

01180



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

DIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

CONVECCION EN MEDIOS POROSOS CON FRACTURAS
INCLINADAS: INTERACCION CON EL MEDIO POROSO
EXTERNO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN INGENIERIA (MECANICA)

P R E S E N T A :

FAUSTO ALEJANDRO SANCHEZ CRUZ



DIRECTOR DE TESIS: DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO

MEXICO, D. F.

AGOSTO 2005

m346574



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recacional.

NOMBRE: Sánchez Cruz
Fausto Alejandro

FECHA: 4 de agosto de 2005

FIRMA: 

Agradecimientos:

A la Universidad Nacional Autónoma de México, pilar y fuente inagotable del pensamiento de este país.

A mi asesor Dr. Abraham Medina Ovando, por la guía, el apoyo y motivación brindados en el desarrollo de una nueva etapa en mi vida académica.

A los miembros de mi comité tutural y jurado, Doctores Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari, Francisco Javier Solorio Ordaz, Federico Méndez Lavielle, Erick Emanuel Luna Rojero, César Treviño Treviño y Rubén Ávila Rodríguez. Toda mi gratitud a Ustedes por su interés y guía a lo largo de mi formación académica, y sobre todo por distinguirme con su amistad.

Un especial agradecimiento al Profesor Francisco Higuera por su apoyo y acertados consejos que permitieron mejorar la calidad de este trabajo.

Mi gratitud al Dr. Erick Luna Rojero por su apoyo y consejos durante la realización de este trabajo.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por su apoyo a través del Programa de Formación de Especialistas. Al Programa de Yacimientos Naturalmente Fracturados y en particular al Físico Candelario Pérez Rosales. Al Programa de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Computación. Gracias.

Al proyecto CONACyT NC-204.

Al CONACyT, por el apoyo otorgado en mis estudios de posgrado a través de la beca 159041.

Dedicatoria

A mi esposa Erika Teresa, por el cariño y la paciencia que acompañan nuestras vidas.

A mis padres, Faustino Sánchez y Esther Cruz, con toda mi gratitud y afecto.

A mis hermanos, Esther, Rocío y Alberto, por las incontables muestras de apoyo y cariño que de Ustedes he recibido.

A mis sobrinos César Augusto y Erick Fabián, siempre hay algo nuevo que aprender.

A la familia Sánchez.

A la familia Gutiérrez Belmont.

A mis amigos y compañeros Felipe Escamilla, Melesio Sánchez, Hernán Flores, Wulfrano Gómez, Rolando Marchan y Marina Medina.

A todos mis amigos de la Facultad de Ingeniería.

Índice General

1	Antecedentes	13
1.1	Estructuras geológicas	14
1.2	El problema de la escala	15
1.3	El transporte de contaminantes	19
1.4	Efectos del movimiento del fluido y el transporte de contaminantes.	20
1.5	La convección térmica en los fenómenos geofísicos	23
1.6	Objetivos del trabajo	24
I	CONVECCIÓN NATURAL EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS	26
2	Convección natural en fracturas interconectadas simétricamente	27
2.1	Definición del problema	28
2.1.1	Conducción de calor en la roca	29
2.1.2	Convección en la capa de fluido	30
2.1.3	Convección en la capa porosa saturada de fluido	31
2.2	Ecuaciones adimensionales	32
2.3	Método Numérico	33
2.4	Modelo experimental de la capa de fluido	36
2.5	Resultados	38
2.5.1	Distribución de temperatura en la roca	38
2.5.2	La capa de fluido	40

2.5.3	La capa de medio poroso saturado	48
3	Convección natural en una cavidad cilíndrica inclinada	51
3.1	Definición del problema	52
3.2	Distribución de temperatura en la roca	52
3.3	Flujo convectivo	54
3.3.1	Cavidad llena de fluido	54
3.3.2	Cavidad llena de un medio poroso saturado de un fluido	64
3.4	Experimentos en la cavidad cilíndrica llena de fluido	68
 II TRANSPORTE DE UN CONTAMINANTE PASIVO A TRAVÉS DE LAS FRACTURAS		 72
4	Transporte de un contaminante pasivo en fracturas interconectadas simétricamente	73
4.1	Definición del problema	75
4.2	Transporte de una sustancia pasiva a través de la capa llena de fluido	76
4.3	Transporte de una sustancia pasiva a través de la capa llena de medio poroso saturado de fluido	77
4.4	Ecuaciones adimensionales	78
4.5	Método numérico	79
4.6	Resultados	80
4.6.1	Capa llena de fluido	80
4.6.2	Capa porosa saturada de fluido	84
5	Transporte de un contaminante pasivo en una cavidad cilíndrica inclinada	90
5.1	Definición del problema	91
5.2	Transporte de una sustancia pasiva a través de la cavidad llena de fluido	91
5.3	Transporte de una sustancia pasiva a través de la cavidad llena de medio poroso	92
5.4	Ecuaciones adimensionales	94
5.5	Resultados	96

5.5.1	Cavidad cilíndrica llena de fluido	96
5.5.2	Cavidad cilíndrica llena de medio poroso saturado de fluido	99
III INTERACCIÓN MATRIZ-FRACTURA		106
6	Interacción entre la matriz porosa y una fractura inclinada	107
6.1	Definición del problema	109
6.2	Análisis del problema de la interacción capa de fluido-matriz porosa	110
6.2.1	El problema de la interacción	110
6.2.2	Presión dentro de la fractura de fluido	113
6.2.3	Presión dentro de la matriz porosa	114
6.2.4	Velocidad dentro de la matriz porosa	115
6.3	Análisis del problema de la interacción capa porosa - matriz porosa	116
6.3.1	El problema de la interacción	116
6.3.2	Presión dentro de fractura porosa	118
6.3.3	Presión dentro de la matriz porosa	119
6.3.4	Velocidad dentro de la matriz porosa	120
6.4	Resultados	120
6.4.1	Interacción capa de fluido-matriz de muy baja permeabilidad	120
6.4.2	Interacción capa de medio poroso saturado - matriz de muy baja permeabilidad	125
7	Conclusiones generales	130
7.1	Convección natural en medios porosos fracturados	130
7.2	Transporte de un contaminante pasivo a través de las fracturas	132
7.3	Interacción entre la matriz porosa y una fractura inclinada	134
A	Funciones referenciadas en el texto	135

Resumen

Los fenómenos de transporte en medios porosos tienen una reconocida importancia en muchos campos de la ciencia y la ingeniería. En años recientes, los sistemas fracturados han cobrado interés debido a la creciente preocupación acerca de la contaminación y la calidad del agua. Existen serios problemas relacionados con la intensa explotación que actualmente se realiza del agua subterránea, además del aumento en la concentración de solutos en los acuíferos debido a las fugas en depósitos subterráneos y por el uso de fertilizantes. Adicionalmente, en las décadas pasadas el interés en estos sistemas también ha crecido por su utilidad en el diseño de aislamientos geológicos de desechos radiactivos, depósitos que representan fuentes de calor y potenciales fuentes de contaminación para el agua subterránea.

Esta tesis está dirigida al desarrollo de una investigación que permita una mejor comprensión de los fenómenos de transporte en medios porosos que contienen redes de fracturas y que se encuentran bajo el efecto de gradientes térmicos verticales. En particular, se analiza el efecto que tiene la convección natural en el transporte de contaminantes a través de fracturas ubicadas en el interior de medios porosos de muy baja permeabilidad. El interés en la solución de estos problemas no consiste solamente en determinar que tan lejos se transporta el contaminante en las fracturas, sino también en estimar la rapidez con la que el contaminante entra en el sistema. Además, se analiza el flujo de fluido que toma lugar entre las fracturas y el medio poroso de baja permeabilidad que las rodea. En este último caso, se encuentra que cuando existe una diferencia muy grande entre las condiciones de permeabilidad dentro y fuera de las fracturas, el flujo de fluido se lleva a cabo principalmente a través de las fracturas y la interacción que establecen con el medio poroso que las rodea ocurre en una pequeña región, misma que cuantificamos.

Se estudian dos tipos diferentes de capas, la primera corresponde a una capa de fluido y la segunda a una capa de medio poroso saturado de fluido. También, se incluyen dos diferentes geometrías, la primera consiste en un par de capas inclinadas conectadas simétricamente, la segunda, una cavidad cilíndrica, inclinada, muy esbelta. Estas dos geometrías tienen, cada una, una particular finalidad: las capas interconectadas son el primer paso para tratar sistemas interconectados más complicados, mientras que las geometrías cilíndricas permiten analizar flujos confinados axial simétricos. En todos los casos se calcula el flujo convectivo y las distribuciones de temperatura para el régimen de bajo número de Rayleigh. Aunque los flujos de convección

natural aquí estudiados son débiles y no mejoran de manera importante la transferencia de calor respecto a la condición de conducción pura, el conocimiento de las características de estos flujos resulta muy útil para el análisis de procesos en el contexto geofísico e hidrológico. Los flujos convectivos lentos dentro de capas de fluido o de medio poroso saturado han demostrado ser agentes que mejoran el transporte de minerales o contaminantes.

Para el análisis de estos problemas se emplean modelos matemáticos basados en las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, para fluidos en espacios libres y medios porosos. Las metodologías empleadas incluyen el análisis de órdenes de magnitud, mapeo a coordenadas no ortogonales, análisis asintótico, diferencias finitas y mediciones experimentales. El presente trabajo involucra el estudio de dos efectos que comúnmente se desprecian, el transporte bidimensional dentro de las capas, considerado en el análisis de las capas conectadas simétricamente, y la contribución de la dispersión hidrodinámica sobre el transporte del contaminante. El análisis muestra que la distribución de la temperatura en la roca depende la relación de aspecto e inclinación de las capas, además de la relación de conductividades térmicas capa-roca. El movimiento del fluido en el interior de las capas de longitud finita permite observar que la magnitud de la componente transversal de la velocidad varía a lo largo de la capa. Esta circunstancia no se presenta en el análisis de fracturas de longitud infinita, como el caso de la cavidad cilíndrica estudiada, debido a que para tal condición el flujo es unidimensional.

Por otro lado, en todos los casos estudiados el transporte del trazador es más efectivo al inicio del proceso de contaminación y disminuye con el tiempo. De igual manera, la rapidez con la que el contaminante entra a los sistemas decrece con el tiempo como resultado de la acumulación gradual del trazador cerca de la región de contaminación. Adicionalmente, el incremento del número de Peclet de difusión molecular y de la relación de aspecto de la capa mejora el transporte del contaminante a través de los sistemas estudiados. Para el caso de la cavidad porosa saturada, la dispersión hidrodinámica tiene un efecto de consideración, especialmente cuando el transporte convectivo del fluido es dominante. En las dos geometrías de interés el efecto de la dispersión hidrodinámica se puede despreciar siempre que el número de Peclet característico del medio poroso sea mucho menor que la unidad. Los resultados obtenidos encuentran también fácil aplicación en el modelado del transporte de contaminantes pasivos en yacimientos subterráneos.

Abstract

Transport phenomena in porous media have evident importance in many science and engineering fields. In recently years fractured systems have gained attention because of the growing concerns about pollution and water quality. There exist serious problems related to the current intense exploitation of groundwater and the increment of solute concentration in aquifers due to leaking repositories and use of fertilizers. Additionally, the last decades consideration of this kind of systems has risen also because of their usefulness for designing radioactive waste insulations, reservoirs which are heat sources and potential contaminant sources for groundwater.

This thesis work is focused on the development of a research that allows to get a better knowledge about the transport phenomena in porous media containing fracture networks which are affected by vertical thermal gradients. In particular, it was studied the effect of thermal convection on the species transport through fractures embedded in low-permeability porous media. We are interested not only in computing how far a contaminant travels through the fractures but also in estimating the rate the contaminant enters into the system. Moreover, it was studied the fluid flow that results due to the heat and mass transfer between the fracture and its surrounding low-permeability porous medium. In this last case it was found that if there exists a considerable difference between the permeability conditions within and around the fractures, then the main fluid flow takes place in the fractures while the interaction with the external porous medium occurs in a small region which is quantified in this study.

Two different kinds of layers were analyzed, the first one consisted of a fluid-filled layer and the second one corresponded to a fluid saturated porous layer. Also, two different geometries were considered, a couple of symmetrically interconnected layers and a slender tilted cylindrical cavity. Each one of those geometries has a particular importance: symmetrically interconnected layers are a first step to study more complicated interconnected systems, on the other hand, cylindrical geometries allow to analyze confined, axis-symmetrical fluid flows. For all cases the convection fluid flow and the temperature distributions were calculated for the small Rayleigh number regime. Despite the convective flows are weak and they do not really improve the heat transfer with respect to the pure conduction condition, a well knowledge about such flows is useful to analyze important processes involved in geology and hydrology. Slow fluid flows in fluid-filled layers and in saturated porous layers have been found to be improving agents for the

transport of minerals and contaminants.

Mathematical models involving the continuity, momentum and energy equations for fluid and saturated porous media were used to analyze those problems we are interested on. The present study was carried out by using different methodologies which include scale analysis, mapping of non-orthogonal coordinates, asymptotic analysis, finite differences and experimental measurements. This work involves the study of two commonly neglected effects, the two-dimensional transport phenomena within the layers, which is taken into account for the study of the symmetrically interconnected layers, and the hydrodynamic dispersion contribution on the transport of ideal tracers. The temperature distribution in the rock slab was found to depend on the aspect ratio, the angle of tilt, and on the layer to rock thermal conductivity ratio. The fluid flow within the layers allows to observe that the strength of the transversal velocity varies along the slot. This particular circumstance does not occur within infinite fractures, like the cylindrical cavity here studied, because for such a condition the fluid flow is one-dimensional.

For all the cases here studied the tracer transport along the slot is more effective at the beginning of the contaminant process and diminishes with time. Likewise, the rate the tracer enters into the system decreases with time as a result of the gradual tracer accumulation near the contaminative region. Moreover, the increment of the molecular-diffusion Peclet number and the aspect ratio enhances the tracer transport through the slots. For the cases of porous slots (cylindrical cavity and layers) the hydrodynamic dispersion appears as an important affect to consider, specially when the convective transport is dominant. For both geometries, cylindrical cavity and layers, the hydrodynamic contribution can be neglected if the characteristic Peclet number of the porous medium is very small compared with unity. Results here presented also find direct application for modeling the transport of passive tracers in underground reservoirs.

Nomenclatura

a	Radio de la cavidad cilíndrica, m.
B	Longitud de la base del bloque sólido, m.
C^*	Concentración másica, kg/m^3 .
C_{av}	Concentración promedio transversal adimensional.
c_p	Calor específico a presión constante, J/kgK .
C_{sat}	Concentración de saturación del contaminante en el fluido, kg/m^3 .
d	Ancho de la capa, m.
D	Coefficiente de difusión molecular de la especie en el fluido, m^2/s .
\mathbf{D}	Tensor de dispersión.
Da	Número de Darcy, K_m/d^2 .
G^*	Gradiente térmico vertical, K/m .
G	Gradiente térmico vertical adimensional.
\mathbf{g}	Vector de la aceleración de la gravedad.
g	Módulo de la aceleración de la gravedad, m/s^2 .
h	Longitud de la capa, m.
H	Altura del bloque sólido (matriz), m.
h_c	Coefficiente promedio de transferencia de calor por convección, $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$.
h_D	Coefficiente promedio de transferencia de masa por convección, m/s .
K	Permeabilidad de la capa porosa, m^2 .
k_f	Conductividad térmica del fluido, W/mK .
K_m	Permeabilidad de la matriz porosa, m^2 .
k_s	Conductividad térmica del sólido, W/mK .
L	Longitud horizontal de la matriz Caps. 2, 4 y 6; semilongitud de la cavidad Caps. 3 y 5; m.
n_i	Denota la dirección normal a las superficies de contacto sólido-capas, $i = 1, 2$.
Nu_{av}	Número de Nusselt promedio en las caras longitudinales de las capas.
P^*	Presión reducida que considera el término hidrostático, Pa.
\hat{P}^*	Presión intrínseca, Pa.
P_c	Presión característica, Pa.

P	Presión reducida adimensional.
P_m^*	Presión reducida en la matriz porosa, Pa.
P_m	Presión reducida adimensional en la matriz porosa.
Pe	Número de Peclet de difusión molecular, $u_c d/D$ ó $\tau u_c d/D$.
Pe_α	Número de Peclet dispersivo, d/α_D .
Pr	Número de Prandtl, ν/α_f .
q	Flujo de calor local, W/m^2 .
Q	Flujo de calor local adimensional.
r^*	Eje coordenado en la dirección radial de la cavidad cilíndrica.
r	Eje coordenado adimensional en la dirección radial de la cavidad cilíndrica.
Ra	Número de Rayleigh, $g\beta d^3 \Delta T/\nu\alpha_f$ ó $g\beta K d \Delta T/\nu\alpha_{ef}$.
Sh	Número de Sherwood promedio en las superficies contaminantes, $h_D d/D$.
T	Temperatura, K.
t^*	Tiempo, s.
t_c	Tiempo característico, s.
t	Tiempo adimensional.
T_1	Temperatura en la base inferior del bloque de roca Caps. 3 y 5, K.
T_2	Temperatura en la base superior del bloque de roca Caps. 3 y 5, K.
T_C	Temperatura fría, K.
T_H	Temperatura caliente, K.
T_i	Temperatura en el interior de la cavidad cilíndrica, K.
T_∞	Temperatura en la roca lejos de la cavidad cilíndrica, K.
T_m	Temperatura en la matriz permeable, K.
T_0	Temperatura media en la roca lejos de la cavidad cilíndrica, K.
T_s	Temperatura en la superficie de la cavidad cilíndrica, K.
\mathbf{u}^*	Vector de velocidad.
\mathbf{u}	Vector de velocidad adimensional.
u^*	Componente de la velocidad en la dirección del eje- x , m/s.
u_c	Velocidad característica dentro de la capa en la dirección del eje- x , m/s.
u	Componente de la velocidad adimensional en la dirección del eje- x .

\mathbf{u}_m^*	Vector de velocidad de filtración en la matriz permeable.
u_m^*	Velocidad en la matriz permeable en la dirección del eje- x_m , m/s.
u_{cm}	Velocidad característica en la matriz permeable en la dirección del eje- x_m , m/s.
u_m	Velocidad adimensional en la matriz permeable en la dirección del eje- x_m .
u_r^*	Velocidad dentro de la cavidad cilíndrica en la dirección del eje- r , m/s.
u_r	Velocidad adimensional dentro de la cavidad cilíndrica en la dirección del eje- r .
u_ϕ^*	Velocidad dentro de la cavidad cilíndrica en la dirección de ϕ , m/s.
u_ϕ	Velocidad adimensional dentro de la cavidad cilíndrica en la dirección de ϕ .
u_x^*	Velocidad dentro de la cavidad cilíndrica en la dirección del eje- x , m/s.
u_x	Velocidad adimensional dentro de la cavidad cilíndrica en la dirección del eje- x .
v^*	Velocidad en la dirección del eje- y , m/s.
v_c	Velocidad característica en la dirección del eje- y , m/s.
v	Velocidad adimensional en la dirección del eje- y .
v_m^*	Velocidad en la matriz permeable en la dirección del eje- y_m , m/s.
v_{cm}	Velocidad característica en la matriz permeable en la dirección del eje- y_m , m/s.
v_m	Velocidad adimensional en la matriz permeable en la dirección del eje- y_m .
x^*	Eje coordenado longitudinal de las capas; eje axial en la cavidad cilíndrica.
x	Eje coordenado adimensional.
x_1^*	Eje coordenado horizontal para zona 1 de la matriz sólida.
x_1	Eje coordenado adimensional horizontal para la zona 1 de la matriz sólida.
x_2^*	Eje coordenado vertical para la zona 2 de la matriz sólida.
x_2	Eje coordenado adimensional vertical para la zona 2 de la matriz sólida.
x_m^*	Eje coordenado horizontal de la matriz permeable.
x_m	Eje coordenado adimensional horizontal de la matriz permeable.
y^*	Eje coordenado transversal de las capas.
y	Eje coordenado adimensional transversal de las capas.
y_1^*	Eje coordenado vertical para zona 1 de la matriz sólida.
y_1	Eje coordenado adimensional vertical para la zona 1 de la matriz sólida.
y_2^*	Eje coordenado horizontal para la zona 2 de la matriz sólida.
y_2	Eje coordenado adimensional horizontal para la zona 2 de la matriz sólida.

- y_m^* Eje coordenado vertical de la matriz permeable.
 y_m Eje coordenado adimensional vertical de la matriz permeable.

Griegas

- α_D Coeficiente de dispersividad, m.
 α_l Dispersividad en la dirección longitudinal a la corriente principal, m.
 α_t Dispersividad en la dirección transversal a la corriente principal, m.
 α_{ef} Difusividad térmica efectiva del medio poroso en las capas, m^2/s .
 α_f Difusividad térmica del fluido, m^2/s .
 α_m Difusividad térmica efectiva de la matriz porosa, m^2/s .
 β Coeficiente de expansión volumétrica por temperatura, $1/K$.
 β_C Coeficiente de expansión volumétrica por concentración, m^3/kg .
 γ Ángulo de inclinación de las capas o de la cavidad cilíndrica, deg.
 Γ Relación de aspecto de las capas o de la cavidad cilíndrica, d/h ó a/L .
 Γ_1 Relación de aspecto de la región sólida 1, H/L .
 Γ_2 Relación de aspecto de la región sólida 2, $1/\tan(\gamma)$.
 Γ_m Relación de aspecto de la matriz permeable, H/L .
 δ Relación de conductividades térmicas, k_f/k_s ó k_{ef}/k_s .
 ΔT Diferencia de temperaturas, $T_H - T_C$ ó $T_2 - T_1$.
 ε Parámetro definido en la ecuación (2.13a).
 ε_m Parámetro definido en la ecuación (6.23a).
 η Coordenada no ortogonal en la dirección transversal de las capas.
 η_m Coordenada no ortogonal en la dirección vertical de la matriz permeable.
 θ Temperatura adimensional dentro de las capas.
 θ_i Temperatura adimensional dentro de la cavidad cilíndrica.
 θ_m Temperatura adimensional dentro de la matriz permeable.
 θ_s Temperatura adimensional en la superficie de la cavidad cilíndrica.
 θ_∞ Temperatura adimensional en el sólido lejos de la cavidad cilíndrica.
 λ Parámetro de convección definido en la ecuación (3.24).

- μ Viscosidad dinámica del fluido, kg/m s.
- ν Viscosidad cinemática del fluido, m²/s.
- ξ Coordenada no ortogonal en la dirección longitudinal de las capas.
- ξ_m Coordenada no ortogonal en la dirección horizontal de las matriz permeable.
- ρ Densidad del fluido, kg/m³.
- ρ_0 Densidad de referencia del fluido, kg/m³.
- τ Tortuosidad del medio poroso.
- Φ Porosidad del medio poroso en las capas.
- ϕ Coordenada angular para la cavidad cilíndrica.
- ψ Función de corriente.
- ω Ángulo formado por la vertical y una línea perpendicular a la capa inclinada, deg.
- κ Relación de permeabilidades entre la matriz y la capa porosa, K_m/K .

Capítulo 1

Antecedentes

Los fenómenos de transporte en medios porosos aparecen comúnmente en áreas como la geología, hidrología, ingeniería de yacimientos, ingeniería ambiental, agricultura, biomedicina, construcción, cerámica, química, ingeniería petrolera, ingeniería de alimentos, ciencia de suelos y tecnología de polvos.

En las pasadas tres o cuatro décadas el estudio de los fenómenos de transporte en un tipo especial de medio poroso conocido como medio poroso fracturado ha recibido una creciente atención no sólo por su aplicación en las áreas de hidrología e ingeniería de yacimientos, sino también en el diseño de aislamientos geológicos de desechos radiactivos [1]. En estos estudios se han analizado tanto zonas saturadas de fluido [2] como zonas no saturadas [3]. El creciente interés en estos fenómenos se debe a que tales depósitos son fuentes de calor y potenciales fuentes de contaminantes para el agua subterránea. En estos casos, además del transporte de masa de las fases de fluido en un flujo único o en multifase, también deben analizarse los transportes de calor y masa de los componentes [4].

Así mismo, en el área de la explotación petrolera el estudio de los medios porosos fracturados también ha cobrado interés en años recientes, como respuesta a la necesidad de generar mejores métodos de extracción. El cincuenta por ciento o más del petróleo que originalmente se encuentra en un yacimiento típico no es recogido por las técnicas tradicionales de recuperación (primaria y secundaria). Este petróleo no recuperado es el principal objetivo de los métodos de recuperación mejorada o terciaria que actualmente se siguen desarrollando [5, 6]. Sin embargo, los procesos para la recuperación del petróleo constituyen sólo una pequeña fracción de una

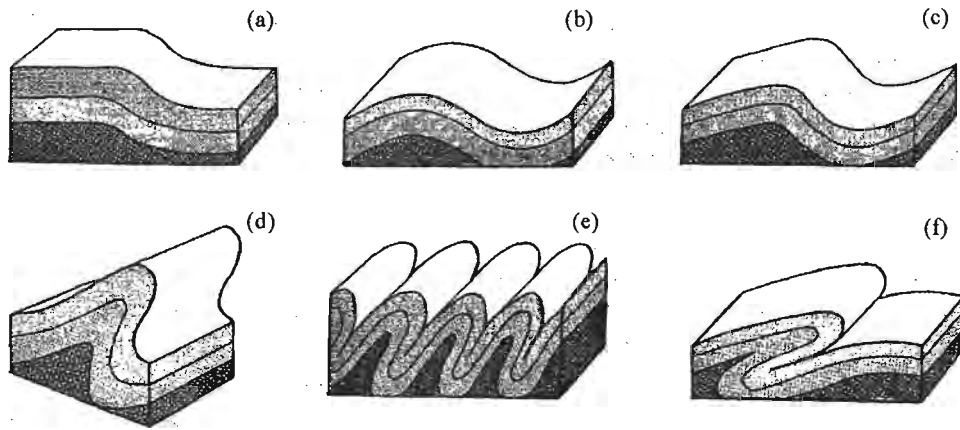


Figura 1-1: Pliegues. (a) Monoclinal. (b) Anticlinal y sinclinal simétricas. (c) Anticlinal y sinclinal asimétricas. (d) Anticlinal inclinada. (e) Pliegues isoclinales. (f) Pliegue recumbent. Tomado de Pearl [7].

enorme y aún creciente literatura acerca de los medios porosos.

1.1 Estructuras geológicas

El análisis de los fenómenos de transporte en el contexto geofísico involucra una importante variedad de geometrías y estructuras geológicas que resulta conveniente mencionar.

Los desplazamientos de las rocas en la corteza terrestre que resultan en un cambio permanente están considerados como *diatrofismo geológico*. Como resultado de este diatrofismo, se producen *estructuras geológicas* tanto arriba como abajo de la superficie de la tierra, en pequeña y en gran escala, que se generan de manera lenta o rápida [7]. Los bloques de roca se pueden deformar doblándose o desplazándose cuando existe una ruptura. Los bloques que forman la corteza terrestre son un tanto plásticas y se deforman bajo el efecto de grandes presiones. Cuando esas presiones exceden el límite de elasticidad de las rocas, éstos se deforman permanentemente. El caso de menor grado de deformación se conoce como *curveo*. Los curveos que muestran un mayor grado de deformación se consideran como *pliegues* [8]. Los pliegues en general se pueden describir y clasificar en función de su geometría y grado de deformación, según se muestra en la Figura 1-1.

