_g} g \cdot (\overline{w_{g'}}), gg'] = [w_g, g][w_{g'}, g'] = \varphi(g)\varphi(g')$. Por lo cual , $\varphi$ es un homomorfismo. Por otro lado, la definición 27 garantiza que $\ker\varphi$ sea trivial.

2. $\Longrightarrow$ 3. Sea $\varphi(g) = [\tilde{\lambda}_g, g] \in \pi_1^G(X, *)$. De acuerdo con la proposición 25, existen aplicaciones $\lambda \in M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)$ tales que $\lambda(w,t) = \lambda(t)$. Definamos la aplicación $\psi : G \longrightarrow \pi_n(X, *)$ mediante $g \longmapsto [\lambda, g]$. Como consecuencia de la observación 25, tal asignación es un monomorfismo de grupos.

3. $\Longrightarrow$ 1. Es inmediato. □

El anterior lema permite ver al grupo $G$ encajado en $\pi_n^G(X)$ bajo la hipótesis de conectividad del espacio. Por otro lado, si el espacio en consideración es conectable por trayectorias, es posible cubrir a $G$ con elementos en el grupo $\pi_1^G(X)$. Con mayor precisión se tiene el siguiente resultado, cuya prueba ya hemos señalado con anterioridad:

**Lema 13.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectable por trayectorias. Entonces, se tiene un epimorfismo $p : \pi_n^G(X) \longrightarrow G$.*

*Demostración.* Definamos la aplicación $p : \pi_n^G(X) \longrightarrow G$ mediante $[f, g] \longmapsto g$. Es inmediato verificar que tal aplicación es un homomorfismo de grupos. Sea $g \in G$. Como $X$ es conectable por trayectorias, existe una trayectoria $\lambda_g : * \simeq g \cdot *$. Consideremos la aplicación asociada $\lambda_g$ en el sentido del lema 19. Notemos que en ese caso $p(\lambda_g, g) = g$, por lo cual la aplicación es un epimorfismo. □

**Observación 28.** *Como consecuencia del lema 13, se tiene un isomorfismo*

$$\pi_n^G(X) / \tau_n(X) \cong G$$

*En particular, si $n = 1$, obtenemos una sucesión exacta corta*

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1^G(X) \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Los dos anteriores resultados permiten establecer dos relaciones entre el grupo $G$ y el invariante $\pi_n^G(X)$. Bajo una hipótesis -conectividad de $X$-, $G$ es un subgrupo. Bajo otra -conectabilidad por trayectorias- $G$ es un cociente. Combinando ambas propiedades se tiene el siguiente

**Teorema 13.** *Son equivalentes para un $G$-espacio $X$ conectable por trayectorias:*

1. *$X$ es conectivo*
2. *Existe una sucesión exacta*

$$1 \longrightarrow \tau_n(X) \longrightarrow \pi_n^G(X) \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

*que se escinde en $\pi_n^G(X)$*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata de los lemas 12 y 13. □

Consideremos un $G$-espacio conectivo. En vista del lema 12, es posible encajar a G en $\pi_n^G(X)$. En esta situación, para cada $g \in G$ es posible definir un automorfismo del grupo $\pi_n^G(X)$ dado por la conjugación con el elemento asociado a $g$ mediante el encaje. Si además recordamos los resultados del segundo capítulo, en particular el teorema 10, es inmediato verificar la siguiente

**Proposición 21.** *Si $X$ es conectivo, existen homomorfismos de grupos $H_G : G \longrightarrow Auto\ (\pi_n^G(X))$ y $K_G : G \longrightarrow Auto\ (\tau_n(X))$*

*Demostración.* Definimos la acción $\mu : G \times \pi_n^G(X) \longrightarrow \pi_n^G(X)$ mediante

$$(g, [f, h]) \longmapsto i(g)[f, h]i(g)^{-1}$$

donde $i : G \longrightarrow \pi_n^G(X)$ es el monomorfismo determinado por la propiedad conectiva de $X$. Como consecuencia del teorema 10, tal acción se restringe al subgrupo mencionado. □

## 3.2. El grupo $W_n^G(X)$

La posibilidad de definir automorfismos de conjugación en los respectivos grupos de homotopía permite introducir un nuevo invariante algebraico determinado por los automorfismos de conjugación del grupo toroidal, $\tau_n(X)$. Con menos vaguedad,

**Definición 28.** El conjunto $W_n^G(X)$ es el producto cartesiano de $\tau_n(X)$ y $G$. Si $[f,g],[f',g'] \in W_n^G(X)$, definimos su *producto* $*$ mediante

$$(f,g) * (f',g') = (fK_g(f'), gg')$$

donde $K_g$ es el automorfismo de conjugación asociado a $g$ definido en la proposición 21. En vista del teorema 10, tal definición tiene sentido, pues para cada $g \in G$, $K_g(f') \in \tau_n(X)$ mientras que la yuxtaposición de elementos en $\tau_n(X)$ arroja como resultado un elemento en $\tau_n(X)$.

Es inmediata la prueba del siguiente

**Lema 14.** *El producto $*$ dota a $W_n^G(X)$ de una estructura de grupo*

La operación que se define en él parece poco natural a primera vista. Trataremos de justificarla a continuación. Notemos que si $(w_g)_{g\in G}$ es una familia de aplicaciones que hace de $X$ un $G$-espacio conectivo se tiene que para cada $g$-elemento $[f,g]$ y cada aplicación $w_g$, la yuxtaposición $fw_g$ es un representante de un e-elemento. De esa manera, si se define la aplicación $\phi : \pi_n^G(X) \longrightarrow W_n^G(X)$ mediante $[f,g] \longmapsto (fw_g, g)$ es natural establecer condiciones que hagan de esta asignación un homomorfismo de grupos. Bajo hipótesis adicionales este homomorfismo determina una relación más estrecha entre los invariantes en consideración.

**Proposición 22.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectivo. Supóngase, además que $G$ es un grupo topológico conectable por trayectorias. Entonces, se tiene un isomorfismo de grupos $\phi : \pi_n^G(X) \longrightarrow W_n^G(X)$.*

*Demostración.* Para cada $g \in G$ seleccionamos una trayectoria $\sigma_g : g \simeq e$ contenida en $G$. Sea $(w_g)_{g\in G}$ la familia de aplicaciones que hace de $X$ un espacio conectivo. Definamos $\phi([f,g]) = (fw_g, g)$. Verifiquemos que tal asignación es un homomorfismo: $\phi([ff', gg']) = (ff'w_{gg'}, gg')$. Puesto que el espacio en consideración es conectivo, la anterior expresión puede ser transformada en la siguiente: $(ff'gw_{g'}w_g, gg')$. Recuérdese que la yuxtaposición de las trayectorias $w_g$ y $\bar{w}_g$ es trivial, de manera que se tiene:

$$(ff'gw_{g'}w_g, gg') = (fw_g\bar{w}_gf'gw_{g'}w_g, gg') = fw_gK_g(f'gw_{g'})$$

Notemos ahora que $H(s,t) = \sigma(t) \cdot w_{g'}(s)$ determina una $G$-homotopía entre $g \cdot w_{g'}$ y $w_{g'}$, de manera que $fw_gK_g(fgw_{g'}) \simeq fw_gK_gf'w_{g'}$. Así, $\phi([f,g][f',g']) =$

$(fw_gK_g(f'w_{g'}), gg') = (fw_g, g) * (f', g')$ y por lo tanto $\phi$ es un homomorfismo de grupos. Para verificar la inyectividad, notemos que si $f$ es tal que $\phi([f, e]) = (c_*, e)$, entonces se tiene que $fc_* \simeq c_*$, por lo cual, $f \simeq c_*$. En conclusión, $\ker(\phi)$ es trivial. Por otro lado, es claro que es suprayectivo, pues si $(f, g) \in W_n^G(X)$, entonces se tiene que $f \in \tau_n(X)$. Notemos que la trayectoria $\sigma_g \cdot f : * \simeq g \cdot *$ representa un $g$-elemento. Además, la aplicación

$$H((w,s),t) = \begin{cases} \sigma_g(\frac{2s}{1-t}) \cdot f(w, \frac{2s}{1-t}) & \text{si } s \in [0, \frac{1-t}{2}] \\ f(w, \frac{2s-1+t}{2t}) & \text{si } s \in [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}] \\ w_g(\frac{2s-t-1}{1-t}) & \text{si } s \in [\frac{t+1}{2}, 1] \end{cases}$$

determina una $G$-homotopía entre las aplicaciones $\sigma_g \cdot fw_g$ y $f$. Así, $\phi$ es suprayectivo. En conclusión, $\phi$ determina un isomorfismo de grupos. □

La conectividad del espacio en consideración permite concluir que la estructura de $W_n^G(X)$ en realidad coincide con la estructura del producto directo de $\tau_n(X)$ y $G$ si además se supone que $G$ con la acción conjugación es un espacio conectivo. Adicionalmente, la argumentación para este hecho nos provee de una nueva prueba de un caso particular de una de las implicaciones del teorema 13.

**Teorema 14.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectivo. Supongamos además que $G$ es un grupo topológico que es conectivo como $G$-espacio. Entonces se tiene un isomorfismo*

$$\pi_n^G(X) \cong \tau_n(X) \times G \cong W_n^G(X)$$

*Demostración.* De acuerdo con la proposición 22, se tiene un isomorfismo $\pi_n^G(X) \cong W_n^G(X)$. Así, basta con definir un isomorfismo de grupos $W_n^G(X) \cong \tau_n(X) \times G$. Para ello, notemos que es suficiente probar que $K_g : \tau_n(X) \longrightarrow \tau_n(X)$ corresponde al automorfismo identidad para cada $g \in G$. Probaremos que para cada $f \in \tau_n(X)$ existe una homotopía entre $K_g(f)$ y $f$. Para cada $g \in G$ sean $w_g$ y $\lambda_g$ aplicaciones que hacen de $X$ y $G$ espacios conectivos, respectivamente. Consideremos la homotopía

$$H : (\mathbb{T}^{n-1} \times I) \times I \longrightarrow X$$

definida como sigue:

$$H((w,s),t) = \begin{cases} \bar{w}_g(3t(1-s)) & \text{si } s \in [0, \frac{1-t}{3}] \\ \lambda_g(s) f(w, 3t-1) & \text{si } s \in [\frac{1-t}{3}, \frac{t+2}{3}] \\ w_g(3t(2(1-s))) & \text{si } s \in [\frac{t+2}{3}, 1] \end{cases}$$

Nótese que $H : K_g(f) \simeq (f)$. Así, $K_g = 1_{\tau_n(X)}$, y la operación definida en la definición 28 resulta ser la del producto directo. □

**Observación 29.** La prueba del teorema anterior nos permite concluir que, en un espacio conectivo con una acción de un grupo topológico conectivo definida en él, los automorfismos de conjugación del grupo $\pi_n^G(X)$ son triviales.

