UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"AUXILIAR DE MATEMATICAS FINANCIERAS I POR COMPUTADORA, PROGRAMA INTERACTIVO."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALBERTO LOZANO VARGAS

DIRECTORA DE TESIS: ACT. MARIA AURORA VALDES MICHELL

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Alberto Lozano Vargas
FECHA: 22/ags/2005
FIRMA: Alberto Lozano V.

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Auxiliar de Matemáticas Financieras I por Computadora, Programa Interactivo"

realizado por Alberto Lozano Vargas

con número de cuenta 7709458-6, quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	Act. María Aurora Valdés Michell	
Propietario	Act. Marina Castillo Garduño	
Propietario	Act. Jorge Luis Silva Haro	
Suplente	Act. Enrique Maturano Rodríguez	
Suplente	Act. Felipe Zamora Ramos	

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

CONTENIDO

I. ACERCA DEL PROGRAMA

II. PARA INSTALAR SU PROGRAMA Y/O CONSULTARLO

II.1 Requerimientos de Hardware y Software

II.2 Instalación del programa y de las fuentes.

III. DESCRIPCION DEL PROGRAMA

III.1 Navegación dentro del programa

III.2 Interactividad con el usuario

III.2.1 Botones Permanentes

III.2.2 Áreas Calientes

III.2.3 Botones de Ejercicio, Continuar o Regresar

III. 3 ESTRUCTURA TEMATICA DEL PROGRAMA

CAPÍTULO 1: PROGRESION ARITMÉTICA

CAPÍTULO 2: PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

CAPÍTULO 3: INTERÉS SIMPLE

CAPÍTULO 4: DESCUENTO SIMPLE

CAPÍTULO 5: INTERÉS COMPUESTO

CAPÍTULO 6: ECUACIÓN DE VALOS

CAPÍTULO 7: ANUALIDADES

IV EJECUTANDO EL PROGRAMA

IV.1 Pantalla de presentación

IV.2 Pantalla de presentación

I. ACERCA DEL PROGRAMA

Softwarwe "Auxiliar de Matemáticas Financieras I por Computadora, Programa Interactivo": es un programa para computadoras PC-compatibles, cuya finalidad es servir como material de apoyo a aquellos alumnos que se inicien en el aprendizaje de Matemáticas Financieras I, de la carrera de Actuaría que imparte la Facultad de Ciencias de la UNAM, o para cualquier otra institución que imparta la materia.
Este software aborda siete de los principales capítulos que cualquier libro de Matemáticas Financieras contiene tales como, I.-Progresión Aritmética, 2.-Progresión Geométrica, 3.-Interés Simple, 4.-Descuento Simple, 5.-Interés Compuesto, 6.-Ecuación de Valor y 7.-Anualidades.

II. PARA INSTALAR SU PROGRAMA Y/O CONSULTARLO

II.1 Requerimientos de Hardware y Software

Computadora: IBM PC, POWER MAC.

Sistema operativo: Windows XP en adelante.

Adaptador y monitor compatible con uno de los siguiente: SVGA, Plug and Play.

Memoria RAM: 8 MB.

Unidad de Disco: Disco Duro

II.2 Instalación del programa y de las fuentes.

Insertar el CD en su unidad.

Abra el contenido y copie **toda** la carpeta en un directorio que usted desee.
NOTA: los programas auxiliares que contiene, son para que se vean los botones y colores adecuadamente.

Si no desea instalar el programa en su computadora, lo puede ver directamente en el CD. Con solo abrir la carpeta Tesis Final y después el icono que contiene un cuadrado y el rombo con un circulo rojo con una **a** de nombre Tesis.

III. DESCRIPCION DEL PROGRAMA

III.1 Navegación dentro del programa

La navegación del programa se lleva a cabo mediante botones. Abajo vemos los capítulos que esta Tesis contiene y al acercar el cursor al botón del capitulo que se desee ver, este cambiará de color de verde a rojo y las letras de amarillo a blanco (Ver ej. en PROGRESIONES), además de que el cursor cambiara de flecha a una manita, indicando con esto, que esta en el área de activación y con dar un clic este se accionara.

III.2 Interactividad con el usuario

III.2.1 Botones Permanentes. En todas las pantallas a partir de la anterior, encontrara los siguientes botones que vemos en el ejemplo de abajo y una breve descripción de su accionar.

III.2.2 Áreas Calientes. En algunas de las pantallas encontrara áreas con el borde rojo, o en el extremo inferior derecho en el que se le pide acerque el cursor aquí y aparcera mas información referente al problema que se ve, su conclusión o la comprobación de alguna formula.

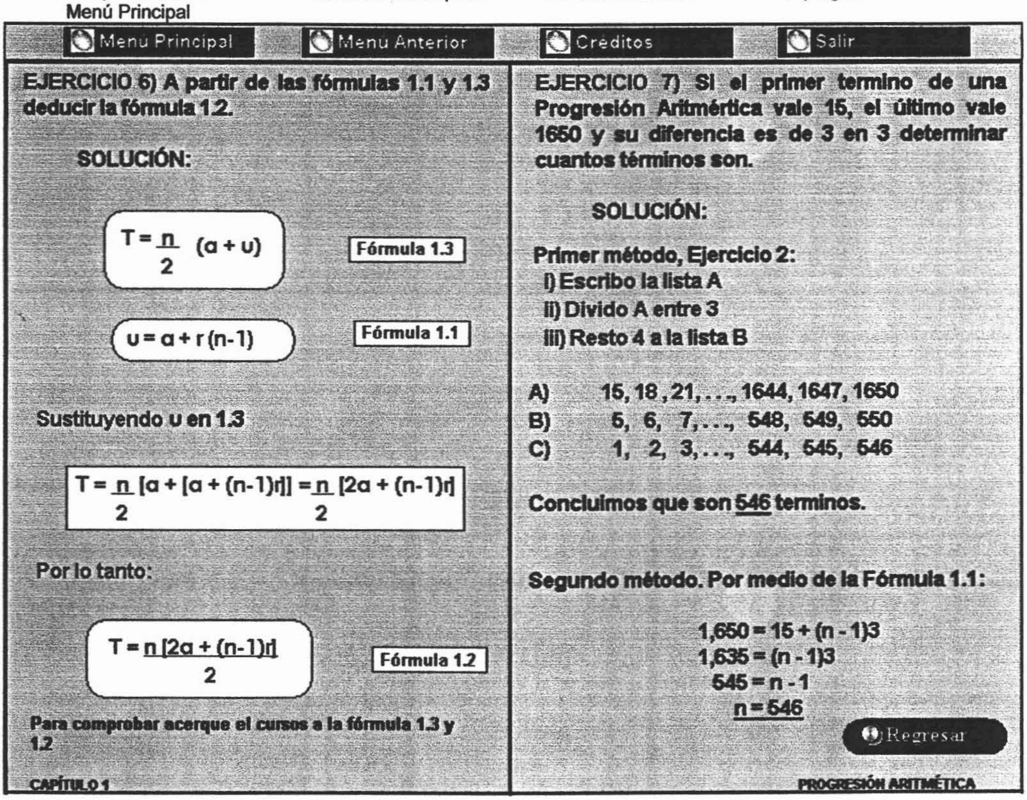
III.2.3 Botones de Ejercicio, Continuar o Regresar. Como los ya mencionamos en 1.3 y su acción será esa, la de su nombre.

Botón que navega a la pantalla del Menú Principal

Botón que regresa al Menú del Capitulo

Botón que muestra los datos del autor

Botón para salir del programa



III.3 ESTRUCTURA TEMATICA DEL PROGRAMA

CAPÍTULO 1: PROGRESION ARITMÉTICA

- Definición de Progresión Aritmética y 2 problemas con el algoritmo de la suma.
- Ejercicios 3 y 4 Deducción de la Fórmula del último termino, Ejercicio 5 deducción de la fórmula de la suma
- Ejercicio 6 Deducción de la fórmula de la suma por medio del último termino, Ejer. 7. Deducción de fórmula por las otras dos y un ejemplo.

CAPÍTULO 2: PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

- Definición de Progresión Geométrica y 2 problemas con el algoritmo de la suma.
- Ejercicio 3) cálculo del último termino, Ejercicio 4) deducción de la fórmula del último termino, Ejercicio 5) Aplicación del Ejercicio 4) al Ejercicio 3)
- Ejercicios Fórmulas y sus aplicaciones

CAPÍTULO 3: INTERÉS SIMPLE

- Fórmulas de Interés Simple y Monto, Ejercicios 1) y 2), aplicación de fórmulas.
- Conversión de Tasa Simple Anual a Simple Periódica, Ejercicios 3), 4) y 5).
- Planteamiento de ecuaciones con aplicación de Fórmulas Monto Ejercicios 6), 7) y 8)
- Pago y fecha equivalente (sustituir un pago por varios)

CAPÍTULO 4: DESCUENTO SIMPLE

- *Fórmulas de Descuento Simple y Monto*
- Ejercicio 1, Cálculo de un pagaré aplicación de la fórmula 4.3
- Ejercicio 2, Cálculo de pagarés con fechas diferentes
- Ejercicio 3, Cálculo de una tasa simple anual a un año y a un mes
- Deducir la fórmula de tasa de interés que equivale a tasa de descuento y aplicar al ejercicios 3)
- Cálculo de un pagaré a una tasa equivalente de descuento a interés simple

CAPÍTULO 5: INTERÉS COMPUESTO

- Definición de Interés Compuesto y Tasas Periódicas, Efectiva y Nominales
- Ejercicios 1- 2, Cálculo de un Monto a una tasa nominal (capitalizable) trimestral con Excel
- Ejercicio 3, Deducción de Fórmulas para Montos y periodos m, con un ejercicio
- Ejercicio 4, Deducción de Fórmulas de tasas periódicas y nominales con el ejercicio 5
- Ejercicio 6, Cálculo de la Renta a una tasa nominal capitalizable mensualmente, Ejercicio 7, Cálculo del 6) con fechas especificas a una tasa nominal por progresión geométrica Ejercicio 8, Cálculo el Monto por medio de la Formula 5.7

CAPÍTULO 6: ECUACIÓN DE VALOS

- Definición de Ecuación de Valor y Algoritmo para su solución, Con Ejercicio 1
- Ejercicios 2, 3, 4 y 5, Para reafirmar el Ejercicio 1
- Ejercicios 6, cuando se igualan los intereses, 7 por medio de Progresión Geométrica
- Ejercicios 8 donde se busca el tiempo, 9 con Fecha Equivalente y 10 Un ejemplo

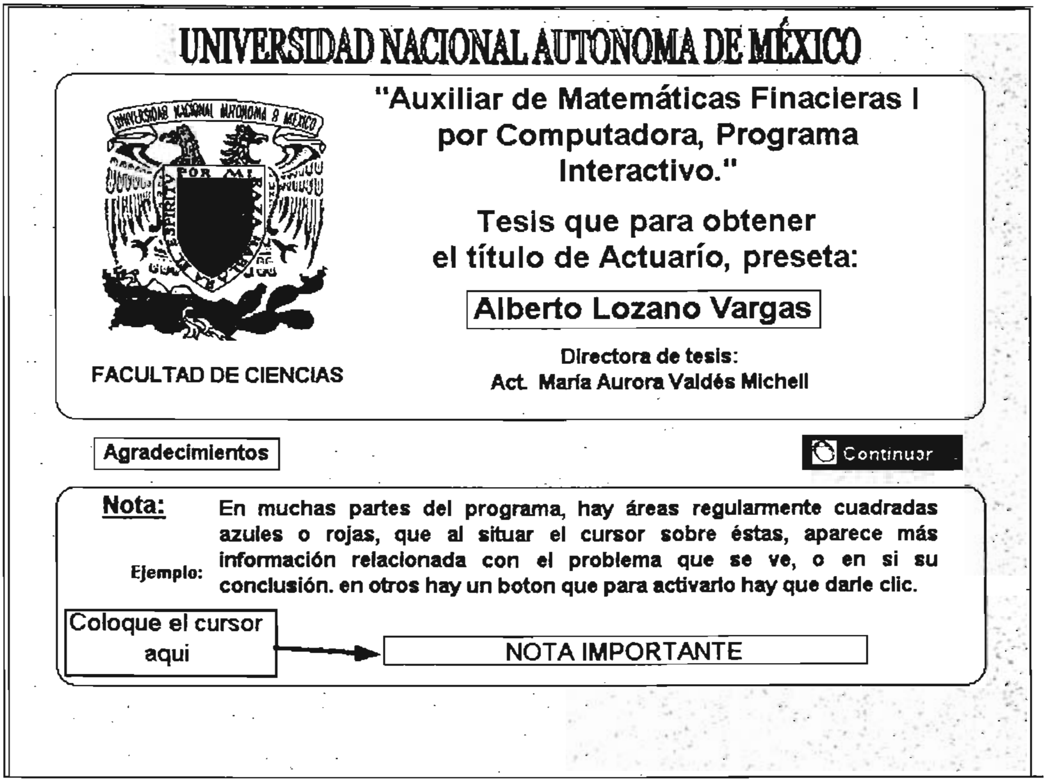
CAPÍTULO 7: ANUALIDADES

- Definición de Anualidad, (Ejemplos. Contingentes y Ciertas), Deducción de fórmula de Valor presente de una anualidad y un ejemplo
- Anualidad Ordinaria (o vencida) y un ejemplo resuelto por Progresión Geométrica con soluciones
- Monto de una anualidad ordinaria, deducción de la fórmula y Ejercicio 3
- Anualidades y Montos Valuados a tasa nominal y Ejemplos
- Ejercicio 6 (tasa Nominal)