Todas las rocas y los bloques de roca son plásticos hasta un cierto grado. Bajo presión

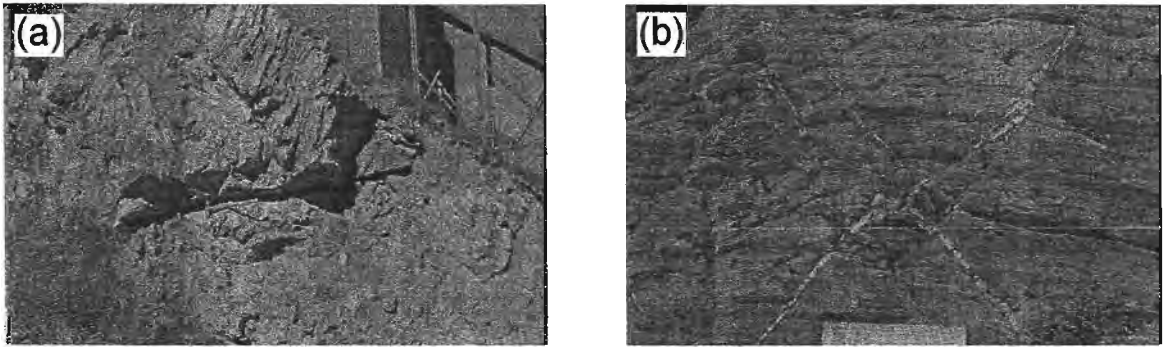


Figura 1-2: Casos típicos de fracturas, (a) la fractura simple y (b) un arreglo de fracturas interconectadas. Tomado de Bates [8].

directa, la parte más plástica se curva mientras que la más frágil se fractura. Puede ocurrir un movimiento a lo largo de la fractura resultante, combinándose la deformación con el deslizamiento. Se le llama *fractura* a cualquier ruptura en una roca sólida. Una fractura extensiva a toda una roca se llama *fisura*. Los *empalmes* son fracturas a lo largo de las cuales no ocurre un movimiento significativo y que ocurren en grupos paralelos. Por último, las fallas son las fracturas, fisuras o empalmes en los cuales se presenta un notable deslizamiento. Existe una clasificación muy detallada de las fallas, esto debido a la importancia que tienen tanto en la geología estructural como en la histórica, en los problemas de minas y geología del petróleo [7]. La Figura 1-2 muestra dos casos típicos de fracturas en rocas, (a) la fractura simple y (b) un arreglo de fracturas interconectadas.

Es muy importante reconocer que la presencia de las estructuras geológicas debe ser considerada de manera especial en el análisis de los fenómenos de transporte en la corteza terrestre [9]. Las estructuras geológicas ocurren en pequeña y en gran escala, por lo que el estudio de la interacción que existe entre éstas y las rocas se puede realizar desde puntos de vista diferentes, dependiendo de la escala en la que se esté interesado.

1.2 El problema de la escala

La aproximación de medio continuo es aplicable al estudio de una roca fracturada o de un medio poroso fracturado siempre que el *volumen elemental representativo* pueda ser determinado

para el problema y el dominio de interés. Por ejemplo, para una roca fracturada la escala de heterogeneidad es la distancia entre fracturas o la longitud de las mismas. Si el dominio es suficientemente grande, se puede determinar el volumen elemental representativo. Su tamaño debe ser mucho mayor que el espacio entre fracturas y suficientemente menor que la longitud característica del dominio de interés. En muchos casos esto implica un volumen elemental representativo de gran tamaño. Entonces la cuestión es cómo poder medir las variables de estado en el campo cuando el volumen representativo es de gran tamaño. Adicionalmente, será conveniente estimar el error en el que se incurre al medir valores con un *instrumento* que promedia sobre un volumen que puede ser mucho menor que el volumen elemental representativo [4].

Un medio poroso fracturado se define como una porción de espacio el cual está compuesto por dos partes: una red interconectada de fracturas y bloques de medio poroso. Los huecos en su totalidad pueden estar ocupados por uno o más fluidos. Tal dominio se puede tratar como un sólo medio continuo siempre que se pueda encontrar un volumen elemental representativo apropiado para éste [2]. Sin embargo, casi siempre el fluido en las fracturas se comporta de manera muy diferente a aquel que se encuentra dentro de los bloques porosos. Por ejemplo, cuando las fracturas son anchas y los poros en los bloques son muy pequeños prácticamente todo el flujo ocurre en las fracturas, mientras que generalmente la mayor parte del fluido se encuentra almacenado entre los poros de los bloques.

Bajo estas consideraciones, resulta conveniente y útil modelar el fluido en los huecos como si estuviera compuesto por dos *fases de fluido aparentes*, una ocupando las fracturas y la otra ocupando los bloques porosos, tratando a cada fase como un continuo que ocupa el dominio entero. Además, se considera posible el intercambio de cantidades extensivas transportadas entre las dos fases aparentes.

De esta forma, Bear *et al.* [4] sugieren que es posible analizar desde diferentes enfoques, o escalas, los problemas de flujo y transporte de contaminantes en el dominio de rocas porosas fracturadas de la siguiente manera:

- **Zona 1: Campo muy cercano.** A esta escala el interés está dirigido al estudio del flujo del fluido y el transporte de contaminantes dentro de una sola fractura que se encuentra bien definida, posiblemente con transporte dentro del medio poroso que la limita.

- **Zona 2: Campo cercano.** Se estudia el flujo del fluido y el transporte del contaminante en un dominio relativamente pequeño que contiene una pequeña cantidad de fracturas bien definidas. La localización y forma de las fracturas individuales deben ser conocidas, o bien, la definición de las fracturas puede ser estadística y no determinística. En el último caso, es conveniente usar las condiciones estadísticas de las fracturas para construir dominios con fracturas que reproduzcan las características del sistema real.
- **Zona 3: Campo lejano.** Se puede visualizar como si el transporte tomara lugar, simultáneamente, en dos medios continuos que se transponen, uno compuesto por el fluido dentro de la red de fracturas y otro que involucra el fluido dentro de los bloques porosos. La masa del fluido y sus componentes se pueden intercambiar entre los dos medios continuos.
- **Zona 4: Campo muy lejano.** El flujo en todo el medio poroso fracturado se puede tratar como un sólo medio continuo. Las propiedades geométricas de todo el dominio deben reflejar aquellas que corresponden a ambas, la red de fracturas y los bloques de medio poroso.

La Figura 1-3 muestra esquemáticamente la representación de las cuatro zonas descritas.

Los nombres de campo muy cercano, campo cercano, etc., dados a los diferentes tipos de problemas están relacionados con la *escala*, o tamaño del dominio del problema. Los problemas locales, correspondientes al flujo y al transporte de contaminantes cerca de las fuentes y sumideros, toman lugar en la primera y segunda zonas. De hecho, el campo muy cercano puede consistir en una sola fractura que intercepta un pozo. Si el dominio de interés es más grande, lo suficiente para la aplicación de aproximación de medio continuo, es conveniente utilizar un modelado de campo cercano, el cual requiere de información de cada una de las fracturas. Si la información acerca de las fracturas está disponible en forma de características estadísticas de la fractura, por ejemplo la anchura, longitud, inclinación y espaciamiento, es posible construir modelos del dominio de interés derivando descripciones estadísticas del comportamiento. Sin embargo, estos modelos no son prácticos cuando se considera el transporte de un contaminante en dominios grandes, como en la inclusión de cientos o miles de fracturas. Tales zonas deben de ser tratadas como lejanas o muy lejanas.

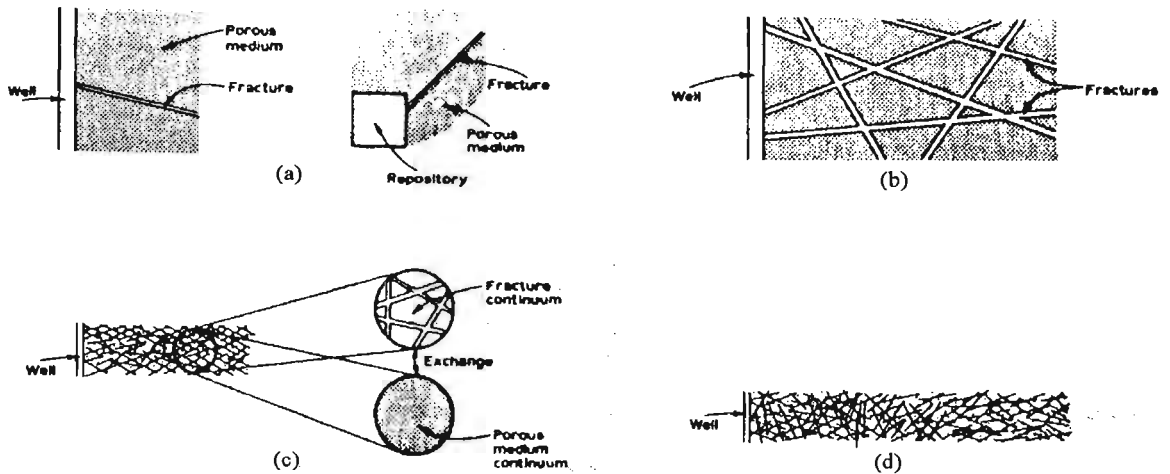


Figura 1-3: Representación esquemática de las cuatro zonas del transporte del flujo y el contaminante en un medio poroso fracturado. (a) Campo muy cercano. (b) Campo cercano. (c) Campo lejano. (d) Campo muy lejano. Tomado de Bear [4].

Para problemas de gran escala, en términos de sus dimensiones espaciales, se debe utilizar la aproximación de doble medio continuo que corresponde a un modelo de campo lejano. Esta conceptualización de aproximación de doble medio continuo, originalmente propuesta por Barenblat y Zheltov [4], también se conoce como el modelo de doble continuo o de doble porosidad. En este modelo conceptual, el dominio del medio poroso fracturado es representado por dos subsistemas distintos que interactúan entre sí, la red de fracturas y los bloques porosos. Cada subsistema se visualiza como un continuo que ocupa todo el dominio investigado, y la interacción entre los subsistemas incluye el intercambio de fluido y contaminantes entre las fracturas y los bloques.

Si las distancias y los tiempos involucrados son muy grandes es conveniente utilizar el modelo de campo muy lejano, en el cual todo el dominio se trata como un sólo continuo. Este tipo de modelos es aplicable en casos donde el sistema bajo consideración permite suficiente interacción de fluido y contaminantes entre las fracturas y los bloques porosos, llevando los dos sistemas a un equilibrio local en cada volumen de control, desde un punto de vista macroscópico. Estos sistemas se pueden describir por medio de modelos análogos a aquellos empleados en medios porosos homogéneos. Esta aproximación ha sido mostrada por Mecer y Faust [10] y ha podido

justificarse en algunos problemas de transporte de fluido y calor en medios fracturados.

1.3 El transporte de contaminantes

Al igual que el flujo del fluido, el transporte de contaminantes en medios porosos fracturados puede llevarse a cabo en ambas regiones, la red de fracturas y los bloques porosos. Así, la discusión del transporte de contaminantes está basada en consideraciones que son semejantes a aquellas mencionadas en la discusión del transporte del fluido. Las diferentes escalas de los problemas están descritas esencialmente por las cuatro zonas mencionadas con anterioridad [4]. De hecho, si se puede encontrar un volumen elemental representativo adecuado, el dominio completo de un medio fracturado se comportará como un medio poroso ordinario también en lo que corresponde al transporte del contaminante. Entonces podemos tener:

- Problemas involucrando el transporte de contaminantes en una sola fractura, digamos desde la inyección de un pozo. En una roca porosa fracturada, conforme el contaminante se mueve a través de la fractura, éste se puede dispersar dentro del medio poroso que rodea a la fractura (Zona 1).
- Problemas que involucran a un pequeño número de fracturas dentro de una roca impermeable o permeable. En el último caso, los contaminantes se dispersan desde las fracturas hacia el medio poroso adyacente (Zona 2). La Figura 1-4 muestra de manera esquemática dos arreglos diferentes de fracturas conjugadas o interconectadas que resultan muy comunes en problemas geofísicos y que pueden ser consideradas como casos simples de redes de fracturas.

En los dos casos anteriores, la aproximación de medio continuo no es aplicable a la región completa para la descripción del problema de transporte.

- Problemas que involucran un gran número de fracturas dentro de una roca permeable o impermeable, de tal manera que la aproximación del continuo es aplicable al dominio entero, como un modelo de un sólo continuo (Zona 4), o uno de doble porosidad (Zona 3).

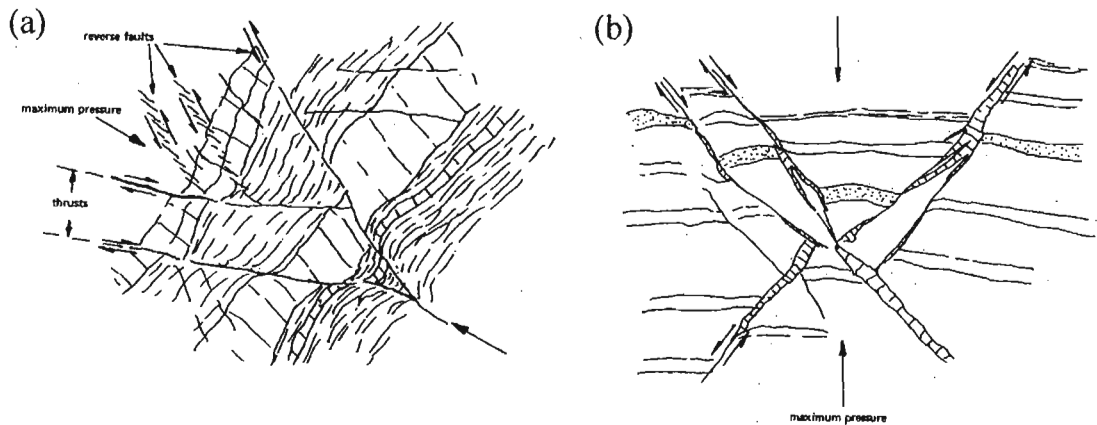


Figura 1-4: Diferentes arreglos de fallas conjugadas. Tomado de Bates [8].

En algunos casos la permeabilidad de los bloques porosos es muy baja en comparación con la correspondiente a la red de fracturas. Entonces, el transporte de contaminante en los bloques se debe únicamente al mecanismo de difusión molecular, el cual es relativamente lento. Adicionalmente, los contaminantes que se transportan a través de las fracturas se difunden hacia los bloques porosos. Así, mientras los contaminantes viajan relativamente rápido por las fracturas, los bloques porosos introducirán lentamente el contaminante en las fracturas [11].

1.4 Efectos del movimiento del fluido y el transporte de contaminantes.

Posiblemente las áreas que más se han beneficiado con el análisis de los fenómenos de transporte en medios porosos son las ciencias de suelos y la hidrología. Ante la escasez de agua potable, el estudio del flujo del agua subterránea y la restauración de acuíferos que han sido contaminados son algunas de las áreas actuales de investigación en problemas de medio porosos [11].

La mayoría de los acuíferos consisten en grava y arena no consolidada o parcialmente consolidada [12]. También las rocas volcánicas pueden formar acuíferos permeables, aunque los poros de estos acuíferos pueden no ser muy grandes como aquellos que se encuentran en grava y arena suelta, la permeabilidad, debida a su carácter cavernoso, puede ser muchas veces mayor. Por su parte, las rocas metamórficas son relativamente impermeables y constituyen acuíferos

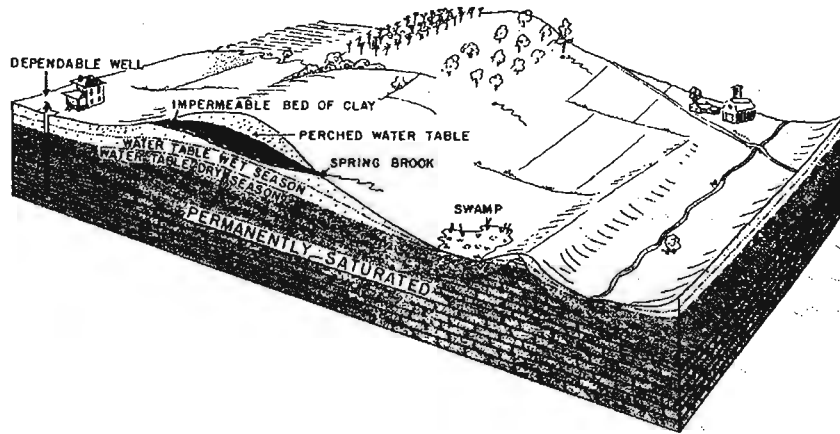


Figura 1-5: Esquema de un acuífero que muestra su topografía y estructura. Tomado de Pearl [7].

pobres [13]. La Figura 1-5 muestra el esquema típico de un depósito de agua en el que se puede observar su estructura y topografía.

En cierta manera, los yacimientos de petróleo son semejantes a los acuíferos confinados. El yacimiento de aceite o gas es una formación geológica porosa que contiene en sus espacios porosos, además de agua, al menos un hidrocarburo (aceite o gas) en fase líquida y/o gaseosa. Existe evidencia de que los hidrocarburos migran desde los lechos en donde se crearon hacia los depósitos en rocas, donde se acumulan en cantidades de posible interés comercial. Las principales fuerzas que causan la migración de los hidrocarburos son la flotación y la capilaridad [14]. Las fuerzas de flotación producen la separación del gas, el aceite y el agua en el espacio poroso dentro de los yacimientos en roca. La mayoría de los yacimientos de petróleo productores están formados por formaciones de arenisca, caliza y dolomita, ocasionalmente otros tipos de rocas forman yacimientos productores [5].

El transporte de sustancias en solución y partículas a través de los medios porosos tiene efectos muy importantes sobre los cambios y la metamorfosis que ocurren en las rocas, y por consecuencia en los fenómenos, que como se mencionó, ocurren en los acuíferos y en los yacimientos de petróleo [15]. En particular, las rocas sedimentarias están compuestas de material derivado de la desintegración, por clima y erosión, de otras rocas. Los materiales que se sedimentan son de dos tipos, materia mineral disuelta que se precipita por agentes orgánicos e

inorgánicos, y fragmentos sólidos o sedimentos que se acumulan para formar el cuerpo de la roca. El material mineral disuelto forma las rocas sedimentarias precipitadas y los fragmentos sólidos se acumulan para formar las rocas sedimentarias clásticas. Adicionalmente, la materia mineral precipitada también contribuye a la cementación del material clástico. La *cementación* es el proceso por medio del cual la materia mineral que se encuentra en solución en el agua subterránea se deposita entre los granos [13]. Los lixiviados de la tierra más abundantes son el cloruro de sodio, el sulfato de calcio, la sílica, los carbonatos de calcio y magnesio, y los compuestos de fósforo, bario, hierro y manganeso. Entre las muchas sustancias que cementan las rocas sedimentarias se encuentran el carbonato de calcio y la sílica, y en menores cantidades el óxido de hierro, la arcilla y el yeso.

El material disuelto en el agua se puede remover de ésta por dos medios principalmente, el primero consiste en procesos químicos inorgánicos, obteniéndose precipitados químicos. El segundo es debido a la acción de las plantas y los animales, obteniéndose precipitados orgánicos [7]. Estos fenómenos toman lugar como parte de una serie de procesos conocido como *diagénesis*.

El término *diagénesis*, empleado por primera vez por von Gümbel en 1888, se refiere a las reacciones que tienen lugar dentro del sedimento entre un mineral y otro, o entre uno o varios minerales y los fluidos intersticiales o flotantes. No es posible ninguna distinción entre la *diagénesis* y el metamorfismo. En efecto, la *diagénesis* es el comienzo del metamorfismo porque conduce a la modificación de las texturas, de las estructuras y de la composición mineral de un sedimento [13]. Los cambios *diagénicos* se producen por los procesos comunes de reorganización química, tales como disolución, precipitación, cristalización, recristalización, oxidación, reducción, entre otros. En la literatura se encuentra reportada una importante variedad de modelos que han sido propuestos como alternativas para el análisis de los fenómenos de precipitación y disolución en sistemas hidrotérmicos [16, 17, 18], además de algunos otros trabajos en los que se estiman los patrones *diagénicos* en problemas geotérmicos, como los presentados por Wilson *et al.* [19] y Rabinowicz *et al.* [15].

Hanor [20] hizo una observación importante relacionada con el transporte de materiales disueltos en fracturas reales. Asociados a los gradientes de concentración se encuentran los flujos difusivos, pero además, si resulta un gradiente de densidad debido a las variaciones en la concentración que existe dentro de una fractura rodeada por una roca impermeable, se

desarrollará una circulación lenta interna la cual puede aumentar de manera importante el flujo del soluto a lo largo de dicha fractura, aún cuando no existan gradientes globales de presión o temperatura. Este fenómeno ya había sido previamente estudiado teórica y experimentalmente por Phillips [21] en cavidades inclinadas esbeltas. Relacionados a este fenómeno también están los estudios de Woods [22] y Wunsch [23] quienes analizaron el flujo que ocurre alrededor de superficies impermeables inclinadas que se encuentran inmersas en fluidos estratificados debido a la presencia de un gradiente vertical de densidades que es producto únicamente de la variación de la concentración.

1.5 La convección térmica en los fenómenos geofísicos

La mayoría de los estudios de la convección natural en medios porosos publicados antes de 1970 fueron motivados por el interés en la solución de problemas geofísicos [2]. En los acuíferos cercanos a la superficie, un gradiente aparentemente pequeño en la carga hidráulica generalmente domina a las fuerzas de flotación definiendo así las características de los patrones de flujo. Aún en regiones de intensa actividad geotérmica, donde las fuerzas de flotación deben ser tomadas en cuenta, los gradientes de presión inducidos hidráulicamente pueden modificar sustancialmente los campos de velocidad del flujo. Sin embargo, en grandes áreas geotérmicas las fuerzas de flotación son realmente dominantes. Los flujos debidos a la flotación solamente ocurren cuando las fuerzas hidráulicas se encuentran ausentes, como en bancos sumergidos, lechos o regiones continentales, o bien en estratos permeables aislados totalmente confinados. En sedimentos sumergidos, la presión en la superficie es igual a la carga hidráulica del agua que se encuentra encima, así que la presión reducida en la interfase sedimento-agua desaparece. En regiones en las que ocurren intensos cambios en la corriente pueden existir algunas variaciones inducidas dinámicamente en la presión reducida pero estas son generalmente despreciables. La presión del fluido en una capa permeable aislada y confinada puede ser mayor que la presión hidrostática correspondiente a su profundidad. Es el gradiente de presión impuesto el que fuerza hidráulicamente la aparición del movimiento del fluido, pero cuando la región está aislada por una roca impermeable por todos sus lados, y por consecuencia no existe flujo entrando o saliendo de la región, cualquier movimiento interno se deberá a los gradientes térmicos. En cualquiera

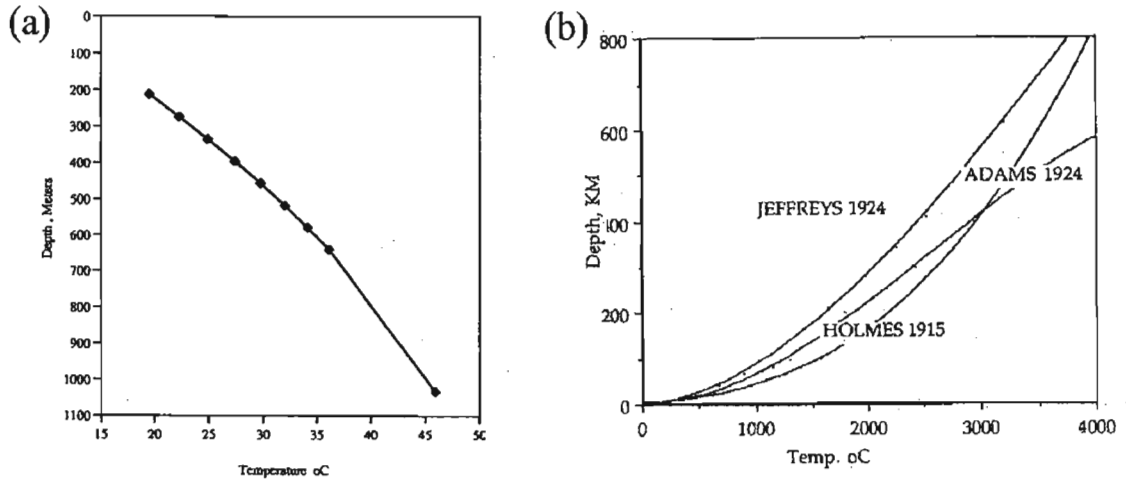


Figura 1-6: (a) Uno de los primeros reportes del gradiente geotérmico debido a A. Mohor publicado en 1875. (b) Tres opciones del gradiente geotérmico en la tierra, de acuerdo con Arthur Holmes (1915), Harold Jeffreys (1924) y Leason H. Adams (1924). Tomado de Sigurdsson [25].

de estas regiones, si las isotermas no son horizontales, el fluido en los poros se moverá a través de la capa permeable [24].

La Figura 1-6 muestra el gradiente geotérmico según varias mediciones reportadas por diferentes autores [25].

Uno de los primeros estudios acerca de los procesos de diagénesis y su relación con la convección térmica en capas planas fue desarrollada por Wood y Hewett [26]; quienes presentaron el argumento de que la cementación y la disolución en rocas porosas están estrechamente asociadas con el movimiento del fluido que normalmente surge en cuerpos porosos. Estos autores propusieron al movimiento de convección natural inducido por los gradientes geotérmicos como el principal mecanismo de transferencia de masa, la cual es capaz de producir cambios significativos en la porosidad, además de la alteración mineral observada en rocas reales [27].

