



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Hongos: perturbaciones y comportamiento

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F Í S I C O
P R E S E N T A :
WILHELM PABLO KAREL ZAPFE ZALDIVAR



DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCOIS ALLAIN LEYVRAZ WALTZ

2005

m346906





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA 14
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
 NOMBRE: Wilhelm Pablo Karel Zapfe Zaldívar
 FECHA: 17 agosto 2005
 FIRMA: [Signature]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
 "Hongos: Perturbaciones y comportamiento"

realizado por Zapfe Zaldívar Wilhelm Pablo Karel

con número de cuenta 40004221-1, quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Francois Allain Leyvraz Waltz

Propietario Dr. Luis Benet Fernández

Propietario Dr. Víctor Manuel Romero Rochin

Suplente Dr. Thomas Henry Seligman Schurch

Suplente Dr. Christof Jung Kohl

[Handwritten signatures: Ely, Benet, Romero, T. H. Seligman, Christof Jung]

Consejo Departamental de Física

[Handwritten signature: Alicia Zarzosa Perez]
 M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

17/08/2005
 17/08/2005

Hongos: perturbaciones y comportamiento

Wilhelm Pablo Karel Zapfe Zaldivar

Director de Tesis: Francois Allain Leyvraz Waltz

. 6 de junio del 2005

Agradecimientos

No he creído que haya escrito algo tan bueno como para dedicárselo a alguien en especial, así que he tenido que pasar inmediatamente a esta sección. En ella solemos citar todos a más o menos los mismos actores de nuestro teatro personal. En mi caso son los siguientes, todos ellos con muy buenas razones para aparecer aquí:

A mi santa madre, porque me alimentó (en todos los sentidos) cuatro o cinco años más de lo que me merecía. A mis mecenas, especialmente a Thomas, porque se propasó con su mecenazgo, a Francois por soportar esta interminable serie de discusiones bizantinas, y a Luis porque no dejaba que nos durmieramos en clase. Al equipo que me mantiene más o menos cuerdo, especialmente Mocado y Betoben. A Brutiger porque era el único dispuesto a jugar ajedrez conmigo y a Andrés, por jugar cualquier otra cosa. Evidentemente a Antonio Halcón porque la computadora se mantiene funcionando a pesar de todo y consigue nuevos juegos. A Pedro, Lisa y Alex, porque son medianamente culpables, aunque ninguno de ellos sea conciente de eso, de que yo estudie física, y una larga sarta de defectos más. A la Legión del Caos, especialmente a Manuel y Mau, por esa sana compañía en las largas horas de estudio, y a Pablo por su extraña visión de la ciencia que nos mantiene en la orilla de la cordura. Por supuesto que a Hugo por las pizzas de los viernes. También a los matematicosos Alfredo, Victor y Ana, y Amorfo por que sí.

Aunque casi todos los profesores que tuve son muy loables, hay uno que en especial merece ser recordado. A Luis Briseño, el mejor pedagogo de la Facultad, y probablemente de la Universidad.

Al Hada Malvada...

Índice general

Introducción	I
1. Las reglas del Juego	1
1.1. Definiciones y conceptos básicos	1
1.2. La ergodicidad	3
2. Hiperbolicidad y Ergodicidad	5
2.1. Exponentes de Liapunov	5
2.2. La región de Pesin	9
2.2.1. Una pequeña digresión sobre ergodicidad.	11
2.3. Como buscar exponentes de Liapunov	12
2.3.1. Conos invariantes	12
3. Ejemplos y más definiciones	17
3.1. El billar circular	17
3.2. El billar de Sinai	22
3.2.1. Los frentes de onda	22
4. Un teorema ergódico para billares Planos	25
5. Los hongos	32
5.1. El hongo perfecto	32
5.1.1. Los hongos anidados	35
5.2. Los hongos elípticos	38
6. Los números alucinógenos	39
6.1. El billar Θ	42
7. Los hongos perturbados	52
7.1. Los hongos chuecos	52

7.1.1. Los hongos con sombrero levantado	52
7.1.2. El sombrero rebajado	56
7.1.3. El hongo suave	56
8. Conclusión	60

Introducción

El estudio del Caos en Física y Matemáticas ha sido impulsado como una moda durante las tres últimas décadas. Lo que se ha llamado la Teoría del Caos entre los legos hubo de ser mencionada incluso en películas del talante de Parque Jurásico. Esto ya no puede ser visto como una tendencia pasajera. Las raíces que tiene la mencionada teoría son mucho más antiguas, y en cierta manera más honrosas, que las espectaculares imágenes generadas con la ayuda de las computadoras que nos presentan cuando nos hablan de ella. Remontémonos a los finales del siglo XIX, y recordemos que por aquellas décadas en los que Poincaré escribía sobre la imposibilidad de seguir con detalle absoluto el desarrollo de un sistema determinista con una cantidad de información finita, Boltzmann se embarrullaba con su hipótesis ergódica aplicada a sistemas de partículas en cantidades monstruosas. Curiosamente existen pocos sistemas donde se puede verificar rigurosamente que dicha hipótesis se cumple. Aquí se hablará de una clase de ellos.

Los billares han sido llamados por muchos el campo de juegos favorito de físicos y matemáticos por igual. Estos hermosos objetos requieren para su estudio formal dentro de la Mecánica Clásica arduas aplicaciones de Análisis y Teoría de la Medida. Paradojicamente eso no los hace tediosos, puesto que casi cualquiera de estas aplicaciones puede ser descrita de forma intuitiva como un suceso ideal de Mecánica u Óptica, y los resultados pueden ser comprendidos por cualquier estudiante de ambas ciencias que haya asistido a la mitad de sus lecciones. De ahí que sean tan populares, por lo menos a un nivel informal.

Más importancia han adquirido los billares recientemente, ya que es relativamente fácil plantear y llevar a cabo experimentos que reproduzcan sus contrapartes cuánticas, aquellos sistemas que, en el límite clásico, identificaríamos con billares. Dentro de lo que se ha dado por llamar Caos Cuántico, el billar resulta tener un papel privilegiado al mostrar las características clásicas ideales de forma matemática; y las cuánticas, de forma tanto experimental como teórica. Esta última ha mejorado notablemente en los últimos

años, debido en gran parte a los “experimentos numéricos”, simulaciones por computadora.

Este trabajo nació precisamente de un curioso resultado que se obtuvo en uno de esos experimentos. En este punto plantearé el problema, y remitiré al lector impaciente al capítulo 6 para que continúe. Dentro del estudio de los billares ideales clásicos, L. A. Bunimovich encontró uno cuyo espacio fase tenía la característica muy importante de ser trivialmente separable en una componente ergódica única, y una componente integrable, al que llamó billar hongo (*mushroom billiard*)[1]. Se me pidieron, para matar el tiempo, unas cuantas cosas: Debería, en primer lugar, obtener la distribución de tiempos en que una partícula que siguiera una órbita caótica tuviera una proyección sobre el espacio de configuración que aparentara ser localmente integrable. En segundo lugar, llevar a cabo experimentos numéricos rutinarios con sencillas modificaciones de dicho billar (es decir, dibujar secciones de Poincaré y repetir la distribución de tiempos) y convertir el billar en un sistema dispersivo agregándole agujeros. Lo que aparece aquí es el resultado de llevar a cabo las dos primeras tareas, siendo la primera la que arrojó un resultado más interesante.

La estructura del texto es como se describe a continuación. En los primeros cuatro capítulos expongo los conceptos matemáticos elementales y no tan elementales sobre los billares de la siguiente forma. En el primero se dan las definiciones básicas, el segundo lidia con los exponentes de Liapunov y se presenta un teorema que permite encontrarlos cuando son distintos de cero en variedades simplécticas bidimensionales, el tercero expone un par de ejemplos clásicos dentro de los billares y se dan, también ejemplificadas, las restantes definiciones. En el cuarto capítulo se expone de forma informal el Teorema Ergódico para billares planos.

Los siguientes capítulos dejan el carácter introductorio del trabajo. En el capítulo quinto expongo la mesa de billar que le da el título a esta tesis, y aclaro las propiedades que la hacen especial. El sexto capítulo se le dedica enteramente a una de estas propiedades, la sucesión de los *números alucinógenos*, que está vinculada con la distribución de tiempos en el billar. Esta sucesión consiste esta formada por los números de rebotes continuos permitidos para una geometría específica del billar. El resultado importante es que dentro de esta familia de billares, (y otra clase que comparte una característica importante), no cualquier número de rebotes está permitido, sino que están restringidos por las características geométricas del billar en particular. Este punto es importante de recordar al momento en que uno pretende hacer estudios estadísticos sobre billares y le aparecen *huecos* en las distribuciones esperadas. En el mismo capítulo se plantea además una

conjetura que espero sea de interés para los estudiosos de sistemas dinámicos en general. El séptimo capítulo lidia con perturbaciones y deformaciones del billar en cuestión, mostrando como se pierden fácilmente las características de este billar desde un punto de vista riguroso, aunque se mantienen presentes de forma transiente. Estos dos últimos capítulos son los resultados propios, y, de ser llevados a cabo los experimentos correspondientes, pueden contener alguna relevancia para el diseño de la mesa a utilizar.

El gusto por el Caos es una deformación personal mía, que comparto con no pocos físicos y matemáticos. El gusto por los billares en específico lo desarrollé como a la mitad de este trabajo, al enfrentarme al rigor de la Teoría Ergódica. Es mi deseo que este trabajo refleje el interés adquirido por las rarezas y sutilezas, que, aunque tal vez con poca relevancia inmediata, puedan ser de alguna forma un pequeño uñazo al telón que separa el conjunto de los problemas integrables de todo el resto.

Capítulo 1

Las reglas del Juego

Der Mensch ist nur ganz Mensch wenn er spielt.
Schielle

1.1. Definiciones y conceptos básicos

Un billar plano (clásico) es un sistema dinámico que describe el movimiento de una partícula puntual en \mathbb{R}^2 ó \mathbb{T}^2 , sometida a las leyes de reflexión elástica contra la frontera de una región conexa. A dicha región le llamaré la mesa de billar, a la frontera, la orilla de la mesa. Dicha orilla puede contener buchacas, y estará constituida por una cantidad a lo más numerable de segmentos suaves. Las buchacas serán simplemente los segmentos donde las leyes de reflexión estarán ausentes, y perderemos la bola. Las curvas que delimitan la mesa recibirán una clasificación acorde a como se ven desde dentro de la mesa. Focalizadores, si son cóncavos, dispersores si son convexos y neutros si su curvatura es cero. Esto definirá asimismo un signo para la curvatura: negativa si es focalizadora, positiva en los otros casos. A la mesa la denotaré por \mathbf{Q} y a la orilla por $\partial\mathbf{Q}$. A cada arco lo denotaré como $\partial\mathbf{Q}_i$ donde $i \in \mathbb{I}$ (ver fig. 1.1).

El espacio fase del billar esta compuesto por los puntos de la forma (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , donde $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$ coincide con \mathbf{p} , pues tomaré masas unitarias y sistemas de referencia cartesianos. Dado que estamos interesados en billares de una partícula, la magnitud de la velocidad es irrelevante, por lo que la tomaremos como 1. Entonces la dinámica estará reducida a $\mathbf{Q} \times \mathbb{S}$. Le llamaré \mathcal{M} .

Como en los billares con los que lidiaré no hay fuerzas o campos de ningun tipo (lo que equivale a que el billar sea plano), gran parte del flujo de este sistema será impresionantemente aburrido. Mientras no haya choques

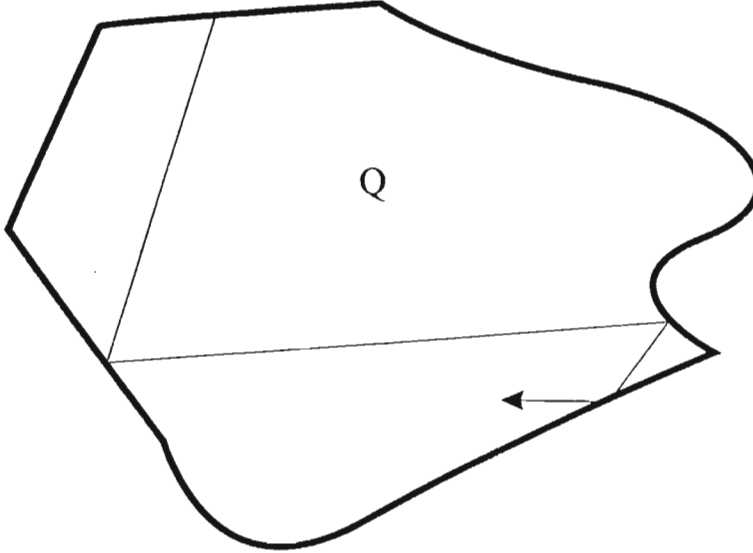


Figura 1.1: Un billar cualquiera.

la partícula sigue trayectorias rectas. De ahí que baste tomar de \mathcal{M} su frontera $\partial\mathcal{M} = \{(q, \theta); q \in \partial Q\}$. Como la magnitud de \mathbf{p} está restringida a 1, introduciré las coordenadas de Birkhoff para trabajar en una variedad bidimensional. A dicha variedad le denotaré \mathbb{M} , y es una sección de Poincaré del espacio fase total, y es, a su vez, un espacio fase.

A $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ le asignaremos como primera coordenada la longitud de arco l de la frontera de la mesa medida respecto a algún punto arbitrario. La segunda coordenada será la velocidad tangencial con respecto a la frontera en el momento de estrellarse, denotada por v_t . A veces será conveniente sustituir esta por el ángulo de reflexión con respecto a la normal, denotado de ahora en adelante φ . Evidentemente la virtud de esta coordenada es que no cambia de signo al rebotar, lo cual no se puede decir del otro componente de la velocidad. Tiene la muy pequeña desventaja de que exista un subconjunto de medida cero en donde no está definida, este conjunto son las esquinas del billar, es decir, puntos donde la junta entre dos arcos ∂Q_i y ∂Q_{i+1} no es diferenciable. Con esto queda definida y equipada con coordenadas la sección de Poincaré del espacio fase donde trabajaré:

$$\mathbb{M} = \{(l, v_t); l \in [0, L), v_t \in [-1, 1]\} \quad (1.1)$$

donde L es la longitud total de ∂Q . No sobra aclarar que este espacio es un

cilindro, y tiene medida finita dada por

$$d\mu = \frac{1}{2L} \cos \varphi d\varphi dl = \frac{1}{2L} dv_t dl \quad (1.2)$$

Al mapeo que a cada punto de un rebote (l_1, v_{t1}) le asigna (l_2, v_{t2}) del siguiente rebote del mismo rayo lo denominaré el mapeo del billar $\mathcal{T}(l, v_t)$. También se le conoce como mapeo de Birkhoff. Este mapeo es diferenciable, como se demostrará en el capítulo 3, y preserva la medida μ . Al sistema dinámico continuo $S^t(q, p)$ lo llamaré el flujo del billar, donde las leyes dinámicas son la reflexión de la óptica clásica, el movimiento rectilíneo uniforme y el parámetro t , conocido por los entendidos como el tiempo.

Los billares gozan de la importante propiedad siguiente, conocida en la comunidad como invariancia ante inversión temporal, y es la siguiente:

$$\mathcal{T}^{-1}(l, v_t) = \mathcal{T}(l, -v_t) \quad (1.3)$$

La proyección de $S^t(q, p)$ sobre la mesa (el espacio de configuración) resultan ser líneas rectas por segmentos. Tanto en \mathbf{Q} como en \mathbf{M} les llamaré órbitas.

Serán cáusticas las curvas Γ que cumplan la siguiente propiedad: Si una órbita resulta ser tangente en un punto a Γ , entonces todo otro punto de contacto entre Γ y la órbita será también un punto donde ambas son tangentes entre sí [1].

1.2. La ergodicidad

Una última definición pertinente, que requiere un poco más de espacio y de énfasis es la siguiente. Una transformación de un espacio medible \mathbb{X} es ergódica (respecto a la medida que se preserve bajo dicha transformación, y sólo esa) si cualquier subconjunto que es imagen de sí mismo, i.e. cualquier subconjunto que cumpla

$$\mathcal{T}^{-1}(A) = A \quad \text{--} \quad (1.4)$$

tiene medida nula o total. Dicha definición de ergodicidad tiene varias equivalencias en espacios medibles donde se haya definido una integral. La más famosa de todas es la que se conoce en Mecánica Estadística como la hipótesis ergódica de Boltzmann.

$$\int_{\mathbf{M}} f(x) d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathcal{T}^n(x)), \quad (1.5)$$

es decir, los promedios sobre el espacio fase coinciden con los temporales en el límite infinito de los segundos. También es equivalente a decir que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{M})$ es invariante respecto a \mathcal{T} entonces f es constante casi donde sea respecto a la medida invariante. Demostrar que las tres definiciones son equivalentes requiere unos cuantos resultados previos. El más importante de todos es el Teorema de Birkhoff-Khinchin, que garantiza que el promedio temporal efectivamente existe y que es invariante bajo \mathcal{T} . Aunque esta afirmación parece intuitivamente obvia, la demostración es larga y sutil. Así pido indulgencia y lo daré por hecho. Hay que aclarar que la ergodicidad por si misma no implica caos, siendo el ejemplo más sencillo las rotaciones irracionales de un círculo. Ningun conjunto salvo el total permanece invariante respecto a ningún número finito de aplicaciones de esta transformación. Por lo tanto, cualquier medida que sea tal nos dará que precisamente, los conjuntos que permanecen invariantes respecto a \mathcal{T} son de medida 0 ó 1.

Existen unas propiedades muy entretenidas definidas también respecto a medidas invariantes que son de interés para el estudio de los billares en particular y de los sistemas dinámicos en general. Como aquí no nos preocuparemos por demostrar que los billares de hongo poseen esas propiedades (aunque si lo hacen), me limitaré solamente a citar una de ellas. Se le dice a un sistema mezclante si, dados dos subconjuntos medibles cualesquiera \mathbf{A} y \mathbf{B} , ocurre que:

$$\mu((T)^{-n}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B}) \rightarrow \mu(\mathbf{A})\mu(\mathbf{B}) \quad (1.6)$$

conforme n crece. Usamos la transformación inversa porque respeta sigma-algebras, y los conjuntos medibles pertenecen a éste tipo de familias de subconjuntos, pero para el mapeo del billar, en realidad esto no es reelevante, ya que la transformación esta definida tanto para atrás como para adelante. El punto es más bien que para cualquier par de conjuntos (paquetes de condiciones iniciales) separados, la probabilidad de encontrar subconjuntos de puntos pertenecientes al pasado de alguno de ellos dentro del otro se homogeneiza; se parecen cada vez más a eventos independientes ¡aunque hayan sido escogidos de forma mutuamente exclusiva en un principio!

