



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS** 00365

FACULTAD DE CIENCIAS

**Transformada de Bargmann y estados
coherentes para $L^2(S^3)$**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

DANIEL ROJAS SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS VILLEGAS BLAS

MÉXICO, D.F.

AGOSTO, 2005

m 347085



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Daniel Rojas Sanabria

FECHA: 22 de Agosto de 2005

FIRMA: Daniel

Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio matemático en detalle de la transformada de Bargmann, para el espacio de funciones de cuadrado integrable en la esfera S^3 inmersa en \mathbb{R}^4 , propuesta por Villegas-Blas en [33]. Así también se estudia los estados coherentes, propuestos por Villegas-Blas, en dicho espacio. Estos estados coherentes nos proveen de una resolución de la identidad, y se hace un estudio de su evolución temporal. En realidad, nuestra transformada de Bargmann es una transformada de estados coherentes para $L^2(S^3)$. Además se obtiene una expansión asintótica del núcleo integral de dicha transformada.

Índice general

Resumen	I
Introducción	IV
1. Transformada de Bargmann	1
1.1. Preliminares	1
1.2. El espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$	14
1.3. La transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$	22
1.3.1. La transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)}$	32
1.3.2. La inversa de la transformada de Bargmann	37
2. El átomo de hidrógeno y el Laplaciano en $L^2(S^3)$	45
2.1. Descomposición de $L^2(S^n)$	45
2.2. El átomo de hidrógeno	48
2.3. Una proyección estereográfica	51
2.4. Soluciones de la ecuación de momentos en S^n	52
Apéndice 2.A. Autoadjuntez del operador de Schrödinger	62
Apéndice 2.B. Irreducibilidad de $SO(n+1)$	67
3. Transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$	72
3.1. El espacio de funciones holomorfas \mathcal{F}_4	72
3.2. La transformada de Bargmann \mathcal{B}_{S^3}	80
3.2.1. La transformada $\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)}$	89
3.3. La transformada inversa $\mathcal{B}_{S^3}^{-1}$	91
Apéndice 3.A. Transformaciones canónicas y funciones generadoras	96
Apéndice 3.B. Invariancia de la medida Gausseana respecto a la acción de $SU(4)$	100

4. Estados coherentes	108
4.1. Estados coherentes para el oscilador armónico	108
4.2. Estados coherentes para $L^2(S^3)$	115
5. Evolución temporal de los estados coherentes	117
5.1. Evolución temporal de los estados $U^{-1}\phi_\alpha$	124
Apéndice 5.A. Sobre la regularización de Moser	135
A. Asintóticas para el núcleo integral de \mathcal{B}_{S^3}	137
Conclusiones	145
Agradecimientos	146
Bibliografía.	147

Introducción

Sea $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable sobre \mathbb{R}^n dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}g(x)d^n x,$$

con respecto a la medida de Lebesgue usual $d^n x$ sobre \mathbb{R}^n .

Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ definido como el espacio de funciones analíticas en n variables complejas y que son de cuadrado integrable con respecto a una medida Gausseana $d\mu_n$ sobre \mathbb{C}^n , dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(z)}g(z)d\mu_n(z),$$

con

$$d\mu_n(z) = (\hbar\pi)^{-n} e^{-|z|^2/\hbar} d^n x d^n y, \quad (1)$$

donde $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d^n x, d^n y$ son medidas de Lebesgue usuales en \mathbb{R}^n , $|z|^2 = z\bar{z}$ y \hbar es la constante de Planck.

En el año de 1961, V. Bargmann [2] introduce una transformada unitaria del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre el espacio de funciones analíticas $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Esta transformada se define como el operador integral

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(z) := \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}[z^2+x^2-2\sqrt{2}z \cdot x]}\psi(x)d^n x, \quad (2)$$

donde $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Bargmann prueba que éste es un operador bien definido y que es unitario, también obtiene una fórmula explícita para su inversa. A esta transformada se le conoce como la transformada de Bargmann, y al espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ se le conoce como espacio de Bargmann.

Se sabe, ver [33], que ésta transformada se puede ver como la cuantización de una transformación canónica del espacio fase (\mathbb{R}^{2n}, w) sobre el espacio fase (\mathbb{C}^n, ν_n) , donde $w = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j$, $\nu_n = -i \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ son formas simplécticas. Aquí el espacio (\mathbb{R}^{2n}, w) es el espacio fase de una partícula moviéndose en \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n se puede ver como la complexificación de \mathbb{R}^{2n} .

La función $-i \left(-\frac{1}{2} [z^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z \cdot x] \right)$, que aparece en la ecuación (2), es una función generadora de dicha transformación canónica.

El núcleo integral $A_n(z, x) := e^{-\frac{1}{2}[z^2+x^2-2\sqrt{2}z \cdot x]}$ de la ecuación (2) nos provee un conjunto de funciones $\phi_z(x) = \overline{A_n(z, x)}$, etiquetados por $z \in \mathbb{C}^n$, que son los estados coherentes establecidos por Schrödinger para el oscilador armónico. Estos estados son tales que su evolución a través del tiempo siguen las trayectorias clásicas para el oscilador armónico, entre otras propiedades. La imagen de las funciones ϕ_z bajo la transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ nos da el núcleo reproductor del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, como se verá más adelante.

La transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ corresponde al estudio de una partícula moviéndose en \mathbb{R}^n . Esta transformada ha sido utilizada en el análisis semi-clásico de aproximación de valores propios de perturbaciones de n osciladores armónicos ([36], [31], [19]). Así el estudio de la mecánica cuántica en espacios de funciones analíticas ha ofrecido una representación alternativa que puede ser de buena utilidad, en particular; para la implementación del método WKB.

Cabe mencionar que I. Segal introdujo el espacio de Bargmann pero en el caso de dimensión infinita, ([25],[26],[27]), mas o menos en el mismo tiempo que V. Bargmann. Por tal motivo, algunos autores lo llaman espacio de Segal-Bargmann.

Resulta natural el preguntarse por una representación de funciones analíticas y una transformada de Bargmann para cuando la partícula se mueve en una variedad diferente de \mathbb{R}^n .

La parte central de este trabajo consiste en el estudio detallado de la

transformada de Bargmann introducida por C. Villegas-Blas [32] para el espacio $L^2(S^3)$, el espacio de las funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida de superficie normalizada dS_3 , sobre la esfera S^3 y equipado con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(S^3)} = \int_{S^3} \overline{f(x)} g(x) dS_3(x).$$

El espacio S^3 es físicamente relevante pues contiene las simetrías del problema de Kepler y el átomo de hidrógeno en dimensión 3. En el capítulo 2 de este trabajo se describe en detalle una transformación unitaria que mapea el espacio de Hilbert generado por los estados ligados del átomo de hidrógeno al espacio $L^2(S^3)$.

La transformada de Villegas-Blas [33] consiste en tomar la base de armónicos esféricos de $L^2(S^3)$ y mapearla a una base de un subespacio propio \mathcal{F}_4 de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$. Este subespacio está determinado por el núcleo de un cierto operador, el cual representa la cuantización de la complexificación de una restricción del estudio de la regularización de Kustaanheimo-Stiefel del problema de Kepler, ver [34]. Más específicamente, $\mathcal{F}_4 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ se define como el núcleo del operador

$$\mathcal{L} \equiv z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} - z_4 \frac{\partial}{\partial z_4},$$

es decir; $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} \mid \mathcal{L}f = 0\}$.

En el presente trabajo se introduce la transformada de Villegas-Blas para $L^2(S^3)$ de una manera diferente. Es decir, se introduce desde un principio como el operador integral

$$\mathcal{B}_{S^3} \psi(z) = \int_{x \in S^3} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} \psi(x) dS_3(x), \quad (3)$$

con ρ el mapeo de \mathbb{C}^4 a la cuádrlica nula \mathcal{Q}^3 dado por

$$\rho(z) = (iz_1 z_3 - iz_2 z_4, z_1 z_3 + z_2 z_4, -iz_1 z_4 - iz_2 z_3, z_1 z_4 - z_2 z_3),$$

aquí la cuádrlica nula está definida como

$$\mathcal{Q}^n = \{\alpha \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n+1}^2 = 0\}.$$

Se muestra en detalle que dicho operador está bien definido y que es una transformación unitaria de $L^2(S^3)$ sobre \mathcal{F}_4 .

La motivación para la manera de definir la transformada de Bargmann a través de la ecuación (3), consiste en ver a dicha transformada como la cuantización de una transformación canónica que manda $(T^*S^3 - \{0\}, dq \wedge dp)$ (espacio fase de una partícula moviéndose en la esfera S^3) a un espacio $(\mathbb{C}^4, -idz \wedge d\bar{z})$ reducido por la acción del grupo de rotaciones en el plano. La función $(\rho(z) \cdot x)$ que aparece en la ecuación (3) es una función generadora de dicha transformación canónica.

Este enfoque tiene la ventaja, con respecto al trabajo inicial de Villegas-Blas [33], en cuanto a que muestra una estructura que se puede generalizar para el estudio de una transformada de Bargmann para $L^2(S^5)$ (donde $L^2(S^5)$ está relacionado con el problema del átomo de hidrógeno y la regularización del problema de Kepler en dimensión 5, así como con la fibración de Hopf $S^7 \rightarrow S^4$, ver [35] donde se implementa dicha generalización).

Para el caso del espacio $L^2(S^3)$ encontramos un conjunto de estados ϕ_α , donde la etiqueta α corre sobre el espacio cotangente de la esfera S^3 (con la sección nula removida), que desempeñan el papel de estados coherentes para $L^2(S^3)$. Dichos estados ϕ_α nos proporcionan una resolución de la identidad y exhiben una evolución temporal muy particular, pues aunque no se comportan como los del oscilador armónico, su evolución es periódica y además “reviven” después de un cierto período.

La transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$ se puede ver como una transformada de estados coherentes en el sentido de que se puede expresar como un producto interno de los ϕ_α con la función a la que se le aplica dicha transformada.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1, se muestran algunos aspectos básicos sobre espacios de funciones analíticas y un espacio en particular: el espacio de Bargmann. También, siguiendo el trabajo original de Bargmann [2], se define la transformada de Bargmann, se muestra que es un operador unitario y se encuentra su inversa. Además se considera el caso cuando la constante de Planck, \hbar , se introduce en la definición del espacio de Bargmann.

En el capítulo 2, consideramos el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno (en dimensión 3) y se define una transformación unitaria de un subespacio de $L^2(\mathbb{R}^3)$, generado por las funciones propias del Hamiltoniano del átomo de hidrógeno, sobre el espacio $L^2(S^3)$. Así, a través de esta transformación podemos hallar de una manera diferente, los valores propios para el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno. Además se incluye un apéndice sobre la autoadjuntez del operador de Schrödinger para este caso y otro sobre la irreducibilidad de las representaciones del grupo $SO(n+1)$ en los espacios propios del Laplaciano en la esfera S^n .

En el capítulo 3, se introduce la transformada de Bargmann para el espacio $L^2(S^3)$ y se prueba, al igual que en el capítulo 1, que es un operador unitario. Además se describe su inversa y también se considera el caso cuando la constante de Planck se introduce en la definición del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$. Incluimos también un apéndice sobre funciones generadoras y sus transformaciones canónicas, que nos ayudará a entender el análogo clásico de la transformada de Bargmann, y un apéndice sobre cierta invariancia de la medida Gausseana que se utiliza para mostrar que la transformada es una isometría.

En el capítulo 4, se mencionan los estados coherentes propuestos por Schrödinger para el oscilador armónico y se propone un conjunto que cumple la propiedad de dar una resolución de la identidad para $L^2(S^3)$.

En el capítulo 5, se realiza un estudio original sobre la evolución temporal de los estados coherentes en la esfera S^3 donde se exhibe un comportamiento de “revivir” bajo un cierto período, además de sus propiedades de concentración cuando se considera $\hbar \rightarrow 0$. También se analizan, a través de la transformación unitaria dada en el capítulo 2, los estados coherentes para el átomo de hidrógeno en el espacio de momentos y su respectiva evolución temporal.

Por último, un apéndice sobre el comportamiento asintótico del núcleo integral de la transformada de Bargmann para el espacio $L^2(S^3)$. Este estudio puede ser útil para el análisis semiclásico del problema del átomo de hidrógeno en la 3-esfera S^3 .

Para concluir esta introducción, mencionamos que se han realizado otras generalizaciones de la transformada de Bargmann para el caso cuando la partícula se mueve en la esfera. Entre estas mencionamos el trabajo de L. Thomas y S. Wassell [31] para el caso de S^2 y que motivó el caso S^3 hecha por C. Villegas-Blas [33].

También se tienen los trabajos de B. Hall [10], M. Stenzel [28] y Hall-Mitchell [12] para cuando la partícula se mueve en un grupo de Lie compacto, un espacio simétrico de tipo compacto o en particular una esfera, respectivamente. Sin embargo, la transformada de B. Hall para la esfera S^3 es diferente de la de Villegas-Blas, siendo esta última más adecuada para propósitos físicos del átomo de hidrógeno. El trabajo de B. Hall se basa en propiedades del núcleo del calor en la variedad correspondiente.

Para el caso de las esferas S^1 y S^2 , K. Kowalski y Rembielinski [16] introducen una transformada de Bargmann relacionada con la de B. Hall a través de la introducción de operadores de creación y aniquilación adecuados.

J. Rawnsley [20] introdujo una especie de transformada de Bargmann para la esfera S^n siguiendo ideas de cuantización geométrica. Sin embargo, dicha transformada resulta ser no unitaria.

K. Ii y R. Wada, [14] y [37], introducen una transformada de Bargmann unitaria para la n -esfera con rango un espacio de funciones holomorfas en la cuádrica nula \mathcal{Q}^n . Esta transformada de Bargmann resulta ser diferente de la estudiada en esta tesis pues K. Ii y R. Wada fuerzan desde un principio al núcleo integral que define su transformada, a ser la exponencial de la función $(\alpha \cdot x)$; $\alpha \in \mathcal{Q}^n$. Esto los obliga a dotar a la cuádrica nula de una medida diferente a la que obtendríamos con nuestro enfoque: la medida que resulta de considerar la medida Gausseana $d\mu_n$ como en la ecuación (1) y la función $\rho(z)$ como en (3).

Capítulo 1

Transformada de Bargmann

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de espacios de funciones analíticas, y algunas propiedades que los caracterizan. Se introduce uno en particular; el espacio de Bargmann. Además, ligado a este espacio, la transformada de Bargmann que nos lleva una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ a una función en dicho espacio.

1.1. Preliminares

El contenido de esta sección (excepto los teoremas 5 y 8) se tomó del artículo de B. Hall [11]. De dicha referencia se sigue la presentación, enunciado de los teoremas así como sus pruebas, aunque en algunas de ellas se presentan con mayor detalle. Los teoremas 5 y 8 aparecen en el artículo de Bargmann [2] de donde se bosqueja la prueba del primero mientras el segundo solo se enuncia, por lo que nosotros presentamos una prueba de dicho teorema.

Espacios de funciones analíticas

Sea U un conjunto abierto no vacío en \mathbb{C}^n , denotamos entonces con $\mathcal{H}(U)$ al espacio de funciones analíticas sobre U .

Definición 1. Decimos que una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es *analítica* si f es continua y analítica en cada variable con las otras variables fijas. Esto es, si

f satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq n \text{ y } z \in U.$$

Consideremos una función entera f sobre \mathbb{C}^n . Sabemos que se puede ver como una única serie de potencias, es decir

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \alpha_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \dots z_n^{\nu_n}.$$

Es conveniente usar una notación corta para lo anterior, así; si denotamos con $\alpha_{[\nu]}$ a los coeficientes $\alpha_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$, y denotamos con $z^{[\nu]}$ al producto $z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \dots z_n^{\nu_n}$, obtenemos que

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \alpha_{[\nu]} z^{[\nu]}. \quad (1.I)$$

Esta serie converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de \mathbb{C}^n .

También denotaremos como $[\nu!]$ al producto $\nu_1! \nu_2! \dots \nu_n!$ y con $|\nu|^j$ a la suma $|\nu_1|^j + |\nu_2|^j + \dots + |\nu_n|^j$, para j un entero no negativo.

Definición 2. Denotamos con $P_r(z)$ al polidisco de radio r centrado en z , esto es

$$P_r(z) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid |v_k - z_k| < r \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1.II)$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n)$.

Sea α una función continua y estrictamente positiva sobre U .

Definición 3. Sea $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ el espacio de funciones analíticas y de cuadrado integrables con respecto al peso α , esto es,

$$\mathcal{HL}^2(U, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \mid \int_U |f(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}.$$

Aquí dz denota la medida de Lebesgue $2n$ -dimensional sobre \mathbb{C}^n .

Teorema 4. (1) Para toda $z \in U$ existe una constante c_z tal que

$$|f(z)|^2 \leq c_z \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2$$

para toda $f \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$.

(2) $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U, \alpha)$, y por tanto un espacio de Hilbert.

Demostración. (1). Sea $P_s(z)$ el polidisco de radio s centrado en z como en (1.II). Para $z \in U$ escojamos s tal que $\overline{P_s(z)} \subset U$. Ahora, aseveramos que

$$f(z) = (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} f(v) dv. \quad (1.III)$$

Para verificar esto, pensemos primero en el caso $n = 1$.

Consideramos la expansión de f en series de Taylor, centrada en $v = z$,

$$f(v) = f(z) + a_1(v - z) + a_2(v - z)^2 + \dots$$

Esta serie converge uniformemente a f sobre el conjunto compacto $\overline{P_s(z)} \subset U$, por lo que el lado derecho de (1.III) se ve

$$\begin{aligned} & (\pi s^2)^{-1} \int_{P_s(z)} f(v) dv \\ &= (\pi s^2)^{-1} \int_{P_s(z)} \left(f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (v - z)^k \right) dv \\ &= (\pi s^2)^{-1} \left\{ \int_{P_s(z)} f(z) dv + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{P_s(z)} a_k (v - z)^k dv \right\}. \end{aligned}$$

En este caso, el polidisco es sólo el disco unitario en el plano complejo. Si usamos coordenadas polares con origen en z , $(v - z)^k = r^k e^{ik\theta}$, obtenemos

$$\begin{aligned} & (\pi s^2)^{-1} \int_{P_s(z)} f(v) dv \\ &= (\pi s^2)^{-1} \left\{ f(z) \int_0^s \int_0^{2\pi} r d\theta dr + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^s \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\theta} r d\theta dr \right\} \\ &= (\pi s^2)^{-1} \left\{ f(z) (\pi s^2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^s r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta dr \right\} \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Para el caso $n > 1$, tenemos

$$\begin{aligned} & (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} f(v) dv \\ &= (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} \left(f(z) + \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} (v-z)^{[\nu]} \right) dv \end{aligned}$$

pero la serie converge uniformemente en el compacto $\overline{P_s(z)}$,

$$\begin{aligned} &= (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} f(z) dv + (\pi s^2)^{-n} \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} \int_{P_s(z)} (v-z)^{[\nu]} dv \\ &= f(z) + (\pi s^2)^{-n} \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} \iint_{D(z_2; s)} \cdots \int_{D(z_n; s)} \prod_{j=1}^n (v_j - z_j)^{\nu_j} dv_n \cdots dv_2 dv_1 \\ &= f(z) + (\pi s^2)^{-n} \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} \int_{D(z_1; s)} (v_1 - z_1)^{\nu_1} \cdots \int_{D(z_n; s)} (v_n - z_n)^{\nu_n} dv_n \cdots dv_1 \end{aligned}$$

notamos que utilizando coordenadas polares como en el caso en una dimensión todas las integrales serán cero y con esto, la igualdad se cumple.

Ahora, teniendo verificada la ecuación (1.III) podemos reescribirla como

$$\begin{aligned} f(z) &= (\pi s^2)^{-n} \int_U \chi_{P_s(z)}(v) \frac{1}{\alpha(v)} f(v) \alpha(v) dv \\ &= (\pi s^2)^{-n} \left\langle \chi_{P_s(z)} \frac{1}{\alpha}, f \right\rangle_{L^2(U, \alpha)}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwarz tenemos

$$|f(z)|^2 \leq (\pi s^2)^{-2n} \left\| \chi_{P_s(z)} \frac{1}{\alpha} \right\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2.$$

Como α es positiva y continua sobre $\overline{P_s(z)} \in U$, entonces $\frac{1}{\alpha}$ es acotada sobre $P_s(z)$, por lo que la primera norma es finita y solo depende de z .

(2). Sea $z \in U$ y $V = P_r(z)$, $r \geq 0$, tal que el polidisco esté totalmente contenido en U . Sea $s = r/2$.

Notamos que para todo punto $v \in P_s(z)$, su correspondiente polidisco $P_s(v)$ está contenido en $V \subset U$, ya que para $w = (w_1, \dots, w_n) \in P_s(v)$

$$\begin{aligned} |w_k - z_k| &= |w_k - v_k + v_k - z_k| \\ &\leq |w_k - v_k| + |v_k - z_k| = 2s = r \end{aligned}$$

Entonces, por el punto anterior, para $v \in P_s(z)$ se tiene

$$|f(v)|^2 \leq c_v \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2$$

puesto que en particular $v \in U$. Pero

$$\begin{aligned} c_v &= (\pi s^2)^{-2n} \left\| \chi_{P_s(v)} \frac{1}{\alpha} \right\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \\ &\leq \left(\frac{s^2}{r^2} \right)^{-2n} (\pi r^2)^{-2n} \left\| \chi_{P_r(z)} \frac{1}{\alpha} \right\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \\ &= 2^{-4n} d_z. \end{aligned}$$

Por tanto dado $z \in U$, por lo anterior, podemos encontrar una vecindad V de z y una constante d_z tal que

$$|f(v)|^2 \leq d_z \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2$$

para toda $v \in V$ y toda $f \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$.

Ahora, sea $\{f_m\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$. Entonces, como $L^2(U, \alpha)$ es un espacio de Hilbert, existe $f \in L^2(U, \alpha)$ tal que $f_m \rightarrow f$ en la norma de $L^2(U, \alpha)$. Entonces tenemos que mostrar que $f \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$.

Tenemos pues que $\{f_m\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(U, \alpha)$, pero

$$\sup_{v \in V} |f_m(v) - f_l(v)| \leq \sqrt{d_z} \|f_m - f_l\|_{L^2(U, \alpha)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } m, l \rightarrow \infty.$$

Lo que muestra que $\{f_m\}$ converge localmente uniformemente a alguna función \tilde{f} (que debería ser f).

Pero tenemos que si el límite puntual y el límite en la norma existen, entonces ese límite es el mismo.

Además tenemos que como $f_m \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es continua. Ahora consideremos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ un conjunto de curvas cerradas en los discos $D(z_1; s), \dots, D(z_n; s)$ en \mathbb{C} respectivamente, entonces por el teorema de Cauchy para funciones analíticas

$$\int_{\gamma_j} f_m(z_j) dz_j = 0 \quad \text{para toda } j = 1, \dots, n$$

donde $f_m(z_j)$ representa la función con variable z_j y las demás fijas.

Utilizando la convergencia uniforme tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z_j) dz_j &= \int_{\gamma_j} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z_j) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\gamma_j} f_m(z_j) dz_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Por el teorema de Morera, $f(z_j)$ es analítica para toda $j = 1, \dots, n$, entonces $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Por tanto $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ es un espacio de Hilbert. \square

Observación 1. Notamos que el punto (1) nos dice que para cada $z \in U$ el funcional

$$\Lambda_z : \mathcal{HL}^2(U, \alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dado por

$$f \longmapsto f(z)$$

es un funcional lineal continuo.

También se puede obtener una cota, como en el punto (1), para $\left| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right|$ con $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$.

Teorema 5. Para $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ se tiene

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right|^2 \leq \|f\|^2 (|z|^2 + 1) e^{z\bar{z}}.$$

Demostración.

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right|^2 \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{N}^n} |a_{[m]}| \left| \frac{m_k z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k-1} \dots z_n^{m_n}}{\sqrt{[m!]}} \right| \right)^2$$

aplicando la desigualdad de Schwarz y utilizando la notación, para $m \in \mathbb{N}^n$, $[m_k^{-l}] := (m_1, \dots, m_k - l, \dots, m_n)$ con $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\leq \left[\left(\sum_{m \in \mathbb{N}^n} |a_{[m]}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{m_k^2 |z|^{2[m_k^{-1}]}}{[m!]} \right)^{1/2} \right]^2 \\ &= \|f\|^2 \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{m_k (|z|^2)^{[m_k^{-1}]}}{[m_k^{-1}!]} \\ &= \|f\|^2 \left[\sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{(|z|^2)^{[m_k^{-1}]}}{[m_k^{-2}!]} + \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{(|z|^2)^{[m_k^{-1}]}}{[m_k^{-1}!]} \right] \\ &= \|f\|^2 (|z|^2 + 1) e^{z\bar{z}}. \end{aligned} \tag{1.IV}$$

□

Teorema 6 (Núcleo Reprodutor). *Sea el espacio $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Entonces existe una función $K(z, w)$, $z, w \in U$, con las siguientes propiedades:*

(1) $K(z, w)$ es analítica en z y en \bar{w} , y satisface

$$K(w, z) = \overline{K(z, w)}.$$

(2) Para cada $z \in U$ fija, $K(z, w) \in L^2(U, \alpha(w))$. Para toda $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$

$$F(z) = \int_U K(z, w) F(w) \alpha(w) dw.$$

(3) Si $F \in L^2(U, \alpha)$ y PF denota la proyección ortogonal de F sobre el subespacio cerrado $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Entonces

$$PF(z) = \int_U K(z, w) F(w) \alpha(w) dw.$$

(4) Para todo $z, u \in U$

$$\int_U K(z, w)K(w, u)\alpha(w)dw = K(z, u)$$

(5) Para toda $z \in U$ y $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$

$$|F(z)|^2 \leq K(z, z) \|F\|^2,$$

y la constante $K(z, z)$ es la óptima en el sentido que para cada $z \in U$ existe una función no nula $F_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ para la cual la igualdad se cumple.

(6) Dada $z \in U$, si $\phi_z(\cdot) \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ satisface

$$F(z) = \int_U \overline{\phi_z(w)} F(w) \alpha(w) dw$$

para toda $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ entonces $\overline{\phi_z(w)} = K(z, w)$.

Demostración. Sea $z \in U$. Sea Λ_z como en la observación 1. Por el teorema de Riesz, existe $\phi_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ tal que

$$\begin{aligned} \Lambda_z(F) &= \langle \phi_z, F \rangle_{L^2(U, \alpha)} \\ &= \int_U \overline{\phi_z(w)} F(w) \alpha(w) dw. \end{aligned} \quad (1.v)$$

Por lo que definimos $K(z, w) = \overline{\phi_z(w)}$.

Así, por construcción, $K(z, w)$ cumple con el punto (2) y como $\phi_z(\cdot)$ es analítica entonces $K(z, w)$ es analítica en \bar{w} .

Para el punto (1), aplicamos Λ_z a ϕ_z obteniendo

$$\begin{aligned} \Lambda_w(\phi_z) &= \phi_z(w) = \langle \phi_w, \phi_z \rangle_{L^2(U, \alpha)} \\ &= \overline{\langle \phi_z, \phi_w \rangle_{L^2(U, \alpha)}} = \overline{\phi_w(z)}. \end{aligned}$$

Entonces $\overline{K(z, w)} = K(w, z)$ y en consecuencia $K(z, w)$ es analítica en z .

Para el punto (3), consideramos dos casos:

- $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Entonces se tiene la propiedad por el punto (2).
- $F \in (\mathcal{HL}^2(U, \alpha))^\perp$. Pero

$$\int_U K(z, w)F(w)\alpha(w)dw = \langle \phi_z, F \rangle_{L^2(U, \alpha)} = 0$$

puesto que $\phi_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. En el caso general, tenemos que $L^2(U, \alpha) = \mathcal{HL}^2(U, \alpha) \oplus (\mathcal{HL}^2(U, \alpha))^\perp$, por lo que para $F \in L^2(U, \alpha)$

$$PF = F|_{\mathcal{HL}^2(U, \alpha)} = \int_U K(z, w)F(w)\alpha(w)dw.$$

Para el punto (4), aplicamos el punto (2) a la función $K(\cdot, u) \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, con u fija. Entonces

$$K(z, u) = \int_U K(z, w)K(w, u)\alpha(w)dw.$$

Para el punto (5), para $z \in U$ fija, por el teorema de Riesz también tenemos que $\|\Lambda_z\|_{\mathcal{HL}^2(U, \alpha)^*} = \|\phi_z\|_{\mathcal{HL}^2(U, \alpha)}$. Así

$$\|\Lambda_z\|_{\mathcal{HL}^2(U, \alpha)^*}^2 = \|\phi_z\|_{\mathcal{HL}^2(U, \alpha)}^2 = \langle \phi_z, \phi_z \rangle_{L^2(U, \alpha)} = \phi_z(z) = K(z, z).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |F(z)|^2 &= |\Lambda_z(F)|^2 \leq \|\Lambda_z\|^2 \|F\|^2 \\ &= K(z, z) \|F\|^2. \end{aligned}$$

Para el punto (6), si $\psi_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ y satisface $F(z) = \langle \psi_z, F \rangle_{L^2(U, \alpha)}$ para toda $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, entonces

$$\left\langle \overline{K(z, \cdot)} - \psi_z(\cdot), F \right\rangle_{L^2(U, \alpha)} = 0 \quad \forall F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha).$$

Como $\left(\overline{K(z, \cdot)} - \psi_z(\cdot) \right) \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ podemos tomar $F = \overline{K(z, \cdot)} - \psi_z(\cdot)$ por lo que

$$\overline{K(z, w)} = \psi_z(w).$$

□

El núcleo reproductor es una herramienta útil para tener información acerca del espacio de funciones analíticas. El siguiente teorema nos da una manera de calcular el núcleo reproductor.

Teorema 7. Sea $\{e_j\}$ cualquier base ortonormal para $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Entonces para todo $z, w \in U$

$$\sum_j |e_j(z)\overline{e_j(w)}| < \infty$$

y

$$K(z, w) = \sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}.$$

Demostración. Para cualesquiera $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, el teorema de Parseval nos dice que

$$\|f\|^2 = \sum_j |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

Así, sean $f, g \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Podemos obtener dos sucesiones $\{|\langle f, e_j \rangle|\}_j$ y $\{|\langle g, e_j \rangle|\}_j$ en \mathbb{C} . Aseveramos que éstas sucesiones están en $\ell^2(\mathbb{C})$. Pero

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle f, e_j \rangle|^2 &= \|f\|^2 < \infty \\ \sum_j |\langle g, e_j \rangle|^2 &= \|g\|^2 < \infty \end{aligned}$$

Entonces podemos aplicar la desigualdad de Schwarz, obteniendo

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle f, e_j \rangle| |\overline{\langle g, e_j \rangle}| &= \left| \left\langle \{|\langle f, e_j \rangle|\}_j, \{|\langle g, e_j \rangle|\}_j \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| \{|\langle f, e_j \rangle|\}_j \right\| \left\| \{|\langle g, e_j \rangle|\}_j \right\| \\ &= \left(\sum_j |\langle f, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j |\langle g, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|f\| \|g\|. \end{aligned}$$

Ahora, tomando $f = \phi_z$ y $g = \phi_w \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ tenemos por lo anterior que

$$\sum_j |\langle \phi_z, e_j \rangle \overline{\langle \phi_w, e_j \rangle}| \leq \|\phi_z\| \|\phi_w\|,$$

pero $e_j(z) = \langle \phi_z, e_j \rangle$ para todo $z \in U$, así

$$\sum_j \left| e_j(z) \overline{e_j(w)} \right| \leq \|\phi_z\| \|\phi_w\| < \infty$$

por lo que la suma es absolutamente convergente para cada z, w .

Ahora, para mostrar la igualdad del núcleo reproductor utilizaremos el punto (6) del teorema anterior, por lo que primero tenemos que probar que la suma $\sum_j e_j(z) \overline{e_j(w)}$ es analítica en z y anti-analítica en w .

Definimos para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in U$ fija

$$S_n(w) = \sum_{j=1}^n e_j(z) \overline{e_j(w)}.$$

La serie es ortogonal y además

$$\begin{aligned} \sum_j \left\| e_j(z) \overline{e_j(w)} \right\|_{L^2(w)}^2 &= \sum_j \left\| \langle \phi_z, e_j \rangle \langle e_j, \phi_w \rangle \right\|_{L^2(w)}^2 \\ &= \sum_j \left\| \langle \langle \phi_z, e_j \rangle e_j, \phi_w \rangle \right\|_{L^2(w)}^2 \end{aligned}$$

pero por Riesz

$$\begin{aligned} &= \sum_j \left\| \langle \phi_z, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &= \sum_j \left| \langle \phi_z, e_j \rangle \right|^2 \|e_j\|^2 = \|\phi_z\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Esto es, la serie es convergente en L^2 como función de w con z fija. Más aún, en una analogía con el teorema 4, para funciones anti-analíticas, la suma es analítica como función de \bar{w} y con z fija. Si intercambiamos los papeles, se obtiene que la suma es una función analítica en z . Por tanto, solo queda mostrar que la igualdad con el núcleo reproductor se da.

Sea $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} F(z) &= \langle \phi_z, F \rangle = \left\langle \phi_z, \sum_j \langle e_j, F \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_j \langle \phi_z, e_j \rangle \langle e_j, F \rangle \\ &= \sum_j \langle \phi_z, e_j \rangle \int_U \overline{e_j(w)} F(w) \alpha(w) dw \\ &= \int_U \left[\sum_j e_j(z) \overline{e_j(w)} \right] F(w) \alpha(w) dw. \end{aligned}$$

Aquí se pudo intercambiar la suma y la integral por la convergencia en L^2 de la suma. Así por el punto (6) del teorema anterior

$$K(z, w) = \sum_j e_j(z) \overline{e_j(w)}.$$

□

Ahora enunciamos un resultado que se necesitará más adelante.

Teorema 8. Sea $S = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ una serie de términos reales no-negativos. Sean γ_{k_i} , $i = 1, 2, \dots$, tales que

$$1) \quad 0 < \gamma_{k_i} < 1,$$

$$2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{k_i} = 1,$$

y sean $S_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k$.

S converge si y sólo si los S_i están uniformemente acotados, y en ese caso; $S = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$.

Demostración. \Rightarrow) Como $\gamma_{k_i} b_k \leq b_k$ para toda i y k

$$S_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S.$$

\Leftrightarrow) Como $S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k$, analizaremos cada suma parcial. Para cada $i \geq 1$, independiente de N , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N b_k &= \sum_{k=1}^N \gamma_{k_i} b_k + \sum_{k=1}^N (1 - \gamma_{k_i}) b_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k + \sum_{k=1}^N (1 - \gamma_{k_i}) b_k \\ &\leq M + \sum_{k=1}^N (1 - \gamma_{k_i}) b_k \end{aligned}$$

Si tomamos el límite con respecto a i

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left(M + \sum_{k=1}^N (1 - \gamma_{k_i}) b_k \right) \\ \sum_{k=1}^N b_k &\leq M + \sum_{k=1}^N \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \gamma_{k_i}) b_k \\ &\leq M \end{aligned}$$

por lo que S converge.

Ahora, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} S_i &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} f_i(k) d\mu(k) \end{aligned}$$

donde $f_i(k) = \gamma_{k_i} b_k$ y $d\mu(k)$ es la medida que cuenta. Si $g(k) = b_k$, notamos que $f_i(k) \leq g(k)$ y $g(k) \in L^1(\mathbb{N})$. Aplicando el teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_i = \int_{\mathbb{N}} \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(k) d\mu(k) = S.$$

□

1.2. El espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$

El material de esta sección sigue la presentación de B. Hall [11] para el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ excepto el criterio 1, el cual es tomado de Bargmann [2].

Definición 1.1. El espacio de Bargmann, $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, es el espacio de funciones analíticas

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n) \quad \text{donde } \rho_n(z) = (\hbar\pi)^{-n} e^{-|z|^2/\hbar},$$

con \hbar la constante de Planck.