1.6 Objetivos del trabajo

Existe una literatura relativamente escasa acerca de la convección natural en medios porosos fracturados y sus efectos en el transporte de contaminantes. Los estudios hasta hoy presentados muestran una deficiencia significativa en el análisis de las condiciones térmicas en las cercanías

de las fracturas, además de la falta de información acerca del proceso del transporte del contaminante a través de las fracturas que incluya la razón con la que el contaminante ingresa a estos sistemas. El objetivo de esta tesis consiste en el desarrollo de una investigación que permita tener una mejor comprensión de los fenómenos de transporte en redes de fracturas que se encuentran bajo el efecto de gradientes térmicos verticales. El enfoque del análisis está dirigido a estimar el papel que juegan las fracturas gruesas o capas en el transporte de contaminantes. En particular, se analiza el efecto que tiene la convección natural en el transporte de contaminantes pasivos a través de fracturas ubicadas en el interior de medios porosos de muy baja permeabilidad. El interés no está solamente en determinar que tan lejos se transporta el contaminante en las fracturas, sino también en estimar la rapidez con la que el contaminante entra en el sistema. Para la solución de estos problemas se emplean modelos matemáticos basados en las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, para fluidos en espacios libres y medios porosos. Las metodologías empleadas incluyen el análisis de órdenes de magnitud, mapeo a coordenadas no ortogonales, análisis asintótico, diferencias finitas y mediciones experimentales. El presente trabajo involucra el estudio de dos efectos que comúnmente se desprecian, el transporte bidimensional dentro de las capas, considerado en el análisis de las capas conectadas simétricamente, y la contribución de la dispersión hidrodinámica sobre el transporte del contaminante. Adicionalmente, se analiza la interacción que existe entre las fracturas y el medio poroso de baja permeabilidad que las rodea. En este último caso, se encuentra que cuando existe una diferencia muy grande entre las condiciones de permeabilidad dentro y fuera de las fracturas, el flujo de fluido se lleva a cabo principalmente a través de las fracturas y la interacción entre las dos regiones es mínima, no obstante, las zonas de influencia del flujo en las fracturas hacia la matriz porosa también son cuantificadas. Ese análisis justifica claramente la suposición de que para propósitos prácticos no es necesario considerar el flujo de fluido que ocurre entre la matriz y la fractura.

Aunque no es el propósito general de esta tesis, los estudios aquí presentados también pueden servir de sustento hacia una integración de las diversas zonas o campos de una teoría integral del transporte de calor y masa en medios porosos fracturados.

Parte I

**CONVECCIÓN NATURAL EN
MEDIOS POROSOS
FRACTURADOS**

Capítulo 2

Convección natural en fracturas interconectadas simétricamente

Existe una extensa literatura acerca de la convección natural en cavidades esbeltas inclinadas, llenas de fluido (ver por ejemplo [28] y sus referencias) o llenas de un medio poroso saturado de fluido (ver [29] y sus referencias). No obstante, estos trabajos están principalmente dirigidos al análisis de modelos aplicables en ingeniería, como los colectores solares intercambiadores de calor, acumuladores de calor y aislantes térmicos, en donde las condiciones de temperatura o flujo de calor en las paredes son conocidas. En el contexto geofísico, las investigaciones de los sistemas consideran el problema de la interacción con el material exterior, pues en general son problemas conjugados de transferencia de calor en los que las condiciones en los alrededores de las cavidades son parte de la solución, y están dirigidas al estudio los procesos que ocurren dentro de las rocas debido a gradientes geotérmicos [30]. Entre los primeros modelos formales desarrollados con este enfoque podemos mencionar el de Davis *et al.* [31] para los casos de capas porosas dobladas (pliegues) con forma periódica sinusoidal embebidas en un material rocoso impermeable. Posteriormente, Woods y Linz [32, 33] estudiaron la convección natural en capas planas e inclinadas de longitud infinita, tanto de fluido como de medio poroso saturado. En el primero de estos trabajos se demuestra que existe un transporte acelerado de contaminantes, y el segundo muestra que el gradiente geotérmico produce cambios significativos en la porosidad y mineralogía de los medios porosos.

Más recientemente, Luna *et al.* [34] y Medina *et al.* [35] analizaron la convección térmica en capas inclinadas de longitud finita donde la suposición principal es que ambas, la relación de aspecto, $\Gamma = d/h$ (donde d es el ancho de la capa y h es su espesor) y la relación de conductividades térmicas, $\delta = k_f/k_s$ (donde k_s y k_f son las conductividades térmicas correspondientes a la roca y al material dentro de la capa, respectivamente), son menores que la unidad, situación comúnmente encontrada en depósitos de agua subterránea [14] y en yacimientos de petróleo [5]. Esta suposición juega un papel muy importante en el análisis de este tipo de problemas, pues bajo tal circunstancia la conducción de calor en la roca y la convección térmica en la capa pueden ser resueltas por separado.

Existen muchas geometrías simples que pueden ser supuestas como buenas aproximaciones de capas o fracturas interconectadas. El principal objetivo en esta etapa de la investigación es el estudio de la convección natural en el interior de un par de capas inclinadas de longitud finita cuando éstas están conectadas simétricamente. Se analizan dos tipos diferentes de capas interconectadas: el primer tipo corresponde a capas de fluido y el segundo a capas de medio poroso saturado de fluido. En ambos casos se analiza el régimen de bajo número de Rayleigh debido a las implicaciones físicas que éste tiene en fenómenos que tienen lugar a escalas de tiempo geológicas.

2.1 Definición del problema

Considere un bloque de roca de anchura B , altura H , donde $H \ll B$ y profundidad infinita. Dos capas interconectadas simétricamente, de anchura d , atraviezan la roca con un ángulo de inclinación γ respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura 2-1.

La conductividad térmica de la roca es k_s y la capa está llena de un material cuya conductividad térmica es k_f . Las bases superior e inferior del bloque se mantienen a temperaturas constantes T_C y $T_H = T_C + \Delta T$, respectivamente, lo que, en ausencia de las capas, conduciría a un gradiente térmico vertical $G^* = \Delta T/H$ en cualquier parte del bloque.

Se espera que las isothermas sean horizontales lejos de las capas, pero cerca, las isothermas se deben modificar. Para la mayoría de los casos de interés, principalmente aquellos relacionados con los depósitos de agua y aceite, los parámetros $\Gamma = d/h$ y $\delta = k_f/k_s$ son pequeños comparados

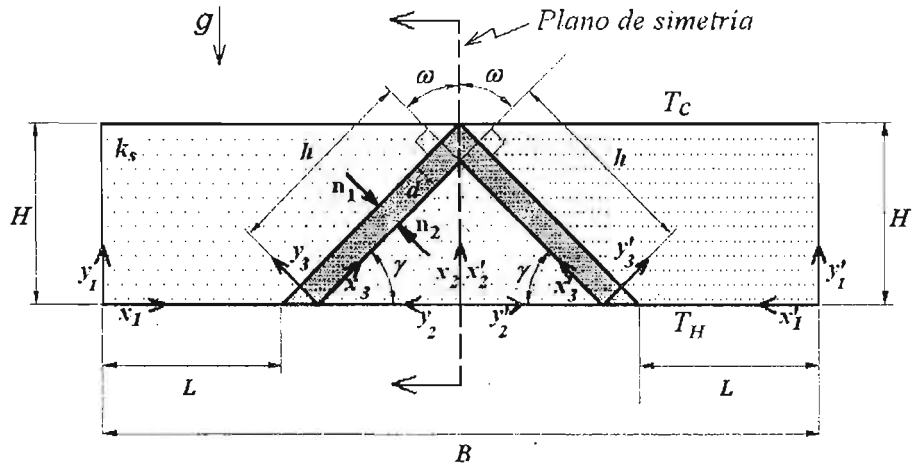


Figura 2-1: Esquema del modelo físico y sistemas coordenados

con la unidad, sin embargo, dada la gran variedad de capas presentes en un yacimiento, el cociente de estos dos parámetros está dentro de un amplio rango de valores, tanto mayores como menores comparados con la unidad [24]. En el contexto geofísico existen situaciones comunes como aquella en la que una matriz de caliza contiene capas de fluido o de aceite, o bien capas de arena saturadas con cualquiera de esos fluidos. Para tales condiciones $\delta \sim 0.1$, pero combinaciones para las cuales $\delta \gg 1$ son también comúnmente encontradas. Es importante comentar que la caliza típicamente tiene una porosidad de $\Phi = 0.04$ y que una capa porosa típica de arena tiene una porosidad de alrededor de $\Phi = 0.45$. La permeabilidad de la matriz es alrededor de dos órdenes de magnitud mayor que la correspondiente a la capa porosa. De esta manera, la matriz de caliza es prácticamente impermeable respecto a su capa porosa interna de arena. En el presente análisis la matriz de roca se considera impermeable y se estudian los casos correspondientes a $\delta/\Gamma \ll 1$, los que físicamente representan capas gruesas o simplemente capas [36].

2.1.1 Conducción de calor en la roca

Como se muestra en la Figura 2-1, existe simetría entre los sistemas coordenados del lado izquierdo ($1', 2', 3'$) y sus correspondientes sistemas en el lado opuesto ($1, 2, 3$), por simplicidad sólo analizaremos los últimos, los del lado izquierdo. La distribución térmica en la roca obedece

a la ecuación de difusión de calor, $\nabla^2 T_1 = 0$. Para la región del lado izquierdo, en el borde superior $T_1 = T_C$, en el borde inferior $T_1 = T_H$, el borde en el lado izquierdo (lejos de las capas) es adiabático, $\partial T_1 / \partial x_1 = 0$, y en el borde de la derecha (la superficie de contacto capa-roca) la temperatura y el flujo de calor son iguales a aquellos experimentados por el material dentro de la capa. Para la región sólida triangular que es rodeada por la capa, la ecuación de difusión de calor es resuelta con las condiciones $T_2 = T_H$ en el borde inferior, y condiciones de continuidad para la temperatura y el flujo de calor en la superficie de contacto capa-roca y en el plano de simetría.

2.1.2 Convección en la capa de fluido

El estudio del flujo convectivo dentro de capas inclinadas incluye dos casos límite importantes en el contexto geofísico, las capas verticales y horizontales embebidas en sólidos que se encuentran bajo el efecto de gradientes de temperatura verticales. Para ambos casos (capa porosa vertical [37] y horizontal [38]), el inicio de la convección se caracteriza por un número de Rayleigh crítico que depende de la relación de conductividades térmicas fluido-sólido. Por otro lado, un gradiente vertical de temperatura siempre induce flujos convectivos dentro de ranuras inclinadas llenas de fluido que se encuentran embebidas en sólidos cuando las conductividades térmicas dentro y fuera de las ranuras no son iguales, independientemente de la intensidad del gradiente de temperatura y de la viscosidad del fluido [32]. Este fenómeno se debe a que para tales condiciones las isothermas no son horizontales en el fluido en reposo, excepto en el caso particular de que las conductividades térmicas del sólido y el fluido sean iguales.

El presente análisis está enfocado al estudio de dos capas conectadas simétricamente, y para tal caso el ángulo de inclinación no puede ser 0 ni $\pi/2$. Entonces, para este problema no existe un estado sin movimiento.

El flujo en la capa de fluido se modela con las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, que respectivamente son:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (2.1)$$

$$(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla P^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^* + \beta \Delta T \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) T = \alpha_f \nabla^2 T. \quad (2.3)$$

donde $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*)$ es la velocidad bidimensional, P^* es la presión, T es la temperatura del fluido y \mathbf{g} es el vector de la aceleración de la gravedad. El fluido tiene viscosidad cinemática ν , densidad ρ , coeficiente de expansión térmica β , y difusividad térmica α_f . Se analiza el estado permanente, se supone que las propiedades del fluido son constantes excepto en el término de flotación, en donde se aplica la aproximación de Boussinesq. El problema del movimiento dentro de la capa de fluido se resolvió considerando condiciones de no deslizamiento en todas las paredes. A partir de mediciones experimentales se encontró que no existe intercambio de masa entre las dos capas, al menos para los pequeños números de Rayleigh aquí estudiados. Así, para obtener la solución numérica se supuso que existe una pared impermeable imaginaria localizada en el plano de simetría. Para la capa de fluido, las condiciones de frontera para la temperatura son $T = T_H$ en la pared inferior, flujo de calor cero en la pared imaginaria y continuidad para la temperatura y el flujo de calor en las superficies de contacto fluido-sólido.

2.1.3 Convección en la capa porosa saturada de fluido

El flujo en la capa porosa saturada se modela con las ecuaciones de continuidad, energía y Darcy. Se suponen propiedades constantes y estado permanente, además se aplica la aproximación de Boussinesq. La ecuación de continuidad es la misma que en el caso anterior, ecuación (2.1), y la ecuación de la energía está dada por la ecuación (2.3), con α_f sustituida por α_{ef} la cual es igual a la difusividad térmica efectiva del medio poroso. La ecuación de Darcy es:

$$\mathbf{u}^* = -\frac{K\rho}{\mu} \left(\frac{1}{\rho} \nabla P^* - \beta \Delta T \mathbf{g} \right) \quad (2.4)$$

donde ahora $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*)$ es la velocidad bidimensional de filtración. El fluido que satura la capa porosa tiene densidad ρ , coeficiente de expansión térmica β , y la capa porosa tiene permeabilidad K . Todas las paredes se suponen impermeables. Además, se consideró que no existe flujo a través de la pared imaginaria localizada en el plano de simetría. Las condiciones de frontera para la temperatura son las mismas a las impuestas en el caso de la capa de fluido.

2.2 Ecuaciones adimensionales

Un análisis de escala muestra que las variables adimensionales adecuadas al problema en cuestión son:

Para las regiones sólidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1^*}{L}, \quad y_1 = \frac{y_1^*}{H}, \quad \theta_1 = \frac{T_1 - T_C}{T_H - T_C}, \\ x_2 &= \frac{x_2^*}{H}, \quad y_2 = \frac{y_2^*}{H/\tan(\gamma)}, \quad 0 < \gamma < \pi/2, \quad \theta_2 = \frac{T_2 - T_C}{T_H - T_C}, \\ \delta &= \frac{k_f}{k_s}, \quad \Gamma_1 = \frac{H}{L}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{\tan(\gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Para la región de las capas:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_3^*}{h}, \quad y = \frac{y_3^*}{d}, \quad u = \frac{u_3^*}{u_c}, \quad v = \frac{v_3^*}{v_c}, \quad \Gamma = \frac{d}{h}, \\ P &= \frac{P^*}{P_c}, \quad \theta = \frac{T - T_C}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_H - T_C, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

donde u_c y v_c son las velocidades características, α es la difusividad térmica correspondiente (α_f ó α_{ef}) y Ra es el número de Rayleigh apropiado. Para la capa de fluido $u_c = \alpha_f \text{Ra} \Gamma / d$, $v_c = \Gamma u_c$, y $\text{Ra} = g \beta \Delta T d^3 / (\alpha_f \nu)$. Para la capa de medio poroso saturado $u_c = \alpha_{ef} \text{Ra} / d$, $v_c = \Gamma u_c$, y $\text{Ra} = K g \beta \Delta T d / (\alpha_{ef} \nu)$.

Entonces, las ecuaciones adimensionales resultantes para las distribuciones de temperatura en las regiones del sólido son:

$$\Gamma_i^2 \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y_i^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

donde 1 y 2 corresponden a la región sólida externa y a la región sólida triangular, respectivamente. Sus correspondientes condiciones de frontera acoplan el problema térmico en la roca con el problema térmico en la cavidad. De la condición de continuidad en el flujo de calor en la intercara capa-roca se tiene que $\partial \theta_i / \partial n_i = (\delta / \Gamma) \partial \theta / \partial n_i$, donde $\partial / \partial n_1$ y $\partial / \partial n_2$ denotan las derivadas en la dirección normal a las superficies de contacto, ver Figura 2-1. Es claro entonces que el acoplamiento desaparece siempre que $\delta / \Gamma \ll 1$. Consecuentemente, las superficies de contacto aparecen como aproximadamente adiabáticas, es decir, para las regiones sólidas las capas actúan como aislantes térmicos, por lo que las condiciones de frontera en la superficies de contacto capa-sólido se modifican a $\partial \theta_1 / \partial n_1 = 0$ y $\partial \theta_2 / \partial n_2 = 0$. Así, las condiciones de

frontera en las superficies de contacto se han simplificado y las regiones del sólido y del fluido se resuelven independientemente.

Si se introduce la función de corriente, $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, y el número de Prandtl, $\text{Pr} = \nu/\alpha_f$, las ecuaciones adimensionales para la capa de fluido son:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \left[\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} \right] - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \left[\Gamma^2 \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \right] = \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2} \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} + \frac{\text{Pr}\Gamma^2}{\text{Ra}} \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \frac{2\text{Pr}}{\text{Ra}} \frac{\partial^4\psi}{\partial y^2\partial x^2} + \frac{\text{Pr}\sin(\gamma)}{\text{Ra}\Gamma^3} \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\text{Pr}\cos(\gamma)}{\text{Ra}\Gamma^2} \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \frac{\partial\theta}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma^2\text{Ra}} \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right). \quad (2.9)$$

Por otra parte para la capa porosa, después de introducir la función de corriente, la ecuación adimensional para el movimiento es:

$$\Gamma^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \sin(\gamma) \frac{\partial\theta}{\partial y} - \Gamma \cos(\gamma) \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (2.10)$$

y la ecuación de la energía adimensional es:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \frac{\partial\theta}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma\text{Ra}} \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right). \quad (2.11)$$

2.3 Método Numérico

Para resolver el problema en la región de la capa de fluido, las ecuaciones (2.8) y (2.9) se linealizaron suponiendo que $(\partial\psi/\partial x)$ y $(\partial\psi/\partial y)$ eran conocidas a partir de una iteración numérica anterior. Así, $(\partial\psi/\partial x)$ y $(\partial\psi/\partial y)$ fueron sustituidas por $(\partial\psi^0/\partial x)$ y $(\partial\psi^0/\partial y)$, las cuales se actualizaron después de cada iteración.

Las soluciones numéricas se obtuvieron utilizando el método convencional de diferencias finitas centrales. Con el objeto de definir una malla adecuada para nuestras geometrías no rectangulares, se introdujo una transformación no ortogonal simple. Para la región sólida

externa de la izquierda:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{1 + \varepsilon_1 \eta_1}, \text{ donde } \varepsilon_1 = \Gamma_1 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \quad (2.12a)$$

$$\eta_1 = y_1, \quad (2.12b)$$

y para la región del fluido:

$$\xi = \frac{x}{1 + \varepsilon \eta}, \text{ donde } \varepsilon = \Gamma \tan(\omega), \quad (2.13a)$$

$$\eta = y, \quad (2.13b)$$

donde ω es el ángulo formado por la vertical y una línea perpendicular a la capa inclinada, ver Figura 2-1. Así, para la región sólida de la izquierda la ecuación de difisión de calor resultante es:

$$\frac{2\varepsilon_1^2 \xi_1}{(1 + \varepsilon_1 \eta_1)^2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} + \left(\left(\frac{\Gamma_1}{1 + \varepsilon_1 \eta_1} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1 \xi_1}{1 + \varepsilon_1 \eta_1} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{2\varepsilon_1 \xi_1}{1 + \varepsilon_1 \eta_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta_1^2} = 0, \quad (2.14)$$

con las condiciones de frontera:

$$\text{Para } \xi_1 = 0, 0 \leq \eta_1 \leq 1 : \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} = 0, \quad (2.15a)$$

$$\text{para } \xi_1 = 1, 0 \leq \eta_1 \leq 1 :$$

$$0 = \left(\frac{\Gamma_1 \cos(-\frac{\pi}{2} + \gamma)}{1 + \varepsilon_1 \eta_1} - \frac{\varepsilon_1 \xi_1 \sin(-\frac{\pi}{2} + \gamma)}{1 + \varepsilon_1 \eta_1} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} + \sin(-\frac{\pi}{2} + \gamma) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1}, \quad (2.15b)$$

$$\text{para } \eta_1 = 0, 0 \leq \xi_1 \leq 1 : \theta_1 = 1, \quad (2.15c)$$

$$\text{para } \eta_1 = 1, 0 \leq \xi_1 \leq 1 : \theta_1 = 0. \quad (2.15d)$$

Para la capa de fluido, la ecuación de movimiento en las coordenadas no ortogonales es:

$$A \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + B \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + C \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + E \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + F \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + G \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

$$+H \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + I \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi \partial \eta^2} + J \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi \partial \eta^3} + K \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + L \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} = M \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + N \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad (2.16)$$

donde las funciones A a N se muestran en el Apéndice A. La ecuación de la energía es:

$$R \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + S \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + T \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} + U \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0. \quad (2.17)$$

donde las funciones R a V se presentan en el Apéndice A. Las condiciones de frontera en las coordenadas no ortogonales son:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \text{ y } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \text{ con } \psi = 0 \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \\ \xi = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \\ \eta = 0, \quad 0 < \xi < 1 \\ \eta = 1, \quad 0 < \xi < 1 \end{array} \right\}, \quad (2.18)$$

$$\text{Para } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1 : \theta = 1, \quad (2.19a)$$

$$\text{para } \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1 :$$

$$0 = \left(\frac{\Gamma \cos(-\omega)}{1 + \varepsilon \eta} - \frac{\varepsilon \xi \sin(-\omega)}{1 + \varepsilon \eta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \sin(-\omega) \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad (2.19b)$$

$$\text{para } \eta = 0, 0 < \xi < 1 : \theta = 1, \quad (2.19c)$$

$$\text{para } \eta = 1, 0 < \xi < 1 : \theta = \theta_1(\xi)|_{\xi_1=1}. \quad (2.19d)$$

Por otra parte, para la capa porosa saturada la ecuación de movimiento en las coordenadas no ortogonales es:

$$A \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = E \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + F \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad (2.20)$$

donde las funciones A a F se presentan en el Apéndice A. La ecuación de la energía es la misma mostrada en la ecuación (2.17), y las funciones R a V para este caso también se dan en el Apéndice A. Las condiciones de frontera para la capa porosa son:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi = 0, & 0 \leq \eta \leq 1 \\ \xi = 1, & 0 \leq \eta \leq 1 \end{array} \right\}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \eta = 0, & 0 < \xi < 1 \\ \eta = 1, & 0 < \xi < 1 \end{array} \right\}, \quad (2.22)$$

$$\text{Para } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1 : \theta = 1, \quad (2.23a)$$

$$\text{para } \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1 :$$

$$0 = \left(\frac{\Gamma \cos(-\omega)}{1 + \varepsilon \eta} - \frac{\varepsilon \xi \sin(-\omega)}{1 + \varepsilon \eta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \sin(-\omega) \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad (2.23b)$$

$$\text{para } \eta = 0, 0 \leq \xi \leq 1 : \theta = 1, \quad (2.23c)$$

$$\text{para } \eta = 1, 0 \leq \xi \leq 1 : \theta = \theta_1(\xi)|_{\xi_1=1}. \quad (2.23d)$$

En las nuevas coordenadas ξ - η , nuestras geometrías no rectangulares se transforman en cuadrados, donde $0 \leq \xi \leq 1$ y $0 \leq \eta \leq 1$, lo que permite utilizar una malla simple en el código numérico. Se empleó una malla de 125×30 nodos, y un residual menor que 10^{-6} para cada ecuación como criterio de convergencia.

2.4 Modelo experimental de la capa de fluido

El modelo experimental que reproduce las condiciones supuestas en el modelo teórico consiste en una placa de cobre (de conductividad térmica $k_f = 401 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) colocada verticalmente, con una longitud $B = 0.76 \text{ m}$, altura $H = 0.164 \text{ m}$ y espesor de 0.04 m . La placa está provista con un par de huecos de anchura $d = 0.005$ y longitud $h = 0.2 \text{ m}$, los cuales están interconectados simétricamente con un ángulo $\gamma = 45^\circ$, de tal manera que la relación de aspecto es $\Gamma = 0.025$. El espesor de la placa es suficientemente grande respecto a d , lo que permite cumplir con el objetivo de obtener un flujo bidimensional. Los huecos se sellaron con una cinta plástica adhesiva transparente que permitió visualizar el flujo dentro de las cavidades. En los bordes superior e inferior de la placa se maquinaron canales, mismos que sirvieron para alojar tubos de cobre delgados, un par de ellos en cada borde, como se muestra en la Figura 2-2.

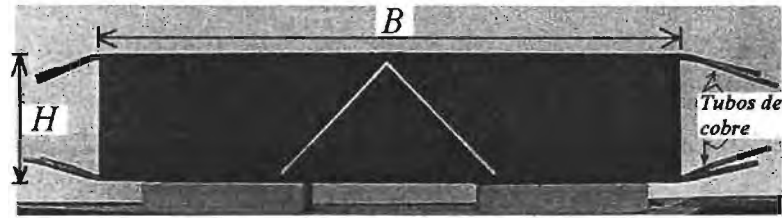


Figura 2-2: Modelo experimental

Las temperaturas constantes en los bordes se impusieron haciendo recircular a través de los tubos agua proveniente de baños térmicos. Cada par de tubos operó en contraflujo, los tubos superiores enfriaron la placa mientras los inferiores la calentaron.

Se colocó glicerina dentro de las cavidades, misma que para una temperatura de 305 K tiene las siguientes propiedades: densidad $\rho = 1257 \text{ kg m}^{-3}$, conductividad térmica $k_f = 0.286 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$, coeficiente de expansión térmica $\beta = 0.485 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, difusividad térmica $\alpha_f = 9.2 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, viscosidad cinemática $\nu = 457 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y número de Prandtl $Pr = 4943$. Bajo estas condiciones la relación de conductividades térmicas es $\delta = 7.1 \times 10^{-4}$, por lo que $\delta/\Gamma = 0.0285 \ll 1$.

Se empleó una cámara infrarroja modelo FLIR ThermaCam™ PM595 para medir la distribución de temperaturas en la placa de cobre. La velocidad dentro de las cavidades se estimó por medio de velocimetría por imágenes de partículas (PIV). La glicerina se sembró con polen de flotación nula y tamaño medio de partícula de $50 \mu\text{m}$. Estas partículas se hicieron visibles como pequeños brillos blancos cuando la luz de una lámpara de halógeno iluminó las cavidades. Por medio de una video cámara digital comercial de 30 cuadros por segundo se video grabó el movimiento de las partículas suspendidas en el fluido en diferentes localidades de las cavidades.

La placa de cobre se aisló con placas de poliuretano de 0.04 m de espesor. Los baños térmicos trabajaron alrededor de seis horas antes de que las placas de aislante fueran removidas y las mediciones fueran realizadas. Con el uso de un software de TSI™ y por medio de correlación cruzada se determinaron los campos de velocidades. Adicionalmente, un software de ThermaCam™ se utilizó para analizar las imágenes infrarrojas y se determinaron los perfiles de temperatura en diferentes ubicaciones de la placa.

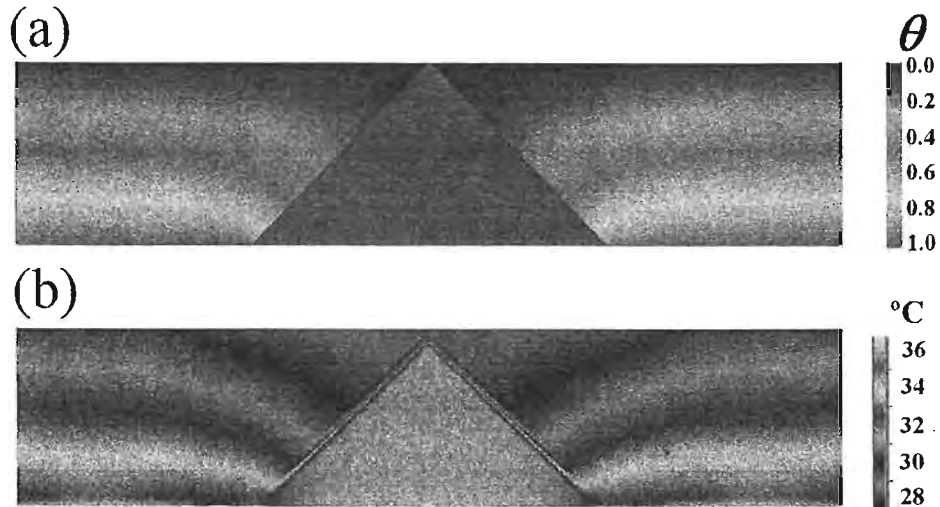


Figura 2-3: Distribución de temperatura en la roca. (a) Resultado numérico correspondiente a $\delta \ll 1$, $\gamma = \pi/4$. (b) Distribución de temperatura experimental en la roca cerca de las cavidades (capas). $\Delta T = 6.5$ K; $\gamma = \pi/4$.