IV EJECUTANDO EL PROGRAMA

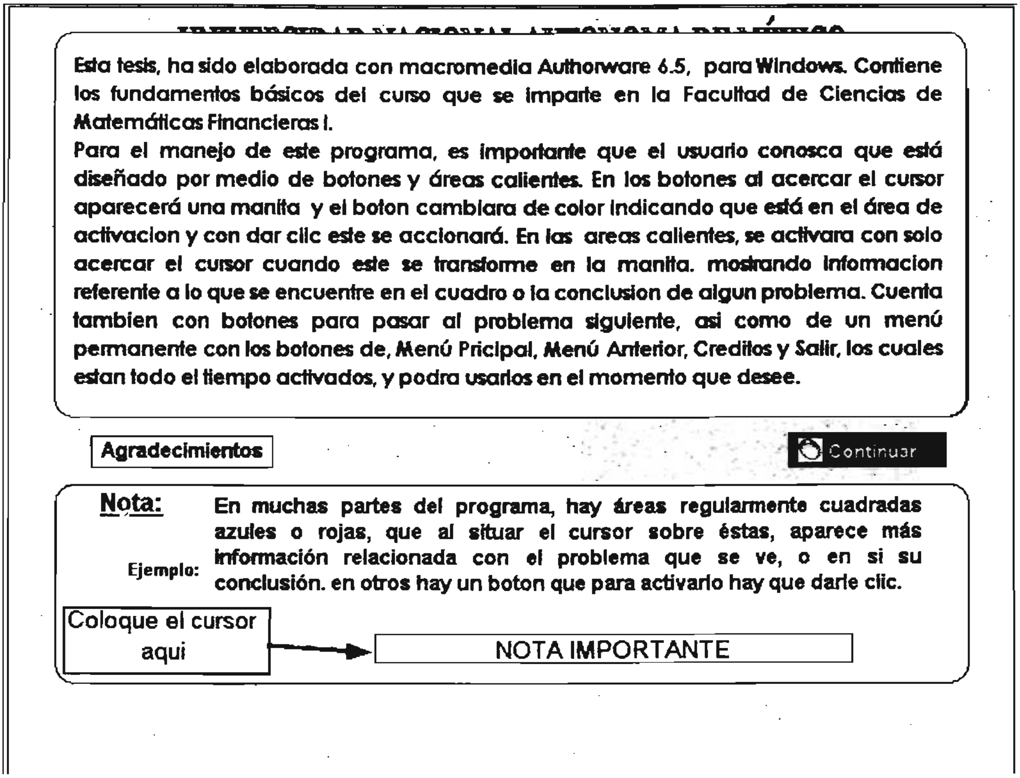
IV.1 Pantalla de presentación

Al correr el programa, se despliega la pantalla siguiente. Donde se muestra el nombre de la institución y su escudo, el título de la tesis, el autor, nombre de la directora de tesis, agradecimientos y por último una nota y **Nota Importante,** las cuales como vemos que lo indica al acercar el cursor aparece mas información. Si no desea ver esto solo de clic a continuar y pasara a la pantalla vista en **III.1**



IV.2 Pantalla de presentación

Al acercar el cursor a el área donde dice coloque el cursor aquí, aparece la siguiente información en color amarillo.**léalo con mucha atención**. De igual forma en el nombre del autor y en agradecimientos.



INTRODUCCIÓN

Al finalizar los capítulos 1 y 2, de este auxiliar didáctico de "MATEMÁTICAS FINANCIERAS I", el alumno será capaz, de efectuar cálculos financieros, con el opoyo de "Progresiónes Aritméticas" del Capitulo 1 y "Progresiónes Geométricas" Capítulo 2; Ya que ambos temas se veran aqui en PROGRESIONES. Y su dominio es básico para aprender Matemáticas Financieras.
Empezaremos con la definición y algunos ejemplos, para que posteriormente basados en estos, podamos deducir su respectiva fórmula. A continuación vemos una introducción de ambas.

"Progresión Aritmética", secuencia de números que crecen o decrecen en una cantidad fija llamada *razón*.

Ejemplos: 1, 2, 3, . . . , n-2, n-1, n

300, 297, 294, . . . , 36, 33, 30

ARITMÉTICA

"Progresión Geométrica", Sucesión de números tales que la proporción entre cualquier término (que no sea el primero) y el término que le precede es una cantidad fija llamada *razón*.

Ejemplos: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187

GEOMÉTRICA

CAPÍTULO 1

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Definición de Progresión Aritmética y problemas 1 y 2 con el algoritmo de la suma.

Ejercicios 3 y 4 Deducción de la Fórmula del último termino
Ejercicio 5 deduccion de la fórmula de la suma y comprobación con el Ej. 1

Ejercicio 6 Deducción de la fórmula de la suma, por medio del último termino.
Ejercicio 7. Por medio de las fórmula 1.1 y 1.3 deducir la fórmula 1.2
Ejercicio 8. determinar cuantos terminos son.
Ejercicio 9. Comprobacion de la fórmula 1.3, con el Ej. 3
Ejercicio 10. Comprobacion de la fórmula 1.2, con el Ej. 3

"PROGRESIÓN ARITMÉTICA"

Una "Progresión Aritmética" es una lista de números que difieren entre su anterior una cantidad constante denominada razón.

Ejemplos:

1) 1, 2, 3, . . . , n-2, n-1, n (razón 1)

2) 22, 24, 26, . . . , 296, 298, 300 (razón 2)

3) 40, 44, 48, . . . , 392, 396, 400 (razón 4)

De acuerdo a la definición de Progresión Aritmética, podemos deducir una serie general. Definiendo como a el primer termino, como r la diferencia ó razón de los terminos consecutivos y como n la cantidad de terminos.

Por lo tanto nuestra serie se puede expresar de la siguiente manera:

$$a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots,\ a + (n-3)r,\ a + (n-2)r,\ a + (n-1)r$$

A continuación se muestran los ejercicios 1 y 2, que nos muestran el algoritmo de la suma.

Ejercicios 1 y 2

EJERCICIO 1) Calcular la suma de los primeros 100 números del 1 al 100 de 1 en 1.

SOLUCIÓN:

El algoritmo para este cálculo consiste en:

i) **Escribir la serie. llamémosla ecuación A.**

A) $T = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$

ii) **Escribir A pero en forma inversa, llamemosla B.**

B) $T = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$

iii) **Por último, escribimos la ecuación C, Sumando A y B.**

C) $2T = 101 + 101 + 101 + \ldots 101 + 101 + 101$

De la cual obtenemos 101 terminos 100 veces,

Por tanto: $2T = (101)(1 + 1 + 1 + \ldots 1 + 1 + 1)$

$2T = (101)(100) = 10{,}100$

$\underline{T = 5{,}050}$

EJERCICIO 2) Calcular la suma de los números del 30 al 300 con diferencias de 3 en 3.

SOLUCIÓN:

Utilizamos el algoritmo del Ejercicio 1.

i) A) $T = 30 + 33 + 36 + \ldots + 294 + 297 + 300$
ii) B) $T = 300 + 297 + 294 + \ldots + 36 + 33 + 30$
iii) C) $2T = 330 + 330 + 330 + \ldots + 330 + 330$

De la cual obtenemos 330 en todos los terminos, pero. ¿Cuantos terminos son?.
Para saberlo procedemos de la siguiente manera:

Paso 1) Escribimos A), (lista 1).
$30 + 33 + 36 + \ldots + 294 + 297 + 300$ **(lista 1)**

Paso 2) Dividimos la (lista 1) entre 3.
$10 + 11 + 12 + \ldots + 98 + 99 + 100$ **(lista 2)**

Paso 3) Restamos 9 a la lista 2), y obtenemos la lista 3)
1, 2, 3, . . . , 89, 90, 91 **(lista 3)**

Y obtenemos 91 terminos en la lista 3). Por tanto,

$2T = (330)(91) = 30{,}030 \Rightarrow \underline{T = 15{,}015}$

EJERCICIO 3) Calcular el último termino de una progresion aritmética que inicia con 95, avanza de 4 en 4 y son 53 terminos.

SOLUCIÓN:

Tomamos a u como el último termino y escribimos por comodidad la lista de la siguiente manera:

1°	95 + 4(0)
2°	95 + 4(1)
3°	95 + 4(2)
4°	95 + 4(3)
	...
52°	95 + 4(52)

De esta forma, vemos con facilidad que el último termino es:

$$u = 95 + 4(52) = \underline{303}$$

Por lo tanto, despues de entender este fácil, pero ingenioso algoritmo. Deducimos el último de una serie en general Ej. 4).

EJERCICIO 4) Basandos en el algoritmo del ejercicio 3), deducir una formula para el último termino de una progresión aritmética, definiendo como a el primer termino, como r la razón o diferencia de los terminos y como n la cantidad de terminos.

SOLUCIÓN:

1°	$a + r(0)$
2°	$a + r(1)$
3°	$a + r(2)$
4°	$a + r(3)$
	...
n°	$a + r(n-1)$

Por lo tanto, vemos con facilidad que el último termino es:

$$u = a + r(n-1)$$ **Fórmula 1.1**

Ejercicio 5 Regresar

EJERCICIO 5) Deducir la fórmula para la suma una Progresión Aritmética, definiendo como a **el primer término, como** r la razón (o diferencia) de los términos consecutivos y como n **la cantidad de términos.**

SOLUCIÓN:

Nuestra lista es: $a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots, a + (n-3)r, a + (n-2)r, a + (n-1)r$

Que por comodidad usaremos: $a, a + r, \ldots, a + (n-2)r, a + (n-1)r$

Y aplicando el algoritmo del Ejercicio 1) nuestra serie queda como:

A) $T = a + (a+r) + \ldots + [a + (n-2)r] + [a + (n-1)r]$

B) $T = [a + (n-1)r] + [a + (n-2)r] + \ldots + (a + r) + a$

Sumamos A) y B): C) $2T = [2a + (n-1)r] + [2a + (n-1)r] + \ldots [2a + (n-1)r] + [2a + (n-1)r]$

Como ya sabemos son n terminos cada uno de " $2a + (n-1)r$", Por tanto, tenemos:

$$\boxed{2T = n[2a + (n-1)r]}$$

Y finalmente obtenemos la formula:

Comprovación Ej. 1) $\longrightarrow$ $$\boxed{T = \frac{n[2a + (n-1)r]}{2}}$$ Fórmula 1.2

[redacted]

EJERCICIO 5) Deducir la f … finiendo como a el primer término, como r la razón (… n la cantidad de términos.

SOLUCIÓN:

Nuestra lista es: … a + (n-1)r

Que por comodid…

Y aplicando el alg…

… r]

… + a

Sumamos A) y B): … (n-1)r] + [2a + (n-1)r]

Como ya sabemos … nto, tenemos:

Y finalmente obte…

EJERCICIO 1) Calcular la suma de los primeros 100 números del 1 al 100 de 1 en 1.

SOLUCIÓN:

Por medio de la fórmula 1.2

$$T = \frac{n\,[2a + (n-1)r]}{2} \qquad \text{Fórmula 1.2}$$

Donde:

El primer termino es 1
La razon es 1
Y la cantidad de terminos es 100

Por lo tanto

$$T = \frac{100[\,2(1) + (100-1)\,1\,]}{2} = \frac{100[\,2 + 99\,]}{2} \Rightarrow$$

$$T = \frac{100[101]}{2} = \frac{10{,}100}{2} = \underline{5{,}050}$$

Comprovación Ej. 1) → $$T = \frac{n\,[2a + (n-1)r]}{2}$$ Fórmula 1.2

Regresar

EJERCICIO 6) Deducir la fórmula para la suma una Progresión Aritmética, definiendo como α el primer término, como υ el último término y como n la cantidad de términos.

SOLUCIÓN:

Nuestra lista inicial es: $\alpha, \alpha + r, \alpha + 2r, \alpha + 3r, \ldots, \alpha + (n-3)r, \alpha + (n-2)r, \alpha + (n-1)r$

Que por comodidad usaremos: $\alpha, \alpha + r, \alpha + 2r, \ldots, \upsilon - 2r, \upsilon - r, \upsilon$

Y aplicando el algoritmo del Ejercicio 1):

$$A)\ T = \alpha + (\alpha + r) + (\alpha + 2r) + \ldots + (\upsilon - 2r) + (\upsilon - r) + \upsilon$$

$$B)\ T = \upsilon + (\upsilon - r) + (\upsilon - 2r) + \ldots + (\alpha + 2r) + (\alpha + r) + \alpha$$

Sumamos A) y B): $C)\ 2T = (\alpha + \upsilon) + (\alpha + \upsilon) + (\alpha + \upsilon) + \ldots (\alpha + \upsilon) + (\alpha + \upsilon) + (\alpha + \upsilon)$

Como ya sabemos son n terminos cada uno de "(α + υ)" por lo tanto tenemos:

$$\boxed{2T = n(\alpha + \upsilon)}$$

Y finalmente obtenemos la formula: $\boxed{T = \frac{n}{2}(\alpha + \upsilon)}$ **Fórmula 1.3**

EJERCICIO 7) A partir de las fórmulas 1.1 y 1.3 deducir la fórmula 1.2.