Esto es,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \mid \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 d\mu_n(z) < \infty \right\}$$

donde

$$d\mu_n(z) = \rho_n(z) d^n x d^n y,$$

con $z = (z_1, \dots, z_n) = x + iy$ y $|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$. Además, para $f, g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, el producto interior esta dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(z)} g(z) d\mu_n(z).$$

Queremos calcular el núcleo reproductor. Para usar el teorema 7 necesitamos encontrar una base ortonormal. Así tenemos el siguiente

Lema 1.2. $\left\{ u_{[\nu]} = \frac{z^{[\nu]}}{\sqrt{\hbar^{|\nu|} |\nu|!}} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}^n}$ forma una base ortonormal para $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$

Demostración. Primero realizamos la siguiente

Observación: Si consideramos la función

$$g_\sigma(z) = \bar{z}^{[l]} z^{[m]} \chi_{B(0, \sigma)}(z) \quad \text{para } l, m \in \mathbb{N}^n,$$

entonces notamos que $g_\sigma(z) \rightarrow \bar{z}^{[l]} z^{[m]}$ de manera puntual, cuando $\sigma \rightarrow \infty$. Además

$$|g_\sigma(z)| \leq |\bar{z}^{[l]} z^{[m]}| \in L^1(\mathbb{C}^n, d\mu_n)$$

puesto que $z^{[l]}$ y $z^{[m]}$ están en $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)$ y utilizando Hölder. Por tanto, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\int_{\mathbb{C}^n} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} g_\sigma(z) d\mu_n = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}^n} g_\sigma(z) d\mu_n. \quad (1.VI)$$

Ahora, realizaremos la prueba en dos pasos:

Paso 1. Mostraremos que el conjunto es ortonormal. Para $l, m \in \mathbb{N}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle u_{[l]}, u_{[m]} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\hbar^{l!}} [l!] \sqrt{\hbar^{m!}} [m!]} \int_{\mathbb{C}^n} \bar{z}^{[l]} z^{[m]} d\mu_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar^{l!}} [l!] \sqrt{\hbar^{m!}} [m!]} \int_{\mathbb{C}^n} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{z}^{[l]} z^{[m]} \chi_{B(0;\sigma)}(z) d\mu_n \\ &= \frac{(\hbar\pi)^{-n}}{\sqrt{\hbar^{l!}} [l!] \sqrt{\hbar^{m!}} [m!]} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{B(0;\sigma)} \bar{z}^{[l]} z^{[m]} e^{-|z|^2/\hbar} d^n x d^n y \quad \text{por (1.VI)} \end{aligned}$$

usando coordenadas polares, donde $z_k = r_k e^{i\theta_k}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\hbar\pi)^{-n}}{\sqrt{\hbar^{l!}} [l!] \sqrt{\hbar^{m!}} [m!]} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^\sigma \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\sigma \int_0^{2\pi} r_1^{l_1} e^{-il_1\theta_1} \dots r_n^{l_n} e^{-il_n\theta_n} \\ &\quad r_1^{m_1} e^{im_1\theta_1} \dots r_n^{m_n} e^{im_n\theta_n} e^{-(r_1^2 + \dots + r_n^2)/\hbar} r_1 \dots r_n d^n \theta d^n r \\ &= \frac{(\hbar\pi)^{-n}}{\sqrt{\hbar^{l!}} \hbar^{m!} [l!] [m!]} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^\sigma r_j^{l_j+m_j+1} e^{-r_j^2/\hbar} \int_0^{2\pi} e^{i(m_j-l_j)\theta_j} d\theta_j dr_j \right\} \end{aligned}$$

lo cual es cero para $m \neq l$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\hbar\pi)^{-n}}{\hbar^{m!} [m!]} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^\sigma 2\pi r_j^{2m_j+1} e^{-r_j^2/\hbar} dr_j \right\} \delta_{[m][l]} \\ &= \frac{1}{[m!]} \prod_{j=1}^n \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^\sigma \frac{2r_j}{\hbar} \left(\frac{r_j^2}{\hbar} \right)^{m_j} e^{-r_j^2/\hbar} dr_j \delta_{[m][l]} \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $u = r_j^2/\hbar$, obtenemos

$$= \frac{1}{[m!]} \prod_{j=1}^n \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^\sigma u^{m_j} e^{-u} du \delta_{[m][l]}$$

que al integrar por partes m_j veces

$$\langle u_{[l]}, u_{[m]} \rangle = \frac{1}{[m!]} \prod_{j=1}^n m_j! \lim_{\sigma \rightarrow \infty} (-e^{-s}) \Big|_0^{\sigma} = \delta_{[m][l]}.$$

Paso 2. Probaremos que es un conjunto completo. Para esto, supongamos que para alguna $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ se tiene que $\langle u_{[m]}, f \rangle = 0$ para toda $m \in \mathbb{N}^n$. Entonces calculamos

$$\begin{aligned} \langle u_{[m]}, f \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\hbar^{|m|} [m!]}} \int_{\mathbb{C}^n} \bar{z}^{[m]} f(z) d\mu_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar^{|m|} [m!]}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{B(0; \sigma)} \bar{z}^{[m]} f(z) d\mu_n, \end{aligned}$$

donde esta última igualdad es por el Teorema de Convergencia Dominada con un argumento muy similar al de la observación de un principio. Pero ahora tenemos que la expansión en serie de f como en (1.1) converge uniformemente sobre el conjunto $B(0; \sigma)$, por lo que podemos intercambiar la integral con la suma obteniendo

$$\begin{aligned} \langle u_{[m]}, f \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\hbar^{|m|} [m!]}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \int_{B(0; \sigma)} \bar{z}^{[m]} \alpha_{[\nu]} z^{[\nu]} d\mu_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar^{|m|} [m!]}} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \alpha_{[\nu]} \int_{B(0; \sigma)} \bar{z}^{[m]} z^{[\nu]} d\mu_n, \end{aligned}$$

observamos que nos encontramos en el cálculo del paso 1, por lo que la integral es distinta de cero para $\nu = m$ con lo que solo un término de la suma sobrevive. Así

$$\begin{aligned} \langle u_{[m]}, f \rangle &= \alpha_{[m]} \sqrt{\hbar^{|m|} [m!]} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{B(0; \sigma)} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} \frac{z^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} d\mu_n, \\ &= \alpha_{[m]} \sqrt{\hbar^{|m|} [m!]} \langle u_{[m]}, u_{[m]} \rangle \\ &= \alpha_{[m]} \sqrt{\hbar^{|m|} [m!]}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que $\alpha_{[m]} \sqrt{\hbar^{|m|} [m!]} = 0$ para toda $m \in \mathbb{N}^n$, lo que implica que f tiene que ser la función idénticamente cero.

□

Ahora notamos que en el caso $n = 1$, el núcleo reproductor es

$$K(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(\hbar^j j!)^{1/2}} \frac{\bar{w}^j}{(\hbar^j j!)^{1/2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\bar{w})^j}{\hbar^j j!} = e^{z\bar{w}/\hbar}. \quad (1.VII)$$

Para el caso $n \geq 1$ tenemos

Teorema 1.3. *Para $n \geq 1$, el núcleo reproductor para el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ está dado por*

$$K(z, w) = e^{z \cdot \bar{w}/\hbar},$$

donde $z \cdot \bar{w} = z_1 \cdot \bar{w}_1 + \cdots + z_n \cdot \bar{w}_n$. En particular se obtiene la cota puntual

$$|F(z)|^2 \leq e^{|z|^2/\hbar} \|F\|^2,$$

para toda $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ y toda $z \in \mathbb{C}^n$.

Demostración. Utilizaremos el punto (6) del teorema 6.

Sea $z \in \mathbb{C}^n$ y consideramos la función

$$\psi_z(w) = e^{\bar{z} \cdot w/\hbar}.$$

Es claro que ψ_z es analítica, entonces verificamos que está en $L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n)$

$$\begin{aligned} (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} |\psi_z(w)|^2 e^{-|w|^2/\hbar} dw &= (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{\bar{z} \cdot w/\hbar} e^{z \cdot \bar{w}/\hbar} e^{-|w|^2/\hbar} dw \\ &= (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{2\Re \bar{z} \cdot w/\hbar} e^{-|w|^2/\hbar} dw < \infty \end{aligned}$$

ya que $e^{-|w|^2/\hbar}$ decrece más rápidamente que $e^{2\Re \bar{z} \cdot w/\hbar}$ con respecto a w .

Ahora mostraremos que cumple con la propiedad:

$$F(z) = (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{z \cdot \bar{w}/\hbar} F(w) e^{-|w|^2/\hbar} dw, \quad \forall F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}.$$

Primero verificamos que se cumple para funciones analíticas con la propiedad de que, para cada w_j , $F(w_1, \dots, w_j, \dots, w_n)$ esté en $L^2(\mathbb{C}, (\hbar\pi)^{-1} e^{-|w_j|^2/\hbar})$ con las demás variables $w_k \neq w_j$ fijas.

$$\begin{aligned} (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{z \cdot \bar{w}/\hbar} F(w) e^{-|w|^2/\hbar} dw \\ = \int_{\mathbb{C}} \cdots \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{z_1 \cdot \bar{w}_1}{\hbar}} \cdots e^{\frac{z_n \cdot \bar{w}_n}{\hbar}} F(w_1, \dots, w_n) e^{-\frac{|w_1|^2}{\hbar}} \cdots e^{-\frac{|w_n|^2}{\hbar}} \frac{dw_1}{\hbar\pi} \cdots \frac{dw_n}{\hbar\pi} \end{aligned}$$

por las características de F podemos calcular las integrales separadas

$$\begin{aligned} (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{z \cdot \bar{w}/\hbar} F(w) e^{-|w|^2/\hbar} dw \\ = \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{z_n \cdot \bar{w}_n}{\hbar}} \dots \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{z_1 \cdot \bar{w}_1}{\hbar}} F(w_1, \dots, w_n) e^{-\frac{|w_1|^2}{\hbar}} \frac{dw_1}{\hbar\pi} \dots e^{-\frac{|w_n|^2}{\hbar}} \frac{dw_n}{\hbar\pi} \end{aligned}$$

aplicamos el resultado para el caso $n = 1$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{z_n \cdot \bar{w}_n}{\hbar}} \dots \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{z_2 \cdot \bar{w}_2}{\hbar}} F(z_1, w_2, \dots, w_n) e^{-\frac{|w_2|^2}{\hbar}} \frac{dw_2}{\hbar\pi} \dots e^{-\frac{|w_n|^2}{\hbar}} \frac{dw_n}{\hbar\pi} \\ &\vdots \\ &= F(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Ahora solo falta ver que se cumple para F cuadrado integrable con respecto al peso ρ_n . Para esto, notamos que si F es un polinomio de grado N , entonces F es polinomio en cada variable con las demás fijas, por lo que se puede ver como

$$F(z) = \sum_{k=0}^N c_{[k]} z^{[k]}$$

que claramente es cuadrado integrable.

Dado que el conjunto de polinomios es el generado por los elementos de la base, entonces el conjunto de los polinomios es denso en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, para $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Así tenemos que la propiedad se cumple para un conjunto denso por lo que se cumple para todo el espacio. Por lo tanto, aplicando el punto (6) del teorema 6, $K(z, w) = e^{z \cdot \bar{w}/\hbar}$.

□

Notación 1.4. Nótese que tanto la definición de espacio de Bargmann, de su base y el núcleo reproductor, llevan consigo la constante de Plank, \hbar . En realidad lo anterior funciona para \hbar cualquier constante, en particular $\hbar = 1$. Por comodidad, denotaremos con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)}$, $\rho_n^{(\hbar)}$ y $K^{(\hbar)}(z, w)$ al espacio de Bargmann, su medida y su núcleo reproductor cuando $\hbar \neq 1$.

Ahora, a través de funciones analíticas podemos definir conjuntos de funciones en el espacio de Bargmann, esto es

Definición 1.5. Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Para $0 < \lambda < 1$ definamos

$$F_\lambda(z) = F(\lambda z).$$

Observación 2. Notamos que si $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, F_λ está en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, ya que es analítica y además, por el teorema 1.3

$$|F_\lambda(z)|^2 = \|F\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)}^2 e^{\lambda^2|z|^2},$$

por lo que $F_\lambda \in L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n)$ para valores de $0 < \lambda < 1$.

Así se tiene un criterio, dado por Bargmann en [2], que determina cuándo la función F dada como arriba está en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

Criterio 1. Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$.

$$F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \iff F_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \text{ y existe } M \text{ tal que } \|F_\lambda\| \leq M \quad \forall 0 < \lambda < 1.$$

Más aún $\|F - F_\lambda\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 (1 - \lambda^{[m]})^2$. Así si $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ entonces F_λ tiende en norma a F , cuando $\lambda \rightarrow 1$.

Demostración. Por la observación 2, tenemos que $F_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Como $\{u_{[m]}\}$ es base para $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, entonces consideramos a F de la forma

$$F(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} c_{[m]} u_{[m]},$$

entonces

$$F_\lambda(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} c_{[m]} \lambda^{[m]} u_{[m]}.$$

Además sabemos por la identidad de Parseval que

$$\|F_\lambda\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |\langle u_{[m]}, F_\lambda \rangle|^2,$$

así que

$$\begin{aligned}
 \|F_\lambda\|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \left| \left\langle u_{[m]}, \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{[\nu]} \lambda^{[\nu]} u_{[\nu]} \right\rangle \right|^2 \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \left| \langle u_{[m]}, c_{[m]} \lambda^{[m]} u_{[m]} \rangle \right|^2 \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 \lambda^{2[m]} \\
 &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 = \|F\|^2.
 \end{aligned}$$

Ahora demostraremos la otra dirección. Por ser F analítica, se puede ver como

$$F(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} c_{[m]} u_{[m]},$$

y como $\|F\|$ se define por

$$\|F\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2,$$

entonces tenemos que mostrar que ésta suma es convergente. Por hipótesis, las normas

$$\|F_\lambda\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 \lambda^{2[m]}$$

están uniformemente acotadas para $0 < \lambda < 1$.

Ahora consideremos una sucesión $\{\lambda_i\}$ tal que $0 < \lambda_i < 1$ y $\lambda_i \rightarrow 1$ cuando $i \rightarrow \infty$. Si denotamos por

$$S_i = \|F_{\lambda_i}\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 \lambda_i^{2[m]},$$

entonces, por el teorema 8, las S_i convergen a $\sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 = \|F\|^2 < \infty$.

Por lo anterior, notamos que

$$\begin{aligned}\|F - F_\lambda\|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |\langle u_{[m]}, (F - F_\lambda) \rangle|^2 \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |\langle u_{[m]}, F \rangle - \langle u_{[m]}, F_\lambda \rangle|^2 \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 (1 - \lambda^{[m]})^2.\end{aligned}$$

Notamos que $|c_{[m]}|^2 (1 - \lambda^{[m]})^2 \leq |c_{[m]}|^2 \in L^1(\mathbb{N}^n)$. Como $\{|c_{[m]}|^2\} \in L^1(\mathbb{N}^n)$ entonces por lo anterior y por el teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 1} \|F - F_\lambda\|^2 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 (1 - \lambda^{[m]})^2 \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_{[m]}|^2 \lim_{\lambda \rightarrow 1} (1 - \lambda^{[m]})^2 = 0.\end{aligned}$$

□

1.3. La transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

La presentación de la transformada de Bargmann, la prueba de que es unitaria y una versión de la transformada inversa se sigue del artículo de Bargmann [2], aunque en algunos pasos se dan con más detalle. Se ofrece una demostración alternativa de la analiticidad de la transformada de Bargmann aplicada a una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y se prueba otra versión de la inversa de la transformada de Bargmann la cual solo se presenta en [2]. También se presenta la forma de la transformada de Bargmann cuando se considera un valor para la constante de Planck, \hbar , diferente de uno en la definición del espacio de Bargmann.

Consideramos los espacios $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ con los productos internos

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_1(x)} \psi_2(x) d^n x, \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f_1(z)} f_2(z) d\mu_n(z)$$

respectivamente.

Definición 1.6. Para $z \in \mathbb{C}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definamos

$$A_n(z, x) = \pi^{-n/4} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z \cdot x)}$$

donde $z^2 = z_1^2 + \dots + z_n^2$, $x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $z \cdot x = z_1 x_1 + \dots + z_n x_n$.

Lema 1.7. Para z fijo, $A_n(z, x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \overline{A_n(w, x)} d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \pi^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z \cdot x)} e^{-\frac{1}{2}(\bar{w}^2 + x^2 - 2\sqrt{2}\bar{w} \cdot x)} d^n x \\ &= \pi^{-n/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0; r)} e^{z \cdot \bar{w}} e^{-(x^2 - \sqrt{2}(z + \bar{w}) \cdot x + \frac{1}{2}(z + \bar{w})^2)} d^n x \\ &= \pi^{-n/2} e^{z \cdot \bar{w}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{P_r(0)} e^{-(x - \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \bar{w}))^2} d^n x \\ &= e^{z \cdot \bar{w}} \pi^{-n/2} \prod_{j=1}^n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-u^2} du \\ &= e^{z \cdot \bar{w}}. \end{aligned}$$

□

Ahora definimos la transformada de Bargmann

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$$

dada por

$$(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \psi(x) d^n x, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Llamaremos a la función $A_n(z, x)$ el núcleo integral del operador integral $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Necesitamos comprobar que este operador esté bien definido, pero por el Lema anterior y como $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos utilizar la desigualdad de Hölder con lo que $A_n(z, x) \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ahora tenemos el siguiente

Teorema 1.8. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

Demostración. La prueba se realizará en cuatro pasos. El primero es comprobar que para cada $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, su transformada, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi$, sea analítica. El segundo paso es probar que está en $L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n)$. El tercer paso es probar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría y por último, probar que es unitario.

Paso 1. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ donde cada γ_j es una curva cerrada planar en \mathbb{C} , y realizamos la siguiente

Observación 3. La función $A_n(z, x) \psi(x)$ está en $L^1(\mathbb{R}^n \times \gamma)$. Esto es,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |A_n(z, x) \psi(x)| d^n x dz &\leq \int_{\gamma} \|A_n(z, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz \\ &= \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \int_{\gamma} e^{\frac{|z|^2}{2}} dz \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Con esto podemos utilizar el Teorema de Fubini, es decir; se pueden intercambiar las integrales.

Para ver que la transformada de Bargmann de ψ es analítica usaremos el Teorema de Morera, por lo que primero verificamos que es continua. Sean $\{z_m\}$ y z_0 en \mathbb{C}^n tales que $z_m \rightarrow z_0$. Entonces por demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(z_m) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(z_0)$. Pero

$$\begin{aligned} & |\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(z_m) - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(z_0)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [A_n(z_m, x) - A_n(z_0, x)] \psi(x) d^n x \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |A_n(z_m, x) - A_n(z_0, x)| |\psi(x)| d^n x \\ &= \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{1}{2}(z_m^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z_m \cdot x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z_0 \cdot x)} \right| |\psi(x)| d^n x \\ &= \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} \left| e^{-\frac{1}{2}(z_m^2 - 2\sqrt{2}z_m \cdot x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 - 2\sqrt{2}z_0 \cdot x)} \right| d^n x. \end{aligned}$$

Ahora queremos tomar el límite cuando $m \rightarrow \infty$, pero para meter el límite a la integral necesitamos acotar

$$\left| e^{-\frac{1}{2}(z_m^2 - 2\sqrt{2}z_m \cdot x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 - 2\sqrt{2}z_0 \cdot x)} \right|.$$

Para esto, consideramos la función analítica

$$g(h) := e^{-\frac{1}{2}((z_0+h)^2 - 2\sqrt{2}(z_0+h) \cdot x)}.$$

Así por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que para cualquier curva cerrada γ

$$g(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(\eta)}{\eta - h} d\eta$$

y

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(\eta)}{\eta} d\eta.$$

Entonces, como $\{z_m\}$ es de Cauchy, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $|h| \leq 1/2$ con $h = z_m - z_0$

$$\begin{aligned} & \left| e^{-\frac{1}{2}(z_m^2 - 2\sqrt{2}z_m \cdot x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 - 2\sqrt{2}z_0 \cdot x)} \right| \\ &= |g(h) - g(0)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |g(\eta)| \left| \frac{1}{\eta - h} - \frac{1}{\eta} \right| d|\eta|, \end{aligned}$$

si en particular γ es la curva cerrada centrada en el origen y de radio 1, entonces

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |g(\eta)| \frac{|h|}{|\eta - h| |\eta|}$$

pero $|\eta - h| \geq \frac{1}{2}$ y $|\eta| = 1$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |g(\eta)| d|\eta| \leq \frac{1}{2} \max_{\eta \in \gamma} \{|g(\eta)|\}.$$

Por tanto

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \left| e^{-\frac{1}{2}(z_m^2 - 2\sqrt{2}z_m \cdot x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 - 2\sqrt{2}z_0 \cdot x)} \right| \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \max_{\eta \in \gamma} \{|g(\eta)|\} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Con esto, como la función exponencial es continua, entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} |\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z_m) - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z_0)| \\ & \leq \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| e^{-\frac{1}{2}(z_m^2 - 2\sqrt{2}z_m \cdot x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 - 2\sqrt{2}z_0 \cdot x)} \right| d^n x \\ & = 0. \end{aligned}$$

Ahora realizamos el siguiente cálculo

$$\int_{\gamma} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z) dz = \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \psi(x) d^n x dz$$

utilizando la observación 3

$$\begin{aligned}
 &= \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(z^2+x^2-2\sqrt{2}z \cdot x)} \psi(x) dz d^n x \\
 &= \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \psi(x) \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2\sqrt{2}z \cdot x)} dz d^n x \\
 &= \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{x^2}{2}} \psi(x) \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(z-\sqrt{2}x)^2} dz d^n x,
 \end{aligned}$$

pero la última exponencial es una Gausseana, y es analítica, por tanto, por el teorema de Cauchy esa integral es cero. Aplicando el teorema de Morera se tiene que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi$ es analítica.

Paso 2. Sea $0 < \lambda < 1$. Primero verificamos que las siguientes integrales sean finitas

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| A_n(\lambda z, x) \psi(x) \overline{A_n(\lambda z, y) \psi(y)} \right| d^n x d^n y \\
 &\leq \|A_n(\lambda z, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{|A_n(\lambda z, y) \psi(y)|} d^n y \\
 &\leq \|A_n(\lambda z, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &= e^{\lambda^2 |z|^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \infty, \tag{1.VIII}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| A_n(\lambda z, x) \psi(x) \overline{A_n(\lambda z, y) \psi(y)} \right| d^n x d^n y d\mu_n(z) \\
 &\leq \int_{\mathbb{C}^n} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 e^{\lambda^2 |z|^2} d\mu_n(z) \tag{por 1.VIII} \\
 &= \pi^{-n} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \int_{\mathbb{C}^n} e^{\lambda^2 |z|^2} e^{-|z|^2} dz < \infty, \tag{1.IX}
 \end{aligned}$$

ya que $\lambda < 1$.

Así, como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, sea $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda$ como en la definición 1.5. Esto lo hacemos con la finalidad de poder usar el teorema de Fubini y para que

el núcleo integral $A_n(\lambda z, x)$ esté en $L^2(\mathbb{C}^n, \mu_n)$, con $0 < \lambda < 1$. Entonces trataremos de buscar una cota uniforme para $\|(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)}$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^n} (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(z) \overline{(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(z)} d\mu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} A_n(\lambda z, x) \psi(x) d^n x \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{A_n(\lambda z, y) \psi(y)} d^n y \right) d\mu_n(z) \end{aligned}$$

por 1.VIII, aplicando Fubini, se tiene

$$= \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\lambda z, x) \psi(x) \overline{A_n(\lambda z, y) \psi(y)} d^n x d^n y d\mu_n(z)$$

por 1.IX, aplicando Fubini, se tiene

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(x) \overline{\psi(y)} \int_{\mathbb{C}^n} A_n(\lambda z, x) \overline{A_n(\lambda z, y)} d\mu_n(z) d^n x d^n y.$$

A partir de este momento, supongamos que ψ es una función continua de soporte compacto, esto es; $\psi \equiv 0$ fuera de la esfera B_r centrada en el origen y de radio r .

Notamos que si la integración en x, y se realiza sobre B_r , entonces la integral anterior es absolutamente convergente. Esto se ve fácilmente en una analogía con 1.VIII.

Regresando al cálculo anterior, Bargmann en su artículo realiza el cálculo para la segunda integral obteniendo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^n} A_n(\lambda z, x) \overline{A_n(\lambda z, y)} d\mu_n(z) \\ &= [\pi(1-\lambda^4)]^{-n/2} e^{-\frac{1}{4} \left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} (x+y)^2 + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} (x-y)^2 \right]} =: \sigma_n(\lambda^2, x, y). \end{aligned}$$

Por lo que tenemos

$$\int_{\mathbb{C}^n} (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(z) \overline{(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(z)} d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(x) \overline{\psi(y)} \sigma_n(\lambda^2, x, y) d^n x d^n y.$$

Realizamos el cambio de variables

$$\varepsilon = \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s = \frac{1}{2}(x+y), \quad t = \frac{1}{2}(x-y), \quad (1.X)$$

y notamos que $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_n(\lambda^2, x, y) &= [\pi (1 - \lambda^4)]^{-n/2} e^{-\frac{1}{4} \left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} (x+y)^2 + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} (x-y)^2 \right]} \\ &= \frac{\pi^{-n/2} (1 + \lambda^2)^{n/2}}{(1 + \lambda^2)^n (1 - \lambda^2)^{n/2}} e^{-\varepsilon^2 s^2} e^{-\varepsilon^{-2} t^2} \\ &= \left(1 + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^n 2^{-n} \left(\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^{-n/2} \pi^{-n/2} e^{-\varepsilon^2 s^2} e^{-\varepsilon^{-2} t^2} \\ &= (1 + \varepsilon^2)^n e^{-\varepsilon^2 s^2} [2\varepsilon\pi^{1/2}]^{-n} e^{-\varepsilon^{-2} t^2}. \end{aligned}$$

Además, de 1.X, se tiene que $y = s - t$ y $x = s + t$. Como lo notamos anteriormente, la convergencia absoluta en B_r , el rango de s, t es sobre B_r . Por tanto

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}^n} (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda(z) \overline{(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda(z)} d\mu_n(z) \\ &= \int_{B_r} \psi(s+t) \overline{\psi(s-t)} (1 + \varepsilon^2)^n e^{-\varepsilon^2 s^2} (2\varepsilon\pi^{1/2})^{-n} e^{-\varepsilon^{-2} t^2} 2^n d^n t d^n s \\ &= (1 + \varepsilon^2)^n \int_{|s| \leq r} e^{-\varepsilon^2 s^2} (\varepsilon\pi^{1/2})^{-n} \int_{|t| \leq r} e^{-\varepsilon^{-2} t^2} \psi(s+t) \overline{\psi(s-t)} d^n t d^n s \end{aligned}$$

si hacemos $t' = \frac{t}{\varepsilon}$

$$= (1 + \varepsilon^2)^n \int_{B_r} e^{-\varepsilon^2 s^2} N_\varepsilon(s) d^n s,$$

donde

$$N_\varepsilon(s) = \pi^{-n/2} \int e^{-(t')^2} \overline{\psi(s - \varepsilon t')} \psi(s + \varepsilon t') d^n t'.$$

Debido a que $\left| e^{-(t')^2} \overline{\psi(s - \varepsilon t')} \psi(s + \varepsilon t') \right| \leq e^{-(t')^2} \|\psi\|_\infty^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon(s) &= \pi^{-n/2} \int e^{-(t')^2} |\psi(s)|^2 d^n t' \\ &= |\psi(s)|^2 \pi^{-n/2} \prod_{j=1}^n \int e^{-(t'_j)^2} dt'_j \\ &= |\psi(s)|^2. \end{aligned}$$

Esto es, $N_\varepsilon(s)$ converge uniformemente a $|\psi(s)|^2$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\mathbb{C}^n} (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda(z) \overline{(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda(z)} d\mu_n(z) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon^2)^n \int_{B_r} e^{-\varepsilon^2 s^2} N_\varepsilon(s) d^n s \\ &= \int_{B_r} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon(s) d^n s \\ &= \int_{B_r} |\psi(s)|^2 d^n s \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s)|^2 d^n s = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Se sigue de aquí que las normas $\|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\lambda\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)}$ están uniformemente acotadas. Además como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi$ es analítica se sigue de la observación 2 que $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Pero por el criterio 1, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ y

$$\|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)}^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \|(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi)_\lambda\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)}^2 = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Así $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría sobre las funciones continuas en \mathbb{R}^n de soporte compacto.

Paso 3. Sea $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como el conjunto de funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $\{\psi_j\}$ de estas funciones tales que convergen a ψ_0 en norma. Sean $f_0 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_0$ y $f_j = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_j$. La sucesión $\{f_j\}$ es de Cauchy en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ puesto que

$$\|f_j - f_k\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)} = \|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_j - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_k\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)} = \|\psi_j - \psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Entonces existe $g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ tal que $f_j \rightarrow g$ en norma. Nótese que en el espacio de Bargmann la convergencia en norma implica convergencia puntual en todas partes, esto es, por la existencia del núcleo reproductor se tiene que

$$f_j(z) = \left\langle \overline{K(z, \cdot)}, f_j \right\rangle \longrightarrow \left\langle \overline{K(z, \cdot)}, g \right\rangle = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Así, $g(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z)$ para cada z . Como $A_n(z, x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$|f_0(z) - f_j(z)| \leq e^{\frac{|z|^2}{2}} \|\psi_0 - \psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

lo cual implica que $f_0 = g$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_0\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_j\|_{L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_n)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

establece que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Paso 4. Debido a que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría, implica que sea inyectiva. Por lo que solo queda mostrar que es sobre, pero basta con mostrar que $\text{Ran } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es denso en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Ahora, como $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ es de Hilbert podemos verlo como

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} = \overline{(\text{Ran } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})} \oplus (\text{Ran } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})^\perp.$$

Entonces por demostrar que $(\text{Ran } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})^\perp = \{0\}$. Para esto, sea $F \in (\text{Ran } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})^\perp$ y el núcleo reproductor $K(z, w) = e^{z \cdot \bar{w}}$ del espacio de Bargmann. Observamos que $K(z, w)$ está en el rango de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} A_n(\bar{w}, \cdot))(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) A_n(\bar{w}, x) d^n x \\ &= e^{z \cdot \bar{w}}\end{aligned}\quad \text{por el Lema 1.7,}$$

por tanto

$$\left\langle \overline{K(z, \cdot)}, F \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \int_{\mathbb{C}^n} K(z, w) F(w) d\mu_n(w) = F(z),$$

por la propiedad (2) del teorema 6 de los preliminares. Por estar F en el complemento ortogonal del núcleo, $F(z) = 0$ para toda z . Por tanto, el $\text{Ran } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es denso y con esto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario.

□

Otra forma de verificar la analiticidad de la Transformada de Bargmann es

Demostración alternativa. Necesitamos verificar que es continua y que $\frac{\partial}{\partial z_j} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi$ existe, es decir, que el límite de

$$\frac{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z_0 + h) - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z_0)}{h}, \quad h = (0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0),$$

existe para cada $j = 1, \dots, n$.

Es suficiente mostrar para el caso $n = 1$. Consideramos la función

$$g_{z_0,x}(h) = e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2h(z_0 + \sqrt{2}x))}.$$

Es claro que esta función es analítica, entonces para cualquier curva cerrada γ , por la fórmula integral de Cauchy

$$g_{z_0,x}(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_{z_0,x}(\eta)}{\eta - h} d\eta.$$

Además,

$$1 = g_{z_0,x}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_{z_0,x}(\eta)}{\eta} d\eta.$$

Con esto, podemos calcular

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z_0 + h) - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z_0)) \\ &= \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} \left(e^{-\frac{1}{2}((z_0+h)^2 + x^2 - 2\sqrt{2}(z_0+h)x)} - e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z_0x)} \right) \psi(x) dx \\ &= \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z_0x)} \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(2z_0h + h^2 - 2\sqrt{2}hx)} - 1 \right\} \psi(x) dx \\ &= \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z_0x)} \frac{1}{h} (g_{z_0,x}(h) - 1) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Queremos garantizar la existencia del límite, cuando $h \rightarrow 0$, a través del teorema de Convergencia Dominada. Para esto, necesitamos acotar las dos exponenciales en la integral de arriba, pero notamos que la primera nos representa una Gausseana que no depende de h y además decrece de manera cuadrática. Por tanto solo queda acotar a $\frac{1}{h} (g_{z_0,x}(h) - 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (g_{z_0,x}(h) - 1) &= \frac{1}{2\pi i h} \int_{\gamma} g_{z_0,x}(\eta) \left(\frac{1}{\eta - h} - \frac{1}{\eta} \right) d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g_{z_0,x}(\eta) \left(\frac{1}{(\eta - h)\eta} \right) d\eta \end{aligned}$$

que al aplicar valor absoluto

$$\left| \frac{1}{h} (g_{z_0,x}(h) - 1) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |g_{z_0,x}(\eta)| \frac{1}{|\eta - h| |\eta|} |d\eta|.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que γ es la circunferencia unitaria centrada en el origen, y que $|\eta - h| \geq 1/2$

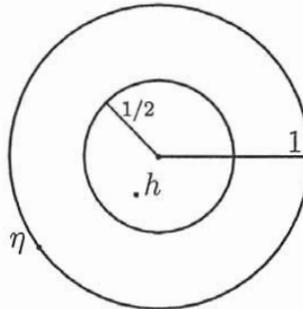


Figura 1.

entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} (g_{z_0, x}(h) - 1) \right| &\leq \max_{\substack{\eta = e^{2\pi i \theta} \\ \theta \in [0, 1]}} |g_{z_0, x}(\eta)| \frac{1}{|\eta - h|} \\ &\leq 2 \max_{\substack{\eta = e^{2\pi i \theta} \\ \theta \in [0, 1]}} |g_{z_0, x}(\eta)|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left| e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z_0 x)} h^{-1} (g_{z_0, x}(h) - 1) \right| \leq 2e^{-\frac{1}{2}(z_0^2 + x^2 - \sqrt{2}z_0 x)} \max_{\substack{\eta = e^{2\pi i \theta} \\ \theta \in [0, 1]}} |g_{z_0, x}(\eta)|.$$

Notamos que la Gausseana decrece más rápido que el segundo factor, que depende de manera lineal en x en la exponencial. Entonces tenemos una función en $L^1(\mathbb{R})$, por lo que el límite existe. \square

1.3.1. La transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)}$

Al considerar \hbar , la constante de Plank, en la definición de espacio de Bargmann, tenemos que la transformada de Bargmann sobre este espacio esta dada por

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \psi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} A_n^{(\hbar)}(z, x) \psi(x) d^n x,$$

donde

$$A_n^{(\hbar)}(z, x) = (\hbar \pi)^{-n/4} e^{-\frac{1}{2\hbar}[z^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z \cdot x]},$$

para $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para $z \in \mathbb{C}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$A_n^{(\hbar)}(z, x) = \hbar^{-n/4} A_n \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, \frac{x}{\hbar^{1/2}} \right) \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (1.XI)$$

por lo que se puede relacionar a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)}$ con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \psi(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} A_n^{(\hbar)}(z, x) \psi(x) d^n x \\ &= \hbar^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} A_n \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, \frac{x}{\hbar^{1/2}} \right) \psi(x) d^n x \end{aligned}$$

pero para $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos definir la función $\psi_{\hbar}(y) = \psi(\hbar^{1/2}y)$, entonces

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \psi(z) = \hbar^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} A_n \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, \frac{x}{\hbar^{1/2}} \right) \psi_{\hbar} \left(\frac{x}{\hbar^{1/2}} \right) d^n x$$

si $y = \frac{x}{\hbar^{1/2}}$

$$\begin{aligned} &= \hbar^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} A_n \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, y \right) \psi_{\hbar}(y) \hbar^{n/2} d^n x \\ &= \hbar^{n/4} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (1.XII)$$

Por lo anterior tenemos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \psi$ está bien definida y además está en el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}^{(\hbar)}$.