2.5 Resultados

2.5.1 Distribución de temperatura en la roca

En la Figura 2-3(a) se muestra la solución numérica que corresponde a $\gamma = \pi/4$. Este resultado numérico para la temperatura en la roca se confirmó por medio de experimentos. La Figura 2-3(b) muestra la imagen infrarroja del modelo experimental. Claramente existe una buena comparación cualitativa entre ambos resultados. Los resultados numéricos y las termografías muestran el cambio tan importante que sufren las isotermas en la roca cerca de las capas. El gradiente térmico vertical es prácticamente constante lejos de las capas (isotermas equiespaciadas horizontales). Además, la existencia de una sola isoterma en la región triangular es evidente.

La comparación cuantitativa entre los resultados numérico y experimental de la temperatura adimensional se muestra en la Figura 2-4, donde se presentan los perfiles de temperatura en las superficies de contacto capa-roca correspondientes a la mitad izquierda del modelo. Se presenta una comparación directa entre datos experimentales (símbolos) y resultados numéricos (curvas). Estos perfiles de temperatura son las condiciones de frontera que experimenta el material dentro

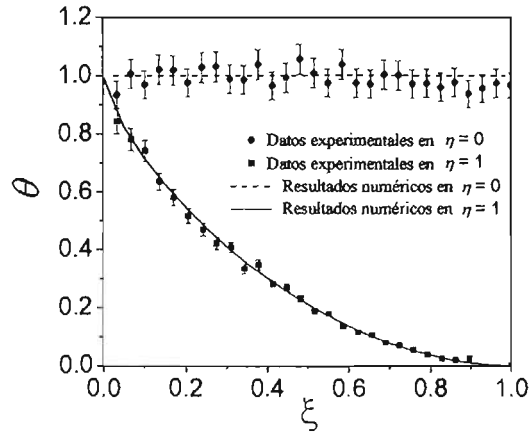


Figura 2-4: Perfiles de la temperatura adimensional en las superficies de contacto longitudinales correspondientes al lado izquierdo cuando $\gamma = \pi/4$. Resultados numéricos y experimentales. El experimento se realizó con $\Delta T = 6.5$ K y las barras de error corresponden a $\pm 5\%$.

de las capas y que dan lugar a la convección térmica. Es importante observar la diferencia entre las temperaturas correspondientes a puntos opuestos a lo largo de las superficies de contacto. Éstas son del orden de ΔT y varían con ξ , la diferencia máxima, igual a ΔT , se localiza en la esquina superior (donde $\xi = 1$), Figura 2-4. Esta condición particular es sustancialmente diferente respecto al caso general de una sola fractura inclinada. En ese caso la diferencia de temperaturas entre puntos opuestos a lo largo de la fractura es constante, tanto para fracturas llenas de fluido como para fracturas llenas de un medio poroso saturado, y de acuerdo con Woods y Linz [32] y Linz y Woods [33], dicha diferencia se puede calcular a partir del ángulo de inclinación, el número de Rayleigh y la relación de conductividades térmicas. Por otra parte, en fracturas de longitud finita la diferencia de temperaturas entre puntos opuestos varía a lo largo de las fracturas debido a los efectos de borde, y para el caso que nos ocupa esta condición es especialmente notable.

El ángulo de inclinación γ juega un papel muy importante en la distribución de la temperatura en la roca, como se puede observar en la Figura 2-5. El gradiente vertical de la temperatura lejos de las capas es constante y las isotermas se afectan conforme las capas están más cerca; este efecto es considerable para valores pequeños de γ , y menos importante para valores grandes del mismo ángulo.

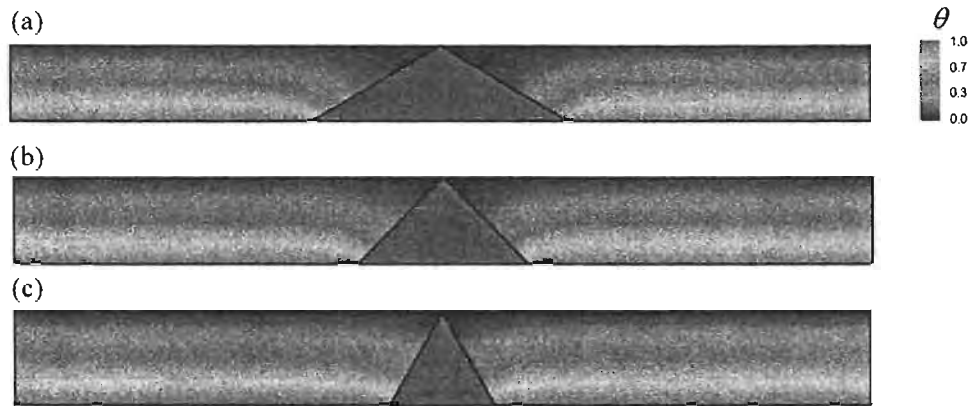


Figura 2-5: Efecto del ángulo γ sobre la distribución de la temperatura en la roca cerca de las capas. (a) $\gamma = \pi/6$. (b) $\gamma = \pi/4$. (c) $\gamma = \pi/3$.

El flujo de calor a través de la capa debido a estas diferencias de temperatura, mismo que ha sido despreciado en el análisis teórico, es del orden de $k_f \Delta T/d$. Este flujo es pequeño comparado con el flujo de calor característico a través del sólido, $k_s \Delta T/H$, cuando $\delta \ll \Gamma$, como se había comentado anteriormente. Si esta condición no se satisface, entonces los problemas de transferencia de calor en el sólido y en la capa permanecen acoplados y deben ser resueltos de manera simultánea.

2.5.2 La capa de fluido

Debido a que el ángulo de inclinación γ afecta a la distribución de temperatura en la roca, este ángulo tiene también un efecto importante en la distribución de temperatura dentro de la capa de fluido, Figura 2-6. Se encontró que la difusión es el principal medio de transporte de calor en la capa, como se esperaba. En efecto, debido a que los número de Rayleigh analizados son pequeños, $10^{-1} \leq Ra \leq 10$, el flujo de convección resultante es débil y no afecta a la distribución de temperatura. Así, se encontró que las imágenes de la Figura 2-6 son válidas para ese rango del número de Rayleigh. Como ya se comentó, para el presente problema no existe estado sin movimiento, sin embargo, tal estado aparece como un buen caso de referencia con el cual comparar la condición de convección estudiada. El estado sin movimiento representa la situación en la que la capa de fluido se reemplaza por una capa sólida con la misma conductividad térmica.

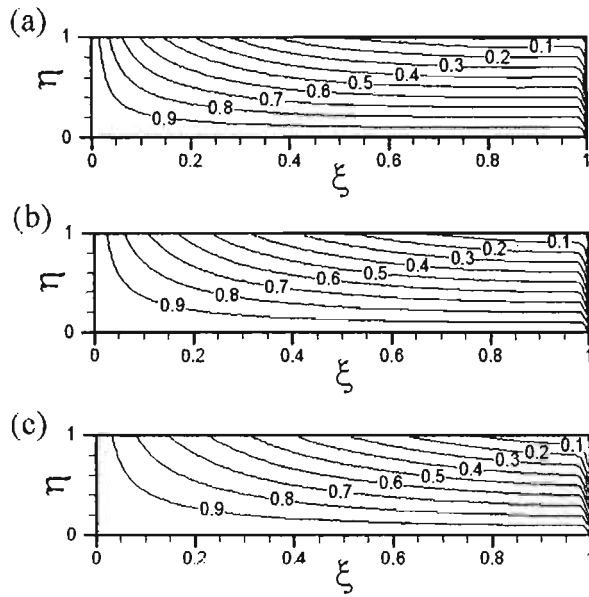


Figura 2-6: Distribución de la temperatura adimensional dentro de la capa de fluido en las coordenadas no ortogonales. Efecto del ángulo de inclinación γ cuando $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = \pi/6$. (b) $\gamma = \pi/4$. (c) $\gamma = \pi/3$. Estas imágenes también corresponden al caso de la capa porosa saturada.

Así, se encontró que las distribuciones de temperatura mostradas en la Figura 2-6 se ajustan perfectamente con las soluciones calculadas para la condición en la que existe un estado sin movimiento en la capa (transferencia de calor por conducción pura), lo que confirma que el flujo de convección está bajo el régimen de conducción.

El movimiento del fluido resultante se puede ver en la Figura 2-7, donde se muestran los resultados numéricos para la función de corriente en las coordenadas no ortogonales para diferentes valores de γ , cuando $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Como la capa está bajo el régimen de conducción, las imágenes en la Figura 2-7 son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$. Por la misma razón, el número de Rayleigh no afecta la forma de los patrones de flujo. En realidad, la Figura 2-7 corresponde a condiciones que comúnmente se encuentran en sistemas geofísicos [24, 31]. El número de Prandtl utilizado en la solución numérica, $Pr = 0.36$, corresponde a un valor típico para el petróleo a condiciones de yacimiento, lo que hace al resultado particularmente interesante por sus posibles aplicaciones prácticas.

Como se podría esperar a partir de la distribución de temperatura en la roca, los patrones

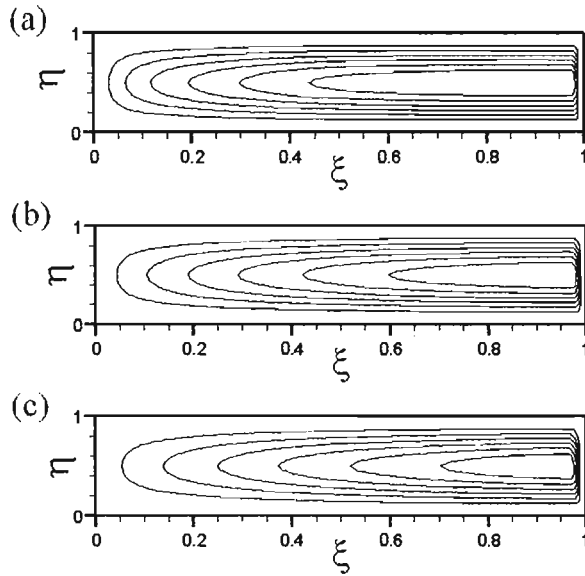


Figura 2-7: Efecto del ángulo γ sobre el flujo convectivo dentro de la capa de fluido. Para todos los casos $Pr = 0.3645$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = \pi/6$. (b) $\gamma = \pi/4$. (c) $\gamma = \pi/3$. Estas imágenes son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$.

de circulación son en sentido antihorario, el flujo viaja longitudinalmente hacia arriba cerca de la pared inferior (donde $\theta = 1$) a lo largo de la capa, y descienden cerca de la pared superior donde la temperatura es menor. Cerca de la esquina superior el flujo cambia su dirección de manera abrupta mientras que en la parte inferior el cambio es lento y suave. La Figura 2-8(a) muestra los detalles de la función de corriente cerca de la esquina superior. En dicha figura el sistema de coordenadas es el original, lo que permite apreciar el flujo en la geometría real de la capa. El campo de velocidades y las líneas de corriente determinados experimentalmente para esa misma región se muestran en la Figura 2-8(b). Las mediciones experimentales muestran que en la región de la esquina superior el fluido está prácticamente estancado, por lo que no existe intercambio de masa entre las dos capas interconectadas, una condición muy útil que ya ha sido aprovechada en la formulación numérica previa.

En la Figura 2-9 se presenta una comparación entre los resultados numéricos y los datos que se obtuvieron en el experimento. Se muestran los perfiles de velocidad dentro de la capa de fluido. Es claro que existe una buena comparación entre ellos cuando $0.2 \leq \eta \leq 0.8$, fuera de este rango existe una discrepancia importante. Una medición con la técnica de PIV resulta

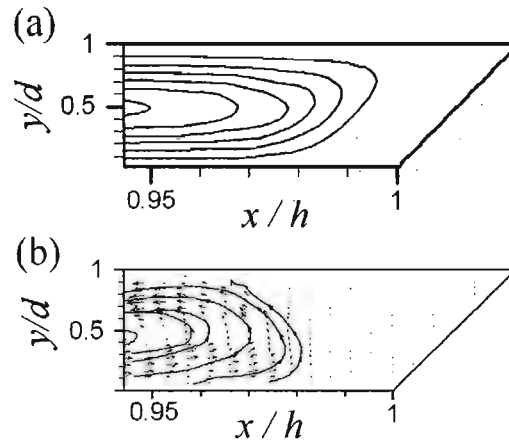


Figura 2-8: Cerca de la esquina superior. (a) Líneas de corriente determinadas numéricamente. (b) Campo de velocidades y líneas de corriente determinadas experimentalmente. $Ra = 84$, $Pr = 4950$, $\Gamma = 0.025$.

confiable cuando se utiliza una hoja de luz laser como fuente luminosa, y debido al propio diseño del modelo experimental fue necesario utilizar una luz “dispersa” proveniente de una lámpara de halógeno para iluminar las cavidades. Por lo tanto, el paralaje inherente desde el punto de vista de la cámara de video en conjunto con la iluminación empleada produjeron una medición errónea que es particularmente evidente cerca de las paredes, donde el paralaje es máximo. A pesar de tal inconveniente, esta comparación permite confiar en las soluciones numéricas. La Figura 2-9 deja ver que los perfiles de velocidad resultan simétricos respecto al plano medio $\eta = 0.5$, y debido a que el fluido se calienta mientras viaja a lo largo de la pared inferior, el flujo es más rápido en la región superior. No se muestra la velocidad transversal determinada experimentalmente debido a que ésta es muy pequeña y el propio ruido dificultó su medición.

Como la capa se encuentra en el régimen de conducción, se encontró que la velocidad adimensional no cambia con el número de Rayleigh. Por lo tanto, los perfiles presentados en la Figura 2-10 son válidos para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$, cuando $Pr = 0.36$, $\Gamma = 0.01$ y $\gamma = \pi/4$. El efecto del número de Rayleigh sobre la velocidad *real* está considerada en la propia definición de la velocidad adimensional. La Figura 2-10(a) muestra los perfiles de la velocidad longitudinal adimensional en la capa. El perfil de la velocidad transversal en el plano medio, $\eta = 0.5$, se muestra en la Figura 2-10(b). Este perfil permite observar lo rápido que el flujo cambia su

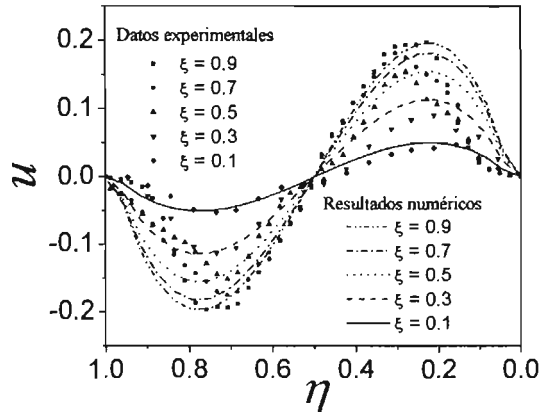


Figura 2-9: Perfiles de la velocidad longitudinal adimensional en diferentes ubicaciones dentro de la capa de fluido cuando $Ra = 84$, $Pr = 4950$, $\Gamma = 0.025$. Resultados numéricos y experimentales.

dirección cerca de la esquina superior y lo lento que el movimiento es en la parte inferior de la capa. Entonces, el flujo convectivo en el interior de nuestra fractura de longitud finita, Figuras 2-7 y 2-10, muestra la importancia de la componente transversal de la velocidad, misma que no es considerada en el análisis de las fracturas infinitas, pues esta componente de la velocidad aparece debido a los efectos de borde. En consecuencia, los fenómenos de transporte en la dirección transversal dentro de fracturas finitas se deben a la difusión y la convección, mientras que para las fracturas infinitas sólo existe difusión.

El ángulo de inclinación γ afecta a la velocidad longitudinal según se muestra en la Figura 2-11, donde todos los perfiles corresponden a la velocidad adimensional longitudinal u en el plano medio $\xi = 0.5$. Nuevamente, la Figura 2-11 es válida para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$ con $Pr = 0.36$, $\Gamma = 0.01$. Cuando el ángulo γ aumenta, la diferencia de temperatura entre puntos opuestos a lo largo de las paredes longitudinales disminuye (ver Figura 2-6), sin embargo, la componente longitudinal de \mathbf{g} se incrementa, así el resultado es un incremento en la flotación cuando aumenta γ . Como un dato de referencia es importante mencionar que en el caso de una sola fractura de longitud finita o infinita la intensidad de la convección es máxima para $\gamma = \pi/4$ (Luna *et al.* [34], Woods y Linz [32, 33]).

El mecanismo de transferencia de calor a través de la capa de fluido se cuantifica por medio del flujo de calor local adimensional Q definido como:

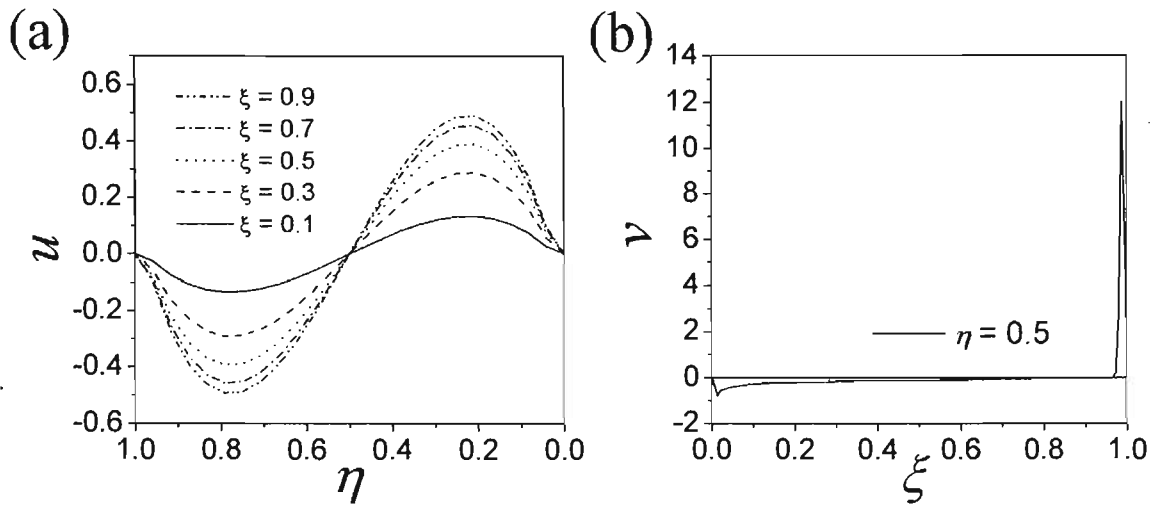


Figura 2-10: Perfiles de la velocidad longitudinal adimensional en diferentes ubicaciones de la capa de fluido cuando $Pr = 0.3645$, $\Gamma = 0.01$ y $\gamma = \pi/4$. (a) Velocidad longitudinal. (b) Velocidad transversal en el plano medio, $\eta = 0.5$. Estas imágenes son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$.

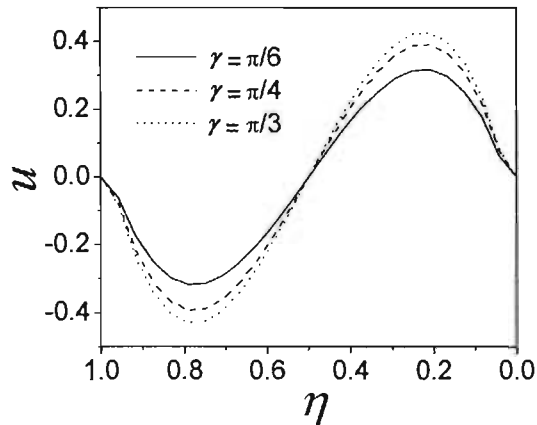


Figura 2-11: Efecto del ángulo γ sobre la velocidad longitudinal dentro de la capa de fluido. Para todos los casos $Pr = 0.3645$, $\Gamma = 0.01$. Todos los perfiles corresponden a la velocidad u en el plano medio, $\xi = 0.5$. Estas imágenes son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$.

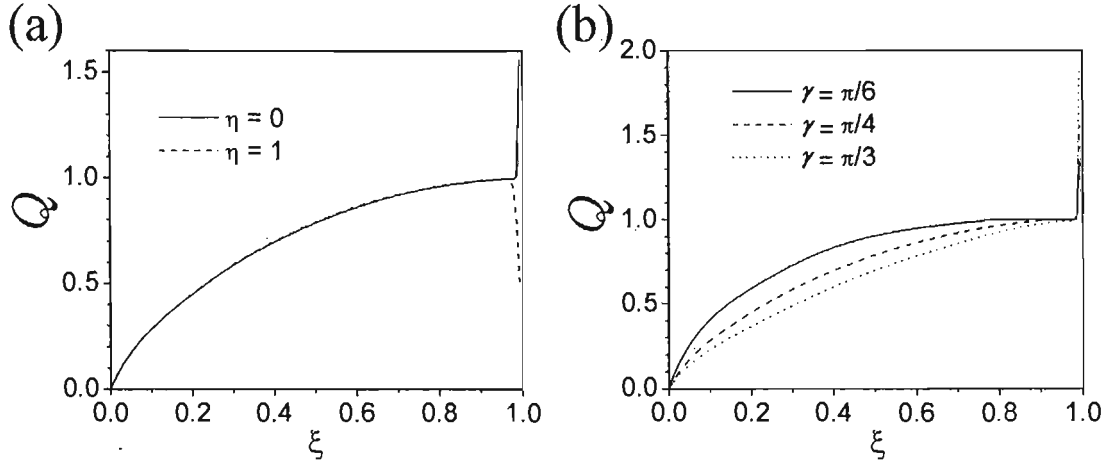


Figura 2-12: Flujo de calor adimensional local en las paredes longitudinales cuando $Pr = 0.3645$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) En las paredes inferior ($\eta = 0$) y superior ($\eta = 1$) cuando $\gamma = \pi/4$. (b) Efecto del ángulo γ sobre el flujo de calor local adimensional en la pared inferior, $\eta = 0$. Estas figuras son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$ para la capa de fluido, y para $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$ para la capa de medio poroso saturado.

$$Q = -\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{qd}{k_f(T_H - T_C)}, \quad (2.24)$$

donde q es el flujo de calor local y k_f es la conductividad térmica del fluido. La Figura 2-12(a) muestra la variación del flujo de calor local adimensional en las superficies de contacto fluido-sólido superior e inferior. Estos resultados corresponden a $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$ y $\gamma = \pi/4$. Las dos curvas en la Figura 2-12(a) difieren entre sí solamente cerca de la esquina superior, eso debido a que cuando $\xi \rightarrow 1$, el gradiente de la temperatura cerca de la pared superior ($\eta = 1$) es menor que el correspondiente a la pared inferior ($\eta = 0$), como es posible apreciar en cualquier imagen de la Figura 2-6. En la Figura 2-12(b) se muestra el efecto de γ sobre el flujo de calor local en la pared inferior para el caso de $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Cuando el ángulo de inclinación se incrementa la diferencia de temperatura entre puntos opuestos a lo largo de las superficies de contacto sólido-fluido disminuye (ver Figura 2-6), por lo que el flujo de calor local también decrece. Nuevamente la Figura 2-12 es válida para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$.

La transferencia de calor global a través de la capa está dada por el número de Nusselt promedio, Nu_{av} , definido como:

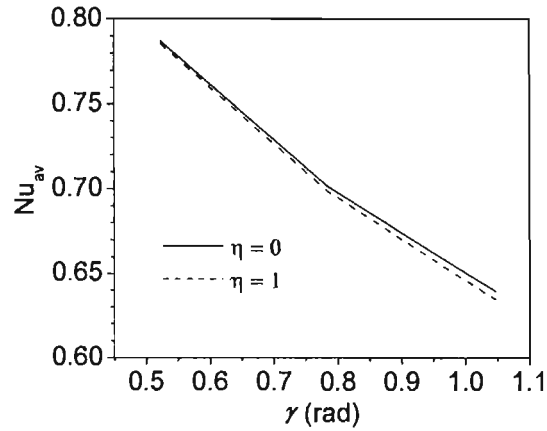


Figura 2-13: Efecto del ángulo γ sobre el número de Nusselt promedio en las paredes longitudinales inferior ($\eta = 0$) y superior ($\eta = 1$). Estas imágenes son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$ para la capa de fluido, y para $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$ para la capa de medio poroso saturado.

$$Nu_{av} = \frac{h_c d}{k_f}, \quad (2.25)$$

donde h_c es el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección. Es fácil mostrar que para el presente análisis el número de Nusselt promedio está relacionado con el flujo de calor local adimensional de la siguiente manera:

$$Nu_{av} = \int_0^1 \left[-\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] d\xi. \quad (2.26)$$

La Figura 2-13 muestra el efecto del ángulo de inclinación γ sobre Nu_{av} . Debido a que el flujo local de calor decrece con γ , el número de Nusselt promedio también lo hace. Además, como la capa está en el régimen de conducción, el flujo adimensional de calor no depende del número de Rayleigh, por lo que las Figuras 2-12 y 2-13 son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$, y para el estado sin movimiento del fluido también. Las observaciones anteriores revelan que para los flujos convectivos aquí estudiados, la convección no mejora el proceso de la transferencia de calor respecto a la condición de conducción de calor pura, sin embargo, este tipo de flujos convectivos en capas de fluido han probado ser un mecanismo importante para el transporte de minerales o contaminantes, fenómenos de enormes consecuencias en escalas de tiempo geológicas [32].

2.5.3 La capa de medio poroso saturado

Debido a que los números de Rayleigh analizados en este trabajo son muy pequeños, se observó que también la capa de medio poroso saturado se encuentra bajo el régimen de conducción. Por ello, los resultados correspondientes a la capa de medio poroso que involucran a la distribución de temperatura son iguales a los mostrados para la capa de fluido. Así, la distribución de la temperatura dentro de la capa porosa es igual a la que se presenta en la Figura 2-6 para las mismas inclinaciones analizadas en las capas de fluido. Esta figura es válida para el rango completo del número de Rayleigh estudiado, $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$, y para el caso de referencia (estado sin movimiento en la capa porosa), también. De esta forma, las figuras a las que se hace referencia en esta sección y que involucran a la distribución de temperatura, el flujo de calor y el número de Nusselt, son válidas para todo este rango de Ra , y también para el estado sin movimiento.