Capítulo 2

Hiperbolicidad y Ergodicidad

*Give us the key to the Hell of Lucifer, Dreamlord,
or the entire Host of Chaos will be at your throat,
from the Shivering Legion, to the Laughing Brigade...*
Gaillman

Es irónico que incluso para el estudio del caos sea muy conveniente enfocarnos antes que nada en las aproximaciones lineales. Esto se debe, entre otras cosas, a que los físicos y matemáticos somos en general muy malos para resolver cualquier otro tipo de problemas. Existe también, sin embargo una razón mucho más profunda, o, al menos, eso queremos creer. Un sistema mecánico está completamente determinado por el campo vectorial sobre el espacio fase. Por lo tanto, lo único que necesitamos saber realmente, punto por punto, es la aproximación lineal. Una propiedad muy importante de esta aproximación será la que nos permita otorgarle a un sistema el honorable título de caótico.

2.1. Exponentes de Liapunov

Sea A un subconjunto de una variedad diferenciable, y sea $f : A \rightarrow A$ un difeomorfismo. Entonces, para propósitos del estudio de f actuando sobre A como sistema dinámico, podría ser interesante ver como se comporta $f^n(x)$ en la vecindad de un punto fijo x_0 . Esto es especialmente interesante en sistemas Hamiltonianos, donde el flujo está totalmente determinado si se conoce su generador infinitesimal, la aproximación lineal. Sin profundizar en detalles sobre espacios tangentes o eigenespacios generalizados, restringiré esta discusión al caso donde f es \mathcal{T} , el mapeo del billar y A

es (casi) \mathbb{M} , la sección de Poincaré del espacio fase del billar. Decir *casi es* significará de ahora en adelante, *excepto por subconjuntos de medida cero*. De momento pensemos sencillamente que \mathcal{T} es diferenciable casi donde sea, en el próximo capítulo vendrá una expresión concreta para su diferencial construida paso a paso. En este momento su diferencial esta representada por una matriz de dos por dos que llamaré $D\mathcal{T}_{x_0}$.

Sean $\{\alpha_i\}$ los eigenvalores de $D\mathcal{T}_{x_0}$ y $\{\vec{v}_i\}$ sus eigenvectores. Entonces, en el espacio tangente a x_0 :

$$D\mathcal{T}_{x_0}(\vec{v}_i) = \alpha_i \vec{v}_i \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow D\mathcal{T}_{x_0}^n(\vec{v}_i) = \alpha_i^n \vec{v}_i \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow \log\|D\mathcal{T}_{x_0}^n(\vec{v}_i)\| = n \log|\alpha_i| + \log\|\vec{v}_i\| \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log\|D\mathcal{T}_{x_0}^n(\vec{v}_i)\| \right) = \log|\alpha_i| \quad (2.4)$$

Esto sugiere varias cosas. En primer lugar, que la aproximación a \mathcal{T} se puede comportar esencialmente en tres formas. Si $\log|\alpha_i| > 0$, existe un subespacio en donde, asintóticamente, los vectores crecen de forma exponencial. $\log|\alpha_i| < 0$, entonces decrece de igual manera, y si este valor es igual a cero, entonces puede haber un encogimiento o aumento de los vectores \vec{v}_i lento, polinomial por ejemplo.

A $\lambda_i = \log|\alpha_i|$ se le conoce como el *i*-ésimo exponente de Liapunov. Un punto tal que ninguno de sus exponentes de Liapunov es igual a cero es conocido como un punto hiperbólico, tomando el término de los mismos que se topa uno en ecuaciones diferenciales.

Aquí el león sí es como lo pintan, puesto que estamos tratando Mecánica Clásica. Existe un teorema (Grobman-Hartman) [6] [7] que nos garantiza que \mathcal{T} se comporta de forma muy similar a $D\mathcal{T}$ cerca de x_0 , aunque esto sólo es cierto en forma general cerca de puntos hiperbólicos, o en sistemas completamente integrables.

Sea \mathbb{E}^i el subespacio generado por todos los \vec{v}_i asociados a un exponente de Liapunov positivo y \mathbb{E}^e el que esta generado por los vectores tangentes asociados a los exponentes de Liapunov negativos. Es obvio que:

$$D\mathcal{T}_{x_0}(\mathbb{E}^i) = \mathbb{E}^i \quad (2.5)$$

$$D\mathcal{T}_{x_0}(\mathbb{E}^e) = \mathbb{E}^e, \quad (2.6)$$

es decir, son invariantes. Por cierto, la *i* es de inestable y la *e* de estable,

ya que también debiera ser obvio que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|D\mathcal{T}_{x_0}^n(v)\| &= 0 \text{ si } v \in \mathbb{E}^e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|D\mathcal{T}_{x_0}^{-n}(v)\| &= 0 \text{ si } v \in \mathbb{E}^i \end{aligned} \quad (2.7)$$

En este trabajo ambos subespacios son de dimensión uno. En dimensiones mayores el problema general puede resultar muy complicado.

El teorema de Grobman-Hartman también nos asegura que existen subvariedades diferenciables en \mathbf{A} asociadas a \mathbb{E}^i y \mathbb{E}^e y que son tangentes a ellas en el punto x_0 . Lo mejor de estas subvariedades es que resultan ser \mathcal{T} invariantes y se pueden construir iterando \mathcal{T} cerca de x_0 . Las llamaré $\mathfrak{W}_{x_0}^e$ y $\mathfrak{W}_{x_0}^i$. Además tienen también la propiedad calculada de su espacio tangente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n(x) &= x_0 \text{ si } y \in \mathfrak{W}^e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^{-n}(x) &= x_0 \text{ si } y \in \mathfrak{W}^i \end{aligned} \quad (2.8)$$

A esta propiedad le llamaré la propiedad de los tentáculos, y a las variedades $\mathfrak{W}_{x_0}^e$ y $\mathfrak{W}_{x_0}^i$ los tentáculos del punto fijo x_0 . Un diagrama ligeramente intuitivo está representado en la figura 2.1. Resulta que podemos extender la definición de los λ_i para cualquier punto de \mathbf{A} donde \mathcal{T} sea diferenciable y cuente con infinitas imágenes y preimágenes. A dicha región le llamaré \mathbf{H} . Entonces una definición más general de exponente de Liapunov es como sigue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{k=1}^n D\mathcal{T}_{x_{(-k)}}(v_i) \right\| = \lambda_i(x) \quad (2.9)$$

Nótese que lo que se encontrará en el paréntesis de norma no es sino la regla de la cadena aplicada a la transformación \mathcal{T}^n del punto $x_{(-n)}$, es decir, la preimágen n -ésima de x .

Esos son los exponentes de Liapunov del punto x , seguido a lo largo de su órbita, ó, para ser más riguroso, de la órbita misma. Resulta que en cada punto que resulta hiperbólico según esta nueva definición, también suelen existir pequeñas variedades estables e inestables asociadas a cada uno de los exponentes de Liapunov. Dichas variedades acompañarían al punto en su devenir por el espacio fase, y por ende forman una familia de conjuntos que es invariante bajo la transformación. Las condiciones bajo las cuales efectivamente existen son complejas y sutiles, pero se ha demostrado que en la clase de billares que estudiaremos efectivamente existen [4]. Uno debe

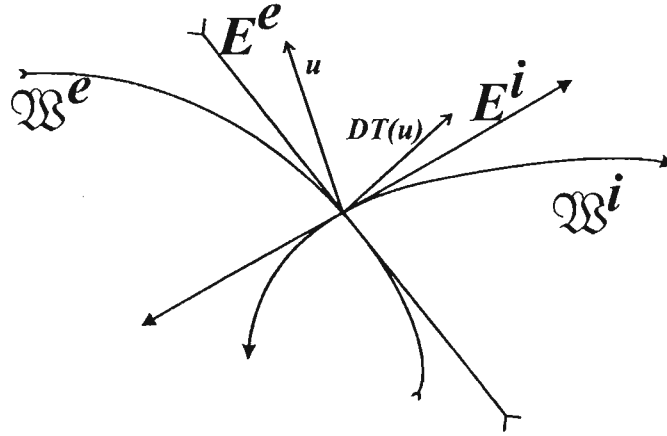


Figura 2.1: Variedades estables e inestables, y la aplicación de la transformación derivada al espacio tangente.

ser muy cuidadoso al tratar de representar estas cosas de forma que sea intuitivamente clara, puesto que es probable que se cometan impresiones. Por ejemplo, existen pocos sistemas para los cuales se puede demostrar que esas variedades son suaves y tienen una longitud mínima a lo largo del espacio fase. Dichos sistemas se conocen como sistemas Anosov. En billares generales uno no puede asegurar que dichas variedades sean siquiera curvas continuas, lo cual hace que sea muy complicado probar otras propiedades, entre ellas la ergodicidad.

La propiedad de los tentáculos quedaría entonces de la forma,

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathcal{T}^n(x), \mathcal{T}^n(y)) &\leq Ce^{-\lambda n} \text{ si } y, x \in \mathcal{L}^e \\ \text{dist}(\mathcal{T}^{-n}(x), \mathcal{T}^{-n}(y)) &\leq Ce^{-\lambda n} \text{ si } y, x \in \mathcal{L}^i, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde \mathcal{L}^i y \mathcal{L}^e son las variedades locales inestable y estable respectivamente, en algún elemento de la órbita de un punto z . Hay que tomar en cuenta que el espacio fase no tiene una métrica natural. La noción de distancia debe ser definida localmente, y suele ser un asunto espinoso. Sin embargo, nos podemos contentar con saber que para cualquier estructura Riemanniana con que nosotros dotemos al espacio fase, la desigualdad 2.10 se cumple [7].

Nada de esto sería muy interesante si el límite que define a los exponentes de Liapunov no existiera, o se diera muy rara vez. Sin embargo, el teorema de Oseledec [7] nos asegura que si tenemos un sistema dinámico que cumpla unos requisitos mínimos, los exponentes de Liapunov existen casi donde sea

respecto a una medida invariante. Los billares cumplen con los requisitos, y por lo tanto tienen un conjunto de medida **1** donde convergen las expresiones para los exponentes de Liapunov, respecto a la medida de Liouville.

De forma un tanto abusiva, llamaré sistemas caóticos a aquellos que tienen exponente de Liapunov distinto de cero en casi todo punto. A la región donde dichos exponentes de Liapunov son distintos de cero se le conoce como la región de Pesin, aunque es usualmente llamada La Mar Caótica por quienes hemos visto sus imágenes en los experimentos numéricos. El caos en un mapeo no implica la ergodicidad, excepto bajo una serie de restricciones relativamente fuertes. Una de ellas es que efectivamente existan, para cada punto hiperbólico, las variedades estables e inestables \mathcal{L}^e y \mathcal{L}^i . Los sistemas que cumplen con eso casi donde sea se llaman sistemas hiperbólicos.

2.2. La región de Pesin

Un sólo punto hiperbólico suele resultar en un sistema dinámico muy aburrido. Recordaré ahora que la definición de ergodicidad depende de la medida, así que concentremos en sistemas dinámicos donde los puntos hiperbólicos juegan un papel significativo. Sea $\Sigma(\mathcal{T}) = \{x \in \mathbb{M}; \lambda_i \neq 0 \forall i\}$ la región de Pesin. Notemos de paso que es invariante bajo \mathcal{T} . Continuando con los nombres tradicionales, a $\mathbb{M} \setminus \Sigma(\mathcal{T})$ se le llamarán islas integrables. Podré, haciendo esta aclaración, hablar de la componente hiperbólica de un mapeo cuando me refiera a la región de Pesin. Dicha componente puede estar densamente poblada de órbitas periódicas y órbitas parabólicas, pero serán subconjuntos de medida cero. Debo aclarar que en otros contextos este abuso no se permite, y se habla de hiperbolicidad cuando en *todo* punto se cumple que los exponentes de Liapunov sean distintos de cero y existan las variedades estables e inestables, siendo curvas diferenciables. En este trabajo nos adherimos a una convención en donde lo importante son las medidas de los conjuntos [7].

Para sistemas Hamiltonianos típicos, suele suceder que las islas integrables convivan con mares caóticos, ambos de medida distinta de cero. Esto es de hecho el objeto de estudio de la teoría KAM, por Kolmogorov, Arnol'd y Moser. Muchos de los objetos de mencionada teoría ya eran conocidos por Poincaré. Entre otras cosas, que las islas en \mathbb{M} son intersecciones de toros en \mathcal{M} con la rebanada de Poincaré usada. Por supuesto, no siempre se ven así. Dichos toros son invariantes respecto al flujo del sistema y se conocen con el curioso nombre de KAM-toros. Suele suceder que estos formen una estructura fractal en la sección de Poincaré. La teoría KAM nos dice que, bajo

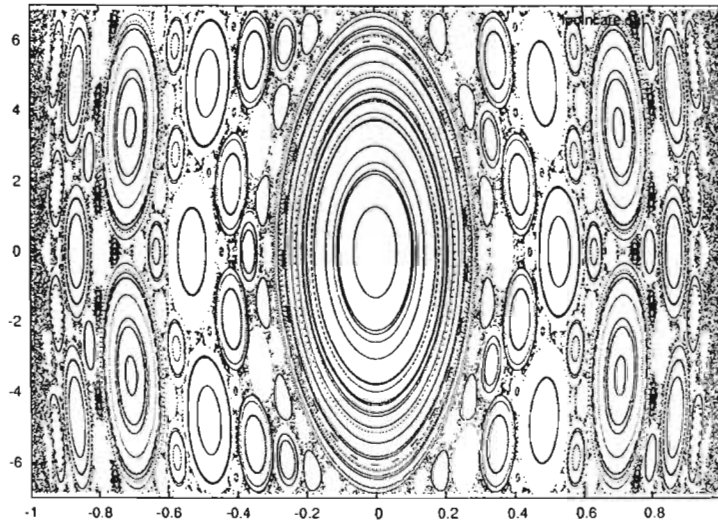


Figura 2.2: Una imagen típica de un sistema KAM. Corresponde a un billar de menos de medio círculo. El eje vertical denota la longitud de arco y el horizontal la velocidad tangencial.

perturbaciones pequeñas y suaves del Hamiltoniano, una cantidad infinita numerable de toros desaparece, pero que un conjunto de ellos con medida distinta de cero sobrevive. De esta forma la estructura del retrato fase de un hamiltoniano general presenta una vista cualitativamente similar a la figura 2.2.

Precisamente será lo anterior un detalle muy importante en los billares a tratar en este trabajo *a causa de su ausencia*. Como el teorema KAM garantiza que casi todos los sistemas mecánicos presentan una dinámica mixta de forma compleja, estaremos realmente frente a una rareza en lo que concierne al billar que le otorga el título a esta tesis.

Otra cosa más: a los físicos suele gustarnos que la medida μ coincida con el volumen del espacio fase. Por supuesto que en secciones de Poincaré las proporciones entre las regiones deben coincidir con las de los volúmenes del espacio fase a las cuales corresponden. Esto tiene una consecuencia importante: la suma de los exponentes de Liapunov en cada punto debe anularse en los sistemas Hamiltonianos, para que se preserve el volumen del espacio como lo impone el teorema de Liouville, y por ende lo mismo es cierto para las secciones de Poincaré.

2.2.1. Una pequeña digresión sobre ergodicidad.

Cuando a uno le explican por primera vez el concepto de ergodicidad, uno se ve tentado a identificarlo como una forma de caos. Nada más lejos de la verdad. En general, es falso que se impliquen mutuamente. La ergodicidad de un mapeo caótico sólo se puede obtener bajo una serie de suposiciones fuertes. A lo sumo, en mapeos donde se puede garantizar que la región de Pesin esta formada por una unión de conjuntos abiertos, entonces el mapeo se puede descomponer en a lo sumo una cantidad numerable de conjuntos localmente ergódicos. Esto quiere decir que si seguimos el mapeo restringido a alguno de esos conjuntos, entonces es ergódico. Este resultado se conoce como el teorema de descomposición ergódica de Pesin [6].

Cerremos los ojos un momento y supongamos que existen variedades estables e inestables en todo punto. Una función continua $g(x)$ invariante bajo la transformación cumplirá,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta \text{ tal que, si } \text{dist}(y_1, y_2) < \delta \\ |g(y_1) - g(y_2)| < \epsilon, \end{aligned} \quad (2.11)$$

pero además, por la invariancia,

$$|g(y_1) - g(y_2)| = |g(\mathcal{T}^n(y_1)) - g(\mathcal{T}^n(y_2))| < \epsilon. \quad (2.12)$$

Si además tenemos que y_1 y y_2 son elementos de algún tentáculo inestable $\mathcal{L}^i(x)$, suficientemente cercanos a x , resulta que por la propiedad de los tentáculos (desigualdad 2.10), la distancia entre ambos habrá crecido exponencialmente, es decir, la vecindad de tamaño δ tiene que englobar forzosamente a la variedad \mathcal{L}^i . Las condiciones dadas por las desigualdades 2.11, 2.12 y 2.10 sólo se pueden cumplir si la función es constante a lo largo del tentáculo $\mathcal{L}^i(x)$ y todas sus imágenes. Una situación similar se dará en el tentáculo estable cambiando \mathcal{T} por \mathcal{T}^{-1} y las imágenes de éste bajo la última transformación. Evidentemente la constante tiene que ser la misma que en el caso anterior, ya que el punto al que están asociado los dos tentáculos tiene que cumplir ambas propiedades.

Si pudieramos conectar casi todo par de puntos en el espacio fase a través de cadenas de tentáculos estables e inestables, claramente, según una de las múltiples definiciones equivalentes de ergodicidad dadas en el capítulo 1 (toda función invariante integrable es constante casi donde sea), el mapeo sería ergódico. Toda función integrable puede ser aproximada por funciones continuas, pero las únicas funciones continuas invariantes bajo \mathcal{T} serían las constantes. Esta construcción es conocida como cadena de Hopf.