Teorema 1.9. *El mapeo $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}^{(\hbar)}$ es unitario.*

Demostración. Para probar este teorema, basta mostrar que el mapeo es isometría y que su rango es denso (como en la prueba del teorema 1.8). Así, calculamos

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \psi \right\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}^{(\hbar)}}^2 &= \frac{1}{(\hbar\pi)^n} \int_{\mathbb{C}^n} \left| \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \psi(z) \right|^2 e^{-|z|^2/\hbar} dz d\bar{z} \\ &= \frac{\hbar^{n/2}}{(\hbar\pi)^n} \int_{\mathbb{C}^n} \left| \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_{\hbar} \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}} \right) \right|^2 e^{-|z|^2/\hbar} dz d\bar{z}, \end{aligned}$$

$$\text{si } w = \frac{z}{\hbar^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} &= \hbar^{n/2} \int_{\mathbb{C}^n} |\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_{\hbar}(w)|^2 d\mu_n(w) \\ &= \hbar^{n/2} \|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_{\hbar}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 \\ &= \hbar^{n/2} \|\psi_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \hbar^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_{\hbar}(x)|^2 d^n x \\ &= \hbar^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(\hbar^{1/2}x)|^2 d^n x \end{aligned}$$

$$\text{si } y = \hbar^{1/2}x$$

$$= \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Para mostrar que el rango de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)}$ es denso, basta mostrar que el núcleo reproductor $K(z, w) = e^{z \cdot \bar{w}/\hbar}$, dado en el teorema 1.3, está en el rango de la transformada. Pero como $A_n^{(\hbar)}(z, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left[\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} A_n^{(\hbar)}(w, x)} \right] (z) &= \left[\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} \hbar^{-n/4} A_n \left(\frac{w}{\hbar^{1/2}}, \frac{x}{\hbar^{1/2}} \right)} \right] (z) \\ &= \hbar^{-n/4} \left[\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)} A_n \left(\frac{w}{\hbar^{1/2}}, \frac{x}{\hbar^{1/2}} \right)} \right] (z) \\ &= \hbar^{-n/4} \hbar^{n/4} \left[\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} A_n \left(\frac{w}{\hbar^{1/2}}, \frac{x}{\hbar^{1/2}} \right)} \right] \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}} \right) \\ &= \left[\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} A_n \left(\frac{w}{\hbar^{1/2}}, x \right)} \right] \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}} \right) \\ &= e^{z \cdot \bar{w}/\hbar}. \end{aligned}$$

□

Ahora, por la sección 1.3 sabemos que $\{u_{[m]}\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Dado que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario, nos interesa encontrar las funciones $\phi_{[m]}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\begin{aligned} u_{[m]}(z) &= (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \phi_{[m]})(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \phi_{[m]}(x) d^n x. \end{aligned} \tag{1.XIII}$$

Notamos por el lema 1.7 que

$$e^{b \cdot z} = \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) A_n(b, x) d^n x, \quad (1.XIV)$$

entonces podemos ver a los $u_{[m]}$ como

$$u_{[m]} = \frac{1}{\sqrt{[m!]}} \frac{\partial^{m_1} \dots \partial^{m_n}}{\partial b_1^{m_1} \dots \partial b_n^{m_n}} e^{b \cdot z} \Big|_{b=0} = \frac{1}{\sqrt{[m!]}} D_b^{[m]} e^{b \cdot z} \Big|_{b=0}.$$

Si sustituimos el valor de $e^{b \cdot z}$, como en 1.XIV, obtenemos

$$u_{[m]} = \frac{1}{\sqrt{[m!]}} D_b^{[m]} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) A_n(b, x) d^n x \Big|_{b=0}$$

suponiendo que podemos meter la derivada en la integral, justificado más adelante,

$$= \frac{1}{\sqrt{[m!]}} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) D_b^{[m]} A_n(b, x) \Big|_{b=0} d^n x.$$

Dado que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario, de 1.XIII y lo anterior

$$\begin{aligned} \phi_{[m]} &= \frac{1}{\sqrt{[m!]}} D_b^{[m]} A_n(b, x) \Big|_{b=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{[m!]}} D_b^{[m]} \pi^{-n/4} e^{-\frac{1}{2}(b^2 + x^2 - 2\sqrt{2}b \cdot x)} \Big|_{b=0} \\ &= \frac{\pi^{-n/4}}{\sqrt{[m!]}} e^{-\frac{x^2}{2}} D_b^{[m]} e^{-\frac{1}{2}(b^2 - 2\sqrt{2}b \cdot x)} \Big|_{b=0} \end{aligned}$$

si consideramos $b' = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$$\phi_{[m]} = \frac{\pi^{-n/4}}{\sqrt{[m!]2^{|m|/2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} D_{b'}^{[m]} e^{-b'^2 + 2b' \cdot x} \Big|_{b'=0}.$$

Notamos que la función $e^{-b'^2 + 2b' \cdot x}$ es la función generadora de los polinomios de Hermite $H_n(x)$. Por tanto $\{\phi_{[m]}\}$ es el conjunto de funciones de Hermite en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $\{u_{[m]}\}$ es base ortonormal, entonces $\{\phi_{[m]}\}$ lo es

también.

Para la suposición anterior verificamos si el límite existe, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) A(h, x) d^n x - \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) A(0, x) d^n x \right\} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} - 1 \right\} d^n x. \end{aligned} \quad (1.XV)$$

Usaremos el teorema de Convergencia Dominada para garantizar que el límite existe, por lo que necesitamos verificar que $e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} - 1 \right\}$ esté en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para esto, consideramos γ como la circunferencia centrada en el origen y de radio 2. Así por la fórmula integral de Cauchy

$$e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)}}{w - h} dw$$

y

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)}}{w} dw,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} - 1 \right\} &= \frac{1}{h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)} \left(\frac{1}{w - h} - \frac{1}{w} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)} \left(\frac{1}{(w - h)w} \right) dw \end{aligned}$$

que en valor absoluto

$$\left| \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} - 1 \right\} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)} \right| \frac{1}{|w - h| |w|} |dw|$$

tomando $h \leq 1$

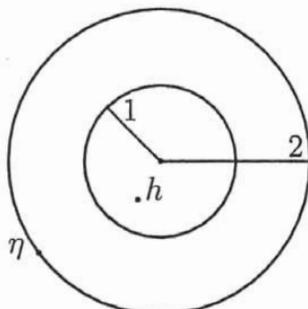


Figura 2.

se obtiene

$$\left| \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} - 1 \right\} \right| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)} |dw|$$

$$\leq e^{2(1 + \sqrt{2}|x|)}.$$

Tenemos entonces que

$$e^{-\frac{x^2}{2h}} \frac{1}{h} \left\{ e^{-\frac{1}{2h}(h^2 - 2\sqrt{2}h \cdot x)} - 1 \right\} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por tanto, en 1.XV existe el límite.

1.3.2. La inversa de la transformada de Bargmann

En una dimensión, debido a que $A_n(z, x)$ es analítica en z , podemos considerarlo como

$$A_1(z, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial z^m} A_1(z, x) \Big|_{z=0} \cdot z^m = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(x) u_m(z).$$

Para $n > 1$

$$A_n(z, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \phi_{[m]}(x) u_{[m]}(z).$$

Por tanto, para $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x)\psi(x)d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \phi_{[m]}(x)u_{[m]}(z)\psi(x)d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{N}^n} u_{[m]}(z)\overline{\phi_{[m]}(x)}\psi(x)d^n x. \end{aligned}$$

Si tomamos $\psi = \phi_{[\nu]}$ obtenemos, de una manera informal,

$$(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\phi_{[m]})(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{N}^n} u_{[m]}(z)\overline{\phi_{[m]}(x)}\phi_{[\nu]}(x)d^n x = u_{[m]}(z).$$

Esto nos sugiere que

$$(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f)(x) = \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \overline{u_{[m]}(z)}\phi_{[m]}(x) f(z)d\mu_n(z) \quad (1.XVI)$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} \overline{A_n(z, x)}f(z)d\mu_n(z) =: (W_n f)(x), \quad (1.XVII)$$

para x fijo.

Pero sabemos, por el cálculo realizado por Bargmann [2] al final de su sección uno, que $A_n(\cdot, x) \notin L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n)$. Entonces es preciso definir la inversa de la transformada de Bargmann de otra manera. Para esto, dada $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ consideraremos sus correspondientes $\{f_\lambda\}$, $0 < \lambda < 1$, dadas como en la definición 1.5. Sabemos que

$$|f_\lambda(z)| \leq \alpha e^{\frac{1}{2}\lambda^2|z|^2},$$

con α una constante positiva. Entonces aseveramos que $W_n f_\lambda$ está bien definido. Usando la cota anterior notamos

$$\begin{aligned} |A_n(\bar{z}, x)f_\lambda| \rho_n(z) &\leq \pi^{-n/4} \left| e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}^2 + x^2 - 2\sqrt{2}\bar{z}\cdot x)} \right| |f_\lambda(z)| \rho_n(z) \\ &\leq \alpha \pi^{-5n/4} \left| e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}^2 + x^2 - 2\sqrt{2}\bar{z}\cdot x)} \right| e^{-\frac{1}{2}(2-\lambda^2)|z|^2} \end{aligned}$$

si $z = p + iq$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha\pi^{-5n/4} \left| e^{-\frac{1}{2}(p^2 - q^2 + x^2)} e^{\sqrt{2}px} e^{ipq - \sqrt{2}qx} \right| e^{-\frac{1}{2}(2 - \lambda^2)(p^2 + q^2)} \\ &\leq \alpha\pi^{-5n/4} \left| e^{-\frac{1}{2}(p^2 - q^2 + x^2)} e^{\sqrt{2}px} \right| e^{-\frac{1}{2}(2 - \lambda^2)(p^2 + q^2)} \\ &\leq \alpha\pi^{-5n/4} e^{-\left[\frac{3-\lambda^2}{2}p^2 + \frac{1-\lambda^2}{2}q^2 + \frac{1}{2}x^2\right] + \sqrt{2}px}. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos que $W_n f_\lambda$ está bien definido. Si tomamos $\psi = W_n f_\lambda$, queremos verificar que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por lo que es necesario acotar

$$|\psi(x)| \leq \int_{\mathbb{C}^n} |A_n(\bar{z}, x)| |f_\lambda(z)| \rho_n(z) dz$$

por lo anterior

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{C}^n} \alpha\pi^{-5n/4} e^{-\left[\frac{3-\lambda^2}{2}p^2 + \frac{1-\lambda^2}{2}q^2 + \frac{1}{2}x^2\right] + \sqrt{2}px} d^n p d^n q \\ &= \alpha\pi^{-5n/4} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left[\frac{3-\lambda^2}{2}\right]p^2 + \sqrt{2}px} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left[\frac{1-\lambda^2}{2}\right]q^2} d^n q d^n p \end{aligned}$$

si $r = \left(\frac{1-\lambda^2}{2}\right)^{1/2} q$

$$\begin{aligned} &= \alpha\pi^{-5n/4} \left(\frac{2}{1-\lambda^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left[\frac{3-\lambda^2}{2}\right]p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}px} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-r^2} d^n r d^n p \\ &= \frac{\alpha\pi^{-3n/4} 2^{n/2}}{(1-\lambda^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left[\frac{3-\lambda^2}{2}\right]p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}px} d^n p \\ &= \frac{\alpha(\pi)^{-3n/4} 2^{n/2}}{(1-\lambda^2)^{n/2}} e^{-\left(\frac{1-\lambda^2}{2(3-\lambda^2)}\right)x^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left[\left(\frac{3-\lambda^2}{2}\right)^{1/2} p - \frac{1}{\sqrt{(3-\lambda^2)}} x\right]^2} d^n p \end{aligned}$$

si $s = \left(\frac{3-\lambda^2}{2}\right)^{1/2} p - \frac{1}{\sqrt{(3-\lambda^2)}} x$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha\pi^{-3n/4} 2^n}{[(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)]^{n/2}} e^{-\left(\frac{1-\lambda^2}{2(3-\lambda^2)}\right)x^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s^2} d^n s \\ &= \frac{\alpha(\pi)^{-n/4} 2^n}{[(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)]^{n/2}} e^{-\left(\frac{1-\lambda^2}{2(3-\lambda^2)}\right)x^2}. \end{aligned}$$

Así, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mas aún tenemos que es una función entera. Ahora se probará que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f_\lambda = W_n f_\lambda$, pero es suficiente mostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(W_n f_\lambda) = f_\lambda$. Como necesitamos mover las integrales, tenemos que acotar

$$\begin{aligned} & \left| A_n(w, x) \overline{A_n(z, x)} f_\lambda(z) \right| \rho_n(z) \\ & \leq \alpha \pi^{-n/2} \left| e^{-\frac{1}{2}(w^2 + x^2 - 2\sqrt{2}w \cdot x)} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2 - 2\sqrt{2}\bar{z} \cdot x)} \right| e^{\frac{1}{2}\lambda^2 |z|^2} e^{-|z|^2} \end{aligned}$$

si $w = u + iv$ y $z = p + iq$

$$\begin{aligned} & \leq \alpha \pi^{-n/2} \left| e^{-\frac{1}{2}(u^2 - v^2 + x^2 - 2\sqrt{2}ux)} e^{-\frac{1}{2}(p^2 - q^2 + x^2 - 2\sqrt{2}px)} e^{-\frac{1}{2}(2 - \lambda^2)(p^2 + q^2)} \right| \\ & \leq \alpha \pi^{-n/2} e^{\frac{1}{2}(v^2 - u^2 - 2\sqrt{2}ux)} e^{-\frac{1}{2}[(1 - \lambda^2)(p^2 + q^2) + 2(x^2 + p^2 + q^2 + \sqrt{2}px)]} \end{aligned}$$

esto es, está acotado por una Gausseana por lo que se puede aplicar Fubini en

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(W_n f_\lambda)(w) &= \int_{\mathbb{C}^n} A_n(w, x) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{A_n(z, x)} f_\lambda(z) d^n x d\mu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} f_\lambda(z) \int_{\mathbb{R}^n} A_n(w, x) \overline{A_n(z, x)} d^n x d\mu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{w \cdot \bar{z}} f_\lambda(z) d\mu_n(z) \\ &= f_\lambda(w). \end{aligned}$$

Esto último por las propiedades del núcleo reproductor. Ahora, definamos $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f$, $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, como sigue

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\mathbb{C}^n} \overline{A_n(z, \cdot)} f(\lambda z) d\mu_n(z). \quad (1.XVIII)$$

Otra versión de la inversa está dada por

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_n(z, \cdot)} f(z) d\mu_n(z), \quad (1.XIX)$$

con $m = 1, 2, \dots, n$.

Para ver esto, primero comprobamos que esta bien definida acotando la integral, para cada $\sigma > 0$. Como $f \in L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n)$, en particular $f \in L^2_{loc}(\mathbb{C}^n, \rho_n)$. Así necesitamos que el núcleo integral $A_n(z, x)$, con x fijo, esté en $L^2_{loc}(\mathbb{C}^n, \rho_n)$, por lo que calculamos

$$\int_{|z| \leq \sigma} |A_n(z, x)|^2 d\mu_n(z) = \pi^{-\frac{3n}{2}} \int_{|z| \leq \sigma} \left| e^{-\frac{1}{2}[z^2 + x^2 - 2\sqrt{2}z \cdot x]} \right|^2 e^{-|z|^2} dz d\bar{z}$$

si $z = q + ip$

$$\begin{aligned} &= \pi^{-\frac{3n}{2}} \int_{|z| \leq \sigma} e^{-[q^2 - p^2 + x^2 - 2\sqrt{2}q \cdot x]} e^{-q^2 - p^2} d^m q d^m p \\ &= \pi^{-\frac{3n}{2}} e^{-x^2} \int_{|z| \leq \sigma} e^{-[2q^2 - 2\sqrt{2}q \cdot x]} d^m q d^m p, \end{aligned} \quad (1.XX)$$

que es finito. Con esto, podemos aplicar la desigualdad de Schwarz en

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_n(z, x)} f(z) d\mu_n(z) \right|^2 &\leq \left(\int_{|z_m| \leq \sigma} |\overline{A_n(z, x)} f(z)| d\mu_n(z) \right)^2 \\ &\leq \int_{|z_m| \leq \sigma} |A_n(z, x)|^2 d\mu_n(z) \cdot \int_{|z_m| \leq \sigma} |f(z)|^2 d\mu_n(z) < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, el lado derecho en (1.XIX) está bien definido.

Ahora, dada $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, consideremos para cada $\sigma > 0$ las funciones

$$\psi_\sigma(x) = \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_n(z, x)} f(z) d\mu_n(z).$$

Por lo anterior tenemos que ψ_σ está bien definida. Además $\psi_\sigma \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\sigma(x)|^2 d^m x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|z_m| \leq \sigma} |A_n(z, x)|^2 d\mu_n(z) \cdot \int_{|z_m| \leq \sigma} |f(z)|^2 d\mu_n(z) d^m x \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|z_m| \leq \sigma} |A_n(z, x)|^2 d\mu_n(z) d^m x \end{aligned}$$

pero por (1.XX) es claro que podemos aplicar Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\sigma(x)|^2 d^n x &= \|f\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 \int_{|z_m| \leq \sigma} \int_{\mathbb{R}^n} |A_n(z, x)|^2 d^n x d\mu_n(z) \\ &= \|f\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 \int_{|z_m| \leq \sigma} e^{|z|^2} d\mu_n(z) \\ &= C \|f\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 < \infty, \end{aligned}$$

con C una constante que depende de σ . Entonces le podemos aplicar la transformada $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\sigma(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \psi_\sigma(x) d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \int_{|w_m| \leq \sigma} \overline{A_n(z, x)} f(w) d\mu_n(w) d^n x \end{aligned}$$

pero, si $z = q + ip$ y $w = a + ib$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|w_m| \leq \sigma} |A_n(z, x) \overline{A_n(z, x)} f(w)| d\mu_n(w) d^n x \\ \leq \text{const}(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} \int_{|w_m| \leq \sigma} e^{-[2b^2 + a^2 - \sqrt{2}(q+a) \cdot x]} d^n a d^n b d^n x. \end{aligned}$$

Entonces podemos aplicar Fubini obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\sigma(z) &= \int_{|w_m| \leq \sigma} f(w) \int_{\mathbb{R}^n} A_n(z, x) \overline{A_n(w, x)} d^n x d\mu_n(w) \\ &= \int_{|w_m| \leq \sigma} f(w) e^{z \cdot \bar{w}} d\mu_n(w). \end{aligned} \quad (1.XXI)$$

Nuestro objetivo es calcular que tan cerca están los $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\sigma$ de f , cuando

$\sigma \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
& \|f - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\sigma\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} |f(z) - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\sigma(z)|^2 d\mu_n(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \left| \int_{\mathbb{C}^n} f(w) e^{z \cdot \bar{w}} d\mu_n(w) - \int_{|w_m| \leq \sigma} f(w) e^{z \cdot \bar{w}} d\mu_n(w) \right|^2 d\mu_n(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \left| \int_{|w_m| \geq \sigma} f(w) e^{z \cdot \bar{w}} d\mu_n(w) \right|^2 d\mu_n(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \int_{|w_m| \geq \sigma} f(w) e^{z \cdot \bar{w}} d\mu_n(w) \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)} e^{z \cdot \bar{\eta}} d\mu_n(\eta) d\mu_n(z)
\end{aligned}$$

pero como $f, e^{z \cdot \bar{\cdot}} \in L^2(\mathbb{C}^n, \rho_n)$ entonces

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{C}^n} \int_{|w_m| \geq \sigma} \int_{|\eta_m| \geq \sigma} |f(w) \overline{f(\eta)} e^{z \cdot \bar{w}} e^{z \cdot \bar{\eta}}| d\mu_n(\eta) d\mu_n(w) d\mu_n(z) \\
& \leq \int_{|\eta_m| \geq \sigma} |f(\eta)|^2 d\mu_n(\eta) \int_{|\eta_m| \geq \sigma} |e^{z \cdot \bar{\eta}}|^2 d\mu_n(\eta) \int_{\mathbb{C}^n} d\mu_n(z) < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos aplicar Fubini obteniendo

$$\begin{aligned}
& \|f - \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_\sigma\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2 \\
&= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)} f(w) \int_{\mathbb{C}^n} \overline{e^{z \cdot \bar{\eta}}} e^{z \cdot \bar{w}} d\mu_n(z) d\mu_n(w) d\mu_n(\eta) \\
&= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)} f(w) \langle K(\cdot, \eta), K(\cdot, w) \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} d\mu_n(w) d\mu_n(\eta) \\
&= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)} f(w) \langle \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} A_n(\eta, \cdot), \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} A_n(w, \cdot) \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} d\mu_n(w) d\mu_n(\eta) \\
&= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)} f(w) \langle A_n(\eta, \cdot), A_n(w, \cdot) \rangle_{\mathbb{R}^n} d\mu_n(w) d\mu_n(\eta) \\
&= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)} f(w) e^{\eta \cdot \bar{w}} d\mu_n(w) d\mu_n(\eta).
\end{aligned}$$

Notamos que si $\overline{f(\eta)}f(w)e^{\eta\bar{w}}$ es integrable sobre todo $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, entonces lo anterior será cero, cuando $\sigma \rightarrow \infty$. Así calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(\eta)}f(w)e^{\eta\bar{w}} d\mu_n(w)d\mu_n(\eta) &= \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(\eta)}f(\eta)d\mu_n(\eta) \\ &= \|f\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma \rightarrow f$, cuando $\sigma \rightarrow \infty$, en la norma de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Pero como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario, existe $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi = f$. Así se tiene que

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi.$$

Pero la transformada inversa, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$, existe y es continua.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\psi,$$

por lo que

$$\psi_\sigma \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f,$$

que es precisamente la ecuación (1.XIX).

Si consideramos ahora la transformada de Bargmann sobre el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}^{(h)}$, tenemos que la transformada inversa $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(h)-1} : \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}^{(h)} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(h)-1} f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_n^{(h)}(z, x)} f(z) d\mu_n(z). \quad (1.XXII)$$

Capítulo 2

El átomo de hidrógeno y el Laplaciano en $L^2(S^3)$

En el presente capítulo se presenta una transformación de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, en dimensión 3, a una ecuación integral en términos de variables en la 3-esfera S^3 y, se encontrarán las soluciones de ésta última.

Lo primero se logra obteniendo la transformada de Fourier de la ecuación de Schrödinger en términos del momento, y luego por medio de una proyección estereográfica de la esfera S^3 .

Se incluye también un apéndice donde se muestra el dominio de autoadjuntez del Hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger, y otro sobre la irreducibilidad de $SO(n+1)$.

El material de este capítulo se ha tomado principalmente de [1] y [32]. También hemos utilizado [3], [13] y [21].

2.1. Descomposición de $L^2(S^n)$

Para nuestros fines, es necesario considerar una descomposición adecuada del espacio de Hilbert $L^2(S^n)$. Esto nos ayudará a dar una representación del grupo de rotaciones $SO(n+1)$.

Para el contenido de esta sección hemos utilizado [3] y [32]. Además nos apoyamos en el apéndice 2.B .

Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, y sea

$$Q(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{n+1}} \alpha_{[m]} x^{[m]},$$

tal que $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_{n+1} = k$, un polinomio armónico. Esto es

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} Q(x) &= \sum_{m \in \mathbb{N}^{n+1}} \alpha_{[m]} \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} x^{[m]} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^{n+1}} \alpha_{[m]} \sum_{j=1}^{n+1} m_j (m_j - 1) x_1^{m_1} \dots x_j^{m_j-2} \dots x_{n+1}^{m_{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

Consideramos el Laplaciano en coordenadas esféricas

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^n}, \quad (2.I)$$

donde Δ_{S^n} es el Laplaciano en la esfera S^n y está en términos de ángulos.

Ahora consideramos a Q en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} Q(r, \theta_1, \dots, \theta_n) &= \sum_{m \in \mathbb{N}^{n+1}} \alpha_{[m]} r^{|m|} E(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ &= r^k Q(x) \Big|_{S^n}, \end{aligned}$$

donde E es solo una expresión en términos de los ángulos.

Si aplicamos el Laplaciano (2.I) a lo anterior se obtiene

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} Q(x) = k(k-1)r^{k-2}Q(x) \Big|_{S^n} + \frac{n}{r}kr^{k-1}Q(x) \Big|_{S^n} + \frac{r^k}{r^2}\Delta_{S^n}Q(x) \Big|_{S^n} = 0,$$

factorizando r^{k-2} obtenemos

$$[k(k-1) + nk] Q(x) \Big|_{S^n} = -\Delta_{S^n} Q(x) \Big|_{S^n}. \quad (2.II)$$

De ésta ecuación obtenemos el conjunto $\{k(k-1) + nk\}_{k=0}^{\infty}$ de valores propios del Laplaciano en S^n . De hecho, se obtienen todos los posibles valores propios, ver por ejemplo Cordani [3]; donde se muestra que se tiene una base para $L^2(S^n)$.

Definición 2.1 (Cuádrlica Nula \mathcal{Q}^n). Denotamos por \mathcal{Q}^n a la cuádrlica nula

$$\mathcal{Q}^n = \{\alpha \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n+1}^2 = 0\}.$$

Observamos que si consideramos a $\alpha = \Re\alpha + i\Im\alpha$, con $\Re\alpha, \Im\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ entonces

$$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n+1}^2 = |\Re\alpha|^2 - |\Im\alpha|^2 + 2i\Re\alpha \cdot \Im\alpha$$

por lo que se tiene que $\alpha \in \mathcal{Q}^n$ si y sólo si $|\Re\alpha| = |\Im\alpha|$ y las partes real e imaginaria son ortogonales.

Ahora analizamos la forma que deben tener los polinomios $Q(x)$ armónicos. Primero consideraremos a los polinomios de la forma

$$Q(x) = (\alpha \cdot x)^k = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1})^k \quad \alpha \in \mathbb{C}^n, \quad (2.III)$$

y si aplicamos el Laplaciano a dicho polinomio obtenemos

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} Q(x) = k(k-1)(\alpha \cdot x)^{k-2} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^2,$$

que es cero cuando $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^2 = 0$. Esto es, cuando $\alpha \in \mathcal{Q}^n$ (la cuádrlica nula).

Lo anterior nos permite realizar la siguiente

Definición 2.2. Sea $\mathcal{H}_{n,k}$ el espacio de los polinomios armónicos homogéneos de grado k restringidos a S^n .

Es cierto que todo polinomio armónico homogéneo no necesariamente es de la forma (2.III), pero se puede aproximar por una combinación lineal finita de estos. Es decir

$$\mathcal{H}_{n,k} = \text{span} \{(\alpha \cdot x)^k \mid \alpha \in \mathcal{Q}^n\}.$$

Véase el Apéndice 2.B.

Teorema 2.3. $L^2(S^n) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,l}$.

Demostración. Observamos que la suma directa $\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,l}$ es una subálgebra cerrada de $C_{\mathbb{R}}(S^n)$, la familia de todas las funciones continuas a valores reales sobre S^n . Además $\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,l}$ separa puntos y contiene las funciones constantes. Entonces por el teorema de Stone-Weierstrass $\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,l}$ es denso en $C_{\mathbb{R}}(S^n)$. Por la densidad de las funciones continuas $C_{\mathbb{R}}(S^n)$ en $L^2(S^n)$ se tiene lo deseado. \square

También tenemos que si $f \in \mathcal{H}_{n,k}$ y $g \in \mathcal{H}_{n,l}$ entonces $\langle f, g \rangle = 0$ para $k \neq l$.

2.2. El átomo de hidrógeno

En esta sección consideraremos la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno y la mapearemos (bajo la transformada de Fourier) hacia el espacio de momentos. En las siguientes secciones transformaremos dicha ecuación en una de variables en la esfera S^3 . Hasta donde sabemos, la idea de relacionar el átomo de hidrógeno con un problema en la esfera S^3 viene de Fock. Aquí seguiremos la presentación de Itzykson y Bander [1].

El átomo de hidrógeno está formado por dos cuerpos, un núcleo (que contiene un protón) de masa m_1 y un electrón de masa m_2 , que interactúan bajo la acción del potencial de Coulomb. Esto es,

$$V(x) = \frac{-\kappa}{\|x\|},$$

donde $\|x\|$ es la distancia entre el núcleo y el electrón, y κ es una constante que depende de la carga del electrón.

El Hamiltoniano para el átomo de hidrógeno está dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{\kappa}{\|x\|},$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ se conoce como la masa reducida, y Δ es el Laplaciano sobre \mathbb{R}^3 .

La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, con energía negativa E , es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{\kappa}{\|x\|}\right)\psi = E\psi, \quad \psi \in D(H) \subset L^2(\mathbb{R}^3). \quad (2.1V)$$

El dominio de H , $D(H)$, está dado en el apéndice 2.A de este capítulo.

Definición 2.4 (Transformada de Fourier). Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de f , que denotaremos por \hat{f} , es una función sobre \mathbb{R}^n dada por

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot p} f(x) d^n x.$$

Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, su transformada de Fourier, \hat{f} , está dada por el límite dado en el teorema de Plancherel.

Calculamos la transformada de Fourier, $\hat{\cdot}$, en ambos lados de la ecuación (2.1V). Así

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \widehat{\Delta\psi}(\mathbf{p}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \|\mathbf{p}\|^2 \hat{\psi}(\mathbf{p}),$$

y la transformada de Fourier de $\frac{1}{\|x\|}\psi$ es

$$\widehat{\frac{1}{\|\cdot\|}}\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{\psi}(q)}{\|q - \mathbf{p}\|^2} dq. \quad (2.v)$$

Para ver lo anterior, nos podemos auxiliar del hecho de que la función $\frac{1}{\|x\|}\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ por lo que su transformada de Fourier existe en $L^2(\mathbb{R}^3)$. También consideremos el potencial de Yakawa dado por

$$\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0},$$

el cual multiplicado por ψ está en $L^2(\mathbb{R}^3)$ ya que $\left|\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0} \psi\right|^2 \leq \left|\frac{1}{\|x\|} \psi\right|^2$. Así que la transformada de Fourier del potencial de Yakawa está en $L^2(\mathbb{R}^3)$ y es

$$\left(\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0}\right)^\wedge(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi (\|\mathbf{p}\|^2 + R_0^{-2})},$$

ver [4].

Podemos notar que

$$\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0} \psi \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \frac{1}{\|x\|} \psi$$

cuando $R_0 \rightarrow \infty$, puesto que

$$\begin{aligned} \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\|x\|} \psi - \frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0} \psi \right\|_2^2 &= \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\|x\|} \psi (1 - e^{-\|x\|/R_0}) \right\|_2^2 \\ &= \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|x\|^2} |\psi(x)|^2 |1 - e^{-\|x\|/R_0}|^2 dx \end{aligned}$$

pero como $\frac{1}{\|x\|^2} |\psi(x)|^2 |1 - e^{-\|x\|/R_0}|^2 \leq 2 \frac{1}{\|x\|^2} |\psi(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada obteniendo

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|^2} |\psi(x)|^2 |1 - e^{-\|x\|/R_0}|^2 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, como la transformada de Fourier es unitaria se tiene que

$$\left(\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0} \psi \right)^\wedge \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \left(\frac{1}{\|x\|} \psi \right)^\wedge$$

cuando $R_0 \rightarrow \infty$, por lo que calculamos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0} \psi \right)^\wedge (\mathbf{p}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\psi}(q) \left(\frac{1}{\|x\|} e^{-\|x\|/R_0} \right)^\wedge (q - \mathbf{p}) dq \\ &= \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\psi}(q) \frac{1}{(\|q - \mathbf{p}\|^2 + R_0^{-2})} dq. \end{aligned}$$

Como $\psi \in L^1(\mathbb{R}^3)$, ver el apéndice 2.A, y

$$\frac{|\hat{\psi}(q)|}{\|q - \mathbf{p}\|^2 + R_0^{-2}} \leq \frac{|\hat{\psi}(q)|}{\|q - \mathbf{p}\|^2},$$

por el teorema de Convergencia Dominada se obtiene

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|} \widehat{e^{-\|x\|/R_0} \psi(\mathbf{p})} = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{\psi}(q)}{\|q - \mathbf{p}\|^2} dq = \frac{1}{\|x\|} \psi(\mathbf{p}). \quad (2.VI)$$

En general, para dimensión n , se tiene que

$$(\|\cdot\|^{-1} \psi)^\wedge(\mathbf{p}) = (\pi \omega_{n-1})^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\psi}(q)}{\|q - \mathbf{p}\|^{n-1}} dq,$$

donde

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma[\frac{1}{2}n]}$$

es el área de la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . Por tanto, de la ecuación (2.IV) obtenemos

$$\left(\frac{p^2}{2\mu} - E\right) \hat{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{\kappa}{\pi \omega_{n-1} \hbar} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\psi}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|^{n-1}} d^n \mathbf{y}, \quad (2.VII)$$

donde $p = \|\mathbf{p}\|$.

Ahora definamos, para una energía E negativa, $p_0^2 = -2\mu E$. Entonces la ecuación anterior se ve

$$(p^2 + p_0^2) \hat{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{\mu \kappa \Gamma[\frac{1}{2}(n-1)]}{\hbar \pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\psi}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|^{n-1}} d^n \mathbf{y}. \quad (2.VIII)$$

2.3. Una proyección estereográfica

Consideramos el espacio de momentos $\mathbf{p}/p_0 \in \mathbb{R}^n$ y la siguiente proyección estereográfica \mathcal{S} sobre S_0^n (la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+1} sin el polo norte).

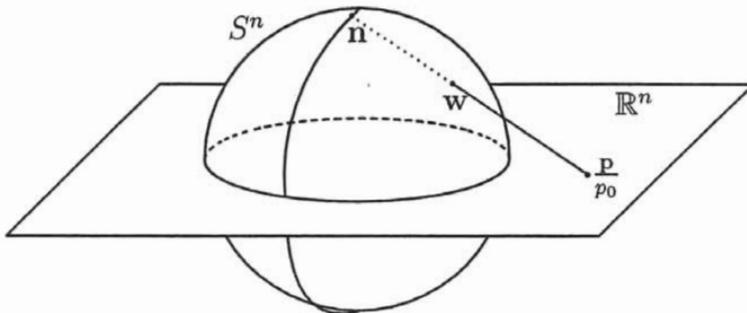


Figura 3. Proyección Estereográfica.

Dado $\mathbf{k} = \mathbf{p}/p_0 \in \mathbb{R}^n$, tomamos la línea que lo une con el polo norte \mathbf{n}

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{k} + t(\mathbf{n} - \mathbf{k}).$$

Queremos encontrar el tiempo t_0 tal que $\mathbf{x} \in S_0^n$, esto es, encontrar el tiempo que satisfaga

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{x}(t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) \\ &= [(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{k})] t_0^2 + [2\mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{k})] t_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + 1)t_0^2 - 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})t_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Donde encontramos que $t_0 = \frac{|\mathbf{k}|-1}{|\mathbf{k}+1}$. Entonces las ecuaciones de la proyección estereográfica, en términos de \mathbf{p} , son

$$\mathbf{w}_i = \frac{2p_0\mathbf{p}_i}{p^2 + p_0^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.IX)$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}. \quad (2.X)$$

De una manera análoga se pueden encontrar las inversas de estas transformaciones, que son

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{w}) = \frac{1}{1 - \mathbf{w}_{n+1}} \mathbf{w}_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.XI)$$

Nótese que la proyección estereográfica, por su dependencia en p_0 , depende de la energía.

2.4. Soluciones de la ecuación de momentos en S^n

Sea $\hat{\psi}(\mathbf{p})$ cualquier solución de la ecuación (2.VIII), con valor propio E . Siguiendo aún a [1], consideremos la función $\Phi(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in S_0^n$, definida por la asignación

$$\Phi(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{p_0}} \left(\frac{p^2(\mathbf{w}) + p_0^2}{2p_0} \right)^{\frac{n+1}{2}} \hat{\psi}(\mathbf{p}(\mathbf{w})), \quad (2.XII)$$

donde $p^2(\mathbf{w}) = \|\mathbf{p}(\mathbf{w})\|^2$.