Los flujos convectivos resultantes dentro de la capa porosa saturada de fluido se muestran en la Figura 2-14, donde se presentan las líneas de corriente en las coordenadas no ortogonales para diferentes valores de γ , cuando $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. El número de Rayleigh no afecta la forma de los patrones de flujo. Así, la Figura 2-14 es válida para $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$ y las figuras que corresponden a la velocidad de filtración también son válidas para ese rango de Ra .

El flujo circula en sentido antihorario. Los perfiles de la velocidad longitudinal se presentan en la Figura 2-15(a). El perfil de la velocidad transversal correspondiente al plano medio $\eta = 0.5$ se muestra en la Figura 2-15(b). El efecto del número de Rayleigh sobre la velocidad *real* está considerada en la propia definición de la velocidad adimensional. El ángulo de inclinación γ afecta a la velocidad longitudinal según se muestra en la Figura 2-16, donde todos los perfiles corresponden a la velocidad u en el plano medio, $\xi = 0.5$. Como se puede observar en las Figuras 2-14 y 2-15, la componente transversal de la velocidad en la capa de longitud finita tiene un efecto importante sobre la forma de la celda convectiva. La intensidad del movimiento de convección cambia a lo largo de la capa, entonces, se espera que los fenómenos de transporte tomen lugar bajo diferentes condiciones, mismas que dependen de la ubicación dentro de la fractura finita. A partir de la Figura 2-14 es claro que los fenómenos de transporte en la dirección transversal se llevan a cabo principalmente por difusión en $0.7 < \xi < 0.95$, por

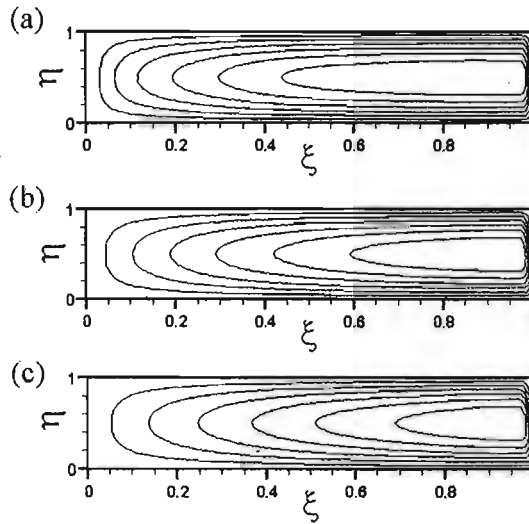


Figura 2-14: Efecto del ángulo γ sobre el flujo convectivo dentro de la capa porosa saturada. Para todos los casos $Pr = 0.3645$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = \pi/6$. (b) $\gamma = \pi/4$. (c) $\gamma = \pi/3$. Estas imágenes son válidas para $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$.

difusión y convección en $0 < \xi < 0.7$, mientras que la convección es el medio principal de transporte cerca de la esquina superior, excepto en la región de estancamiento localizada donde las capas se conectan entre sí. Este tipo de circunstancias no ocurren dentro de fracturas de longitud infinita debido a que para tal condición el flujo es unidimensional.

La transferencia de calor a través de la capa porosa se cuantifica con el flujo de calor local adimensional, definido previamente en la ecuación (2.24), pero en este se debe cambiar k_f por k_{ef} , la conductividad térmica efectiva del medio poroso. Ya que la distribución de temperatura dentro de la capa porosa es igual a la correspondiente a la capa de fluido, el flujo de calor local mostrado en la Figura 2-12(a) también es válido para la capa porosa cuando $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$ y $\gamma = \pi/4$. Además, la Figura 2-12(b) igualmente aplica para el caso de la capa porosa mostrando el efecto de γ sobre el flujo de calor local. Nuevamente, el número de Nusselt promedio, Nu_{av} (definido en la ecuación 2.25, donde k_f cambia por k_{ef}), no depende del número de Rayleigh. Entonces, es claro que estos movimientos convectivos débiles no mejoran la transferencia de calor respecto a la condición de conducción pura, sin embargo, adquieren una particular importancia cuando se ven involucrados en el transporte de minerales o contaminantes en escalas de tiempo geológica [24, 27].

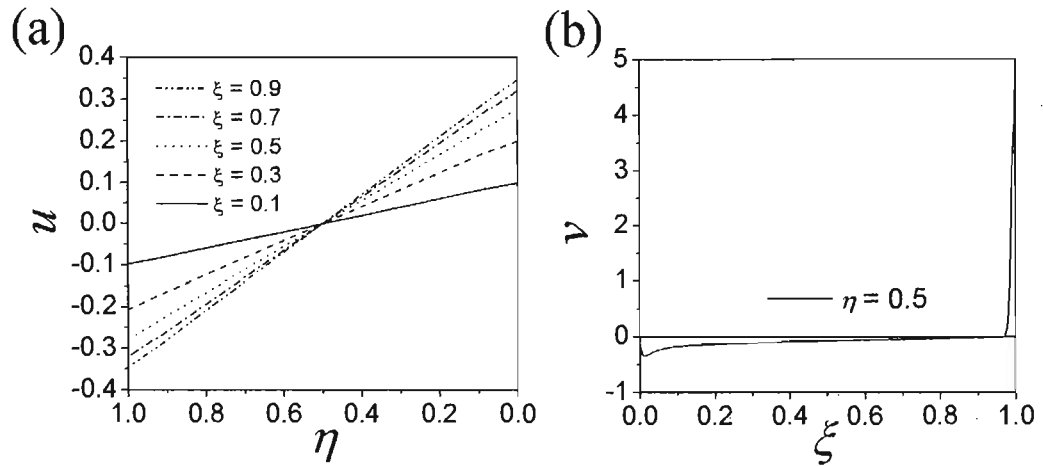


Figura 2-15: Perfiles de la velocidad adimensional en diferentes ubicaciones dentro de la capa porosa saturada cuando $Pr = 0.3645$, $\Gamma = 0.01$ y $\gamma = \pi/4$. (a) Velocidad longitudinal. (b) Velocidad transversal en el plano medio, $\eta = 0.5$. Estas imágenes son válidas para $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$.

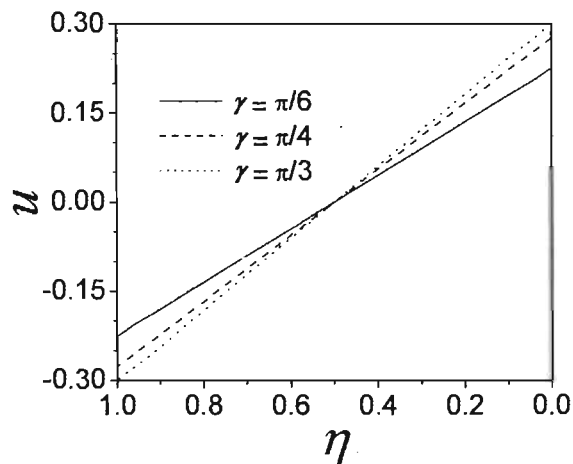


Figura 2-16: Efecto del ángulo γ sobre la velocidad longitudinal dentro de la capa porosa saturada. Para todos los casos $Pr = 0.3645$, $\Gamma = 0.01$. Todos los perfiles corresponden a la velocidad u en el plano medio, $\xi = 0.5$. Estas imágenes son válidas para $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$.

Capítulo 3

Convección natural en una cavidad cilíndrica inclinada

En este capítulo se estudia el problema conjugado de la convección natural dentro de una cavidad cilíndrica inclinada que se encuentra embebida en un bloque de roca impermeable afectado por un gradiente vertical de temperatura. Se consideran dos casos igualmente importantes, la cavidad llena de fluido y la cavidad llena de medio poroso saturado de fluido. Además de su inherente importancia física, el problema de la convección térmica dentro de cavidades cilíndricas esbeltas con conductividad térmica diferente a la del medio externo aparece con frecuencia en estudios controlados de la formación de hielo en los polos [39] y en la industria petrolera [40], tanto en tubos embebidos en yacimientos subterráneos, como en casos relacionados con la inyección de fluidos calientes; esto último como parte de los métodos térmicos de recuperación secundaria del petróleo [5, 41, 42]. En el contexto geológico, además de la importancia de la convección natural alrededor de tubos calientes [43], también resulta de interés el estudio de las condiciones en el interior de los llamados tubos de lava. Eventualmente, cuando la erupción se detiene, la lava fundida sale dejando detrás una cavidad vacía, llamada tubo de lava, de algunas decenas de metros de diámetro y kilómetros de longitud. Los tubos de lava modifican la condición de riesgo de un volcán, pero también han sido y son lugares potenciales para habitar [44].

Adicionalmente, debido a la importancia de los procesos de almacenamiento de alimentos

y la fermentación, además de la seguridad de reactores químicos y nucleares, la convección natural en cavidades cilíndricas llenas de un medio poroso con generación interna de calor ha sido extensamente estudiada [45, 46], al igual que la convección térmica en cavidades abiertas llenas y rodeadas por un medio poroso saturado [47].

En este Capítulo se muestran resultados analíticos para el movimiento del fluido por convección natural que ocurre en el interior de una cavidad cilíndrica esbelta e inclinada cuando el número de Rayleigh es pequeño. Bajo la suposición de que la conductividad térmica del material dentro de la cavidad es diferente a aquella que corresponde al material sólido que la rodea, se analizaron los problemas térmicos acoplados dentro y alrededor de la cavidad inclinada. Como un aspecto complementario, los resultados correspondientes a la convección en la cavidad llena de fluido se probaron experimentalmente.

3.1 Definición del problema

Considerese un bloque horizontal de roca impermeable, de altura $2H$ y conductividad térmica k_s , que contiene una cavidad cilíndrica de longitud $2L$ y radio a localizada en el centro del bloque. La cavidad se encuentra inclinada un ángulo γ respecto a la horizontal, y en el caso general $H > L$, como se muestra en la Figura 3-1(a). El material dentro de la cavidad tiene una conductividad térmica k_f . Las bases del bloque se mantienen a diferentes temperaturas, T_1 y $T_2 = T_1 + \Delta T$, donde en general ΔT puede ser tanto positivo como negativo. Bajo estas condiciones, lejos de la cavidad se produce un gradiente térmico vertical en el bloque igual a $G^* = \Delta T/2H$. Como ya sabemos, $\Gamma = a/L$ y $\delta = k_f/k_s$, pueden cubrir un amplio rango de valores comparados con la unidad.

3.2 Distribución de temperatura en la roca

En ausencia de la cavidad, la temperatura en el bloque cambiaría linealmente a lo largo del eje vertical x_1^* , desde T_1 en la base inferior a $T_1 + \Delta T$ en la base superior, así, la distribución de la temperatura sería $T_\infty = G^* x_1^* + T_0$ donde, $T_0 = T_1 + \Delta T/2$. Por conveniencia se emplean las coordenadas cilíndricas (r^*, ϕ, x^*) de la Figura 3-1(b), con x^* que crece hacia arriba desde el centro del bloque y a lo largo del eje de la cavidad. El ángulo ϕ se mide desde un plano vertical

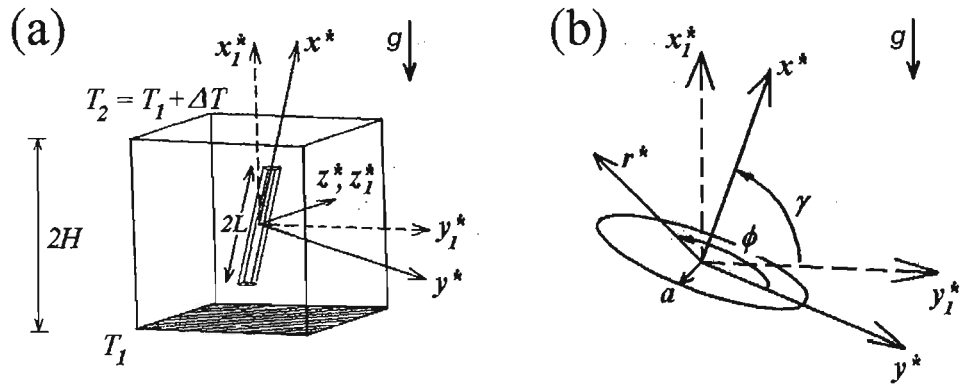


Figura 3-1: Esquema del modelo físico y sistemas de coordenadas.

y la cavidad se extiende desde $x^* = -L$ a $x^* = L$. Las variables adimensionales utilizadas en el análisis son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{r^*}{a}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \\ \theta_\infty &= \frac{T_\infty - T_0}{T_0}, \quad G = \frac{\alpha G^*}{T_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Entonces, en ausencia de la cavidad, la temperatura adimensional en el bloque en términos de (r, ϕ, x) , sería:

$$\theta_\infty = G \left(\frac{x}{L} \sin \gamma - r \cos \gamma \cos \phi \right). \quad (3.2)$$

Por otra parte, cuando la cavidad está presente, la temperatura en el bloque sólido, T_S , debe satisfacer la ecuación de difusión de calor. Así, en estado permanente y utilizando la temperatura adimensional $\theta_s = (T_S - T_0) / T_0$, se tiene que:

$$\nabla^2 \theta_s = 0, \quad (3.3)$$

donde $\theta_s \rightarrow \theta_\infty$ lejos de la cavidad, además, se deben satisfacer las condiciones de frontera en la superficie de la cavidad que expresan la continuidad en la temperatura y en el flujo de calor. Estas condiciones son las que acoplan el problema térmico en la roca con el problema térmico en el material dentro de la cavidad.

3.3 Flujo convectivo

Como se mencionó anteriormente, dentro de hendiduras inclinadas embebidas en sólidos [34, 35, 48], un flujo de convección natural debe necesariamente surgir cuando el sólido se encuentra bajo un gradiente vertical de temperatura y la relación de conductividades térmicas no es igual a 1, sin importar que tan pequeño sea el gradiente, siempre que la cavidad no sea ni vertical ni horizontal. El problema del inicio de la convección natural en cavidades cilíndricas verticales se ha estudiado en diversas investigaciones para ambos casos, cavidad llena de fluido [49, 50, 51] y cavidad llena de medio poroso saturado de fluido [52, 53]. Para cada problema corresponde un número de Rayleigh crítico bien definido. De la misma manera, las cavidades horizontales [54] han sido ampliamente analizadas para varias configuraciones de calentamiento, incluyendo los dos casos, la cavidad llena de fluido o llena de medio poroso saturado [55].

Es importante notar que el presente estudio está restringido al caso en el que ambos, la relación de aspecto y el número de Rayleigh son pequeños, y bajo estas condiciones, si la cavidad estuviera horizontal o vertical, de acuerdo con estudios de estabilidad reportados en la literatura [49, 52, 54], no existiría flujo convectivo.

En este análisis se consideran constantes las propiedades del fluido excepto en el término de flotación, donde se usa la aproximación de Oberbeck-Boussinesq. Los casos correspondientes a la cavidad llena de fluido y la cavidad llena de medio poroso saturado se discuten por separado.

3.3.1 Cavidad llena de fluido

Formulación general

El flujo de convección natural dentro de la cavidad obedece a las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, mismas que en forma adimensional son:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{Ra} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\text{Pr}}{G} (\theta_i - \theta_\infty) \mathbf{i}_g, \quad (3.5)$$

$$\text{Ra} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta_i = \nabla^2 \theta_i, \quad (3.6)$$

donde θ_i es la temperatura adimensional en el interior de la cavidad. Las condiciones de frontera son: no deslizamiento, continuidad en el flujo de calor y en la temperatura en la superficie de la cavidad, es decir,

$$\mathbf{u} = 0, \quad \theta_i = \theta_s \quad \text{y} \quad \delta \frac{\partial \theta_i}{\partial n} = \frac{\partial \theta_s}{\partial n} \quad \text{en} \quad r = 1, \quad |x| < 1 \quad \text{y} \quad x = \pm 1, \quad r < 1. \quad (3.7)$$

Aquí, \mathbf{i}_g es el vector unitario que apunta en la dirección de la aceleración de la gravedad, $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_x)$ es el campo de velocidades, P es la presión adimensional modificada que toma en consideración el término hidrostático, Pr y Ra son los números de Prandtl y Rayleigh.

Las variables adimensionales utilizadas están definidas como:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{u_r^* a}{\alpha_f Ra}, \quad u_\phi = \frac{u_\phi^* a}{\alpha_f Ra}, \quad u_x = \frac{u_x^* a}{\alpha_f Ra}, \quad P = \frac{P^* a^2}{\rho \alpha_f^2 Ra}, \\ \theta_i &= \frac{T_i - T_0}{T_0}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha_f}, \quad Ra = \frac{g \beta a^4 |G^*|}{\alpha_f \nu}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

y en términos de las variables adimensionales definidas en 3.1,

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{i}_x \Gamma \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.9)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3.10)$$

Finalmente $\partial/\partial n$ en (3.7) denota la derivada en la dirección normal a la superficie de la cavidad.

Número de Rayleigh cero

Comenzamos la discusión considerando el caso en el que $Ra = 0$, en el cual la ecuación de la energía en la cavidad, (3.6), se simplifica a

$$\nabla^2 \theta_i = 0. \quad (3.11)$$

Las temperaturas en la roca y en la cavidad son de la forma $\theta_s = \theta_\infty - G \cos(\gamma) \cos(\phi) f_1(r, x) + G \sin(\gamma) f_2(r, x)$, y $\theta_i = \theta_\infty - G \cos(\gamma) \cos(\phi) f_3(r, x) + G \sin(\gamma) f_4(r, x)$, respectivamente. Lle-

vando estas expresiones a (3.3) y (3.11) encontramos que

$$\left. \begin{aligned} \nabla_0^2 f_1 - \frac{1}{r^2} f_1 &= 0, \text{ en la roca,} \\ \nabla_0^2 f_3 - \frac{1}{r^2} f_3 &= 0, \text{ en la cavidad,} \\ f_1 &= 0 \text{ cuando } (r, x) \rightarrow \infty, \\ f_1 = f_3, \delta \frac{\partial f_3}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial r} &= 1 - \delta \text{ en } r = 1, |x| < 1, \\ f_1 = f_3, \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \delta \frac{\partial f_3}{\partial x} \text{ en } x = \pm 1, r < 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \nabla_0^2 f_2 &= 0, \text{ en la roca,} \\ \nabla_0^2 f_4 &= 0, \text{ en la cavidad,} \\ f_2 &= 0 \text{ cuando } (r, x) \rightarrow \infty, \\ f_2 = f_4, \frac{\partial f_2}{\partial r} &= \delta \frac{\partial f_4}{\partial r} \text{ en } r = 1, |x| < 1, \\ f_2 = f_4, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \delta \frac{\partial f_4}{\partial x} &= \frac{\delta - 1}{\Gamma} \text{ en } x = \pm 1, r < 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

donde

$$\nabla_0^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (3.14)$$

además, se debe cumplir con la condición adicional de que las funciones f_1 a f_4 deben ser regulares en $r = 0$.

Resolviendo las ecuaciones (3.12) y (3.13) se encontrarían soluciones exactas para los problemas térmicos acoplados en la roca y dentro de la cavidad **para** el caso límite $Ra \rightarrow 0$.

Los problemas (3.12) y (3.13) se pueden simplificar tomando en consideración que en muchos casos de interés práctico, particularmente en el contexto geofísico, las cavidades son muy esbeltas. Cuando Γ es muy pequeño entonces existen dos regiones características, la primera es aquella en la que los fenómenos de transporte ocurren como si Γ fuera cero, y la segunda es la que se localiza cerca de cada uno de los bordes del tubo. En este trabajo el interés está puesto en la primera de estas regiones pues en ella ocurre el flujo principal, y bajo esta aproximación no es necesario analizar las pequeñas regiones alrededor de los bordes. De la ecuación (3.14), se tiene que las soluciones a los problemas (3.12) y (3.13) se pueden simplificar cuando $\Gamma \ll 1$. Entonces los efectos de los bordes quedan confinados a regiones de tamaño característico a alrededor de $x = \pm 1$, y la temperatura alrededor de la cavidad es aquella que corresponde a una

cavidad de longitud infinita. La misma simplificación es útil para el cálculo de la temperatura dentro de la cavidad, entonces $f_1 = (1 - \delta)/(1 + \delta)r$, $f_3 = (1 - \delta)r/(1 + \delta)$, y $f_2 = f_4 = 0$. Así, para el caso límite $Ra = 0$ la temperatura adimensional en el bloque de roca alrededor de la cavidad pero lejos de los bordes es

$$\theta_{s_0} = G \left[\frac{x}{\Gamma} \sin \gamma - \cos \gamma \cos \phi \left(r + \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \frac{1}{r} \right) \right], \quad (3.15)$$

y la temperatura adimensional dentro de la cavidad lejos de los bordes está dada por

$$\theta_{i_0} = G \left[\frac{x}{\Gamma} \sin \gamma - \cos \gamma \cos \phi \left(1 + \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) r \right]. \quad (3.16)$$

Además, es posible determinar soluciones básicas para la presión reducida y la velocidad del flujo convectivo que es inducido en la cavidad por la distribución de temperatura (3.16). Debido a que u_ϕ y u_r son del orden de Γu_x y $\Gamma \ll 1$, el flujo principal es unidimensional y ocurre a lo largo del eje de la cavidad, $u_x = u_x(r, \phi)$. Así, la ecuación (3.5) se reduce a

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{Pr} \nabla^2 u_x + \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{|G|} (\theta_i - \theta_\infty), \quad (3.17)$$

con las condiciones de frontera $u_x = 0$ en $r = 1$, $u_x < \infty$ en $r = 0$, y la condición de flujo neto cero, $\int_0^1 \int_0^{2\pi} u_x r d\phi dr = 0$. La solución de este problema tiene la forma $P = 0$, $u_x = f(r) \cos \phi$. De la ecuación (3.17), se tiene que

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} = \pm \sin \gamma \cos \gamma \frac{1 - \delta}{1 + \delta} r, \quad (3.18)$$

cuya solución con $f(0) < \infty$ y $f(1) = 0$ es $f = \pm \frac{1}{8} \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) r (r^2 - 1)$, así que

$$u_{x_0} = \pm \frac{\sin \gamma \cos \gamma \cos \phi}{8} \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) r (r^2 - 1). \quad (3.19)$$

El signo positivo en la ecuación (3.19) corresponde a gradientes térmicos positivos, $G > 0$, y el signo negativo a gradientes negativos, $G < 0$.

Números de Rayleigh pequeños

Las soluciones anteriores para la temperatura y la velocidad se pueden corregir para considerar el efecto de pequeños valores del número de Rayleigh siempre que $\Gamma \ll 1$. En efecto, cuando Γ es pequeño y $Ra \neq 0$, la ecuación (3.6) se simplifica a

$$\Gamma Ra u_x \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = \nabla^2 \theta_i. \quad (3.20)$$

Para pequeños valores de Ra , esta última ecuación representa un problema de perturbación relacionado con las soluciones básicas encontradas previamente. Existen dos procedimientos sistemáticos para encontrar una solución a través de aproximaciones sucesivas. El primero consiste en proponer una solución formada a partir de una cierta secuencia asintótica, el segundo consiste en la *iteración* a partir de una solución básica aproximada. En el procedimiento de iteración no existe la necesidad de suponer una serie asintótica, por lo que muchas veces este procedimiento resulta más seguro que suponer una cierta expansión. Sin embargo, la iteración tiene la desventaja de poder arrancar sólo si se conoce una aproximación inicial apropiada [56].

Por lo anterior, en lugar de proponer una perturbación en potencias de ΓRa , se emplea la *iteración* como el camino para encontrar una aproximación sucesiva que considere los efectos de primer orden del flujo convectivo sobre la distribución de la temperatura. Para tal fin, se emplean las soluciones básicas, ecuaciones (3.16) y (3.19), para evaluar el lado izquierdo de la ecuación (3.20), y se resuelve nuevamente. Así, dicha ecuación queda de la siguiente manera

$$\pm \frac{1}{8} G Ra \sin^2 \gamma \cos \gamma \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) r (r^2 - 1) \cos \phi = \nabla^2 \theta_i, \quad (3.21)$$

que se resuelve con las condiciones de frontera que expresan la continuidad de la temperatura y el flujo de calor en la superficie de la cavidad. Suponiendo nuevamente que la temperatura en el bloque sólido es de la forma $\theta_s = \theta_\infty - G \cos(\gamma) \cos(\phi) f_1(r)$, y que la temperatura dentro de la cavidad es de la forma $\theta_i = \theta_\infty - G \cos(\gamma) \cos(\phi) f_3(r)$ (cuando $\Gamma \rightarrow 0$), se encuentran las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera apropiadas para las funciones f_1 y f_3 . Entonces, las distribuciones de temperatura adimensional en el bloque de roca y dentro la cavidad cilíndrica son respectivamente:

$$\theta_s = \theta_{s_0} + \lambda \frac{\delta G \cos \gamma \cos \phi}{96(1+\delta)} \frac{1}{r}, \quad (3.22)$$

$$\theta_i = \theta_{i_0} + \lambda G \cos \gamma \cos \phi \left[\frac{(1+2\delta)r}{96(1+\delta)} + \frac{r^3(r^2-3)}{192} \right], \quad (3.23)$$

donde θ_{s_0} and θ_{i_0} son las soluciones de orden cero dadas por (3.15) y (3.16) y λ es un parámetro de convección que toma en consideración el efecto del número de Rayleigh pequeño, y está definido como:

$$\lambda = \text{Ra}G \sin^2 \gamma \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right). \quad (3.24)$$

Por otra parte, la solución corregida para el campo de velocidades inducido en la cavidad por la distribución de temperatura (3.23) es determinada a partir de la ecuación (3.17) con las condiciones de frontera antes mencionadas. Nuevamente, la solución de este problema es de la forma $P = 0$, $u_x = f(r) \cos \phi$. Así, considerando que $\Gamma \ll 1$, $f(0) < \infty$ and $f(1) = 0$, se tiene que

$$u_x = u_{x_0} \pm \frac{\lambda \sin \gamma \cos \gamma \cos \phi r}{768} \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12} - \frac{1+2\delta}{1+\delta} r^2 + \frac{7+19\delta}{12(1+\delta)} \right]. \quad (3.25)$$

Nuevamente, el signo positivo en la ecuación (3.25) corresponde a gradientes positivos, $G > 0$, y el signo negativo a gradientes negativos, $G < 0$.

La Figura 3-2 muestra la distribución de temperatura adimensional escalada con G dentro y alrededor de la cavidad. En todos los casos se muestran los planos $\phi = 0$ y $\phi = \pi$. Esta figura deja ver el efecto que tiene la relación de conductividades térmicas, δ , cuando $\gamma = \pi/4$. Todas las imágenes mostradas corresponden a las soluciones básicas de $\lambda = 0$, las cuales son ligeramente modificadas para valores pequeños de λ . Las isothermas etiquetadas como θ/G corresponden a θ_s/G cuando $r \geq 1$, ecuación (3.15), y a θ_i/G para $r < 1$, ecuación (3.16). Si la conductividad térmica del sólido es muy grande o muy pequeña comparada con aquella correspondiente al material dentro de la cavidad existe entonces un cambio abrupto en las isothermas y la superficie de la cavidad es fácilmente identificada. Bajo estas condiciones el efecto de la cavidad sobre la distribución de temperaturas en la roca se extiende desde la pared de la cavidad hasta distancias

del orden de su radio. Si las conductividades térmicas son del mismo orden ese efecto disminuye y cuando $\delta = 1$ las isothermas son horizontales y no existe convección dentro de la cavidad. Si la conductividad térmica del sólido es menor que la correspondiente al material en la cavidad, $\delta > 1$, el cambio de las isothermas cerca y dentro de la cavidad es opuesto a aquel caso en el que $\delta < 1$, y conforme δ aumenta tales cambios son más evidentes, según se muestra en la Figura 3-2.