Desgraciadamente ninguno de los supuestos que se usan para demostrar esto es cierto en billares en esta forma tan inocente. Esta presupone existen en todos los puntos pequeñas curvas *continuas* de longitud mínima asociadas a los subespacios estables e inestables del espacio tangente. En billares esto suele ser falso. La prueba de que un billar tiene una componente ergódica es sutil y difícil. Sin embargo, una vez que uno logra esto, conjuntamente con el hecho de el exponente de Liapunov es distinto de cero casi donde sea, se obtienen incluidas otras propiedades muy fuertes, como el hecho de que sea mezclante, y, de hecho, también sería isomorfo a un corrimiento Bernoulli.

2.3. Como buscar exponentes de Liapunov

Ahora presentaré de manera un tanto informal como se demuestra la hiperbolicidad en los mapeos de billares. Estos pertenecen a la clase más grande de mapeos suaves con singularidades. Me limitaré a aclarar la idea básica.

2.3.1. Conos invariantes

Para los mapeos suaves con singularidades se usan principalmente dos técnicas para buscar la hiperbolicidad. Una de ellas esta basada en formas cuadráticas, la otra en conos invariantes. Ambas son equivalentes, pero aquí usaré la segunda puesto que es, hasta cierto punto, intuitiva y visualizable.

Sean $L \subset \mathbb{R}^d$ un subespacio vectorial, α un número positivo y L^\perp el perpendicular a L . Un conjunto de la forma

$$C = \{u + v; u \in L, v \in L^\perp, \|u\| \geq \alpha\|v\|\} \quad (2.13)$$

se le conoce como un cono y a L su eje. Nótese que la cerradura del complemento también es un cono. A α le llamaré la anchura del cono.

Si definimos un cono en cada espacio tangente de M tenemos un campo conal, por analogía con un campo vectorial. Lo denotaré como $\{C(y)\}$. Al campo conal se le llama invariante bajo \mathcal{T} sí:

$$D\mathcal{T}_y(C(y)) \subset C(\mathcal{T}(y)) \quad (2.14)$$

para casi toda y . Lo que resultará realmente importante es que el cono sea eventualmente estrictamente invariante. Esto está definido de la forma siguiente:

$$\exists n(y) \text{ tal que } D\mathcal{T}_y^n(C(y)) \subset \text{int}C(\mathcal{T}^n(y)), \quad (2.15)$$

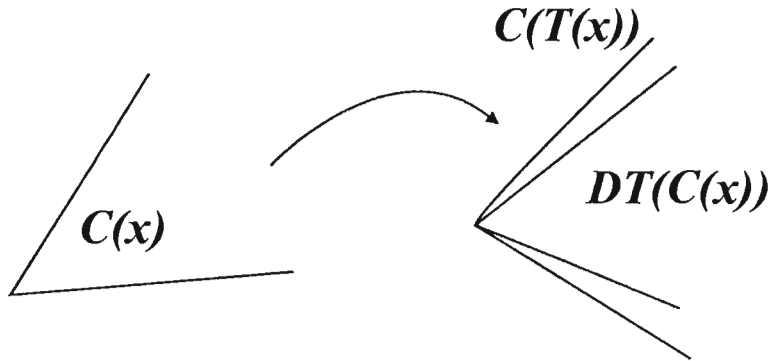


Figura 2.3: Conos estrictamente invariantes en dos dimensiones.

donde el símbolo int se lee como “el interior de”. Otro punto que hay que hacer notar, es que, para ser consistentes con la definición 2.9, el símbolo $D\mathcal{T}_y^n$ debe ser leído como la derivada de la n -ésima iteración del mapeo empezando en el punto y , y no como la derivada del mapeo en y iterada n veces. Para que no quede lugar a dudas, repito: el símbolo debe ser interpretado de la siguiente manera:

$$D\mathcal{T}_y^n := D(\mathcal{T}^n)_y = \prod_{k=1}^n D\mathcal{T}_{y_k} \quad (2.16)$$

Se dice que es inestable si cumple con las dos propiedades anteriores y además, si para casi toda $x \in M$

$$\|D\mathcal{T}(u)\| > \|u\|, \forall u \in \text{int}C \quad (2.17)$$

A los conos inestables los denotaré C^i . Decimos que el cono es estable si cumple con todo lo anterior cambiando \mathcal{T} por \mathcal{T}^{-1} .

Si tenemos un campo conal inestable, lo que hacemos es comparar la n -ésima imagen del cono bajo la transformación derivada con el cono “sin alterar” correspondiente a la n -ésima iteración del punto de donde partía el primer espacio tangente y , además, los vectores tangentes fueron arrastrados hacia la parte ancha del cono (ver fig. 2.3).

Definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
S_x &= \bigcap_{n=0}^{\infty} D\mathcal{T}^{-n}(C^e(x_n)) \\
U_x &= \bigcap_{n=0}^{\infty} D\mathcal{T}^n(C^i(x_{-n}))
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Evidentemente U viene de *unstable* y S de *stable*. El siguiente teorema es una simplificación de uno que se debe a Wojtowski.

Teorema. *Si existen familias estables e inestables de conos para un mapeo \mathcal{T} y que dependan de forma medible respecto a x , y la dimensión de $\mathbb{M} = 2$, entonces, $\mu(\Sigma(\mathcal{T})) > 0$.*

Además, para casi todo $x \in \Sigma(\mathcal{T})$ tenemos que $S_x = E_x^e$ y $U_x = E_x^i$ [7] [11].

Demostración. Supongase que tenemos unas familias de conos inestables y estables definidas en el haz tangente de nuestro mapeo, y que dependan de forma medible de $x \in \mathbb{M}$.

Sea $x \in \mathbf{H}$ y $x_n = \mathcal{T}^n(x) \forall n \in (\mathbb{Z})$.

Sea $\omega_n \in \mathbf{T}_{x_n} \mathbb{M}$.

Entonces

$$\exists k(x) \text{ tal que } D\mathcal{T}_{x-k}^k(C^i(x_k)) \subset \text{int}C^i(x) \tag{2.19}$$

Dado que los conos son estrictamente invariantes, dicha contención incluye la cerradura de la k -ésima imagen del cono k -veces anterior. Dado que $D\mathcal{T}$ es lineal, la siguiente desigualdad no puede depender de la magnitud de ω :

$$\|D\mathcal{T}_x(\omega)\| > \|\omega\| \tag{2.20}$$

Por lo tanto todos los vectores colineales crecen por el mismo factor ante la aplicación de $D\mathcal{T}$.

Entonces sea $\xi = \{\omega \in \overline{D\mathcal{T}_{x-k}^k(C^i(x_k))}, \|\omega\| = \text{cte.}\}$.

ξ es compacto, por lo tanto si

$$\begin{aligned}
&\|D\mathcal{T}_x(\omega)\| > \|\omega\| \\
&\exists \beta(\omega) \text{ tal que} \\
&\|D\mathcal{T}_x(\omega)\| > (1 + \beta(\omega))\|\omega\|
\end{aligned} \tag{2.21}$$

por causa de la desigualdad estricta. $\beta(\omega)$ alcanza su mínimo en ξ y además es mayor a cero. Tomemos pues $\mathbf{a} = \min_{\omega \in \xi} \{\beta(\omega)\}$. \mathbf{a} depende sólo de \mathbf{DT}_x , por lo tanto

$$\|\mathbf{DT}_x(\omega)\| > |1 + \mathbf{a}| \|\omega\| \forall \omega \in \overline{\mathbf{DT}_{x-k}^k} \left(\mathbf{C}^i(x_{-k}) \right) \quad (2.22)$$

Consideremos ahora la siguiente construcción. Sea ω_n un vector del cono inestable $\mathbf{C}^i(x_{-n}) \forall n \in \mathbb{N}$, donde se debe entender que $\mathcal{T}^n(x) = x_n$. Sea también

$$\nu_n = \prod_{k=-n}^{k=-1} \mathbf{DT}_{x_k}(\omega_n) \quad (2.23)$$

su imagen bajo la composición de derivadas en el espacio tangente a $x = x_0$.

Es debido a la invariancia que $\nu_n \in \mathbf{C}^i(x_0)$. Normalizemos dicha sucesión de vectores, y nos queda una sucesión de vectores unitarios $u_n = \nu_n / \|\nu_n\|$ en un subconjunto compacto, el arco unitario intersectado con el cono. Entonces contiene una subsucesión convergente a algún u . Dicho vector forzosamente se encuentra en U_x , y tiene preimágenes dentro de cada uno de los conos anteriores que crecieron por una cantidad mayor a uno. De ahí que U_x tenga al menos dimensión 1. El conjunto U_x es, por construcción, invariante frente al mapeo. Los componentes de los vectores tangentes en la dirección de u crecerán en todo punto por una cantidad mayor a uno siempre. Dado que supusimos que existen conos estables, existe otra dirección en espacio tangente donde la derivada del mapeo contrae las componentes de los vectores. Como el espacio es bidimensional, hemos agotado las eigendirecciones de la derivada, y sólo existe un vector u como límite de cualquier subsucesión como la construida. Entonces efectivamente $U_x = E_x^i$ y es el subespacio generado por u . El mismo razonamiento aplica para los conos estables cambiando $-n$ por n y los subespacios tangentes correspondientes. \square

Existe una versión más elegante del teorema para nuestros propósitos que citaré sin demostrar.

Teorema. *Sea la dimensión del espacio a tratar igual a 2 y sea μ una medida continua con respecto a la medida de Lebesgue. Si existe un campo conal invariante y eventualmente estrictamente invariante, entonces los exponentes de Liapunov existen casi donde sea [7] [11].*

Nótese que en este teorema no se hace ninguna referencia a la expansión de los vectores del cono. Esta se sigue de forma natural respecto a la invariancia de la medida y su continuidad. Esta versión del teorema es perfecta

para sistemas mecánicos, ya que la medida del espacio fase y de sus secciones de Poincaré son medidas de Lebesgue, y no hay cosa tan continua como la identidad (o las constantes). También quiero decir que existe un teorema para dimensiones mayores a 2, pero se requiere una estructura adicional que se preserve bajo la transformación \mathcal{T} . Una forma simpléctica. Como quien dice, dicha condición está satisfecha de cajón para sistemas mecánicos.

Capítulo 3

Ejemplos y más definiciones

*¿Y cuáles son las tres operaciones del espíritu?
La primera, la segunda y la tercera.
Molière*

Hablaré ahora de unas mesas de billar ya clásicas a guisa de preámbulos sencillos para lo que vendrá a continuación y para aclarar unas definiciones que aún faltan.

3.1. El billar circular

El billar circular es probablemente el más aburrido de todos. Dado que el vector normal interior de la frontera es el vector radial $-\hat{e}_r$, es fácil ver que v_t se preserva a lo largo de todos los choques.

De esa forma también debe quedar claro que si el ángulo de choque es racional módulo π , la órbita será un n-eágono regular, posiblemente estrellado. En todo caso, tanto estas órbitas periódicas como las cuasi-periódicas tendrán como cáusticas círculos concéntricos con radio $\rho = R(1 - \|v_t\|)$, donde R es el radio de la mesa (3.1). Esto equivale a decir que \mathcal{T} tiene una constante de movimiento: la velocidad tangencial (que en este caso es proporcional al momento angular).

En \mathbb{M} esto se ve como una foliación de curvas $v_t = \text{cte.}$ que resulta invariante bajo \mathcal{T} . A guisa de ejemplo ver la figura 3.2. Si un sistema dinámico discreto en el tiempo admite una foliación por curvas invariantes bajo la transformación, se dice que el sistema es completamente integrable.

Muy cercano a este se encuentra el billar elíptico. Este billar también es completamente integrable a pesar de tener una estructura más rica, ver las figuras 3.3 y 3.4.

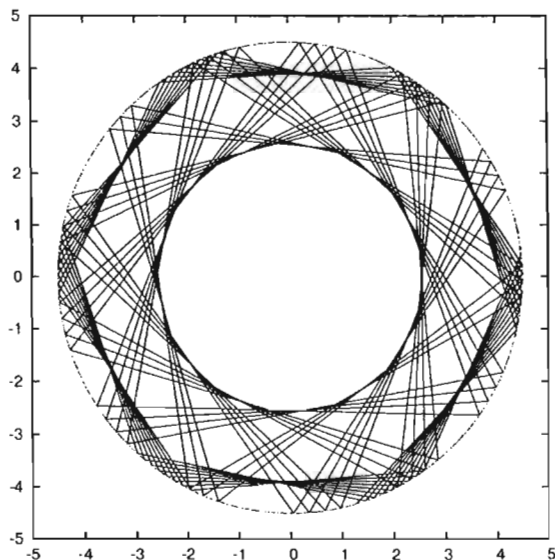


Figura 3.1: Dos órbitas en el billar circular. Nótese que no se cierran, es decir, son cuasi-periódicas.

Las órbitas tienen por caústicas o bien elipses confocales, o hipérbolas igualmente confocales con la mesa de billar. En un caso son órbitas que nunca cruzan el segmento entre los dos focos y en el segundo siempre lo hacen. Entre ambos se encuentran las órbitas que empiezan en un foco y, bien sabido por los arquitectos medievales, después de rebotar contra la pared, cruzan por el otro. Dichas órbitas trazan una separatriz en la sección de Poincaré, consecuencia directa del teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales.

Birkhoff conjeturó que la única clase de billares completamente integrables son los elípticos. Sorprendentemente esa conjetura sigue abierta, aunque recientemente se demostró que los únicos billares que, en dimensiones mayores a dos, tienen caústicas son los elipsoides, así que tal vez no dure mucho tiempo más [12]. Les presento ahora la diferencial del mapeo de un billar.

Teorema. *Si ∂Q consiste de curvas suaves C^k , $k \geq 2$, entonces \mathcal{T} es diferenciable casi donde sea.*

Demostración. Este teorema se demuestra por construcción, ver la figura 3.5.

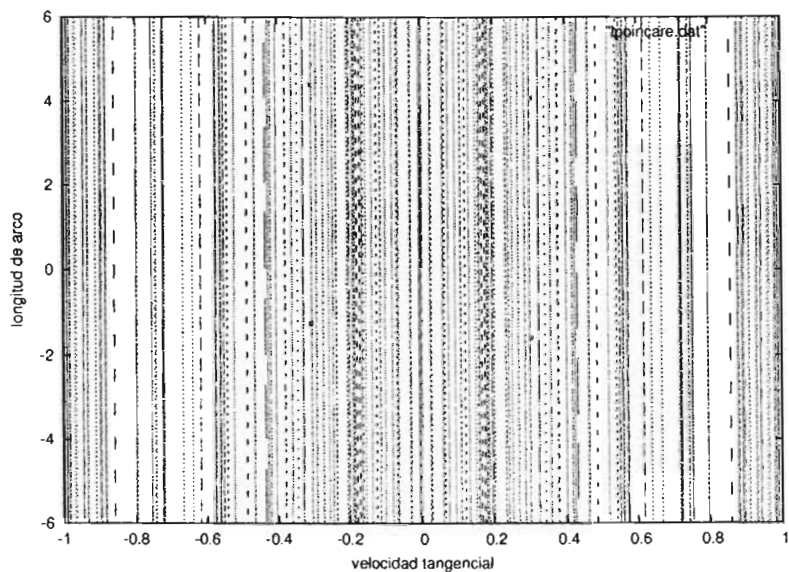


Figura 3.2: El espacio fase del billar circular. La absisa es la velocidad tangencial, mientras que la ordenada corresponde a la longitud de arco. Las irregularidades se deben al generador de condiciones iniciales aleatorias

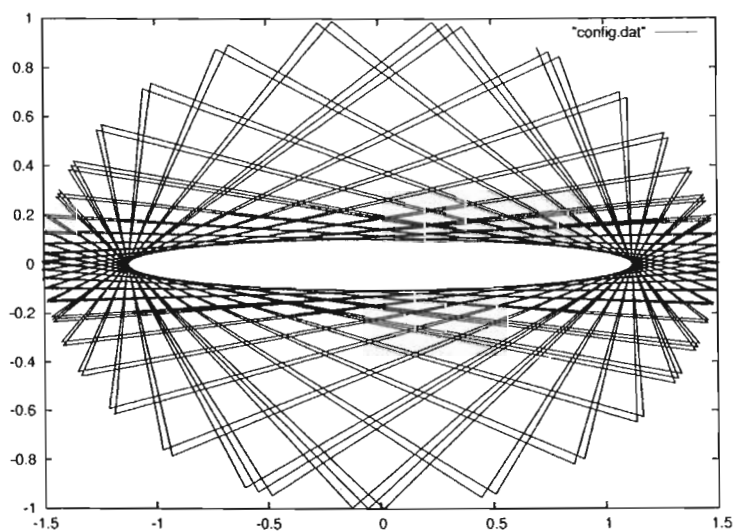


Figura 3.3: Una orbita del billar elíptico, que tiene por caústica una elipse

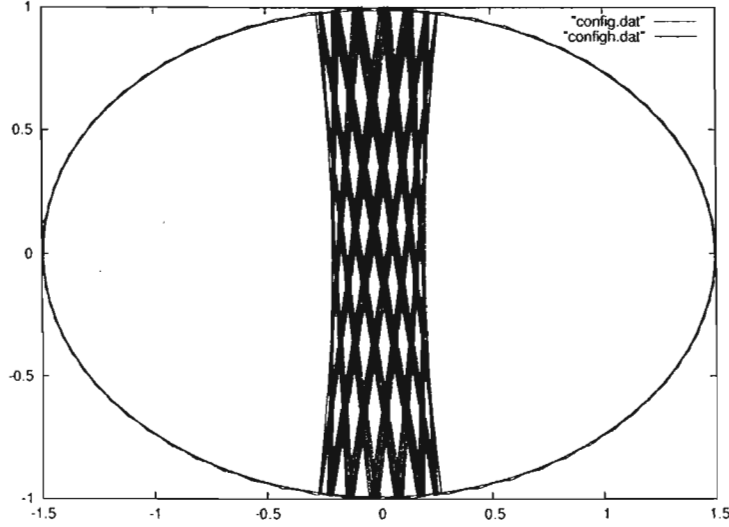


Figura 3.4: Dos órbitas más del billar elíptico. Una tiene por caústica una hipérbola, la otra está tan cercana a la orilla de la mesa que se confunde con ésta.