SOLUCIÓN:

$$T = \frac{n}{2}(a + u)$$ Fórmula 1.3

$$u = a + r(n-1)$$ Fórmula 1.1

Sustituyendo u en 1.3

$$T = \frac{n}{2}[a + [a + (n-1)r]] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{n[2a + (n-1)r]}{2}$$ Fórmula 1.2

Para comprobar las fórmulas con el Ej. 3) acerque el cursor a 1.3 y 1.2

EJERCICIO 8) Si el primer termino de una Progresión Aritmética vale 15, el último vale 1650 y su diferencia es de 3 en 3 determinar cuantos términos son.

SOLUCIÓN:

Primer método, Ejercicio 2:

i) Escribo la lista A
ii) Divido A entre 3
iii) Resto 4 a la lista B

A) 15, 18, 21, . . ., 1644, 1647, 1650
B) 5, 6, 7, . . ., 548, 549, 550
C) 1, 2, 3, . . ., 544, 545, 546

Concluimos que son <u>546</u> terminos.

Segundo método. Por medio de la Fórmula 1.1:

$$1{,}650 = 15 + (n-1)3$$
$$1{,}635 = (n-1)3$$
$$545 = n - 1$$
$$\underline{n = 546}$$

[redacted]

EJERCICIO 7) A partir de las fórmulas 1.1 y 1.3 deducir la fórmula 1.2.

SOLUCIÓN:

$$T = \frac{n}{2}(a + u)$$ Fórmula 1.3

$$u = a + r(n-1)$$ Fórmula 1.1

Sustituyendo u en 1.3

$$T = \frac{n}{2}[a + [a + (n-1)r]] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{n[2a + (n-1)r]}{2}$$ Fórmula 1.2

Para comprobar las fórmulas con el Ej. 3) acerque el cursor a 1.3 y 1.2

EJERCICIO 9) Calcular la suma de los números del 30 al 300 con diferencias de 3 en 3.

SOLUCIÓN:

Para saber cuantos son Aplicamos la fórmula 1.1

$$u = a + (n - 1)$$ Fórmula 1.1

$$300 = 30 + (n - 1)$$
$$\frac{270}{30} = n - 1 \Rightarrow 91 = n$$

Ahora aplicamos le fórmula 1.3

$$T = \frac{n}{2}(a + u)$$ Fórmula 1.3

$$T = \frac{91}{2}(30 + 300)$$
$$= \frac{(91)(330)}{2} = 15{,}015$$

Lo cual comprueba las Fórmulas.

Regresar

EJERCICIO 7) A partir de las fórmulas 1.1 y 1.3 deducir la fórmula 1.2.

SOLUCIÓN:

$$T = \frac{n}{2}(a + u) \qquad \text{Fórmula 1.3}$$

$$u = a + r(n-1) \qquad \text{Fórmula 1.1}$$

Sustituyendo u en 1.3

$$T = \frac{n}{2}[a + [a + (n-1)r]] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{n[2a + (n-1)r]}{2} \qquad \text{Fórmula 1.2}$$

Para comprobar las fórmulas con el Ej. 3) acerque el cursor a 1.3 y 1.2

EJERCICIO 10) Calcular la suma de los números del 30 al 300 con diferencias de 3 en 3.

SOLUCIÓN:

Para la fórmula 1.2 tenemos:

$$T = \frac{n[2a + (n-1)r]}{2} \qquad \text{Fórmula 1.2}$$

$$T = \frac{91}{2}[2(30) + (91 - 1)3]$$

$$= \frac{(91)(60 + 270)}{2} = \frac{(91)(330)}{2} = \underline{15,015}$$

Segundo método. Por medio de la Fórmula 1.1:

$$1,650 = 15 + (n-1)3$$
$$1,635 = (n-1)3$$
$$545 = n - 1$$
$$\underline{n = 546}$$

Regresar

CAPÍTULO 2

GEOMÉTRICA

- Definición de Progresión Geométrica y 2 problemas con el algoritmo de la suma.
- Ejercicio 3) cálculo del último termino, Ejercicio 4) deducción de la fórmula del último termino, Ejercicio 5) Aplicación del Ejercicio 4) al Ejercicio 3)
- Ejercicios Fórmulas y sus aplicaciones

"PROGRESIÓN GEOMÉTRICA"

Una "Progesión Geométrica" Es una lista de números donde cada uno (con excepción del primero) equivale a su anterior multiplicado por una constante denominada *razón*.

Ejemplos:

1) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19685 (razón 3)

2) 1, 2, 4, 8, 16, . . ., 1024 (razón 2)

3) 1, 4, 16, 64, 256 , . . . (razón 4)

4) $1, 0.9999, 0.9999^2, 0.9999^3, 0.9999^4 \ldots$ (razón 0.9999)

Basandonos en la definicion de Progresión Geométrica, podemos deducir una lista general. definiendo como a el primer termino, como r la razón y como n la cantidad de terminos.

Por lo tanto nuestra lista viene de la siguiente manera.

$$a, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^{n-3}, ar^{n-2}, ar^{n-1}$$

Ejercicio 1

EJERCICIO 1) **Calcular la suma de los números multiplos de 3, que inician con 27 y finalizán con 177,147.**

SOLUCIÓN:

El algoritmo para este cálculo consiste en.

I) Escribir la serie A.

$$\boxed{A)\ T = 27 + 81 + 243 + ... + 19{,}683 + 59{,}049 + 177{,}147}$$

II) Escribir la serie A) multiplicada por la razón y obtener B).

$$\boxed{B)\ 3T = 81 + 243 + 729 + ... + 59{,}049 + 177{,}147 + 531{,}441}$$

III) Restar B) a A), obtener C) y acomodar terminos comunes:

$$\begin{aligned} B)\ 3T &= \ 81 + 243 + ... + 59{,}049 + 177{,}147 + 531{,}441 \\ -T &= -27 - 81 - 243 - ... - 59{,}049 - 177{,}147 \end{aligned}$$

$$C)\ 2T = -27 + 531{,}441 = 531{,}414$$

$$T = \frac{531{,}414}{2} = \underline{265{,}707}$$

Ejercicios 2

EJERCICIO 2) Deducir la fórmula para la suma de una Progresión Geométrica, Tomando a a como el primer termino, como r la razón y como n la cantidad de terminos.

SOLUCIÓN: nuestra lista es la siguiente:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4, \ldots,\ ar^{n-3},\ ar^{n-2},\ ar^{n-1}$$

Y empleando el algoritmo del ejercicio 1, solo que con variables:

A) $T = a + ar + ar^2 + ar^3 + , \ldots , + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1}$

B) $rT = ar + ar^2 + ar^3 + ar + , \ldots , + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$

C) $rT - T = - a + ar^n$

La cual finalmente es:

$$T = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

Fórmula 2.1

Y cuando r es menor que 1 se utiliza la fórmula siguiente:

$$T = \frac{a(r^n - 1)}{(1 - r)}$$

Fórmula 2.1

EJERCICIO 3) Calcular el último término de una Progesión Geométrica, que inicia con 49 avanza a una razón de 4 y son 11 términos.

SOLUCIÓN: Por comodidad y facilidad escribimos nuestra lista de la siguiente forma:

1° $49(4^0)$

2° $49(4^1)$

3° $49(4^2)$

...

11° $49(4^{11-1})$

Por lo tanto como u es:

$$u = 49\ (4^{11-1}) = 49\ (4^{10}) = 49\ (1{,}049{,}576)$$

<u>u = 51,380,224</u>

Una vez deducida este Último termino, Y siguiendo este mismo método, veamos el siguiente Ejercicio 4) y despues el Ejercicio 5) (Acerque el Cursor)

Ejercicios 4 Ejercicios 5

EJERCICIO 4) **Deducir la fórmula para el último término de una Progesión Geométrica, Tomando como a el primer término, como r la razón, y como n la cantidad de terminos.**

SOLUCIÓN: **Por comodidad escribimos nuestra serie de la siguiente forma:**

1°	$a\,r^0$
2°	$a\,r^1$
3°	$a\,r^2$
. . .	
u°	$a\,r^{n-1}$

Por lo tanto u o nuestro último termino es:

$$\boxed{u = ar^{n-1}}$$ Fórmula 2.2

Y nuestra lista la podemos escribir en su representación general de Progresión Geométrica de la siguiente forma.

$$\boxed{a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3, \ldots,\ ar^{n-3},\ ar^{n-2},\ ar^{n-1}}$$

EJERCICIO 5) Ahora por medio de la fórmula 2.2 veamos su aplicación al Ejercicio 3:

$$\boxed{u = ar^{n-1}}$$

Fórmula 2.2

donde $a = 49$, $r = 4$ y $n = 11$

$u = 49\ (4^{11-1}) = 49\ (4^{10}) \Rightarrow$

$u = 49\ (1{,}049{,}576)$

<u>$u = 51{,}380{,}224$</u>

EJERCICIO 6) **Calcular la suma de una Progresión Geométrica infinita, que inicia con 1 y su razón es 0.9999.**

Nota: Aunque parezca paradójico, si la razón es menor que 1, Una Progresión Infinita tiene suma finita.

SOLUCION:

i) A) $T = 1+0.9999+0.9999^2+0.9999^3+0.9999^4+\ldots$

ii) B) $0.9999T = 0.9999+0.9999^2+0.9999^3+\ldots$

iii) C) $0.001T = 1+0+0+0+\ldots$

$$T = \frac{1}{0.0001} = \underline{10{,}000}$$

Acerca el cursor a el cuadro de la formula

Fórmula 2.1

EJERCICIO 7) Calcular la suma de la Progresión Geométrica 4, 16, 64, . . ., 1,048,576

Primer método. Por Algoritmo:

i) Escribo la suma:

A) $T = 4 + 16 + 64 + 256 + \ldots + 1{,}048{,}576$

ii) Escribo A) multipicada por la razón y obtengo B) (razón = 4)

B) $4T = 16 + 64 + 256 + \ldots + 1{,}048{,}576, + 4{,}194{,}304$

iii) Resto A) de B) y obtengo C)

C) $3T = -4 + 4{,}194{,}304$

$$T = \frac{4{,}194{,}300}{3} = \underline{1{,}398{,}100}$$

Acerca el cursor a el cuadro de las formulas

Fórmulas 2.1 y 2.2 [redacted]

El mismo problema pero ahora por medio de la fórmula 2.1

Si r es menor que 1, entonces el límite de r cundo n tiende a infinito es 0.

Por lo tanto:

$$T = \frac{a(r^n - 1)}{(1 - r)}$$

Fórmula 2.1

$$T = \frac{a}{1 - r}$$

$$T = \frac{1}{1 - 0.9999} = \underline{10{,}000}$$

EJERCICIO 8) **El Mismo problema pero ahora utilizando las fórmulas 2.2 y 2.1.**

$$u = ar^{n-1}$$

Fórmula 2.2

$1{,}048{,}576 = 4(4^{n-1})$

$262{,}144 = 4^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 4^{n-1} = 262.144$

aplicando logaritmos naturales

$$(n-1) = \frac{\ln 262{,}144}{\ln 4} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 262{,}144 + 1}{\ln 4}$$

$$n = \frac{12.476649}{1.386294} + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$T = \frac{a(r^n - 1)}{(1 - r)}$$

Fórmula 2.1

$$T = \frac{4(4^{10} - 1)}{3} = \frac{4(1{,}048{,}576 - 1)}{3} = \frac{4{,}194{,}300}{3}$$

$\underline{T = 1{,}398{,}100}$

CAPÍTULO 3

INTERÉS SIMPLE

Fórmulas de Interés Simple y Monto, Ejercicios 1) y 2), aplicación de fórmulas.

Conversión de Tasa Simple Anual a Simple Periodica, Ejercicios 3), 4) y 5).

Planteamiento de ecuaciones con aplicacion de Fórmulas Monto Ejercicios 6), 7) y 8)

Pago y fecha equivalente (sustituir un pago por varios)

INTERÉS SIMPLE

Sin lugar a dudas, podemos afirmar que si no existiera el interés en el préstamo de cierto Capital o Dinero, no tendría caso ni siquiera hablar del tema, pero eso no es todo, ya que las grandes compañías que se dedican a este tipo de negocios invariablemente se irían a la quiebra. Es decir, no se puede concebir un negocio sin interés.

Para el cálculo del Interés Simple se han elaborado métodos y fórmulas que en la práctica, una vez entendidas, resulta sumamente fácil su aplicación.

A continuación vemos varias definiciones y en el botón de continuar como se cálcula.