La distribución de la velocidad en una sección transversal de la cavidad se presenta en la Figura 3-3 para el caso $\lambda = 0$. Se muestran los contornos de isovelocidad u_x divididos por $\pm \frac{1}{8} \sin \gamma \cos \gamma (1 - \delta) / (1 + \delta)$. Existe un contraflujo dentro de la cavidad y el contorno de velocidad cero se encuentra a la mitad de la sección circular. En la Figura 3-4 se muestran los perfiles de velocidad en los planos $\phi = 0, \pi$ que corresponden a diferentes valores del parámetro λ , el cual mide el efecto del transporte convectivo.

El efecto de la relación de conductividades térmicas δ sobre la magnitud de la velocidad es notable. Si la relación de conductividades térmicas disminuye, la velocidad longitudinal aumenta y alcanza su máximo cuando $\delta \rightarrow 0$. Conforme δ aumenta la velocidad disminuye y cuando $\delta = 1$ no existe flujo convectivo. Si $\delta > 1$, la velocidad longitudinal cambia su sentido y su módulo aumenta con el incremento de δ , tendiendo a un valor máximo cuando $\delta \rightarrow \infty$.

El flujo de calor adimensional, $(\partial\theta_i/\partial r)_{r=1}$, normal a la superficie de la cavidad se puede calcular fácilmente de la ecuación (3.23). El flujo de calor adimensional dividido por $G \cos \gamma$ se presenta en la Figura 3-5, donde se muestra el efecto de la relación de conductividades térmicas para el caso límite $\lambda = 0$. El flujo de calor normal a la cavidad es máximo cuando $\delta \rightarrow 0$ y disminuye conforme δ aumenta, así, cuando $\delta \rightarrow \infty$ entonces $(\partial\theta_i/\partial r)_{r=1} \rightarrow 0$. La Figura 3-2(a) muestra que cuando $\delta \rightarrow 0$ las isothermas experimentan un cambio abrupto sobre la superficie de la cavidad; cuando $\delta = 1$ las isothermas son horizontales pero dado que el eje r no es horizontal entonces $(\partial\theta_i/\partial r)_{r=1} \neq 0$; cuando $\delta \rightarrow \infty$ (el sólido es un conductor pobre de calor) las isothermas dentro de la cavidad son normales a la superficie de la cavidad lo que produce que $(\partial\theta_i/\partial r)_{r=1} \rightarrow 0$, como se puede ver en la Figura 3-2(f).

La Figura 3-6 muestra el flujo de calor adimensional normal a la cavidad para diferentes valores de λ cuando $\delta = 0.1$. Esta figura describe el efecto del transporte convectivo sobre la transferencia de calor a través de la cavidad para pequeños números de Rayleigh. Como

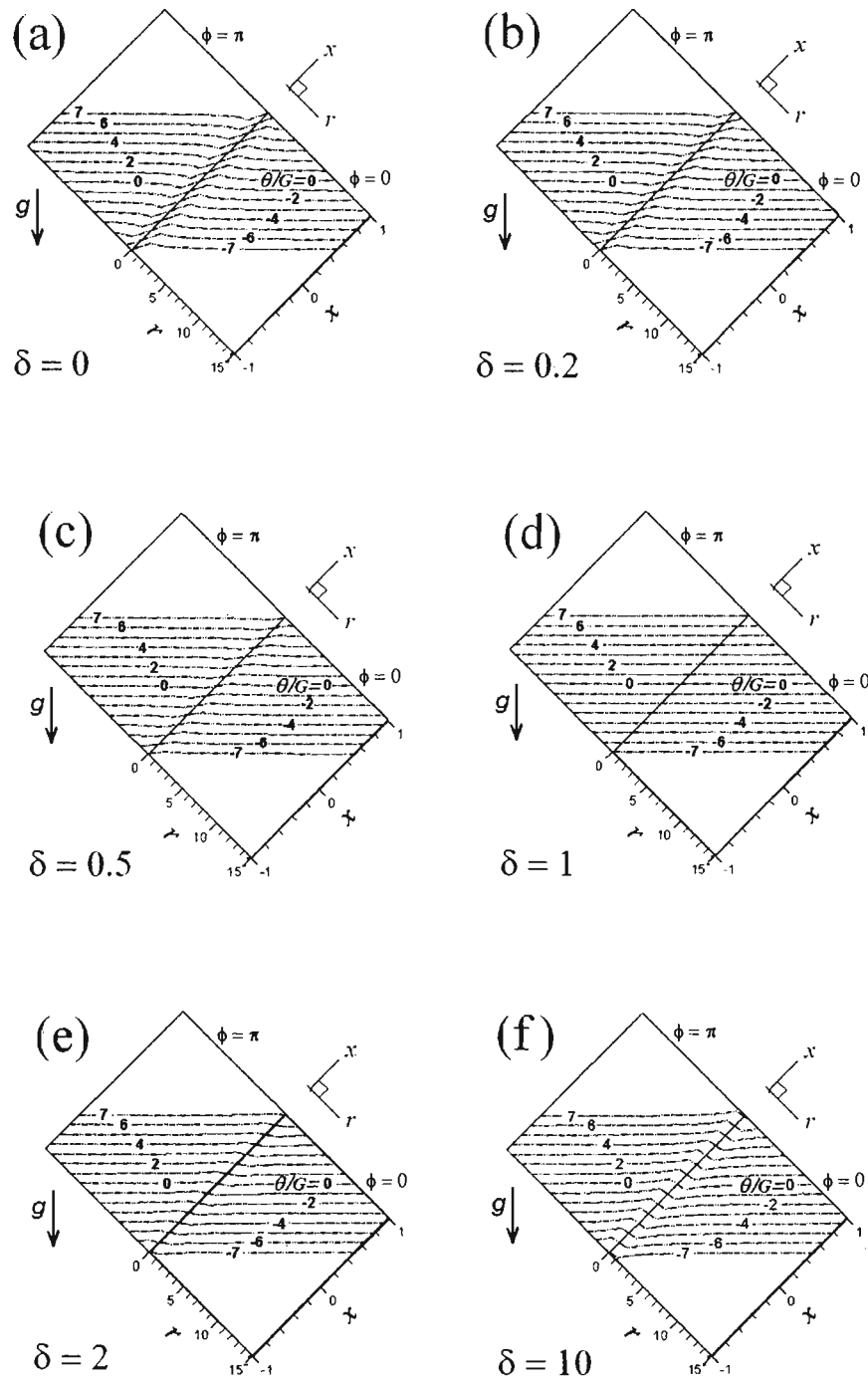


Figura 3-2: Efecto de δ sobre la distribución de temperatura adimensional normalizada con G dentro y alrededor de la cavidad. Estos cortes corresponden a los planos $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, cuando $\gamma = \pi/4$.

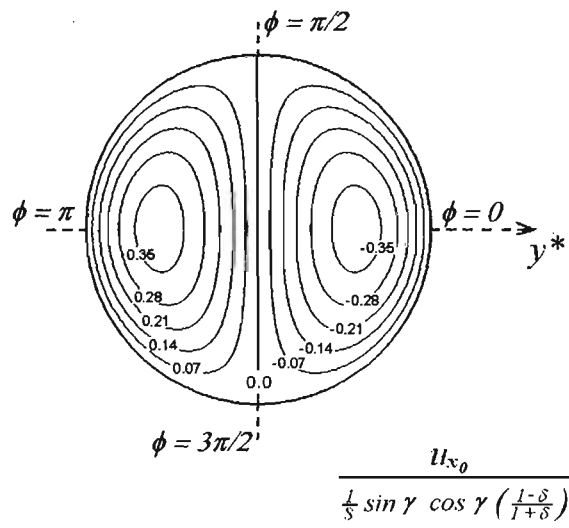


Figura 3-3: Contornos de isovelicidad sobre una sección transversal de la cavidad. Los contornos corresponden a la velocidad longitudinal adimensional u_{x_0} normalizada con $\frac{1}{8} \sin(\gamma) \cos(\gamma) \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)}$.

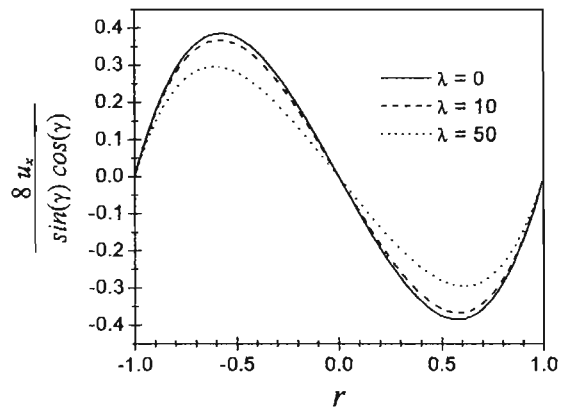


Figura 3-4: Efecto del parámetro de convección λ sobre la velocidad del flujo. Los perfiles de velocidad que se muestran corresponden al plano vertical $\phi = 0$ para casos en los que $G > 0$ cuando $\delta = 0$.

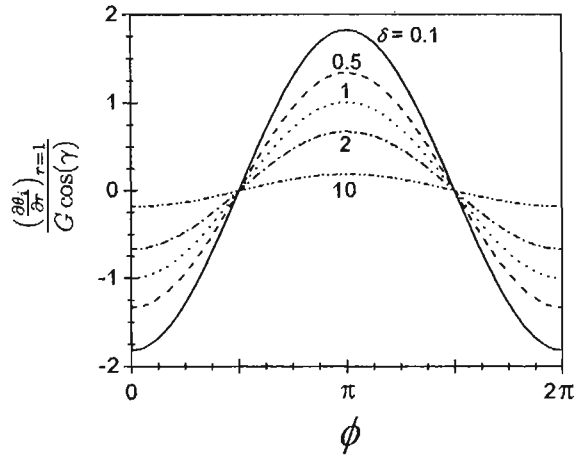


Figura 3-5: Efecto de la relación de conductividades térmicas δ sobre el flujo de calor adimensional local normal a la superficie de la cavidad cuando $\lambda = 0$.

se podría esperar, la transferencia de calor para pequeños valores del número de Rayleigh es ligeramente mayor que la correspondiente a la difusión de calor pura donde $\lambda = 0$.

Cavidades largas en rocas de tamaño finito

Una característica importante del límite asintótico $\Gamma \rightarrow 0$ que ya se ha comentado anteriormente es que la solución en la mayor parte de la cavidad es independiente de las condiciones en los bordes de la cavidad. Esto implica que las distribuciones de temperatura y velocidad calculadas previamente se pueden aplicar a configuraciones menos idealizadas que el caso de una cavidad en una roca ilimitada. Por ejemplo, estos resultados son válidos para una cavidad localizada en el centro de un bloque horizontal de roca para el cual la mitad de su espesor es $H \geq L \sin \gamma$. Si las bases del bloque se mantienen a temperatura constante T_1 y $T_2 = T_1 + \Delta T$, entonces el gradiente térmico vertical lejos de la cavidad es $G^* = \Delta T / 2H$. Este hecho se utilizó en el diseño del modelo experimental empleado para validar la solución analítica de la velocidad dentro del tubo lleno de fluido.

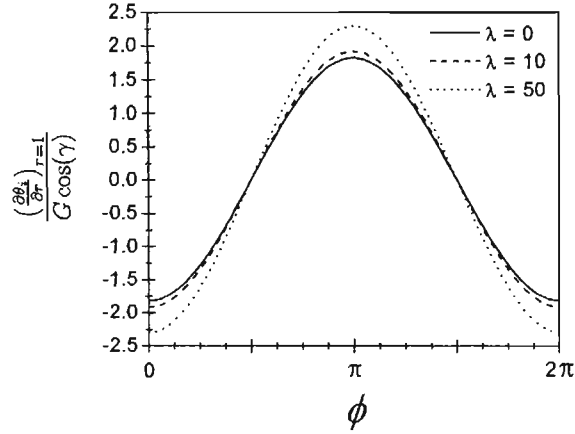


Figura 3-6: Efecto del parámetro de convección λ sobre el flujo de calor adimensional local normal a la superficie de la cavidad cuando $\delta = 0.1$.

3.3.2 Cavidad llena de un medio poroso saturado de un fluido

Formulación general

La convección natural dentro del tubo poroso saturado de fluido se modela con las mismas aproximaciones utilizadas en las capas porosas junto con la aproximación de Boussinesq. Las ecuaciones adimensionales ahora son:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{G} (\theta_i - \theta_\infty) \mathbf{i}_g, \quad (3.27)$$

$$\text{Ra} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta_i = \nabla^2 \theta_i, \quad (3.28)$$

donde \mathbf{i}_g es un vector unitario que apunta en la dirección de la aceleración gravitacional, $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_x)$ es la velocidad de filtración, P es una presión modificada que toma en consideración el término de la presión hidrostática, Ra es el número de Rayleigh, los operadores ∇ y ∇^2 están definidos en las ecuaciones (3.9) y (3.10), y las variables adimensionales están definidas como sigue

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{u_r^* a}{\alpha_{ef} \text{Ra}}, \quad u_\phi = \frac{u_\phi^* a}{\alpha_{ef} \text{Ra}}, \quad u_x = \frac{u_x^* a}{\alpha_{ef} \text{Ra}}, \\ P &= \frac{P^* a K}{\rho \nu \alpha_{ef} \text{Ra}}, \quad \text{Ra} = \frac{g \beta a^2 K |G^*|}{\alpha_{ef} \nu}, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

donde K es la permeabilidad del medio poroso y α_{ef} es su difusividad térmica efectiva.

Número de Rayleigh cero

Al igual que en el caso precedente, la primera aproximación se hace al considerar el caso límite $Ra \rightarrow 0$, entonces la ecuación de la energía en la cavidad porosa, ecuación (3.28), se simplifica al mismo problema definido por la ecuación (3.11), el cual se encuentra acoplado con el problema térmico en la roca, ecuación (3.3), a través de las condiciones de frontera que expresan la continuidad de la temperatura y el flujo de calor en la superficie de la cavidad. Este es exactamente el mismo problema resuelto como la primera aproximación del problema de la cavidad llena de fluido. Consecuentemente, bajo la suposición de que $\Gamma \ll 1$, las soluciones básicas para las distribuciones de temperatura alrededor y dentro de la cavidad porosa son las mismas que se encontraron como la primera aproximación en la sección anterior, ecuaciones (3.15) y (3.16). Entonces, se puede determinar una solución básica para la velocidad de filtración y la presión reducida dentro de la cavidad porosa. Nuevamente u_ϕ y u_r son del orden de Γu_x y $\Gamma \ll 1$, por lo que el flujo principal es unidimensional a lo largo del eje de la cavidad, $u_x(r, \phi)$, y la ecuación (3.27) se reduce a

$$u_x = -\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sin \gamma}{|G|} (\theta_i - \theta_\infty). \quad (3.30)$$

Llevando la solución de la temperatura de la ecuación (3.16) a (3.30) y utilizando la condición de flujo neto de masa cero a través de la cavidad, se encuentra que la solución de este problema debe ser de la forma de $P = 0$, $u = f(r) \cos(\phi)$. Entonces, la solución básica para la velocidad de filtración es

$$u_{x_0} = \mp \sin \gamma \cos \gamma \cos \phi \frac{1 - \delta}{1 + \delta} r. \quad (3.31)$$

El signo negativo en la ecuación (3.31) corresponde a gradientes positivos, $G > 0$, y el signo positivo a gradientes negativos, $G < 0$.

Números de Rayleigh pequeños

Las soluciones básicas se pueden corregir con el objetivo de considerar valores pequeños del número de Rayleigh cuando $\Gamma \ll 1$. Cuando Γ es pequeño y $Ra \neq 0$, la ecuación (3.28) se simplifica al mismo problema definido en la ecuación (3.20). Una vez más se emplea la iteración como el método que permite obtener una aproximación sucesiva que tome en consideración los efectos de primer orden del flujo convectivo sobre la distribución de temperatura. Las soluciones básicas mostradas en (3.16) y (3.31) se emplearon para evaluar el lado izquierdo de la ecuación (3.20), misma que se resolvió nuevamente. De este modo dicha ecuación es

$$\mp Ra G \sin^2 \gamma \cos \gamma \cos \phi \frac{1 - \delta}{1 + \delta} r = \nabla^2 \theta_i, \quad (3.32)$$

con las condiciones de frontera que expresan la continuidad de la temperatura y el flujo de calor en la superficie de la cavidad. Empleando la metodología antes descrita se encuentra que las distribuciones de temperatura adimensional en la roca y en la cavidad son respectivamente

$$\theta_s = \theta_{s_0} + \lambda \frac{G \cos \gamma \cos \phi}{4r} \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right), \quad (3.33)$$

$$\theta_i = \theta_{i_0} + \lambda \frac{G \cos \gamma \cos \phi}{8} \left[\frac{1 + 3\delta}{1 + \delta} r - r^3 \right], \quad (3.34)$$

donde λ obedece a la misma definición de la ecuación (3.24).

La velocidad de filtración corregida que es inducida dentro de la cavidad por la distribución de temperatura (3.34) es determinada a partir de (3.30) con las condiciones de frontera mencionadas anteriormente. Una vez más, la solución de este problema es de la forma $P = 0$, $u = f(r) \cos \phi$. Así, se encuentra que

$$u_x = u_{x_0} \mp \lambda \frac{\sin \gamma \cos \gamma \cos \phi}{8} \left[r^3 - \frac{1 + 3\delta}{1 + \delta} r \right], \quad (3.35)$$

donde el signo negativo corresponde a $G > 0$, y el signo positivo a $G < 0$.

Para valores pequeños de λ , la distribución de la temperatura adimensional dentro y alrededor de la cavidad porosa es muy semejante a la imagen mostrada en la Figura 3-2.

La distribución de la velocidad de filtración adimensional dentro de la cavidad porosa

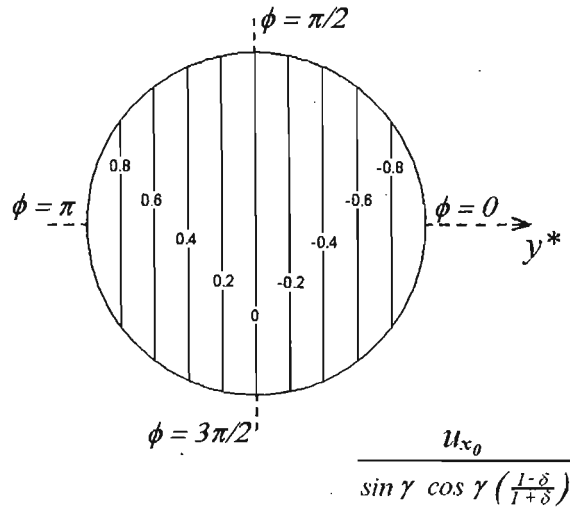


Figura 3-7: Contornos de isovelocidad dentro de la cavidad porosa sobre una sección transversal. Los contornos que se muestran corresponden a la velocidad de filtración adimensional u_{x_0} normalizada con $\sin(\gamma) \cos(\gamma) (1 - \delta) / (1 + \delta)$.

se presenta en la Figura 3-7, donde se muestran los contornos de isovelocidad en una sección transversal de la cavidad para el caso $\lambda = 0$. Los valores numéricos de los contornos en esta figura corresponden a la velocidad de filtración adimensional, u , normalizada con $\sin(\gamma) \cos(\gamma) (1 - \delta) / (1 + \delta)$ cuando $G > 0$. Nuevamente para este caso existe un contraflujo dentro de la cavidad porosa y el contorno de velocidad cero se localiza a la mitad de la sección circular.

En la Figura 3-8 se presentan perfiles de la velocidad de filtración en los planos $\phi = 0, \pi$, lo que permite comparar entre las soluciones básica y corregida para la velocidad. Debido a que el parámetro λ es el que considera el efecto del transporte convectivo, cuando $\lambda = 0$ se recupera la solución básica. Además, cuando la relación de las conductividades térmicas es baja, entonces la velocidad es máxima, y conforme δ aumenta la velocidad disminuye y cuando $\delta = 1$ no existe convección natural. Cuando $\delta > 1$, la velocidad cambia de sentido y su módulo aumenta con el incremento de δ .

Al igual que en el caso de la cavidad llena de fluido, el flujo de calor adimensional normal a la superficie de la cavidad llena de medio poroso es máxima cuando $\delta \rightarrow 0$ y disminuye con el aumento de δ , así, cuando $\delta \rightarrow \infty$ entonces $(\partial\theta_i/\partial r)_{r=1} \rightarrow 0$. La Figura 3-9 muestra

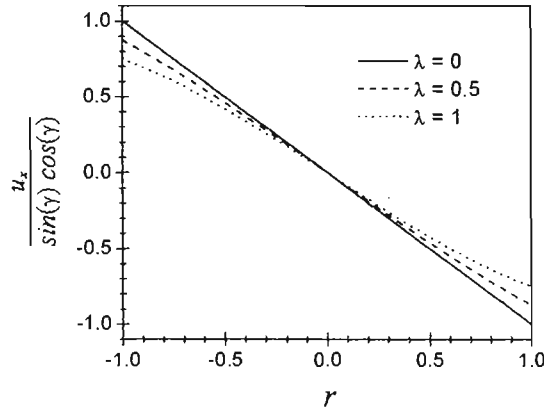


Figura 3-8: Efecto del parámetro de convección λ sobre la velocidad de filtración dentro de la cavidad porosa. Los perfiles de velocidad que se muestran corresponden al plano $\phi = 0$ para los casos $G > 0$ cuando $\delta = 0$.

el flujo de calor adimensional local normal a la cavidad para diferentes valores de λ cuando $\delta = 0.1$. Se observa que la transferencia de calor para pequeños valores del número de Rayleigh es ligeramente mayor que aquella correspondiente a la condición de conducción de calor pura en la que $\lambda = 0$.

3.4 Experimentos en la cavidad cilíndrica llena de fluido

La medición de la velocidad en estado permanente dentro de la cavidad cilíndrica es especialmente compleja para el caso vertical ($\gamma = 0$) debido a la existencia de un número de Rayleigh crítico [49, 50, 52]. Cuando una cavidad esbelta se encuentra inclinada no se presenta esta particularidad y un sencillo experimento permite estudiar la convección natural para pequeños números de Rayleigh. Para tal fin se empleó un bloque cúbico de plexiglas de longitud $2H = 4.7 \times 10^{-2}$ m, provisto con una perforación cilíndrica de radio $a = 2.5 \times 10^{-3}$ m. Debido a que los resultados analíticos encontrados son válidos aún si $H = L \sin \gamma$ cuando $\Gamma \ll 1$, la perforación atravesó el bloque de lado a lado con un ángulo de inclinación $\gamma = 7\pi/18$. De este modo, $2L = 5 \times 10^{-2}$ m y $\Gamma = 0.1$. La superficie interior de la cavidad se pulió cuidadosamente para permitir la visualización de partículas previamente sembradas en el fluido. La conductividad térmica del plexiglas es $k_s = 0.184 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ y el fluido empleado fue aceite silicón cuyas propiedades

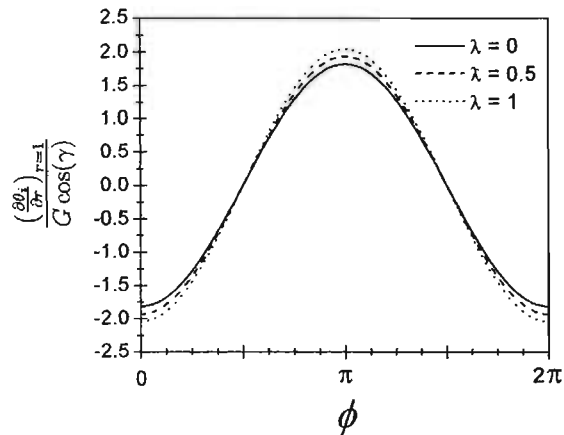


Figura 3-9: Efecto del parámetro de convección λ sobre el flujo de calor adimensional local normal a la superficie de la cavidad porosa cuando $\delta = 0.1$.

son: densidad $\rho = 971 \text{ kg m}^{-3}$, conductividad térmica $k_f = 0.155 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$, coeficiente de expansión térmica $\beta = 0.96 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, difusividad térmica $\alpha_f = 6.65 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y viscosidad cinemática $\nu = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Así, la relación de conductividades térmicas es $\delta = 0.84$.

La distribución de temperatura en el bloque lejos de la cavidad (sobre la superficie del cubo de plexiglas) se midió utilizando una cámara infrarroja ThermoCAMTM PM595. La velocidad del flujo se midió utilizando la técnica de Velocimetría por Imágenes de Partículas (PIV). Para las condiciones estudiadas la velocidad del flujo es muy pequeña por lo que una cámara de video digital convencional fue suficiente para grabar el movimiento de las partículas. Con el objetivo de tener un buen control sobre la región iluminada en el interior de la cavidad, un haz de luz laser se hizo pasar a través de un prisma cilíndrico con lo que se obtuvo una hoja de luz que se introdujo en la cavidad desde la cara superior, como se muestra en la Figura 3-10. Para establecer el gradiente vertical constante de temperatura en el bloque de plexiglas, éste se colocó entre dos placas de cobre a temperatura constante, la placa superior con una temperatura de 295.15 K y la inferior de 299.15 K, mientras que sus paredes verticales se mantuvieron aisladas térmicamente con una cubierta de poliuretano de 0.02 m de espesor. Bajo estas condiciones, el número de Rayleigh y la relación de aspecto, cuyos valores han sido supuestos como pequeños en el análisis teórico, son $Ra = 0.037$ y $\Gamma = 0.1$. El parámetro de convección es entonces

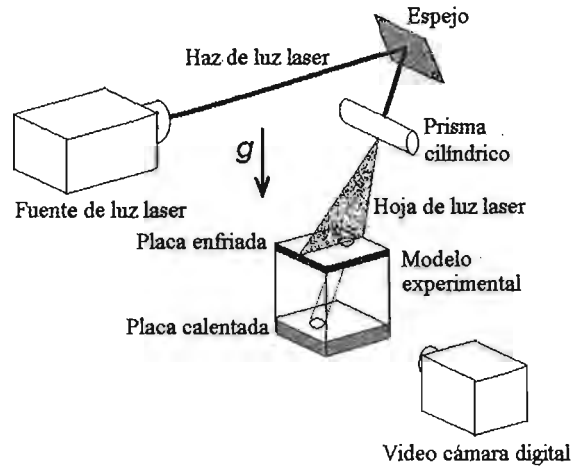


Figura 3-10: Esquema del modelo experimental.

$$\lambda = 8.1 \times 10^{-4}.$$

Algunas horas después de poner en operación el modelo experimental el gradiente térmico vertical se estableció satisfactoriamente, entonces una de las cubiertas de aislante se removió sólo durante el tiempo necesario para tomar una termografía y medir así la distribución de temperatura en la superficie del bloque. Esto permitió comprobar que la distribución de temperatura en el bloque lejos de la cavidad fuera efectivamente la correspondiente a un gradiente de temperatura constante. La Figura 3-11(a) muestra una termografía que deja ver la distribución de temperatura sobre la superficie del bloque de plexiglas. La Figura 3-11(b) presenta los perfiles de temperatura que corresponden a las líneas verticales L1, L2 y L3 de la Figura 3-11(a). Estas imágenes muestran que lejos de la cavidad existe un gradiente de temperatura constante en la dirección vertical, es decir, una variación lineal de la temperatura en la dirección vertical.