## 3.3. Extensiones Cubrientes

En un trabajo de los años ochenta, Wolfgang Lück [5] introdujo la noción de extensión cubriente de un $G$-espacio. Intuitivamente, una extensión cubriente define una acción en el espacio cubriente universal del $G$-espacio con determinadas propiedades de compatibilidad. A continuación probaremos que, bajo ciertas condiciones, el grupo de homotopía equivariante que hemos estudiado en este trabajo coincide con la extensión cubriente de un $G$-espacio. Este trabajo fue realizado por anterioridad por F. Rhodes en [10]. Para ello, precisaremos las siguientes definiciones.

**Definición 29.** La $G$-categoría discreta, $\mathcal{C}(G)$ es aquélla cuyos objetos son $G$-espacios topológicos $X$ regulares, conexos y localmente conectables por trayectorias, dotados de aplicaciones cubrientes universales $p : \tilde{X} \longrightarrow X$. Un morfismo en $\mathcal{C}(G)$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

tal que $f$ es una aplicación $G$-equivariante. Identificaremos a los objetos en $\mathcal{C}(G)$ con su aplicación cubriente universal $p$. Denotaremos por $\mathcal{D}(\tilde{X},p) : \mathcal{C}(G) \longrightarrow$ $\mathfrak{TopGr}$ al funtor de transformaciones cubrientes (véase [7], p. 449).

**Definición 30.** Una extensión cubriente de $X$, $(\tilde{G}, \mathcal{D}, \tilde{\mu}, i, r)$ consiste en:

1. Una pareja de funtores $\tilde{G} : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathfrak{TopGr}$, $\mathcal{D} : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathfrak{TopGr}$
2. Una acción natural $\tilde{\mu} : \tilde{G}(X) \times \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$
3. Transformaciones naturales $i : \mathcal{D}(p) \longrightarrow \tilde{G}(p)$ y $r : \tilde{G}(p) \longrightarrow G$ con la propiedad de que

   *a)* $1 \longrightarrow \mathcal{D}(p) \xrightarrow{i} \tilde{G}(p) \xrightarrow{r} G \longrightarrow 1$ es una sucesión exacta de grupos topológicos. Aún más, $r$ determina un $\mathcal{D}(\tilde{X},p)$-haz principal(véase [13], p. 54).

   *b)* Para cada objeto $p \in \mathcal{C}(G)$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(p) \times \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\mu}|"] \arrow[d, "i \times id"'] & \tilde{X} \arrow[d, "id"] \\ \tilde{G}(p) \times \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "r \times p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ G \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd}$$

Es posible probar el siguiente resultado:

**Teorema 15.** *La extensión cubriente de un $G$-espacio $X$, $\tilde{G}$ es única salvo equivalencia natural.*

*Demostración.* Véase [5], 138 □

**Teorema 16.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectable por trayectorias. Entonces, la extensión cubriente de $X$ coincide con el grupo de homotopía equivariante $\pi_1^G(X)$.*

*Demostración.* En vista del teorema 15, basta probar que satisface las condiciones de la definición 30. De acuerdo con el teorema 2, $\tilde{X} = [I, X]_{rel\,0,1}$ es el espacio cubriente universal. Definamos la aplicación $\tilde{\mu} : \pi_1^G(X) \times [I, X]_{rel\,0,1} \longrightarrow [I, X]_{rel\,0,1}$ mediante $([f, g], [\lambda]) \longmapsto [fg \cdot \lambda]$. Ante todo, tal asignación está bien definida como consecuencia de la proposición 14. Nótese además que es una acción de grupos, pues si $[f', g']$ es cualquier otro elemento en $\pi_1^G(X)$, entonces se tiene que $[fg \cdot f'\lambda] = \tilde{\mu}([f, g][f', g'], [\lambda]) = \tilde{\mu}([f, g], \tilde{\mu}(f', g', [\lambda])$. Notemos que esta acción de grupos es compatible con la acción de $G$, pues la aplicación cubriente universal $p$ (véase el teorema 2) está dada por la evaluación en 1 de las trayectorias. De esa manera, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \times \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "i \times id"'] & \tilde{X} \arrow[d, "id"] \\
\pi_1^G(X) \times \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "r \times p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
G \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

Finalmente, en virtud de la observación 28, tenemos una sucesión exacta de grupos topológicos

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{i} \pi_1^G(X) \xrightarrow{r} G \longrightarrow 1$$

que determina además un $\pi_1(X)$-haz principal sobre G. Por último, un resultado clásico de la teoría de aplicaciones cubrientes garantiza que $\mathcal{D}(p) \cong \pi_1(X)$, cuando el espacio cubriente es simplemente conexo. □

En caso de que el grupo $G$ posea *suficientes elementos*, es posible verificar que el primer grupo de homotopía equivariante coincide con la extensión cubriente del espacio en consideración. Con más precisión:

**Observación 30.** Nótese que si la acción de $G$ es transitiva en $X$, cada trayectoria en $\tilde{X}$ coincide con un determinado $g$-elemento, y la homotopía relativa a la frontera del intervalo coincide con la $G$-homotopía. En ese caso, el teorema anterior establece que se tiene una estructura de grupo topológico en $\tilde{X} = \pi_1^G(X)$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi_1^G(X) \times \pi_1^G(X) \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "r \times p"'] & \pi_1^G(X) \arrow[d, "p"] \\ G \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd}$$

## 3.4. Ejemplos

**Ejemplo 7.** Recuérdese el ejemplo 5. Es decir, $\mathbb{Z}_2$ actúa en $\mathbb{T}^2$ mediante una rotación de 180°. Tal espacio no es conectivo. Esto se debe al hecho de que $\pi_1^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De acuerdo con el teorema 13, para que un espacio sea conectivo debe existir un monomorfismo de grupos $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que 1 tenga asignado un elemento de orden 1. Pero tal cosa no ocurre porque todos los elementos de $\mathbb{Z}_2$ son de torsión, mientras que los 1-elementos en $\pi_1^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no tienen esta propiedad. Así, un monomorfismo entre ellos con la propiedad que se menciona en la definición 27 es imposible.

**Ejemplo 8.** Consideremos $\mathbb{S}^1$ actuando en sí mismo mediante la multiplicación. El cálculo realizado en el teorema 13 permite concluir que $\mathbb{S}^1$ no es un espacio conectivo, pues no existe un monomorfismo $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.

**Ejemplo 9.** Notemos que el grupo de los números reales $\mathbb{R}$, es un espacio contraíble. En particular, este hecho hace de él un espacio conectivo. Por tradición, a las acciones de $\mathbb{R}$ en un espacio topológico se les denomina *flujos continuos*. De acuerdo con el teorema 14, para cualquier flujo continuo en un espacio conectivo $X$, se tiene

$$W_n^{\mathbb{R}}(X) \cong \tau_n(X) \times \mathbb{R}$$

**Ejemplo 10.** Si $X$ es un $G$-espacio donde la acción posee puntos fijos, el conjunto que consiste en la trayectoria constante con valor en un punto fijo, $c_*$, hace de $X$ un $G$-espacio conectivo.

# Capítulo 4

# Sucesiones de Homotopía

## 4.1. Generalidades

En la teoría homotópica clásica, una pareja de espacios punteados origina una sucesión exacta larga con homomorfismos de conexión entre distintos invariantes homotópicos. El objetivo de este capítulo es mostrar que tal construcción admite una generalización a los grupos de homotopía equivariantes que son objeto de nuestro estudio. En semejanza con la construcción tradicional, donde es necesario introducir una nueva definición para definir los grupos de homotopía de una pareja de espacios, nuestras definiciones equivariantes requieren de una modificación para conseguir este propósito. La principal diferencia entre la definición tradicional y la que daremos es el carácter *canónico* de la primera, en el sentido de que no requiere de elecciones particulares. La construcción del grupo de homotopía equivariante de la pareja requiere de la elección de una familia distinguida de aplicaciones que hacen del $G$-espacio en consideración un espacio conectivo, como se definió dicho concepto en el capítulo anterior.

**Definición 31.** Sean $X$ un $G$-espacio conectivo, $A$ un subespacio invariante bajo la acción y $(w_g)_{g\in G}$ una familia que hace de $A$ un $G$-espacio conectivo. Para cada $n \geq 2$, definimos el $n$-ésimo conjunto de $G$-aplicaciones de la pareja $(X, A)$ como el conjunto de funciones continuas $f : \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \longrightarrow X$ que satisfacen:

1. $f(w, 0, s) \in A \; \forall w \in \mathbb{T}^{n-2}, s \in I$
2. $f(w, 1, t) = \bar{w}_g(t)$
3. $f(w, s, 0) = * \; , f(w, s, 1) = g \cdot * \; \forall s \in I$

**Observación 31.** Nótese que las aplicaciones descritas en la definición 31 pueden ser consideradas como aplicaciones de parejas cuyo dominio es $(\mathbb{T}^{n-2} \times I^2, \mathbb{T}^{n-2} \times I \times 0, X, A)$, sujetas a la restricción adicional de que la restricción a cada $t \in I$ representa un $G$-elemento, en el sentido que se dio a este concepto en capítulos anteriores.

**Notación 7.** Denotaremos por $M_n^G(X, A)$ al conjunto de $G$-aplicaciones

Introducimos en $M_n^G(X, A)$ una relación de homotopía

**Definición 32.** Sean $f$ y $f'$ dos elementos del $n$-ésimo conjunto de $G$-aplicaciones de la pareja. Diremos que son $G$-homotópicas si existe una aplicación $H : \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \times I \longrightarrow X$ que satisface: $H(w, s, t, 0) = f(w, s, t)$, $H(w, s, t, 1) = f'(w, s, t)$, con la propiedad adicional de que $H(w, s, t, u)$ es un $G$-elemento de la pareja para cada $u \in I$. En esta situación, escribiremos $f \simeq_G f'$

Con la relación de homotopía antes descrita, podemos definir el grupo de homotopía equivariante de la pareja.