Sea U el operador dado por la extensión lineal de la asignación anterior a todo el espacio de Hilbert generado por la transformada de Fourier de las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

Nuestra intención es mostrar que el operador es unitario, por lo que primero deseamos expresar la ecuación (2.VIII) en términos de variables en S^n . Para realizar el cambio de variable calculamos la diferencial de superficie a través de

$$d^{n+1}\Omega(\mathbf{w}) = \frac{1}{w_{n+1}} d\mathbf{w}_1 \wedge d\mathbf{w}_2 \wedge \cdots \wedge d\mathbf{w}_n$$

donde

$$d\mathbf{w}_1 \wedge d\mathbf{w}_2 \wedge \cdots \wedge d\mathbf{w}_n = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial p_1} & \frac{\partial w_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial p_1} & \frac{\partial w_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial p_n} \end{pmatrix} d^n \mathbf{p}.$$

Realizamos el cálculo para $n = 2$.

$$\begin{aligned} d\mathbf{w}_1 \wedge d\mathbf{w}_2 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial p_1} & \frac{\partial w_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial p_1} & \frac{\partial w_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} d^2 \mathbf{p} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{2p_0}{p^2+p_0^2} - \frac{(2p_0)2p_1^2}{(p^2+p_0^2)^2} & -\frac{(2p_0)2p_1p_2}{(p^2+p_0^2)^2} \\ -\frac{(2p_0)2p_1p_2}{(p^2+p_0^2)^2} & \frac{2p_0}{p^2+p_0^2} - \frac{(2p_0)2p_2^2}{(p^2+p_0^2)^2} \end{pmatrix} d^2 \mathbf{p} \\ &= \frac{(2p_0)^2}{(p^2+p_0^2)^4} [(p_0^2 - p_1^2 + p_2^2)(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2) - (2p_1p_2)^2] d^2 \mathbf{p} \\ d\mathbf{w}_1 \wedge d\mathbf{w}_2 &= \frac{(2p_0)^2}{(p^2+p_0^2)^4} [(p_0^2)^2 - (p^2)^2] d^2 \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d^3\Omega(\mathbf{w}) &= \frac{1}{w_3} d\mathbf{w}_1 \wedge d\mathbf{w}_2 \\ &= \frac{p^2+p_0^2}{p^2-p_0^2} \frac{(2p_0)^2}{(p^2+p_0^2)^4} (p^2-p_0^2)(p^2+p_0^2) d^2 \mathbf{p} \\ &= \frac{(2p_0)^2}{(p^2+p_0^2)^2} d^2 \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Así, generalizando lo anterior se tiene que las medidas $d^n \mathbf{p}$, en el espacio de momentos, y $d^{n+1} \Omega(\mathbf{w})$, la medida usual en la superficie de S^n , están relacionadas por

$$d^{n+1} \Omega(\mathbf{w}) = \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^n d^n \mathbf{p}. \quad (2.XIII)$$

Además se tiene la relación

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|^2 = \frac{(y^2 + p_0^2)(p^2 + p_0^2)}{(2p_0)^2} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad (2.XIV)$$

donde $\mathbf{v} \in S^n$ es el punto correspondiente a \mathbf{y} , y $y = \|\mathbf{y}\|$. Para verificar la última ecuación realizamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= 2(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &= 2 \left(1 - \left[\frac{y^2 - p_0^2}{y^2 + p_0^2} \right] \left[\frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2} \right] - \left[\frac{2p_0}{y^2 + p_0^2} \right] \left[\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right] \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \right) \\ &= 2 \left[\frac{(y^2 + p_0^2)(p^2 + p_0^2) - (y^2 - p_0^2)(p^2 - p_0^2) - (2p_0)\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}}{(y^2 + p_0^2)(p^2 + p_0^2)} \right]. \end{aligned}$$

Con esto se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{(y^2 + p_0^2)(p^2 + p_0^2)}{(2p_0)^2} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \\ &= \frac{1}{2p_0^2} [(y^2 + p_0^2)(p^2 + p_0^2) - (y^2 - p_0^2)(p^2 - p_0^2) - (2p_0)\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}] \\ &= \frac{1}{2p_0^2} [2p_0^2(y^2 + p^2) - 4p_0^2 \mathbf{y} \cdot \mathbf{p}] \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|^2. \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de realizar el cambio de la ecuación (2.VIII) en términos de variables en S^n . Para esto simplemente sustituimos las ecuaciones

ciones (2.XII), (2.XIII), (2.XIV), en (2.VIII) y obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{p_0} \left[\frac{(2p_0)^{(n+1)/2}}{(p^2 + p_0^2)^{(n-1)/2}} \right] \Phi(\mathbf{w}) \\
 &= \frac{\mu\kappa\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}{\hbar\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}} \frac{\sqrt{p_0} \left[\frac{2p_0}{y^2+p_0^2} \right]^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{y^2+p_0^2}{2p_0} \right]^n}{\left[\frac{(p^2+p_0^2)(y^2+p_0^2)}{(2p_0)^2} \right]^{\frac{n-1}{2}}} \int_{S^n} \frac{\Phi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(\mathbf{v}) \\
 &= \frac{\mu\kappa\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}{\hbar\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}} \frac{\sqrt{p_0}(2p_0)^{\frac{n-1}{2}}}{(p^2+p_0^2)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{S^n} \frac{\Phi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(\mathbf{v}).
 \end{aligned}$$

Así obtenemos la ecuación de Schrödinger (2.VIII) en términos de las variables en la esfera

$$\Phi(\mathbf{w}) = \frac{\mu\kappa\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}{2\hbar p_0 \pi^{\frac{1}{2}(n+1)}} \int_{S^n} \frac{\Phi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(\mathbf{v}). \quad (2.XV)$$

Podemos notar que el operador U es una isometría, esto se ve de (2.XII) que

$$\begin{aligned}
 \|\Phi\|_{L^2(S^n)}^2 &= \int_{S^n} |\Phi(\mathbf{w})|^2 d^{n+1}\Omega(\mathbf{w}) \\
 &= \int_{S^n} \frac{1}{p_0} \left(\frac{p^2(\mathbf{w}) + p_0^2}{2p_0} \right)^{n+1} \left| \hat{\psi}(\mathbf{p}(\mathbf{w})) \right|^2 d^{n+1}\Omega(\mathbf{w}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{p^2 + p_0^2}{2p_0^2} \right) \left| \hat{\psi}(\mathbf{p}) \right|^2 d^n \mathbf{p} \\
 &= \frac{1}{2p_0^2} \int_{\mathbb{R}^n} p^2 \left| \hat{\psi}(\mathbf{p}) \right|^2 d^n \mathbf{p} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{\psi}(\mathbf{p}) \right|^2 d^n \mathbf{p}.
 \end{aligned}$$

Pero el teorema del Virial ([30]) nos dice que para las funciones propias del Hamiltoniano del átomo de hidrógeno

$$E \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p^2}{2\mu} |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p},$$

por lo que usando que $p_0^2 = -2\mu E$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^2(S^n)}^2 &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p^2}{2\mu E} |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} \\ &= \|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Así, U es un operador unitario por ser isometría sobre su rango. También notamos que por la identidad de polarización, U preserva el producto interno.

Siguiendo ahora el trabajo de Villegas-Blas en [32] encontraremos los valores propios del átomo de hidrógeno a través del problema de valores propios dado por la ecuación (2.XV) y del operador integral \mathbf{T} dado por

$$\mathbf{T}\Phi(\mathbf{w}) = b_n \int_{S^n} \frac{\Phi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(\mathbf{v}), \quad (2.XVI)$$

con $b_n = \frac{\mu\kappa\Gamma[\frac{1}{2}(n-1)]}{2\hbar\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}$, donde utilizaremos una representación para el grupo de rotaciones $SO(n+1)$.

Para $\mathcal{R} \in SO(n+1)$ definamos $T_{\mathcal{R}} : L^2(S^n) \rightarrow L^2(S^n)$ dado por

$$T_{\mathcal{R}}\varphi(u) = \varphi(\mathcal{R}^{-1}u).$$

Notamos que $\{T_{\mathcal{R}} | \mathcal{R} \in SO(n+1)\}$ es un grupo bajo la composición. Esto se tiene puesto que T_I es el elemento identidad y $(T_{\mathcal{R}})^{-1} = T_{\mathcal{R}^{-1}}$ ya que

$$\begin{aligned} (T_{\mathcal{R}^{-1}}T_{\mathcal{R}}\varphi)(u) &= T_{\mathcal{R}}\varphi(\mathcal{R}u) = \varphi(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}u) = \varphi(u), \\ (T_{\mathcal{R}}T_{\mathcal{R}^{-1}}\varphi)(u) &= T_{\mathcal{R}^{-1}}\varphi(\mathcal{R}^{-1}u) = \varphi(\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}u) = \varphi(u). \end{aligned}$$

Además $T_{\mathcal{R}}T_{\tilde{\mathcal{R}}}\varphi = T_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}\varphi$. Con esto, el mapeo \mathcal{G} que asigna a cada $\mathcal{R} \in SO(n+1)$ el operador $T_{\mathcal{R}}$ da una representación para el grupo $SO(n+1)$ ya que

$$\mathcal{G}(\mathcal{R})\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{R}}) = \mathcal{G}(\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}).$$

También tenemos que el operador \mathbf{T} conmuta con cada $T_{\mathcal{R}}$, esto es

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \circ T_{\mathcal{R}}\varphi)(u) &= \mathbf{T}(T_{\mathcal{R}}\varphi(u)) \\ &= b_n \int_{S^n} \frac{T_{\mathcal{R}}\varphi(v)}{\|v - u\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(v) \\ &= b_n \int_{S^n} \frac{\varphi(\mathcal{R}^{-1}v)}{\|v - u\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(v) \end{aligned}$$

como las rotaciones preservan la norma

$$= b_n \int_{S^n} \frac{\varphi(\mathcal{R}^{-1}v)}{\|\mathcal{R}^{-1}v - \mathcal{R}^{-1}u\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(v)$$

pero $d^{n+1}\Omega(v)$ es invariante bajo rotaciones y si $v' = \mathcal{R}^{-1}v$,

$$\begin{aligned} &= b_n \int_{S^n} \frac{\varphi(v')}{\|v' - \mathcal{R}^{-1}u\|^{n-1}} d^{n+1}\Omega(v') \\ &= (\mathbf{T}\varphi)(\mathcal{R}^{-1}u) \\ &= (T_{\mathcal{R}} \circ \mathbf{T}\varphi)(u). \end{aligned}$$

Ahora, por la sección 2.1, $L^2(S^n)$ se puede ver como

$$L^2(S^n) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,l},$$

donde cada $\mathcal{H}_{n,l}$ es un espacio propio de Δ en S^n .

Lo que se obtiene es que, para cada l , $\mathcal{H}_{n,l}$ da una representación irreducible de $SO(n+1)$ (ver apéndice 2.B). Esto es

- $T_{\mathcal{R}} : \mathcal{H}_{n,l} \longrightarrow \mathcal{H}_{n,l}$, para toda $\mathcal{R} \in SO(n+1)$
- Los únicos espacios $V \subset \mathcal{H}_{n,l}$ tales que $T_{\mathcal{R}} : V \longrightarrow V$, para todo $\mathcal{R} \in SO(n+1)$, son los subespacios $V = \{0\}$ y $V = \mathcal{H}_{n,l}$
- $G_l = \left\{ T_{\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{H}_{n,l}} \text{ tales que } \mathcal{R} \in SO(n+1) \right\}$ es un grupo y $\mathcal{G}_l : SO(n+1) \longrightarrow G_l$ da una representación irreducible de $SO(n+1)$.

Por el Lema de Schur ([29]), como \mathbf{T} conmuta con cada $T_{\mathcal{R}}$, tenemos que $\mathbf{T}|_{\mathcal{H}_{n,l}}$ actúa como un múltiplo de la identidad, es decir; existe d_l tal que

$$\mathbf{T}|_{\mathcal{H}_{n,l}} \varphi = d_l \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_{n,l}, \forall l.$$

Así

$$\mathbf{T} = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \mathbf{T}|_{\mathcal{H}_{n,l}}.$$

Ahora calculamos los d_l considerando la función

$$\psi(u) = ((e_n + ie_{n+1}) \cdot u)^l,$$

y coordenadas esféricas. Si nos restringimos al caso $n = 3$, entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= \text{sen } \lambda \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi & 0 \leq \lambda, \theta \leq \pi \\ v_2 &= \text{sen } \lambda \text{ sen } \theta \text{ cos } \phi & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ v_3 &= \text{sen } \lambda \text{ cos } \theta \\ v_4 &= \text{cos } \lambda, \end{aligned}$$

y además, como la solución no depende de w , tomamos en particular a $w = (0, 0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \langle v - w, v - w \rangle \\ &= 2 - 2v_4 \\ &= 2(1 - \text{cos } \lambda), \end{aligned}$$

así,

$$\psi(v) = [\text{sen } \lambda \text{ cos } \theta + i \text{cos } \lambda]^l.$$

Por tanto, el problema se reduce a calcular lo siguiente

$$d_l (i)^l b_3^{-1} = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{[\text{sen } \lambda \text{ cos } \theta + i \text{cos } \lambda]^l}{2(1 - \text{cos } \lambda)} \text{sen}^2 \lambda \text{ sen } \theta d\phi d\theta d\lambda,$$

qu integrando con respecto a ϕ obtenemos

$$= 2\pi \int_0^\pi \frac{\text{sen}^2 \lambda}{2(1 - \text{cos } \lambda)} \int_0^\pi [\text{sen } \lambda \text{ cos } \theta + i \text{cos } \lambda]^l \text{sen } \theta d\theta d\lambda.$$

Ahora, si integramos con respecto a θ haciendo el cambio de variable $u = \text{sen } \lambda \cos \theta + i \cos \lambda$ se obtiene

$$\begin{aligned} d_l b_3^{-1} &= 2\pi \int_0^\pi \frac{-\text{sen } \lambda}{2(1 - \cos \lambda)} \int_{\text{sen } \lambda + i \cos \lambda}^{-\text{sen } \lambda + i \cos \lambda} u^l du d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{l+1} \int_0^\pi \frac{-\text{sen } \lambda}{2(1 - \cos \lambda)} \left[(ie^{i\lambda})^{l+1} - (ie^{-i\lambda})^{l+1} \right] d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{l+1} \int_0^\pi \frac{-\text{sen } \lambda}{2(1 - \cos \lambda)} [ie^{i(l+1)\lambda} - ie^{-i(l+1)\lambda}] d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{l+1} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \lambda}{(1 - \cos \lambda)} \frac{1}{2i} [ie^{i(l+1)\lambda} - ie^{-i(l+1)\lambda}] d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{l+1} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \lambda \text{sen } (l+1)\lambda}{(1 - \cos \lambda)} d\lambda, \end{aligned}$$

pero se tiene la siguiente expansión para el $\text{sen } (l+1)\lambda$

$$\text{sen } (l+1)\lambda = \text{sen } \lambda \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} 2^{l-2(k-1)} \cos^{l-2(k-1)} \lambda \quad (2.XVII)$$

donde

$$N = \begin{cases} \frac{l+2}{2}, & \text{si } l \text{ es par;} \\ \frac{l+1}{2}, & \text{si } l \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\frac{l+1}{2\pi} d_l b_3^{-1} \\ &= \int_0^\pi \frac{\text{sen}^2 \lambda}{(1 - \cos \lambda)} \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} 2^{l-2(k-1)} \cos^{l-2(k-1)} \lambda d\lambda \\ &= \int_0^\pi (1 + \cos \lambda) \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} 2^{l-2(k-1)} \cos^{l-2(k-1)} \lambda d\lambda \\ &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} 2^{l-2(k-1)} \int_0^\pi [\cos^{l-2(k-1)+1} \lambda + \cos^{l-2(k-1)} \lambda] d\lambda. \end{aligned}$$

Sabemos que $\int_0^\pi \cos^m x = 0$ para m impar, por lo que alguna de las integrales de arriba serán cero, dependiendo del valor de l . De aquí a lo que

resta del cálculo se tomará l par, por lo que $N = \frac{l+2}{2}$, y $l - 2(k-1)$ es par. Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{2\pi} d_l b_3^{-1} &= \sum_{k=1}^{\frac{l+2}{2}} (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} 2^{l-2(k-1)} \int_0^\pi \cos^{l-2(k-1)} \lambda d\lambda \end{aligned}$$

pero $\int_0^\pi \cos^m x = \frac{1}{2^m} \binom{m}{m/2} \pi$ para m par

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\frac{l+2}{2}} (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} 2^{l-2(k-1)} \frac{1}{2^{l-2(k-1)}} \binom{l-2(k-1)}{\frac{l-2(k-1)}{2}} \pi \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\frac{l+2}{2}} (-1)^{k-1} \binom{l+1-k}{k-1} \binom{l-2(k-1)}{\frac{l-2(k-1)}{2}} \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\frac{l+2}{2}} (-1)^{k-1} \frac{(l+1-k)!}{(k-1)! \left[\left[\frac{l-2(k-1)}{2} \right]! \right]^2} \end{aligned}$$

pero la suma alternante de arriba es igual a 1. Entonces los valores propios d_l son de la forma

$$d_l = b_3 \frac{2\pi^2}{l+1} = \frac{\mu\kappa}{\hbar(l+1)}.$$

Si tomamos las ecuaciones (2.XV), (2.XVI) y de lo anterior se tiene

$$p_o \psi(w) = \mathbf{T} \psi(w) = d_l \psi(w) \quad \Rightarrow \quad p_o = d_l$$

para toda $\psi \in \mathcal{H}_{3,l}$ y toda $w \in S^3$. Si sustituimos el valor de p_o tenemos

$$E_l = \frac{-\mu\kappa^2}{2\hbar^2(l+1)^2}$$

los valores propios para el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno.

Se necesita probar que estos son todos los valores propios de \mathbf{T} . Para esto, consideramos a $\psi \in L^2(S^n)$ una función propia de \mathbf{T} , entonces $\mathbf{T}\psi = \lambda\psi$.

Pero $\psi = \sum_{l=0}^{\infty} a_l f_l$, con $f_l \in \mathcal{H}_{n,l}$. Así

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\psi &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l \mathbf{T}f_l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l d_l f_l. \end{aligned}$$

Como $\lambda\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda a_l f_l$, entonces $\lambda a_l = a_l d_l$ para todo l , por lo que para $a_l \neq 0$ se tiene que $\lambda = d_l$. Todo esto implica que existe \tilde{l} tal que $c_{\tilde{l}} \neq 0$ y con esto

$$\psi = a_{\tilde{l}} f_{\tilde{l}} \in \mathcal{H}_{n,\tilde{l}}.$$

Apéndice 2.A. Autoadjuntes del operador de Schrödinger

En la presentación de éste apéndice utilizamos el libro de M. Reed y B. Simon [22]. Con la utilización del teorema de Kato-Rellich garantizamos que el operador de Schrödinger es autoadjunto.

Sea un operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow Y$, decimos que A es densamente definido sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} si $D(A)$ es denso en \mathcal{H} .

Para dos operadores A y B , densamente definidos sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , supongamos que

$$i) D(A) \subset D(B)$$

$$ii) \text{ para algún } a, b \in \mathbb{R} \text{ y para toda } \varphi \in D(A)$$

$$\|B\varphi\| \leq a \|A\varphi\| + b \|\varphi\|, \quad (2.XVIII)$$

entonces se dice que B es A -acotado. Al ínfimo de tales a se llama la *cota relativa* de B con respecto a A .

Teorema 2.5 (Kato-Rellich). *Supongamos que A es un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , B un operador simétrico y A -acotado con cota relativa $a < 1$. Entonces $A + B$ es un operador autoadjunto sobre $D(A)$.*

Ahora, sea V una función a valores reales. Para asegurarnos que el operador de Schrödinger

$$H = -\Delta + V,$$

donde V es el potencial, sea un operador autoadjunto necesitamos que

$$(1) \Delta \text{ sea un operador autoadjunto,}$$

$$(2) V \text{ sea simétrico y } \Delta\text{-acotado con cota relativa menor que } 1.$$

Teniendo esto se podrá aplicar el teorema anterior.

Consideremos que $\Delta : D(\Delta) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ con $D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$, donde $H^2(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de Sobolev de orden 2, es decir, $f \in H^2(\mathbb{R}^3)$ si y solo si f y $\|k\|^2 \hat{f}$ están en $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Para el primer requisito utilizaremos el criterio básico de autoadjuntez ([21], Teorema VIII.3). Por tanto necesitamos verificar que Δ sea un operador simétrico, lo cual se ve con

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, g \rangle &= - \int \overline{\|k\|^2 \hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk \\ &= - \int \overline{\hat{f}(k)} \|k\|^2 \hat{g}(k) dk = \langle f, \Delta g \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, probaremos que $\text{Ran}(\Delta \pm i) = L^2(\mathbb{R}^3)$. Esto es, dado $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ queremos probar que existe una función $\varphi \in D(\Delta \pm i) = D(\Delta)$ tal que $(\Delta \pm i)\varphi = \psi$. Así pues, sea $\hat{\varphi}_\pm := \frac{\hat{\psi}}{|k|^2 \pm i}$, entonces tanto φ_\pm como $|k|^2 \varphi_\pm$ deben estar en $L^2(\mathbb{R}^3)$, puesto que $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\varphi}_\pm|^2 dk &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\psi}|^2}{\| |k|^2 \pm i \|^2} dk = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\psi}|^2}{|k|^4 + 1} dk \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}|^2 dk < \infty, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \| |k|^2 \hat{\varphi}_\pm \|^2 dk &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|k|^4 |\hat{\psi}|^2}{|k|^4 + 1} dk \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}|^2 dk < \infty. \end{aligned}$$

Definimos la función $\varphi_\pm \in L^2(\mathbb{R}^3)$ como la transformada de Fourier inversa de $\hat{\varphi}_\pm$. Entonces φ_\pm está en el dominio de $\Delta \pm iI$ y se cumple $(\Delta \pm iI)\varphi_\pm = \psi$.

Por tanto, el operador Δ es autoadjunto.

Consideremos a $D(V) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid V(x)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ el dominio del potencial V . Como el potencial V es a valores reales, el operador multiplicación por V es simétrico en cualquier dominio, en particular; en el dominio de V . Esto se ve por

$$\begin{aligned} \langle V\varphi, \psi \rangle &= \int \overline{V(k)\varphi(k)} \psi(k) dk \\ &= \int \overline{\varphi(k)} V(k) \psi(k) dk \\ &= \langle \varphi, V\psi \rangle, \end{aligned} \tag{2.XIX}$$

con $\varphi, \psi \in D(V)$.

Para mostrar que V es Δ -acotado consideremos que el potencial V es de la forma $V = V_1 + V_2$ donde $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Aseveramos que dada $\varphi \in D(\Delta)$ tenemos que φ es acotada. Para ver esto notamos que $(1 + |k|^2)\varphi$ y $(1 + |k|^2)^{-1}$ están en $L^2(\mathbb{R}^3)$, por lo que podemos ver a φ de la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixp} \widehat{\varphi}(p) dp.$$

Así

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixp} \widehat{\varphi}(p) dp \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int |e^{ixp} \widehat{\varphi}(p)| dp, \end{aligned}$$

como $|e^{ixp}| \leq 1$, entonces

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int |\widehat{\varphi}(p)| dp.$$

Pero necesitamos que $|\widehat{\varphi}(p)|$ tenga una cota superior, entonces calculamos

$$\left(\int |\widehat{\varphi}(p)| dp \right)^2 = \left(\int \frac{1}{(|p|^2 + \alpha^2)} (|p|^2 + \alpha^2) |\widehat{\varphi}(p)| dp \right)^2$$

por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} &\leq \int \frac{dp}{(|p|^2 + \alpha^2)^2} \int (|p|^2 + \alpha^2)^2 |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\ &= \frac{\pi^2}{\alpha} \int (|p|^2 + \alpha^2) |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\ &= \frac{\pi^2}{\alpha} \| (|p|^2 + \alpha^2) \widehat{\varphi}(p) \|^2 \\ &= \frac{\pi^2}{\alpha} \| \widehat{\Delta\varphi}(p) + \alpha^2 \widehat{\varphi}(p) \|^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int |\widehat{\varphi}(p)| dp \leq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \| (\Delta\varphi(p) + \alpha^2\varphi(p)) \|.$$

Por lo tanto φ está acotada por

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \|(\Delta\varphi(p) + \alpha^2\varphi(p))\|. \quad (2.xx)$$

Ahora, para el potencial V , calculamos

$$\begin{aligned} \int |V(k)\varphi(k)|^2 dx &= \int |V_1\varphi + V_2\varphi|^2 dx \\ &\leq 2 \left(\int |V_1\varphi|^2 dx + \int |V_2\varphi|^2 dx \right) \\ &\leq 2 (\|V_1\|_\infty^2 \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_\infty^2 \|V_2\|_2^2) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.xxi)$$

Con esto notamos que $D(\Delta) \subset D(V)$. Sólo nos falta mostrar que

$$\|V\varphi\| \leq a \|\Delta\varphi\| + b \|\varphi\|,$$

para algún $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ y para toda $\varphi \in D(\Delta)$. Pero por las ecuaciones (2.xxi) y (2.xx) se tiene que

$$\|V\varphi\|_2 \leq \|V_1\|_\infty \|\varphi\|_2 + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \|\Delta\varphi\|_2 \|V_2\|_2 + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \|\alpha^2\varphi\|_2 \|V_2\|_2.$$

Nos interesa el coeficiente de $\|\Delta\varphi\|_2$ y este es

$$a := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \|V_2\|_2,$$

que será menor que uno para un valor de α suficientemente grande.

Por lo anterior y por el teorema de Kato-Rellich se sigue que el operador de Schrödinger es autoadjunto en el dominio de Δ .

Como un ejemplo, podemos considerar el operador del átomo de hidrógeno y verifiquemos que es autoadjunto. Pero esto se sigue de inmediato cuando nos damos cuenta que el potencial $V = 1/r$ lo podemos ver como la suma $q_1 + q_2$, donde $q_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $q_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Para llegar a esto, primero consideramos la función radial

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} & r < 1 \\ \frac{1}{r^2} & r \geq 1 \end{cases}$$

que está en L^2 . Esto se ve, si se considera únicamente la parte radial, con

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr &= \int_0^1 |f(r)|^2 r^2 dr + \int_1^\infty |f(r)|^2 r^2 dr \\ &= \int_0^1 \frac{1}{r^2} r^2 dr + \int_1^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr \\ &< \infty.\end{aligned}\tag{2.XXII}$$

Entonces notamos que el potencial se puede ver como

$$\frac{1}{r} = \underbrace{\frac{1}{r} - f(r)}_{q_1} + \underbrace{f(r)}_{q_2}$$

donde es claro que $q_1 \in L^\infty$.

Apéndice 2.B. Irreducibilidad de $SO(n+1)$

El contenido de este apéndice se ha tomado de [13], y es la prueba del siguiente teorema

Teorema 2.6. (i) *Los espacios propios del Laplaciano Δ_{S^n} , sobre la esfera S^n , son de la forma*

$$\mathcal{H}_{n,k} = \text{span} \{(\alpha \cdot x)^k \mid \alpha \in \mathcal{Q}^n\},$$

donde \mathcal{Q}^n es la cuádrlica nula.

(ii) *Cada representación del espacio propio es irreducible sobre $SO(n)$*

Demostración. Sea P_k el espacio de polinomios homogéneos de grado k sobre \mathbb{R}^{n+1} , y sea $H_k \subset P_k$ el subespacio de polinomios armónicos.

Consideremos la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $P := \bigoplus_{k=0}^{\infty} P_k$ dada por

$$\langle p, q \rangle = \left[p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right) q \right] (0). \quad (2.XXIII)$$

Este es un producto interno sobre P . Además podemos observar que si definimos

$$\partial(p) = p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right), \quad (2.XXIV)$$

entonces tenemos que para $p, q, r \in P$

$$\begin{aligned} \langle p, qr \rangle &= \langle qr, p \rangle = [\partial(qr) p] (0) \\ &= [\partial(r)\partial(q) p] (0) \\ &= \langle r, \partial(q) p \rangle = \langle \partial(q) p, r \rangle. \end{aligned}$$

Esto es, que los operadores multiplicación por q y $\partial(q)$ son adjuntos.

Ahora, para $p \in P_{k-2}$, $q = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 \in P_2$ se tiene

$$\langle qp, h \rangle = \langle p, \partial(q)h \rangle = 0,$$

cuando $h \in H_k$, ya que $\partial(q)$ es el Laplaciano sobre \mathbb{R}^{n+1} . Entonces H_k es el complemento ortogonal de qP_{k-2} en P_k . Así,

$$P_k = H_k \oplus qP_{k-2}. \quad (2.XXV)$$

Si iteramos esta relación obtenemos

$$P_k = H_k \oplus |x|^2 H_{k-2} \oplus |x|^4 H_{k-4} \oplus \cdots \oplus |x|^{2m} H_{k-2m}, \quad (2.XXVI)$$

donde m es la parte entera de $k/2$.

Por otro lado, si α está en la cuádrlica nula \mathcal{Q}^n , entonces el polinomio $h_\alpha(x) = (\alpha \cdot x)^k$ está en H_k . Sea

$$H_k^0 = \text{span} \{(\alpha \cdot x)^k | \alpha \in \mathcal{Q}^n\}.$$

Por lo anterior, se tiene que $H_k^0 \subset H_k$. Ahora para probar que los dos conjuntos son iguales, es suficiente suponer que existe una función $h \in H_k$ que es ortogonal a H_k^0 , y luego probar que dicha función es idénticamente cero. Observemos que para $p \in P_k$

$$\partial(p)(\alpha \cdot x)^m = m(m-1) \cdots (m-k+1)p(\alpha)(\alpha \cdot x)^{m-k},$$

con lo cual si en particular $\alpha \in \mathcal{Q}^3$ entonces

$$\partial(h)(\alpha \cdot x)^k = k! h(\alpha) = 0,$$

ya que no depende de x , en particular se vale para $x = 0$. Así, si $\alpha \in \mathcal{Q}^3$ entonces $h(\alpha) = 0$. En otras palabras, h se anula idénticamente en la variedad \mathcal{Q}^n . Si consideramos a I como el ideal del anillo de polinomios a valores reales dado por polinomios de la forma $(x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2)p(x)$, con $p \in P_{k-2}$, notamos que la variedad de I es precisamente la cuádrlica nula \mathcal{Q}^3 . Por el teorema de Hilbert-Nullstellensatz, ver por ejemplo [23], tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $h^m \in I$.

Como el ideal I es primo (para $n \geq 3$), se sigue que $h \in I$ o $h^{m-1} \in I$. Así sucesivamente se obtiene que h esta en el ideal y tiene la forma $(x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2)p(x)$, con $p \in P_{k-2}$ algún polinomio. Pero por la ecuación (2.XXV), se obtiene que h debe ser idénticamente cero. Para el caso de $n = 2$, podemos ver un polinomio armónico real $u(x_1, x_2)$ como la parte real de una función analítica.

$$f(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + v(x_1, x_2).$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, v y así f son polinomios armónicos, entonces u debe ser combinación de potencias de $(x_1 \pm ix_2)^k$. Por tanto

$$H_k = \text{span} \{(\alpha \cdot x)^k | \alpha \in \mathcal{Q}^n\}.$$

Ahora consideremos los espacios

$$\mathcal{H}_{n,k} = H_k \Big|_{S^n} = \text{span} \{ (\alpha \cdot x)^k \mid \alpha \in \mathcal{Q}^n, x \in S^3 \}.$$

Sea $\{s_{k,m}\}$ ($1 \leq m \leq d(k)$) una base ortonormal de $\mathcal{H}_{n,k}$, donde $d(k)$ es la degeneración del espacio propio del Laplaciano en la esfera correspondiente al valor propio $-k(k+n-1)$.

Sea f cualquier función propia no trivial del Laplaciano Δ_{S^n} , es decir

$$\Delta_{S^n} f = cf, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Podemos ver a f como la siguiente expansion

$$f \sim \sum_{k,m} a_{k,m} s_{k,m}, \quad a_{k,m} = \langle f, s_{k,m} \rangle,$$

entonces existen al menos k_0, m_0 tales que $a_{k_0, m_0} \neq 0$. Así,

$$\begin{aligned} c \sum_{k,m} a_{k,m} s_{k,m} \sim cf = \Delta_{S^n} f &= \sum_{k,m} \langle \Delta_{S^n} f, s_{k,m} \rangle s_{k,m} \\ &= \sum_{k,m} \langle f, \Delta_{S^n} s_{k,m} \rangle s_{k,m} \\ &= \sum_{k,m} \langle f, -k(k+n-1) s_{k,m} \rangle s_{k,m} \\ &= \sum_{k,m} -k(k+n-1) a_{k,m} s_{k,m}. \end{aligned}$$

Si tomamos el producto interno con el elemento s_{k_0, m_0} se obtiene que el valor propio de f es $c = -k_0(k_0+n-1)$ con \mathcal{H}_{n, k_0} su correspondiente espacio propio.

Ahora mostraremos el punto (ii). Para algún $\mathcal{H}_{n,l}$, supongamos que existe un subespacio no vacío $V' \subset \mathcal{H}_{n,l}$, invariante bajo la acción de T_R para todo $R \in SO(n+1)$, donde

$$T_R \varphi(x) := \varphi(R^{-1}x).$$

Así, $T_R : V' \longrightarrow V'$ para toda $R \in SO(n+1)$.

Sea V'' el complemento ortogonal de V' en $\mathcal{H}_{n,l}$, entonces V'' es un subespacio invariante también lo cual se ve tomando $\varphi_1 \in V'$, $\varphi_2 \in V''$ y calculando

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T_R \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{S^n} \varphi_1(R^{-1}x) \varphi_2(x) dS(x) \\ &= \int_{S^n} \varphi_1(y) \varphi_2(Ry) dS(y) = \langle \varphi_1, T_{R^{-1}} \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

para toda $R \in SO(n+1)$.

Con esto $\mathcal{H}_{n,l} = V' \oplus V''$. Como V' , V'' son subespacios no nulos, existen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_{n,l}$ tales que

$$\varphi_1 \in V', \quad \varphi_2 \in V'' \quad y \quad \varphi_1 \neq 0, \quad \varphi_2 \neq 0,$$

entonces existe $x_1 \in S^n$ tal que $\varphi_1(x_1) = a \neq 0$. Tomamos aquella rotación $R_1 \in SO(n+1)$ tal que $\vec{n} = (0, \dots, 0, 1) = R_1 x_1$ por lo que podemos definir

$$\psi_1 = \frac{1}{a} T_{R_1} \varphi_1 \in V' \quad \text{con} \quad \psi_1(\vec{n}) = \frac{1}{a} \varphi_1(R_1^{-1} \vec{n}) = \frac{1}{a} \varphi_1(x_1) = 1.$$

Se tiene esto mismo para V'' . Así, existen funciones $\psi_1 \in V'$, $\psi_2 \in V''$ tales que $\psi_1(\vec{n}) = \psi_2(\vec{n}) = 1$.

Ahora tomamos un promedio sobre $SO(n)$, obteniendo

$$\tilde{\psi}_1(x) = \frac{1}{\mu_H(SO(n))} \int_{\tilde{O} \in SO(n+1)} \psi_1(\tilde{O}^{-1}x) d\mu_H(\tilde{O}) \in V',$$

donde $d\mu_H$ es la medida de Haar sobre $SO(n)$, y $\tilde{O} \in SO(n+1)$ tiene la forma

$$\tilde{O} = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\mathcal{O} \in SO(n)} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \end{array} & 1 \end{array} \right) \in SO(n+1).$$

Entonces tenemos que $\tilde{\psi}_1$ es invariante bajo la acción de $SO(n)$. Así también existe una función $\tilde{\psi}_2 \in V''$ con la misma propiedad. Por tanto tenemos

$$\tilde{\psi}_1 \in V', \quad \tilde{\psi}_2 \in V'' \quad \text{con} \quad \tilde{\psi}_1(\vec{n}) = \tilde{\psi}_2(\vec{n}) = 1.$$

Nótese que la invariancia de estas funciones bajo $SO(n)$ quiere decir que dependen solo de la distancia θ al polo norte \vec{n} . Así para dichas funciones el Laplaciano Δ_{S^n} , en coordenadas esféricas, tiene la forma

$$\frac{d^2}{d\theta^2} + (n-2) \cot(\theta) \frac{d}{d\theta},$$

por lo que se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \phi + (n-2) \cot(\theta) \frac{d}{d\theta} \phi = -k(k+n-1)\phi, \quad (2.XXVII)$$

que satisfacen los promedios $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ por ser funciones propias del Laplaciano, con las condiciones iniciales iguales

$$\tilde{\psi}_1(0) = \tilde{\psi}_2(0) = 1.$$

Realizando el cambio de variable (localmente) por $\text{sen}(\theta)$ podemos proponer una solución en series de potencias

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \text{sen}^m(\theta)$$

para θ suficientemente pequeño. Por substitución directa a la ecuación (2.XXVII) se obtienen las fórmulas

$$a_1 = 0, \quad (m+2)(m+n)a_{m+2} = [m(m+n-1) - k(k+n-1)] a_m.$$

Lo que nos muestra que solo hay que determinar a_0 por lo que solo se necesita de una condición inicial, así ϕ queda determinada salvo un factor constante. Entonces $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ coinciden. □

Capítulo 3

Transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$

En este capítulo se presenta la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$, el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables sobre la esfera unitaria S^3 inmersa en \mathbb{R}^4 con respecto a la medida de usual de superficie normalizada, sobre cierto subespacio cerrado del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$.