Interés Simple: Valor nominal en el caso de un pagaré es el valor final ya incluyendo y por tanto, el valor nominal corresponde al Monto. (Otra definición tambien es:)
Redito que hay que pagar por el préstamo de un Dinero o Capital a un cierto Interes por un determinado Tiempo. (Nótese que también se pueden utilizar en Interés Compuesto: pues si en éste último se paga a tiempo los intereses estos no provocan dividendos sobre ellos). En forma práctica se entiende como: Aquel donde los intereses no generan a su vez nuevos intereses.

Definición: Fecha equivalente es aquella en donde un conjunto de pagarés se sustituye por un solo pagaré cuyo importe es identico a la suma de los importes de los pagarés iniciales.

Rédito: Renta, utilidad o beneficio renovable que rinde un capital.

INTERES SIMPLE: **En su cálculo se toman en cuenta tres factores:**

C = Capital invertido o Dinero prestado
t = tiempo en que dura el préstamo
i = tasa de interés simple anual
De los cuales multiplicados por ellos mismos, Obtenemos la siguiente fórmula:

$$I = Cti_{sim\text{-}anual} \quad \text{Fórmula 3.1}$$

De la fórmula 3.1, para convertir una tasa simple periódica a una tasa simple anual:

$$i_{sim\text{-}anual} = i_{sim\text{-}per}\,p \quad \text{Fórmula 3.2}$$

Donde p **es el periodo de tiempo, que puede ser un año (**p=1**), un semestre (**p = 2**), un cuatrimestre (**p = 3**), un trimestre (**p=4**), un bimestre (**p = 6**), un mes (**p = 12**), una quincena (**p = 24**) etc.**
Además el Capital mas el Interés al final del periodo del prestamo nos da el Monto, el cual representamos con la letra M. **y se calcula de la siguiente forma:**

$$M = C + I \quad \text{Fórmula 3.3}$$

Como: $I = Cti_{sim\text{-}anual}$ **esto implica** $M = C + Cti_{sim\text{-}anual} = C(1 + ti_{sim\text{-}anual})$
Por lo tanto:

$$M = C(1 + ti_{sim\text{-}anual}) \quad \text{Fórmula 3.4}$$

Ejercicio 1 | Ejercicio 2

EJERCICIO 1) El banco de México paga el 35% en los depositos a plazo de un año. ¿Cual es el interés por un deposito de $480,000?

SOLUCIÓN:

C = 480,000
t = 1
i = 0.35
I = ?

$I = Cti_{sim\text{-}anual}$ Fórmula 3.1

Sustituyendo:

I = 480,000 X 1 X .35

Por lo tanto el Interes a pagar es:

$\boxed{I = 168{,}000}$

EJERCICIO 2) Cual es el interés que genera un capital de $85,500 a una tasa de interés anual simple de 4%, si el capital se tiene invertido durante 9 meses.

SOLUCIÓN:

C = 85,500
t = 1(9/12)
i = 0.04
I = ?

$I = Cti_{sim\text{-}anual}$ Fórmula 3.1

Sustituyendo:

I = 85,500 X 9/12 X .04

Por lo tanto el Interes generado es:

$\boxed{I = 2{,}565}$

:JERCICIO 3) El Monte de Piedad en esta temporada de fin de año, obtubo una ganancia de \$5,455,000 por cuestion de intereses de personas que pagarón puntualmente. ¿Que capital presto, si el cobra un interés del 3% anual?

SOLUCIÓN:

Datos
I = 5,455,000
t = 1
i = 0.03
C = ?

Sabemos que $I = Cti$ Fórmula 3.1 :

En la cual omitimos (*sim-anual*) por ser interés anual.
Y sustituyendo:

$$5{,}455{,}000 = C \times 1 \times 0.03$$
$$C = \frac{5{,}455{,}000}{0.03}$$
$$C = 181{,}833{,}333$$

Por lo tanto el Monte de Piedad presto: \$ <u>181,833,333</u>

Ejercicios 4 y 5

EJERCICIO 4) Calcular él Interés que genera un Capital de \$785,321 a la tasa de interés mensual simple del 6% si el dinero se tiene invertido durante 10 meses.

SOLUCIÓN:

Como primer paso convertiremos la tasa simple anual a una tasa simple periodica

$$i_{sim\text{-}anual} = i_{sim\text{-}per} p$$

Por lo tanto:

$$\boxed{(0.06)(12) = 0.72}$$

Ahora con este interés hacemos el calculo. y por.

$$I = Cti \quad \textbf{Fórmula 3.1}$$

$$I = (785{,}321)(10/12)(0.72)$$

$$\underline{I = 471{,}192.60}$$

EJERCICIO 5) Calcular el Interés que generan \$678,411 a una tasa de interés trimestral simple del 7.5% si el dinero se tiene invertido durante 110 días.

SOLUCIÓN:

Sabemos que hay 4 trimestres por año:

$$i_{sim\text{-}anual} = i_{sim\text{-}per} p$$

Por lo tanto:

$$\boxed{p = (0.075)(4) = 0.3}$$

Para saber cuantos años estubo invertido el dinero, emplearememos:

$$I = Cti \quad \textbf{Fórmula 3.1}$$

$$I = (678{,}411)(110/360)(0.3)$$

$$\underline{I = 62{,}187.68}$$

Ejercicio 6) Si compro un coche del año en 78,000 y doy un enganche de 10,000 y dos pagos iguales en 3 y 6 meses de 40,000, ¿a que tasa simple anual me prestaron?, Tomando como fecha focal el dia de la compra.

SOLUCIÓN:

$$68{,}000 = \frac{40{,}000}{1 + i_{sim\text{-}anual}(3/12)} + \frac{40{,}000}{1 + i_{sim\text{-}anual}(6/12)}$$

Nota: ($i_{sim\text{-}anual}$ **la veremos como** i **en todo el ejercicio 6**)

$$1.7 = \frac{1}{1 + i(0.25)} + \frac{1}{1 + i(0.5)} = \frac{1 + 0.5i + 1 + 0.25i}{1 + 0.75i + 0.125i^2}$$

$$1.7 + 1.275i + 0.2125i^2 = 2 + 0.75i$$

$$0.2125i^2 + 0.525i - 0.3 = 0$$

$$i^2 + 2.470588235 - 1.411764706 = 0$$

Como se genero una ecuación de segundo grado, entonces por

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$i = 47.86\%$$

Ejercicios 7 y 8

Ejercicio 7) ¿Cuanto tiempo tardara en tener una persona $34,000 si ahora tiene un capital de 25,500? Si se aplica a una tasa del 35% anual simple.

SOLUCIÓN: $M = C + I$ **Fórmula 3.3**

Usamos la fórmula 3.3 por ser tasa anual,
Por lo tanto:

$$\boxed{34{,}000 = 25{,}500 + I}$$

$$\boxed{I = 8{,}500 = Cti_{sim\text{-}anual}}$$

$$\boxed{8{,}500 = 25{,}500(t)(0.35)}$$

$$\boxed{t = 0.9523809}$$

Para calcularlo en días, lo multiplicamos por 360:

$$\boxed{t = (0.9523809)(360) = 342.96}$$

El cual redondeamos a días.

$$\boxed{\underline{t = 343 \text{ Días}}}$$

Ejercicio 8) Si invierto $25,000 el banco me paga $32,300 en 3 meses, ¿Cual es la tasa simple cuatrimestral que paga el banco?.

SOLUCÓN: $M = C(1 + ti_{sim\text{-}anual})$ **Fórmula 3.4**

Notaras que ahora usamos fórmula 3.4,
esto es por razones obvias de tiempo,
Por lo tanto:

$$\boxed{32{,}300 = 25{,}000(1 + 3/12ti_{sim\text{-}anual})}$$

$$\boxed{1.292 = 1 + 3/12i_{sim\text{-}anual}}$$

$$\boxed{1.292 = 1 + 3/12i_{sim\text{-}anual}}$$

$$\boxed{i_{sim\text{-}anual} = 0.292/(3/12) = 1.168}$$

$$\boxed{i_{sim\text{-}per} = i_{sim\text{-}anual}/p}$$

$$\boxed{1.168/3 = \underline{0.3893}}$$

Es la tasa simple cuatrimestral.

FECHA FOCAL Y ECUACION DE EQUIVALENCIA

Nuestra línea horizontal es la línea del tiempo. En este diagrama se muestra los pagares (M_1, M_2) y sus fechas. Estos se indican con las flechas que apuntan hacia arriba. y las nuevas condiciones de pago que se adquieren (Por renegociar la deuda) seran las flechas que apuntan hacia abajo (M_3, M_4). Para estos casos de sustitución de nuevos pagares por otros, solo se consideran los montos, no se consideran los capitales. y la fecha que utilizaremos como fecha de referencia se le denomina FECHA FOCAL (FF). Notese que, en interes simple, los resultados varian al cambiar la FF

Para este objetivo, necesitamos utilizar la formula 3.4

$$M = C(1 + t i_{sim\text{-}anual}) \qquad \text{Fórmula 3.4}$$

Sin embargo, transformaremos esta formula para calcular el valor presente de cada monto, es decir para cada uno de las M_i y claro de las C_i, y así encontrar la ecuación de equivalencia:

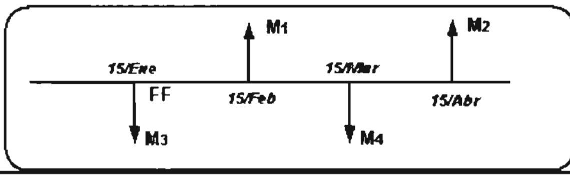
$$C = \frac{M}{(1 + t i_{sim\text{-}anual})}$$

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4$$

Valores de pagarés en FF = Valor del nuevo pagaré en FF

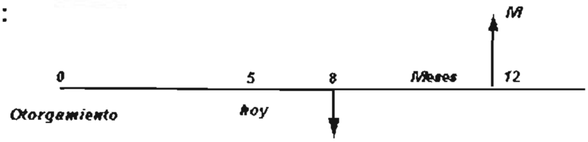
La tasa que se aplicara sera la vigente en el mercado de la nueva negociación y esta debe ser aplicada a los nuevos montos los cuales corresponden a los valores nominales establecidos en cada pagare

$$i_{sim\text{-}anual} = i_{per} p$$



EJERCICIO 9) Para adquirir un negocio, me prestarón $125,000 hace 5 meses a una tasa simple anual del 50%, para pagarlo al año exacto a partir del prestamo. Como el negocio va bien, deseo pagar dentro de 3 meses a partir de hoy, cuando la tasa simple anual es del 95%. ¿Cuanto pagare?

SOLUCIÓN:



El importe a pagar a los 12 meses sería:

$M = C(1 + ti_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 3.4 $\boxed{187{,}500 = 125{,}000[1 + 1(.50)]}$

La cual tomamos como la fecha original del pago y nos ubicamos en el mes 5. Ahora calculamos el importe a pagar en el mes 8:

$\boxed{M = C(1 + ti_{sim\text{-}anual})}$ $\boxed{187{,}500 = X[1 + (8/12)(0.95)]}$ $\boxed{X = 114{,}795.92}$

Ahora veamos que sucede si tomamos como fecha focal la nueva fecha de pago:

$\boxed{C = M/(1 + ti_{sim\text{-}anual})}$ $\boxed{\dfrac{187{,}500}{1 + (8/12)(0.95)}}$ $\boxed{\underline{114{,}795.92}}$

Vemos que sale el mismo resultado.