**Definición 33.** El grupo de homotopía de la pareja $(X, A)$ es el conjunto de clases de $G$-homotopía de las $G$-aplicaciones de la pareja. En símbolos,

$$\pi_n^G(X, A) = M_n^G(X, A))/ \simeq_G$$

**Teorema 17.** *El conjunto $\pi_n^G(X, A)$ provisto de la operación natural dada por la yuxtaposición es un grupo.*

*Demostración.* Esencialmente sigue la prueba de la proposición 14. □

El grupo de homotopía equivariante de la pareja es un invariante del tipo de homotopía equivariante de la pareja de espacios en consideración. Esto significa que posee propiedades funtoriales que se describen en el siguiente

**Teorema 18.** *El grupo de homotopía equivariante es un funtor de la categoría de parejas de $G$-espacios punteados en la categoría de grupos que sólo depende del tipo de homotopía equivariante. Es decir,*

1. *Dada una aplicación equivariante y punteada de parejas $\varphi : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ existe un homomorfismo de grupos $\varphi_* : \pi_n^G(X, A) \longrightarrow \pi_n^G(Y, B)$ de manera que $id_{(X,A)_*} = 1_{\pi_n^G(X,A)}$ y tal que si $\psi : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ es otra aplicación punteada, entonces $(\psi \circ \varphi_*) = \psi_* \circ \varphi_*$*

2. *Dadas dos aplicaciones $\phi : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ y $\psi : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ y homotopías de parejas equivariantes y punteadas $H : \psi \circ \phi \simeq id_{(X,A)}$ $K : \phi \circ \psi \simeq id_{(Y,B)}$, se tiene que los homomorfismos $\psi_*$, $\phi_*$ determinan isomorfismos inversos en los correspondientes grupos de homotopía equivariante.*

*Demostración.* Esencialmente sigue la demostración de la proposición 15 □

Enunciamos a continuación algunos aspectos importantes de carácter computacional

**Proposición 23.** *Son propiedades de $\pi_n^G(X,A)$:*

1. *Una aplicación $f : \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \longrightarrow X$ representa el elemento neutro en $\pi_n^G(X;A)$ si y solamente si es homotópica a una aplicación cuya imagen está contenida en $A$.*

2. *$\pi_n^G(X,\{*\}) \cong \pi_n^G(X)$ si el punto básico es fijo bajo la acción.*

*Demostración.* 1. Sea $K : \mathbb{T}^{n-2}\times I^2\times I \longrightarrow X$ la $G$-homotopía en cuestión. $K : f \simeq f'$, donde $f'$ es una aplicación cuya imagen está totalmente contenida en $A$. Para cada $(w,t_1,t_2) = (e^{\pi i\theta_1},\dots,e^{\pi i\theta_{n-2}},t_1,t_2) \in \mathbb{T}^{n-2}\times I$, es posible construir la trayectoria $\lambda_w$ definida como sigue

$$proy_j(\lambda_w(t)) = \begin{cases} e^{(1-t)\pi i\theta_j} & \text{si } j \le n-2 \\ (1-t)t_j & \text{si } j \ge n-1 \end{cases}$$

Notemos que $\lambda_w$ determina una trayectoria que une cada punto en $\mathbb{T}^{n-2}\times I^2$ con un punto en $\mathbb{T}^{n-2}\times I\times 0$. Definamos la aplicación $H : \mathbb{T}^{n-2}\times I^2\times I \longrightarrow X$ mediante

$$H(w,t_1,t_2,t) = \begin{cases} K(w,t_1,t_2,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ f'(\lambda_w(2s)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Notemos que $H$ determina una nulhomotopía de parejas que comienza con $f$. Recíprocamente, si $K : (\mathbb{T}^{n-2}\times I^2\times I, B\times I, 1\times I) \longrightarrow (X,A,*)$ es una nulhomotopía, definimos la aplicación $H$ mediante

$$H(w,t_1,t_2,s) = \begin{cases} K(w,t_1,t_2,2s) & \text{si } s \in [0,\frac{1}{2}] \\ f(\lambda_w(1-2t)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$H$ determina una homotopía entre $f$ y una aplicación cuya imagen está totalmente contenida en $A$.

2. Obsérvese que se tiene una identificación $q : \mathbb{T}^{n-2}\times I\times I \longrightarrow \mathbb{T}^{n-1}\times I$. Además, puesto que el punto $*$ es fijo bajo la ación del grupo, el conjunto que consta de la aplicación constante con valor en el punto básico hace de $X$ un espacio conectivo. Notemos que con esa convención, cada una de las aplicaciones involucradas en la definición de $\pi_n^G(X,\{*\})$ es compatible con la identificación $q$. Definamos la aplicación

$$o : M_n^G(X,\{*\}) \longrightarrow M(\mathbb{T}^{n-1}\times I, X)_*^G$$

mediante $o(f)(w,t) = \tilde{f}(i(w),t)$, donde $\tilde{f}$ es la única aplicación que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{n-2}\times I\times I \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ \mathbb{T}^{n-1}\times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

e $i$ es la inclusión canónica $i : \mathbb{T}^{n-2} \longrightarrow \mathbb{T}^{n-1}$. Notemos que tal definición hace de $o$ una aplicación continua, que por la proposición 15, determina un homomorfismo $o_*$ entre las clases de $G$-homotopía. De manera similar es posible definir la aplicación $e : M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)^G_* \longrightarrow M^G_n(X, \{*\})$ que satisface: $e(f)(w, s, t) = f(q(w, s, t))$. De nuevo, tal regla de correspondencia determina una aplicación continua que induce un homomorfismo $e_* : \pi^G_n(X, \{*\}) \longrightarrow \pi^G_{n-1}(X)$ inverso para $o_*$.

$\square$

Una consecuencia notable de la la parte 1 de la anterior proposición es el siguiente resultado, que permite establecer una correspondencia entre invariantes homotópicos asociados a espacios relacionados mediante una aplicación especial. Al mismo tiempo, es una generalización de un resultado clásico de la teoría de homotopía tradicional.

**Teorema 19.** *Sean $E$, $B$ dos $G$-espacios y $p : E \longrightarrow B$ una aplicación equivariante tales que:*

1. *La acción de $G$ en $E$ es transitiva.*

2. *$p$ posee la propiedad de levantamiento único de homotopías*

*Entonces, para cada subespacio $A$ y cada selección de $e \in p^{-1}(b)$, el homomorfismo inducido $p_* : \pi^G_q(X, p^{-1}(A), b) \longrightarrow \pi^G_q(B, A, b)$ es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Probaremos primero que el homomorfismo $p_*$ es suprayectivo. Para ello, sea $f : \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \longrightarrow X$ un $g$-elemento. Seleccionemos $e \in p^{-1}(\{b\})$ y notemos que la propiedad de levantamiento de homotopías de $p$ implica que el siguiente problema posee solución única para $\tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \arrow[r, "c_e"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\tilde{f}(w, s, 1)$ es una trayectoria conectiva en $E$. Finalmente, puesto que la acción de $G$ es transitiva, $\tilde{f}(w, s, 1) = g' \cdot e$. Así, la clase de $G$-homotopía $[\tilde{f}, g']$ satisface que $p_*([\tilde{f}, g']) = [f, g]$. Por último, probaremos que $p_*$ es inyectivo. Sea $[f, g] \in \pi^G_q(E, p^{-1}(A), e)$ es una aplicación tal que $p_*([f, g]) = 0$, entonces existe una homotopía $H : p \circ f \simeq f'$, donde $f'(\mathbb{T}^{n-2} \times I^2) \subset A$. Así, es posible observar que el problema siguiente posee solución única para $\tilde{H}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Si se define $\tilde{f} = \tilde{H}(1)$, entonces $\tilde{H} : \tilde{f} \simeq_G f$. Nótese que $\tilde{f}(\mathbb{T}^{n-2} \times I^2) \subset A$, de manera que $f$ representa el elemento neutro del grupo correspondiente. En conclusión, $p_*$ es un isomorfismo □

El grupo $\pi_n^G(X, A)$ posee varias características similares a las de $\pi_n^G(X)$. Dentro de ellas podemos resaltar que, en semejanza con el teorema 8, siempre existe una pareja $(Y, B)$ tal que $\pi_n^G(X, A) \cong \pi_2^G(Y, B)$. De esa manera, el cálculo de los invariantes introducidos en este capítulo también se reduce desde el punto de vista teórico al cálculo del primero de éstos.

**Teorema 20.** *Existe una pareja $(Y, B)$ tal que $\pi_n^G(X, A) \cong \pi_2(Y, B)$.*

*Demostración.* Considérese el espacio $Y = M(\mathbb{T}^{n-2}, X)_*^G$. Notemos que $B = M(\mathbb{T}^{n-2}, A)$ es un subespacio invariante de éste. Como es costumbre, ambos espacios están punteados de manera que el punto básico coincide con la aplicación constante con valor en el punto básico del espacio $X$. Una aplicación sucesiva de la adjunción descrita en la observación 25 permite concluir que

$$\begin{aligned} M_2^G(Y, B) &= M((I^2, I \times 0), (M(\mathbb{T}^{n-2}, X)_*^G, M(\mathbb{T}^{n-2}, A))_*^G \\ &\approx M(\mathbb{T}^{n-2} \times I^2, \mathbb{T}^{n-2} \times I \times 0; X, A)_*^G = M_n^G(X, A) \end{aligned}$$

Así, el isomorfismo de grupos inducido por la adjunción determina el isomorfismo solicitado. □

De la misma manera, el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones *de orden e* forma un subgrupo del espacio. Con mayor precisión, se tiene la siguiente

**Proposición 24.** *Para una pareja de espacios $(X, A)$, se cumple:*

1. *El conjunto $\tau_n(X, A)$, que consiste en las aplicaciones de orden e forma un subgrupo normal en $\pi_n^G(X, A)$.*

2. *$\tau_n(X, A)$ contiene un subgrupo isomorfo a $\pi_n(X, A)$.*

*Demostración.* 1. Sigue la prueba de la proposición 17.

2. Considérese el conjunto de elementos en $\tau_n(X, A)$ que son homotópicos a una aplicación cuyo valor en los *ejes del toro* es constante. Es rutina verificar que existe un isomorfismo entre las correspondientes clases de homotopía y $\pi_n(X, A)$.

□

La restricción de un $G$-elemento a la *base* del dominio arroja como resultado una aplicación con un dominio adecuado para los fines de la definición de $\pi_n^G(A)$. Este hecho permite conectar a los grupos en consideración .