Se utilizó un software de PIV de la marca TSI™ para analizar fotografías digitales y determinar la velocidad en el interior de la cavidad. La Figura 3-12 muestra que existe una buena comparación entre la solución analítica y los datos experimentales de la velocidad media temporal en el plano vertical $\phi = 0, \pi$.

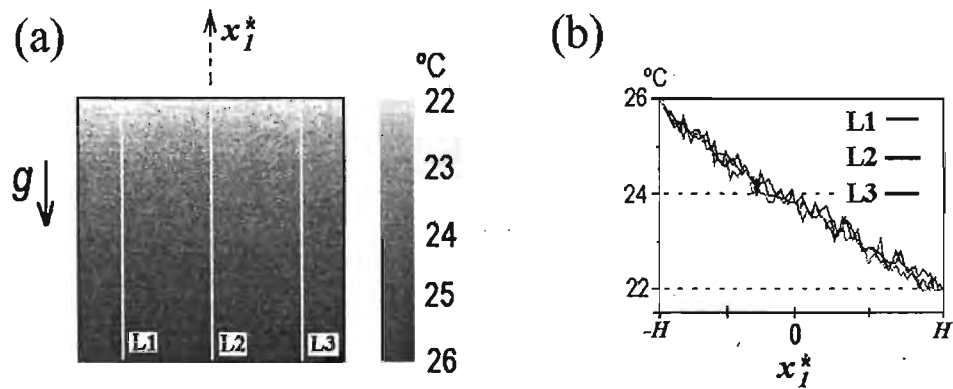


Figura 3-11: (a) Termografía que muestra la existencia de un gradiente de temperatura constante en la dirección vertical en el modelo experimental. (b) Perfiles de temperatura en las líneas L1, L2 y L3 que se muestran en la parte (a).

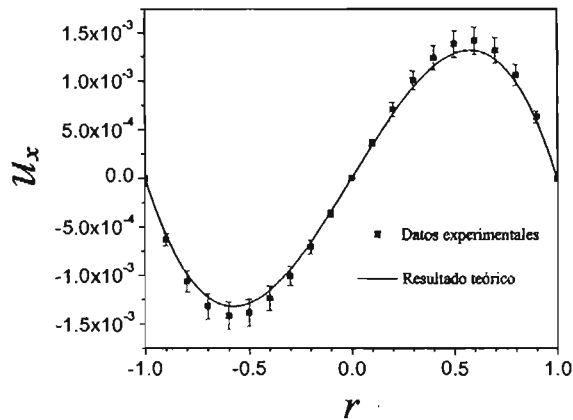


Figura 3-12: Comparación entre los datos experimentales y los perfiles de velocidad teóricos correspondientes a los planos $\phi = 0$ and $\phi = \pi$ (de la ecuación 3.25). Para este caso $\gamma = 7\pi/18$ rad, $Ra = 0.037$, $\Gamma = 0.1$, $\delta = 0.84$, $\lambda = 8.1 \times 10^{-4}$. Las barras de error indican un error de $\pm 10\%$.

Parte II

TRANSPORTE DE UN CONTAMINANTE PASIVO A TRAVÉS DE LAS FRACTURAS

Capítulo 4

Transporte de un contaminante pasivo en fracturas interconectadas simétricamente

El estudio de los flujos que ocurren dentro de capas inclinadas que se encuentran embebidas en rocas nos remite a una considerable cantidad de información acerca de la naturaleza de otros fenómenos que también toman lugar en esos sistemas, entre los más sobresalientes, los procesos de transporte de contaminantes [4, 11]. Los primeros modelos de la dispersión de solutos en corrientes de baja velocidad fueron planteados por Taylor [57] para el caso de una corriente de fluido en el interior de un tubo circular, y por Saffman [58] para el caso de un fluido que se mueve a través de un medio poroso. Desde entonces se han propuesto varios modelos para el estudio de la dispersión de contaminantes en problemas hidrodinámicos, como se puede ver en los textos de Bear [14] y Bear *et al.* [4].

Los trabajos de Woods y Linz [32, 33] se cuentan entre los primeros esfuerzos dirigidos al análisis de la interacción entre los fenómenos térmicos y el transporte de contaminantes dentro de fracturas inclinadas ubicadas en el interior de rocas. En sus investigaciones se analizaron la convección natural y la dispersión de contaminantes que ocurren dentro de capas de longitud infinita. El primero de estos trabajos está dedicado al caso de la fractura llena de fluido y la segundo a el caso de fractura llena de medio poroso saturado. Woods y Linz [32] encontraron que

el transporte de contaminantes que ocurre dentro de una fractura se acelera debido al efecto de la convección térmica. Mostraron que la dispersión es capaz de transportar un material radioactivo, de una vida media de 10^4 años, decenas de metros a lo largo de una fractura, sin dispersión, el material sólo se transportaría por difusión unos cuantos metros a través de la fractura en un lapso de tiempo igual. Linz y Woods [33] también mostraron que dentro de capas porosas bajo condiciones geofísicas, la dispersión no sólo mejora el proceso de difusión del contaminante sino que esparce las partículas de la sustancia pasiva en el fluido. Adicionalmente, estimaron la variación de la porosidad dentro de la fractura como función del tiempo, tomando en consideración el efecto del gradiente geotérmico y el ángulo de inclinación de las fracturas. Otro problema no menos importante en el contexto geofísico es aquel estudiado por Barton [59], en el que se analiza la dispersión de una nube de soluto que se inyecta en una corriente paralela durante un cierto periodo de tiempo.

El caso de una fractura de longitud finita permite demostrar la enorme influencia de las conductividades térmicas de la capa y de la matriz porosa sobre los patrones de flujo. Davis *et al.* [31] y Hewett [27] estudiaron la convección natural en capas con geometrías periódicas suaves con formas sinusoidales, mostrando especial interés en el efecto que se produce cuando existe un contraste importante entre las conductividades térmicas fuera y dentro de las capas. En estos estudios también se describe el fenómeno del cambio de porosidad debido a la presencia de material disuelto en el fluido, proceso conocido como diagénesis.

En esta parte de la investigación se extiende el estudio de las capas conectadas simétricamente del Capítulo 2 al análisis del transporte de un contaminante dentro de dicho sistema. Los resultados obtenidos fácilmente encuentran aplicación en el modelado del transporte de contaminantes pasivos en yacimientos subterráneos. El objetivo de esta etapa es observar el papel que juegan las fracturas gruesas o capas en el transporte de contaminantes cuando la roca que rodea las fracturas tiene una conductividad térmica mucho mayor que el material dentro de éstas. En particular, se analiza el transporte de una sustancia pasiva que se localiza inicialmente en una región pequeña ubicada en el lugar donde las fracturas se conectan entre sí. Se estima qué tan lejos se transporta el contaminante y la rapidez con la que éste entra en el sistema.

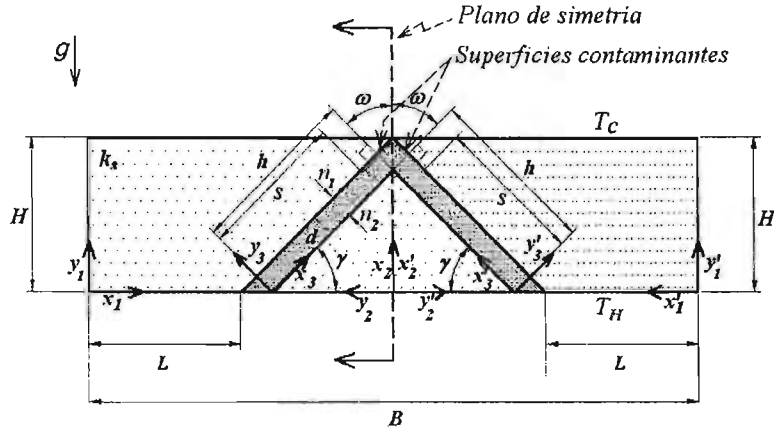


Figura 4-1: Esquema del modelo físico y sistemas de coordenadas

4.1 Definición del problema

El sistema de estudio ya se describió en el capítulo 2, sólomente recordaremos que consiste en una roca con dos capas o fracturas anchas interconectadas simétricamente de ancho d y longitud h , mismas que atraviesan el bloque desde la base superior hasta la inferior con un ángulo γ respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura 4-1.

El transporte de una especie contaminante puede verse acelerado debido a la presencia de flujos macroscópicos. Entonces, existe una superposición de los efectos de la difusión y la convección sobre los fenómenos de transporte.

En el sentido más estricto, el problema que aquí se estudia representa un proceso de doble difusión con convección, por lo que las ecuaciones del transporte del calor y de la masa se encuentran acopladas. Esto ocurre debido a que la densidad del fluido mezclado con la especie contaminante depende de la temperatura y la concentración. Para cambios suficientemente pequeños de temperatura y concentración, la densidad de la mezcla depende linealmente de la temperatura y la concentración, es decir que [2]:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_C) - \beta_C (C^* - C_0)] \quad (4.1)$$

donde C^* es la concentración másica, C_0 es la concentración de referencia, y β_C es el coeficiente de expansión volumétrica por concentración definido como $\beta_C = -(1/\rho) (\partial\rho/\partial C^*)_{T,P}$. La

variación de la densidad con la temperatura y la concentración produce una fuerza de flotación proporcional a $\beta(T - T_C) + \beta_C(C^* - C_0)$. En situaciones en las que las fuentes de calor y contaminación son intensas es necesario utilizar modelos de doble difusión [60]. Sin embargo, cuando los gradientes de concentración son relativamente pequeños ($C^* - C_0 \rightarrow 0$), o la densidad de las sustancias que se mezclan es muy parecida ($\beta_C \rightarrow 0$), la flotación debida al gradiente de concentraciones es despreciable y es posible utilizar la suposición de que el contaminante se comporta como un trazador ideal. Esta aproximación resulta suficiente para muchos propósitos prácticos [14]. En esta investigación se utilizó la suposición de que el contaminante en cuestión se comporta como un trazador ideal, el cual consiste en una sustancia inerte respecto al líquido o sólido que lo rodea y que no afecta las propiedades del líquido (sustancia o contaminante pasivo).

4.2 Transporte de una sustancia pasiva a través de la capa llena de fluido

Debido a que el proceso difusivo interactúa con un flujo macroscópico, la ecuación de transporte del contaminante dentro de la capa de fluido es [2]:

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) C^* = D \nabla^{*2} C^*, \quad (4.2)$$

donde t^* es el tiempo, D es el coeficiente de difusión de la especie contaminante en el fluido, y $\nabla^* = \mathbf{i}\partial/\partial x^* + \mathbf{j}\partial/\partial y^*$. Entonces, puesto que el campo de velocidades es conocido, el transporte del trazador es determinado sin ninguna aproximación.

Se considera que las paredes son impermeables excepto en una pequeña región cercana a la esquina superior donde las capas se conectan una a otra. Se supone que en esta región el trazador pasivo está presente como una superficie contaminante con $C^* = C_{sat}$, donde C_{sat} es la concentración de saturación del contaminante en el fluido. Específicamente, las superficies contaminantes se localizan en las paredes superiores de cada una de las capas interconectadas en $s \leq x_3^* \leq h + d \tan(\omega)$, según se muestra en la Figura 4-1. Bajo estas suposiciones las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} = 0, \text{ en } x_3^* = 0, \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial y_3^*} = 0, \text{ en } y_3^* = 0, d, \quad (4.3b)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial n_3^*} = 0, \text{ en } x_3^* = h + \tan(\omega) \cdot y_3^*, 0 \leq y_3^* \leq d, \quad (4.3c)$$

$$C^* = C_{sat}, \text{ en } s \leq x_3^* \leq h + d \tan(\omega), y_3^* = d. \quad (4.3d)$$

donde ω es el ángulo formado por la vertical y una línea perpendicular a la capa inclinada, ver Figura 4-1.

4.3 Transporte de una sustancia pasiva a través de la capa llena de medio poroso saturado de fluido

Para el caso de la capa llena de un medio poroso saturado de fluido la dispersión del contaminante pasivo es más compleja. El proceso de mezclado se acelera, lo que intensifica el fenómeno de difusión dentro de los pequeños poros de la capa. Un modelo propuesto por Bear [14] sugiere que la ecuación que describe este proceso es:

$$\Phi \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) C^* = \Phi \nabla^* \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla^*) C^*, \quad (4.4)$$

donde, C^* es la concentración másica del contaminante, Φ es la porosidad y \mathbf{D} es el tensor de dispersión. Un modelo para \mathbf{D} que corresponde a medios porosos isotrópicos presentado por Bear [14, 61] conduce a:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_l u^{*2} + \alpha_t v^{*2}}{\Phi |\mathbf{u}^*|} & \frac{(\alpha_l - \alpha_t) v^* u^*}{\Phi |\mathbf{u}^*|} \\ \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u^* v^*}{\Phi |\mathbf{u}^*|} & \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_l v^{*2} + \alpha_t u^{*2}}{\Phi |\mathbf{u}^*|} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

donde α_l y α_t son las dispersividades en las direcciones longitudinal y transversal a la corriente principal, respectivamente, D es el coeficiente de difusión molecular binario en ausencia del medio poroso para el contaminante en el fluido, y τ es la tortuosidad del medio poroso. La dispersividad es una medida de la heterogeneidad del medio poroso y varía con la escala de

medición. En general α_l es mayor que α_t , sin embargo, en este trabajo suponemos que $\alpha_l \approx \alpha_t$, lo que físicamente significa que el medio poroso es idealmente homogéneo en la escala en la que toma lugar el proceso de mezclado [5]. A partir de la ecuación de continuidad se tiene que $v^* \sim \Gamma u^*$, donde $\Gamma \ll 1$, además, como $\alpha_l \approx \alpha_t \approx \alpha_D$, donde α_D es simplemente la dispersividad, entonces \mathbf{D} se simplifica a:

$$\mathbf{D} = \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_D |\mathbf{u}^*|}{\Phi}. \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.4):

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + u_3^* \frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} + v_3^* \frac{\partial C^*}{\partial y_3^*} &= \Phi \left(\frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_D |\mathbf{u}^*|}{\Phi} \right) \left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial x_3^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y_3^{*2}} \right) + \\ &\alpha_D \left(\frac{\partial |\mathbf{u}^*|}{\partial x_3^*} \frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} + \frac{\partial |\mathbf{u}^*|}{\partial y_3^*} \frac{\partial C^*}{\partial y_3^*} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Las condiciones de frontera son la condición de impermeabilidad en las paredes de las capas, además, se supone que el contaminante está en contacto con el interior de las capas porosa en la región cercana a la esquina superior donde la concentración es $C^* = C_{sat}$, las mismas condiciones estudiadas en el problema de la capa llena de fluido, ecuaciones (4.3a).

4.4 Ecuaciones adimensionales

Para el problema del transporte del contaminante a través de la capa llena de fluido existen dos tiempos característicos, t_c , uno de ellos es el relacionado con el proceso difusivo, $t_c = d^2/D$, y el otro es el tiempo convectivo, $t_c = d/u_c$. El presente análisis está enfocado en estudiar el efecto que tiene el movimiento convectivo, por lo que se empleó el tiempo difusivo como tiempo característico, así $t = t^*/(d^2/D)$. La concentración C^* se adimensionalizó con la concentración de saturación del trazador en el fluido, $C = C^*/C_{sat}$. Entonces, la ecuación adimensional para transporte del trazador a través de las capas llenas de fluido es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \Gamma Pe_u \frac{\partial C}{\partial x} + \Gamma Pe_v \frac{\partial C}{\partial y} = \Gamma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (4.8)$$

donde $Pe = u_c d/D$ es el número de Peclet de difusión molecular, el cual representa la relación entre el transporte convectivo y difusivo.

Por otra parte, para el transporte del trazador dentro de la cavidad porosa el tiempo característico de difusión es $t_c = \tau d^2/D$ y el tiempo característico de la convección es $t_c = d/u_c$, así, el tiempo adimensional queda definido como $t = t^*/(\tau d^2/D)$. Entonces, la ecuación adimensional para el transporte del trazador dentro de la cavidad porosa es:

$$\left(\frac{Pe\Gamma}{\Phi}v - \frac{Pe}{\Phi Pe_\alpha} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial y}\right) \frac{\partial C}{\partial y} = \left(1 + \frac{Pe |\mathbf{u}|}{Pe_\alpha \Phi}\right) \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right), \quad (4.9)$$

donde $Pe = \tau u_c d/D$ es el número de Peclet de difusión molecular y $Pe_\alpha = d/\alpha_D$ es el número de Peclet de dispersión.

Para ambos casos, la capa llena de fluido y la capa llena de medio poroso, las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \text{ en } x = 0, \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0, \text{ en } y = 0, 1, \quad (4.10b)$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \text{ en } x = 1 + \varepsilon, 0 \leq y \leq 1, \quad (4.10c)$$

$$C = 1, \text{ en } \frac{s}{h} \leq x \leq 1 + \varepsilon, y = 1, \quad (4.10d)$$

y la concentración inicial dentro de la capa, en $t = 0$, es $C = 0$.

4.5 Método numérico

Las soluciones de las ecuaciones (4.8) y (4.9) requieren de los campos de velocidades dentro de las capas, $\mathbf{u} = (u, v)$, que se determinaron numéricamente en el capítulo 2. Además, para la solución numérica de dichas ecuaciones se requiere definir una malla adecuada para la geometría no rectangular que se analiza aquí. Entonces, se introduce la misma transformación no ortogonal empleada en el problema del flujo del fluido, ecuaciones (2.13a).

Para ambos casos, la capa de fluido y la de medio poroso saturado, la ecuación de transporte

del contaminante es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + R \frac{\partial C}{\partial \xi} + S \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + T \frac{\partial^2 C}{\partial \xi \partial \eta} + U \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} + V \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0. \quad (4.11)$$

Para la capa llena de fluido, las funciones R a V están dadas por las ecuaciones (A.33) a (A.37), y para la capa de medio poroso saturado por las ecuaciones (A.38) a (A.42), respectivamente. En ambos casos, las condiciones de frontera son:

$$\text{Para } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1: \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Para } \xi &= 1 + \varepsilon, 0 \leq \eta \leq 1: \\ 0 &= \left(\frac{\Gamma \cos(-\omega)}{1 + \varepsilon \eta} - \frac{\varepsilon \xi \sin(-\omega)}{1 + \varepsilon \eta} \right) \frac{\partial C}{\partial \xi} + \sin(-\omega) \frac{\partial C}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\text{Para } \eta = 0, 1 \text{ y } 0 \leq \xi \leq 1: \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0, \quad (4.14)$$

$$\text{Para } 0.95 \leq \xi \leq 1, \eta = 1: C = 1. \quad (4.15)$$

donde se ha considerado que las superficies contaminantes se localizan en $\eta = 1$ y $0.95 \leq \xi \leq 1$.

Para el nuevo sistema de coordenadas ξ - η , la geometría no rectangular se transforma en un cuadrado, de tal manera que, $0 \leq \xi \leq 1$, y $0 \leq \eta \leq 1$, lo que permite el uso de una malla simple. Las soluciones numéricas se obtuvieron utilizando diferencias finitas centrales para los términos difusivos, y para los términos convectivos un esquema UPWIND cuando $Pe \geq 3$ y diferencias centrales cuando $Pe < 3$. Se utilizó una malla de 125×30 nodos, y para cada ecuación se empleó como criterio de convergencia un residual menor que 10^{-6} .

4.6 Resultados

4.6.1 Capa llena de fluido

La manera en la que el trazador viaja a través de la cavidad conforme transcurre el tiempo se presenta en la Figura 4-2. Allí se muestra la variación temporal de la concentración promedio transversal, $C_{av} = \int_0^1 C d\eta$, a lo largo de la capa de fluido para dos diferentes valores del número de Peclet, (a) $Pe = 10$ y (b) $Pe = 100$. Se observa que para un mismo tiempo el trazador viaja más lejos cuando Pe es mayor, además, en los dos casos la concentración cerca de la esquina

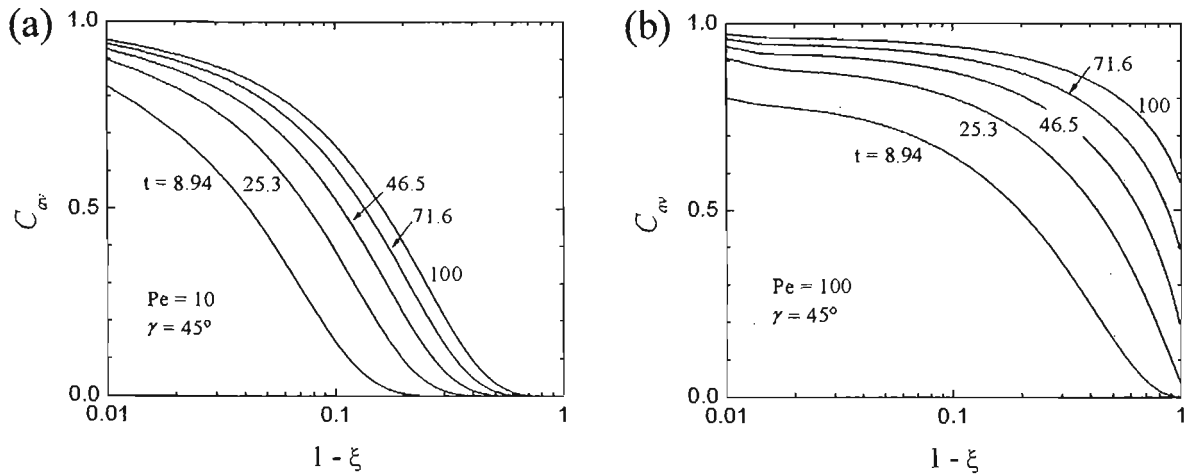


Figura 4-2: Variación temporal de la concentración promedio transversal, $C_{av} = \int_0^1 C d\eta$, dentro de la capa llena de fluido. (a) Cuando la convección es débil, $Pe = 10$. (b) Cuando la convección es dominante, $Pe = 100$. Para ambos casos $\gamma = 45^\circ$. La superficie contaminante se extiende desde $\xi = 0.95$ hasta $\xi = 1$, donde las capas se interconectan mutuamente.

superior (donde $1 - \xi \rightarrow 0$) aumenta con el tiempo. Entonces, el trazador se transporta a lo largo de la capa pero también se acumula cerca de la zona contaminante. Este incremento en C_{av} implica que $\partial C / \partial \eta$ decrece cerca del lugar en el que el trazador entra a la capa, por lo que el flujo másico del trazador a través de la superficie contaminante debe disminuir con t . Adicionalmente, es posible observar que el transporte del trazador a lo largo de la capa es más efectivo al inicio del fenómeno y disminuye con el tiempo como resultado de la acumulación gradual cerca de la esquina superior.

La relación entre los mecanismos convectivo y difusivo del contaminante está dada por el número de Peclet. El efecto de este parámetro sobre el transporte del trazador se muestra en la Figura 4-3. La Figura 4-3(a) presenta cinco condiciones diferentes para el número de Peclet, incluyendo el caso de difusión pura, $Pe = 0$. Todos ellos corresponden a $\gamma = \pi/4$ y al mismo tiempo adimensional, $t = 100$, después de que el transporte del trazador iniciara cerca de la esquina superior. Es claro que con el aumento del flujo convectivo mejora el transporte del trazador a lo largo de la capa, de acuerdo con la ecuación (4.8) el transporte convectivo mejora cuando ΓPe aumenta. A pesar de esta mejora en el transporte debido a la convección, el trazador acumulado cerca de la zona contaminante aumenta ligeramente con Pe . La rapidez

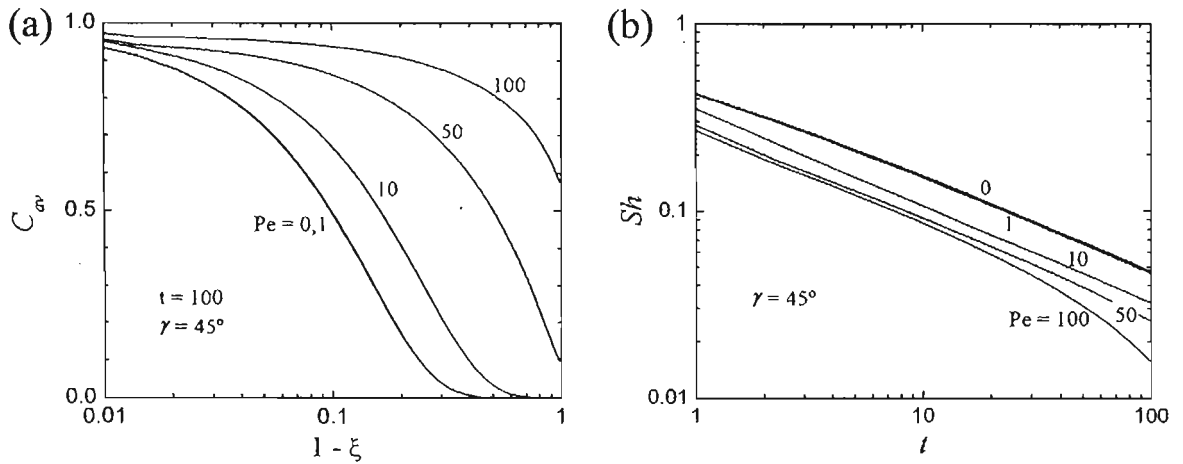


Figura 4-3: (a) Efecto del número de Peclet sobre el transporte del trazador dentro de la capa de fluido. (b) Efecto del número de Peclet sobre el número de Sherwood en la superficie contaminante, Sh . Evolución temporal.

con la que el trazador ingresa al sistema está dada por el número de Sherwood promedio en la superficie contaminante, $Sh = h_D d / D$, donde h_D es el coeficiente convectivo másico del trazador, d es el ancho de la capa y D es el coeficiente de difusión del trazador en el fluido. A partir de la solución numérica es posible determinar el número de Sherwood promedio en la superficie contaminante con la siguiente expresión:

$$Sh = \frac{1}{1 - 0.95} \int_{0.95}^1 \left[-\frac{\partial C}{\partial y} \right] d\xi \quad (4.16)$$

El número de Sherwood disminuye con el tiempo, como se muestra en la Figura 4-3(b), donde se presenta el efecto de Pe sobre Sh . El incremento en el efecto convectivo produce un aumento en el flujo másico a través de la superficie contaminante, sin embargo, con el transcurso del tiempo la concentración del trazador cerca de la superficie contaminante aumenta lo que causa un decremento en $\partial C / \partial \eta$ y consecuentemente Sh disminuye con t , como ya se había previsto. Aunque el movimiento del fluido es más intenso en la región superior, existe una zona de estancamiento en el lugar donde las capas se conectan, la región en donde se localizan las superficies contaminantes. Si éstas estuvieran ubicadas en un lugar en el que la convección es importante el número de Sherwood crecería con el aumento de Pe .