Sea $x_0 = (l, v_t) \in \mathbb{M}$ y $x_1 = (l_1, v_{t1}) = \mathcal{T}(x)$. Sea $\tau(x_0)$ el tiempo entre un rebote y el siguiente, K la curvatura en x_0 y K_1 la curvatura en x_1 . El signo de K está escogido de la siguiente manera: $K(x) > 0$ si $\partial Q(x)$ es dispersora y $K(x) \leq 0$ si no. Del dibujo 3.5 tomando las aproximaciones infinitesimales se obtienen las relaciones siguientes:

$$h = dl \cos \varphi \quad (3.1)$$

$$h_1 = -dl_1 \cos \varphi_1 = h + \tau \alpha \quad (3.2)$$

$$\alpha = d\varphi + K dl \quad (3.3)$$

$$d\varphi_1 = K_1 dl_1 - \alpha \quad (3.4)$$

Estas relaciones resultan en

$$\begin{pmatrix} dl_1 \\ d\varphi_1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} \tau K + \cos \varphi & \tau \\ \tau K K_1 + K \cos \varphi_1 + K_1 \cos \varphi & \tau K_1 + \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dl \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

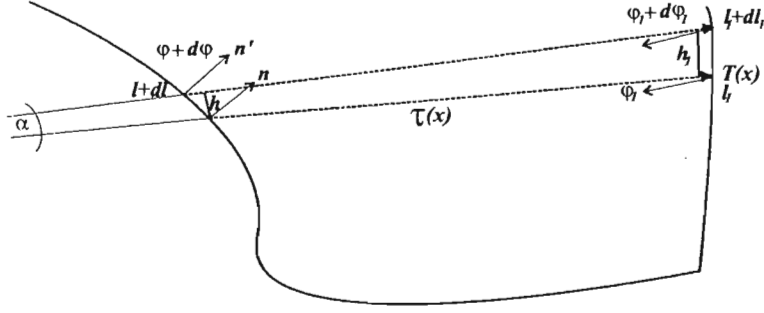


Figura 3.5: La derivada del mapeo del billar.

Tengo aquí, pues, la diferencial del mapeo en coordenadas (l, φ) . La llamaré $D\mathcal{T}^*$. Para pasarla a las coordenadas (l, v_t) usaré

$$d\varphi = \frac{dv_t}{\cos \varphi} = \frac{dv_t}{(1 - v_t^2)^{1/2}} = \frac{dv_t}{v_n^+} \quad (3.6)$$

que resulta en

$$\begin{pmatrix} dl_1 \\ \frac{dv_{t1}}{\cos \varphi_1} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} \tau K + \cos \varphi & \tau \\ \tau K K_1 + K \cos \varphi_1 + K_1 \cos \varphi & \tau K_1 + \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dl \\ \frac{dv_t}{\cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Usando la matriz de cambio de variable

$$\begin{pmatrix} dl \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dl \\ dv_t \end{pmatrix}$$

y su inversa para transformar la diferencial a nuestra nueva base

$$D\mathcal{T} = \frac{-1}{v_{n1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_n \end{pmatrix} D\mathcal{T}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_n} \end{pmatrix}$$

obtengo de una vez por todas por todas la diferencial de \mathcal{T}

$$D\mathcal{T} = \frac{-1}{v_{n1}} \begin{pmatrix} \tau K + v_n & \frac{\tau}{v_n} \\ (\tau K K_1 + K v_{n1} + K_1 v_n) v_n & \tau K_1 + v_{n1} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

y su determinante resulta ser $-v_n$. \square

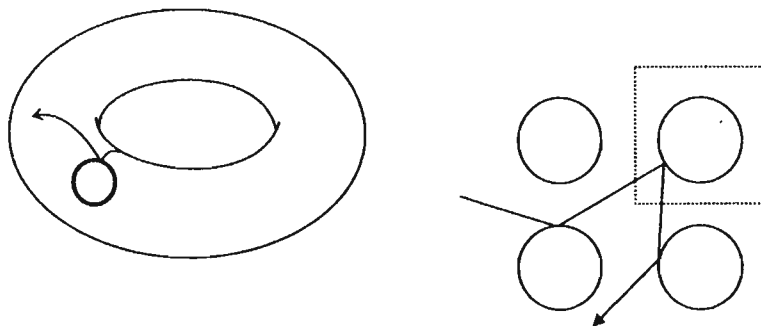


Figura 3.6: El billar de Sinai en el Toro y como teselación del plano (gas de Lorentz). Se encuentra enmarcado un dominio fundamental.

3.2. El billar de Sinai

Existen dos formas equivalentes del billar de Sinai (ver fig. 3.6). Es un obstáculo circular en \mathbb{T}^2 , o el gas de Lorentz, que no es sino la teselación del plano producida por tomar al billar de Sinai como mosaico fundamental. También se habla a veces de "billares de Sinai" aplicado a sistemas dinámicos que son equivalentes a aquel. El ejemplo más conocido es el billar cuadrado con un obstáculo circular dentro.

El billar de Sinai es totalmente opuesto al billar circular. Su dinámica es caótica, ergódica y mezclante. El billar de Sinai produce caos de una forma totalmente diferente a aquella que nos interesa en esta tesis, pero a guisa de ejemplo resulta muy conveniente hablar de ella: la frontera del billar es una curva dispersora. La forma en que las trayectorias se van separando es casi evidente: cada vez que rebotan contra el círculo, las partículas se separan un poco más. Sin embargo, calcular los exponentes de Liapunov de dicha transformación sería una morosidad. En realidad, para probar el caos y la ergodicidad de dicho tipo de billares uno hace lo siguiente.

3.2.1. Los frentes de onda

De la óptica clásica podemos tomar el siguiente hecho: cada vector del haz tangente a M en un punto x representa un frente de onda de la forma siguiente. Recordemos que cada vector de $T_x M$ es un representante único de una clase de equivalencia de curvas que tienen por diferencial a tal vector. Una curva suficientemente pequeña siendo miembro de dicha clase servirá para definir un haz de rayos de la forma siguiente (ver fig. 3.7). Ca-

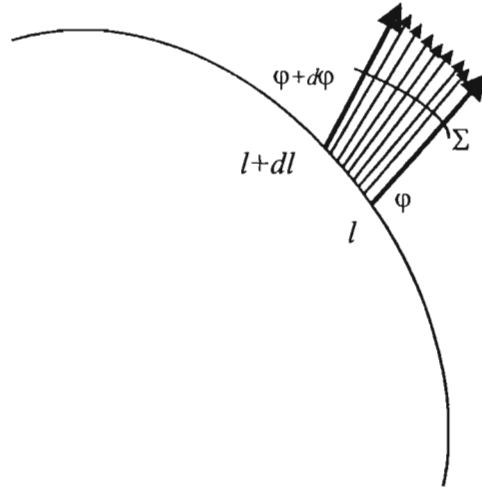


Figura 3.7: El frente de onda asociado a un vector tangente en un punto dado

da punto de esa curva en la variedad de configuración representará a una trayectoria entrando a \mathbf{Q} , cuyas coordenadas pueden ser parametrizadas por

$$(l + \xi dl, \varphi + \xi d\varphi) \quad (3.9)$$

$$\xi \in [0, 1]$$

,y tenemos por lo tanto una familia de trayectorias parametrizada. La familia es el haz de rayos. Ahora imaginemos que el mencionado haz posee una curva que lo atraviesa perpendicularmente a cada tiempo dado; ésta última será el frente de onda Σ . La curva, que es realmente infinitesimal, es aproximable por un arco de círculo, y podemos calcular la curvatura del frente de onda en un punto $\mathbf{x} = (l, \varphi)$ de la frontera del billar.

De este proceso nos queda la siguiente expresión,

$$\chi = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dl} + K(l) \right) \quad (3.10)$$

en donde $K(l)$ es la curvatura del punto $l \in \partial\mathbf{Q}$.

Es inmediato que, mientras no haya fronteras en el camino, el flujo del billar será uno de partículas libres y que el frente de onda cambiará su curvatura de acuerdo a

$$\chi_t = \frac{1}{t + \frac{1}{\chi_0}} \quad (3.11)$$

, sencillamente trazando los rayos de la aproximación circular a Σ , el frente de onda.

Cuando el frente rebota en otra pared del billar, se aplica la conocida ecuación del espejo de la óptica clásica [7]. Si denotamos por χ_- y χ_+ la curvatura antes y después del choque, entonces:

$$\chi_+ = \chi_- + \frac{2K_1}{\cos \varphi_1} \quad (3.12)$$

Combinando ambas ecuaciones podemos predecir la evolución infinitesimal de un frente de onda. Observemos que esto produce una sucesión de fracciones que tienden a una fracción continua donde cada vez es más irrelevante el valor original de la curvatura.

En el billar de Sinai, la curvatura de las paredes es siempre mayor a cero, y eventualmente (excepto un conjunto de medida cero) todas las órbitas acaban golpendo el obstaculo circular. Es geoméricamente obvio que cualquier haz de rayos, aunque posea un frente de onda cóncavo, acabará siendo dispersivo, es decir, trayectorias que se separan en la aproximación infinitesimal. Por invariancia ante inversión temporal, esto es válido tanto atrás como adelante en el tiempo.

Capítulo 4

Un teorema ergódico para billares Planos

Preferiría comprender una sola causa a ser Rey de Persia
Demócrito de Abdera

Uno esperaría, por el billar de Sinai y ejemplos afines, que el billar ergódico y caótico por excelencia tuviera forzosamente elementos dispersivos en la frontera. Puedo imaginar la sorpresa que fue cuando un estudiante de Sinai, Leonid A. Bunimovich, construyó billares completamente caóticos (hiperbólicos y ergódicos) usando arcos de círculo enfocantes y rectas sóloamente.

La construcción de éstos esta basada en el teorema de conos invariantes de Wojtewski (cap. 2). Una vez más, la idea es intuitivamente obvia: supongamos un haz de rayos con velocidad igual en magnitud que se aproximen entre ellos enfocándose. Podemos darles suficiente espacio libre para que después de cruzarse se vuelvan a convertir en un haz dispersivo de rayos, o incluso para que el ancho de su frente de onda crezca realmente. Esto es esencialmente el proceso que hace de billares construidos con segmentos de curvas enfocantes sistemas hiperbólicos: se le llama sencillamente desenfocar el haz de rayos, como se ve en la figura 4.1.

Definamos una pseudonorma que resulta en algo físicamente significativo: el ancho del frente de onda asociado a cada vector del haz tangente. La definimos así:

$$\|u\|_p := \cos \varphi |dl| = v_n |dl| \quad (4.1)$$

Del diagrama para obtener la derivada del mapeo del billar (ver figura 3.5) se puede comprobar que efectivamente ésta es la anchura del frente de onda.

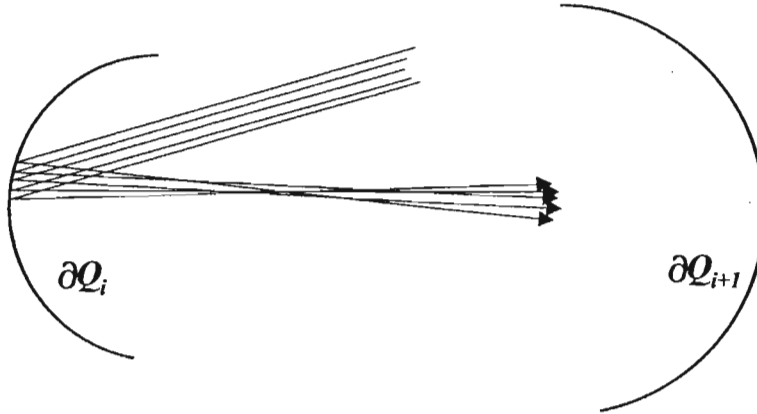


Figura 4.1: El proceso de desenfoque.

Es claro que un vector con $v_t = 1$ no tiene ninguna anchura, pero dicho vector también resulta un poco inútil para el estudio de la separación de las trayectorias, ya que de todas formas la derivada del mapeo no está definida en general en él.

Aplicando la derivada del mapeo a $u \in T_x M$ podemos revisar como cambia el frente de onda su tamaño, y usando la fórmula para la curvatura del mismo encontramos que resulta en una expresión muy sencilla.

$$\begin{aligned} \frac{l \|DT(u)\|_p}{\|u\|_p} &= \left| 1 + \frac{\tau(x)}{\cos \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dl} + K(l) \right) \right| \\ &= |1 + \chi(u)\tau(x)| := \Lambda \end{aligned} \quad (4.2)$$

A dicha expresión la llamaré el factor de crecimiento Λ .

Ahora imaginemos lo siguiente. Es claro que en los billares de Sinaí Λ es eventualmente mayor a uno tanto de ida como de vuelta respecto al tiempo. Existe un muy ingenioso método para lograr esto con billares compuestos con arcos enfocantes solamente. Si en cualquier momento la curvatura χ es menor a cero todavía cabe la posibilidad que el frente de onda tenga suficiente espacio para converger y *después* continuar extendiéndose (ver figura 4.1). Para asegurarnos de eso podemos pedir que en el billar τ , el tiempo entre rebotes, cumpla eventualmente en casi todas las órbitas:

$$\frac{1}{|\chi|} < \frac{\tau}{2} \quad (4.3)$$

En billares formados exclusivamente con arcos de círculo, esto significa que para cada frente de onda con pie en un arco de círculo enfocante ∂Q_i

de radio R_i ,

$$\chi < (-R_i \cos \varphi)^{-1} \quad (4.4)$$

El signo menos es debido a que la curvatura de ∂Q_i está definida como negativa, puesto que estamos trabajando con arcos focalizadores. Además debemos pedir que el círculo esté contenido en la mesa de billar, ya que esto garantizará que

$$\frac{\tau}{2} \geq R_i \cos \varphi. \quad (4.5)$$

La desigualdad 4.5 no es estricta para abarcar el caso en que un rayo que parte de un arco de círculo y llega al mismo. Es evidente que en este caso la longitud del rayo es exactamente una cuerda de círculo. Hay que hacer notar que podríamos garantizar la desigualdad 4.3 de otra forma: el truco de construcción de la imagen, que no es sino tomar en cuenta expansiones libres efectivas, ya que esto no afecta la curvatura del frente de onda. Lo importante es que dicho frente de onda tenga suficiente espacio para desenfocarse [2].

Lo primero que hay que hacer es probar que efectivamente podemos aplicar el teorema de Wojtewski. La condición 4.5 define una familia de conos invariantes en el espacio tangente con coordenadas $(d\mathbf{l}, d\varphi)$, ya que, sustituyendo para el valor de χ obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dl} - \frac{1}{R} \right) < \frac{1}{R \cos \varphi} \quad (4.6)$$

Esto es un cono abierto. Para que la construcción sea válida, descaradamente lo cerramos:

$$-\infty \leq \frac{d\varphi}{dl} \leq 0 \quad (4.7)$$

ya que esto es una manera un tanto abusiva de denotar un cono con eje en el negativo de la identidad. Ahora recordemos una vez más que la ecuación del espejo deja inalterada la curvatura del frente de onda cuando rebota en una pared recta. Por lo tanto se puede hablar de un camino libre efectivo de expansión de onda si el billar está limitado por paredes rectas y círculos solamente. El camino libre efectivo será el rayo quebrado que ocurra entre dos rebotes sobre los arcos de círculo. En lo que sigue asumiré que las órbitas que sólo rebotan entre paredes rectas forman un subconjunto de medida cero. Esto último se debe revisar según el billar que estemos analizando.

Teorema. *Si contamos con una mesa de billar delimitada únicamente por líneas rectas o arcos de círculos enfocantes, y el tiempo libre efectivo es igual o mayor a $2R \cos \varphi$ para casi todo rayo, entonces el campo conal resulta ser invariante.*

Este teorema es una simplificación de uno bastante más general dado por Bunimovich [2]. Los círculos son esenciales para la demostración [1] [7].

Demostración. Unas consideraciones previas. Antes que nada, sólo trabajaré con expansiones libres *efectivas*. Esto es, consideraré rebotes ocurrientes en paredes tales que su curvatura sea distinta de cero. El subíndice **1** denotará el punto del que salió el rayo, y el **2** su imagen en el próximo arco de círculo enfocante. De forma respectiva estarán denotadas las curvaturas, los radios, los cosenos y demás símbolos pertinentes. Por hipótesis se cumple que:

$$\tau \geq \text{máx}\{2R_1 \cos \varphi_1, 2R_2 \cos \varphi_2, R_2 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2\} \quad (4.8)$$

Ya que el tiempo de expansión libre es mayor o igual a cualquier cuerda de círculo en el billar. Esto da por resultado que cualquier frente de onda del cono definido anteriormente llegue a cualquier otro arco como un haz dispersivo:

$$\chi_1 < \frac{-1}{R_1 \cos \varphi_1} \quad (4.9)$$

$$-R_1 \cos \varphi_1 < \frac{1}{\chi_1} \quad (4.10)$$

$$0 < R_1 \cos \varphi_1 < \frac{1}{\chi_1} + \tau \quad (4.11)$$

$$0 < \frac{1}{\frac{1}{\chi_1} + \tau} < \frac{1}{R_1 \cos \varphi_1} \quad (4.12)$$

que significa además que no sólo llega a cualquier lado como haz dispersivo, sino que lo hace con una curvatura acotada y que, mientras mayor sea τ menor será ésta. Esto se tiene que cumplir a partir del mínimo posible valor de τ , en particular, para $\tau = R_2 \cos \varphi_2 + R_1 \cos \varphi_1$. Como τ es en realidad mayor a este valor y las fracciones obtenidas para la expansión libre son positivas, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{1}{\frac{1}{\chi_1} + \tau} \leq \frac{1}{\frac{1}{\chi_1} + R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2} < \frac{1}{R_1 \cos \varphi_1} \quad (4.13)$$

que resulta en

$$R_1 \cos \varphi_1 < \frac{1}{\chi_1} + R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 \quad (4.14)$$

$$-R_2 \cos \varphi_2 < \frac{1}{\chi_1} \quad (4.15)$$

$$\chi_1 < \frac{-1}{R_2 \cos \varphi_2} \quad (4.16)$$

Esto nos llevará, como ya sabemos, a que:

$$\frac{1}{\tau + 1/\chi_1} < \frac{1}{R_2 \cos \varphi_2}$$

Lo cual tiene la siguiente interesante consecuencia. Por la ecuación del espejo:

$$\chi_2 = \frac{1}{\tau + 1/\chi_1} - \frac{2}{R_2 \cos \varphi_2} < \frac{1}{2R_2 \cos \varphi_2} - \frac{2}{R_2 \cos \varphi_2} = -\frac{1}{R_2 \cos \varphi_2}$$

□

Hay que tener cuidado. Este teorema es válido en esta forma en billares circulares. Mientras no se pidan más condiciones, el campo conal resulta sólo invariante. Esto equivale a decir que un frente de onda que parta de un arco de círculo y rebote inmediatamente en el mismo no se desenfoca: el punto en donde se cruzarían los rayos es exactamente el siguiente punto de la frontera, y la curvatura resultante de aplicar la ecuación del espejo es la misma con la que partió originalmente. Esto se puede prolongar indefinidamente hasta que los rebotes pasen a otro arco de círculo distinto o sufran una expansión libre efectiva debida a algún camino suficientemente largo entre paredes rectas antes de regresar al mismo arco de círculo. Esto es conocido en la literatura con el nombre pético de *whispering gallery modes*, las señales de la cueva de los susurros. Cuando se imagina uno que el frente de onda representa una señal sonora, ésta se transmite de forma que llega con toda su intensidad (por la convergencia de los rayos) al receptor. Un susurro puede ser escuchado con toda claridad si tanto el receptor como el transmisor se encuentran pegados a la pared.