**Proposición 25.** *Existe un* homomorfismo de conexión

$$\partial : \pi_n^G(X, A) \longrightarrow \pi_{n-1}^G(A)$$

*Demostración.* Denotemos por $B$ al subespacio $\mathbb{T}^{n-2} \times I \times 0$. Definamos la aplicación $\psi : M(\mathbb{T}^{n-2} \times I^2, B; X, A) \longrightarrow M(\mathbb{T}^{n-2} \times I; x)$ mediante $f \longmapsto f\mid_B$. Es inmediato verificar que tal asignación determina una aplicación continua, pues es la función inducida por la inclusión de $B$ en $\mathbb{T}^{n-2} \times I^2$. Aun más, determina un homomorfismo de grupos $\partial = \psi_*$ entre las correspondientes clases de $G$-homotopía. □

El homomorfismo de conexión recién construido permite introducir al grupo de homotopía de la pareja en una sucesión que incluye otros invariante homotópicos. Para establecer con propiedad esta afirmación, precisamos de la

**Observación 32.** Nótese que existen inclusiones canónicas $i : A \longrightarrow X$ y $j : X \longrightarrow (X, A)$. De acuerdo con los resultados estblecidos en el teorema 18, inducen homomorfismos de grupos $i_* : \pi_n^G(A) \longrightarrow \pi_n^G(X)$ $j_* : \pi_n^G(X) \longrightarrow \pi_n^G(X, A)$ De esa manera, es posible establecer el siguiente

**Teorema 21.** *Existe una sucesión exacta larga de grupos dada por*

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \pi_n^G(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}^G(A) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}^G(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

*Demostración.* Es inmediata a la luz de la observación 32 y el teorema 18. La exactitud es consecuencia de la parte 1 de la proposición 23 □

Para finalizar esta sección, resumiremos sus resultados en el siguiente

**Teorema 22.** *Se tiene un diagrama conmutativo dado por*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_n^G(X, A) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}^G(A) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n^G(X) \arrow[r, "j_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \tau_n(X, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, hook] & \tau_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[u, hook] & \tau_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[u, hook] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*Donde las sucesiones de arriba y abajo son exactas. Además, si $A$ es un espacio conectivo, el primer renglón es extensión del segundo mediante $G$*

*Demostración.* Es inmediata a la luz del teorema 13 □

## 4.2. Algunas modificaciones

La selección de las aplicaciones que vuelven a $X$ un espacio conectivo estuvo fuertemente involucrada en la construcción del grupo de homotopía equivariante de la pareja $(X, A)$. A continuación generalizaremos la idea de las aplicaciones conectivas para introducir un nuevo invariante.

**Definición 34.** Dado un subespacio invariante $A \subset X$ y conectivo con la familia de aplicaciones $(w_g)_{g\in G}$, definimos el subespacio $W_A \subset M(\mathbb{T}^{n-2}\times I^2, B\times I; X, A)_*^G$ como el conjunto de aplicaciones $f \in M(\mathbb{T}^{n-2} \times I^2, B \times I; X, A)_*^G$ que satisfacen

$$f(w, j, s) = \bar{w}_g(s) \quad , j = 1, 2$$

Siguiendo la definición de los invariantes homotópicos construidos hasta el momento, podemos considerar la siguiente

**Definición 35.** Dada una pareja $(X, A)$, el grupo conectivo de la pareja, $\Gamma_n(X, A)$ es el conjunto de clases de $G$-homotopía de aplicaciones en $W_A$. En símbolos:

$$\Gamma_n(X, A) = W_A/ \simeq_G$$

El grupo conectivo de la pareja se encuentra relacionado con el grupo de homotopía equivariante mediante el evidente hecho que se establece a continuación.

**Observación 33.** Dada una aplicación $F : \mathbb{T}^{n-1} \times I \longrightarrow X$ que representa un g-elemento en $\pi_n^G(X)$, existe una única aplicación $f \in W_A$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ \mathbb{T}^{n-1} \times I \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Esta sencilla observación nos permite obtener el siguiente resultado

**Teorema 23.** *Existe un monomorfismo de grupos* $\Gamma_n^G(X, A) \longrightarrow \pi_n^G(X)$

*Demostración.* Definamos la aplicación $\varphi : W_A \longrightarrow M(\mathbb{T}^{n-1} \times I, X)_*^G$ mediante $\varphi(f) = \tilde{f}$ donde $\tilde{f}$ es la única aplicación que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ \mathbb{T}^{n-1} \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

La asignación respeta homotopías, por lo cual $\varphi$ determina un homomorfismo de grupos entre las correspondientes clases de homotopía. Por último, resta verificar que es inyectivo. Para ello, consideremos una aplicación $f : \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \longrightarrow X$ tal que $H : \tilde{f} \simeq 0$. Definamos la homotopía $H' : \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \times I \longrightarrow X$ mediante $H'(w, s, t, r) = H(q(w, s, t))(r)$. En esa circunstancia, se tiene el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{n-2} \times I^2 \times I \arrow[r, "H'"] \arrow[d, "p\times id"'] & X \\ \mathbb{T}^{n-1} \times I \times I \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, notemos que la aplicación $H'$ así definida satisface que $H'(w, t_1, t_2, 1) = *$ y $H(1)$ es una aplicación en $W_A$ que vuelve conmutativo el diagrama el que se refiere la observación 33. En consecuencia, $H' : f \simeq 0$, por lo cual, $\ker(\varphi) = \{0\}$. □

En el grupo conectivo de homotopía es posible definir un homomorfismo de conexión $\partial : \Gamma_n(X, A) \longrightarrow \pi^G_{n-1}(A)$ mediante la restricción al subespacio $B$. De manera más precisa

**Proposición 26.** *Existe un homomorfismo de conexión,* $\partial : \Gamma_n(X, A) \longrightarrow \pi^G_{n-1}(A)$.

*Demostración.* Defínase $\partial[f] = [f \mid_B]$. Es sencillo verificar que dicha asignación está bien definida y determina un homomorfismo de grupos □

En conclusión se tiene

**Teorema 24.** *Existe una sucesión larga de grupos dada por*

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "j_*"] & \pi^G_n(X, A) \arrow[r, "\partial"] & \pi^G_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & \pi^G_{n-1}(X) \arrow[r, "j_*"] & \pi^G_{n-1}(X, A) \\ & \Gamma^G_{n+1}(X, A) \arrow[u, "\partial"] & \Gamma^G_n(X, A) \arrow[u, hook, "\varphi"] & \Gamma^G_n(X, A) \arrow[u, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

*Demostración.* Es consecuencia inmediata de los teoremas 22, 23 y la proposición 26. □

# Capítulo 5

# El teorema de Seifert y van Kampen

## 5.1. Preliminares

En la teoría de homotopía clásica, el teorema de Seifert y van Kampen constituye una de las principales heramientas de cálculo. En un nivel impreciso, el teorema tradicional permite determinar el grupo fundamental de un espacio a partir de los de un par de subespacios con determinadas condiciones. El objetivo de este capítulo es dar una prueba de un *teorema equivariante de Seifert y van Kampen.* Adicionalmente, la prueba que presentaremos constituye una alternativa a la prueba del teorema clásico. Nuestros argumentos siguen de cerca la demostración del teorema que aparece en [7]. Utilizan la noción de *producto libre de grupos.* Recordemos a este respecto algunas definiciones de carácter algebraico.

**Definición 36.** Sean $G_1$ y $G_2$ grupos. Denotaremos por $F$ al conjunto de sucesiones finitas $(x_1, \ldots, x_n)$ con las propiedades:

1. $x_j \in G_\nu \;\; \nu = 1, 2$

2. $x_j \neq e \; \forall j$

3. $x_j \in G_\nu \Longrightarrow x_{j+1} \notin G_\nu$

Para $n = 0$, escribimos $(\;)$ la sucesión vacía.

Notemos que los elementos de $G_1$ y $G_2$ actúan en el conjunto $F$. Con mayor precisión,

**Lema 15.** *Existen monomorfismos de grupos $G_\nu \longrightarrow Biy\,(F)$, Donde $Biy\,(F)$ denota el grupo de permutaciones de $F$, dotado de la operación de composición.*

*Demostración.* Para cada $g \in G_\nu$, definimos $\bar{g} : F \longrightarrow F$ como la aplicación que satisface

$$\bar{g}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) & \text{si } g = 1 \\ (g, x_1, \ldots x_n) & \text{si } 1 \neq g \text{ y } x_1 \notin G_\nu \\ (gx_1, \ldots, x_n) & \text{si } 1 \neq g \text{ , } x_1 \in G_\nu \text{ y } gx_1 \neq 1 \\ (x_2, \ldots, x_n) & \text{si } 1 \neq g, \ x_1 \in G_\nu \text{ y } gx_1 = 1 \end{cases}$$

□

**Definición 37.** Definimos el *producto libre* de $G_1$ y $G_2$, $G_1 * G_2$ como el subgrupo generado por la imagen de $G_1 \cup G_2$ bajo este monomorfismo en *Biy* $(F)$.

Son propiedades del producto libre las siguientes

**Proposición 27.** *1. Dado $g \in G_1 * G_2$, existe una* representación única $g = x_1 \cdots x_n$ *tal que la sucesión $(x_1, \ldots, x_n)$ yace en $F$*

*Demostración.* Véase [7], p. 398 □

Y como es natural, el producto libre posee una propiedad universal que lo caracteriza:

**Proposición 28.** *Sean $f_i : G_i \longrightarrow G$ $i = 1, 2$ homomorfismos de grupos. Entonces existe un único homomorfismo $\varphi$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & G_1 * G_2 \arrow[d, "\varphi"] & G_2 \arrow[l, hook', "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

*Demostración.* Véase [7], p. 400 □

## 5.2. El teorema equivariante

Con la herramienta recién desarrollada a nuestra disposición, podemos comenzar la argumentación del teorema.

Probaremos que el primer grupo de homotopía equivariante de un $G$-espacio consistente en la unión de dos subespacios con propiedades especiales es un cociente del producto libre de los grupos de homotopía equivariantes de los espacios que lo conforman. Es decir,

**Proposición 29.** *Sea $X$ un $G$-espacio y $X_1, X_2$ subespacios abiertos de $X$ tales que*

*1.* $X = X_1 \cup X_2$.