Esta transformada se obtiene a través de una serie de potencias de una función ϕ_{S^3} que es la función generadora de una transformación canónica.

El contenido del capítulo se ha tomado principalmente de los artículos de C. Villegas-Blas [33] y [34], del resto, haremos referencia en cada sección.

3.1. El espacio de funciones holomorfas \mathcal{F}_4

Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ el espacio de Bargmann como en la sección 1.2 del capítulo uno y consideremos el espacio $L^2(S^3)$ con el producto interno

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{S^3} = \int_{S^3} \overline{\psi_1(x)} \psi_2(x) dS_3,$$

donde dS_3 es la medida de superficie normalizada sobre S^3 .

Siguiendo a Villegas-Blas [33] definimos el subespacio $\mathcal{F}_4 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ como el núcleo del operador

$$\mathcal{L} \equiv z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} - z_4 \frac{\partial}{\partial z_4}. \quad (3.1)$$

Este vector es la cuantización de una restricción, al nivel de la mecánica clásica, de la regularización de Kustaanheimo-Stiefel del problema de Kepler [34].

El dominio de \mathcal{L} se define por $D(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} \mid \mathcal{L}f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}\}$ y el núcleo \mathcal{F}_4 por $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} \mid \mathcal{L}f = 0\}$.

Proposición 3.1. *\mathcal{L} es un operador cerrado. Por tanto, \mathcal{F}_4 es un espacio de Hilbert.*

En realidad, por como se define \mathcal{L} , esta proposición es una consecuencia de la siguiente proposición que aparece en [2] y cuya demostración también seguimos.

Proposición 3.2. *Sean A_k y B_k , $k = 1, \dots, 4$, los operadores multiplicación y diferenciación por z_k , $\frac{\partial}{\partial z_k}$, respectivamente, sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$. Entonces se cumple*

- 1) A_k y B_k son operadores cerrados.
- 2) Los dominios $D(A_k)$ y $D(B_k)$ coinciden.
- 3) $A_k^* = B_k$ y $B_k^* = A_k$

Demostración. Tomaremos la siguiente notación para $m \in \mathbb{N}^4$

$$[m_k^\pm] := (m_1, \dots, m_k \pm 1, \dots, m_4).$$

- 1) Consideramos una sucesión $\{f_j\} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ tal que converge a g en norma, entonces consideramos la sucesión $\{z_k f_j\}$ tal que converge a alguna función h . Entonces para cada $z \in \mathbb{C}^4$, como convergencia en norma implica convergencia puntual en todas partes en el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$, entonces

$$\begin{aligned} h(z) &= \lim_{j \rightarrow \infty} z_k f_j(z) \\ &= z_k \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z) = z_k g(z) \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}. \end{aligned}$$

Análogamente construimos la sucesión $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_k} f_j \right\}$ tal que converge a alguna función h . Entonces para cada $z \in \mathbb{C}^4$

$$\begin{aligned} h(z) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial z_k} f_j(z) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_k} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z) = \frac{\partial}{\partial z_k} g(z) \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} \end{aligned}$$

ya que $\left| \frac{\partial}{\partial z_k} f_j \right|^2 \leq cte_{k,z} \|f_j\|^2$ (teorema 5 del capítulo 1).

2) Sea $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \alpha_{[m]} z^{[m]} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$, sabemos que $\|f\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} [m!] |\alpha_{[m]}|^2$.
Entonces

$$\|z_k f\|^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}^4} |\alpha_{[l]}|^2 (l_k + 1) [l!]$$

y

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right\|^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}^4} |\alpha_{[l]}|^2 l_k [l!].$$

Por tanto se tiene

$$\|z_k f\|^2 = \left\| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right\|^2 + \|f\|^2.$$

Así que los dos lados de ésta ecuación pueden ser infinito o finito pero iguales, lo que nos muestra que los dominios coinciden.

3) Para algún k fijo, sean las funciones $g \in D(A_k^*)$ donde

$$D(A_k^*) = \{g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} | \exists! h \text{ tal que } \langle A_k f, g \rangle = \langle f, h \rangle \quad \forall f \in D(A_k)\}.$$

Así, para

$$g = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \beta_{[m]} z^{[m]}, \quad \text{existe } h = A_k^* g = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \gamma_{[m]} z^{[m]}$$

tal que $\langle f, h \rangle = \langle A_k f, g \rangle$ para toda $f \in D(A_k)$.

Además sea $f = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \delta_{[m]} z^{[m]}$. Notamos que

$$\begin{aligned} \langle f, h \rangle &= \langle f, A_k^* g \rangle \\ &= \langle A_k f, g \rangle = \langle z_k f, g \rangle, \end{aligned}$$

pero por un lado

$$\langle f, h \rangle = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} [m!] \gamma_{[m]} \bar{\delta}_{[m]},$$

mientras que

$$\begin{aligned} \langle z_k f, g \rangle &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \delta_{[m]} z^{[m]_k^+}, \sum_{l \in \mathbb{N}^4} \beta_{[l]} z^{[l]} \right\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^4} [m!] (m_k + 1) \bar{\delta}_{[m]} \beta_{[m]_k^+}, \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^4} [m!] \gamma_{[m]} \bar{\delta}_{[m]} = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} [m!] (m_k + 1) \bar{\delta}_{[m]} \beta_{[m]_k^+}.$$

En particular, se puede tomar $f = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} z^{[m]}$, entonces podemos cancelar las $\bar{\delta}_{[m]}$ obteniendo que $\gamma_{[m]} = (m_k + 1) \beta_{[m]_k^+}$.

Ahora calculamos $B_k g$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} g &= \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \beta_{[m]} \frac{\partial}{\partial z_k} z^{[m]} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \beta_{[m]} m_k z^{[m]_k^-} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \beta_{[m]_k^+} (m_k + 1) z^{[m]} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \gamma_{[m]} z^{[m]} = h. \end{aligned}$$

Por tanto $A_k^* g = B_k g$, es decir $A_k^* \subset B_k$.

Ahora, considerando las funciones

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \alpha_{[m]} z^{[m]} \in D(A_k), \quad g = \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \beta_{[m]} z^{[m]} \in D(B_k),$$

probaremos que $g \in D(A_k^*)$. Pero de lo hecho anteriormente tenemos

$$\langle z_k f, g \rangle = \left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k} \right\rangle.$$

es decir, que existe $h := \frac{\partial}{\partial z_k} g$ tal que $\langle A_k f, g \rangle = \langle f, h \rangle$ para toda $f \in D(A_k)$.

Entonces $g \in D(A_k^*)$ y así tenemos la otra contención. □

Por el capítulo uno tenemos que la base ortonormal para $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ es $\left\{ \frac{z^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} \right\}_{m \in \mathbb{N}^4}$. Para el espacio \mathcal{F}_4 la base ortonormal esta formada por los elementos de la base para $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ con la restricción de que $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$.

Definición 3.3. Para $z \in \mathbb{C}^4$ y $x \in S^3$, definamos

$$A_{S^3}(z, x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1},$$

con $c_m = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}$ y donde ρ es el mapeo de \mathbb{C}^4 a la cuádrlica nula \mathcal{Q}^3 dado por

$$\rho(z) = (iz_1z_3 - iz_2z_4, z_1z_3 + z_2z_4, -iz_1z_4 - iz_2z_3, z_1z_4 - z_2z_3),$$

el producto interno en \mathbb{C}^4 se define por

$$w \cdot z = \bar{w}_1 z_1 + \cdots + \bar{w}_4 z_4, \quad w, z \in \mathbb{C}^4.$$

Observamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k-1)!} \eta^{k-1}$ es una función analítica, en la variable compleja η , sobre todo el plano complejo. Además

$$|\rho(z) \cdot x| \leq |\rho(z)| |x| \leq |\rho(z)|.$$

Por lo que $A_{S^3}(z, x)$ está bien definida.

La función A_{S^3} aparece en [33] como núcleo integral de la transformada de Bargmann de $L^2(S^3)$ a \mathcal{F}_4 . Esta función se obtiene viendo a dicha transformada como un cambio de base entre los armónicos esféricos de S^3 y una base para \mathcal{F}_4 determinada a partir del álgebra de Lie de las simetrías del átomo de hidrógeno con energía negativa ($so(4) \simeq su(2) \otimes su(2)$). Así pues, esta transformada de Bargmann resulta unitaria casi por definición.

En el enfoque de esta tesis, la transformada de Bargmann se definirá como un operador integral con el núcleo integral A_{S^3} y se probará su unitariedad explícitamente. La importancia de este enfoque es que se puede generalizar para la esfera S^5 mientras que el enfoque dado en [33] es mucho más complicado de generalizar en S^5 al ver la transformada como cambio de base.

Con el fin de introducir la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$ tenemos el siguiente

Lema 3.4. Para z fijo, $A_{S^3}(z, \cdot) \in L^2(S^3)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} & \int_{S^3} A_{S^3}(z, x) \overline{A_{S^3}(w, x)} dS_3 \\ &= \int_{S^3} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\overline{\rho(w)} \cdot x)^{k-1} dS_3(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{S^3} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} (\overline{\rho(w)} \cdot x)^{k-1} dS_3(x). \end{aligned}$$

Pero

$$\int_{S^3} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} (\overline{\rho(w)} \cdot x)^{k-1} dS_3(x) = \frac{\sqrt{k}}{k! 2^{k-1}} (\rho(w) \cdot \rho(z))^{k-1},$$

ver [33]. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{S^3} A_{S^3}(z, x) \overline{A_{S^3}(w, x)} dS_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\sqrt{k}}{k! 2^{k-1}} (\rho(w) \cdot \rho(z))^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k-1)!]^2} [(\bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2) (\bar{w}_3 z_3 + \bar{w}_4 z_4)]^{k-1} \\ &=: Q(z, w). \end{aligned} \quad (3.11)$$

□

Observamos que para w fija, $Q(\cdot, w)$ es una función analítica. Lo que aseguramos ahora es que, en analogía con el capítulo uno, $Q(z, w)$ es el núcleo reproductor del espacio \mathcal{F}_4 . Esto se ve comprobando que

$$\varphi(z) = \left\langle \overline{Q(z, \cdot)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{F}_4$. Basta mostrar esto para un elemento base por lo que consideramos, para algún $n \in \mathbb{N}$, a φ como el monomio

$$\varphi(z) = z_1^{\frac{n-1}{2}+a_1} z_2^{\frac{n-1}{2}-a_1} z_3^{\frac{n-1}{2}+a_2} z_4^{\frac{n-1}{2}-a_2}$$

de grado $2(n-1)$, con $a_1, a_2 = -(n-1), -(n-2), \dots, (n-1)$.

Entonces

$$\begin{aligned} &\left\langle \overline{Q(z, \cdot)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k-1)!]^2} (w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_2)^{k-1} (w_3 \bar{z}_3 + w_4 \bar{z}_4)^{k-1}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k-1)!]^2} \left\langle (w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_2)^{k-1} (w_3 \bar{z}_3 + w_4 \bar{z}_4)^{k-1}, \right. \\ &\quad \left. w_1^{\frac{n-1}{2}+a_1} w_2^{\frac{n-1}{2}-a_1} w_3^{\frac{n-1}{2}+a_2} w_4^{\frac{n-1}{2}-a_2} \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \end{aligned}$$

por la ortogonalidad de los monomios de diferente grado

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{[(n-1)!]^2} \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (w_1 \bar{z}_1)^{n-1-k} (w_2 \bar{z}_2)^k \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \right. \\
 &\quad \left. (w_3 \bar{z}_3)^{n-1-l} (w_4 \bar{z}_4)^l, w_1^{\frac{n-1}{2}+a_1} w_2^{\frac{n-1}{2}-a_1} w_3^{\frac{n-1}{2}+a_2} w_4^{\frac{n-1}{2}-a_2} \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \\
 &= \frac{1}{[(n-1)!]^2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \\
 &\quad \left\langle (w_1 \bar{z}_1)^{n-1-k} (w_2 \bar{z}_2)^k (w_3 \bar{z}_3)^{n-1-l} (w_4 \bar{z}_4)^l, w_1^{\frac{n-1}{2}+a_1} w_2^{\frac{n-1}{2}-a_1} w_3^{\frac{n-1}{2}+a_2} w_4^{\frac{n-1}{2}-a_2} \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}.
 \end{aligned}$$

Nuevamente por la ortogonalidad de los monomios, para que exista contribución se necesita que se cumpla

$$\begin{aligned}
 n-1-k &= \frac{n-1}{2} + a_1 & n-1-l &= \frac{n-1}{2} + a_2 \\
 k &= \frac{n-1}{2} - a_1 & l &= \frac{n-1}{2} - a_2.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \overline{Q(z, \cdot)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \\
 &= \frac{1}{[(n-1)!]^2} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{l} \left\langle (w_1 \bar{z}_1)^{\frac{n-1}{2}+a_1} (w_2 \bar{z}_2)^{\frac{n-1}{2}-a_1} (w_3 \bar{z}_3)^{\frac{n-1}{2}+a_2} \right. \\
 &\quad \left. (w_4 \bar{z}_4)^{\frac{n-1}{2}-a_2}, w_1^{\frac{n-1}{2}+a_1} w_2^{\frac{n-1}{2}-a_1} w_3^{\frac{n-1}{2}+a_2} w_4^{\frac{n-1}{2}-a_2} \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \\
 &= \frac{\left(\frac{n-1}{2} + a_1\right)! \left(\frac{n-1}{2} - a_1\right)! \left(\frac{n-1}{2} + a_2\right)! \left(\frac{n-1}{2} - a_2\right)!}{\left(\frac{n-1}{2} + a_1\right)! \left(\frac{n-1}{2} - a_1\right)! \left(\frac{n-1}{2} + a_2\right)! \left(\frac{n-1}{2} - a_2\right)!} \\
 &\quad z_1^{\frac{n-1}{2}+a_1} z_2^{\frac{n-1}{2}-a_1} z_3^{\frac{n-1}{2}+a_2} z_4^{\frac{n-1}{2}-a_2} \\
 &= \varphi(z).
 \end{aligned}$$

Así, $Q(z, w)$ es el núcleo reproductor del espacio \mathcal{F}_4 .

El núcleo integral A_{S^3} es una serie de potencias en $(\rho(z) \cdot x)$ donde la función $\rho(z)$ se puede ver como una función generadora de una transformación

canónica del espacio cotangente de $S^3 - \{0\}$ y una reducción adecuada de \mathbb{C}^4 , ver [33] para detalles.

Así pues, la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$ puede verse como la cuantización de dicha transformación canónica. En este capítulo se incluye un apéndice sobre funciones generadoras y transformaciones canónicas.

3.2. La transformada de Bargmann \mathcal{B}_{S^3}

Definición 3.5. La transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$ esta dada por

$$\mathcal{B}_{S^3}\psi(z) = \int_{x \in S^3} A_{S^3}(z, x)\psi(x)dS_3(x), \quad \psi \in L^2(S^3).$$

Este operador esta bien definido puesto que el núcleo $A_{S^3}(z, \cdot)$ y ψ están en $L^2(S^3)$.

Proposición 3.6. Para $\psi \in L^2(S^3)$.

i) $\mathcal{B}_{S^3}\psi \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$.

ii) \mathcal{B}_{S^3} es una isometría.

Demostración. Primero se probará que $\mathcal{B}_{S^3}\psi$ es analítica, luego al mostrar que es cuadrado integrable, con respecto a la medida Gausseana, se obtiene que la transformada \mathcal{B}_{S^3} es una isometría.

Sea $z \in \mathbb{C}^4$ fijo. Mostraremos que $\frac{\partial}{\partial z_k}\mathcal{B}_{S^3}\psi(z)$ existe para $k = 1, \dots, 4$. Dado k sea $h_k := (0, \dots, h, \dots, 0) \in \mathbb{C}^4$ con $h \in \mathbb{C}$ y $|h| < \delta$, para algún número positivo δ . Así, calculamos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [\mathcal{B}_{S^3}\psi(z + h_k) - \mathcal{B}_{S^3}\psi(z)] \\ &= \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \left[\frac{(\rho(z + h_k) \cdot w)^{l-1} - (\rho(z) \cdot w)^{l-1}}{h} \right] \psi(w) dS_3(w). \end{aligned}$$

El teorema de Convergencia Dominada nos garantiza que el límite, cuando $h \rightarrow 0$ de la expresión anterior, existe. Por tanto necesitamos probar que la

sucesión de funciones

$$f_h(w) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \left[\frac{(\rho(z + h_k) \cdot w)^{l-1} - (\rho(z) \cdot w)^{l-1}}{h} \right]$$

es uniformemente acotada por una constante. Para esto, primero consideramos la función

$$g_l(z) = (\rho(z) \cdot w)^{l-1}$$

y por la fórmula integral de Cauchy

$$g_l(z + h_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\rho(\eta) \cdot w)^{l-1}}{\eta - (z + h_k)} d\eta,$$

$$g_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\rho(\eta) \cdot w)^{l-1}}{\eta - z} d\eta,$$

donde $\gamma = \{\eta = (z_1, \dots, r e^{i2\pi\theta}, \dots, z_d) | 0 \leq \theta \leq 1\}$ y $\delta < r$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [g_l(z + h_k) - g_l(z)] &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_{\gamma} (\rho(\eta) \cdot w)^{l-1} \left[\frac{1}{\eta - (z + h_k)} - \frac{1}{\eta - z} \right] d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\rho(\eta) \cdot w)^{l-1}}{(\eta - (z + h_k))(\eta - z)} d\eta, \end{aligned}$$

que en valor absoluto

$$\frac{1}{h} |g_l(z + h_k) - g_l(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|(\rho(\eta) \cdot w)^{l-1}|}{|\eta - (z + h_k)| |\eta - z|} d|\eta|$$

pero $|\eta - z| = r$ y $|\eta - (z + h_k)| \geq (r - \delta)$, entonces

$$\frac{1}{h} |g_l(z + h_k) - g_l(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(r - \delta)} \oint_{\gamma} |(\rho(\eta) \cdot w)^{l-1}| d|\eta|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |f_h(w)| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} c_l \left[\frac{(\rho(z + h_k) \cdot w)^{l-1} - (\rho(z) \cdot w)^{l-1}}{h} \right] \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} c_l \left[\frac{1}{h} g_l(z + h_k) - g_l(z) \right] \right| \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{2\pi r(r - \delta)} \oint_{\gamma} |(\rho(\eta) \cdot w)^{l-1}| d|\eta| \end{aligned}$$

aplicando desigualdad de Schwartz

$$\begin{aligned} |f_h(w)| &\leq \frac{1}{r(r-\delta)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{2\pi} \oint_{\gamma} |\rho(\eta)|^{l-1} d|\eta| \\ &\leq \frac{1}{r(r-\delta)} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \max \{ |\rho(\eta)| : \eta \in \gamma \}^{l-1}, \quad \forall h > 0. \end{aligned}$$

Con esto, el Teorema de Convergencia Dominada garantiza que el límite existe. Más aún,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} \mathcal{B}_{S^3} \psi(z) &= \int_{w \in S^3} \frac{\partial}{\partial z_k} \sum_{l=1}^{\infty} c_l (\rho(z) \cdot w)^{l-1} \psi(w) dS_3(w) \\ &= \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho(z) \cdot w)^{l-1} \psi(w) dS_3(w). \end{aligned} \quad (3.III)$$

Lo que tenemos hasta ahora es que $\mathcal{B}_{S^3} \psi$ es una función analítica, por lo que falta verificar que está en $L^2(\mathbb{C}^4, d\mu_4)$. Para tal fin seguiremos a Bargmann [2] y al igual que en la sección tres del primer capítulo, utilizaremos el Criterio 1. Así, para $0 < \lambda < 1$, consideramos las funciones analíticas

$$(\mathcal{B}_{S^3} \psi)_{\lambda}(z) := \mathcal{B}_{S^3} \psi(\lambda z).$$

Por demostrar que

- $(\mathcal{B}_{S^3} \psi)_{\lambda} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$, para toda $0 < \lambda < 1$ y $\psi \in L^2(S^3)$.
- Las normas $\|(\mathcal{B}_{S^3} \psi)_{\lambda}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}$ están uniformemente acotadas.

Antes de verificar que se cumple lo anterior, realizamos algunos cálculos que se necesitarán. Sean $z \in \mathbb{C}^4$, $v, w \in S^3$ y consideremos la función

$$f(z, (v, w)) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{2(k-1)} \overline{(\rho(z) \cdot v)^{k-1}} \right] \left[\sum_{l=1}^{\infty} c_l \lambda^{2(l-1)} (\rho(z) \cdot w)^{l-1} \right],$$

además tenemos que $|\Re \rho(z)| = |\Im \rho(z)|$ y $|\Re \rho(z)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\rho(z)| = \frac{1}{2} |z|^2$. En-

tonces

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{C}^4} |f(z, (v, w))| d\mu_4(z) &\leq \int_{\mathbb{C}^4} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{2(k-1)} \left| \overline{(\rho(z) \cdot v)^{k-1}} \right| \\
 &\quad \cdot \sum_{l=1}^{\infty} c_l \lambda^{2(l-1)} \left| (\rho(z) \cdot w)^{l-1} \right| d\mu_4(z) \\
 &\leq \int_{\mathbb{C}^4} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{2(k-1)} |\rho(z)|^{k-1} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \lambda^{2(l-1)} |\rho(z)|^{l-1} d\mu_4(z) \\
 &\leq \int_{\mathbb{C}^4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{2(k-1)} |\rho(z)|^{k-1} \right]^2 d\mu_4(z) \\
 &= \int_{\mathbb{C}^4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{2(k-1)} \left(\frac{|z|^2}{2} \right)^{k-1} \right]^2 d\mu_4(z) \\
 &= \int_{\mathbb{C}^4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda |z|^2}{2} \right)^{k-1} \right]^2 d\mu_4(z),
 \end{aligned}$$

con $d_k = c_k(k-1)!$.

Es claro que dado $0 < \lambda < 1$ existe un entero N_λ tal que $d_k \lambda^{k-1} < 1$ para $k \geq N_\lambda$. Entonces

$$\int_{\mathbb{C}^4} |f(z, (v, w))| d\mu_4(z) \leq \int_{\mathbb{C}^4} \left[P(|z|^2) + e^{\left(\frac{\lambda |z|^2}{2}\right)} \right]^2 d\mu_4(z) < \infty, \quad (3.IV)$$

donde P es un polinomio con grado que depende de λ . La integral de arriba es finita puesto que las integrales quedan en términos de $e^{(\lambda-1)|z|^2}$.

Entonces calculamos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^4} |(\mathcal{B}_{S^3}\psi)_\lambda(z)|^2 d\mu_4(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^4} \int_{v \in S^3} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{(\rho(\lambda z) \cdot v)^{k-1}} \psi(v) dS_3(v) \\ & \quad \cdot \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l (\rho(\lambda z) \cdot w)^{(l-1)} \psi(w) dS_3(w) d\mu_4(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^4} \int_{S^3 \times S^3} f(z, (v, w)) \overline{\psi(v)} \psi(w) dS_3(v) dS_3(w) d\mu_4(z). \end{aligned}$$

Por lo que se hizo anteriormente (ecuación (3.IV)) y ya que $\psi \in L^1(S^3)$ podemos aplicar el Teorema de Fubini y así obtener

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^4} |(\mathcal{B}_{S^3}\psi)_\lambda(z)|^2 d\mu_4(z) \\ &= \int_{S^3 \times S^3} \overline{\psi(v)} \psi(w) \int_{\mathbb{C}^4} f(z, (v, w)) d\mu_4(z) dS_3(v) dS_3(w) \end{aligned}$$

si usamos nuevamente Fubini y la ortogonalidad de los polinomios de distinto grado en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$, entonces

$$= \int_{S^3} \psi(w) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S^3} \overline{\psi(v)} \int_{\mathbb{C}^4} c_k^2 \lambda^{4(k-1)} \overline{(\rho(z)v)^{k-1}} (\rho(z)w)^{k-1} d\mu_4(z) dS_3(v) dS_3(w).$$

Ahora denotamos por A_k al proyector sobre el k -ésimo espacio propio del Laplaciano. En el apéndice 3.B probamos que

$$A_k \psi(w) = \int_{S^3} J_k(v, w) \psi(v) dS_3(v),$$

con

$$J_k(v, w) = c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot v)^k} (\rho(z) \cdot w)^k d\mu_4(z).$$

Así tenemos que

$$\int_{\mathbb{C}^4} |(\mathcal{B}_{S^3}\psi)_\lambda(z)|^2 d\mu_4(z) = \int_{S^3} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{4(k-1)} A_{k-1} \overline{\psi(w)} \psi(w) dS_3(w) \quad (3.V)$$

La intención es intercambiar la integral y la sumatoria, para esto, fijando por un momento a λ , sea

$$f_N(w) = \sum_{k=1}^N \lambda^{4(k-1)} A_{k-1} \bar{\psi}(w) \psi(w)$$

y encontremos una cota para $|J_k(v, w)|$

$$\begin{aligned} |J_k(v, w)| &= c_{k+1}^2 \left| \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot v)}^k (\rho(z) \cdot w)^k d\mu_4(z) \right| \\ &\leq c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} |\rho(z) \cdot v|^k |\rho(z) \cdot w|^k d\mu_4(z) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} |\Re \rho(z)|^{2k} \left| \frac{\rho(z) \cdot v}{\Re \rho(z)} \right|^k \left| \frac{\rho(z) \cdot w}{\Re \rho(z)} \right|^k d\mu_4(z), \end{aligned}$$

pero

$$\left| \frac{\rho(z) \cdot v}{\Re \rho(z)} \right|^k = \left(\left[\frac{\Re \rho(z)}{|\Re \rho(z)|} \cdot v \right]^2 + \left[\frac{\Im \rho(z)}{|\Im \rho(z)|} \cdot v \right]^2 \right)^{k/2} \leq \|v\|^k = 1,$$

y además $|\Re \rho(z)| = \frac{1}{2} |z|^2$, entonces

$$\begin{aligned} |J_k(v, w)| &= \frac{c_{k+1}^2}{2^{2k}} \int_{\mathbb{C}^4} (|z|^2)^{2k} d\mu_4(z) \\ &= \frac{c_{k+1}^2}{2^{2k}} \int_{\mathbb{C}^4} (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 + z_4 \bar{z}_4)^{2k} d\mu_4(z) \\ &= \frac{c_{k+1}^2}{2^{2k}} \int_{\mathbb{C}^4} \sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{2k-l} \sum_{n=0}^l \binom{2k}{l} \binom{2k-l}{m} \binom{l}{n} (z_1 \bar{z}_1)^{2k-l-m} (z_2 \bar{z}_2)^m \\ &\quad (z_3 \bar{z}_3)^{l-n} (z_4 \bar{z}_4)^n d\mu_4(z) \end{aligned}$$

si hacemos $u_{[klmn]} := \frac{(z_1)^{2k-l-m} (z_2)^m (z_3)^{l-n} (z_4)^n}{\sqrt{(2k-l-m)!(m)!(l-n)!(n)!}}$ entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{c_{k+1}^2}{2^{2k}} (2k)! \sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{2k-l} \sum_{n=0}^l \int_{\mathbb{C}^4} \bar{u}_{[klmn]} u_{[klmn]} d\mu_4(z) \\ &= \frac{c_{k+1}^2}{2^{2k}} (2k)! \sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{2k-l} \sum_{n=0}^l \cdot \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{2k-l} \sum_{n=0}^l = \frac{1}{3}(2k+3)(2k+1)(k+1)$$

Así

$$\begin{aligned} |J_k(v, w)| &= \frac{C_{k+1}^2}{3 \cdot 2^{2k}} (2k)!(2k+3)(2k+1)(k+1) \\ &= \frac{(k+1)^2}{3 k! k! 2^{2k}} (2k)!(2k+3)(2k+1) \\ &= \frac{(k+1)^2 2^k (2k-1)!! (2k+3)(2k+1)}{3 k! 2^{2k}} \\ &= \frac{(k+1)^2 (2k+3)!!}{3 k! 2^k}. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} |f_N(w)| &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{4(k-1)} |A_{k-1} \bar{\psi}(w)| |\psi(w)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{4(k-1)} \int_{S^3} |J_{k-1}(v, w)| |\bar{\psi}(v)| dS_3(v) |\psi(w)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{4(k-1)} \frac{k^2 (2k+1)!!}{3(k-1)! 2^{k-1}} \|\psi\|_{L^1(S^3)} |\psi(w)| \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{4(k-1)} \frac{k^2 (2k+1)!!}{3(k-1)! 2^{k-1}} |\psi(w)| \end{aligned}$$

pero por el criterio de la razón, la suma anterior es convergente, esto es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{4k} (k+1)^2 (2k+3)!!}{3k! 2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^4 (2k+3)(k+1)(k+1)!}{2k^3 k!} < 1$$

entonces

$$|f_N(w)| \leq C_2 |\psi(w)| \in L^2(S^3) \subset L^1(S^3) \forall N.$$

Por tanto podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada a la ecuación (3.v) obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^4} |(\mathcal{B}_{S^3}\psi)_\lambda(z)|^2 d\mu_4(z) &= \int_{S^3} \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(w) dS_3(w) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \lambda^{4(k-1)} \int_{S^3} A_{k-1} \bar{\psi}(w) \psi(w) dS_3(w) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{4(k-1)} \langle A_k \psi, \psi \rangle_{L^2(S^3)} \end{aligned}$$

pero A_k es proyección

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{4(k-1)} \|A_{k-1} \psi\|_{L^2(S^3)}^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A_{k-1} \psi\|_{L^2(S^3)}^2 = \|\psi\|_{L^2(S^3)}^2, \end{aligned}$$

para toda $0 < \lambda < 1$. Esto es, se cumplen las hipótesis requeridas por el criterio 1 y por tanto $\mathcal{B}_{S^3}\psi \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ para $\psi \in L^2(S^3)$. Más aún

$$\|\mathcal{B}_{S^3}\psi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \|(\mathcal{B}_{S^3}\psi)_\lambda\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2 = \|\psi\|_{L^2(S^3)}^2,$$

lo que prueba que \mathcal{B}_{S^3} es un isometría. □

Notemos ahora que en realidad $\mathcal{B}_{S^3}\psi$, con $\psi \in L^2(S^3)$, está en un subespacio propio de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$, a saber, en \mathcal{F}_4 . Para ver esto, utilizaremos la ecuación (3.III)

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \mathcal{B}_{S^3}\psi(z) = \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho(z) \cdot w)^{l-1} \psi(w) dS_3(w)$$

entonces

$$\begin{aligned} z_k \frac{\partial}{\partial z_k} \mathcal{B}_{S^3}\psi(z) &= \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l z_k \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho(z) \cdot w)^{l-1} \psi(w) dS_3(w) \\ &= \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l (l-1) (\rho(z) \cdot w)^{l-2} z_k \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho(z) \cdot w) \psi(w) dS_3(w). \end{aligned}$$

Por la forma de \mathcal{L} realizamos los cálculos siguientes

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} (\rho(z) \cdot w) = iz_1 z_3 \bar{w}_1 + z_1 z_3 \bar{w}_2 - iz_1 z_4 \bar{w}_3 + z_1 z_4 \bar{w}_4$$

$$z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} (\rho(z) \cdot w) = -iz_2 z_4 \bar{w}_1 + z_2 z_4 \bar{w}_2 - iz_2 z_3 \bar{w}_3 - z_2 z_3 \bar{w}_4$$

$$z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} (\rho(z) \cdot w) = iz_1 z_3 \bar{w}_1 + z_1 z_3 \bar{w}_2 - iz_2 z_3 \bar{w}_3 - z_2 z_3 \bar{w}_4$$

$$z_4 \frac{\partial}{\partial z_4} (\rho(z) \cdot w) = -iz_2 z_4 \bar{w}_1 + z_2 z_4 \bar{w}_2 - iz_1 z_4 \bar{w}_3 + z_1 z_4 \bar{w}_4.$$

Así se tiene que

$$\mathcal{L}(\rho(z) \cdot w) = \left[z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} - z_4 \frac{\partial}{\partial z_4} \right] (\rho(z) \cdot w) = 0.$$

Por tanto

$$\mathcal{L} \mathcal{B}_{S^3} \psi(z) = \int_{w \in S^3} \sum_{l=1}^{\infty} c_l (l-1) (\rho(z) \cdot w)^{l-2} \mathcal{L}(\rho(z) \cdot w) \psi(w) dS_3(w) = 0,$$

es decir, $\mathcal{B}_{S^3} \psi \in \ker \mathcal{L} = \mathcal{F}_4$ para toda $\psi \in L^2(S^3)$.

Por lo anterior se tiene

Teorema 3.7. \mathcal{B}_{S^3} es un operador unitario sobre \mathcal{F}_4 .

Demostración. Ya sabemos que \mathcal{B}_{S^3} es una isometría y con esto, es inyectiva; por lo que falta probar que es sobre. Al igual que para la transformada de Bargmann del capítulo uno, basta mostrar que $\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3}$ es denso en \mathcal{F}_4 .

Como \mathcal{F}_4 es de Hilbert se puede ver como

$$\mathcal{F}_4 = \overline{(\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3})} \oplus (\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3})^\perp,$$

entonces tenemos que mostrar que $(\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3})^\perp = \{0\}$. Supongamos que $F \in (\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3})^\perp$, entonces se tiene que

$$\langle g, F \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} = 0$$

$$\text{para toda } g \in \overline{(\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3})}.$$

Ahora, para w fija, sea $Q(z, w)$ el núcleo reproductor que sabemos está en $(\text{Ran } \mathcal{B}_{S^3})$, (3.II). Entonces

$$0 = \left\langle \overline{Q(z, \cdot)}, F \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} = F(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^4.$$

Así, el rango de \mathcal{B}_{S^3} es denso y con esto, es sobre. Por tanto, \mathcal{B}_{S^3} es unitario. \square

3.2.1. La transformada $\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)}$

Consideremos ahora el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}^{(\hbar)}$. La transformada de Bargmann para este espacio esta dado por

$$\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} \psi(z) = \int_{S^3} A_{S^3}^{(\hbar)}(z, x) \psi(x) dS_3(x),$$

donde

$$A_{S^3}^{(\hbar)}(z, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\hbar^{n-1}} (\rho(z) \cdot x)^{n-1},$$

para $\psi \in L^2(S^3)$.

Notemos que para $z \in \mathbb{C}^4$ y $x \in S^3$, se tiene que

$$A_{S^3}^{(\hbar)}(z, x) = A_{S^3} \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, x \right) \in L^2(S^3), \quad (3.VI)$$

por lo que se tiene la siguiente relación para la transformada

$$\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} \psi(z) = \mathcal{B}_{S^3} \psi \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}} \right). \quad (3.VII)$$

Con esto, realizamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \left[\overline{\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} A_{S^3}^{(\hbar)}(w, x)} \right] (z) &= \left[\overline{\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} A_{S^3} \left(\frac{w}{\hbar^{1/2}}, x \right)} \right] (z) \\ &= \left[\overline{\mathcal{B}_{S^3} A_{S^3} \left(\frac{w}{\hbar^{1/2}}, x \right)} \right] \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}} \right) \\ &= Q \left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, \frac{w}{\hbar^{1/2}} \right) =: Q^{(\hbar)}(z, w). \end{aligned} \quad (3.VIII)$$

Lo que se asevera entonces es que $Q^{(\hbar)}(z, w)$ es el núcleo reproductor de $\mathcal{F}_4^{(\hbar)} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}^{(\hbar)}$. Entonces para $\varphi \in \mathcal{F}_4^{(\hbar)}$

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{Q^{(\hbar)}(z, \cdot)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}^{(\hbar)}} &= (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^4} Q^{(\hbar)}(z, w) \varphi(w) e^{-|w|^2/\hbar} dw d\bar{w} \\ &= (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^4} Q\left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, \frac{w}{\hbar^{1/2}}\right) \varphi(w) e^{-|w|^2/\hbar} dw d\bar{w} \end{aligned}$$

si $v = \frac{w}{\hbar^{1/2}}$

$$\begin{aligned} &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^4} Q\left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, v\right) \varphi(\hbar^{1/2}v) e^{-|v|^2} dv d\bar{v} \\ &= \int_{\mathbb{C}^4} Q\left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}, v\right) \varphi_{\hbar}(v) d\mu_4(v) \\ &= \varphi_{\hbar}\left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}\right) = \varphi(z). \end{aligned}$$

Teorema 3.8. El mapeo $\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} : L^2(S^3) \longrightarrow \mathcal{F}_4^{(\hbar)}$ es unitario.