Regresar

EJERCICIO 10) **Se adquirio una deuda de 5 pagarés por 1,000, 2,000, 3,000, 4,000, 5,000 cada uno a 30, 60, 90, 120 y 150 días respectivamente, y se desea sustituir por un sólo pago. Si la tasa de interés vigente de dichas deudas es del 45% anual simple. Encontrar la fecha equivalente, tomando el 3er. mes (o 90 días) como fecha focal.**

SOLUCIÓN:

La ecuacion de equivalencia es:

Valores de pagares en fecha focal = Valor del nuevo pagaré en fecha focal

Y aplicando la fórmula 3.4 del Monto, a los pagarés que corresponde llevar a futuro tenemos:

$$M = C(1 + ti_{sim\text{-}anual}) \qquad \text{Fórmula 3.4}$$

Por otra parte, para los Montos llevados al pasado usamos la fórmula 3.4 de la siguiente forma:

$$C = \frac{M}{(1 + ti_{sim\text{-}anual})} \qquad \text{Fórmula 3.4}$$

Despues de esta explicación, procedemos con la ecuación de equivalencia:

$$1{,}000[1+(60/360)(0.45)] + 2{,}000[1+(30/360)(0.45)] + 3{,}000 + \frac{4{,}000}{1+(30/360)(0.45)} + \frac{5000}{1+(60/360)(0.45)} = \frac{15{,}000}{1+t(0.45)}$$

Continuar

$$1{,}000(1.075) + 2{,}000(2.075) + 3{,}000(1.00) + 4{,}000(1.0375) + 5{,}000(1.075) = \frac{15{,}000}{1 + 0.50t}$$

$$14{,}656.58 = \frac{15{,}000}{1 + 0.45t}$$

$$1.045t = 1.0234325$$

$$t = 0.05206845$$

Para saber cuantos días serán, multiplicamos t por 360.

$$\text{Días} = (360)(0.05206845) = \underline{18.74}$$

El cual redondeamos a 19 días, por lo tanto, debemos avanzar 19 días a partir de la fecha focal. (Nota en este último día ya no genera interés)

Observación: Al redondear 18.74 a 19 días el importe (15,000) a pagar, varía ligeramente:

$$14{,}656 = \frac{M}{1 + 0.45(19/360)}$$

$$M = \underline{15{,}004.674}$$

CAPÍTULO 4

DESCUENTO SIMPLE

Fórmulas de Descuento Simple y Monto

Ejercicio 1, Cálculo de un pagaré aplicación de la fórmula 4.3

Ejercicio 2, Cálculo de pagarés con fechas diferentes

Ejercicio 3, Cálculo de una tasa simple anual a un año y a un mes

Deducir la fórmula de tasa de interés que equivale a tasa de descuento y aplicar al ejercicios 3)

Cálculo de un pagaré a una tasa equivalente de descuento a interes simple

DESCUENTO SIMPLE: **A diferencia de Interés Simple que se aplica sobre el Capital el Descuento Simple se aplica sobre del Monto.**

En su cálculo se toman en cuenta tres factores:

M = El monto
t = El número de años
d = La tasa de descuento simple anual

De los cuales multiplicados por ellos mismos, Obtenemos la siguiente fórmula:

$$D = M\, t\, d_{sim\text{-}anual}$$ Fórmula 4.1

Por otro lado para calcular el dinero o Capital recibido al descontarlo de un documento:

$$C = M - D$$ Fórmula 4. 2

Por lo tanto:

$$C = M - D = M - (M\, t\, d_{sim\text{-}anual}) = M\,(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})$$

$$C = M\,(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})$$ Fórmula 4. 3

[redacted]

EJERCICIO 1) **Un pagaré tiene un valor nominal de $ 75,500, y es descontado por un banco a los 85 días de su vencimiento a una tasa de descuento simple anual del 55%. Calcular cuánto le pagarón al acreedor de este pagaré.**

SOLUCIÓN: **Aplicando la fórmula:**

$C = M\ (1 - t\ d_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 4. 3

Por lo tanto le pagaron al acreedor:

$\boxed{C = 75{,}500\ [1 - (85/360)(0.55)] = \underline{65{,}695.49}}$

Por otro lado. El descuento que hace el banco es:

$\boxed{D = M - C = 75{,}500 - 65{,}695.49 = \underline{9{,}804.51}}$

En terminos de interés, un importe de 65,695.49 a los 85 días se convierte en 75,500. ¿Que interés representa?

$\boxed{I = M - C = 75{,}500 - 65{,}695.49 = \underline{9{,}804.51}}$

Por lo que concluimos que, el importe del interés y el importe del descuento son iguales.

Sin embargo la tasa de descuento y la tasa de interés no lo son, como podemos observar:

$\boxed{I = C\ t\ i_{sim\text{-}anual} \Rightarrow i_{sim\text{-}anual} = \frac{I}{Ct} = \frac{9{,}804.25}{(65{,}695.75)(85/360)} = \underline{63.37\%}}$

Regresar

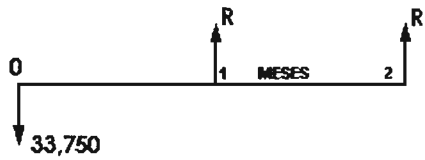
EJERCICIO 2) **Una empresa Mueblera vende 45,000. Como el cliente paga un 25% de contado, se le otorga un crédito por el resto, a 30 y 60 días, Es decir 2 pagarés con un mismo importe los cuales se calculan a una tasa simple anual del 60%. A los 10 días de la venta, esta misma empresa recurre a un banco a descontar los dos pagarés a una tasa simple anual de descuento del 55%. ¿Cuánto recibe la empresa en efectivo?.**

SOLUCION: **Como el cliente paga de contado un 25%:**

$$\boxed{C = (45{,}000)(75\%) = 33{,}750}$$

Le recordamos al lector, que la Fórmula 4.1 se debe aplicar cuantas veces sea necesarrio. Ya que inicialmente lo que hay que hacer es analizar con detalle el problema y resolverlo, parte por parte.

Volviendo al problema, primero determinemos el importe de cada pagaré:



Ahora utilizamos la fórmula 4.1:

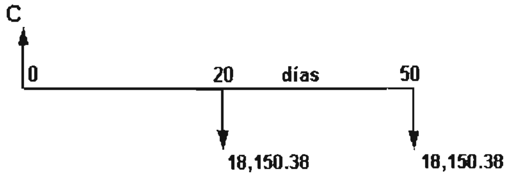
$$\boxed{R = C i_{per} [1 + [(1 + i_{per})^{m} - 1]^{-1}] = 33{,}750(0.60/12)[1 + [1 + (0.60)/12)]^{2} - 1^{-1}]}$$

Continuar Regresar

Por lo tanto R es igual a:

$$\boxed{R = 18{,}150.91}$$

Una vez visto la transaccion Cliente-Empresa ahora nos vamos sobre la transacción Empresa-Banco:



Esta C se refiere ahora a algo distinto: al dinero que recibira la empresa.
Y la fórmula a aplicar para cada pagaré es:

$C = M(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 4. 3

$$\boxed{C = 18{,}150.38 \left[1 - \frac{20}{360}(0.55)\right] + 18{,}150.38 \left[1 - \frac{50}{360}(0.55)\right]}$$

$$\boxed{C = 15{,}595.78 + 16{,}763.89 = \underline{34{,}359.67}}$$

EJERCICIO 3) **Calcular cuál es la tasa de interés simple anual que equivale a una tasa de descuento simple de 55% considerando:**

a) **Plazo de un año.**
b) **Plazo de un mes.**

SOLUCIÓN: $C = M(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 4. 3

a) **Para plazo de un año (t = 1):**

$\boxed{C = M(1 - 0.55) = 0.45\, M}$

Y, con la fórmula de interés simple:

$\boxed{M = C(1 - i_{sim\text{-}anual})}$

$\boxed{M = 0.45M(1 - i_{sim\text{-}anual})}$

De donde:

$\boxed{1 = 0.45M(1 - i_{sim\text{-}anual})}$

$\boxed{i_{sim\text{-}anual} = (1/0.45) - 1}$

$\boxed{i_{sim\text{-}anual} = 1.222222}$

Continuar Regresar

b) Para plazo de un mes ($t = 1/12$):

$$C = M(1 - (1/12)0.55) = 0.954166\ M$$

Ahora con la fórmula de interés simple:

$$M = C[1 + t\ i_{sim\text{-}anual}]$$

$$M = 0.954133\ M\ [1 + (1/12)\ i_{sim\text{-}anual}]$$

De donde

$$1 = 0.954133\ (1 + 0.083333\ i_{sim\text{-}anual}]$$

$$i_{sim\text{-}anual} = [(1/0.954166) - 1] / 0.08333$$

$$\underline{i_{sim\text{-}anual} = 57.6451\%}$$

EJERCICIO 4) Deducir una fórmula para calcular la tasa de interés simple anual que equivale a la tasa de descuentos simple anual y resolver nuevamente el ejercicio 3.

SOLUCIÓN:

Del Capítulo 3, tenemos la fórmula del Monto: $M = C\,(1 + t\, i_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 3.4

Y de este Capítulo, la fórmula del Capital: $C = M(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 4.3

Sustituyendo el valor de C de la fórmula 4.3 en la fórmula 3.4, tenemos:

$$\boxed{M = M\,(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})(1 + t\, i_{sim\text{-}anual})}$$

$$\boxed{1 = (1 - t\, d_{sim\text{-}anual})(1 + t\, i_{sim\text{-}anual})}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})} = 1 + t\, i_{sim\text{-}anual}}$$

$$\boxed{1 + t\, i_{sim\text{-}anual} = \frac{1}{1 - t\, d_{sim\text{-}anual}}}$$

$$\boxed{t\, i_{sim\text{-}anual} = \frac{1}{1 - t\, d_{sim\text{-}anual}} - 1}$$

Continuar

$$t\, i_{sim\text{-}anual} = \frac{1 - 1 + t\, d_{sim\text{-}anual}}{1 - t\, d_{sim\text{-}anual}}$$

$$t\, i_{sim\text{-}anual} = \frac{t\, d_{\,sim\text{-}anual}}{1 - t\, d_{sim\text{-}anual}}$$

$$i_{sim\text{-}anual} = \frac{d}{1 - t\, d_{sim\text{-}anual}}$$

Fórmula 4.4

Solución para tiempo de un año:

$$i_{sim\text{-}anual} = \frac{0.55}{1 - 0.55}$$

$$i_{sim\text{-}anual} = \underline{122.222\%}$$

Solución para tiempo de un mes:

$$i_{sim\text{-}anual} = \frac{0.55}{1 - (0.55/12)}$$

$$i_{sim\text{-}anual} = \underline{57.641921\%}$$

EJERCICIO 5) Si en operaciones a crédito una empresa carga a los clientes un 40% de interés simple por otorgarles pago a los 45 días y el pagaré resultante lo descuenta al día siguiente de cada venta, a una tasa de descuento anual simple de 38%, ¿Cual es la tasa equivalente de interés anual simple considerando lo que vende y lo que realmente recibe de dinero al día siguiente?

SOLUCIÓN:

***Primera parte del problema.* El importe del pagaré:**

$M = C\,(1 + t\, i_{sim\text{-}anual})$ Fórmula 2.4

$\boxed{M = C\,[1 + (45/360)(40\%] \;= 1.05C}$

(Donde C representa el precio de contado de la venta.)

***Seguda parte del problema.* Ahora ese monto M lo descuento:**

$\boxed{C = M\,(1 - t\, d_{sim\text{-}anual})}$ Fórmula 4.3

Pero, ahora C se refiere al importe recibido por la empresa a raíz del descuento.
"Para no confundirnos usaremos subíndices."
Por lo tanto para nuestro primer caso:

$\boxed{M = 1.05C_1}$ **(Representando el importe de la venta al contado por C_1)**

Regresar

$C_2 = M(1 - t_2\, d_{sim\text{-}anual}) = M\,[1 - (44/360)(0.38)] = (1.05\, C_1)[1 - (44/360)(0.38)]$

$C_2 = 1.001233333C_1$ (C_2 es el importe recibido por la empresa del banco)

Por lo tanto, recibe al día siguiente un importe ligeramente superior al precio de contado.

Tercera parte del problema. **Para saber cual es la tasa equivalente, acudimoa a la fórmula**

$M = C(1 + t\, i_{sim\text{-}anual})$ **Fórmula 4.3**

Donde vemos que M representa el importe del dinero recibido por la empresa al día siguiente. y no el importe al final del pagaré.
Y la C representa el precio de la venta, es decir, equivale a C_1.
Para que M no nos resulte confusa la representaremos por M_2.

$M = C_2$

Como $M_2 = C_1(1 + t\, i_{sim\text{-}anual})$ entonces:

$C_2 = C_1[1 + (1/360)\, i_{sim\text{-}anual}]$

Pero ya sabiamos de la segunda parte que:

$C_2 = 1.001233333C_1$

$1.001233333\, C_1 = C_1\,[1 + (1/360)\, i_{sim\text{-}anual}]$

$i_{sim\text{-}anual} = 44.4\%$

Forma fácil del problema

Para comprender mejor el problema vea lo siguiente:

Regresar

Sea una venta de \$ 100,000.

Primera parte del problema. Cálculo el importe del pagaré:

$$M = C\,(1 + t\, i_{sim\text{-}anual}) = 100{,}000\,[1 + (45/360)(0.40)] = \underline{105{,}000}$$

Segunda parte del problema. Cálculo el importe ya descontado:

$$C_2 = M_1(1 - t_2\, d_{sim\text{-}anual}) = 105{,}000\,[1 - (44/360)(0.38)] = 100{,}123.33$$

Tercera parte del problema. Cálculo la tasa equivalente:

$$M_2 = C_1(1 - t_3\, i_{sim\text{-}anual}) = 100{,}123.33 = 100{,}000\,[1 + (1/360)\, i_{sim\text{-}anual}] \Rightarrow i_{sim\text{-}anual} = \underline{44.3988\%}$$

Para verificar que no afecta el importe, Hacemos el mismo desarrollo en otro valor Ejemplo 300,000.

Primera parte del problema. Cálculo el importe del pagaré:

$$M_1 = C_1\,(1 + t_1\, i_{sim\text{-}anual\text{-}1}) = 300{,}000\,[1 + (45/360)(0.40)] = 315{,}000$$

Segunda parte del problema. Cálculo el importe ya descontado:

$$C_2 = M_1\,(1 - t_2\, d_{sim\text{-}anual}) = 315{,}000\,[1 - (44/360)(0.38)] = 300{,}370$$

Tercera parte del problema. Cálculo la tasa equivalente:

$$M_2 = C_1\,(1 + t_3\, i_{sim\text{-}anual\text{-}2}) \Rightarrow 300{,}370 = 300{,}000[1 + (1/360) i_{sim\text{-}anual\text{-}2}] \Rightarrow i_{sim\text{-}anual\text{-}2} = \underline{44.39999\%}$$

CAPÍTULO 5

INTERÉS COMPUESTO

Definición de Interés Compuesto y Tasas Periodicas, Efectiva y Nominales.