*2.* $X_1$ *y* $X_2$ *son subespacios invariantes bajo la acción.*

*3.* $X_1$, $X_2$ *son conectables por trayectorias.*

*4.* $X_1 \cap X_2 \neq \phi$, *y es además conectable por trayectorias.*

*Entonces, existe un epimorfismo* $\varphi : \pi_1^G(X_1) * \pi_1^G(X_2) \longrightarrow \pi_1^G(X)$

*Demostración.* Sean $i_\nu : X_\nu \longrightarrow X$, $j_\nu : X_1 \cap X_2 \longrightarrow X_\nu$ las inclusiones canónicas. Notemos que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, hook, "j_2"'] & X_1 \arrow[d, hook, "i_1"] \\ X_2 \arrow[r, hook, "i_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Por la hipótesis de invariancia de los espacios en consideración, se tiene que las aplicaciones involucradas en el anterior diagrama son equivariantes y punteadas. De acuerdo con la proposición 15, el diagrama anterior induce un diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} \pi_1^G(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "j_{1*}"] \arrow[d, "j_{2*}"'] & \pi_1^G(X_1) \arrow[d, "i_{1*}"] \\ \pi_1^G(X_2) \arrow[r, "i_{2*}"'] & \pi_1^G(X) \end{tikzcd}$$

En particular, las aplicaciones $i_{\nu *}$ determinan un homomorfismo de grupos $\varphi$ de manera que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi_1^G(X_1) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "i_{1*}"'] & \pi_1^G(X_1) * \pi_1^G(X_2) \arrow[d, "\varphi"] & \pi_1^G(X_2) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "i_{2*}"] \\ & \pi_1^G(X) & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, probaremos que el homomorfismo $\varphi$ es suprayectivo. Para ello, consideremos un elemento $[\alpha, g] \in \pi_1^G(X)$. Puesto que $X = X_1 \cup X_2$, la familia $\{X_1, X_2\}$ constituye una cubierta abierta de X. Como el intervalo $I$ es compacto, existe una partición $\{t_0 = 0, \ldots, t_n = 1\}$ con la propiedad de que la aplicación $\alpha_i(t) = \alpha \mid_{[t_{i-1}, t_i]} (t)$ está contenida en $X_1$ o $X_2$. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, la hipótesis sobre la intersección de los subespacios permite afirmar que existen trayectorias $w_i : \alpha(t_i) \simeq g \cdot *$, $\sigma_i : * \simeq \alpha(t_{i-1})$ contenidas en la intersección de los subespacios, con las convenciones $\sigma_0 = *$, $w_n = g \cdot *$. A continuación, consideremos

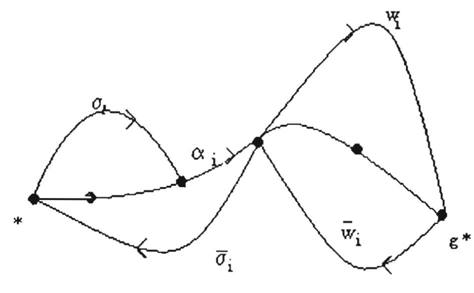


Figura 5.1: La descomposición de una hipertayectoria

la trayectoria $\lambda_i$, definida como sigue

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} \sigma_{i-1}(5t) & t \in [0, \frac{1}{5}] \\ \alpha_i(5t-1) & t \in [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}] \\ w_i(5t-2) & t \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\ w_i(4-5t) & t \in [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \\ \sigma_i(5-5t) & t \in [\frac{4}{5}, 1] \end{cases}$$

En otras palabras, los lazos $\lambda_i$ están dados por la yuxtaposición $\sigma_{i-1}\alpha_i w_i \bar{w}_i \bar{\sigma}_i$ (véase la figura 5.1). Notemos que los lazos $\lambda_i$ están contenidos en $X_\nu$. Definamos el elemento $\lambda = ([\lambda_1], \ldots, [\lambda_n]) \in \pi_1^G(X_1) * \pi_1^G(X_2)$. Obsérvese que, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, se tiene que $\lambda_i\lambda_{i+1} = \sigma_{i-1}\alpha_i w_i \bar{w}_i \bar{\sigma}_i \sigma_i \alpha_{i+1} w_i \bar{w}_{i+1} \bar{\sigma}_{i+1} = \sigma_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1}\sigma_{i+1}$. Usando argumentos inductivos, concluimos que $\varphi(\lambda) = [\alpha, g]$. Por lo cual, $\varphi$ es un epimorfismo. $\square$

**Observación 34.** Nótese que en la prueba de la anterior proposición se utilizaron únicamente elementos del subgrupo $\pi_1(X_1) * \pi_2(X_2)$ para definir el epimorfismo solicitado.

**Observación 35.** Notemos que si se tiene un elemento $[\alpha, g] \in \pi_1^G(X_1 \cap X_2)$, entonces $\varphi(i_*^{X_1}([\alpha, g])) = \varphi(i_*^{X_2}([\alpha, g])) = [\alpha, g] \in \pi_1^G(X)$, por lo cual, $i_*^{X_1}([\alpha, g])$ $(i_*^{X_2}([\alpha, g]))^{-1} \in \ker \varphi$.

En vista de los teoremas de isomorfismo, basta determinar el núcleo de la aplicación $\varphi$ para calcular el grupo de homotopía equivariante del espacio total. De acuerdo con la observación 35, los elementos de la forma $i_*^{X_1}([\alpha, g])(i_*^{X_2}([\alpha, g]))^{-1}$ pertenecen al núcleo de $\varphi$. Se afirma que el subgrupo normal $N$ generado por tales elementos coincide con el núcleo de $\varphi$. Este hecho es consecuencia de una cadena de resultados de carácter técnico que presentamos a continuación.

**Lema 16.** *Sean $[\alpha, e] \in \pi_1^G(X)$ un elemento nulhomotópico y $H : \alpha \simeq *$ una $G$-nulhomotopía. Entonces, existe una partición de $I \times I$ en cuadrados de longitud uniforme de manera que las aristas determinadas por dicha partición orientadas según el orden en $I$ corresponden a trayectorias contenidas en $X_1$, $X_2$, o $X_1 \cap X_2$ que se pueden completar a lazos*

*Demostración.* Puesto que el cuadrado $I \times I$ es un espacio compacto, exite una partición de él en subcuadrados iguales con lados de longitud uniforme $Q_l$ de manera que $H(Q_l) \subset X_\nu$. Denotemos los vértices de dicha partición por $a_i^j$, donde los índices $i$ y $j$ corresponden al orden de la primera y segunda coordenada en la partición inducida en $I$, respectivamente. Sean $a : I \longrightarrow I \times I$ una parametrización creciente de una arista de dicha partición y $v \in I \times I$ un vértice colocado en el extremo de la trayectoria. Consideremos $\mu_v : * \simeq H(v)$ totalmente contenida en $X_1$ o $X_2$. Construyamos la trayectoria $\lambda_v = \mu_{a(0)}(H \circ \alpha)\mu_{a(1)}^{-}$. Es un $e$-elemento en $\pi_1^G(X_1)$ o en $\pi_1^G(X_2)$. □

**Notación 8.** En lo sucesivo, denotaremos por $\tilde{a}$ a la imagen de $\lambda_a$ en el cociente $G/N$, donde $N$ es el subgrupo normal introducido en la observación 35. A las aristas de la partición de $I \times I$ obtenida de acuerdo con el lema 16 las denotaremos por $a_i^j$, donde $i$ corresponde al lugar que ocupa su primera coordenada y $j$ al de la segunda, ambas consideradas según el orden usual en $I$. Consecuentemente, su imagen en el cociente $G/N$ será denotada por $\tilde{a}_i^j$.

**Proposición 30.** *En la notación recién introducida, se tiene $\tilde{a}_1^0 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_n^0 = 1$*

*Demostración.* Consideremos un cuadrado canónico, con vértices

$$\{v_{i-1}^{j-1}, v_i^{j-1}, v_{i-1}^j, v_i^j\}$$

Como el cuadrado que ellos determinan es contraíble, en particular es simplemente conexo y se tiene que $a_{i-1}^{j-1}a_{i-1}^j \simeq a_i^{j-1}a_i^j$. Por lo cual, para cada $i$ se tiene

$$\tilde{a}_i^0 \cdot \tilde{a}_i^1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_i^n = \tilde{a}_{i-1}^0 \cdot \tilde{a}_{i-1}^1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{i-1}^n$$

Pero, en vista de que la homotopía en consideración es punteada, se tiene que $a_0^l \simeq a_n^l \simeq c_*$ para cada $l$. Finalmente, considerando esta cadena de identidades, tenemos que

$$\tilde{a}_j^1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_j^n = \tilde{a}_0^1 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_0^n = 1$$

□

Con los anteriores resultados técnicos a nuestra disposición, probaremos el

**Teorema 25 (Seifert y van Kampen equivariante).** *Sea $X = X_1 \cup X_2$ un $G$-espacio que satisface las hipótesis de la proposición 29. Entonces se tiene que $\pi_1^G(X) \cong \pi_1^G(X_1) * \pi_1^G(X_2)/N$*

*Demostración.* Se ha hecho notar que $N \subset \ker\varphi$. Así, basta probar que $\ker\varphi \subset N$. En consecuencia, consideremos $\beta \in \pi_1^G(X_1) * \pi_1^G(X_2)$ tal que $\varphi(\beta) = 1$. De acuerdo con la proposición 27, podemos escribir $\beta = \Pi_{i\leq n}[\beta_i, g_i]$ con $[\beta_i, g_i] \in \pi_1^G(X_1)$ o $[\beta_i, g_i] \in \pi_1^G(X_2)$. Puesto que $\beta \in \ker\varphi$, se tiene que $[\lambda, e] = [\prod_{i\leq n}\beta_i]$ es un elemento nulhomotópico en X. Además, en vista de la observación 34, es posible considerar a $\beta_i$ un lazo para cada $i$. Sea $H$ una nulhomotopía de $\lambda$. Si $\beta_i$ está definida en la sucesión de aristas $a_i^1 \ldots a_i^{n-1}$, entonces se tiene que $\beta_i N = \beta\tilde{a}_i^1 \ldots \tilde{a}_i^{n-1}N$. Por último, como consecuencia de la proposición 30, esta última clase es la de $N$. En consecuencia,

$$\beta N = \Pi_{i,j}\tilde{a}_i^j = N$$

por lo que $\beta \in N$. □

## 5.3. Complejos CW equivariantes

En la Topología algebraica clásica, la clase de los complejos CW constituye una importante familia de espacios, tanto por su utilidad en el desarrollo de la teoría como por el hecho de que contiene una parte significativa de los espacios que resultan de interés. Intuitivamente, un complejo CW es un espacio consistente en la unión de una familia numerable de subespacios, cada uno obtenido del anterior a partir de la *adjunción* de células de determinada dimensión. En esta sección, extenderemos este concepto a la categoría de los $G$-espacios y utilizaremos el teorema equivariante de Seifert y van Kampen para calcular el grupo fundamental equivariante de Rhodes en uno de estos espacios. Para comenzar, precisaremos la idea de *adjunción* por medio de la siguiente

**Definición 38.** Sean $X_1$ y $X_2$ $G$-espacios y $f : X_0 \subset X_1 \longrightarrow X_2$ una aplicación equivariante. La *adjunción equivariante de $X_1$ y $X_2$ mediante $f$*, $X_1 \cup_f X_2$ es el espacio que resulta de identificar en la unión ajena $X_1 \coprod X_2$ cada punto con su imagen. En símbolos:

$$X_1 \cup_f X_2 = X_1 \coprod X_2 / x \sim f(x)$$

**Observación 36.** Nótese que se tienen inclusiones equivariantes $(i_\nu : X_\nu \longrightarrow X_1 \cup_f X_2)_{\nu=1,2}$, determinadas por las inclusiones en la unión ajena.