Demostración. Al igual que para la transformada $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{(\hbar)}$, en el capítulo uno, basta mostrar que es isometría y que el núcleo reproductor pertenece al rango de la transformada. Aunque esto último ya se tiene por la ecuación (3.VIII). Así, solo queda mostrar que preserva norma que se ve con

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} \psi \right\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}^{(\hbar)}}^2 &= (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^4} \left| \mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)} \psi(z) \right|^2 e^{-|z|^2/\hbar} dz d\bar{z} \\ &= (\hbar\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^4} \left| \mathcal{B}_{S^3} \psi\left(\frac{z}{\hbar^{1/2}}\right) \right|^2 e^{-|z|^2/\hbar} dz d\bar{z} \end{aligned}$$

si $w = \frac{z}{\hbar^{1/2}}$

$$\begin{aligned} &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^4} |\mathcal{B}_{S^3} \psi(w)|^2 e^{-|w|^2} dw d\bar{w} \\ &= \|\mathcal{B}_{S^3} \psi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2 = \|\psi\|_{L^2(S^3)}^2. \end{aligned}$$

□

3.3. La transformada inversa $\mathcal{B}_{S^3}^{-1}$

La inversa de la transformada \mathcal{B}_{S^3} se define de manera similar a la inversa de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, ya que el núcleo integral $A_{S^3}(z, x)$ no está en $L^2(\mathbb{C}^4, \rho_4)$. Esto se ve considerando primero $x = \hat{e}_1 = (1, 0, 0, 0) \in S^3$ y calculando

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot \hat{e}_1)^{m-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m (iz_1 z_3 - iz_2 z_4)^{m-1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m i^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (z_1 z_3)^{m-1-k} (z_2 z_4)^k \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} i^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{m} \frac{z_1^{m-1-k} z_2^k z_3^{m-1-k} z_4^k}{\sqrt{(m-1-k)! k! (m-1-k)! k!}}. \end{aligned}$$

Para que esté en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ necesitamos que la suma de los coeficientes al cuadrado, sea convergente

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| i^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{m} \right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 = \infty.$$

Entonces $A_{S^3}(z, \hat{e}_1) \notin \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$.

Ahora para cualquier $x \in S^3$, tenemos que existe una rotación $R \in SO(4)$ tal que $x = R\hat{e}_1$. Entonces calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot R\hat{e}_1)^{m-1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m (R^{-1}\rho(z) \cdot \hat{e}_1)^{m-1}, \end{aligned}$$

por el apéndice 3.B, existe $U \in SO(4)$ tal que $R^{-1}\rho(z) = \rho(Uz)$ y si $z' = Uz$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z') \cdot \hat{e}_1)^{m-1}.$$

Como lo que queremos ver es si el núcleo integral está en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$, entonces calculamos

$$\int_{\mathbb{C}^4} \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot x)^{m-1} \right|^2 d\mu_4(z) = \int_{\mathbb{C}^4} \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z') \cdot \hat{e}_1)^{m-1} \right|^2 d\mu_4(z)$$

pero por la invariancia de la medida $d\mu_4(z)$

$$= \int_{\mathbb{C}^4} \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\rho(z) \cdot \hat{e}_1)^{m-1} \right|^2 d\mu_4(z) = \infty$$

puesto que $A_{S^3}(z, \hat{e}_1) \notin \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$.

Así pues, para $f \in \mathcal{F}_4$, consideramos las funciones

$$\psi_\sigma(x) = \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_{S^3}(z, x)} f(z) d\mu_4(z), \quad (3.IX)$$

para $\sigma > 0$ y $m = 1, 2, 3, 4$.

Verifiquemos que dichas funciones estén bien definidas, esto es, buscar una cota para $|\psi_\sigma|$. Pero como $f \in L^2(\mathbb{C}^4, \rho_4)$ en particular $f \in L^2_{loc}(\mathbb{C}^4, \rho_4)$, entonces necesitamos que el núcleo integral $A_{S^3}(z, x)$ esté en $L^2_{loc}(\mathbb{C}^4, \rho_4)$. Pero

$$\begin{aligned} \int_{|z_m| \leq \sigma} |A_{S^3}(z, x)|^2 d\mu_4(z) &\leq \int_{|z_m| \leq \sigma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n |(\rho(z) \cdot x)^{n-1}| \right]^2 d\mu_4(z) \\ &\leq \int_{|z_m| \leq \sigma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n |\rho(z)|^{n-1} \right]^2 d\mu_4(z) \end{aligned}$$

pero $|\rho(z)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z|^2$

$$\begin{aligned} &= \int_{|z_m| \leq \sigma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left| \frac{1}{\sqrt{2}} |z|^2 \right|^{n-1} \right]^2 d\mu_4(z) \\ &\leq \int_{|z_m| \leq \sigma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left| \frac{1}{\sqrt{2}} |\sigma|^2 \right|^{n-1} \right]^2 d\mu_4(z) < \infty. \end{aligned}$$

Así se obtiene entonces que ψ_σ está bien definida. Ahora, análogamente a la inversa de la transformada $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tenemos

Teorema 3.9. Sea $f \in \mathcal{F}_4 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ y sean ψ_σ definidas como arriba. Entonces la inversa de la transformada de Bargmann, $\mathcal{B}_{S^3}^{-1}$, esta dada por

$$\mathcal{B}_{S^3}^{-1}f = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \psi_\sigma.$$

Esto es

$$\mathcal{B}_{S^3}^{-1}f = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_{S^3}(z, x)} f(z) d\mu_4(z).$$

En la prueba de este teorema nos hemos inspirado en B. Hall [10] para poder aplicar Fubini.

Demostración. Como $\mathcal{B}_{S^3}^{-1} : \mathcal{F}_4 \rightarrow L^2(S^3)$, se necesita probar que las $\psi_\sigma \in L^2(S^3)$.

$$\begin{aligned} \int_{S^3} |\psi_\sigma(x)|^2 dS_3(x) &\leq \int_{S^3} \left\{ \int_{|z_m| \leq \sigma} \left| \overline{A_{S^3}(z, x)} f(z) \right| d\mu_4(z) \right\}^2 dS_3(x) \\ &< \infty \end{aligned}$$

porque de lo anterior, la segunda integral está acotada y no depende de x . Por tanto, podemos aplicar la transformada \mathcal{B}_{S^3} a las funciones ψ_σ

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{S^3}\psi_\sigma(z) &= \int_{S^3} A_{S^3}(z, x) \psi_\sigma(x) dS_3(x) \\ &= \int_{S^3} A_{S^3}(z, x) \int_{|w_m| \leq \sigma} \overline{A_{S^3}(z, x)} f(w) d\mu_4(w) dS_3(x) \end{aligned}$$

pero para z fija

$$\begin{aligned} \int_{S^3} \int_{|w_m| \leq \sigma} \left| A_{S^3}(z, x) \overline{A_{S^3}(w, x)} f(w) \right| d\mu_4(w) dS_3(x) \\ \leq \text{const}(z, \sigma) \int_{S^3} \int_{|w_m| \leq \sigma} e^{-\frac{1}{2}|w|^2} dw d\bar{w} dS_3(x) < \infty \end{aligned}$$

entonces podemos aplicar Fubini obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{S^3}\psi_\sigma(z) &= \int_{|w_m| \leq \sigma} f(w) \int_{S^3} \overline{A_{S^3}(w, x)} A_{S^3}(z, x) dS_3(x) d\mu_4(w) \\ &= \int_{|w_m| \leq \sigma} f(w) Q(z, w) d\mu_4(w). \end{aligned}$$

Al igual que en capítulo uno, sección 1.3.1., calculamos

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{B}_{S^3}\psi_\sigma\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2 \\ &= \int_{\mathbb{C}^4} |f(z) - \mathcal{B}_{S^3}\psi_\sigma(z)|^2 d\mu_4(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^4} \int_{|w_m| \geq \sigma} f(w)Q(z, w) d\mu_4(w) \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)Q(z, \eta)} d\mu_4(\eta) d\mu_4(z), \end{aligned}$$

pero se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^4} \int_{|w_m| \geq \sigma} \int_{|\eta_m| \geq \sigma} |f(w)\overline{f(\eta)}Q(z, w)\overline{Q(z, \eta)}| d\mu_4(\eta) d\mu_4(w) d\mu_4(z) \\ & \leq \int_{|\eta_m| \geq \sigma} |f(\eta)|^2 d\mu_4(\eta) \int_{|\eta_m| \geq \sigma} |Q(z, \eta)|^2 d\mu_4(\eta) \int_{\mathbb{C}^4} d\mu_4(z) < \infty, \end{aligned}$$

entonces podemos aplicar Fubini obteniendo

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{B}_{S^3}\psi_\sigma\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2 \\ &= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)}f(w) \int_{\mathbb{C}^4} \overline{Q(z, \eta)}Q(z, w) d\mu_4(z) d\mu_4(w) d\mu_4(\eta) \\ &= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)}f(w) \langle Q(\cdot, \eta), Q(\cdot, w) \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} d\mu_4(w) d\mu_4(\eta) \\ &= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)}f(w) \langle \mathcal{B}_{S^3} \overline{A_{S^3}(\eta, \cdot)}, \mathcal{B}_{S^3} \overline{A_{S^3}(w, \cdot)} \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} d\mu_4(w) d\mu_4(\eta) \\ &= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)}f(w) \langle \overline{A_{S^3}(\eta, \cdot)}, \overline{A_{S^3}(w, \cdot)} \rangle_{L^2(S^3)} d\mu_4(w) d\mu_4(\eta) \\ &= \int_{|\eta_m| \geq \sigma} \int_{|w_m| \geq \sigma} \overline{f(\eta)}f(w)Q(\eta, w) d\mu_4(w) d\mu_4(\eta). \end{aligned}$$

Notamos que $\overline{f(\eta)}f(w)Q(\eta, w)$ es integrable sobre todo el espacio $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$, esto es

$$\int_{\mathbb{C}^4} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{f(\eta)}f(w)Q(\eta, w) d\mu_4(w) d\mu_4(\eta) = \|f\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2.$$

Por tanto, $\|f - \mathcal{B}_{S^3}\psi_\sigma\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}^2 \rightarrow 0$, cuando $\sigma \rightarrow \infty$. De manera análoga a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$, se tiene entonces que

$$\mathcal{B}_{S^3}^{-1}f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_{S^3}(z, x)} f(z) d\mu_4(z).$$

□

Para el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}^{(\hbar)}$ la inversa de la transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)}$ esta dada por

$$\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)-1}f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_{S^3}^{(\hbar)}(z, x)} f(z) d\mu_4(z), \quad (3.x)$$

para $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}^{(\hbar)}$.

Apéndice 3.A. Transformaciones canónicas y funciones generadoras

Consideramos dos variedades diferenciales A y B , y $F : A \rightarrow B$ una función.

Sea $p \in A$. Si tomamos $v \in T_p A$, entonces existe una curva $\sigma(t) : I \rightarrow A$, con $I = [0, 1]$ y $t \in I$, tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = v$.

Definimos la función $F_* : T_p A \rightarrow T_{F(p)} B$ dada por

$$F_*(v) = \left. \frac{d}{dt} F(\sigma(t)) \right|_{t=0}.$$

Ahora, dada $\hat{\omega}$ una 2-forma en $TB \times TB$, definamos

$$F^* \hat{\omega}_p(v_1, v_2) = \hat{\omega}_{F(p)}(F_* v_1, F_* v_2) \quad (3.XI)$$

una 2-forma en $TA \times TA$.

Dado lo anterior, para variedades diferenciales M y \tilde{M} , consideramos los espacios fase (T^*M, ω) y $(T^*\tilde{M}, \tilde{\omega})$ y una función $F : T^*M \rightarrow T^*\tilde{M}$.

Definición 3.10. Decimos que F es una transformación canónica si y sólo si F es un difeomorfismo y $F^* \tilde{\omega} = \omega$.

Consideramos el Hamiltoniano H definido en T^*M y su correspondiente campo vectorial X_H dado por las ecuaciones de Hamilton. Sabemos que éste campo es el único que cumple

$$\omega(\cdot, X_H) = dH(\cdot).$$

Definimos una función en $T^*\tilde{M}$ por

$$\tilde{H} = H \circ F^{-1}.$$

Así podemos considerar el campo vectorial $F_* X_H$ en $T^*\tilde{M}$, resultado de mapear X_H por F .

Observemos que en $T^*\tilde{M}$ tenemos dos campos vectoriales, a saber $F_* X_H$ y $X_{\tilde{H}}$. Es interesante entonces saber cuando estos campos pueden coincidir, ya que si esto pasa, significa que las ecuaciones de movimiento se mapean de manera única.

Teorema 3.11. *Si F es una transformación canónica, entonces*

- a) *Los campos vectoriales F_*X_H y $X_{\tilde{H}}$, dados como arriba, coinciden.*
 b) *Dada otra función $G : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ se preserva el paréntesis de Poisson, esto es*

$$\{H, G\}(p) = \{\tilde{H}, \tilde{G}\}(F(p))$$

donde $\tilde{G} = G \circ F^{-1}$.

En otras palabras, el primer inciso dice que se cumple $\tilde{\omega}(w, F_*X_H) = d\tilde{H}(w)$, donde $w \in T^*\tilde{M}$.

Demostración. a) Sea $w \in T^*\tilde{M}$. Entonces existe $v \in T^*M$ tal que $w = F_*(v)$. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(w, F_*X_H) &= F^*(v, X_H) && \text{por la ecuación (3.XI)} \\ &= \omega(v, X_H) && \text{por la definición 3.10} \\ &= dH(v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} H(\sigma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} H \circ F^{-1} \circ F(\sigma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{H}(F(\sigma(t))) \right|_{t=0} \\ &= d\tilde{H}(w). \end{aligned}$$

- b) El paréntesis de Poisson, en términos de la 2-forma ω , está dado por

$$\{H, G\} = \omega_p(X_G, X_H),$$

así también tenemos

$$\{\tilde{H}, \tilde{G}\} = \tilde{\omega}_{F(p)}(X_{\tilde{G}}, X_{\tilde{H}}),$$

para $p \in T^*M$. Entonces calculamos

$$\begin{aligned} \{H, G\}(p) &= \omega_p(X_G, X_H) \\ &= F^*\tilde{\omega}_p(X_G, X_H) \\ &= \tilde{\omega}_{F(p)}(F_*X_G, F_*X_H) \\ &= \tilde{\omega}_{F(p)}(X_{\tilde{G}}, X_{\tilde{H}}) && \text{por el inciso anterior} \\ &= \{\tilde{H}, \tilde{G}\}(F(p)). \end{aligned}$$

□

Ahora sean (M, ω) y $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ variedades simplécticas y $F : (M, \omega) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\omega})$ una transformación canónica.

Supongamos que la función $\phi(x, x')$ es continua, 2 veces diferenciable al menos, entonces por el teorema de Darboux [17], existen coordenadas locales tal que se tienen las formas simplécticas

$$\omega = \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dp_k)$$

$$\tilde{\omega} = \sum_{K=1}^n (dx'_K \wedge dp'_K)$$

en las coordenadas adecuadas. Definimos

$$p_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x, x')$$

$$p'_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x'_k}(x, x').$$

Con esto, se preservan las formas simplécticas. Es decir

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dp_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(dx_k \wedge d \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(dx_k \wedge \left[\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx_l + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx'_l \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n dx_k \wedge \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx_l + \sum_{l=1}^n dx_k \wedge \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx'_l \right) \end{aligned}$$

pero $dx_k \wedge dx_k = 0$, además si $k \neq l$, son antisimétricas

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n dx_k \wedge \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx'_l.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega} &= \sum_{k=1}^n (dx'_k \wedge dp'_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(dx'_k \wedge -d \frac{\partial \phi}{\partial x'_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(dx'_k \wedge \left[- \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x'_k} dx_l - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial \phi}{\partial x'_k} dx'_l \right] \right) \\
 &= - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n dx'_k \wedge \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x'_k} dx_l + \sum_{l=1}^n dx'_k \wedge \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial \phi}{\partial x'_k} dx'_l \right) \\
 &= - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n dx'_k \wedge \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x'_k} dx_l
 \end{aligned}$$

si intercambiamos k por l y por la antisimetría del producto

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n dx_k \wedge \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx'_l.$$

Notemos que $\tilde{w} = w$ a nivel de coordenadas locales.

Si ocurre que ϕ es tal que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x'} \neq 0$ para todo x, x' , entonces x' y p' quedan en términos de x, p y tal que nos dan una transformación canónica al menos localmente. Así, decimos que ϕ es una *función generadora* de la función canónica F .

Hay ocasiones en que una función generadora nos da a lugar una transformación canónica global, como es ilustrado para la regularización del problema de Kepler, ver [33] y [34].

Apéndice 3.B. Invariancia de la medida Gausseana respecto a la acción de $SU(4)$

La invariancia de la medida Gausseana bajo la acción de $SU(4)$ se menciona en [33] sin prueba explícita, por lo que aquí se da una prueba original de tal hecho.

Conocemos que el mapeo $T : SO(4) \longrightarrow GL(L^2(S^3))$ dado por

$$T_R \psi(x) = \psi(R^{-1}x), \quad \text{para } R \in SO(4) \text{ y } \psi \in L^2(S^3),$$

da una representación de $SO(4)$. Además su restricción a cada espacio propio del Laplaciano, $\mathcal{H}_{3,k}$, da una representación irreducible de $SO(4)$. Por el lema de Schur, si tenemos un mapeo $A : \mathcal{H}_{3,k} \longrightarrow \mathcal{H}_{3,k}$ tal que conmuta con todas las T_R , $R \in SO(4)$, entonces A actúa como un múltiplo de la identidad.

Ahora definamos

$$A_k \psi(w) = \int_{S^3} J_k(v, w) \psi(v) dS_3(v) \quad (3.XII)$$

con

$$J_k(v, w) = c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot v)^k} (\rho(z) \cdot w)^k d\mu_4(z). \quad (3.XIII)$$

Observamos que $(\rho(z) \cdot v)^k$ es un polinomio armónico homogéneo, en v , de grado k . Entonces $J_k(v, w)$ es un polinomio homogéneo, en v , de grado k . Como $\rho(z)$ está en la cuádrlica nula \mathcal{Q}^3 , entonces $(\rho(z) \cdot v)^k$ es una función propia del Laplaciano Δ_{S^3} .

Ahora

$$\begin{aligned} A_k \psi(w) &= c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} \int_{S^3} \overline{(\rho(z) \cdot v)^k} \psi(v) dS_3(v) (\rho(w) \cdot w)^k d\mu_4(z) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} \left\langle (\rho(z) \cdot (\cdot))^k, \psi \right\rangle_{S^3} (\rho(w) \cdot w)^k d\mu_4(z). \end{aligned}$$

Nótese que si $\psi \in \mathcal{H}_{3,k}^\perp$, entonces $A_k \psi = 0$. Consideremos entonces el operador A_k restringido al espacio $\mathcal{H}_{3,k}$. Lo que mostraremos a continuación es que conmuta con cada T_R , $R \in SO(4)$; es decir, mostraremos que $A_k T_R = T_R A_k$

en $\mathcal{H}_{3,k}$ para toda $R \in SO(4)$.

Sean $R \in SO(4)$ una rotación arbitraria y $\psi \in \mathcal{H}_{3,k}$. Calculamos

$$\begin{aligned} [A_k(T_R\psi)](w) &= \int_{S^3} J_k(v, w) T_R\psi(v) dS_3(v) \\ &= \int_{S^3} J_k(v, w) \psi(R^{-1}v) dS_3(v) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{S^3} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot v)}^k (\rho(z) \cdot w)^k d\mu_4(z) \psi(R^{-1}v) dS_3(v). \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $\xi = R^{-1}v$ y como la medida de superficie dS_3 es invariante bajo rotaciones

$$[A_k(T_R\psi)](w) = c_{k+1}^2 \int_{S^3} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot R\xi)}^k (\rho(z) \cdot w)^k d\mu_4(z) \psi(\xi) dS_3(\xi)$$

como R preserva el producto interno

$$= c_{k+1}^2 \int_{S^3} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(R^{-1}\rho(z) \cdot \xi)}^k (R^{-1}\rho(z) \cdot R^{-1}w)^k d\mu_4(z) \psi(\xi) dS_3(\xi).$$

Para la invariancia de la medida Gausseana se tiene la siguiente

Proposición 3.12. *Sea $R \in SO(4)$. Entonces existe $U \in SU(4)$ tal que $R\rho(z) = \rho(Uz)$ y se preserva la medida, es decir*

$$\int_{\mathbb{C}^4} f(Uz) d\mu_4(z) = \int_{\mathbb{C}^4} f(z) d\mu_4(z)$$

para toda función f $d\mu_4$ -integrable.

Entonces se tiene

$$[A_k(T_R\psi)](w) = c_{k+1}^2 \int_{S^3} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot \xi)}^k (\rho(z) \cdot R^{-1}w)^k d\mu_4(z) \psi(\xi) dS_3(\xi).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} [T_R(A_k\psi)](w) &= A_k\psi(R^{-1}w) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{S^3} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot v)}^k (\rho(z) \cdot R^{-1}w)^k d\mu_4(z) \psi(v) dS_3(v). \end{aligned}$$

Por tanto $A_k T_R = T_R A_k$ para toda $R \in SO(4)$. Entonces podemos aplicar el Lema de Schur teniendo así que A_k debe actuar como un múltiplo de la unidad, en $\mathcal{H}_{3,k}$,

$$A_k \psi = d_k \psi, \quad \psi \in \mathcal{H}_{3,k}.$$

Para calcular tales d_k tomamos en particular $\psi(v) = ((e_1 + ie_2) \cdot v)^k$, entonces

$$\begin{aligned} A_k \psi(w) &= \int_{S^3} J_k(v, w) \psi(v) dS_3(v) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{S^3} \int_{\mathbb{C}^4} \overline{(\rho(z) \cdot v)^k} (\rho(z) \cdot w)^k d\mu_4(z) [(e_1 + ie_2) \cdot v]^k dS_3(v) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} (\rho(z) \cdot w)^k \int_{S^3} \overline{(\rho(z) \cdot v)^k} [(e_1 + ie_2) \cdot v]^k dS_3(v) d\mu_4(z) \\ &= c_{k+1}^2 \int_{\mathbb{C}^4} (\rho(z) \cdot w)^k \left\langle (\rho(z) \cdot v)^k, [(e_1 + ie_2) \cdot v]^k \right\rangle_{S^3} d\mu_4(z), \end{aligned}$$

donde por Villegas [33] tenemos que

$$\left\langle (\rho(z) \cdot v)^k, [(e_1 + ie_2) \cdot v]^k \right\rangle_{S^3} = \frac{1}{k+1} 2^k [(e_1 + ie_2) \cdot \rho(z)]^k,$$

entonces

$$\begin{aligned} A_k \psi(w) &= \frac{c_{k+1}^2}{(k+1)2^k} \int_{\mathbb{C}^4} (\rho(z) \cdot w)^k [(e_1 + ie_2) \cdot \rho(z)]^k d\mu_4(z) \\ &= \frac{c_{k+1}^2}{(k+1)2^k} \int_{\mathbb{C}^4} (\rho(z) \cdot w)^k (2iz_1z_3)^k d\mu_4(z) \\ &= \frac{i^k c_{k+1}^2}{(k+1)} \int_{\mathbb{C}^4} [(\rho(z) \cdot w) (z_1z_3)]^k d\mu_4(z) \end{aligned}$$

por la definición de ρ y factorizando

$$\begin{aligned} &= \frac{i^k c_{k+1}^2}{(k+1)} \int_{\mathbb{C}^4} \left[z_1z_3(iw_1 + w_2) + z_2z_4(-iw_1w_2) + z_1z_4(-iw_3 + w_4) \right. \\ &\quad \left. + z_2z_3(-iw_3 - w_4) \right]^k (z_1z_3)^k d\mu_4(z) \end{aligned}$$

por la ortogonalidad de los monomios

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i^k c_{k+1}^2}{(k+1)} \int_{\mathbb{C}^4} (z_1 z_3)^k (i w_1 + w_2)^k (z_1 z_3)^k d\mu_4(z) \\
 &= \frac{i^k c_{k+1}^2}{(k+1)} (-i w_1 + w_2)^k \langle (z_1 z_3)^k, (z_1 z_3)^k \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}} \\
 &= \frac{c_{k+1}^2 (k!)^4}{(k+1)} (w_1 + i w_2)^k = d_k \psi(w)
 \end{aligned}$$

Ahora damos la prueba de la proposición anterior

Demostración. Sea $R \in SO(4)$ y supongamos que $U \in SU(4)$ tiene la forma

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$$

que están en $SU(2)$ cada una, es decir, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$.

Si denotamos $z' = Uz$, entonces

$$z' = \begin{pmatrix} \alpha z_1 + \beta z_2 \\ -\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2 \\ \gamma z_3 + \delta z_4 \\ -\bar{\delta} z_3 + \bar{\gamma} z_4 \end{pmatrix}$$

y así

$$\begin{aligned}
 \rho(z') &= (iz'_1 z'_3 - iz'_2 z'_4, z'_1 z'_3 + z'_2 z'_4, -iz'_1 z'_4 - iz'_2 z'_3, z'_1 z'_4 - z'_2 z'_3) \\
 &= \begin{pmatrix} i(\alpha z_1 + \beta z_2)(\gamma z_3 + \delta z_4) - i(-\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)(-\bar{\delta} z_3 + \bar{\gamma} z_4) \\ (\alpha z_1 + \beta z_2)(\gamma z_3 + \delta z_4) + (-\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)(-\bar{\delta} z_3 + \bar{\gamma} z_4) \\ -i(\alpha z_1 + \beta z_2)(-\bar{\delta} z_3 + \bar{\gamma} z_4) - i(-\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)(\gamma z_3 + \delta z_4) \\ (\alpha z_1 + \beta z_2)(-\bar{\delta} z_3 + \bar{\gamma} z_4) - (-\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)(\gamma z_3 + \delta z_4) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (i\alpha\gamma - i\bar{\beta}\bar{\delta})z_1 z_3 + (i\alpha\delta + i\bar{\beta}\bar{\gamma})z_1 z_4 + (i\beta\gamma + i\bar{\alpha}\bar{\delta})z_2 z_3 + (i\beta\delta - i\bar{\alpha}\bar{\delta})z_2 z_4 \\ (\alpha\gamma + \bar{\beta}\bar{\delta})z_1 z_3 + (\alpha\delta - \bar{\beta}\bar{\gamma})z_1 z_4 + (\beta\gamma - \bar{\alpha}\bar{\delta})z_2 z_3 + (\beta\delta + \bar{\alpha}\bar{\gamma})z_2 z_4 \\ (i\alpha\bar{\delta} + i\bar{\beta}\gamma)z_1 z_3 + (-i\alpha\bar{\gamma} + i\bar{\beta}\delta)z_1 z_4 + (i\beta\bar{\delta} - i\bar{\alpha}\gamma)z_2 z_3 + (-i\beta\bar{\gamma} - i\bar{\alpha}\delta)z_2 z_4 \\ (-\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma)z_1 z_3 + (\alpha\bar{\gamma} + \bar{\beta}\delta)z_1 z_4 + (-\beta\bar{\delta} - \bar{\alpha}\gamma)z_2 z_3 + (\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta)z_2 z_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$R\rho(z)$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}(iz_1z_3 - iz_2z_4) + r_{12}(z_1z_3 + z_2z_4) + r_{13}(-iz_1z_4 - iz_2z_3) + r_{14}(z_1z_4 - z_2z_3) \\ r_{21}(iz_1z_3 - iz_2z_4) + r_{22}(z_1z_3 + z_2z_4) + r_{23}(-iz_1z_4 - iz_2z_3) + r_{24}(z_1z_4 - z_2z_3) \\ r_{31}(iz_1z_3 - iz_2z_4) + r_{32}(z_1z_3 + z_2z_4) + r_{33}(-iz_1z_4 - iz_2z_3) + r_{34}(z_1z_4 - z_2z_3) \\ r_{41}(iz_1z_3 - iz_2z_4) + r_{42}(z_1z_3 + z_2z_4) + r_{43}(-iz_1z_4 - iz_2z_3) + r_{44}(z_1z_4 - z_2z_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ir_{11} + r_{12})z_1z_3 + (-ir_{13} + r_{14})z_1z_4 + (-ir_{13} - r_{14})z_2z_3 + (-ir_{11} + r_{12})z_2z_4 \\ (ir_{21} + r_{22})z_1z_3 + (-ir_{23} + r_{24})z_1z_4 + (-ir_{23} - r_{24})z_2z_3 + (-ir_{21} + r_{22})z_2z_4 \\ (ir_{31} + r_{32})z_1z_3 + (-ir_{33} + r_{34})z_1z_4 + (-ir_{33} - r_{34})z_2z_3 + (-ir_{31} + r_{32})z_2z_4 \\ (ir_{41} + r_{42})z_1z_3 + (-ir_{43} + r_{44})z_1z_4 + (-ir_{43} - r_{44})z_2z_3 + (-ir_{41} + r_{42})z_2z_4 \end{pmatrix}$$

de donde se obtienen las ecuaciones linealmente independientes

$$\begin{aligned} ir_{11} + r_{12} &= i\alpha\gamma - i\bar{\beta}\bar{\delta} \\ -ir_{13} + r_{14} &= i\alpha\delta + i\bar{\beta}\bar{\gamma} \end{aligned} \quad (3.XIV)$$

$$\begin{aligned} ir_{21} + r_{22} &= \alpha\gamma + \bar{\beta}\bar{\delta} \\ -ir_{23} + r_{24} &= \alpha\delta - \bar{\beta}\bar{\gamma} \end{aligned} \quad (3.XV)$$

$$\begin{aligned} ir_{31} + r_{32} &= i\alpha\bar{\delta} + i\bar{\beta}\gamma \\ -ir_{33} + r_{34} &= -i\alpha\bar{\gamma} + i\bar{\beta}\delta \end{aligned} \quad (3.XVI)$$

$$\begin{aligned} ir_{41} + r_{42} &= -\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma \\ -ir_{43} + r_{44} &= \alpha\bar{\gamma} + \bar{\beta}\delta \end{aligned} \quad (3.XVII)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= \frac{1}{2} [r_{11} + r_{22} + i(r_{21} - r_{12})] \\ \alpha\delta &= \frac{1}{2} [r_{24} - r_{13} - i(r_{14} + r_{23})] \\ \bar{\alpha}\delta &= \frac{1}{2} [r_{31} - r_{42} + i(r_{32} + r_{41})] \\ \alpha\bar{\gamma} &= \frac{1}{2} [r_{33} + r_{44} + i(r_{34} - r_{43})] \\ \beta\bar{\delta} &= \frac{1}{2} [r_{44} - r_{33} + i(r_{43} + r_{34})] \\ \beta\bar{\gamma} &= \frac{1}{2} [r_{31} + r_{42} + i(r_{32} - r_{41})]. \end{aligned} \quad (3.XVIII)$$

Ahora, consideremos las matrices en $SU(2)$

$$M = AB = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta & -\beta\bar{\delta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$N = B^{-1}A = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\gamma} + \bar{\beta}\delta & \beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta \\ \alpha\bar{\delta} - \bar{\beta}\gamma & \beta\bar{\delta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma} \end{pmatrix},$$

y denotemos $m_1 = \alpha\gamma - \beta\bar{\delta}$, $m_2 = \alpha\delta + \beta\bar{\gamma}$, $n_1 = \alpha\bar{\gamma} + \bar{\beta}\delta$, $n_2 = \beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta$.
Entonces

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -\bar{m}_2 & \bar{m}_1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -\bar{n}_2 & \bar{n}_1 \end{pmatrix}.$$

Con esto, podemos hacer por un lado

$$MN = \begin{pmatrix} m_1n_1 - m_2\bar{n}_2 & m_1n_2 + m_2\bar{n}_1 \\ -n_1\bar{m}_2 - \bar{m}_1\bar{n}_2 & -\bar{m}_2n_2 + \bar{m}_1\bar{n}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

mientras que por otro, sabiendo que $MN = A^2$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta\bar{\beta} & \alpha\beta + \beta\bar{\alpha} \\ -\alpha\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 - \beta\bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

Notemos que por como se definió a m_1 , m_2 , n_1 , n_2 , tenemos que a y b quedan expresados, por (3.XVIII), en términos de las entradas r_{ij} de la matriz de rotación. Además, si solo se conoce que $R \in SO(4)$ entonces las matrices M y N , dadas arriba, están en $SU(2)$. Es decir $|m_1|^2 + |m_2|^2 = 1$ y $|n_1|^2 + |n_2|^2 = 1$. Por ejemplo, en el caso de N , los valores de n_1 y n_2 en términos de la rotación R son

$$n_1 = r_{44} - ir_{43}$$

$$n_2 = r_{42} - ir_{41},$$

y es claro que $|n_1|^2 + |n_2|^2 = 1$. Así mismo para M . Entonces MN está en $SU(2)$ ya que $|a|^2 + |b|^2 = (|m_1|^2 + |m_2|^2)(|n_1|^2 + |n_2|^2) = 1$. Por tanto, la demostración de la proposición se reduce a probar que: *dada $R \in SO(4)$, sean a, b como arriba tales que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y que satisfacen*

$$\alpha\alpha - \beta\bar{\beta} = a$$

$$\alpha\beta + \beta\bar{\alpha} = b. \tag{3.XIX}$$

Observamos que si existen α y β que satisfacen el sistema anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} & (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 \\ &= |\alpha|^2 |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 + |\beta|^2 |\beta|^2 \\ &= |\alpha|^2 |\alpha|^2 - \alpha^2 |\beta|^2 - |\beta|^2 \bar{\alpha}^2 + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 + \alpha^2 |\beta|^2 + |\beta|^2 \bar{\alpha}^2 + |\beta|^2 |\beta|^2 \\ &= (\alpha\alpha - \beta\bar{\beta})(\overline{\alpha\alpha - \beta\bar{\beta}}) + (\alpha\beta + \beta\bar{\alpha})(\overline{\alpha\beta + \beta\bar{\alpha}}) \\ &= |a|^2 + |b|^2 = 1. \end{aligned}$$

Ahora encontremos tales α, β que satisfagan el sistema (3.XIX). Sean $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ y $\beta_1 + i\beta_2$. Por la segunda ecuación se tiene

$$\beta(\alpha + \bar{\alpha}) = b,$$

entonces

$$\beta = \frac{b}{2\alpha_1}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (3.XIX) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 2\alpha_1\alpha_2 &= a_2 \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \frac{|b|^2}{4\alpha_1^2} &= a_1 \end{aligned} \quad (3.XX)$$

donde $a = a_1 + ia_2$. De aquí $\alpha_2 = \frac{a_2}{2\alpha_1}$ y lo sustituimos en la segunda ecuación obteniendo la ecuación cuadrática en α_2^2

$$\alpha_2^4 - a_1\alpha_1^2 - \frac{1}{4}(a_2^2 + |b|^2) = 0.$$

Donde la solución es

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a_1 + 1}{2}}.$$

Entonces

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{2\alpha_1} = \frac{a_2}{\sqrt{2(a_1 + 1)}},$$

por lo que

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(a_1 + 1)}} [(a_1 + 1) + ia_2].$$

Ahora, por lo anterior

$$\beta = \frac{b}{2\alpha_1} = \frac{b}{\sqrt{2(a_1 + 1)}},$$

donde en los dos casos, a, b están en términos de la rotación R .

Por tanto, existe A . Análogamente tenemos que existe B y así, existe una matriz U , formada con A y B en la diagonal, en $SU(4)$ tal que satisface la proposición, por como fué construida. \square

Capítulo 4

Estados coherentes

La idea de los estados coherentes se origina en la física cuántica y su relación con la física clásica. En 1926, E. Schrödinger [24] introduce un sistema de funciones de onda para el oscilador armónico que no se dispersaran y cuyo centroide sigue la trayectoria determinada por la mecánica clásica. Más tarde, en 1963, Glauber ([7], [8]) les llamó a dichas funciones de onda *estados coherentes*.