Ejercicios 1-2, Cálculo de un Monto a una tasa nominal (capitalizable) trimestral con Excel

Ejercicio 3, Deducción de Fórmulas para Montos y periodos m, con un ejercicio.

Ejercicio 4, Deducción de Fórmulas de tasas periódicas y nominales con el ejercicio 5

Ejercicio 6, Cálculo de la Renta a una tasa nominal capitalizable mensualmente
Ejercicio 7, Cálculo del 6) con fechas especificas a una tasa nominal por progresión geométrica
Ejercicio 8, Cálculo el Monto por medio de la Formula 5.7

INTERÉS COMPUESTO

Recordemos la definición que vimos en el capítulo 2 de Interés Simple: Redito que hay que pagar por el prestamo de un Dinero o Capital a un cierto Interes por un determinado Tiempo. Es el mismo que utilizaremos ahora para Interés Compuesto pero ademas otros más:

Interés Compuesto: **Tambien se puede definir en forma practica como: Aquel donde los intereses generan a su vez nuevos intereses. Ó el interés que se acumula al Capital, es decir, que se capitaliza.**

Como nomenclatura, lo clasificaremos en tres tipos: Periódicas, Efectiva y Nominales.

1. Tasas periódicas, ejemplos:
   Tasa mensual **(o tasa periódica mensual o tasa mensual efectiva).**
   Tasa diaria **(o tasa periódica diaria o tasa diaria efectiva).**
   Tasa trimestral **(o tasa periódica trimestral o tasa trimestral efectiva).**
   Tasa semestral **(o tasa periódica semestral o tasa semestral efectiva), etc.**

2. **Tasa efectiva (o tasa anual o tasa efectiva anual)**

3. Tasas nominales. **Son las tasas periódicas expresadas en forma anualizada, pero no corresponden al interés que verdaderamente se ganaría al año.**
   Este concepto queda más claro revisando los siguientes ejercicios.

Ejemplos:

Tasa nominal capitalizable mensualmente. **Es la tasa mensual multiplicada por 12.**
Tasa nominal capitalizable diariamente. **Es la tasa daria multiplicada por 360.**
Tasa nominal capitalizable quincenalmente. **Es la tasa quincenal multiplicada por 24.**

[redacted]

EJERCICIO 1) **Si se tiene una inversión al iniciar el año de $ 100,000, encontrar cuánto se tiene invertido a fin de año a una tasa trimestral de 40%.** (Este ejercicio lo resolvimos con Excel)

	A	B	C	D
1	Trimestre	Saldo Inicial	Interés	Saldo Final
2	1	100,000	40,000	140,000
3	2	140,000	56,000	196,000
4	3	196,000	78,400	274,400
5	4	274,400	109,760	384,160

1. Marcar los 4 trimestres en la celdas A2, A3, A4 y A5
2. En la celda B2 escribir saldo inicial.
3. En la celda C2 Multiplicar B2 por 40%
4. En la celda D2 Sumar C2 + B2
5. En la celda B3 sumar B2 + C2
6. Sombrear C2 y D2 copiar y pegar en C3 y D3
7. Sombrear B3, C3 y D3 copiar, sombrear B4 y B5 y dar Return.

Nótese que cada trimestre se calcula el 40% de interés (que es una tasa periódica) y se suma al capital para formar el saldo final del trimestre. A fin de año tendré como saldo final $384,160.

La tasa nominal capitalizable trimestralmente corresponde a la tasa trimestral de 40% es:

$$i_{nom} = p\, i_{per} = (4)(0.40) = 1.6 = \underline{160\%}$$

NOTA: La fórmula que indica cómo convertir una tasa periodica en tasa nominal es la usada arriba

$$i_{nom} = p\, i_{per}$$ **Fórmula 5.1**

Ejercicio 2

Ejercicio 2) Si se tiene una inversión al iniciar el año de $ 100,000, encontrar cuánto se tiene invertido a fin de año a una tasa nominal capitalizable trimestralmente de 40%.

SOLUCIÓN:

$$i_{per} = i_{nom} / p = 0.40/4 = \underline{0.10}$$

	A	B	C	D
1	Trimestre	Saldo Inicial	Interés	Saldo Final
2	1	100,000	10,000	110,000
3	2	110,000	11,000	121,000
4	3	121,000	12,100	133,100
5	4	133,100	13,310	146,410

Los pasos son los mismos del ejercicio anterior, pero ahora con $\underline{i_{per} = 0.10}$

EJERCICIO 3) **Si tengo un Capital** C **a un plazo de** t **años y a una tasa periódica** i_{per} **cuyos periodos ocurrren** p **veces al año, encontrar el Monto** M.

Es decir, se pide repetir con variables el ejercicio 1, lo cual nos permitirá deducir una fórmula.

SOLUCIÓN:

$$M = C + I$$

Fórmula 5.2

$$I_{per} = C\, i_{per}$$

Fórmula 5.3

¿Cuánto tendré al final del primer periodo de capitalización?

$$M_1 = C_1\,(1 + i_{per})$$

Este monto se convierte en el saldo inicial del segundo periodo de capitalización:

$$C_2 = M_1$$

¿Cuánto tendré al final del segundo periodo de capitalización?

$$M_2 = C_2\,(1 + i_{per}) = M_1\,(1 + i_{per}) = [C_1\,(1 + i_{per})](1 + i_{per}) = C_1\,(1 + i_{per})^2$$

Continuar

$$M_3 = C_1\,(1 + i_{per})^3$$

$$M_m = C_1\,(1 + i_{per})^m$$ para el periodo último *m*.

$$m = t\,p$$ Fórmula 5.4

Es decir, el número total de periodos equivale a los años en que esté vigente nuestra inversión, multiplicados por el número de periodos de capitalización que hay por cada año (aclarando que t puede ser incluso menor de un año, y sin embargo, p debe ser en periodos por año completo).

Por lo tanto, concluimos que:

$$M_m = C_1\,(1 + i_{per})^m = C_1\,(1 + i_{per})^{tp}$$ para el periodo último *m*.

Tomando en consideración que:

$$M = M_m \qquad C = C_1$$

Llegamos a la fórmula solicitada:

$$M = C\,(1 + i_{per})^{tp}$$ Fórmula 5.5

En el caso de la tasa efectiva, tenemos que p = 1, por lo que:

$$M = C\,(1 + i_{ef})^{t}$$ Fórmula 5.6

y continuando

Tambien sabemos que i_{nom} = p i_{per} por lo que:

$$M = C\,[1 + (i_{nom}/p)]^{tp}$$

Fórmula 5.7

Comprobando, con los datos del ejercicio 1, tendremos:

$C = 100{,}000$

$t = 1$

$i_{per} = 40\%$

$p = 4$

$M = ?$

$M = 100{,}00\,[1 + (0.40)]^{4x1} = 100{,}000(1.4)^{4} = \underline{\$384{,}160}$

EJERCICIO 4) **Encontrar las fórmulas que relacionan las tasas periódicas y nominales con la efectiva.**

SOLUCIÓN:

Supongamos cualquier tasa periodica (mensual, bimestral, etc.) y la tasa efectiva correspondiente

$$M = C\,(1 + i_{per})^{tp}$$

$$M = C\,(1 + i_{ef})^{t}$$

Dado que a partir de un capital dado, debemos llegar al mismo monto si las tasas son equivalentes:

$$C\,(1 + i_{per})^{tp} = C\,(1 + i_{ef})^{t}$$

$$(1 + i_{per})^{tp} = (1 + i_{ef})^{t}$$

$$(1 + i_{per})^{p} = 1 + i_{ef}$$

$$i_{ef} = (1 + i_{per})^{p} - 1$$

Fórmula 5.8

y continuando

Y como sabemos que $i_{nom} = p\, i_{per}$ tenemos que:

$$i_{ef} = [\,1 + (i_{nom}/p)]^{p} - 1$$

Fórmula 4.9

EJERCICIO 5) Encontrar el monto de una inversión por \$ 50,000 si tengo una tasa de mercado de 24% nominal capitalizable bimestralmente y han transcurrido 15 meses.

SOLUCIÓN:

A) Por fórmula.

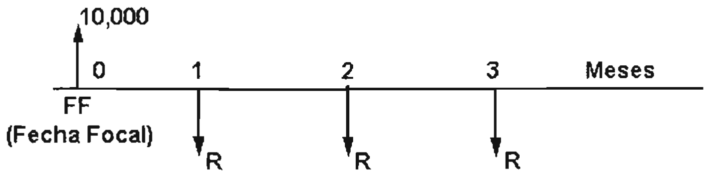
$$M = C\,[\,1 + (i_{nom}/p)]^{tp} = 50{,}000\,[1 + (0.24/6]^{(15/12)(6)}$$

$$= 50{,}000(1.04)^{7.5}$$

$$= \underline{\$67{,}099.62}$$

EJERCICIO 6) Se otorga un prestamo por $ 10,000 a pagar en abonos iguales a 30, 60 y 90 días a una tasa nominal capitalizable mensualmente de 30%. Calcular dichos pagos.

SOLUCIÓN: Por progresión geométrica.



$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4$$

$$10{,}000 = \frac{R}{\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^1} + \frac{R}{\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^2} + \frac{R}{\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^3}$$

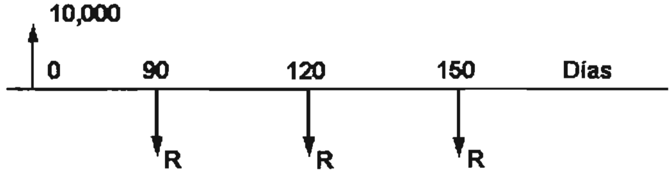
$$10{,}000 = R(0.9756096) + R(0.9518144) + R(0.92859941)$$

$$\underline{R = 3{,}501.37}$$

Ejercicio 7 Ejercicio 8 Regresar

EJERCICIO 7) Del ejercicio 6) si los 3 pagos son con fechas concretas, es decir, supongamos que hoy se efectua el prestamo y hay que pagar en 90, 120 y 150 días.

SOLUCIÓN: Por progresión geométrica.



i) Por progresión geométrica.

$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4$$

$$10{,}000 = \frac{R}{\left(1 + \frac{0.30}{12}\right)^{(90/360)(12)}} + \frac{R}{\left(1 + \frac{0.30}{12}\right)^{(120/360)(12)}} + \frac{R}{\left(1 + \frac{0.30}{12}\right)^{(120/360)(12)}}$$

$$10{,}000 = R(0.92859941) + R(0.90595064) + R(0.88385429)$$

$$10{,}000 = R(2.71840434) \Rightarrow \underline{R = 3{,}678.63}$$

EJERCICIO 8) Encontrar el Monto de una inversión por $ 50,000 si tengo una tasa del mercado de 24% capitalizable bimestralmente y han transcurrido 127 días.

SOLUCIÓN: Por la fórmula 5.7

$$M = C\,[1 + (inom/P)]^{t\,p}$$

$$M = 50{,}000\,[1 + (0.24/6)]^{(127/360)(6)} =$$

$$50{,}000(1.04)^{2.116666667} = \underline{\$\,54{,}328.02}$$

CAPÍTULO 6

ECUACIÓN DE VALOR

Definición de Ecuación de Valor y Algoritmo para su solución, Con Ejercicio 1.

Ejercicios 2, 3, 4 y 5, Para reafirmar el Ejercicio 1

Ejercicios 6, cuando se igualan los intereses, 7 por medio de Prog. Geometrica

Ejercicios 8 donde se busca el tiempo, 9 con Fecha Equivalente y 10 Un ejemplo

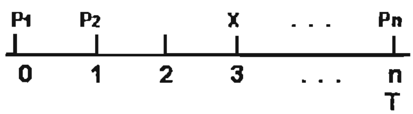
ECUACIÓN DE VALOR

Podriamos afirmar, tal vez, casi sin lugar a equivocarnos, que en todos los problemas de Matemáticas Financieras, por complejos que estos sean, los podemos plantear por medio de una "Ecuación de Valor". Ya que ésta consiste, en dos series de obligaciones que contraen un Deudor y un Acreedor, vinculadas y valuadas con un signo de igualdad en una fecha de valuación, que es conocida como "Fecha de Valuación".

Una forma sencilla de verla es (Obligaciones Deudor = Obligaciones Acreedor)

Esta fecha de valuación, puede ser la que más convenga para resolver de la mejor manera el problema, ya que como veremos no modifica el resultado en ninguna forma (*la fecha que se tome*). El punto de evaluacion debe ser el que facilite y simplifique el resultado esperado.

El algoritmo para su resolucion de la ecuacion de valor consiste en:



i) Elaborar una gráfica, donde las obligaciones del Deudor marcarlas en la parte de arriba, ademas del punto de valuación.

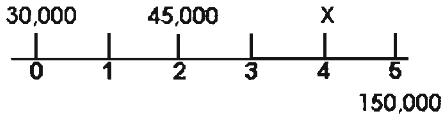
ii) Las obligaciones del Proveedor en la parte de baja de la gráfica, valuada en el mismo punto

iii) Por último, lo que este por la derecha del punto de valuación su exponente sera (-n) y lo que quede por la izquierda sera (n). A continuación veamos un ejemplo.