En semejanza con la teoría clásica, las situaciones de adjunción equivariante poseen una propiedad universal que la caracteriza:

**Proposición 31.** *Sea $f : X_0 \subset X_1 \longrightarrow X_2$ una aplicación equivariante. Un $G$-espacio $X$ es homeomorfo a la adjunción equivariante de $X_1$ y $X_2$ mediante $f$ si y sólo si posee la siguiente propiedad universal:*

Para cada $G$-espacio $Z$ y cada pareja de aplicaciones equivariantes $(\varphi_\nu : X_\nu \longrightarrow Z)_{\nu=1,2}$, existe una única aplicación $\varphi : X \longrightarrow Z$ tal que $\varphi \circ i_\nu = \varphi_\nu$. En un diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\ X_2 \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & X \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

En esta situación, diremos que el diagrama es un *cuadrado cocartesiano equivariante*, o de *pushout*.

A continuación, usaremos el concepto de adjunción equivariante para extender la noción de complejo CW a la categoría de $G$-espacios. En lo que toca a complejos CW equivariantes, tradicionalmente se fija sobre el grupo que actúa las hipótesis de compacidad local y la propiedad de separación de Hausdorff, con el objetivo de que los complejos CW equivariantes posean la propiedad de extensión de homotopías. Seguiremos la definición presentada en [13]. La siguiente definición establece el concepto de adjunción de células equivariantes.

**Definición 39.** Sean $G$ un grupo localmente compacto y de Hausdorff, que actúa continuamente en $X$, $A$ un subespacio $G$-invariante y $(H_j)_{j\in J}$ una familia de subgrupos de $G$, dotados de aplicaciones equivariantes $q_j : G/H_j \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow A$, $Q_j : G/H_j \times \mathbb{D}^n \longrightarrow X$. Decimos que el espacio $X$ se obtiene a partir de $A$ mediante la adjunción simultánea de la familia de $n$-células equivariantes $(G/H_j \times D^n)_{j\in J}$ si el siguiente diagrama es un cuadrado cocartesiano:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J} G/H_j \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\coprod q_j"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "i"] \\ \coprod_{j\in J} G/H_j \times \mathbb{D}^n \arrow[r, "\coprod Q_j"'] & X \end{tikzcd}$$

**Definición 40.** Una estructura de $G$-complejo CW en $X$ es una filtración de $G$-espacios

$$X = X_0 \subset X_1 \subset \dots$$

con las siguientes propiedades:

1. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $X_n$ se obtiene a partir de $X_{n-1}$ mediante la adjunción de una familia $J_n$ de $n$-células equivariantes.

2. $X = \cup_{n\geq 1} X_n$ *posee la topología de la unión.*

Finalmente, presentaremos un ejemplo concreto de complejo CW equivariante que será de utilidad en el desarrollo de las aplicaciones. Por medio del teorema equivariante de Seifert y van Kampen calcularemos su primer grupo de homotopía equivariante, y lo contrastaremos con resultados arrojados por otros métodos.

**Observación 37.** Recuérdese que en la topología general se define la superficie orientable de género $r$, $S_r$ como sigue.(Véase [7], p.414 para mayores detalles). Para cada $j \in \{1,\ldots,4r\}$ sea $x_j = e^{\frac{\pi i j}{2r}}$. Consideremos el polígono convexo que determinan tales puntos en el plano complejo. Llamaremos a tal subespacio el $4r$-gono canónico, $B_{4r}$. Definamos en $B_{4r}$ la siguiente relación de equivalencia

$$(1-t)x_{4i-3} + tx_{4i-2} \sim (1-t)x_{4i} + tx_{4i-1}$$

$$(1-t)x_{4i-2} + tx_{4i-1} \sim (1-t)x_{4i+1} + tx_{4i}$$

para $i \in \{1,\ldots,r\}$. Sea $q$ la aplicación cociente correspondiente. El espacio cociente obtenido por medio de esta identificación es homeomorfo a la superficie orientable de género $r$.

Consideraremos el caso concreto de la superficie orientable de género 2, $S_2$. De manera alternativa, puede construirse mediante la adjunción de una célula de dimensión 2 a una cuña de 4 círculos. La ventaja de esta definición reside en el hecho de que nos permite darle una estructura de $\mathbb{Z}$-complejo CW equivariante. La verificación del homeomorfismo entre dichos espacios es rutinaria.

**Ejemplo 11.** Consideremos el modelo de la cuña de cuatro círculos, $C$ definido como la imagen de la curva cerrada $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya parametrización es:

$$C(t) = \begin{cases} (1+sen(\pi(8t+1))), cos(\pi(8t+1)), 0) & si\ t \in [0,\frac{1}{4}] \\ (-sen(\pi(8t))-1, -cos(\pi(8t-1)), 0) & si\ t \in [\frac{1}{4},\frac{2}{4}] \\ (sen(\pi(8t-1)), 0, 1+cos(\pi(8t-2)) & si\ t \in [\frac{2}{4},\frac{3}{4}] \\ (-sen(\pi(8t-3)), 0, -cos(\pi(8t-3))-1) & si\ t \in [\frac{3}{4},1] \end{cases}$$

Véase la figura 5.2

Notemos que los subespacios $C_i = C([\frac{i-1}{4},\frac{i}{4}])_{i=1}^4$ son homeomorfos al círculo unitario, y comparten un punto en común, el origen de $\mathbb{R}^3$. En $C$, consideremos el homeomorfismo dado mediante:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} (-x_1,x_2,x_3) & \text{si } (x_1,x_2,x_3) \in C_1 \vee C_2 \\ (x_1,x_2,-x_3) & \text{si}(x_1,x_2,x_3) \in C_3 \vee C_4 \end{cases}$$

Este homeomorfismo de $C$ transforma cada círculo en su simétrico respecto al plano ortogonal. Determina una acción del grupo de los enteros $\mathbb{Z} \times C \longrightarrow C$ definida mediante $(n,x) \longmapsto \varphi^n(x)$. Nótese que el origen de la cuña permanece fijo mediante la acción. Para cada $r \in [0,1]$, introduzcamos la *rotación de ángulo*

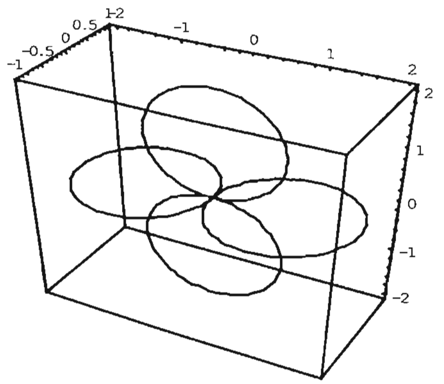


Figura 5.2: La cuña de cuatro círculos

$2\pi r$ *alrededor del eje* $Y$, es decir, la transformación lineal $R_{2\pi_r}$ dada mediante la matriz:

$$\begin{pmatrix} cos(2\pi r) & 0 & -sen(2\pi r) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(2\pi r) & 0 & cos(2\pi r) \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, consideremos la *rotación de ángulo* $2\pi r$ *alrededor del eje* $X$, $R'_{2\pi r}$, cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(2\pi r) & -sen(2\pi r) \\ 0 & sen(2\pi r) & cos(2\pi r) \end{pmatrix}$$

Las aplicaciones $R$ y $R'$, junto con la parametrización de la cuña de cuatro círculos que hemos dado con anterioridad, nos permiten considerar una situación de adjunción equivariante. De esa manera, dotaremos a la superficie orientable de género dos, $S_2$ de una estructura de $\mathbb{Z}$-complejo CW. Sea $J = \{\mathbb{Z}\}$ la familia consistente en el subgrupo total de los enteros. Consideremos el disco de dimensión 2, $\mathbb{D}^2$, parametrizado mediante la ecuación:

$$r(cos(2\pi t), sen(2\pi t))$$

Definamos en $\mathbb{D}^2$ la acción del grupo de los enteros $\mathbb{Z} \times \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ mediante $(1,(x,y)) \longmapsto (x,-y)$ Notemos que la aplicación $C$ determina una aplicación $\tilde{C}$ que vuelve conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "C"] \arrow[d, "exp"'] & C \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\tilde{C}"'] & \end{tikzcd}$$

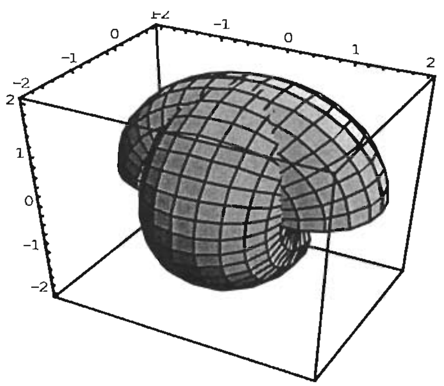


Figura 5.3: La aplicación $Q$

Definamos la aplicación $Q : \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times \mathbb{D}^2 \approx \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2 \cup_{\bar{C}} C$ definida mediante:

$$Q(r(cos(2\pi t), sen(2\pi t)) = \begin{cases} R_{4\pi r}(C(2t)) & si\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ R'_{(4r-2)\pi}(C(2t-1)) & si\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(véase la figura 5.3). Notemos que la aplicación en consideración está bien definida, es continua y equivariante. Así, tenemos la situación de adjunción equivariante

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\bar{C}"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[d, "i"] \\ \mathbb{D}^2 \arrow[r, "Q"'] & \mathbb{D}^2 \cup_{\bar{C}} C \end{tikzcd}$$

En conclusión, tenemos una estructura de $\mathbb{Z}$-espacio en $S_2$. Es inmediato verificar que el vértice que poseen en común los círculos y la célula permanece fijo mediante la acción.