4.1. Estados coherentes para el oscilador armónico

En esta sección se presentan algunas propiedades de los estados coherentes para el oscilador armónico (donde seguimos a [15]), aunque se ha modificado la definición ligeramente por un factor para poder ver a la transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, aplicada a $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, como el producto interno de dichos estados coherentes con la función f .

La ecuación del Hamiltoniano para el oscilador armónico clásico, con masa unitaria $m = 1$ es

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}x^2 = E \quad (4.1)$$

donde x es la posición y \mathbf{p} el momento, $\mathbf{p} = \dot{x}$. La solución para $x(t)$ es

$$x(t) = (2E)^{1/2} \text{sen } t$$

y así,

$$\mathbf{p}(t) = (2E)^{1/2} \cos t.$$

Para el problema cuántico, el Hamiltoniano se ve de la forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} x^2,$$

por lo que se tiene la ecuación de Schrödinger asociada

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_{\mathbb{R}^n} \psi + \frac{1}{2} x^2 \psi = E\psi, \quad (4.11)$$

donde sus soluciones están dadas por

$$\psi_{[m]}(x) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\pi}(\hbar 2)^{|m|}[m!]} e^{-\frac{1}{2\hbar}x^2} H_{[m]}(\hbar^{-1/2}x) =: |[m]\rangle, \quad (4.111)$$

con valor propio

$$E_{[m]} = \hbar (|m| + n/2),$$

con $m \in \mathbb{N}^n$, $|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ y $H_{[m]}$ polinomios de Hermite.

De aquí en adelante consideraremos la traslación del operador H en (4.11) (también denotado por H), por la cantidad $\hbar n/2$, tales que el espectro de H es

$$E_{[m]} = \hbar |m|.$$

Una de las propiedades más importantes de este sistema, es que cualquier paquete de onda, no importando su forma, retornará a su forma original después de un período clásico de oscilación, 2π .

Podemos ver esto considerando las funciones de onda, correspondientes a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$\Psi(x, t) = \sum_{[m] \in \mathbb{N}^n} a_{[m]} \psi_{[m]}(x) e^{-it|m|}$$

y observamos que $\Psi(x, t) = \Psi(x, t + 2\pi)$.

Los estados coherentes para el oscilador armónico, que definiremos más adelante, no solo regresan a su forma original después de un período de oscilación, estos retienen su forma original para todo tiempo y tienen un centroide que siguen el movimiento clásico.

Definición 4.1. Los estados coherentes para el oscilador armónico son de la forma

$$\psi_z = |z\rangle = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} |[m]\rangle,$$

con $z \in \mathbb{C}$ y $|[m]\rangle$ como en la ecuación (4.III).

Estas funciones tienen varias propiedades que se mencionan a continuación

1) Notemos que si dejamos actuar el operador de evolución temporal del sistema sobre estos estados coherentes, se tiene

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |z\rangle = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]} e^{-i|m|t}}{\sqrt{[m!]}} |[m]\rangle = |e^{it}z\rangle. \quad (4.IV)$$

Lo que nos muestra que la evolución, a través del tiempo, de un estado coherente sigue siendo un estado coherente. A ésta propiedad se le denota por *estabilidad bajo evolución temporal*.

2) Consideramos los operadores a , a^\dagger , de aniquilación y creación

$$a = (2\hbar)^{-1/2}(x + i\mathbf{p}) \quad a^\dagger = \bar{a} = (2\hbar)^{-1/2}(x - i\mathbf{p}),$$

donde x es operador de multiplicación por x y $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ con $\mathbf{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Usando estos operadores el Hamiltoniano (4.1) se puede reescribir como

$$H = \hbar(a^\dagger a).$$

Además se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} a |[m]\rangle &= ([m])^{1/2} |[m-1]\rangle \\ a^\dagger |[m]\rangle &= ([m+1])^{1/2} |[m+1]\rangle \\ x &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (a + a^\dagger) \\ \mathbf{p} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (a - a^\dagger) \\ [a, a^\dagger] &= 1 \end{aligned} \quad (4.V)$$

con $[m \pm 1] = (m_1 \pm 1, \dots, m_n \pm 1)$, ver por ejemplo [6].

Con lo cual se puede probar que los *estados coherentes son funciones propias de operador de aniquilación*

$$\begin{aligned} a|z\rangle &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} a|[m]\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}\bar{z}^{[m-1]}}{\sqrt{[(m-1)!]}} |[m-1]\rangle = \bar{z}|z\rangle, \end{aligned}$$

con valor propio \bar{z} .

3) Los estados coherentes se pueden obtener del estado base $|[0]\rangle$ a través de la acción del operador de desplazamiento

$$D(z) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} e^{\bar{z}a^\dagger - za},$$

es decir $|z\rangle = D(z)|[0]\rangle$. Para ver esto, utilizamos el hecho de que $[a, a^\dagger] = 1$ y por consecuencia la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se reduce a

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} D(z)|[0]\rangle &= e^{\bar{z}a^\dagger} e^{-za} |[0]\rangle \\ &= e^{\bar{z}a^\dagger} |[0]\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} \frac{a^{\dagger[m]}}{\sqrt{[m!]}} |[0]\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} |[m]\rangle = |z\rangle. \end{aligned}$$

4) Los estados coherentes logran la cota mínima para la desigualdad del Principio de Incertidumbre de Heisenberg. Es decir

$$(\Delta x)^2 (\Delta \mathbf{p})^2 = \frac{1}{4} \hbar^2,$$

donde

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle_z - \langle x \rangle_z^2 = \langle z | x^2 | z \rangle - (\langle z | x | z \rangle)^2.$$

Usando la relación para x en (4.1) y el hecho de que el promedio se obtiene a través de funciones normalizadas, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle_z^2 &= \left(\left\langle \frac{z}{\sqrt{\langle z|z \rangle}} \middle| x \middle| \frac{z}{\sqrt{\langle z|z \rangle}} \right\rangle \right)^2 \\
 &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\langle z|z \rangle} \langle z| a + a^\dagger |z \rangle \\
 &= \frac{\hbar}{2} (z + \bar{z})^2, \\
 \langle x^2 \rangle_z &= \frac{1}{\langle z|z \rangle} \langle z| x^2 |z \rangle \\
 &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\langle z|z \rangle} \langle z| (a + a^\dagger)^2 |z \rangle \\
 &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\langle z|z \rangle} [\bar{z}^2 \langle z|z \rangle + z^2 \langle z|z \rangle + \langle z|z \rangle + 2|z|^2 \langle z|z \rangle] \\
 &= \langle x \rangle_z^2 + \frac{\hbar}{2},
 \end{aligned}$$

por tanto

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2}.$$

Un cálculo similar nos muestra que

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2}.$$

Ahora, si realizamos el producto de dos estados coherentes ψ_z y ψ_w obtenemos

$$\langle \psi_z, \psi_w \rangle = \langle z|w \rangle = e^{z \cdot \bar{w}}. \quad (4.VI)$$

Esto nos muestra que el conjunto de estados coherentes, etiquetados por z , no es ortogonal. Nótese que del producto anterior resulta el núcleo reproductor del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

Ahora busquemos una manera más adecuada, para nuestros propósitos, de escribir estos estados coherentes para el oscilador armónico. De la definición

4.1 y de la ecuación (4.III) obtenemos la expresión

$$\psi_z(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}}{(\hbar\pi)^{n/4} [m!]^{1/2} (2\hbar)^{|m|/2}} H_{[m]}(\hbar^{-1/2}x).$$

Pero utilizamos que la función $e^{2\hbar^{-1/2}\gamma \cdot x - \gamma^2}$ es la función generadora de los polinomios de Hermite, así

$$\psi_z(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}}{(\hbar\pi)^{n/4} [m!]^{1/2} (2\hbar)^{|m|/2}} D_\gamma^{[m]} e^{2\hbar^{-1/2}\gamma \cdot x - \gamma^2} \Big|_{\gamma=0} \quad (4.VII)$$

que al realizar el cambio $\gamma = (2\hbar)^{-1/2}b$ obtenemos

$$= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{[m!]} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}}{(\hbar\pi)^{n/4}} D_b^{[m]} e^{-\frac{1}{2\hbar}[b^2 - 2\sqrt{2}b \cdot x]} \Big|_{b=0} \quad (4.VIII)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{\bar{z}^{[m]}}{[m!]} D_b^{[m]} A_n(b, x) \Big|_{b=0}, \quad (4.IX)$$

donde $A_n(b, x)$ es el núcleo integral de la transformada de Bargmann para $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Notamos que lo anterior es la definición de expansión de Taylor para el núcleo integral $A_n(\bar{z}, x)$ alrededor del cero. En consecuencia tenemos

$$\psi_z(x) = \overline{A_n(z, x)} = (\hbar\pi)^{-n/4} e^{-\frac{1}{2\hbar}[\bar{z}^2 + x^2 - 2\sqrt{2}\bar{z} \cdot x]}.$$

Notamos que lo obtenido es consistente con la ecuación (4.VI) por el Lema 1.7 (sección 1.3), además de que para cada z fijo, $\psi_z \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ahora para $z = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\psi_z(x) = (\hbar\pi)^{-n/4} e^{-\frac{1}{2\hbar} \left[x^2 + \frac{q^2}{2} - \frac{p^2}{2} + i(q+2x) \cdot p - 2x \cdot q \right]}$$

que completando cuadrados

$$= (\hbar\pi)^{-n/4} e^{-\frac{1}{2\hbar} \left[(x-q)^2 - \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + i(q+2x) \cdot p \right]}.$$

Así

$$|\psi_z(x)| = \text{const}(p, q) e^{-\frac{1}{2\hbar}(x-q)^2}$$

es una Gausseana centrada en la posición q . Además, si calculamos su transformada de Fourier,

$$\hat{\psi}_z(k) = \frac{(\hbar\pi)^{-n/4}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-2\hbar(k+p)^2} e^{-\frac{1}{2\hbar}[\frac{1}{2}(q^2-p^2)+iq\cdot p]} f(k)$$

donde

$$f(k) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left[\frac{x}{\sqrt{2\hbar}} + i\sqrt{2\hbar}(k+p)\right]^2} e^{q\cdot x/\hbar} d^n x$$

es una función acotada. Entonces

$$\left| \hat{\psi}_z(k) \right| = \text{const}(p, q) e^{-2\hbar(k-p)^2}$$

será una Gausseana centrada en el momento p .

Podemos observar que los estados coherentes están etiquetados por el plano fase (q, p) , donde se mueve físicamente la partícula.

5) Resolución de la identidad. Del capítulo uno se sabe que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_w(z) = e^{z\cdot\bar{w}}$. Sean $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y f su transformada de Bargmann, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \langle e^{\bar{z}\cdot w}, f \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} \\ &= \langle \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi_z, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} \end{aligned}$$

como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario

$$= \langle \psi_z, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Entonces

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \psi(z) = \langle \psi_z, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

y al tomar la transformada inversa $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \overline{A_n(z, x)} \langle \psi_z, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\mu_n(z) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z_m| \leq \sigma} \langle \psi_z, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \psi_z(x) d\mu_n(z). \end{aligned} \quad (4.X)$$

A (4.x) se le llama **resolución de la identidad**. No debe confundirse este concepto con el de resolución de la identidad dada por el teorema espectral para operadores autoadjuntos.

Notando que al núcleo reproductor $e^{z \cdot \bar{w}}$ se le pueden llamar estados coherentes para el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, puesto que para toda f en dicho espacio

$$f(z) = \langle e^{z \cdot \bar{w}}, f \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}},$$

entonces a la transformada de Bargmann se le llama también *transformada de estados coherentes*.

Si consideramos el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}^{(\hbar)}$, los estados coherentes son

$$\psi_z = \overline{A_n^{(\hbar)}(z, \cdot)}.$$

4.2. Estados coherentes para $L^2(S^3)$

Ahora, siguiendo a [33] para el caso de la transformada $\mathcal{B}_{S^3} : L^2(S^3) \rightarrow \mathcal{F}_4$, con una analogía con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, las funciones

$$\phi_\alpha(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \overline{(\alpha \cdot x)^{n-1}} \quad (4.XI)$$

con $\alpha \in \mathcal{Q}^3$, son los estados coherentes puesto que podemos escribir la transformada de una función $\psi \in L^2(S^3)$ como

$$\mathcal{B}_{S^3}\psi(z) = \langle \phi_{\rho(z)}, \psi \rangle_{S^3}.$$

Entonces tenemos que checar que se cumplen algunas de las propiedades dadas al principio del capítulo.

Para $\psi \in L^2(S^3)$ sea $f = \mathcal{B}_{S^3}\psi$. Como $Q(z, w)$, dado en (3.II), es el núcleo reproductor de \mathcal{F}_4 entonces

$$f(z) = \langle Q(z, \cdot), f \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}$$

pero $\mathcal{B}_{S^3}\phi_{\rho(z)}(w) = Q(z, w)$

$$= \langle \mathcal{B}_{S^3}\phi_{\rho(z)}, \mathcal{B}_{S^3}\psi \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}}$$

como \mathcal{B}_{S^3} es unitario

$$f(z) = \langle \phi_{\rho(z)}, \psi \rangle_{S^3}.$$

Entonces

$$\mathcal{B}_{S^3}\psi(z) = \langle \phi_{\rho(z)}, \psi \rangle_{S^3},$$

pero aplicando transformada inversa se tiene

$$\psi(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|\alpha_m| \leq \sigma} \langle \phi_\alpha, \psi \rangle_{S^3} \phi_\alpha(x) d\mu(\alpha),$$

donde la medida $d\mu(\alpha)$ esta dada por

$$\int_{\mathcal{Q}^3} f(\alpha) d\mu(\alpha) = \int_{\mathbb{C}^4} f(\rho(z)) d\mu_4(z).$$

Así, los ϕ_α , con $\alpha \in \mathcal{Q}^3$, nos dan una resolución de la identidad.

Así también se obtiene que para la transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{S^3}^{(\hbar)}$, los estados coherentes asociados tienen la forma

$$\phi_\alpha^{(\hbar)}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \left(\frac{\bar{\alpha} \cdot x}{\hbar} \right)^{n-1}. \quad (4.XII)$$

Nuevamente observamos que los estados coherentes están etiquetados por el espacio fase que es $\mathcal{Q}^3 - \{0\} \cong T^*S^3 - \{0\}$ el espacio cotangente a S^3 .

En las últimas décadas se han realizado diversas generalizaciones de estados coherentes para otros sistemas y grupos ([31],[10],[28],[12] entre otros). En el caso general, los estados coherentes se definen a partir de algunas propiedades que se mencionaron en la sección anterior para el oscilador armónico, aunque no todas ellas siempre se satisfacen. En nuestro caso llamamos a los estados ϕ_α , estados coherentes por que nos dan una resolución de la identidad, además por sus propiedades de evolución y de concentración cuando se considera a la constante de Planck pequeña, que se explican en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Evolución temporal de los estados coherentes

En este capítulo se realiza un estudio original sobre la evolución temporal y concentración de los estados coherentes ϕ_α introducidos en el capítulo anterior. También se realiza un estudio de los estados coherentes en el espacio de momentos a través de los estados ϕ_α y la transformación unitaria U del capítulo dos.

Consideremos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i \frac{\partial}{\partial s} \Psi(x, s) = \frac{1}{2} \Delta_{S^3} \Psi(x, s),$$

con condición inicial $\Psi(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in S^3$ y $\varphi \in L^2(S^3)$.

La evolución temporal de φ está determinada por

$$e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} \varphi, \tag{5.1}$$

por lo que nos preguntamos cómo será la evolución temporal de los estados coherentes $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{Q}^3}$. Así, para $\alpha \in \mathcal{Q}^3$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} \phi_\alpha &= e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\alpha \cdot x)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} (\alpha \cdot x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Recordamos que el polinomio armónico $(\alpha \cdot x)^{n-1}$ es una función propia del Laplaciano Δ_{S^3} , con valor propio $\lambda_{n-1} = -(n^2 - 1)$. Entonces se tiene que

$$e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} \phi_{\bar{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i}{2}s\lambda_{n-1}} (\alpha \cdot x)^{n-1}.$$

Si en particular tomamos $\bar{\alpha} = e_1 - ie_2$, y tomamos coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{sen } \lambda \text{ sen } \theta \cos \varphi & 0 \leq \lambda, \theta \leq \pi \\ x_2 &= \text{sen } \lambda \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ x_3 &= \text{sen } \lambda \cos \theta \\ x_4 &= \cos \lambda, \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha \cdot x = \text{sen } \lambda \text{ sen } \theta e^{i\varphi}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} \phi_{\bar{\alpha}} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i}{2}s\lambda_{n-1}} \text{sen}^{n-1} \lambda \text{ sen}^{n-1} \theta e^{i(n-1)\varphi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} e^{\frac{i(n-1)}{2}[2\varphi - (n+1)s]} \text{sen}^{n-1} \lambda \text{ sen}^{n-1} \theta. \end{aligned} \quad (5.II)$$

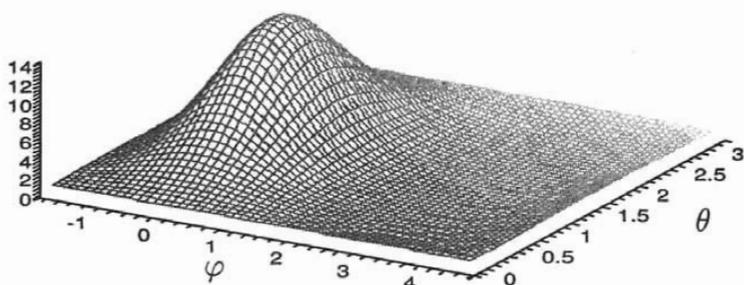
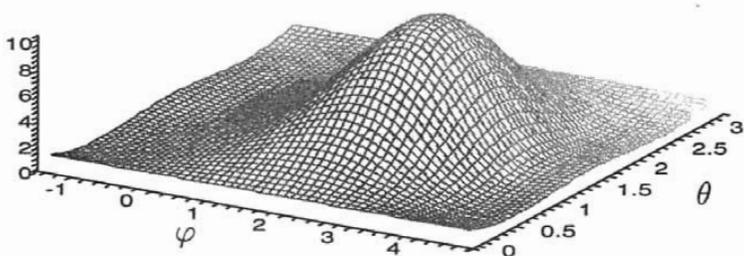
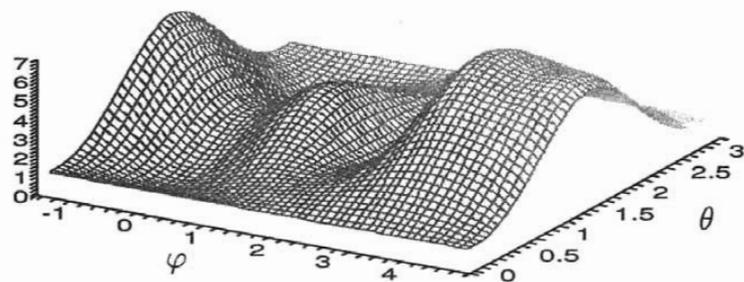
Podemos notar que cuando $\lambda = \theta = \pi/2$ se tiene que $x = (\cos \varphi, \text{sen } \varphi, 0, 0)$ es una geodésica en S^3 en el plano (x_1, x_2) .

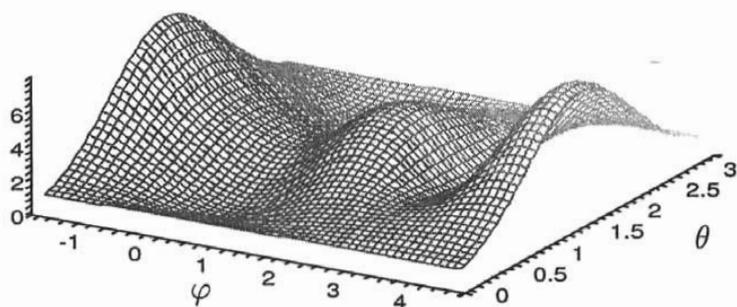
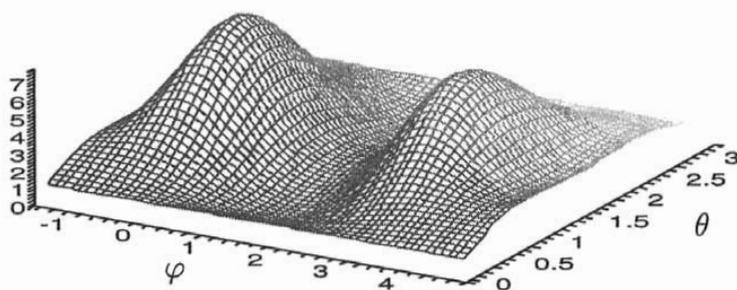
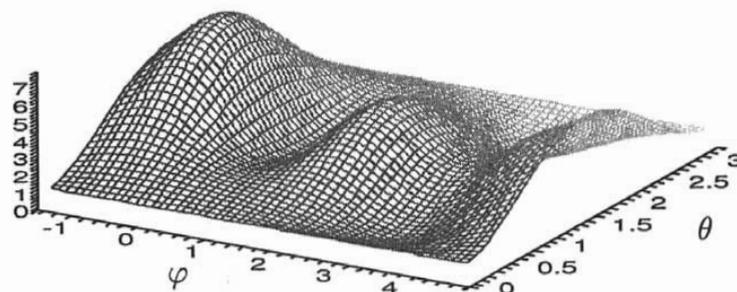
Ahora, si discretizamos el tiempo s y fijamos por un momento a $\lambda = \pi/2$, entonces tenemos las siguientes gráficas que nos exhiben el comportamiento de estos estados coherentes a lo largo de la geodésica mencionada.

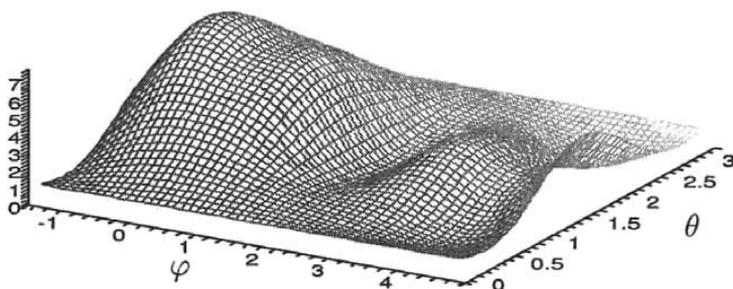
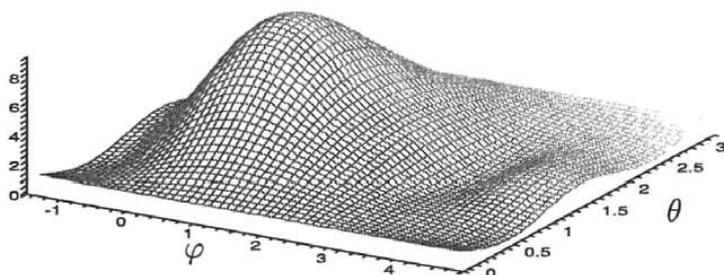
A continuación graficamos la densidad de probabilidad

$$|F(\varphi, \theta, s)|^2 = \left| e^{\frac{i}{2}s\Delta_{S^3}} \phi_{\bar{\alpha}} \right|^2$$

para distintos valores de s .

Figura 5.1: $|F(\varphi, \theta, s = 0)|^2$ Figura 5.2: $|F(\varphi, \theta, s = 1)|^2$ Figura 5.3: $|F(\varphi, \theta, s = 2)|^2$

Figura 5.4: $|F(\varphi, \theta, s = 2, 5)|^2$ Figura 5.5: $|F(\varphi, \theta, s = 3)|^2$ Figura 5.6: $|F(\varphi, \theta, s = 4)|^2$

Figura 5.7: $|F(\varphi, \theta, s = 4,5)|^2$ Figura 5.8: $|F(\varphi, \theta, s = 5)|^2$

Notamos además que el período de F es 4π . Esto es,

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, \theta, s + 4\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} e^{\frac{i(n-1)}{2}[2\varphi - (n+1)(s+4\pi)]} \text{sen}^{n-1} \lambda \text{sen}^{n-1} \theta \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} e^{\frac{i(n-1)}{2}[2\varphi - (n+1)s]} \text{sen}^{n-1} \lambda \text{sen}^{n-1} \theta \\
 &= F(\varphi, \theta, s).
 \end{aligned}$$

Ahora utilizamos el cálculo realizado en el Apéndice A, sobre la expansión asintótica para el núcleo integral $A_{S^3}(z, x)$, y lo podemos aplicar a nuestros

estados coherentes ϕ_α obteniendo para $\alpha \in \mathcal{Q}^3$ y $w \in S^3$

$$\phi_{\bar{\alpha}}(w) = (\alpha \cdot w)^{1/2} e^{\alpha \cdot w} \left(1 + \frac{a_1}{\alpha \cdot w} + \frac{a_2}{(\alpha \cdot w)^2} + \dots \right), \quad (5.III)$$

para $\Re(\alpha \cdot w) \rightarrow \infty$ y $|\Im(\alpha \cdot w)| \leq \text{const } \Re(\alpha \cdot w)$.

Pero la parte real de $(\alpha \cdot w)$ se puede ver como

$$\Re(\alpha \cdot w) = |\Re\alpha| \left(\frac{\Re\alpha}{|\Re\alpha|} \cdot w \right),$$

lo cual crece a ∞ cuando $\Re\alpha \rightarrow \infty$ y w esté muy cerca de $\frac{\Re\alpha}{|\Re\alpha|}$. Para w con esta condición, se obtiene de inmediato que

$$|\Im(\alpha \cdot w)| = |\Im\alpha| \left| \frac{\Im\alpha}{|\Im\alpha|} \cdot w \right| < |\Re\alpha| \left| \frac{\Re\alpha}{|\Re\alpha|} \cdot w \right| = |\Re(\alpha \cdot w)|.$$

Por tanto, la ecuación (5.III) se satisface cuando w está suficientemente cerca de $\frac{\Re\alpha}{|\Re\alpha|}$ y $\Re\alpha \rightarrow \infty$.

Para mostrar congruencia graficamos la densidad de probabilidad para esta expresión asintótica de los estados coherentes obteniendo

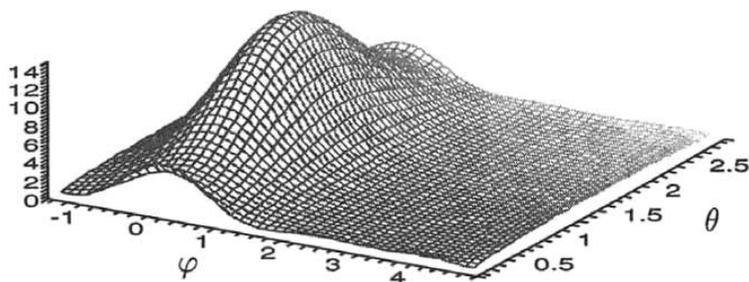


Figura 5.9: $|\phi_{\bar{\alpha}}(w)|^2$

que se aproxima bien a la Figura 5.1 con un número pequeño de sumandos de la expansión (5.III).

Si consideramos el núcleo integral $A_{S^3}^{(\hbar)}(z, x)$, como en la sección 3.2.1, encontramos de manera análoga a lo anterior que

$$\phi_{\bar{\alpha}}^{(\hbar)}(w) = (\alpha \cdot w / \hbar)^{1/2} e^{\alpha \cdot w / \hbar} \left(1 + \frac{a_1 \hbar}{\alpha \cdot w} + \frac{a_2 \hbar^2}{(\alpha \cdot w)^2} + \dots \right), \quad (5.IV)$$

para $\Re(\alpha \cdot w / \hbar) \rightarrow \infty$ y $|\Im(\alpha \cdot w / \hbar)| \leq \text{const} \Re(\alpha \cdot w / \hbar)$.

Nótese que la expresión anterior nos permite realizar fácilmente cálculos para cuando hacemos tender \hbar a cero, lo cual no se lograría con la expresión para los estados coherentes $\phi_{\alpha}^{(\hbar)}$ como en la ecuación (4.XII). Esto es, tomando coordenadas esféricas para $w \in S^3$ y tomando $\bar{\alpha} = e_1 - ie_2$ podemos considerar que los estados coherentes tienen la siguiente expresión (para valores de \hbar pequeños)

$$\phi_{\bar{\alpha}}^{(\hbar)}(w) = \sqrt{\frac{1}{\hbar}} \sin \theta e^{i\varphi/2} e^{\frac{1}{\hbar} \sin \theta} e^{i\varphi}, \quad (5.V)$$

donde su densidad de probabilidad se ve en las siguientes gráficas

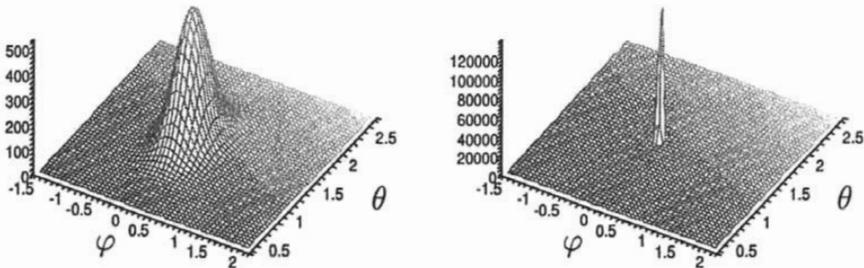


Figura 5.10: $|\phi_{\bar{\alpha}}^{(\hbar)}(w)|^2$ con $\hbar = 0.1$ y $\hbar = 0.001$

donde la primera gráfica la hemos reescalado en un factor de 10^{-5} y la segunda por un factor de 10^{-860} .

Observamos entonces que para valores más pequeños de \hbar , los estados coherentes estarán más concentrados.

5.1. Evolución temporal de los estados $U^{-1}\phi_\alpha$

Recordamos, del capítulo 2, que tenemos una transformación unitaria U del espacio de Hilbert generado por las transformadas de Fourier de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno sobre el espacio $L^2(S^3)$. Esto es

$$\hat{f}(\mathbf{p}) \xrightarrow{U} \Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{p_0}} \left(\frac{p^2(w) + p_0^2}{2p_0} \right)^2 \hat{f}(\mathbf{p}(w)).$$

Por tanto es natural preguntarnos como serán nuestros estados coherentes ϕ_α y su comportamiento cuando han sido llevados al espacio de Hilbert anterior a través de U^{-1} , es decir; en el espacio de momentos. Así,

$$U^{-1}\phi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U^{-1}(\alpha \cdot x)^{n-1}.$$

Pero la inversa de U esta determinada por

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}) = \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^2 \Phi(w(\mathbf{p})),$$

entonces

$$U^{-1}\phi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^2 (\alpha \cdot x(\mathbf{p}))^{n-1}. \quad (5.VI)$$

Utilizando las ecuaciones de la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} x_i(\mathbf{p}) &= \frac{2p_0 \mathbf{p}_i}{p^2 + p_0^2}, & i &= 1, 2, 3 \\ x_4(\mathbf{p}) &= \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}, \end{aligned}$$

y tomando en particular $\bar{\alpha} = (e_1 - ie_2)$, obtenemos

$$\begin{aligned} U^{-1}\phi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^2 \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2) \right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^{n+1} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^{n-1}. \end{aligned} \quad (5.VII)$$

Recordemos, de la sección 2.2, que $p_0^2 = -2E$. Pero sabemos que los valores propios para átomo de hidrógeno están determinados por $E_n = -\frac{1}{2n^2}$, así se obtiene que $p_0 = \frac{1}{n}$ y con esto

$$U^{-1}\phi_\alpha(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{2n}{n^2 p^2 + 1} \right)^{n+1} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^{n-1}. \quad (5.VIII)$$

Es importante conocer la “forma” de esta función, por lo que graficamos su densidad de probabilidad, $|U^{-1}\phi_\alpha(\mathbf{p})|^2$, obteniendo lo que en un principio parece un paquete de ondas localizado, véase la siguiente figura.

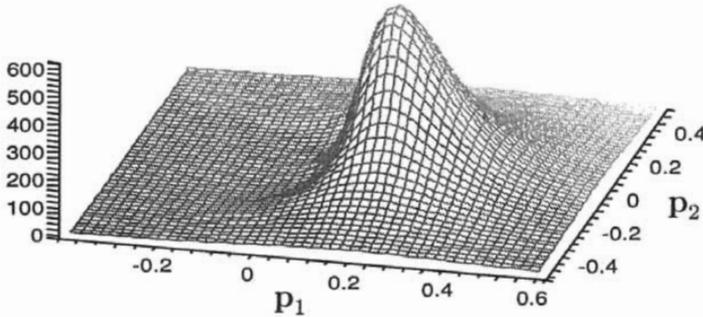


Figura 5.11: $|U^{-1}\phi_\alpha(\mathbf{p})|^2$

La evolución temporal de estos estados está determinada por

$$e^{-it\tilde{H}}U^{-1}\phi_\alpha(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-it\tilde{H}} \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^{n+1} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^{n-1}. \quad (5.IX)$$

donde \tilde{H} se define como el Hamiltoniano en el espacio de momentos

$$\tilde{H} = \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1},$$

con \mathcal{F} la transformada de Fourier.

Tenemos que para cada n , la función $(\alpha \cdot w)^n$, con $\alpha \in \mathcal{Q}^n$, se puede ver como una combinación lineal de armónicos esféricos Y_{nlm} , ya que estos son las funciones propias del Laplaciano en la esfera S^3 (y por tanto $U^{-1}(\alpha \cdot w)^n$ es combinación de $\hat{\Psi}_{nlm} := U^{-1}Y_{nlm}$). En nuestro caso,

$$(\alpha \cdot w)^n = \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^n (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^n = \sum c_j \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)}(\mathbf{p}).$$

Así que al aplicar el operador de evolución se obtiene

$$\begin{aligned} e^{-it\hat{H}} \sum c_j \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)} &= \sum c_j e^{-it\hat{H}} \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)} \\ &= \sum c_j \mathcal{F} e^{-itH} \mathcal{F}^{-1} \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)}, \end{aligned}$$

pero las funciones $\mathcal{F}^{-1}\hat{\Psi}$ son funciones propias del Hamiltoniano del átomo de hidrogeno con valor propio $E_n = -1/2n^2$, entonces

$$\begin{aligned} e^{-it\hat{H}} \sum c_j \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)} &= \sum c_j \mathcal{F} e^{\frac{it}{2n^2}} \mathcal{F}^{-1} \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)} \\ &= e^{\frac{it}{2n^2}} \sum c_j \hat{\Psi}_{nlm}^{(j)}. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación (5.IX) toma la forma

$$e^{-it\hat{H}} U^{-1} \phi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{it}{2n^2}} \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^{n+1} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^{n-1}. \quad (5.X)$$

Ahora, si discretizamos el tiempo t y fijamos a $\mathbf{p}_3 = 0$, es decir, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, 0)$, entonces obtenemos las siguientes gráficas que nos exhiben el comportamiento de la densidad de probabilidad

$$G(\mathbf{p}, t) = \left| e^{-it\hat{H}} U^{-1} \phi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}) \right|^2$$

de estos estados.