Para que realmente implique hiperbolicidad el teorema anterior, necesitamos que eventualmente los conos sean estrictamente invariantes. Esto lo podemos lograr construyendo nuestra tabla de billar de forma que eventualmente los τ efectivos sean mayores por una cantidad mínima que la longitud

de cuerda de cualquiera de los dos arcos circulares entre los cuales ocurren, al menos una infinidad de veces, y que nunca sean menores a este valor. Una trayectoria puede rebotar una cantidad de veces tan grande como se quiera sobre un mismo arco de círculo. Sin embargo, al dejarlo, debe cumplir la desigualdad estricta, de forma que el campo conal resulte *eventualmente* estrictamente invariante. Entonces el Teorema de Wojtowski si es aplicable y otorga exponentes de Liapunov distintos de cero (de hecho, otorga hiperbolicidad [4]). El ejemplo más sencillo posible es el estadio de Bunimovich. Tomemos un círculo y partiéndolo por la mitad, separémos ambas partes una cantidad ϵ y unámonos los arcos con rectas. Otro ejemplo bastante simple es cortar un círculo por debajo del diámetro en línea recta. La parte más grande, por construcción de la imagen, cumplirá los requisitos del teorema. La clase de billares contruida con estos métodos se llama billares de Bunimovich, y se agrupan en flores, estadios, hongos, etc.

La prueba de que dichos billares son además ergódicos es bastante más compleja. Me limitaré pues, a citar las condiciones que satisfacen y observar que efectivamente las cumplen, apelando, en la mayoría de los casos, a las referencias adecuadas.

Condición 1: Existen en casi todo punto conos invariantes y eventualmente estrictamente invariantes, que cumplen con la desigualdad 4.4.

Evidentemente esto es cierto, ya que así los hemos contruido.

Condición 2: Existen variedades estables e inestables locales (tentáculos) en casi todo punto, y son curvas continuas.

Esto no es nada evidente. La demostración que en este tipo de billares se cumple puede encontrarse en [4]

Condición 3: Todo frente de onda enfocante pasa por un punto conjugado, es decir, cambia el signo de su curvatura antes de llegar al siguiente rebote.

Esto no es exactamente lo que construimos al exigir que se cumpliera la desigualdad 4.3. Sin embargo, al considerar que un rebote en una pared recta no cambia la curvatura, podemos relajar esta condición, y entonces, para trayectorias libres efectivas, también se sigue de la desigualdad 4.4 y de nuestros conos invariantes.

Debo mencionar que en el caso de los billares contruidos en este capítulo, el resto de las condiciones se vuelve redundante. Por ejemplo, se requiere que el factor de crecimiento Λ sea estrictamente mayor a 1, pero esto es equivalente en nuestra exposición a la condición 3. El teorema originalmente fue planteado para billares que también pudieran tener elementos dispersivos en su frontera, pero las condiciones que se aplicarían en ese caso no son necesarias para este trabajo.

Cito sin más el teorema, reducido, obviamente, a los billares con sólo elementos enfocantes y neutros en su frontera:

Teorema. *Satisfaganse en un billar las condiciones 1, 2, y 3. Para cada punto tal que su trayectoria nunca sea razante a la frontera del billar, existe una vecindad que esta contenida, excepto subconjuntos de medida cero, en una componente ergódica de medida positiva del mapeo [2].*

Si el conjunto de puntos que satisfacen las condiciones del teorema anterior es denso y conexo, la componente ergódica será una sóla. Billares de la forma presentada aquí lo cumplen, gracias a que el conjunto de puntos cuyas órbitas son razantes forman un subconjunto de medida cero. Una vez más, esto no es evidente, pero está demostrado que así es [2] .

Capítulo 5

Los hongos

I've got something you've never got.

Marilyn Manson

Una vez que quedó claro en esta larga introducción la sustentación básica de la teoría de billares, presento la mesa sobre la cual vamos a jugar. Este billar cuenta con la muy importante propiedad de tener un espacio fase trivialmente separable: uno puede trazar una frontera limpia entre el mar caótico y la isla integrable, frontera que depende únicamente de la geometría de la mesa y resulta tener una expresión clara. Debe hacerse notar que dentro de la Mecánica, esto constituye una verdadera rareza. Constituyen una familia de sistemas Hamiltonianos que permiten un análisis matemático riguroso de su dinámica.

5.1. El hongo perfecto

El billar del hongo perfecto estará constituido por un semicírculo y lo que llamaremos una pata, que será básicamente una extensión de la mesa de billar pegada al diámetro que delimita el semicírculo y que está constituida por rectas. La forma exacta de esta pata no importa realmente, pero cuando hablemos de hongos perfectos asumiremos que tiene forma rectangular o triangular. La parte superior se le llamará el sombrero del hongo. Además asumiremos que el billar completo es simétrico respecto al eje perpendicular al diámetro. Denotaré por R el radio del sombrero, $2r$ el ancho de la pata en la línea de contacto, llamada el tronco, y h la longitud de la pata. La figura 5.1 muestra como dicha terminología se pueda aplicar a cualquier billar de hongo más general [1]. Es evidente que la familia de los hongos

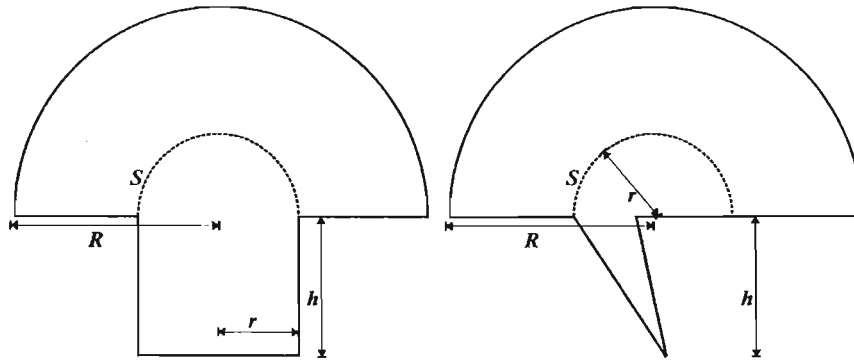


Figura 5.1: La terminología de los hongos.

contiene entre sus representantes extremos al semicírculo y el semiestadio, un billar completamente integrable y otro, pues, mucho mejor portado para nuestros gustos personales. Por supuesto que los hongos interesantes son precisamente aquellos que no son ni uno ni otro caso extremo, como se notará a continuación.

Supóngase $R > r > 0$. Por el truco de construcción de la imagen, es claro que podemos reflejar el billar completo cuando choca con una pared recta para continuar analizando la dinámica de forma más sencilla. Sea A_r el conjunto de M atravesado por órbitas que nunca pasan por la pata del hongo, es decir, órbitas cuya cáustica es un semicírculo más ancho que el entronque. Claramente es una dinámica muy similar a la del billar circular, y estamos presenciando una conservación del valor absoluto del momento angular. Sólo cambia de signo al rebotar contra la parte recta del sombrero (ver fig. 5.2). Entonces es claro que A_r está completamente foliado por curvas $|v_t| = \text{cte.}$. Esto se puede visualizar cómodamente trazando una rutina numérica que muestre la sección del espacio fase que he presentado en el capítulo 1, véase la figura 5.3. Dicho que la diferencial del mapeo es discontinua en las esquinas, dichas curvas tienen un aspecto un tanto curioso en coordenadas de Birkhoff, porque se ven desconexas. Sin embargo esto no tiene porque preocuparnos.

A la cáustica circular más pequeña posible la denotaremos por S , y a la unión de la pata del hongo con el área delimitada por S le llamaremos el pie extendido. Ahora debe ser claro como un hongo no simétrico posee un subconjunto A_r delimitado por una curva de este tipo, y cuya dinámica es la misma. En este caso más general, r es el radio de esa última cáustica. Nos quedamos con esa definición de ahora en adelante, ya que engloba a la

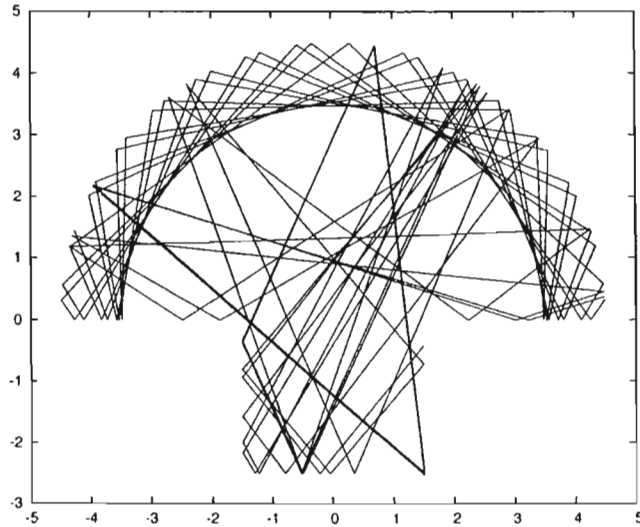


Figura 5.2: Dos trayectorias del billar del hongo. Una es integrable, la otra caótica.

del ancho del tronco para hongos simétricos.

Ahora consideremos la dinámica del hongo restringida a $\mathbb{M} \setminus \mathcal{A}_r$. Podemos ver que la distancia entre rebotes en elementos enfocantes del billar es, a veces, mayor que una longitud de cuerda del círculo que contiene al sombrero. De hecho esto ocurre cada vez que la órbita entra a la pata. También, por la foliación de cáusticas de \mathcal{A}_r es claro que una órbita que entra a la pata una vez lo hará eventualmente una infinidad de veces, la partícula no pueda cambiar su momento angular de manera que le permita trazar una cáustica mas ancha que \mathcal{S} : el máximo momento angular posible para este flujo esta determinado por r . Recordando el capítulo anterior, podemos ver que la construcción de familias de conos estables e inestables es aplicable. La eventual estricta invariancia de los conos esta garantizada, ya que tiempo entre rebotes es eventualmente estrictamente mayor al asociado a una cuerda del círculo. Por lo tanto la dinámica en $\mathbb{M} \setminus \mathcal{A}_r$ es caótica y ergódica [1] [2].

Muestro a continuación un retrato de la sección de Poincaré (fig.5.3) con muestras de órbitas tanto integrables como caóticas para un billar con pata rectangular. Podemos ver como la curva que muestra el momento angular equivalente a r/R corta limpiamente al mar caótico de la región integrable. Esto es precisamente el mayor interés del hongo: la separación de las regiones

caóticas e integrables es trivial, no existe un archipiélago fractal de islas en el mar caótico y dicho mar está formado por una sólo componente ergódica. A veces es molesta la estructura pequeña de forma rectangular que se ve en el retrato del hongo con pata cuadrada. Dicha estructura puede llevarnos a pensar que la homogeneidad del espacio fase debida a la ergodicidad es incorrecta. Lo que pasa es que en realidad contamos con una familia de órbitas en el espacio fase integrables y periódicas: las partículas que chocan solamente entre ambas paredes rectas de la pata. En el espacio fase forman un subconjunto de medida cero; una línea continua por trozos en M . Esas órbitas son aproximadas por partículas que entren de forma razeante a la pata, donde podrán llevar a cabo un número de choques que no está acotado antes de salir. Dado que en general es muy difícil escoger numéricamente condiciones iniciales que empiezen de forma homogénea en esta parte del billar, la uniformización del espacio fase en esa zona respecto a otras será lenta. Por lo tanto dichas órbitas son inconvenientes desde el punto de vista experimental. Esto es debido a que la propiedad mezclante nos aseguraría que los conjuntos medibles tienden a repartirse uniformemente en el espacio fase. Para aclarar esto, basta tomar la definición de mezclante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu((T)^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B), \quad (5.1)$$

y aplicarla a un conjunto y a su complemento, restringidos ambos a la componente ergódica. Como el mapeo es invertible, esto significa que cualquier conjunto se va repartiendo sobre toda la componente ergódica. Las órbitas tediosas, sin embargo, hacen que esto sea increíblemente lento, pues si tomamos conjuntos que incluyan éstas, siempre podemos tomar N arbitrariamente grande tal que, al cabo de N iteraciones, una parte mayor del conjunto del que la que correspondería, sigue estando ahí. Se dice que los billares ergódicos con órbitas tediosas son sistemas mezclantes que no mezclan muy bien. Por lo tanto uno cancela la posibilidad de que ocurran fenómenos de este tipo evitando que se den familias de trayectorias paralelas. Esto se logra usando una pata triangular, donde el número máximo de rebotes está acotado. Las órbitas evitadas son conocidas en inglés como *bouncing ball orbits* o bbo. A falta de un término en español adecuado, yo las llamaré las orbitas tediosas.

5.1.1. Los hongos anidados

Considerese un hongo perfecto al cual le permitimos que le crezca un hongo en la pata de forma que no intersecte al sombrero del hongo original. La componente ergódica sigue siendo una, sin embargo ahora existen dos

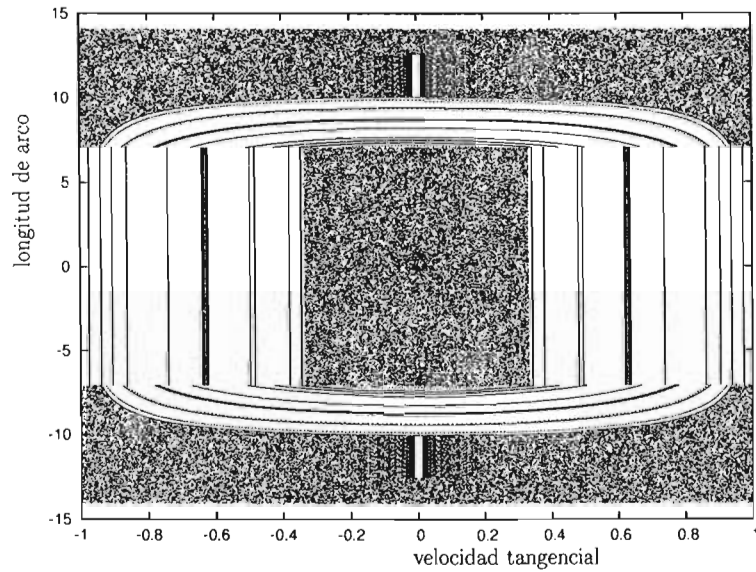


Figura 5.3: La sección de Poincaré en coordenadas de Birkhoff. Nótese que la banda central respecto a la abcisa corresponde al semicírculo ($l \in [-7,07, 7,07]$). También observese el curioso efecto de usar coordenadas con derivada discontinua, y las órbitas tediosas (*bbo*). Recuerde el lector que la componente ergódica es una sóla.

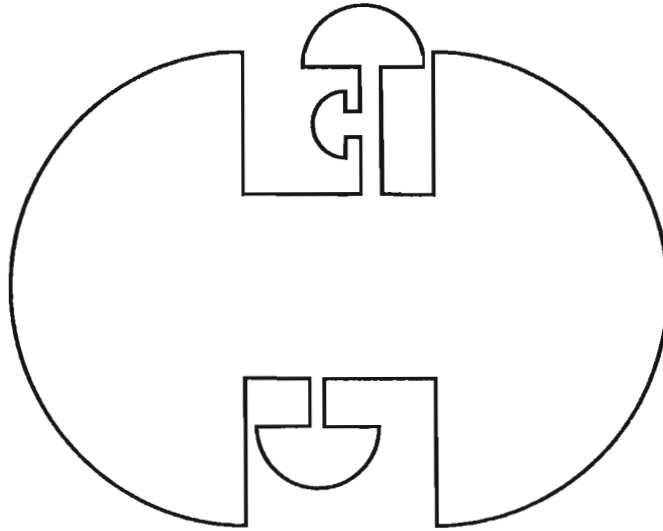


Figura 5.4: Un hongo anidado cualquiera.

caústicas mínimas que separan regiones de dinámica integrable distintas y no comunicadas entre si. Al hongo pequeño tambien le puede crecer otro hongo, o bien podemos dejarle que le crezcan más hongos al hongo pater originalis, o una combinación de ambas. Iterando este proceso de crecimiento de hongos perfectos anidados obtenemos hongos que tengan tantas islas estables separadas como nosotros queramos, hasta una cantidad infinita y numerable de ellas, y una sólo componente ergódica. Un hongo de este tipo podría obtener un mapeo de Birkhoff que asemeje espacios fases como el del mapeo de Chirikov, donde la estructura del archipelago integrable es un fractal. Aunque esto no pase de ser una conjetura, hace que el billar del hongo cobre una importancia inusitada cuando se estudien sistemas hamiltonianos genéricos [1][3]. Hice mención que el hongo era, dentro del contexto del Teorema KAM, una rareza por su espacio fase trivialmente separable. Hasta ahora parecía que su estudio fuera una frivolidad matemática. Con hongos anidados podemos ahora aproximar cualquier billar plano con “frivolidades”. Esta idea aún esta en proceso de germinación, pero puede ser que conlleve a resultados muy interesantes [3].