## 5.4. Ejemplos

**Ejemplo 12.** Consideremos el $G$-espacio $X$ consistente en la cuña de $r$ subespacios $X_1, \ldots, X_r$, con la acción de un grupo $G$ tal que el punto básico $* \in \cap_i X_i$ es fijo. De acuerdo con el teorema equivariante de Seifert y van Kampen,

$$\pi_1^G(X) \cong \overbrace{\pi_1^G(X_1) * \ldots * \pi_1^G(C_r)}^{r\ veces} / N$$

Donde $N$ es el subgrupo generado por las imágenes de elementos en la intersección. Notemos que la intersección $\cap_i X_i$ consiste en un punto, con la acción trivial definida en él. Así, $N \subset \pi_1^G(\cap_i X_i) = e$. En consecuencia,

$$\pi_1^G(X) \cong \overbrace{\pi_1^G(X_1) * \ldots * \pi_1^G(X_r)}^{r\ veces}$$

**Ejemplo 13.** Calcularemos el grupo $\pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2)$ para la acción de $\mathbb{Z}$ determinada por su estructura de complejo CW equivariante introducida en el ejemplo 11. Como hicimos notar, dicha acción posee un punto fijo. En consecuencia, el teorema 7 permite concluir que $\pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2) \cong \pi_1(S_2) \times \mathbb{Z}$. Por otro lado, según el teorema de clasificación de superficies (Véase [7], p. 414), el grupo fundamental de $S_2$ es el que admite la presentación

$$\pi_1(S_2) = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} \rangle$$

A continuación, calcularemos este grupo con los métodos del teorema equivariante de Seifert y Van Kampen.

Notemos que la cuña de cuatro círculos, $C$ es un retracto fuerte por deformación de $S_2$ menos un punto. De esa manera, el teorema equivariante de Seifert y Van Kampen afirma:

$$\pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2) = \pi_1^{\mathbb{Z}}(C) * \pi_1^{\mathbb{Z}} / N$$

Donde $N$ es el subgrupo normal generado por los elementos de $\pi_1^G(\mathbb{D} \cap C)$ Notemos que, en la notación del ejemplo anterior, $\mathbb{D} \cap C$ consiste en la imagen de la trayectoria $c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1} c_3 c_4 c_3^{-1} c_4^{-1}$. Calculemos $\pi_1^{\mathbb{Z}}(C)$. Como consecuencia del teorema de Seifert y Van Kampen, se tiene que

$$\pi_1^{\mathbb{Z}}(C) \cong \pi_1^{\mathbb{Z}}(C_1 \vee C_2) * \pi_1^{\mathbb{Z}}(C_3 \vee C_4)$$

El grupo en cuestión actúa en cada una de las cuñas con puntos fijos. De esa manera, el teorema 7 permite concluir que

$$\pi_1^{\mathbb{Z}}(C_4) \cong *_{i=1}^4 \mathbb{Z} \times \pi_1(\mathbb{S}^1)$$

y, en conclusión,

$$\pi_1^{\mathbb{Z}}(C_4) \cong *_{i=1}^4 (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

Así, $\pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2)$ admite la presentación

$$\begin{aligned}\langle (a_1, 1), (a_2, 1)(b_1, 1)(b_2, 1) \\ \mid (a_1, 1)(a_2, 1)(a_1^{-1}, 1)(a_2^{-1}, 1)(b_1, 1)(b_2, 1)(b_1^{-1}, 1)(b_2^{-1}, 1) \rangle\end{aligned}$$

Por otro lado, en el ejemplo 13, se ha determinado que el grupo en cuestión admite la presentación

$$\pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2) = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} = e \rangle \times \mathbb{Z}$$

Afirmamos que tales grupos son isomorfos. Para ello, definamos el homomorfismo $\varphi : *_{i=1}^{4}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S_2) \times \mathbb{Z}$ mediante $\varphi(a_i, 1)) = (a_i, 1)$, $\varphi(b_i, 1)) = (b_i, 1)$. Es fácil verificar que dicha asignación determina un homomorfismo compatible con la relación, de manera que existe un homomorfismo de grupos $\bar{\varphi}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} *_{i=1}^{4}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \pi_1(S_2) \times \mathbb{Z} \\ \pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2) \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ es, de hecho, un isomorfismo de los grupos en consideración.

# Capítulo 6

# Aplicaciones

## 6.1. El problema del encaje

Consideremos por un momento un problema de encajes de acciones de grupos. Imprecisamente, un problema de encaje es aquél donde se pregunta por la posibilidad de extender una acción de un subgrupo $G'$ de $G$ en un espacio $X$ a una definida en la totalidad de $G$. En caso de que la acción de $G$ se restrinja naturalmente a la de $G'$, diremos que la acción de $G'$ se encaja en la de $G$. Equivalentemente, podemos considerar la siguiente

**Definición 41.** Sean $X$ un $G'$-espacio. Supongamos que $G$ es un grupo que contiene a $G'$. Diremos que la ación $\nu : G' \times X \longrightarrow X$ se encaja en la acción de $G$ si existe una acción $\mu : G \times X \longrightarrow X$ con la propiedad de que $\mu\,|_{G'} : G' \times X \longrightarrow X$ coincide con $\nu$.

La solución del problema de encaje puede ser planteada en términos equivalentes, como se anticipa en la siguiente

**Proposición 32.** *Sean $G$ y $G'$ dos grupos que actúan en el espacio $X$ con la propiedad de que $G'$ es isomorfo a un subgrupo de $G$. Supongamos que el problema de encaje admite una solución. Entonces se tiene*

1. *La aplicación $\mathbf{id}_X$ es $G'$-equivariante. .*
2. *La identificación canónica $p : X \longrightarrow X/G$, es compatible con la aplicación $p' : X \longrightarrow X/G'$.*

*Demostración.* 1. Sea $\mu : G \times X \longrightarrow X$ una extensión de la acción en $X$. Notemos que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\ G' \times X \arrow[u, hook, "i \times id"] \arrow[r, "\mu|_{G'}"'] & X \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

De esa manera, $id_X = \mu \mid_{G'} (1,\cdot) : X \longrightarrow X$ es una aplicación $G'$-equivariante.

2. Es inmediato.

$\square$

## 6.2. El grupo reducido de automorfismos

Uno de los problemas más importantes de la dinámica topológica consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que el problema de encaje de una acción de grupos admita solución. Mostraremos en este párrafo que los invariantes algebraicos que se han construido son útiles para decidir al respecto. Notemos que existe una acción del primer grupo de homotopía equivariante en los de órdenes superiores definida mediante la conjugación. Con mayor precisión, se tiene

**Definición 42.** Sea $X$ un $G$-espacio. Definamos el homomorfismo

$$A_n : \pi_1^G(X) \longrightarrow Auto(\pi_n^G(X))$$

$$A_n([f,g])([f'.g']) = [f,g][f',g']([f,g])^{-1}$$

Llamaremos el *$n$-grupo especial de automorfismos* a su imagen en el correspondiente grupo de automorfismos, y lo denotaremos por $A_n^G(X)$.

**Observación 38.** En la anterior definición, $f$ designa la *aplicación asociada* a la trayectoria $f$, en el sentido del lema 19

Por otro lado, el teorema 10 garantiza que tales acciones se restringen a $\tau_n(X)$, de manera que existen homomorfismos del primer grupo de homotopía equivariante en el grupo de automorfismos de ellos. Esta es la idea fundamental detrás de la construcción del invariante que presentaremos a continuación. Recuérdese que en vista del teorema 10, la imagen del primer grupo de homotopía toroidal es normal en $\pi_n^G(X)$. De esa manera, es inmediata la verificación de la siguiente

**Proposición 33.** *$A_n(\tau_1(X))$ es un subgrupo normal en el $n$-grupo especial de automorfismos, $A_n^G(X)$*

*Demostración.* Sean $[f',e] \in \pi_1(X) \trianglelefteq \pi_n^G(X)$. Puesto que $A_n$ es un homomorfismo, se tiene la identidad

$$A_n([f,g])A_n[f',e](A_n([f,g]))^{-1} =$$
$$A_n([f,g][f',e][g^{-1}\cdot \bar{f}, g^{-1}]) = A_n([h,e]) \in A_n(\tau_n(X))$$

donde $h$ es la yuxtaposición de las aplicaciones involucradadas $\square$

La anterior proposición sugiere de inmediato la siguiente

**Definición 43.** El grupo reducido de automorfismos, $\tilde{A_n}^G(X)$ es el cociente de la imagen del primer grupo de homotopía equivariante entre la imagen del primer grupo de homotopía toroidal en el grupo de automorfismos de $\pi_n^G(X)$. En símbolos:

$$\tilde{A}_n^G(X) = A_n(\pi_1^G(X))/A(\pi_1(X))$$

La conectividad del $G$-espacio en consideración permite encajar a $G$ como un subgrupo del primer grupo de homotopía equivariante. Por último, la construcción anteriormente descrita permite definir un homomorfismo canónico de éste en el grupo reducido de automorfismos. El homomorfismo de grupos así construido resulta independiente de la selección de las aplicaciones que hacen de $X$ un espacio conectivo. Con más precisión:

**Proposición 34.** *Sea $X$ un $G$-espacio conectivo mediante las familias $(w_g)_{g\in G}$, $(\sigma_g)_{g\in G}$. Entonces, existe un homomorfismo $\psi : G \longrightarrow A_n^G(X)$ independiente de la selección de las aplicaciones que hacen de $X$ un $G$-espacio conectivo y compatible con el homomorfismo $A_n$.*

*Demostración.* Sean $\varphi_\sigma : G \longrightarrow \pi_1^G(X)$, $\varphi_w : G \longrightarrow \pi_1^G(X)$ los homomorfismos asociados a las familias mencionadas. Notemos que es posible componer estas aplicaciones con la asignación que determina la acción del grupo $\pi_1^G(X)$ en $\pi_n^G(X)$. En un diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1^G(X) \arrow[r, "A_n"] & A(\pi_1^G(X)) \\
G \arrow[ur, "\varphi_\sigma"] \arrow[dr, "\varphi_w"'] & & \\
& \pi_1^G(X) \arrow[r, "A_n"'] & A(\pi_1^G(X))
\end{tikzcd}$$

Ahora, para cada $g \in G$, consideremos la aplicación $\beta = w_g\bar{\sigma}_g : * \simeq *$. La clase de homotopía $[\beta, e] \in \tau_n(X)$ satisface que $A([\beta, e]) \in A(\pi_1(X))$. Por lo cual, si se compone esta aplicación con la proyección canónica $q : A(\pi_1^G(X)) \longrightarrow A_n^G(X)$, se tiene que $q \circ A_n([\beta]) = e$. Así, $q \circ A_n(w_g) = q \circ A_n(\bar{\sigma}_g)$ Por lo cual, si se define $\psi$ mediante la composición $q \circ A \circ \varphi_\sigma = \psi$, no existe ambigüedad en la definición. □

La construcción del grupo reducido de automorfismos en general no permite asignar naturalmente a una aplicación equivariante entre espacios un *homomorfismo inducido* entre los correspondientes grupos. Sin embargo, si se suponen algunas condiciones adicionales, es posible definirlo de manera canónica. Como veremos más adelante, estas condiciones se satisfacen en el caso de los encajes de espacios, de manera que el grupo reducido de automorfismos se convierte en un invariante adecuado para resolver el problema del encaje.