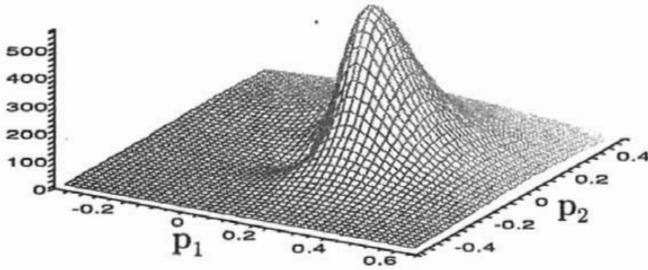


Figura 5.12: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 3$

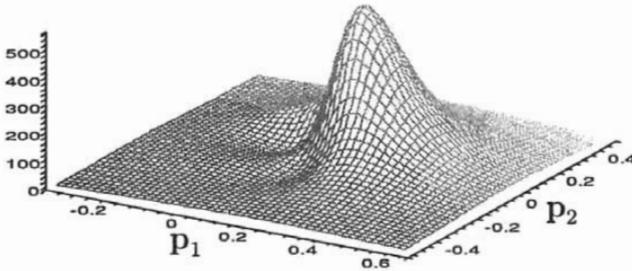


Figura 5.13: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 16$

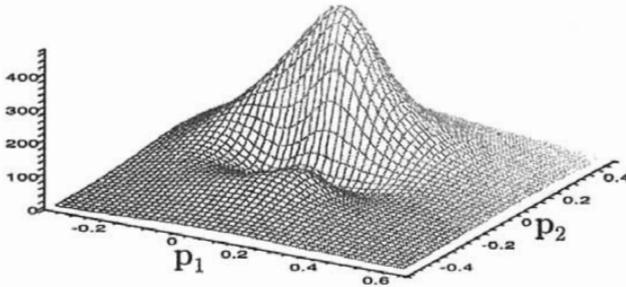
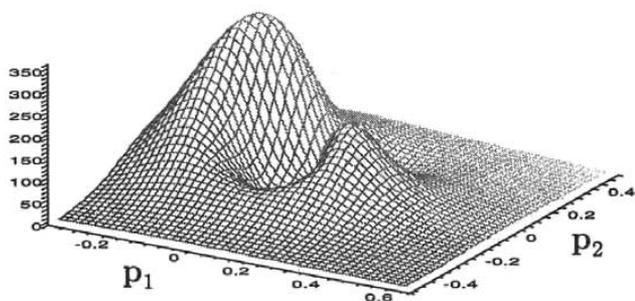
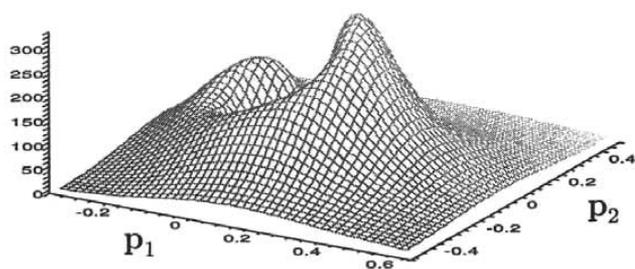
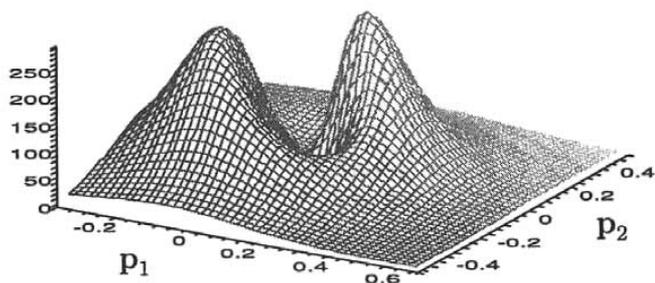
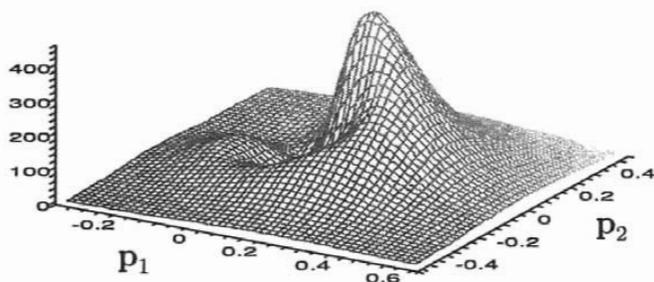
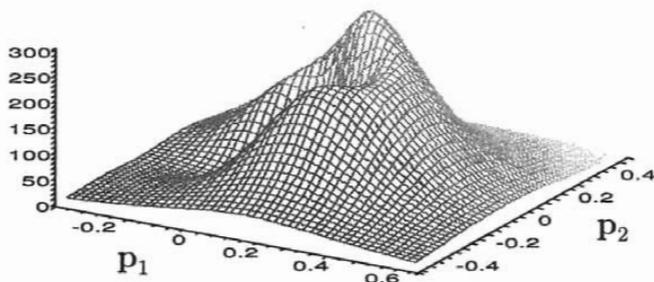


Figura 5.14: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 35$

Figura 5.15: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 55$ Figura 5.16: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 68$ Figura 5.17: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 74$

Figura 5.18: $G(\mathbf{p}, t)$, con $t = 86$ Figura 5.19: $G(\mathbf{p}, t)$ con $t = 98$

Ahora analicemos el caso cuando la constante de Planck \hbar se hace pequeña. Para esto, primero debemos considerar los estados coherentes con la forma como en la ecuación (4.XII), así tenemos que los estados coherentes en el espacio de momentos tienen la expresión

$$U^{-1}\phi_\alpha^{(\hbar)}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{p_0} \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^2 \left(\frac{\alpha \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p})}{\hbar} \right)^{n-1}.$$

Tomando en cuenta que los valores propios de la ecuación de Schrödinger del átomo de hidrógeno son $E_n = \frac{-1}{2\hbar^2 n^2}$ entonces, por la definición de p_0 , se

tiene que la ecuación anterior toma la forma

$$U^{-1}\phi_{\tilde{\alpha}}^{(\hbar)}(\mathbf{p}) = \hbar^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{2n}{\hbar^2 n^2 p^2 + 1} \right)^{n+1} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^{n-1}. \quad (5.XI)$$

Así, para valores pequeños de \hbar , obtenemos las siguientes gráficas

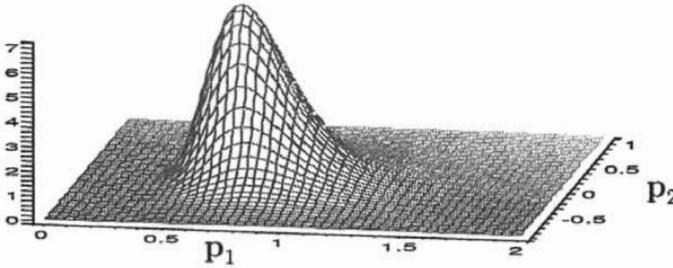


Figura 5.20: Densidad de probabilidad con $\hbar = 0.1$

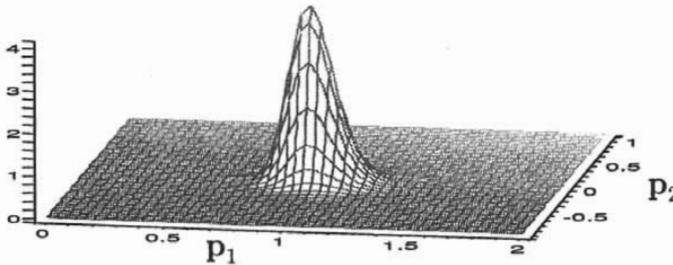


Figura 5.21: Densidad de probabilidad con $\hbar = 0.01$

Donde hemos reescalado la primera gráfica por un factor de 10^{-9} y la segunda por 10^{-88} .

Notamos que no solo se exhibe el comportamiento de concentración sino que además el centro de paquete de ondas se mueve hacia el punto $(1, 0)$.

Para conocer la evolución temporal en este caso ($\hbar = 0.01$), utilizamos las ecuaciones (5.X) y (5.XI) obteniendo

$$e^{-i\frac{t\hat{H}}{\hbar}}U^{-1}\phi_\alpha^{(\hbar)}(\mathbf{p}) = \hbar^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{it}{2\hbar^3 n^2}}}{(n-1)!} \left(\frac{2n}{\hbar^2 n^2 p^2 + 1} \right)^{n+1} (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)^{n-1},$$

que nos proporciona las siguientes gráficas que nos muestran la densidad de probabilidad de dicha evolución, donde se observa que los estados se mantienen más tiempo concentrados cuando $\hbar \rightarrow 0$ y la evolución se da en el círculo de radio 1 centrado en el origen.

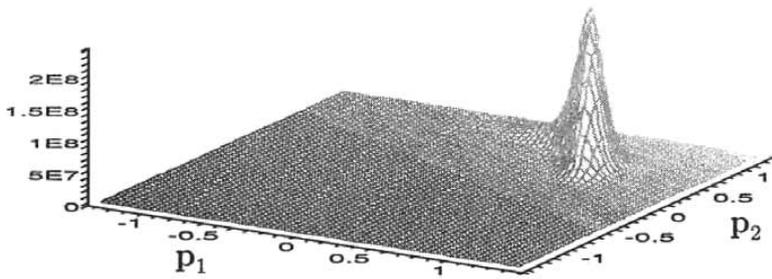


Figura 5.22: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_\alpha$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 1$

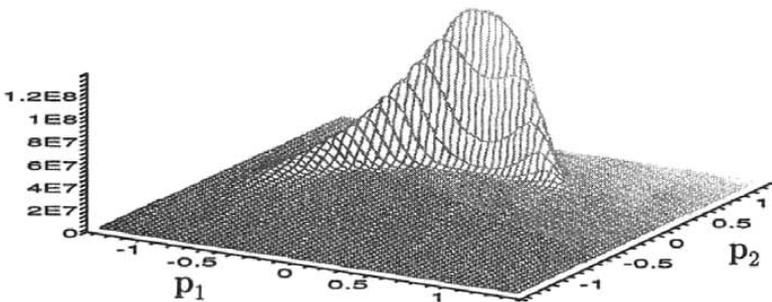


Figura 5.23: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_\alpha$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 2$

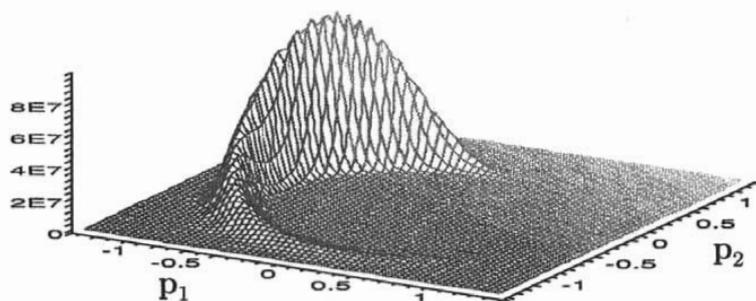


Figura 5.24: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_{\alpha}$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 3$

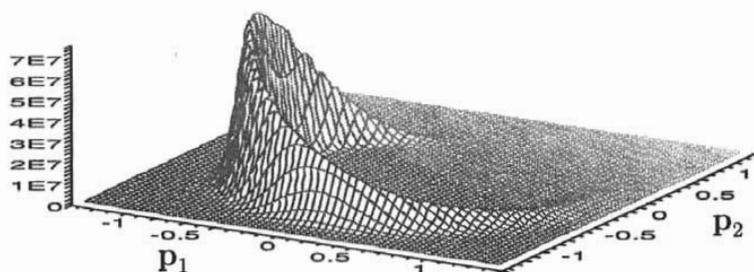


Figura 5.25: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_{\alpha}$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 4$

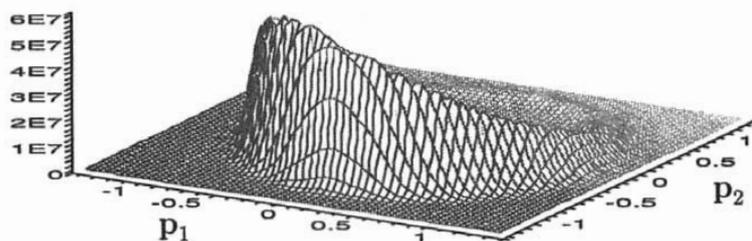


Figura 5.26: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_{\alpha}$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 5$

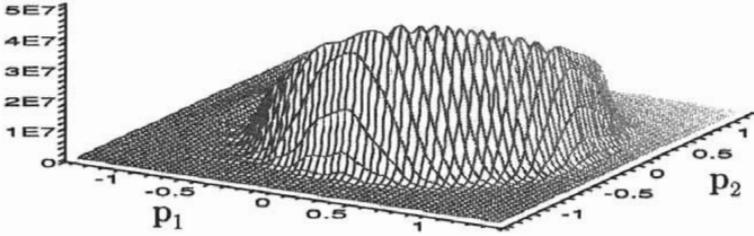


Figura 5.27: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_{\bar{\alpha}}$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 6$

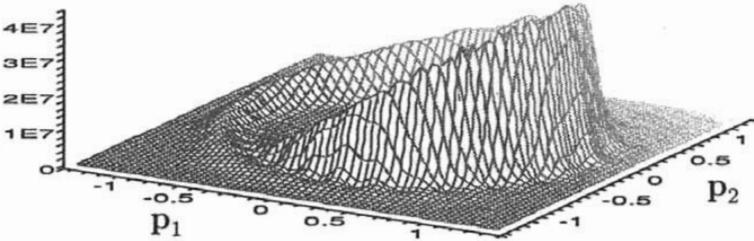


Figura 5.28: Evolución temporal de $U^{-1}\phi_{\bar{\alpha}}$ en el caso $\hbar = 0.01$, $t = 7$

En realidad, los hechos de que el centro del paquete de onda quede en el punto $(\mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = 0)$ al tiempo cero y la evolución temporal de éste se de en una trayectoria circular como ya se ha mostrado gráficamente cuando $\hbar \rightarrow 0$; se esperan por el tipo de proyección que se ha tomado en el capítulo 2. Es decir, la regularización de Moser nos garantiza estos hechos. Esto se ve (utilizando el apéndice 5.A) al darnos cuenta de lo siguiente.

Al tomar $\bar{\alpha} = e_1 - ie_2$ en la cuádrlica nula \mathcal{Q}^3 , se puede identificar con el punto

$$\left(\frac{\Re \bar{\alpha}}{|\Re \bar{\alpha}|}, -\Im \bar{\alpha} \right) = \left((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \right)_{\substack{\mathbf{w} \\ \xi}}$$

en $T^*S_0^3$. Podemos observar que $|\xi| = 1$ por lo que estamos en el caso descrito en el apéndice 5.A acerca de la regularización de Moser para el problema de Kepler con energía $H = -1/2$. Con esto, el punto (\mathbf{w}, ξ) nos determina una geodésica en S^3 . La geodésica determinada por $\bar{\alpha} = e_1 - ie_2$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(s) &= (\cos s, \sin s, 0, 0) \\ \xi(s) &= \frac{d\mathbf{w}}{ds} = (-\sin s, \cos s, 0, 0). \end{aligned} \quad (5.XII)$$

Por tanto, al usar las ecuaciones (5.XVI) del apéndice 5.A, podemos obtener las ecuaciones del punto correspondiente a $\bar{\alpha}$ y su respectiva trayectoria en el espacio de momentos y de posiciones en el problema de Kepler.

En este caso, en el espacio de momentos clásicamente se espera que el estado coherente $U^{-1}\phi_{\bar{\alpha}}$ esté concentrado en el punto

$$\mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = 0, \mathbf{p}_3 = 0,$$

y con evolución temporal alrededor del círculo

$$\mathbf{p}(t) = (\cos t, \sin t, 0),$$

donde se recorrerá la trayectoria en el sentido contrario a la manecillas del reloj.

Apéndice 5.A. Sobre la regularización de Moser

Siguiendo a [32], consideremos la proyección estereográfica $\mathcal{S} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S_0^3$ del capítulo 2, sección 2.3. Esto es, tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \frac{2p_0 \mathbf{p}_i}{p^2 + p_0^2} & i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{w}_4 &= \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}. \end{aligned}$$

En 1970, Moser [18] considera una extensión a la anterior proyección estereográfica. A saber,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : T^*\mathbb{R}^3 &\rightarrow T^*S_0^3 \\ (\mathbf{p}, x) &\mapsto (\mathbf{w}, \xi) \end{aligned}$$

considerando la energía de las partículas igual a $-1/2$, es decir $p_0 = 1$, y con el siguiente requerimiento

$$x \cdot d\mathbf{p} = \mathcal{S}^*(\xi \cdot d\mathbf{w}). \quad (5.XIII)$$

Se puede probar, ver [18], que con el requerimiento anterior se puede obtener que las ecuaciones de la extensión son

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \frac{2\mathbf{p}_i}{p^2 + 1} & i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{w}_4 &= \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \end{aligned} \quad (5.XIV)$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{p^2 + 1}{2} x_i - (x \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}_i & i = 1, 2, 3 \\ \xi_4 &= x \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (5.XV)$$

con inversa $\mathcal{M}^{-1} : T^*S_0^3 \rightarrow T^*\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} x_j &= (1 - \mathbf{w}_4) \xi_j + \xi_4 \mathbf{w}_j \\ \mathbf{p}_j &= \frac{\mathbf{w}_j}{1 - \mathbf{w}_4} & j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.XVI)$$

Así, \mathcal{M} es una transformación canónica que preserva las formas simplécticas, $T^*\mathbb{R}^3$ con la forma simpléctica canónica ($dx \wedge dp$) y T^*S^3 con la forma simpléctica ($d\xi \wedge d\mathbf{w}$) heredada de $T^*\mathbb{R}^4$.

Geoméricamente tenemos lo siguiente. Moser considera la hipersuperficie de $T^*\mathbb{R}^3$ que consiste de las trayectorias cerradas correspondientes a partículas con energía $E = -1/2$.

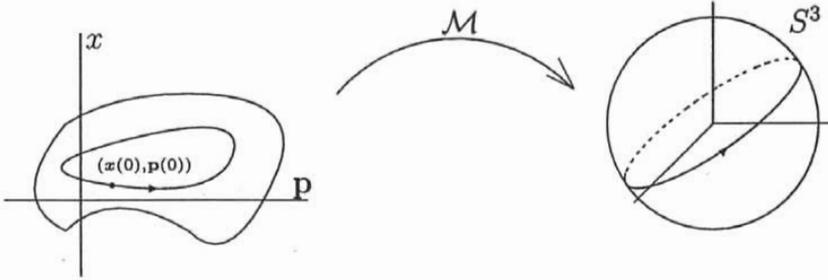


Figura 5.29 Regularización de Moser.

Así, \mathcal{M} transforma cada trayectoria cerrada $(x(t), \mathbf{p}(t))$ que pasa por algún punto (digamos $(x(0), \mathbf{p}(0))$ como en la figura anterior) con energía total

$$E = \frac{|\mathbf{p}(0)|^2}{2} - \frac{1}{|x(0)|} = -\frac{1}{2},$$

en una geodésica en la esfera S^3 , con una reparametrización del tiempo adecuada, a saber,

$$\frac{d}{ds} = |x| \frac{d}{dt}.$$

Aquí entenderemos por geodésica a los círculos máximos en la esfera con la propiedad que se recorren con rapidez constante.

Además, en el espacio $T^*S^3_0$ se tiene el Hamiltoniano

$$G(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} |\mathbf{w}|^2 |\xi|^2 = \frac{1}{2} |\xi|^2 = \frac{1}{2}, \quad (5.xvii)$$

es decir, cuando $|\xi| = 1$.

Apéndice A

Asintóticas para el núcleo integral de \mathcal{B}_{S^3}

En el presente apéndice se mostrará el comportamiento asintótico del núcleo integral

$$A_{S^3}(z, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k-1)!} (\rho(z) \cdot x)^{k-1}$$

de la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$. Las ideas presentadas en este apéndice son prácticamente las dadas por L. E. Thomas y S. R. Wassell [31], en su apéndice B, donde obtienen asintóticas para el núcleo integral de la transformada de Bargmann para $L^2(S^2)$. Aquí se presenta la correspondiente asintótica para $L^2(S^3)$ la cual hasta ahora no había sido obtenida.

Definamos la función $g(\xi)$ sobre el plano complejo dada por

$$g(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{l+1}}{l!} \xi^l, \quad (\text{A.I})$$

que, como se nota en el capítulo 3, es una función analítica sobre todo el plano complejo.

Lema A. 1. *La función $g(\xi)$ tiene la expansión asintótica*

$$g(\xi) = \xi^{1/2} e^{\xi} \left(1 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \dots \right), \quad (\text{A.II})$$

para $\Re\xi \rightarrow \infty$ y $|\Im\xi| \leq \text{const } \Re\xi$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{l+1}}{l!} \xi^l \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{l!} \xi^l \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(l+1)t^2} dt \end{aligned} \quad (\text{A.III})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{(l-1)!} e^{-lt^2} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{l!} e^{-lt^2} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-t^2} e^{\xi e^{-t^2}} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi e^{-t^2}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (\xi e^{-t^2} + 1) e^{\xi e^{-t^2}} e^{-t^2} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.IV})$$

Si realizamos el cambio de variable $e^{-t^2} = (1-w^2)$, para $w \geq 0$, obtenemos que

$$g(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\xi} \int_0^1 [\xi(1-w^2) + 1] e^{-\xi w^2} \frac{w dw}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}}. \quad (\text{A.V})$$

Notemos ahora que la integración de $1/2$ a 1 es del orden $O(\xi^{-\infty})$, es decir,

$$\xi^k \int_{1/2}^1 [\xi(1-w^2) + 1] e^{-\xi w^2} \frac{w dw}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}}$$

está acotado para todo k , por lo que no contribuirá a la expansión asintótica. Para ver esto, sea $\xi = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $|\xi(1-w^2) + 1| \leq \frac{3}{4}|\xi| + 1$. Además

$$\left| \frac{w}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{-\ln(3/4)}} \leq 2,$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \left| \xi^k \int_{1/2}^1 [\xi(1-w^2) + 1] e^{-\xi w^2} \frac{w dw}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}} \right| &\leq c |\xi|^{k+1} \int_{1/2}^1 |e^{-\xi w^2}| dw \\ &= c |\xi|^{k+1} \int_{1/2}^1 e^{-\alpha w^2} dw \end{aligned}$$

si aplicamos que $\alpha \rightarrow \infty$ y que $|\beta| \leq \text{const } \alpha$, entonces tenemos que

$$|\xi| \leq c \alpha, \quad e^{-\alpha w^2} \leq e^{-\alpha/4}, \quad (\text{A.VI})$$

y con esto

$$\left| \xi^k \int_{1/2}^1 [\xi(1-w^2) + 1] e^{-\xi w^2} \frac{w dw}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}} \right| \leq c \alpha^{k+1} e^{-\alpha/4} < \infty,$$

ya que se tiene un máximo para $\alpha = 4(k+1)$, y por tanto se tiene que

$$g(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^\xi \int_0^{1/2} [\xi(1-w^2) + 1] e^{-\xi w^2} \frac{w dw}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}} + O(\xi^{-\infty}). \quad (\text{A.VII})$$

Ahora para la integral que queda, consideraremos primero la integral

$$I_1(\xi) = \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} H(w) dw, \quad (\text{A.VIII})$$

donde $H(w) := \frac{w}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}}$. Notamos que ésta función podría tener problemas cuando $w = 0$, pero al aplicar L'Hopital se tiene que

$$\lim_{w \rightarrow 0^+} H(w) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w^2}{-\ln(1-w^2)} = \lim_{w \rightarrow 0} 1 + w^2 = 1$$

por lo que $H(w)$ está bien definida para $0 \leq w \leq 1$. Si extendemos a $H(w)$ de manera par al intervalo $[-1, 1]$, obtenemos una función par bien definida e infinitamente diferenciable, por lo que se le puede obtener una expansión de Taylor

$$H_{ext}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{2n} w^{2n},$$

que converge absolutamente para $|w| \leq 1/2$. Así pues, para $0 \leq w \leq 1/2$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{2n} w^{2n} = \frac{w}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}} = H(w),$$

con $k_0 = 1$. Podemos notar, en particular, que la suma finita $\sum^N k_{2n} w^{2n}$ difiere de $H(w)$ por $O(w^{2N+2})$. Esto es

$$\begin{aligned} \left| H(w) - \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} k_{2n} w^{2n} \right| \\ &= w^{2N+2} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} k_{2n} w^{2n-2N-2} \right| \\ &\leq w^{2N+2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |k_{2n}| (1/2)^{2n-2N-2} \\ &\leq (2w)^{2N+2} \sum_{n=0}^{\infty} |k_{2n}| (1/2)^{2n} \\ &= c_1 w^{2N+2}, \end{aligned}$$

donde $c_1 = 2^{2N+2} \sum_{n=0}^{\infty} |k_{2n}| (1/2)^{2n}$ es una constante. Por tanto

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} k_{2n} w^{2n} = O(w^{2N+2})$$

entonces

$$e^{-\xi w^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} k_{2n} w^{2n} = O(e^{-\xi w^2} w^{2N+2}),$$

y se obtiene que

$$\int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} k_{2n} w^{2n} dw = O\left(\int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} w^{2N+2} dw\right) \quad (\text{A.IX})$$

$$= O(\xi^{-\frac{2N+3}{2}}), \quad (\text{A.X})$$

donde la última igualdad se obtiene realizando el cálculo, con $\eta = \sqrt{\alpha} w$ y (A.VI)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} w^{2N+2} dw \right| &\leq \alpha^{-\frac{2N+3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \eta^{2N+2} d\eta \\ &\leq c |\xi|^{-\frac{2N+3}{2}}. \end{aligned}$$

La integral $I_1(\xi)$ dada en (A.VIII), se puede ver como

$$I_1(\xi) = \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw + O(\xi^{-\frac{2N+3}{2}}). \quad (\text{A.XI})$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw - \int_{1/2}^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw, \end{aligned}$$

donde para la primera integral se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw = \sum_{n=0}^N k_{2n} \int_0^{\infty} e^{-\xi w^2} w^{2n} dw$$

tomando $t = \sqrt{\xi} w$,

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^N k_{2n} \xi^{-n-1/2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^N d_n \xi^{-n-1/2}, \end{aligned}$$

donde $d_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Mientras que para la segunda integral

$$\int_{1/2}^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw = O(\xi^{-\infty}).$$

Para ver esto, recordamos que $|\xi| \leq c \alpha$ y realizamos el cambio de variable

$v = w - 1/4$, así se tiene

$$\begin{aligned}
 & \left| \xi^k \int_{1/2}^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k_{2n} w^{2n} dw \right| \\
 &= \left| \xi^k \int_{1/4}^{\infty} e^{-\xi v^2} e^{-\xi v/2} e^{-\xi/8} \sum_{n=0}^N k_{2n} (v + 1/4)^{2n} dv \right| \\
 &\leq c |\alpha|^k e^{-\alpha/8} \int_{1/4}^{\infty} e^{-\alpha v^2} e^{-\alpha v/2} \sum_{n=0}^N |k_{2n}| (v + 1/4)^{2n} dv \\
 &\leq c |\alpha|^k e^{-\alpha/8} \sum_{n=0}^N |k_{2n}| \int_{1/4}^{\infty} e^{-\alpha v^2} (v + 1/4)^{2n} dv \\
 &\leq c |\alpha|^k e^{-\alpha/8} \left(\sum_{n=0}^N |k_{2n}| \right) \sum_{l=0}^{2N} \binom{2N}{l} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^{2N-l} (1/4)^l dv \\
 &\leq c_3 |\alpha|^k e^{-\alpha/8} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^{2N} N dv \\
 &\leq c_4 |\alpha|^k e^{-\alpha/8} < \infty.
 \end{aligned}$$

Por tanto, de (A.XI) y lo anterior

$$\begin{aligned}
 I_1(\xi) &= \sum_{n=0}^N d_n \xi^{-n-1/2} + O(\xi^{-\infty}) + O(\xi^{-\frac{2n+3}{2}}) \\
 &= d_0 \xi^{-1/2} + d_1 \xi^{-3/2} + d_2 \xi^{-5/2} + \dots \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi^{1/2} (e_0 \xi^{-1} + e_1 \xi^{-2} + e_2 \xi^{-3} + \dots). \quad (\text{A.XII})
 \end{aligned}$$

De la misma manera realizamos un análisis para

$$I_2(\xi) := \xi \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} G(w) dw, \quad (\text{A.XIII})$$

donde $G(w) := \frac{(1-w^2)w}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}}$, y se puede verificar, como en el caso de $H(w)$, que está bien definida para cuando $w \rightarrow 0^+$. Así también consideramos su extensión de manera par y obtenemos su expansión en series de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} k'_{2n} w^{2n} = G_{ext}(w),$$

que es absolutamente convergente para $|w| \leq 1/2$. Entonces, para $0 \leq w \leq 1/2$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} k'_{2n} w^{2n} = G(w),$$

donde $k'_0 = 1$.

Análogamente a lo hecho con anterioridad es inmediato que

$$G(w) = \sum_{n=0}^N k'_{2n} w^{2n} + O(w^{2N+2}),$$

con lo que

$$\begin{aligned} I_2(\xi) - \int_0^{1/2} \xi e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k'_{2n} w^{2n} dw &= O\left(\xi \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} w^{2N+2} dw\right) \\ &= O\left(\xi^{-\frac{2N+5}{2}}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.XIV})$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} \xi \int_0^{1/2} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k'_{2n} w^{2n} dw \\ = \xi \int_0^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k'_{2n} w^{2n} dw - \xi \int_{1/2}^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k'_{2n} w^{2n} dw. \end{aligned}$$

Para la primera integral

$$\xi \int_0^{\infty} e^{-\xi w^2} \sum_{n=0}^N k'_{2n} w^{2n} dw = \sum_{n=0}^N d'_n \xi^{-n+1/2}$$

donde $d'_n = k'_{2n} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt$. Se observa que $d'_0 = \sqrt{\pi}/2$. La segunda integral tenemos que es $O(\xi^{-\infty})$ por lo que con (A.XIV) y lo anterior

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &= \sum_{n=0}^N d'_n \xi^{-n+1/2} + O(\xi^{-\infty}) + O\left(\xi^{-\frac{2N+5}{2}}\right) \\ &= d'_0 \xi^{1/2} + d'_1 \xi^{-1/2} + d'_2 \xi^{-3/2} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi^{1/2} (1 + e'_1 \xi^{-1} + e'_2 \xi^{-2} + \dots). \end{aligned} \quad (\text{A.XV})$$

Combinando (A.VII),(A.XII) y (A.XV) obtenemos

$$\begin{aligned}g(\xi) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\xi} (I_1(\xi) + I_2(\xi) + O(\xi^{-\infty})) \\ &= \xi^{1/2} e^{\xi} (1 + a_1 \xi^{-1} + a_2 \xi^{-2} + \dots).\end{aligned}$$

□

Conclusiones

En el presente trabajo, se ha realizado un estudio matemático en detalle sobre la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$, introducida por Villegas-Blas en [32] en el cual se prueban todas sus propiedades. Además también se ha realizado un estudio numérico y asintótico de los estados coherentes correspondientes a dicha transformada. Con la ayuda de una transformación unitaria introducida en el capítulo 2, que nos relaciona las funciones propias del átomo de hidrógeno con las del Laplaciano en la esfera S^3 , se pudieron escribir los estados coherentes para el átomo de hidrógeno en el espacio de momentos y estudiar numéricamente sus propiedades de evolución temporal. Así también esbozar el caso del límite semiclásico, cuando hacemos tender \hbar a cero, en dicha evolución.

Como proyectos futuros podemos mencionar el análisis de los estados coherentes en el espacio de configuraciones así como también su evolución temporal (proyecto en el cual estoy actualmente trabajando), encontrar alguna expansión asintótica para dichos estados tanto en el espacio de momentos como en el de configuraciones, y así poder tomar el límite semiclásico.

Como se mencionó en la introducción, existen varios tipos de conjuntos de estados coherentes para el átomo de hidrógeno en la literatura. Es de mucha importancia el analizar y comparar dichos estados con los presentados en este trabajo.

En años recientes se a tomado gran interés por el tema de los *resurgimientos* (revivals) de los estados coherentes bajo su evolución temporal, ver por ejemplo a Combescure [5] y referencias contenidas ahí. Esto nos da información de cuando los estados podrían recuperar su densidad de probabilidad o si estos se pierden al pasar el tiempo. Este es otro proyecto a futuro que pienso abordar, particularmente para el sistema de estados coherentes para el átomo de hidrógeno presentados en esta tesis.

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente al Dr. Carlos Villegas Blas por ser el director de esta tesis. También agradezco a los sinodales: Dr. Stephen B. Sontz, Dr. Salvador Pérez Esteva, Dr. Rafael René del Río Castillo y al Dr. Antonio Hernández Garduño, por su interés y valiosos comentarios para el mejoramiento de esta tesis. Agradezco a Franco Toledo de la Cruz por su apoyo en los cálculos numéricos del capítulo cinco, al CONACyT y a DGEP por su apoyo económico para la realización de mis estudios de maestría.

Bibliografía

- [1] M. Bander, C. Itzykson, *Group theory and the hydrogen atom (I)*. Reviews of Modern Physics, Vol 38, number 2 (1966).
- [2] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I*. Comm. Pure Appl. Math. 14, 187-214 (1961).
- [3] B. Cordani, *The Kepler problem. Group theoretical aspects, regularization and quantization, with application to the study of perturbations*. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [4] H.A. Bethe, E.E. Salpeter, *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms*. Cornell University, Ithaca, New York 1977.
- [5] M. Combescure, *About quantum revivals, quantum fidelity. A semiclassical approach*. arXiv : math-ph/0408058 v2 (2004).
- [6] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. CECSA, 1980.
- [7] R.J. Glauber, *The quantum theory of optical coherence*. Phys. Rev. 130, 2529-2539 (1963).
- [8] R.J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Phys. Rev. 131, 2766-2788 (1963).
- [9] D. Gurarie, *Symmetries and laplacians: Introduction to harmonic analysis, group representations, and applications*. Amsterdam, North-holland, 1992.
- [10] B. Hall, *The Segal-Bargmann 'coherent' state transform for compact Lie Groups*, J. Funct. Anal. 122, 103-151 (1994).

- [11] B. Hall, *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*. Contemporary Mathematics Vol. 260, edited by S. Pérez-Esteva and C. Villegas-Blas (American Mathematical Society, Providence, RI, 2000).
- [12] B. Hall, J. Mitchell, *Coherent states on the sphere*, J. Math. Phys. 43, 1211-1236 (2002).
- [13] S. Helgason, *Topics in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*. Progress in Mathematics Vol. 13, Birkhäuser (1981).
- [14] K. Ii, *On a Bargmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions*, Tohoku Math. J. 38, 57-69 (1986).
- [15] J.R. Klauder, B.S. Skagerstam, *Coherent states: Applications in physics and mathematical physics*. World Scientific, 1985.
- [16] K. Kowalski, J. Rembielinski, *The Bargmann representation for the quantum mechanics on a sphere*, J. Math. Phys. 42, 4138-4147 (2001).
- [17] J.E. Marsden, *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, Texts in applied mathematics 17, 1999.
- [18] J. Moser, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*. Comm. Pure Appl. Math. 23, 609-636 (1970).
- [19] T. Paul, A. Uribe, *A construction of quasi-modes using coherent states*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol 59, number 4, 357-381 (1993).
- [20] J. Rawnsley, *A non unitary pairing of polarizations for the Kepler problem*, Trans. Am. Math. Soc., 250, 167-180 (1979).
- [21] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I: Functional Analysis*. Academic Press (1980).
- [22] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press (1980).
- [23] J.J. Rotman, *Advanced modern algebra*. Prentice Hall, 2002.
- [24] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, 14, 664 (1926).

- [25] I. Segal, *Mathematical problems of relativistic physics*, Lectures in Applied Mathematics, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1963).
- [26] I. Segal, *Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field*, Illinois J. Math. 6, 500-523, (1962).
- [27] I. Segal, *The complex wave representation of the free Boson field*, in "Topics in functional analysis". Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 3, pp. 321-343, Academic Press, New York, 1978.
- [28] M. Stenzel, *The Segal-Bargmann transform on a symmetric space of compact type*, J. Funct. Anal. 165, 44-58 (1999).
- [29] S. Sternberg, *Group theory and physics*. Cambridge, Cambridge University, 1994.
- [30] W. Thirring, *Classical mathematical physics : dynamical systems and field theories*. New York, Springer, 1997.
- [31] L.E. Thomas, S.R. Wassell, *Semiclassical approximation for Schrödinger operators on a 2-sphere at high energy*, J. Math. Phys. 36, No. 10, 5480-5505 (1995).
- [32] C. Villegas-Blas, *The Laplacian on the n-sphere, the hydrogen atom and the Bargmann space representation*, Ph. D. thesis, Mathematics Department, University of Virginia, 1996.
- [33] C. Villegas-Blas, *The Bargmann transform and canonical transformations*. Journal of Mathematical Physics, Vol. 43, number 5, May 2002.
- [34] C. Villegas-Blas, *The Bargmann transform for $L^2(S^3)$ and regularizations of the Kepler problem*. Contemporary Mathematics, Vol. 307, 2002, AMS-SMM, R. Weder., P. Exner y B. Grébert editores.
- [35] C. Villegas-Blas, *The Bargmann transform and regularization of the 2,3,5-dimensional Kepler problem*. Enviado a: Journal of Mathematical Physics.
- [36] A. Voros, *Wenzel-Kramer-Brillouin method in the Bargmann representation*. Physical Review A, Vol 40, number 12, 6814-6825 (1989).

- [37] R. Wada, *On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere*. Tohoku Math. J., 38, 417-432 (1986).