5.2. Los hongos elípticos

Recordando que el único billar completamente integrable conocido era el elíptico, con un billar circular como caso límite, podemos preguntarnos que pasa cuando sustituimos el sombrero del hongo por una semielipse. Pues bien, esencialmente será una extensión del caso anterior. Dependiendo donde coloquemos la pata, podremos convertir en subcomponentes ergódicas trayectorias que solían tener por caústicas semielipses o semihiperbolas. Por lo tanto podemos separar en dos islas integrables la dinámica. Si, al igual que en el caso del billar del hongo perfecto, la pata contiene una de las orillas de la semielipse, no existirán órbitas cuyas caústicas sean elipses. Por el contrario, si contiene al centro, no existirán órbitas cuyas caústicas sean hiperbolas.

No es, sin embargo, cierto en general que el flujo restringido a las órbitas que entren a la pata sea ergódico e hiperbólico. Dicho hecho está relacionado con que los estadios cuyas paredes curvas son semielipses no tienen forzosa-mente la región de Pesin de medida total: existen órbitas que continúan siendo integrables después de la separación de ambas mitades hasta que se llega a una distancia límite que las reduce a un subconjunto de medida cero. Dicho fenómeno fue estudiado por Markarian, Oliffson y Pinto en [8]. La demostración es mucho más difícil, así que nos quedamos con un resultado informal para propósitos ilustrativos. Los hongos elípticos permiten la construcción, por medio de hongos anidados, de sistemas que tengan un número arbitrario de componentes ergódicas separadas y de islas integrables, hasta una cantidad numerable, usando patas suficientemente largas.

Capítulo 6

Los números alucinógenos

*Laughing, I feed you
with meaningless games, tricks and philosophies,
whose answers you would die for
in your hunger to believe.*

Moonspell

La ergodicidad es una propiedad relacionada con los estados de equilibrio termodinámico, vista según la definición 1.5. Dicha forma de verla implica estrictamente tiempos infinitos, pues la definición de promedio temporal lo requiere. En un laboratorio se es más pragmático, dado que la experiencia lo aprueba, y, usamos realmente nosotros como límite los llamados tiempos de relajación. Este es, para los físicos “ t suficientemente grande” para que la desviación sea “menor a cualquier ϵ ”. En la mayoría de los casos basta esperar un par de segundos para obtener una aproximación, que es, desde cualquier punto de vista razonable, indistinguible del estado de equilibrio. Sin embargo los físicos no debemos perder de vista la importancia de los estados transientes, especialmente cuando sus tiempos de relajación son comparables a los tiempos de observación.

En vista de lo mencionado aparece la siguiente pregunta: ¿cuál es la distribución de tiempos que sigue una partícula en el sombrero, si la órbita de dicha partícula es caótica? ¿Cuál es la motivación de esta pregunta? Aparte de consideraciones sobre ciertas aplicaciones a billares dispersivos, hay cierta relación entre esta pregunta y la distribución de energía en un billar, sobre la cual dilucidaré un poco. En un experimento real, la fuente de “partículas” suele ser una antena electromagnética o un rayo láser, siendo el segundo de ellos el que se aproximará más a la dinámica que estamos estudiando. Si imaginamos por un momento que lanzamos rayos láser desde algún punto

del billar, y que las parees de éste son espejos perfectos, distinguiremos dos casos. Si el láser es disparado con condiciones iniciales dentro de la parte integrable, trazará una órbita en general estrellada con caústica en el sombrero, permaneciendo siempre ahí. Por el otro lado, con condiciones iniciales en algún punto del mar caótico, debemos cierta uniformización después del tiempo de relajación *en el espacio fase*. Sin embargo esto no implica necesariamente que en el espacio de configuración la luz, entendida como densidad de energía, esté uniformemente distribuida. La pregunta planteada cobra otro significado ahora: la distribución de tiempos tiene que estar conectada, de alguna forma, con la densidad de energía, si pensamos en un intervalo de tiempo suficientemente grande.

La respuesta está estrechamente relacionada con el número de rebotes que la partícula lleva a cabo en el sombrero entre una salida de la pata y su reincidencia en ella. Una partícula, al entrar en el sombrero y llevar a cabo un número de rebotes mayor a 1, describe segmentos de cuerda efectivos de igual longitud. Por efectivos me refiero a que no importan los rebotes en la parte recta del sombrero, puesto que, por truco de construcción de la imagen, los correspondientes rayos quebrados tienen también la misma longitud de cuerda. Entonces puedo suponer que un número de rebotes está relacionado con una longitud de cuerda que varía muy poco, pues proviene de segmentos de órbitas distintas, pero localmente parecidas. Esto es tanto más cierto mientras más delgada sea la pata. De momento sostendré la siguiente afirmación: La distribución del número de rebotes no debe diferir cualitativamente de la de los tiempos. Por lo tanto esta debe ser similar a un decaimiento algebraico, puesto que el billar semicircular es un sistema integrable y estamos tomando la pata como un agujero. El experimento numérico reveló algo aparte de eso (fig.6.1).

Como se puede ver, existen agujeros en la distribución, lo cual la hace tremendamente ruidosa, y que asignarle una pendiente sea un tanto arrogante. Dichos agujeros no dependen de la forma en que se escogan las condiciones iniciales, como revelaron distintos generadores aleatorios, y tampoco de no esperar suficiente tiempo (precisamente podríamos creer cuando se aproxime suficiente a la distribución uniforme sobre la componente ergódica del espacio fase dichos agujeros no existirían, y eventualmente la pendiente algebraica estaría plenamente satisfecha). Resulta que dichos agujeros dependen de la proporción r/R . Sencillamente, para un valor fijo de esta proporción, existen valores prohibidos para el número de rebotes (¡y por lo tanto tiempos de estadía prohibidos en la tapa!).

A la sucesión de los números permitidos para una proporción $q = r/R$ dada, le llamaré tentativamente los números alucinógenos de q .

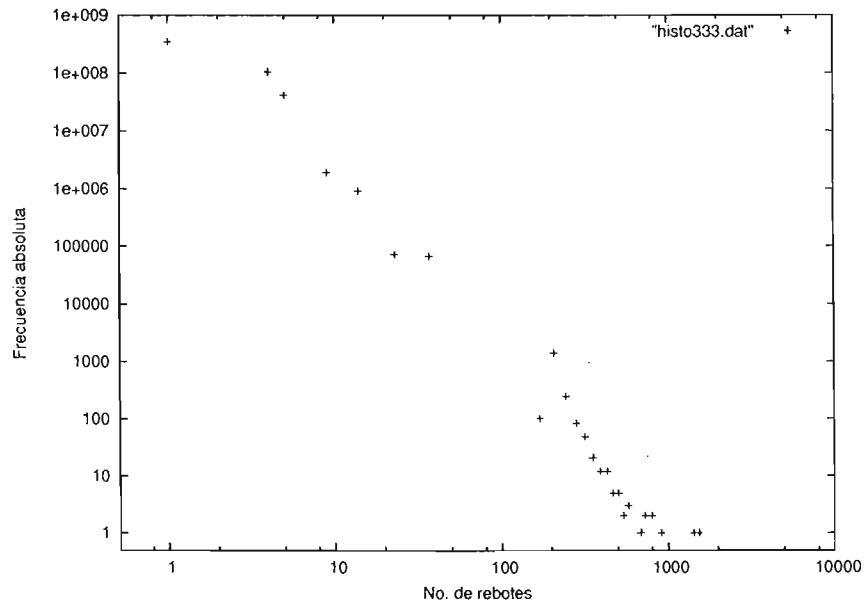
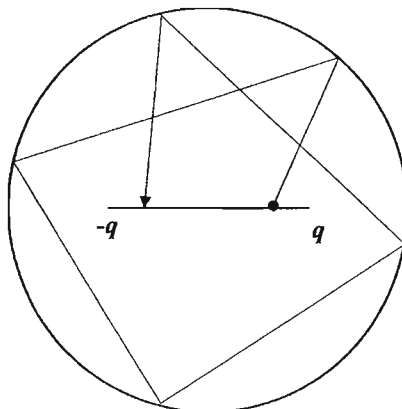


Figura 6.1: La distribución de rebotes de veinte trayectorias del billar del hongo. El eje vertical es la frecuencia absoluta, mientras que el horizontal representa el número de rebotes en cuestión. Ambos ejes se encuentran en escala logarítmica.

Figura 6.2: El billar Θ

6.1. El billar Θ

Para simplificar cálculos, consideremos el siguiente sistema dinámico dispersivo: Un billar circular con una buchaca que es un segmento de recta colocada de forma simétrica sobre el diámetro. Por dicha buchaca entran y salen partículas puntuales clásicas. Equipemos al billar con un sistema de referencia cartesiano con origen en el centro de la buchaca y eje horizontal a lo largo de ésta (fig. 6.2). Una pregunta interesante que dicho billar puede plantearnos es: ¿cuánto tiempo (o número de rebotes) puede estar una partícula que haya entrado por la buchaca dentro de dicho billar? Debe hacerse notar que esta es exactamente la misma pregunta que habíamos planteado respecto al hongo y sus sombrero. Una vez analizada la dinámica del billar Θ se verá como la respuesta es la misma en ambos casos. La entrada de una partícula está determinada por dos parámetros, siendo los más obvios el punto de la buchaca por el que entra y la dirección en que lo hace. Sin embargo estas “coordenadas de entrada” no son las más prácticas y usaré otras que contienen la misma información. Del diagrama 6.3 podemos ver ciertas relaciones.

Sea μ un vector con pie en el origen y perpendicular a la trayectoria en el momento de la entrada. Nótese que tal vez tendré que extender la trayectoria de forma virtual para encontrar dicho vector, si el ángulo que hace dicha

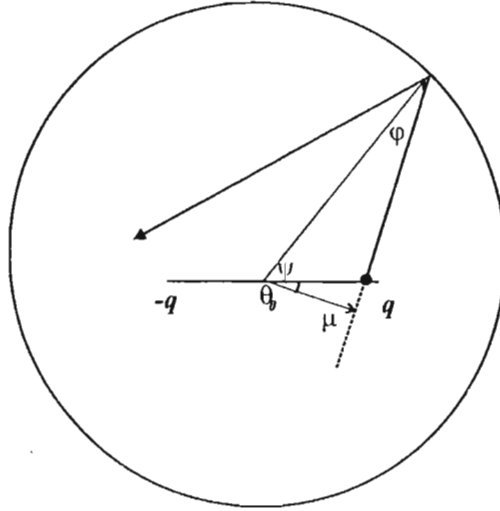


Figura 6.3: El vector μ , y los ángulos con los que se trabajará.

trayectoria al entrar con la buchaca es mayor a $\pi/2$. En el diagrama 6.4 dicha extensión viene marcada con líneas punteadas. El ángulo θ_0 que hace dicho vector con la buchaca y la magnitud de μ son dos buenos parámetros de entrada, y contienen la misma información que los mencionados anteriormente. La siguiente relación es evidente:

$$\|\mu\| = v_t = \text{sen } \varphi \quad (6.1)$$

Para v_t fijo, puedo dibujar las dos trayectorias extremas que salen justo en el punto extremo de la buchaca $-q$ (ver el diagrama 6.4). Estas trayectorias tienen sus propios vectores μ^* , con sus respectivos ángulos que llamaremos θ_{min} y θ_{max} respecto a la buchaca. Se puede determinar su valor a partir de la velocidad tangencial.

$$\gamma = \text{arc cos} \left(\frac{\text{sen } \varphi}{q} \right) \quad (6.2)$$

Sea $\psi = \pi/2 - \varphi$ el ángulo interior de la trayectoria, es decir, aquel que hace μ con el vector radial. Si θ_{min} y θ_{max} son los ángulos de los vectores μ^* dados por

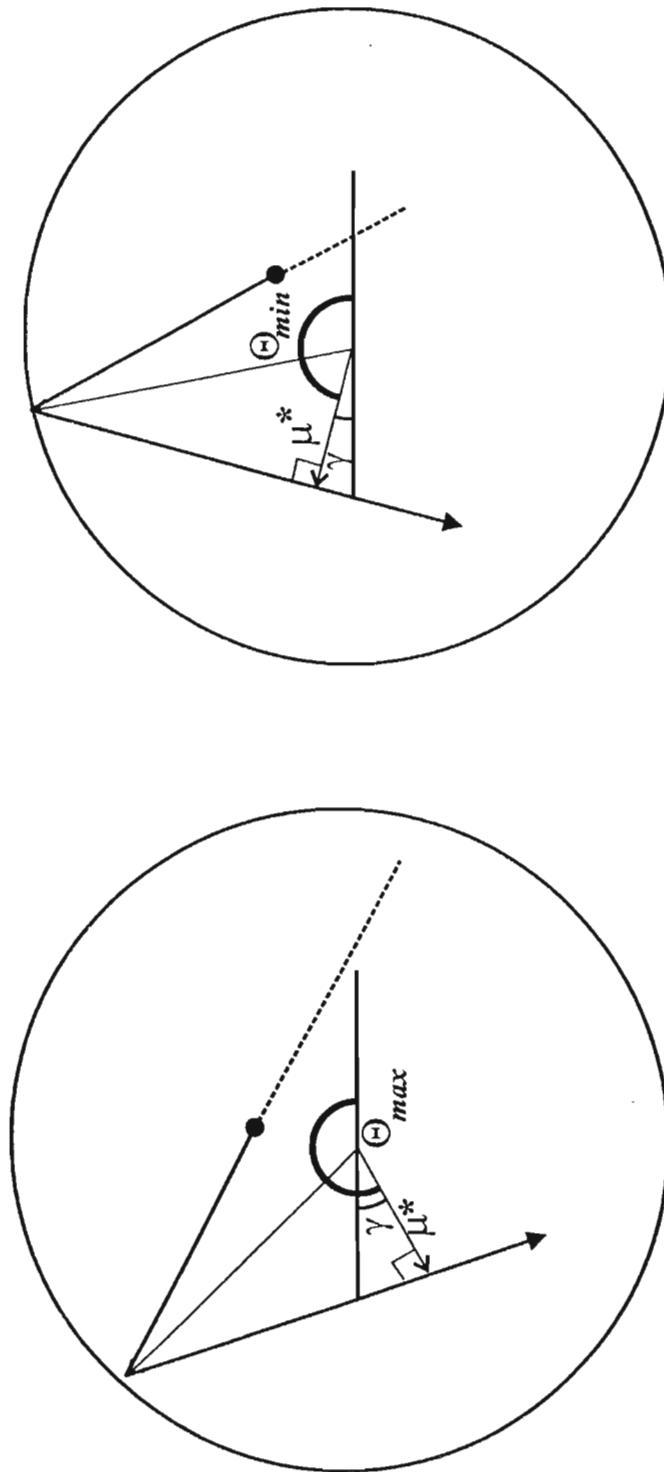


Figura 6.4: La terminología usada en la presente sección.

$$\begin{aligned}\theta_{min} &= \pi - \gamma \\ \theta_{max} &= 2\pi + \gamma\end{aligned}\tag{6.3}$$

La condición de salida es, debido a que con cada rebote μ gira un ángulo 2ψ :

$$\theta_{min} \leq 2n\psi - \theta_0 \leq \theta_{max} \pmod{2\pi}\tag{6.4}$$

o también pueden salir por el lado derecho, entonces:

$$-\gamma \leq 2n\psi - \theta_0 \leq \gamma \pmod{2\pi}\tag{6.5}$$

Ambas condiciones pueden ser resumidas en la siguiente desigualdad:

$$-\gamma \leq 2n\psi - \theta_0 \leq \gamma \pmod{\pi}\tag{6.6}$$

El número n más pequeño que satisface dicha relación es el número de rebotes que la partícula hizo antes de salir. En la presente discusión me he limitado a considerar partículas que giran hacia la izquierda. Es obvio, por la simetría del problema, que también es posible aplicar los mismos razonamientos para los momentos angulares de signo opuesto.

La colección ordenada de menor a mayor de $\{n(\varphi, \theta_0)\}$ es la sucesión alucinógena asociada a q . Es fácil ver que tiene que coincidir con la de un hongo perfecto, y que no depende de la forma de la pata.

Existe otra forma de ver esto (fig. 6.5), y es, a mi gusto, más conveniente. Extendamos el primer rayo hacia atrás hasta un punto x_0 sobre el círculo, entonces la entrada queda completamente caracterizada por $\{x_0, x_1\}$. Podemos ver la secuencia de choques como una transformación que lleva a x_{n-1} a x_n . Es claro que dicha transformación es

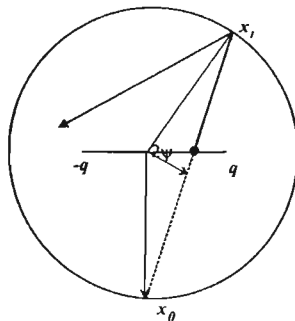
$$x_n = Rot_{2\psi}(x_{n-1})x_n = Rot_{2\psi}^n(x_0)\tag{6.7}$$

usando un billar Θ normalizado ($R = 1$),

$$x_0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \psi) \\ \text{sen}(\theta_0 - \psi) \end{pmatrix}\tag{6.8}$$

que resulta simplemente en

$$x_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \psi + 2n\psi) \\ \text{sen}(\theta_0 - \psi + 2n\psi) \end{pmatrix}\tag{6.9}$$

Figura 6.5: Las rotaciones por 2ψ .