**Teorema 26.** *Sean $X$ y $Y$ $G'$ y $G$-espacios, respectivamente, con $G' \leq G$ y una aplicación $\varphi : X \longrightarrow Y$ $G'$-equivariante y punteada de manera que el homomorfismo inducido $\varphi_* : \tau_n(X) \longrightarrow \tau_n(Y)$ es suprayectivo. Entonces, existe un homomorfismo de grupos $\varphi_\sharp : \tilde{A}_n^G(X) \longrightarrow \tilde{A}_n^G(Y)$ que conmuta con las aplicaciones $\psi_X : G' \longrightarrow \tilde{A}_n^{G'}(X)$, $\psi_Y : G \longrightarrow \tilde{A}_n^G(Y)$.*

*Demostración.* Definamos la aplicación $\varphi_\flat : A(\pi_1^G(X)) \longrightarrow A(\pi_1^G(Y))$ mediante $\varphi_\flat([\psi_{[f,g]}]) = [\psi_{[\varphi\circ f,g]}] \in A(\pi_n^G(Y))$. Verifiquemos la buena definición. Sean $\psi_{[f_1,g_1]} = \psi_{[f_2,g_2]}$. Entonces, si $[h,e] \in \tau_n(Y)$, la hipótesis sobre los grupos de homotopía toroidales permite concluir que existe $[j,e] \in \tau_n(X)$ tal que $\varphi_*([j,e]) = [h,e]$. En conclusión, se tiene: $\psi_{[f_1,g_1]}([h,e]) = \psi_{[f_2,g_2]}([h,e])$. De ahí la buena definición del homomorfismo. Por otro lado, la compatibilidad es consecuencia de que $\varphi_\flat(\psi_{[f_1,g_1]})([h,e]) = \varphi_\flat(\psi_{\varphi_*([f_2,g_2])})(\varphi_*([j,e])$. Por último, debido a la invariancia de la imagen del primer grupo de homotopía, $\varphi_\flat$ induce un homomorfismo de grupos $\varphi_\sharp : A_n^{G'}(X) \longrightarrow A_n^G(Y)$. Resta probar el comportamiento adecuado de este homomorfismo respecto de los homomorfismos construidos en la proposición 34. Para ello, consideremos $g' \in G'$. Sean $(w_g)_{g\in G'}$ una familia de aplicaciones que hacen de Y un espacio conectivo. De manera natural, seleccionamos las aplicaciones $(\sigma_g = \varphi \circ w_{g'})_{g'\in G'}$ que vuelven a $X$ un $G'$−espacio conectivo. Calculemos el homomorfismo $\psi$ en uno de tales elementos. $\psi(g') = \psi_{[\bar{w}_{g'},g']} = \psi_{[\bar{\sigma}_{g'},g']}$. Por la buena definición de $\varphi_\sharp$, se tiene que $\varphi_\sharp(\psi_{[\bar{w}_{g'},g']}) = \varphi_\sharp(\psi_{[\bar{\sigma}_{g'},g']})$, por lo cual el homomorfismo inducido satisface la propiedad de conmutatividad con $\psi$. □

El anterior teorema permite resolver de manera negativa la cuestión de si un *sistema dinámico discreto* admite una extensión a un *sistema dinámico continuo*, una de las principales cuestiones de la dinámica topológica. Para un tratamiento básico del problema, véase [11]. Es conveniente introducir algunos conceptos nuevos antes de continuar.

**Definición 44.** Sea X un espacio topológico. Un *sistema dinámico discreto* es una acción de grupos $\mu : \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X$ . Un *sistema dinámico continuo* es una acción de grupos $\mu : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$.

**Observación 39.** *Son inmediatas las pruebas de las siguientes afirmaciones:*

1. *Dado un sistema dinámico discreto $\mu : \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X$, existe un homeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ tal que $\mu(n,x) = \varphi^n(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}, x \in X$. En adelante llamaremos homeomorfismo generador a tal aplicación*

2. *Dado un sistema dinámico continuo $\mu : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$, la restricción a $\mathbb{Z}$ origina un sistema dinámico discreto de tal manera que se encaja en el original en el sentido de la definición 41*

3. *Si el sistema dinámico discreto $\mu : \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X$ admite una extensión a un sistema dinámico continuo, entonces su homomorfismo generador es isotópico a la identidad del espacio $X$.*

La anterior observación permite asignar a un sistema dinámico continuo un sistema dinámico discreto con la propiedad de que el primero resuelve el problema del encaje para el subgrupo de los enteros. El problema inverso no está resuelto en el caso general. En un bello trabajo, [4], se aporta una condición necesaria y suficiente para la solución de este problema cuando el espacio en consideración es el de los números reales. Existen condiciones suficientes para casos especiales, como los de ciertos subespacios del plano euclidiano. Véase a este respecto, por ejemplo, [2].

En el caso general, el grupo reducido de automorfismos prueba ser de singular utilidad para la solución de este problema. Recordemos un resultado importante cuya demostración hemos establecido con anterioridad.

**Lema 17.** *Dado un grupo topológico $G$, que considerado como $G$-espacio es conectivo, se tiene que para cada $G$-espacio $X$, el grupo reducido de automorfismos $\tilde{A}_n^G(X)$ es trivial.*

*Demostración.* Es consecuencia de la observación 29 □

El siguiente resultado permite finalmente establecer la condición necesaria para un encaje de un sistema dinámico discreto en uno continuo.

**Teorema 27.** *Dado un sistema dinámico continuo, se tiene que $A_n^{\mathbb{R}}(X)$ es el grupo trivial.*

*Demostración.* Notemos que el grupo de los números reales es contraible como espacio topológico. De manera que $\mathbb{R}$ admite a la trayectoria constante como una familia que hace de él un espacio conectivo. Por el lema 17, $\tilde{A}_n^{\mathbb{R}}(X)$ es el grupo trivial. □

**Corolario 6.** *Si el sistema dinámico discreto $\mathbb{Z} \times X \longrightarrow X$ admite un encaje en un sistema dinámico continuo $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el homomorfismo $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{A}_n^{\mathbb{Z}}(X)$ es trivial.*

*Demostración.* De acuerdo con el teorema 27, el homomorfismo $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{A}_n^{\mathbb{R}}(X)$ es trivial. Por otro lado, la aplicación $id_\flat : \pi_1(X) \cong \pi_1(X)$ es un homomorfismo suprayectivo, de manera que se satisfacen las hipótesis del teorema 26. Así, se tiene que $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{A}_n^{\mathbb{Z}}(X)$ es el homomorfismo trivial. □

La no suficiencia de la condición descrita por el invariante $\tilde{A}_n^G(X)$ se puede advertir del siguiente

**Ejemplo 14.** En $\mathbb{C}$ definamos la acción de $\mathbb{Z}$ determinada por el homeomorfismo de conjugación. Según el teorema 7, $\pi_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$. En particular, $\pi_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{S}^1)$ es un grupo abeliano y en consecuencia, el homomorfismo $A$ es trivial. De esa manera, el homomorfismo

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{A}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$$

es trivial para cualquier selección de aplicaciones que hagan de $\mathbb{C}$ un espacio conectivo. Sin embargo, dicho sistema dinámico discreto no admite una extensión a un sistema dinámico continuo; pues, como consecuencia de la observación 39, el homeomorfismo generador debe de ser isotópico a la identidad de $\mathbb{C}$. Lo cual no ocurre en el caso de la conjugación compleja.

## 6.3. Ejemplos

**Ejemplo 15.** Recordemos el ejemplo 13. Consideremos el sistema dinámico discreto determinado por la estructura de $\mathbb{Z}$-complejo CW introducida en él. Como se hizo notar, el teorema 7 permite concluir que $\pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2) \cong \pi_1(S_2) \times \mathbb{Z}$. Según el teorema de clasificación de superficies (Véase [7], p.414), el grupo fundamental de $S_2$ es el que admite la presentación

$$\pi_1(S_2) = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} \rangle$$

En la notación del ejemplo 11, sea $C_1$ la trayectoria correspondiente al primer círculo en la cuña. Notemos que, en vista de la proposición 20, la asignación $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2)$ dada por $\psi(1) = ([C_1], 1)$ hace de $S_2$ un $\mathbb{Z}$-espacio conectivo. Notemos que el homomorfismo $A : \pi_1^{\mathbb{Z}}(S_2) \longrightarrow A_1^{\mathbb{Z}}(S_2)$ resulta no trivial al componerlo con la aplicación $\psi$, pues de serlo, el grupo $\pi_1(S_2)$ resultaría abeliano. Así, el homomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{A}_1^{\mathbb{Z}}(S_2)$ es no trivial. En consecuencia, el sistema dinámico discreto determinado por la estructura de $\mathbb{Z}$-complejo CW de $S_2$ no admite una extensión continua.

# Bibliografía


[1] AGUILAR,M., GITLER,S. PRIETO,C., *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 2001

[2] FOLAND, N.E., An Embedding Theorem for Discrete Flows in a closed 2-cell *Duke Math.* 33 (1966) 441–444

[3] FOX, R.H, Homotopy Groups and Torus Homotopy groups, *Ann of Math* 49 (1948) 471–510

[4] HICKS, SHARMA, P.L., Embedding Discrete Flows on R on a Continuous Flow *J. of Math. Analysis and Appl.* 74 (1980) 31–40

[5] LÜCK, W., *Transformation Groups and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics Vol 1408 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1989

[6] MASSEY, W., *Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1991

[7] PRIETO, C., *Topología básica*, FCE México 2003.

[8] RHODES, F., Homotopy Groups of Transformation Groups, *Can J.of Math.* 21 (1969) 1123-1136

[9] RHODES, F., On the Fundamental Group of a Transformation Group, *Proc.of the London Math.Soc.* 116 (1966) 635–650

[10] RHODES, F. On lifting Transformation Groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 19 (1968) 905–908

[11] SELL, G.,*Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations*, Van nostrand London 1971

[12] SPANIER, E., *Algebraic Topology*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1966

[13] TOM DIECK, T., *Transformation Groups*, De Gruyter studies in mathematics Walter de Gruyter Berlin 1987