Ejercicio 1

EJERCICIO 1) El Deudor se compromete a liquidar una deuda de \$ 150,000 al fin de 5 años, si a cambio el recibe \$ 30,000 ahora, \$ 45,000 al cabo de 2 años y una cantidad extra y justa al final del 4° año, la cual permita que la operación sea equitativa para ambas partes, "Deudor-Proveedor".
¿A cuanto ascenderá dicha cantidad si la tasa de interés es del 5% anual efectivo?.

SOLUCIÓN:



Por medio de la gráfica observamos que las obligaciones del Proveedor son:

\$ 30,000 ahora
45,000 en el segundo año
X en el cuarto año

Por otro lado las obligaciones del Cliente:
\$ 150,000 al final del quinto año.

Procediendo de acuerdo al algoritmo:
Obligaciones Proveedor = Obligaciones Cliente,

Calculada en el mismo punto de valuación y a la tasa de interés establecida.
Si tomamos Hoy como el punto de valuación, tendremos:

Continuar

$$30,000 + 45,000(1.05)^{-2} + X(1.05)^{-4} = 150,000(1.05)^{-5}$$

Por lo tanto $X = \dfrac{150,000(0.783526) - 45,000(0.907029) - 30,000}{0.82270247} = \dfrac{46,712.60}{0.82270247} = \underline{56,779.49}$

Por otro lado si tomamos como el punto de valuación en el cuarto año se tiene:

$$30,000(1.05)^{4} + 45,000(1.05)^{2} + X = 150,000(1.05)^{-1}$$

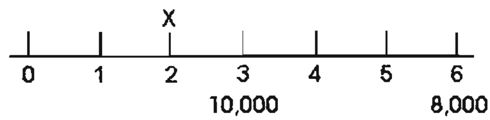
Por lo tanto $X = 150,000(0.952381) - 30,000(1.215506) - 45,000 = \underline{56,779.49}$

Y vemos que este resultado es el mismo. Ya que el planteamiento de la Ecuacion es lo que vale.

EJERCICIO 2) El señor X tiene que pagar 2 deudas, una de $ 8,000 que debe pagar dentro de 6 años y otra de $ 10,000 a pagar dentro de 3 años, El pretende pagarlas dentro de 2 años. ¿ A cuánto ascenderá el monto de este pago si el dinero gana el 6% anual?

SOLUCIÓN:

Dado que el señor X pretende pagar en 2 años, tomamos éste como fecha de valuación:



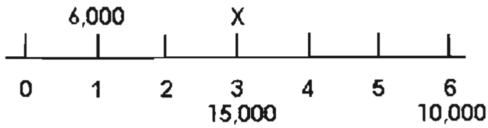
$$X = 10{,}000(1.6)^{-1} + 8{,}000(1.6)^{-4} = 9{,}433.96 + 6{,}336.75 = \underline{15{,}770.70}$$

Ejercicio 3 | Ejercicio 4 | Ejercicio 5

EJERCICIO 3) **Un deudor se comprometio a pagar una deuda de $ 25,000 en 2 pagos, dentro de 3 años $ 15,000 y el resto dentro de 5 años, pero decide abonar $ 6,000 al final del primer año. ¿Cuánto debera al final del tercer año si se paga un interés del 8% anual.**

SOLUCIÓN:

Dado que el señor X pretende pagar en 2 años el resto, es decir el año 3, tomamos éste como fecha de valuación:



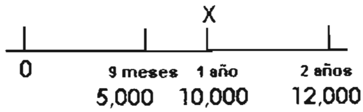
$$X + 6{,}000(1.08)^{2} = 15{,}000 + 10{,}000(1.08)^{-2}$$

$$X = 15{,}000 + 8{,}573.39 - 6{,}998.40 = \underline{16{,}575.00}$$

EJERCICIO 4) **El señor X desea recuperar 3 prendas las cuales son de $ 5,000, 10,000 y 12,000 que tiene en empeño, y estas vencen en 9 meses, un año y 2 años respectivamente. El desea liquidar su deuda con un solo pago dentro de un año. ¿De cuanto será dicho pago si el dinero gana un 9% de interés anual?**

SOLUCIÓN:

Como el señor X pretende liquidar sus deudas dentro de un año, tomamos está como la fecha de valuación:

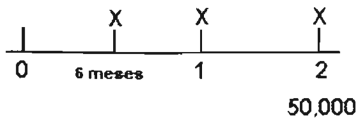


$$X = 5{,}000 + 10{,}000(1.09)^{1/4} + 12{,}000(1.09)^{-1} = 5{,}000 + 10{,}217.78 + 11{,}111.11$$

$\underline{X = 26{,}328.90}$

EJERCICIO 5) Se desea permutar una deuda de $ 50,000 que vence en 2 años, por 3 pagos iguales, los pagos se pretenden efectuar en 6 meses, un año y el último en 2 anos. ¿A cuanto equivaldra cada pago si el interes es del 8% anual.

SOLUCIÓN:



Evaluamos en el año 1 y, tenemos:

$$X(1.08)^{1/2} + X + X(1.08)^{-1} = 50{,}000(1.08)^{-1}$$

$$X(1.0392308 + 1 + 0.925926) = 50{,}000(0.925926)$$

$$\underline{X = 15{,}13.40}$$

EJERCICIO 6) Se tienen 2 deudas, una por \$ 5,000 a pagar en un año a un interés del 7% y la otra de \$ 10,000 a pagar en 2 años a un interés del 5%, se pretenden liquidar en un solo pago en 6 meses. ¿De cuánto sera el pago si la tasa de interés es del 5.5% anual?

SOLUCIÓN:

0	6 meses	1	2
	X	5,000(1.07)	$8,000(1.05)^2$

Valuando al fin del primer año.

$$X(1.055)^{1/2} = 5,000(1.07) + 10,000(1.05)^2(1.055)^{-1}$$

$$X1.0271319 = 5,350.00 + 10,000(1.1025)(0.947867)$$

$$\underline{X = 15,382.74}$$

Ejercicio 7

EJERCICIO 7) **Para adquirir una deuda de \$ 100,000 por la compra de un automovil desea saber cuánto pagará anualmente por los siguientes 10 años si la tasa es del 7% anual efectiva.**

SOLUCIÓN:

X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<u>10,000</u>										

Para facilitar la solucion a este problema tomaremos a $(1 + i)^{-n} = V^n$
y evaluamos en el año 1, Por lo tanto:

$$100{,}000 = XV + XV^2 + XV^3 + XV^4 + \ldots + XV^{10} \qquad \text{al } 7\%$$

$$100{,}000 = X(V + V^2 + V^3 + V^4 + \ldots + V^n)$$

$$100{,}000 = XV(1 + V^1 + V^2 + V^3 + \ldots + V^9)$$

$$100{,}000 = XV\frac{(1 - V^{10})}{(1 - V)} = \frac{X(1 - V^{10})}{(1 + i) - 1} = \frac{X(1 - V^{10})}{i}$$

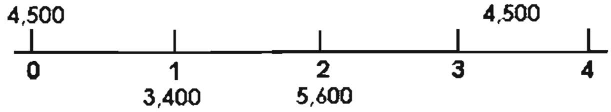
$$X = \frac{100{,}000\, i}{(1 - V^{10})} = 100{,}000(0.1423775)$$

$$\underline{X = 14{,}237.75}$$

A continuación veremos una ecuación de valor donde la incognita es el tiempo

EJERCICIO 8) Se tienen 2 deudas, una por \$3,400 a pagar en un año y la otra de \$ 5,600 a pagar en 2 años, si ahora se hace un pago de 4,500. ¿Cuándo se hara el siguiente pago si la tasa de interés es del 8% anual convertible semestralmente?

SOLUCIÓN:



Valuando en el momento del primer pago y como periodo fundamental el semestre, tenemos:

$$3{,}400(1.04)^{-2} + 5{,}600(1.04)^{-1} = 4{,}500 + 4{,}500(1.04)^{-t}$$

$$(1.04)^{-t} = \frac{3{,}400(0.924556) + 5{,}600(0.854804) - 4{,}500}{4{,}500}$$

$$(1.04)^{-t} = \frac{3{,}430.39}{4{,}500} = 0.76231$$ y, resolviendo por logaritmo

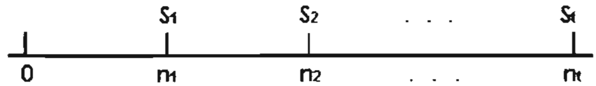
$$-t\log(1.04) = \log 0.76231 \Rightarrow t = \frac{-0.117868}{-0.0170333} = \underline{6.92}$$

Y, por lo que vemos el segundo pago de \$ 4,500 se hará dento de 3 años 5 meses y 16 días; valuando el valor de (t) por interpolación se obtiene el mismo resultado.

Ejercicios 9 y 10 [redacted]

EJERCICIO 9) "Fecha equivalente" Es cuando existen una serie de deudas, $S_1, S_2, \ldots, S_t$, las cuales se pagan con periodos de tiempo $n_1, n_2, \ldots, n_t$ iguales, y se pretenden permutar por una sola exibición que sea equivalente a la suma de las deudas al fin de n años. gráficamente lo podemos ver como:

SOLUCIÓN:



Si tomamos como punto de valuación el momento actual, se tiene:

$$S_1V^{n_1} + S_1V^{n_2} + \ldots + S_1 V^{n_t} = (S_1 + S_2 + \ldots + S_t)V^n$$

$$V^n = \frac{S_1V^{n_1} + S_1V^{n_2} + \ldots + S_1 V^{n_t}}{(S_1 + S_2 + \ldots + S_t)}$$

La cual se resuelve por medio de logaritmos.

$$n = \frac{\log(S_1V^{n_1} + S_1V^{n_2} + \ldots + S_1 V^{n_t}) - \log(S_1 + S_2 + \ldots + S_t)}{\log V}$$

Fórmula 6.1

Ejercicio 10

EJERCICIO 10) **Encontrar la "Fecha equivalente" para liquidar las deudas de $ 5,000, $ 10,000, y 15,000 pagaderos dentro de 6 meses, un año y dos años respectivamente; la tasa de interés es del 8% anual convertible semestralmente.**

SOLUCIÓN:

0	1/2	1	1/2	2
	5,000	10,000		15,000

Se toma como periodo fundamental el semestre, por tanto la tasa será del $3\frac{1}{2}\%$ y aplicando la fórmula 4.1 se tiene:

$$n = \frac{\log(5{,}000V + 10{,}000V^2 + 15{,}000V^4) - \log(5{,}000 + 10{,}000 + 15{,}000)}{\log V}$$

$$n = \frac{\log(5{,}000(0.966184) + 10{,}000(0.933511) + 15{,}000(0.871442) - \log 30{,}000}{\log 0.966184}$$

$$n = \frac{\log 27{,}473.2 - \log 10.30}{\log V} = \frac{4.4389 - 4.47}{-1.985060} = \frac{-0.03822}{-0.014940}$$

$$n = 2.5582$$

Entonces la fecha equivalente es 1 año, 4 meses y 25 días, que para fines prácticos es 1 año 5 meses.

CAPÍTULO 7

ANUALIDADES

Definición de Anualidad, (Ejs. Contingentes y Ciertas), Deduccion de fórmula de Valor presente de una anualidad y un ejemplo

Anualidad Ordinaria (o vencida) y un ejemplo resuelto por Prog. Geom. con soluciones

Monto de una anualidad ordinaria, deducción de la fórmula y Ejercicio 3

Anualidades y Montos Valuados a tasa nominal y Ejemplos

Ejercicio 6 (tasa Nominal)

Renta anual. pago o ingreso derivado de fondos cuyo fin es precisamente el de proporcionar la base para el pago de una cantidad. Las anualidades pueden ser también cualquier tipo de pago efectuado a intervalos regulares. Estos pueden ser un mes, una semana, un semestre, un día un año etc. Una anualidad a menudo representa únicamente el interés derivado de una determinada cantidad depositada en alguna entidad financiera, pero también puede referirse a la devolución del principal. Por lo tanto podemos definir una anualidad como:

Una serie de pagos periódicos, de sumas generalmente iguales, que se efectuan durante la existencia de una situación dada.

Practicamente existen dos tipos de anualidades

i) Anualidades contingentes.

ii) Anualidades ciertas.

Acerca el cursor

A continuación de clic en continuar, para ver como se deduce la fórmula del *Valor presente de una anualidad ordinaria*, para despues pasar a un ejemplo. Y de esta forma se podra entender mejor el concepto de *anualidad*.