Parametrizaré ahora el rayo que va de x_{n-1} a x_n

$$\overline{x_n x_{n-1}} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + (2n-1)\psi) - \cos(\theta_0 + (2n-3)\psi) \\ \text{sen}(\theta_0 + (2n-1)\psi) - \text{sen}(\theta_0 + (2n-3)\psi) \end{pmatrix} + x_{n-1} \quad (6.10)$$

Resolviendo λ para que la coordenada vertical sea igual a 0, y sustituyendo el valor en la coordenada horizontal nos encontramos con que la condición de salida es, después de unas cuantas manipulaciones trigonométricas no muy entretenidas:

$$-q \leq \frac{-\text{sen } \varphi + \cos \varphi \text{sen}(2(\theta_0 + n(\pi - 2\varphi) + 2\varphi))}{\cos(\theta_0 + n(\pi - 2\varphi) + 2\varphi)} \leq q \quad (6.11)$$

Esto puede simplificarse mucho si recordamos que n es entero.

$$-q \leq (-1)^n \left(\frac{-\text{sen } \varphi + \cos \varphi \text{sen}(\theta_0 + 2\varphi(1-n))}{\cos(\theta_0 + 2\varphi(1-n))} \right) \leq q \quad (6.12)$$

Claramente, ya que estábamos trabajando usando los puntos $-q$ y q como coordenadas, esa última expresión puede ser generalizada a

$$q_1 \leq (-1)^n \left(\frac{-\text{sen } \varphi + \cos \varphi \text{sen}(\theta_0 + 2\varphi(1-n))}{\cos(\theta_0 + 2\varphi(1-n))} \right) \leq q_2 \quad (6.13)$$

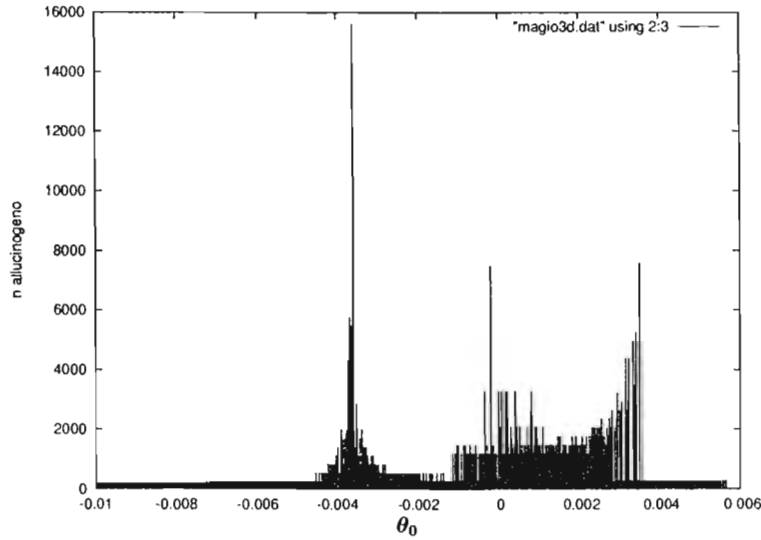


Figura 6.6: La proyección de la dependencia de la sucesión alucinógena sobre θ_0 . La proporción r/R es igual a $1/3$

para billares Θ no simétricos con buchaca entre los puntos q_1 y q_2 sobre el diámetro. Esa es una razón por la cual esta forma de ver al billar es más práctica, la otra es porque se ve claramente que n no depende de manera obvia de φ o θ_0 . Esto puede quedar muy claro viendo las siguientes gráficas, figs. 6.6 y 6.7. La relación implícita que otorga el n más pequeño que cumple la desigualdad en cuestión, asociado a ciertas condiciones iniciales θ_0 y φ es unívoca, de ahí que se pueda llamar función, a pesar de que no contamos con una expresión para ella.

Debe ser claro ahora como la dinámica del billar Θ nos otorga la misma sucesión alucinógena que un hongo, puesto que lo que pasa con la partícula una vez que sale del sombrero circular no es reelevante. Cuando dicho sombrero es exactamente un semicírculo, como hemos estudiado hasta ahora, el truco de construcción de la imagen nos permite reflejarlo sobre sus paredes rectas, obteniendo un billar circular perfecto con un agujero en medio por el cual entran y salen partículas, perdiendo su momento angular en el proceso. Esto es gracias a que la boca de la pata coincide con sí misma después de llevar a cabo la construcción del billar reflejado. Esto será importante en el próximo capítulo. Podemos, si queremos, decir que el generador de condiciones iniciales del billar Θ es una simulación de pata de forma desconocida (ver fig 6.8). Si se quiere, se puede decir que el billar está dibujado sobre una

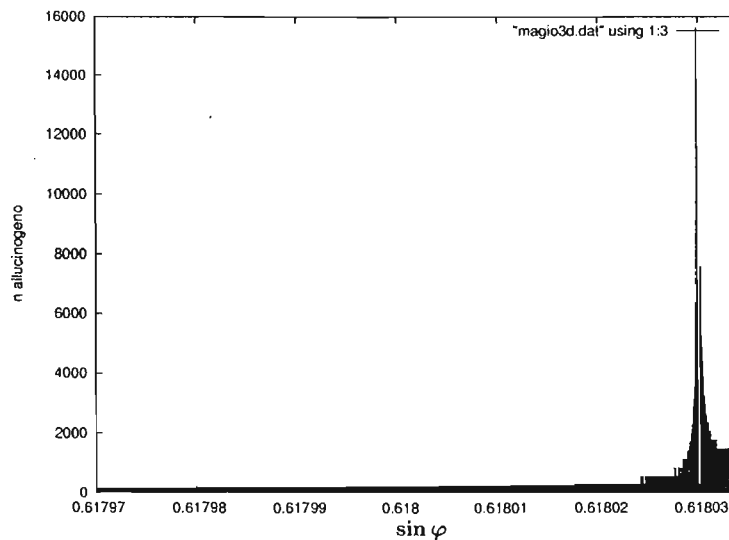


Figura 6.7: La proyección de la sucesión alucinógena sobre el eje $\sin \varphi$ para $r/R = 1/3$.

superficie plana de varias hojas, siendo el agujero central el paso de una a otra.

Las sucesiones pueden variar monstruosamente según el ancho de la pata, pero, debido a que son orbitas cuasiperiódicas de un billar circular dispersivo, la caída de la distribución obedece igualmente una ley de potencia, ver figuras 6.1, 6.9 y 6.10. Sin embargo, la presencia de los números alucinógenos produce algunos efectos curiosos. La distribución en la figura 6.9 parece tener dos pendientes distintas. Un hongo de pata tan delgada hace notar claramente la importancia de los números alucinógenos: si queremos afirmar que hemos descubierto la pendiente de la distribución, requerimos, a causa de las grandes regiones prohibidas, llevar a cabo simulaciones excesivamente largas. Por lo tanto la restricción de los rebots a éstos es un inconveniente. Cabe hacer notar que mientras más ancha es una pata, menos restrictiva es en apariencia: un billar de semiestadio debe aceptar cualquier número como número alucinógeno.

Está abierta la cuestión sobre si podemos construir billares Θ que produzcan sucesiones peculiares a placer. Esto es poco probable, pero las características de las sucesiones deben poder escogerse hasta cierto punto de forma sencilla para un billar simétrico. Aún así, creo que puedo agregar aquí la siguiente

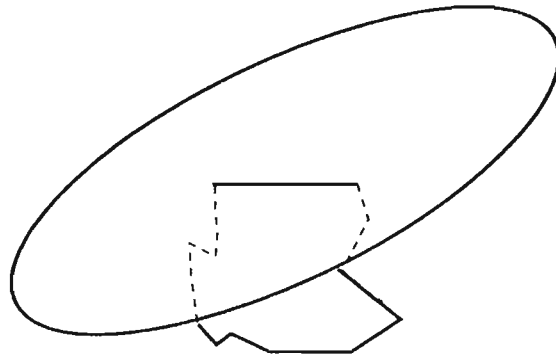


Figura 6.8: El billar Θ interpretado como billar de hongo.

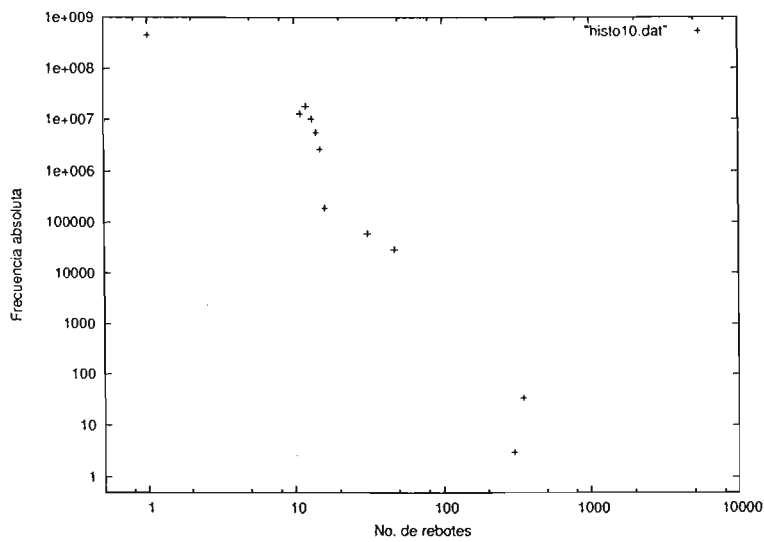


Figura 6.9: Distribución alucinógena para $r/R = 0,10$, un hongo de pata esbelta. Observense dos grandes regiones prohibidas. A causa de esto no nos es válido afirmar que se pueda asignar una pendiente a la distribución.

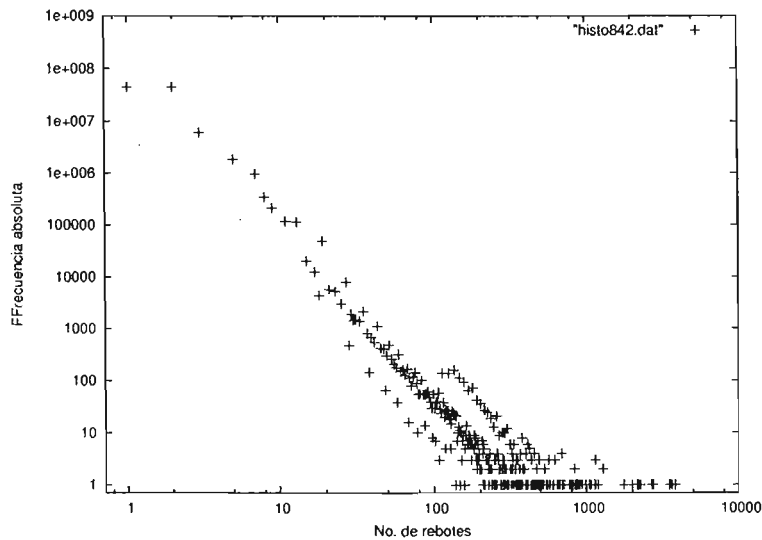


Figura 6.10: Distribución allucinógena para $r/R = 0,842$, un hongo de pata gorda.

Conjetura. *Un número alucinógeno es suma de dos anteriores.*

Esta conjetura está basada en los experimentos numéricos llevados a cabo. El más sorprendente fue el de $q = 1/3$. En éste se obtuvo como sucesión $\{1, 4, 5, 9, 14, \dots\}$. El impacto producido por esta sucesión que aparentara ser de Fibonacci fue el que provocó que se investigaran los números alucinógenos. Más tarde encontramos números que no correspondían a la regla de Fibonacci, y sin embargo eran suma de dos anteriores. La falta de una expresión sencilla para $n(\varphi, \theta_0)$ ha hecho que sea muy difícil de demostrar la conjetura, y la falta de poder de cómputo no me permitió que pudiéramos asegurar que los resultados para números alucinógenos mayores a **1000** fueran correctos, para sustentar la conjetura más allá del rango de estadías cortas. Sin embargo puedo mostrar la siguiente tabla de resultados que corresponde a las figuras 6.1, 6.9 y 6.10. Cabe decir que la conjetura no implica que se encuentre toda suma de dos anteriores, puesto que de ser así, estando el **1** siempre presente, cualquier número sería un número alucinógeno. La forma en que se obtienen los números alucinógenos grandes no está totalmente comprendida.

r/R	Sucesión alucinógena
$1/3$	$\{1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 51 \dots\}$
$0,100$	$\{1, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 31, 47, \dots\}$
$0,842$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots\}$

Quiero enfatizar por última vez que el resultado más importante no es cada sucesión en si misma, sino el hecho de que existan números de rebotes prohibidos. Así presento las desigualdades 6.12 y 6.13,

Capítulo 7

Los hongos perturbados

Rompí, corté, abollé, dije e hice...

Cervantes

En este capítulo expondré algunas formas de perturbar o deformar el billar del hongo de forma que puedan ser aplicados ciertos razonamientos que suelen gustar a la comunidad de los físicos.

7.1. Los hongos chuecos

Es de buen gusto entre los físicos preocuparse por los errores o discrepancias entre los modelos perfectos y los experimentos reales y numéricos. La razón más importante es que cualquier billar que construyamos en un taller será forzosamente distinto a un billar matemáticamente perfecto. Si nuestros compañeros experimentales obtienen ligeras, pero perceptibles discrepancias en los resultados de su billar, debemos poder reconocer algunas de ellas al menos. Existen muchas formas posibles de hacer esto en billares, pero aquí nos limitaremos a aquellas más simples, básicamente es cambiar la forma de las paredes de forma que uno pueda seguir medianamente el cambio general en la dinámica. En la práctica esto suele ser bastante restrictivo. Consideremos las siguientes imperfecciones en la mesa del billar del hongo.

7.1.1. Los hongos con sombrero levantado

Sea Q un hongo perfecto (tal vez con tronco triangular). Supongamos que dejamos fijas las esquinas superiores del entronque, denotadas en la figura por $-q$ y q , y que desplazamos las esquinas exteriores $-a$ y a del

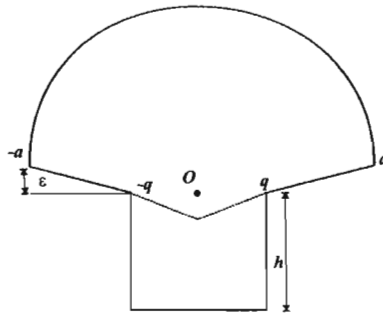


Figura 7.1: El hongo chueco.

sombrero por una pequeña cantidad ϵ hacia arriba. Si extendiendo imaginariamente las líneas $\overline{-a - q}$ y \overline{aq} puedo notar que el centro del círculo se encuentra por arriba de la intersección de ambas, ver la figura 7.1. Por lo tanto, por truco de construcción del espejo, la dinámica será como en un trébol de Bunimovich, esto es, ergódica, caótica y mezclante. La pata sólo contribuye a expandir de forma más fuerte los frentes de onda, mismos que, de todos modos, hubieran sido desenfocados. Eso es, sin embargo, una forma de razonar de matemáticos. Podemos esperar nosotros que en tiempos razonablemente cortos se pueda confundir esto con un hongo perfecto si la perturbación es suficientemente pequeña. Si tomamos una imagen del espacio fase con 10000 iteraciones del mapeo para unas 100 condiciones iniciales obtenemos la figura 7.2. Podemos ver que las órbitas que resultaban ser integrables no se han homogeneizado con todo, como exige la característica mezclante, sino todavía son medianamente reconocibles. Lo que apenas pasa es que de ser conjuntos perfectamente delgados, adquieren la estructura típica de algo ergódico, aunque resulte *lentamente* mezclante. Podemos llamar a esto justamente un estado transiente, antes de que el billar alcance su equilibrio “ergódico”. Lo segundo que podemos notar está en la siguiente gráfica de frecuencia absoluta de números alucinógenos, ver la fig. 7.3.

Debe saltar a la vista que ya no son una característica exclusivista, y, sin embargo, todavía están presentes de forma increíblemente mayoritaria. De la dinámica de rotaciones del billar Θ podemos inferir lo siguiente: cada

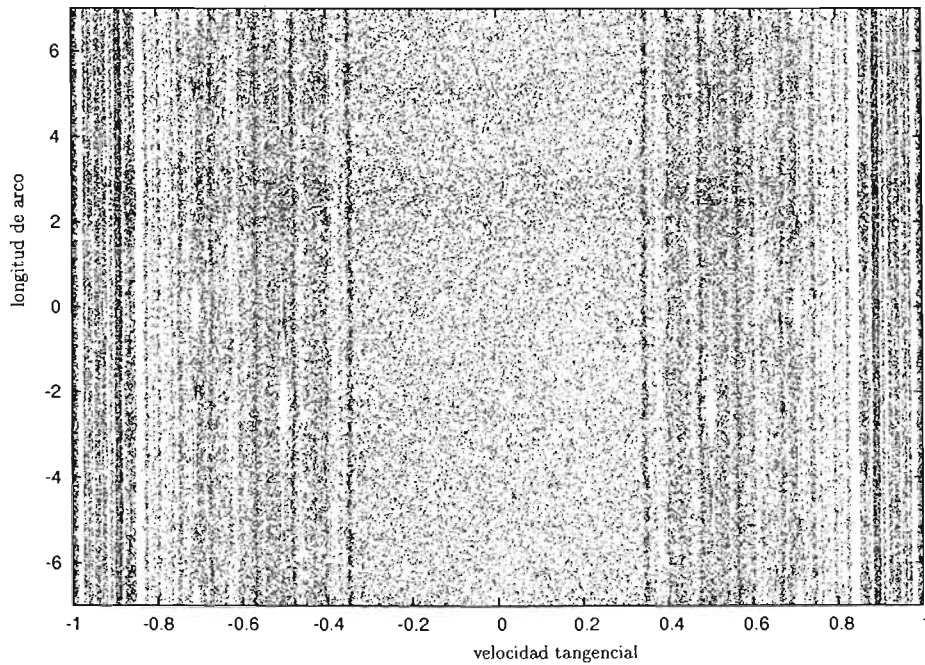


Figura 7.2: La parte de la sección de Poincaré del hongo chueco que corresponde al arco de círculo. El desplazamiento de α es de 0.05, y se usarón 10000 iteraciones a 100 condiciones iniciales.

vez que se golpea contra una de las paredes chuecas, el momento angular (o el ángulo de rotación 2ψ , usando la terminología del billar Θ) sufre una pequeña alteración, que podemos pensar como función de éste y del valor ϵ . Otra forma de verlo es que, si llevamos a cabo el truco de construcción de la imagen, la boca de la pata ya no coincide consigo misma, esta desplazada y rotada por una pequeña cantidad, que incrementa con cada rebote. Dado que ese cambio no es muy grave para números alucinógenos pequeños, puesto que son pocos los rebotes, éstos siguen dominando en el régimen izquierdo de la distribución. El resto de los números sólo aparecen de forma tímida. En cambio, para un número de rebotes en la tapa muy grande, esta perturbación empieza a ser significativa, por lo cual los números no alucinógenos compiten con los otros en la misma distribución algebraica. A guisa de ejemplo incluyo otra distribución de rebotes para un hongo con una perturbación mayor, la figura 7.4 muestra como se pierde rápidamente la distribución alucinógena.

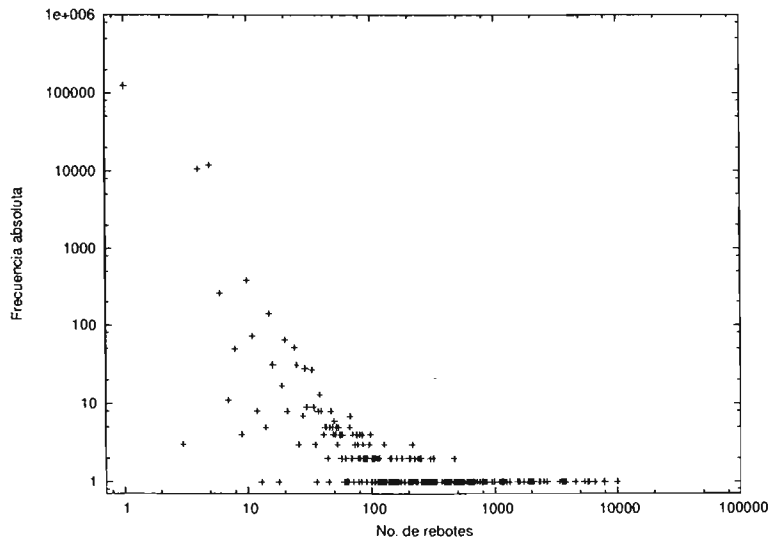


Figura 7.3: La distribución de rebotes en el hongo con perturbación $\alpha = 0,05$. Se usó $r/R = 1/3$.

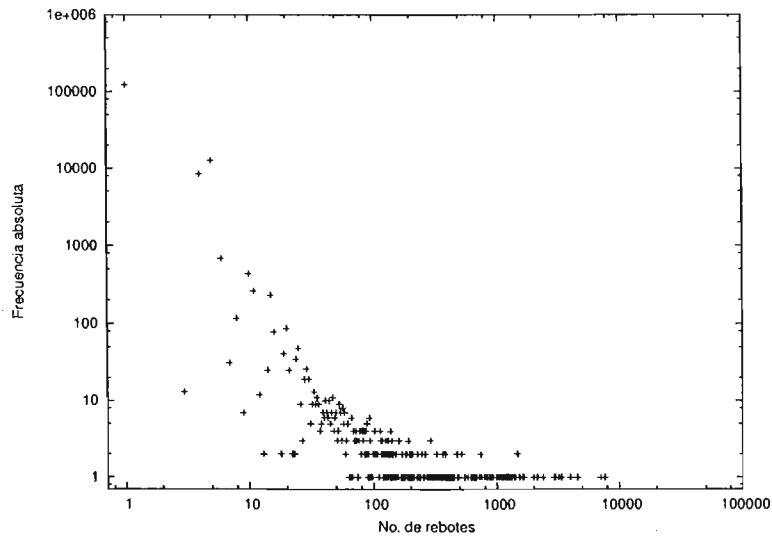


Figura 7.4: La distribución de rebotes para una inclinación del sombrero de 0.075/ unidad de longitud. $r/R=1/3$

7.1.2. El sombrero rebajado

Ahora dejaremos fijas las esquinas exteriores del sombrero $-a$ y a y rebajamos a lo largo del tronco las otras, $-q$ y q . Debemos y podemos esperar que esto no se comporte esencialmente de forma distinta que el caso anterior, y así es. Tanto la distribución de rebotes como las imágenes del espacio M se ven esencialmente iguales. Este billar es también ergódico, y todo lo demás. Es, básicamente, un estadio de Bunimovich, así que no hablaré más de él. El mapeo de Birkhoff es, para periodos relativamente cortos, indistinguible del mostrado en la sección anterior.

7.1.3. El hongo suave

Este hongo fue un poco sorprendente. Tiene cierta relevancia para aquellos interesados en experimentos, ya que construyendo un billar real, es probable que las esquinas resulten ser curvas de algún tipo. Sustituyamos las esquinas del entronque $-q$ y q por cuartos de círculo, como muestra la figura. Escencialmente lo que estamos haciendo es aumentar las zonas dispersoras de la frontera, así que lo que cabría esperar es mayor hiperbolicidad. Escencialmente tendríamos operando dos formas de obtener caos. Nada más lejos de la verdad. Las condiciones de los teoremas del capítulo 4 no se aplican. Véase la figura 7.6.

Un billar anular perfecto es completamente integrable (un círculo dentro de otro círculo, ambos concéntricos), ya que existen cantidades conservadas (el momento angular) y por ende el billar es integrable. Si desplazamos el centro del círculo interior hacia algún lado, de forma que esto no sea cierto, la teoría KAM nos dará la respuesta: tendremos una mar caótica conviviendo con un archipiélago fractal de islas integrables. Este tipo de billares se conocen como generícamente como billares de anillo.

Algo similar se obtiene al hacer redondas las esquinas del hongo. Podemos ver del experimento numérico que el mar caótico se extiende en la variable v_t , puesto que la última caústica es un poco más grande. Pero no es ya sólo una componente ergódica la que inunda esa zona. Podemos ver cómo surgen pequeñas y curiosas islas integrables rodeando puntos que se conocen como elípticos. Como es típico de estos sistemas, podemos, conforme hacemos más y más notoria nuestra perturbación aumentamos el área del espacio fase que ocupe del archipiélago integrable. Debo aclarar que estas islas no forman realmente una gran parte de M , uno tiene que usar arcos de círculos realmente grandes para poder verlas en un experimento numérico típico, e.g. del orden de un cuarto del radio del sombrero. Sin embargo están

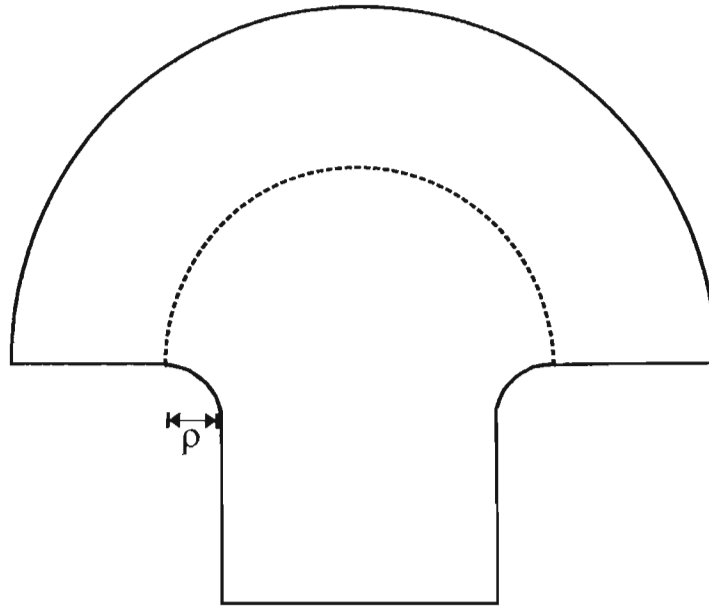


Figura 7.5: El hongo suave.

ahí, y con eso uno acaba de echarse al plato la propiedad más importante del hongo, que era precisamente que tuviera un espacio fase trivialmente separable. Ahora existe una estructura, que, aunque ínfima, impide hacer esa distinción limpia entre la componente ergódica y la integrable. El hongo suavizado falla en llenar las condiciones del Teorema de Bunimovich. Sus trayectorias no permiten hacer, en forma general, el truco de construcción de la imagen, y obtener trayectorias de expansión libre efectiva con tiempos mayores a las cuerdas del sombrero del hongo. El resultado del experimento numérico nos revela que deben de aparecer trayectorias tales que el enfoque y desenfoque de los frentes de onda se compense, resultando en exponentes de Liapunov nulos. Desgraciadamente esto no es visible a simple vista (fig. 7.8). También debo aclarar que esto no es un sistema KAM estrictamente, porque bajo una “perturbación pequeña” como sería enchuecar las paredes, borramos completamente la isla integrable más importante, como se hizo notar en las secciones anteriores, en lugar de que se bifurque.

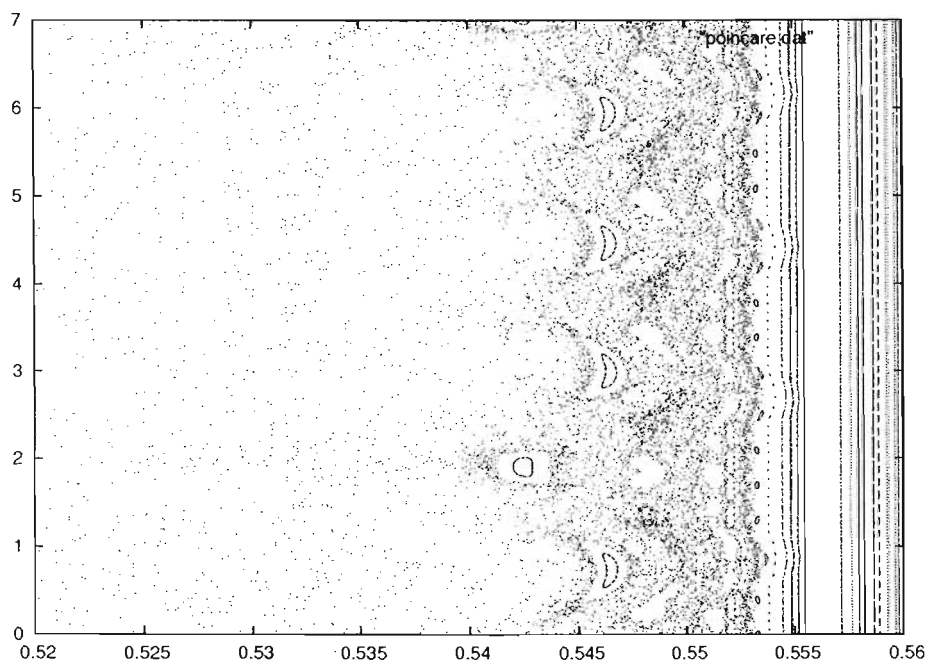


Figura 7.6: Parte de una sección de Poincaré del hongo redondeado. $\rho = 1,0$, $R = 4,5$. Nótese la escala.

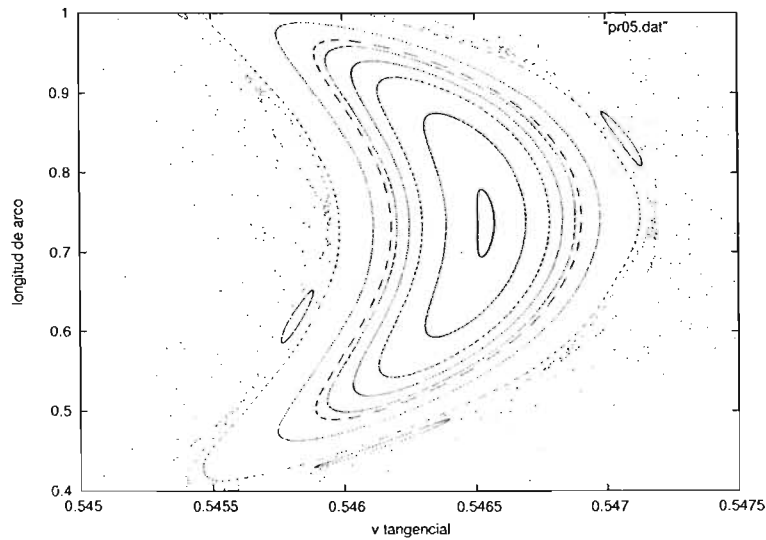


Figura 7.7: Un acercamiento a las islas del hongo suave. Las proporciones son las mismas que la figura 7.6. Nótese la complejidad de la estructura

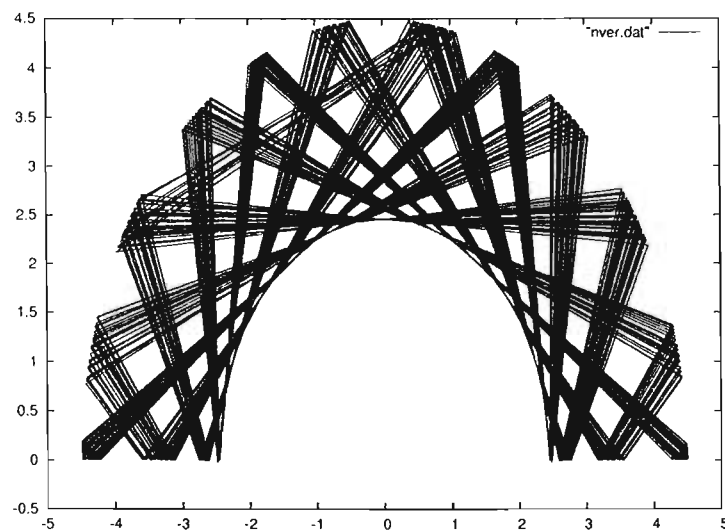


Figura 7.8: Las trayectorias que corresponden a la isla anterior (fig 7.7). Parecen órbitas de medio círculo, pero en su extremo interior tocan a la esquina redondeada y por lo tanto los frentes de onda sufren una dispersión que se compensa, formando un patron de tejido.

Capítulo 8

Conclusión

En este trabajo se presentaron dos variaciones nuevas del billar del hongo. Dichas variaciones se puedan clasificar como imperfecciones, puesto que ambas rompen las propiedades que hicieron del hongo original un maravilloso objeto de estudio y una curiosidad atractiva entre los sistemas Hamiltonianos. Pero, como ya mencioné anteriormente, los físicos debemos preocuparnos por las imperfecciones, porque en algún momento a alguno de nuestros colegas se le puede ocurrir un experimento relacionado con nuestro trabajo. Además, la naturaleza no suele seguir modelos excesivamente simples, y si pretendemos entenderla, debemos forzar un poco los métodos de que disponemos para ello.

Los resultados importantes que cabe mencionar son los siguientes; la aparición de los números alucinógenos, el aspecto fractal parecido a los KAM que presenta el hongo redondeado para ρ suficientemente grande (pero que no lo es estrictamente), y finalmente, la destrucción de la sucesión exclusivamente alucinógena para los hongos chuecos. De la primera cabe aclarar que la desigualdad 6.13 mostrada en el capítulo 6 es un resultado exacto, y es la condición que deben respetar los números alucinógenos. De la segunda hay que mencionar poco: en realidad estamos presenciando lo que se espera de un sistema mecánico genérico. De la tercera es importante resaltar que sigue siendo visible la distribución alucinógena, puesto que los picos de la distribución siguen estando sobre aquellos enteros que respetan la desigualdad. Un estudio riguroso de las distribuciones alucinógenas sólo puede tener interés si se conocieran familias más grandes de sistemas en los que se pudieran encontrar. Permítaseme conjeturar que dicha familia existe: cualquier billar integrable con una buchaca debiera producir una distribución alucinógena. Incluso puedo llevar la conjetura más lejos: cualquier sistema hamiltoniano

integrable y acotado, al que se le agregue un agujero repentino en forma de algún corte en su espacio fase. Esto relacionaría las distribuciones alucinógenas generalizadas con los problemas de dispersión, y dejarían de ser una característica curiosa de un par de sistemas muy particulares. Bastaría llevar a cabo un par de experimentos numéricos de indole más general.

Aclararé que la isla mayor en el hongo redondeado no es tipo KAM; una pequeña perturbación en las paredes rectas del sombrero la destruye. Sin embargo las islas pequeñas si lo son. La aparición de las islas KAM en el hongo suave debe hacer notorias dos cosas: la rigidez de las condiciones impuestas por Bunimovich en su teorema ergódico y la gran generalidad de los sistemas mecánicos que presentan la estructura fractal de la teoría KAM. Con todo esto uno debiera convencerse de que, aunque sea superficialmente, todo estudiante de física debe tener nociones tanto de sistemas no integrables, puesto que son la gran mayoría, como de ergodicidad, en vista de que para cada clase de sistemas a la que se le demuestra como propiedad global resulta un logro para la física matemática y mucho trabajo. Y no se pueden admirar los legos en el tema realmente.

En vista de lo mencionado es de mi interés buscar más ejemplos de sistemas que presenten fenómenos parecidos a éste para poder sostener mis conjeturas. Ya que pertenezco a una sociedad de estudiosos de las Ciencias Exactas, no puede ser de otra forma. Espero que a alguien que cuente con más preparación que la mía actualmente se le despierte la curiosidad de probar esto de forma rigurosa para clases más generales de sistemas, o, que durante mi futura preparación no se me olvide que he dejado un huequito abierto.

Bibliografía

- [1] L.A. Bunimovich, *Mushrooms and other billiards with divided phase space*, Chaos, Vol. 11, No. 4, 802-808, 2001.
- [2] L.A. Bunimovich, *A theorem on ergodicity of two-dimensional hyperbolic billiards*, Communications on Mathematical Physics, 130, 59-621, 1990.
- [3] L.A. Bunimovich, *Control of Energy Distribution in Billiards*, preimpreso y comunicado personalmente, 2002.
- [4] L.A. Bunimovich, *On Billiards close to dispersing*, Matem. Sbornik 95, 49-73, 1974.
- [5] G. Gallavotti y D. Ornstein, *Billiards and Bernoulli schemes*, Communications on Mathematical Physics 38, 1974.
- [6] R. Markarian, *Billares. Modelos con Dinámicas Caóticas*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. IX, No. 2, 2002.
- [7] N. Chernov y R. Markarian, *Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards*, preimpreso, 2001.
- [8] R. Markarian, S. Ollifson y S. Pinto, *Chaotic properties of the elliptical stadium*, Communications on Mathematical Physics 174, 1996.
- [9] , Ya. G. Sinai, *Ergodic Properties of the Lorentz Gas*, Funk. Anal. Appl. 13, 1979.
- [10] ,, Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Soviet Mathematical Survey, 5, 1970.
- [11] M. Wojtowski, *Invariant families of cones and Liapunov exponents*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 5, 145-161, 1985.

-
- [12] . P. M. Gruber, *Only ellipsoid have caustics*, *Mathematische Annalen*, 303, 185-194, 1995.