Continuar

ANUALIDADES CONTINGENTES

Son aquellas que están representadas por una serie de pagos que se efectúan sujetos a algún evento fortuito. Como ejemplos vemos:

– *El pago de una prima de un seguro ordinario cuando ocurre la muerte del asegurado y la compañia paga al beneficiario la suma asegurada.*

– *Serie de pagos que recibe un pensionado hasat que fallece.*

– *Pagos de un propietario de un bien hasta que ocurre un siniestro y el bien desaparece*

ANUALIDADES CIERTAS

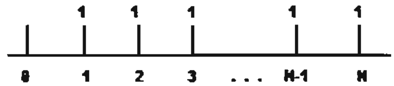
Son las que consisten en una serie de pagos periódicos que deben efectuarse con certeza e independientemente de cualquier evento fortuito durante un cierto tiempo establecido. Como ejemplos vemos:

-- *El pago de intereses sobre un bono de renta fija*

-- *Pagos periodicos hasta liquidar la hipoteca de una casa (hasta la extincion de ésta)*

-- *Pagos periodicos por concepto de una renta de un bien que recibe el beneficiario*

Una anualidad ordinaria consiste en una serie de pagos, los cuales se efectuan despues de su contratación en el plazo estipulado y se pagan durante n años; graficamente lo podemos ver como sigue:



(NOTA: Se usa el 1 por comodidad)

Tomamos como punto de valuación el origen, para calcular el "Valor presente de la anualidad", la cual se designa con el simbolo $a_{\overline{n|}}$ y su desarrollo es:

(Recordemos que $(1+i)^{-n} = V^n$)

$$a_{\overline{n|}} = V + V^2 + V^3 + \dots V^{n-1} + V^n$$

Fórmula 7.1

Calculado a una tasa de interés i anual efectiva.

Ademas como vemos a_{n} forma una progresion geométrica de n terminos y razon V, por lo tanto.

$$a_{\overline{n|}} = \frac{V(1 - V^n)}{1 - V}$$

Y, multiplicando numerador y denominador por (1 + i) se tiene:

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - V^n}{i}$$

Fórmula 7.2

Como los pagos son unitarios, basta con multiplicar el valor de (7.2) por la renta anual; y llamando valor presente a estos pagos, A se tiene.

Continuar

$$A = RV + RV^2 + RV^3 + \ldots + RV^{n-1} + RV^n$$

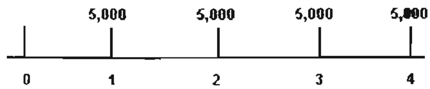
$$A = R(V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n)$$

$$\boxed{A = Ra_{\overline{n}|}}$$

Fórmula 7.3

EJERCICIO 1) **Calcular el valor presente de 4 pagos anuales de $ 5,000, de los cuales el primero se efectua un año despues de contraer el contrato a una tasa del 8% anual efectiva.**

SOLUCIÓN:



$$A = 5{,}000V + 5{,}000V^2 + 5{,}000V^3 + 5{,}000V^4 \quad \text{(a una tasa del 8\%)}$$

$$A = 5{,}000(V + V^2 + V^3 + V^4)$$

$$A = 5{,}000(0.925926 + 0.857339 + 0.793832 + 0.735030)$$

$$A = 5{,}000(3.312127) = \underline{16{,}560.63}$$

Utilizando 6.2, tenemos:

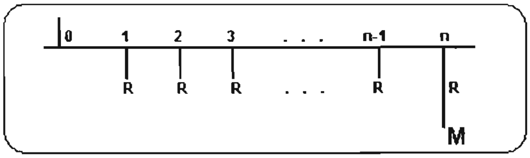
$$: \; A = 5{,}000\,\frac{(1 - V^4)}{0.08} = 5{,}000\,\frac{1 - 0.735030}{0.08} = 5{,}000(3.312128) = \underline{16{,}560.64}$$

Para ampliar mas el tema de anualidad *Ordinaria*, (o anualidad vencida). Que es una serie de flujos periódicos de dinero. Y como ejemplo vemos, pagos, ahorros y retiros en donde:

a) El primer pago (ahorro o retiro) periódico ocurre en una fecha ubicada a un periodo del capital.

b) El último pago (o ahorro o retiro) periódico coincide en fecha con el monto.

En un diagrama lo podemos ver de la siguiente forma:



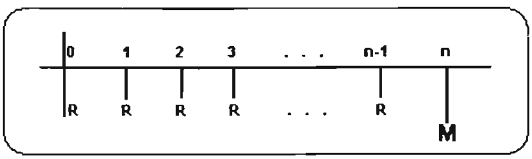
(Útilizaremos M en lugar de S)

Y en la anualidades *Anticipadas* son una serie de flujos de dinero periódicos por ejemplo. Pagos, ahorros o retiros. en donde:

a) El primer pago (o ahorro o retiro) periódico de dinero es simultáneo al capital

b) El último pago (o ahorro o retiro) periódico de dinero ocurre en una fecha de 1 periodo antes que el monto.

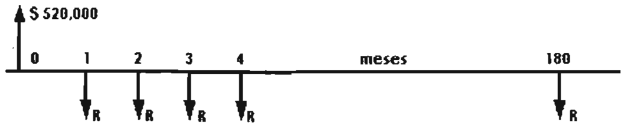
En un diagrama la podemos ver de la siguiente forma



Ejercicio 2

EJERCICIO 2) Para comprar una casa, obtengo un prestamo por \$650,000 a pagar en 180 mensualidades a una tasa de interés nominal del 24% capitalizable mensualmente, ¿De cuánto será cada pago?.

SOLUCIÓN: Esta es una anualidad ordinaria la cual resolveremos por Prog. Geom. y esta primera solución será con fecha focal al inicio.



En cada pago usaremos la fórmula: $M = C[1 + (i_{nom}/p)]^{tp}$ donde despejando la C (que en este caso es la renta R) por lo tanto tenemos:

$$520{,}000 = \frac{R}{\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{(1/12)(12)}} + \frac{R}{\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{(2/12)(12)}} + \ldots + \frac{R}{\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{(180/12)(12)}}$$

Y factorizando hacia una progresión geométrica:

$520{,}000 = R(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{179})$ es decir, $520{,}000 = RS$, Donde:

$$a = r = \frac{1}{\left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{(180/12)(12)}} = 0.980392$$

Continuar | Otra Solución

Por otro lado, tenemos que S es igual a:.

$$S = \frac{a(1 - r^{m})}{1 - r} = \frac{0.980392(1 - 0.980392^{180})}{1 - 0.980392} = \underline{48.584404}$$

y como 520,000 = S R entonces:

520,000 = 48.574404 R

por lo tanto $\underline{R = \$\ 10{,}703.02}$

La interpretación de S es que 180 mensualidades a la tasa nominal de 24% capitalizable mensualmente, se convierten en un solo valor presente(o capital) equivalente a 48.6 mensualidades.

Nota: el valor de r salio de r = ar/r, donde $ar = \frac{1}{(1 + (.024/12)^{(2/12)(12)}} = 0.961168781$

$$\text{Primer termino} = a = \frac{1}{(1 + (.024/12)^{(2/12)(12)}} = 0.980392157$$

$$r = \frac{ar}{a} = \frac{0.961168781}{0.980392157} = 0.980392157$$

OTRA SOLUCIÓN: Por Prog. Geom. con fecha focal al final (método alterno).

En este método empesaremos con las flechas de derecha a izquierda:

$$R + R[1 + (0.24/12)]^{(1/12)(12)} + \ldots + R\,[1 + (0.24/12)]^{(179/12)(12)} = 520{,}000[1 + (0.24/12)]^{(180/12)(12)}$$

Es una progresión geométrica donde:

$$a = 1 \qquad r = [1 + (0.24/12)]^{(1/12)(12)} = 1.02$$

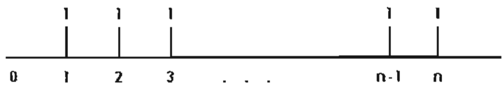
$$S = \frac{a(r^{m} - 1)}{r - 1} = \frac{1.02^{180} - 1}{1.02 - 1} = 1{,}716.041567$$

$$1{,}716.041567\,R = 520{,}000[1 + (0.24/12)]^{(180/12)(12)}$$

$$\underline{R = 10{,}703.02}$$

Monto de Anualidad Ordinaria

Si se cambia el punto de valuación de una anualidad ordinaria al final de ésta. Es decir, al punto n.



$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Como es facil observar, se tiene una suma de montos a la cual se le llama "Monto de una Anualidad" y dado que es una anualidad ordinaria o "Monto Ordinario" el cual se denota por $S_{\overline{n|}}$

$$S_{\overline{n|}} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Fórmula 7.4

Vemos que es una progresión geométrica de razón (1 + i); Y, aplicando la fórmula de la suma de progresión:

$$S_{\overline{n|}} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Fórmula 7.5

Y por el mismo razonamiento de 7.2 si en lugar de pagos unitarios se efectuan pagos de R anualmente. Y ahora llamando S al monto de una anualidad se tiene:

$$S = RS_{\overline{n|}} \text{ (valuada a la tasa i)}$$

Fórmula 7.6

Ejercicio 3

EJERCICIO 3) **Encontrar el monto de $ 20,000 anuales pagaderos durante 5 años, el primero se efectuará dentro de un año, la tasa de interés anual es del 12%.**

SOLUCIÓN:

Tenemos $R = 20{,}000$, $n = 5$, $i = 0.12$ y la incognita es S

Por lo tanto, por la fórmula 7.2 tenemos:

$$S = R s_{\overline{n|}} \text{ (valuada a la tasa i)}$$

$$S = 20{,}000\, s_{\overline{5|}}$$

Donde $s_{\overline{5|}} = \dfrac{(1 + 0.12)^5 - 1}{0.12} = \dfrac{1.762342 - 1}{0.12} = 6.352847$

$$S = 20{,}000(6.352847)$$

$$\underline{S = 127{,}056.95}$$

Anualidades valuadas con tasa nominales

Inicialmente se estudiará el caso en que la convertilidad de la tasa nominal corresponda con la frecuencia de los pagos (m = p); en tal situación, el procedimiento de valuación, consiste en tomar como periodo fundamental el de la convertilidad de la tasa, tomando la correspondiente tasa efectiva y renta, periodo. La expresión será:

$$A = \frac{R}{p}\, a_{\overline{mn}|i'} \quad \text{donde } i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Fórmula 7.7

Si se trata de monto la fórmula será:

$$S = \frac{R}{p}\, S_{\overline{mn}|i'} \quad \text{donde } i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Fórmula 7.8

Acerque el cursor a los ejercicios 4 y 5 y vera un ejemplo de cada fórmula respectivamente:

Ejercicio 4 Ejercicio 5

EJERCICIO 4) **Para liquidar una deuda, se haran pagos iguales cada semestre, si la Renta anual es por $ 5,000, al término de 5 años a una tasa de interés del 8% anual convertible semestralmente, encontrar el valor de la deuda.**

SOLUCIÓN:

Datos	Incognita	Fórmula y desarrollo
$R = 5{,}000$	A	$A = \dfrac{R}{p}\, a_{\overline{mn}\rceil i'}$ donde $i' = \dfrac{i^{(m)}}{m}$
$n = 5$ años		
$i = 0.08$		$A = \dfrac{5000}{2}\, a_{\overline{2 \cdot 5}\rceil 0.04}$
$m = p = 2$		$A = \underline{2{,}500}\,(8.11090)$
		$\underline{A = 40{,}004.50}$

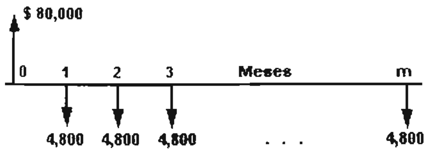
EJERCICIO 5) **Se formo una sociedad de ahorradores, si uno de ellos abona $ 50,000 cada seis meses invirtiendolo al 4.5% convertible semestralmente. ¿Cuanto tendra al final de 7 años?.**

SOLUCIÓN:

Datos	Incognita	Fórmula y desarrollo
$\frac{R}{2} = 50{,}000$	S	$S = \frac{R}{p} S_{\overline{mn}\rceil i'}$ $\quad i' = \frac{0.045}{2}$
$i^{(2)} = 0.045$		$S = 50{,}000 S_{\overline{2*7}\rceil 0.0225}$
$n = 7$		$S = 50{,}000\ (16.24371)$
$m = 2$		$S = \underline{812{,}185.50}$

EJERCICIO 6) Cuantos meses se requerire, para pagar un prestamo de 80,000 a una tasa nominal capitalizable mensualmente del 68%, si cada uno de los pagos, es de $4,800.

SOLUCIÓN:



Por progresión geométrica.

$$80{,}000 = \frac{4{,}800}{(1 + 0.68/12)^{(1/12)(12)}} + \frac{4{,}800}{(1 + 0.68/12)^{(2/12)(12)}} + \ldots + \frac{4{,}800}{(1 + 0.68/12)^{(m/12)(12)}}$$

$$80{,}000 = \frac{4{,}800}{(1.0566666)^{1}} + \frac{4{,}800}{(1.0566666)^{2}} + \ldots + \frac{4{,}800}{(1.0566666)^{m}}$$

$$a = r = \frac{1}{1.0566666} = 0.9463722$$

$$S = \frac{a(1 - r^{m})}{1 - r} = \frac{0.9463722(1 - 0.9463722^{m})}{1 - 0.9463722}$$

Conclusión

$C = S\,R$

$$80{,}000 = \frac{0.9463722(1 - 0.9463722^{m})}{1 - 0.9463722}(4{,}800)$$

$0.94444444 = 1 - 0.9463722^{m}$ aplicando logaritmos naturales

$$m = \frac{\ln 0.05555555}{\ln 0.94637224} = 52.438470982 \longrightarrow \underline{53 \text{ meses}}$$