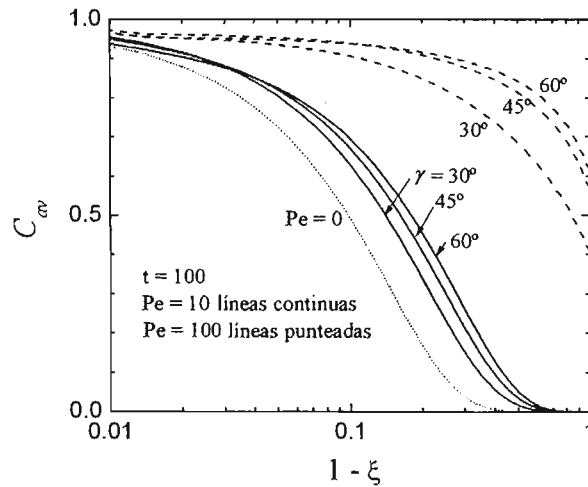


Figura 4-4: Efecto del ángulo de inclinación γ sobre el transporte del trazador. Concentración promedio transversal, C_{av} , en la capa llena de fluido cuando $t = 100$. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente.

El ángulo γ afecta la distribución de temperatura en la roca, el flujo convectivo en las capas, y por consecuencia, el transporte del trazador. Por lo anterior, los campos de velocidades estimados para $\gamma = \pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, se incluyeron en el análisis del transporte del contaminante. La Figura 4-4 muestra la concentración promedio transversal dentro de la capa de fluido para diferentes valores de γ , cuando el tiempo adimensional es $t = 100$. Se muestran los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 10$) y grandes ($Pe = 100$) valores del número de Peclet. La concentración del trazador dentro de la capa aumenta con el incremento del ángulo de inclinación, esto debido a que el movimiento convectivo se vuelve más intenso conforme aumenta γ . Este efecto es más evidente para valores grandes de Pe .

La rapidez con la que el trazador entra al sistema a través de las superficies contaminantes también se afecta con el ángulo de inclinación, como lo muestra la Figura 4-5. El número de Sherwood aumenta con el ángulo de inclinación en ambos casos, convección débil ($Pe = 10$) y convección dominante ($Pe = 100$), Figuras 4-5(a) y 4-5(b), respectivamente. Este efecto se debe a que la cantidad de trazador acumulado cerca de la zona contaminante cambia con el ángulo de inclinación, como se puede observar en la Figura 4-4, donde la menor cantidad de trazador acumulado en $1 - \xi \rightarrow 0$ corresponde a $\gamma = 60^\circ$.

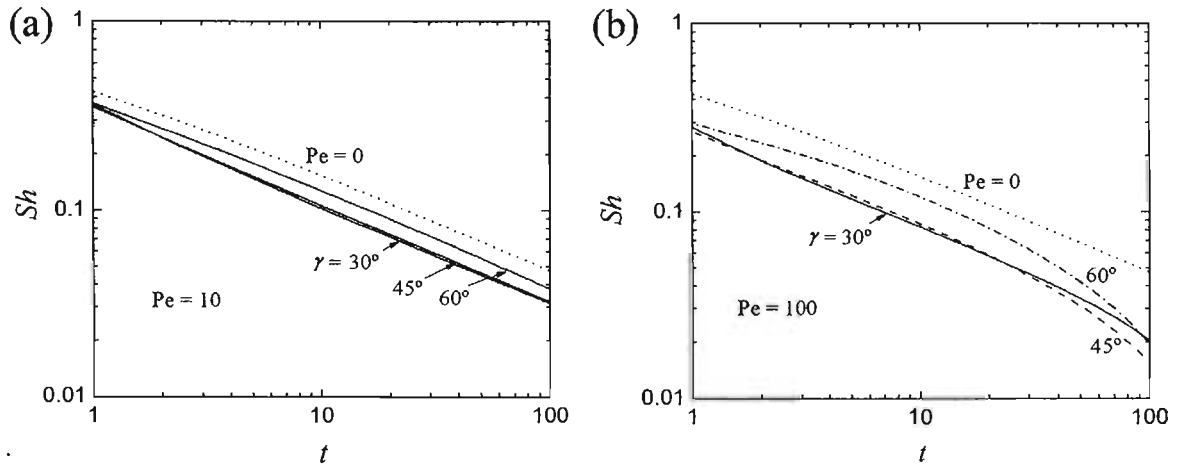


Figura 4-5: Efecto del ángulo de inclinación γ sobre el número de Sherwood en la superficie contaminante. (a) Cuando la convección es débil, $Pe = 10$. (b) Cuando la convección es dominante, $Pe = 100$.

4.6.2 Capa porosa saturada de fluido

El transporte del trazador ideal a través de la capa porosa saturada de fluido tiene dos parámetros importantes a considerar. El primero es el número de Peclet de difusión molecular, Pe , el cual expresa la relación entre el transporte convectivo y el difusivo, y el segundo es el número de Peclet dispersivo, Pe_α , que representa a la dispersión en particular, aquel efecto de mezclado debido a la difusión, a los gradientes locales de velocidad y al mezclado mecánico, todos ellos en la escala de los poros. Debido a la escasez de datos de coeficientes de dispersividad α_D , no es fácil estimar valores adecuados para el número de Peclet dispersivo. Lake [5] presenta una recopilación de mediciones experimentales de coeficientes de dispersividad. En la literatura es común encontrar serias discrepancias entre datos correspondientes a un mismo material, pues éstos dependen también de la longitud característica del volumen de la muestra. Así, para un mismo material pueden medirse dispersividades entre $10^{-2} < \alpha_D < 10^2$ m. En mediciones de laboratorio donde las longitudes características de las muestras son del orden de 1 m las dispersividades reportadas son del orden de 10^{-4} m. Para las condiciones que se estudian en este trabajo se supone que $Pe_\alpha \gtrsim 1$, lo que significa que la dispersividad es igual o menor que la longitud característica d . La dispersión hidrodinámica es el resultado de la dispersión de Taylor debida a las fluctuaciones de la velocidad en las escalas de longitud en las que la

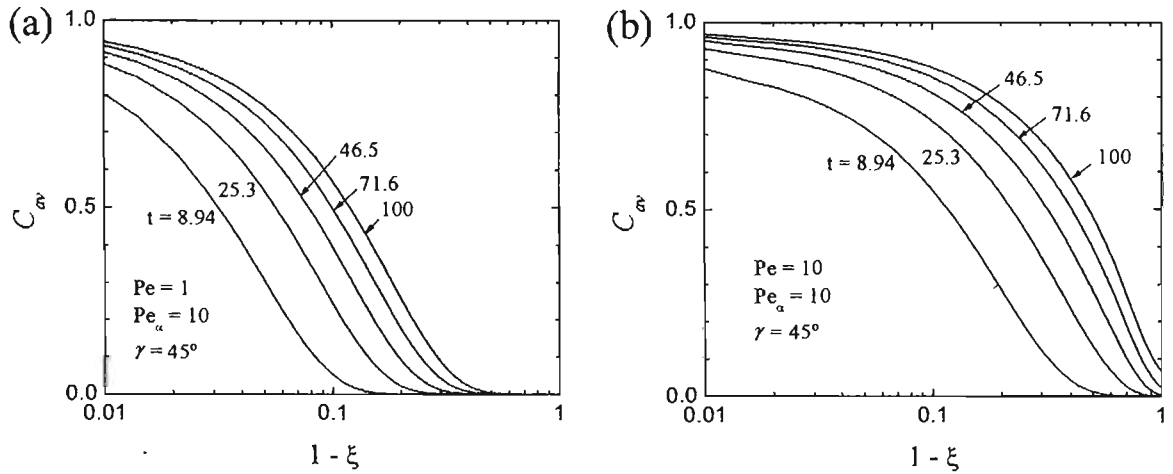


Figura 4-6: Variación temporal de la concentración promedio transversal, $C_{av} = \int_0^1 C d\eta$, dentro de la capa porosa saturada. (a) Cuando la convección es débil, $Pe = 1$. (b) Cuando la convección es dominante, $Pe = 10$. La superficie contaminante se extiende desde $\xi = 0.95$ hasta $\xi = 1$, donde las capas se interconectan mutuamente.

estructura porosa tiene que ser considerada inhomogénea, y puede ser despreciada cuando el número de Peclet característico del medio poroso, $Pe_{hom} = Vl/(D\Phi)$, es pequeño [33]. Aquí V es la velocidad máxima del flujo y l es una longitud típica de homogeneidad de la estructura porosa. Para el caso que nos ocupa $Pe_{hom} = Pe/(\Phi Pe_\alpha)$, entonces, para nuestras condiciones en particular la dispersión hidrodinámica se puede despreciar si $Pe/(\Phi Pe_\alpha) \ll 1$, criterio que también se puede intuir a partir de la información expuesta por la ecuación (4.9).

La Figura 4-6 muestra la manera en la que el trazador viaja a través de la capa porosa conforme transcurre el tiempo. Se muestra la concentración media transversal, $C_{av} = \int_0^1 C d\eta$, dentro de la cavidad porosa para diferentes valores del tiempo adimensional. Con el tiempo el trazador viaja más lejos y la concentración cerca de la esquina superior (donde $1 - \xi \rightarrow 0$) aumenta. Este incremento en C_{av} cerca del lugar donde el contaminante ingresa al sistema causa que el flujo másico a través de las superficies contaminantes disminuya con t , por ello, el transporte del trazador a lo largo de la capa es más efectivo al inicio del fenómeno y disminuye con el tiempo.

La importancia del efecto convectivo sobre el transporte del trazador se presenta en la Figura 4-7. Cinco condiciones diferentes para el número de Peclet, incluyendo la condición de difusión

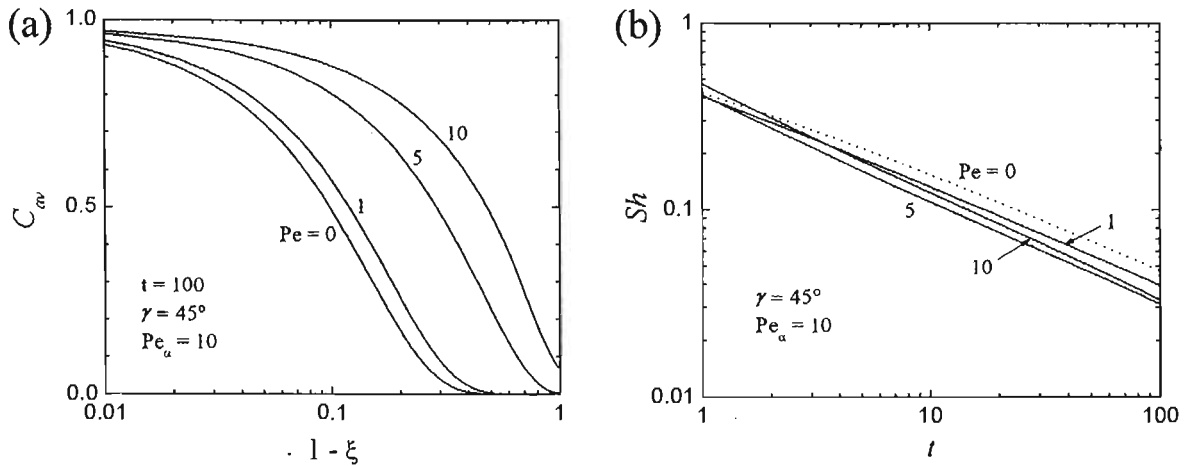


Figura 4-7: Efecto del número de Peclet sobre el transporte del trazador dentro de la capa porosa. (a) Distribución de la concentración cuando $t = 100$. (b) Efecto del número de Peclet sobre el número de Sherwood en la superficie contaminante.

pura ($Pe = 0$), se muestran en la Figura 4-7(a). Todas las curvas corresponden a $\gamma = \pi/4$ y a un tiempo adimensional $t = 100$, después de que el transporte del contaminante ha empezado cerca de la esquina superior. Es notable el efecto que el flujo convectivo tiene sobre el transporte del trazador, de acuerdo con la ecuación (4.9) el transporte por convección mejora cuando $\Gamma Pe/\Phi$ aumenta. Por otra parte, con el incremento del efecto convectivo la cantidad de trazador acumulado cerca de la región contaminante también aumenta. La rapidez con la que éste entra en el sistema (número de Sherwood en las superficies contaminantes, $Sh = h_D d/D$, calculado con la ecuación 4.16) disminuye con el tiempo, como se puede ver en la Figura 4-7(b), donde se muestra el efecto del número de Peclet sobre Sh . El incremento en Pe produce una disminución en el número de Sherwood, una vez más debido a la ubicación de las superficies contaminantes. Ellas están dentro de la región de estancamiento donde las capas se conectan entre sí. El flujo del trazador a través de las superficies contaminantes disminuye con el tiempo como resultado de la acumulación gradual del trazador cerca de la esquina superior, Figura 4-7(a).

La Figura 4-8(a) muestra el efecto del número de Peclet dispersivo, Pe_α , sobre el transporte del trazador. Las líneas continuas y punteadas corresponden a efectos convectivos débiles ($Pe = 1$) y fuertes ($Pe = 10$), respectivamente. Para efectos convectivos débiles el incremento en Pe_α produce una disminución en el transporte del trazador en las capas. Esta parece ser

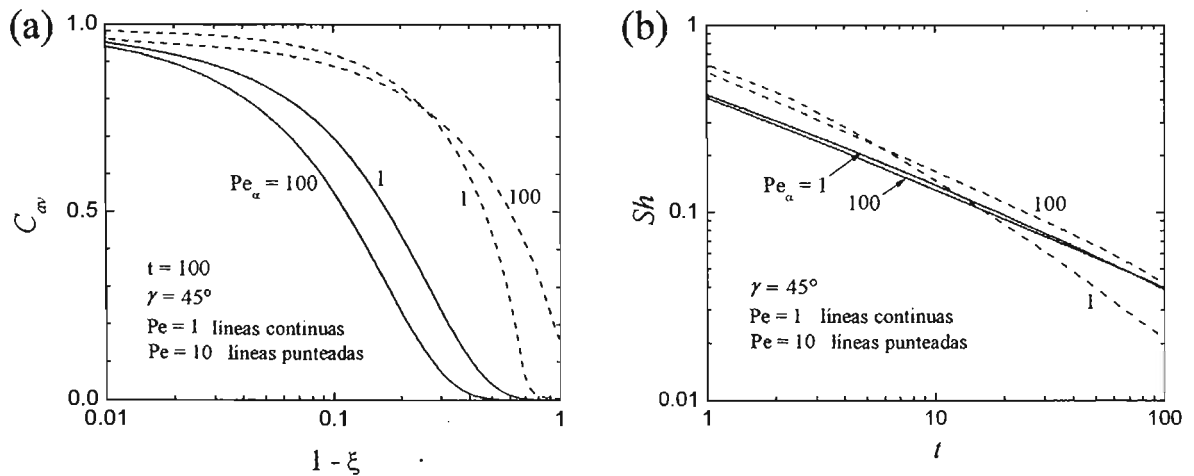


Figura 4-8: Efecto del número de Peclet dispersivo, Pe_α , sobre el transporte del trazador dentro de la capa porosa. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración media transversal cuando $t = 100$. (b) Evolución temporal del número de Sherwood en la superficie contaminante.

una condición para la cual la contribución debida a la difusión es bloqueada por el transporte dispersivo. De hecho, debido a la alta dispersividad, conforme la sustancia pasiva es transportada hacia abajo por la convección, una parte importante de esta sustancia se difunde hacia la corriente que asciende, lo que produce un mecanismo de bloqueo para el transporte global del contaminante. Por otro lado, cuando el mecanismo de transporte es debido principalmente a la convección, $Pe = 10$, el incremento en el número de Peclet dispersivo produce un transporte más efectivo a lo largo de la capa. La concentración promedio transversal cerca de la zona contaminante para valores pequeños de Pe_α es mayor que aquella correspondiente a valores grandes de Pe_α , lo que indica que con la dispersión hidrodinámica disminuye la acumulación del trazador. Entonces, la dispersión hidrodinámica no necesariamente favorece el transporte del trazador a través de la capa porosa, en realidad su efecto depende de las condiciones de la convección.

El efecto dispersivo sobre la rapidez con la que el trazador ingresa a la capa porosa también es muy importante como se puede ver en la Figura 4-8(b). Nuevamente, las líneas continuas y punteadas corresponden a valores bajos y altos del efecto convectivo, respectivamente. Como se podría esperar, el efecto del número de Peclet dispersivo es más importante cuando la convección

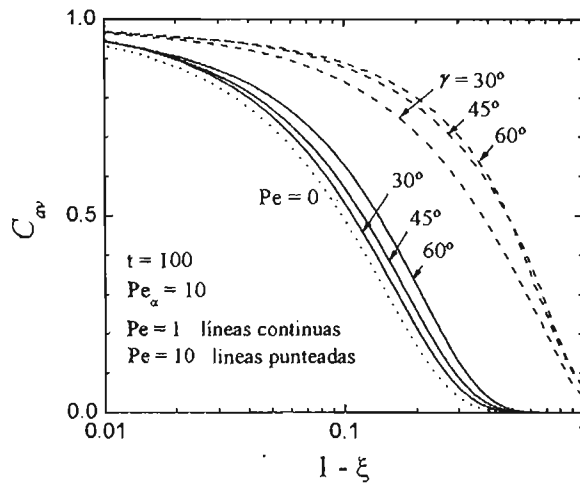


Figura 4-9: Efecto del ángulo de inclinación γ sobre el transporte del trazador en la capa porosa. Se muestra la concentración promedio transversal cuando $t = 100$. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente.

es dominante. En efecto, cuando la convección es débil, el efecto dispersivo sobre el número de Sherwood es pequeño, pero cuando la convección es dominante y el efecto dispersivo es considerable. Al inicio del fenómeno el flujo del trazador a través de la superficie contaminante es más intenso para valores pequeños de Pe_α y disminuye con el tiempo como resultado de la acumulación gradual cerca de la esquina superior. Entonces, para tiempos largos el aumento del efecto dispersivo produce una disminución menor en el número de Sherwood con el transcurso del tiempo.

La Figura 4-9 permite observar el efecto del ángulo de inclinación, γ , sobre los fenómenos de transporte dentro de la cavidad porosa. Se muestra la concentración promedio transversal dentro de la capa para diferentes valores de γ , cuando el tiempo adimensional es $t = 100$. Se presentan los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 1$) y grandes ($Pe = 10$) valores del número de Peclet. La concentración del trazador dentro de la capa aumenta con el incremento del ángulo de inclinación debido a que el movimiento convectivo se vuelve más intenso cuando el ángulo de inclinación crece. Este efecto es más evidente para valores grandes de Pe .

Finalmente, el flujo másico a través de las superficies contaminantes también se modifica con γ , Figura 4-10. El número de Sherwood se altera muy ligeramente con el ángulo de inclinación

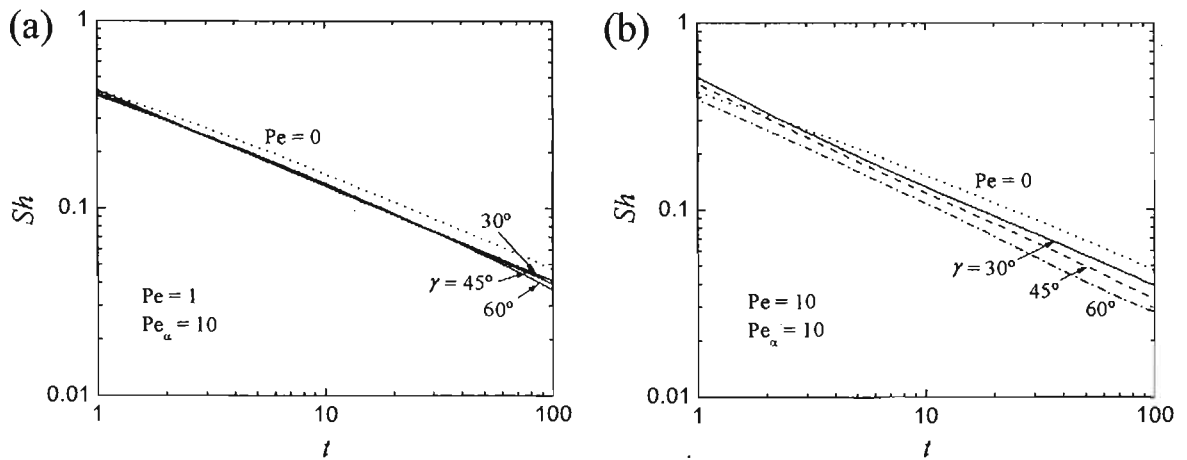


Figura 4-10: Efecto del ángulo de inclinación sobre la evolución temporal del número de Sherwood en la superficie contaminante. (a) Cuando la convección es débil, $Pe = 1$. (b) Cuando la convección es dominante.

cuando el flujo convectivo es débil, pero cuando la convección es dominante el efecto de γ es considerable. La Figura 4-10(a) muestra la disminución del número de Sherwood con el tiempo, además del efecto del ángulo de inclinación cuando la convección es débil, $Pe = 1$, y la Figura 4-10(b) cuando la convección es dominante, $Pe = 10$. En ambos casos Pe_α se mantiene en un valor constante.

Capítulo 5

Transporte de un contaminante pasivo en una cavidad cilíndrica inclinada

El movimiento del fluido que ocurre dentro de las cavidades inclinadas que se encuentran localizadas en el interior de rocas está ligado a procesos de transporte de contaminantes [4, 24]. Cuando se encuentra presente algún contaminante en estos sistemas, su transporte a través de las fracturas se acelera debido al efecto del movimiento del fluido, y en el caso particular de capas porosas en condiciones geofísicas, la dispersión no sólo mejora el proceso de difusión del contaminante sino que diluye las partículas de la sustancia en el fluido [4, 11, 36].

En esta parte de la investigación se extiende el estudio de la convección natural en la cavidad cilíndrica, considerada en el Capítulo 3, al análisis del transporte de un contaminante a través de dicho sistema. Los resultados que se presentan encuentran aplicación en el modelado del transporte de contaminantes pasivos en conductos subterráneos. En esta ocasión se tiene especial interés en la observación del papel que juegan los conductos muy delgados en el transporte de contaminantes cuando la roca que los rodea es impermeable. Específicamente, se analiza el transporte de una sustancia pasiva que se localiza inicialmente en la pared de la cavidad en una región pequeña definida por un anillo localizado al centro de la cavidad. Nuevamente, se estima qué tan lejos se transporta el contaminante y la rapidez con la que éste entra en el sistema cuando

existe un flujo de convección natural en el interior de la cavidad originado por el gradiente térmico vertical que afecta la matriz sólida. En este análisis se incluyen los dos casos estudiados, la cavidad llena de fluido y la cavidad llena de medio porosos saturado.

5.1 Definición del problema

El sistema físico de interés consiste en un bloque horizontal de roca impermeable, de altura $2H$ y conductividad térmica k_s , que contiene una cavidad cilíndrica de longitud $2L$ y radio a localizada en el centro del bloque. La cavidad se encuentra inclinada un ángulo γ respecto a la horizontal, y en el caso general $H > L$, como se muestra en la Figura 3-1(a). El material dentro de la cavidad tiene una conductividad térmica k_f . Las bases del bloque se mantienen a diferentes temperaturas, T_1 y $T_2 = T_1 + \Delta T$, donde en general ΔT puede ser tanto positivo como negativo. Entonces, lejos de la cavidad se produce un gradiente térmico vertical igual a $G^* = \Delta T/2H$, y dentro de la cavidad se induce el movimiento convectivo previamente estudiado.

Nuevamente, en el análisis de este problema se considera que el contaminante se comporta como un trazador ideal, aproximación que resulta suficiente para una amplia variedad de problemas prácticos [14].

5.2 Transporte de una sustancia pasiva a través de la cavidad llena de fluido

Debido a que el proceso difusivo interactúa con un flujo macroscópico, la ecuación de transporte del contaminante dentro de la capa de fluido es:

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) C^* = D \nabla^{*2} C^*, \quad (5.1)$$

donde C^* es la concentración másica, t^* es el tiempo, D es el coeficiente de difusión de la especie contaminante en el fluido. En este caso se hace uso de un sistema de coordenadas cilíndricas. Como se recordará, en el problema estudiado en el Capítulo 3 el flujo convectivo es unidimensional y es función de dos coordenadas espaciales, $u = u(r, \phi)$. Por otra parte, el transporte de la especie es tridimensional. Entonces, la ecuación que modela el transporte del

contaminante dentro de la cavidad cilíndrica llena de fluido es:

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = D \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 C^*}{\partial \phi^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} \right). \quad (5.2)$$

Puesto que el campo de velocidades es conocido, el transporte del trazador es determinado sin ninguna aproximación. Las condiciones de frontera son: superficie de la cavidad cilíndrica impermeable, y además se supone que el contaminante está presente sobre la superficie de la cavidad únicamente en la pequeña región que define un anillo ubicado en la mitad de la cavidad cilíndrica ($x^* = 0$) de ancho $2a$, así como se muestra en la Figura 5-1. Es decir, el anillo de contaminante está ubicado en $r = a$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-a \leq x^* \leq a$. La concentración en la superficie contaminante es $C^* = C_{sat}$, donde C_{sat} es la concentración de saturación del contaminante en el fluido. Además, se supone que inicialmente la cavidad está completamente libre del contaminante, es decir que la concentración inicial dentro de la cavidad es $C^* = 0$. Así, las condiciones de frontera quedan definidas de la siguiente manera:

$$C^* = C_{sat}, \text{ en } r^* = a, -a \leq x^* \leq a, 0 \leq \phi^* < 2\pi, \quad (5.3a)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial r^*} = 0, \text{ en } r^* = a, -L < x^* < -a, a < x^* < L, 0 \leq \phi^* < 2\pi, \quad (5.3b)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial x^*} = 0, \text{ en } x^* = \pm L, 0 \leq r^* \leq a, 0 \leq \phi^* < 2\pi, \quad (5.3c)$$

además de que la concentración debe satisfacer la ecuación de transporte en $r^* = 0$.

5.3 Transporte de una sustancia pasiva a través de la cavidad llena de medio poroso

La dispersión del material pasivo a través de la cavidad cilíndrica llena de medio poroso saturado de fluido también se estima a partir de la velocidad previamente calculada en el problema convectivo. El proceso de mezclado se acelera, lo que mejora el fenómeno de difusión dentro de los pequeños poros. El modelo propuesto por Bear [14], sugiere que la ecuación que describe el proceso de transporte es:

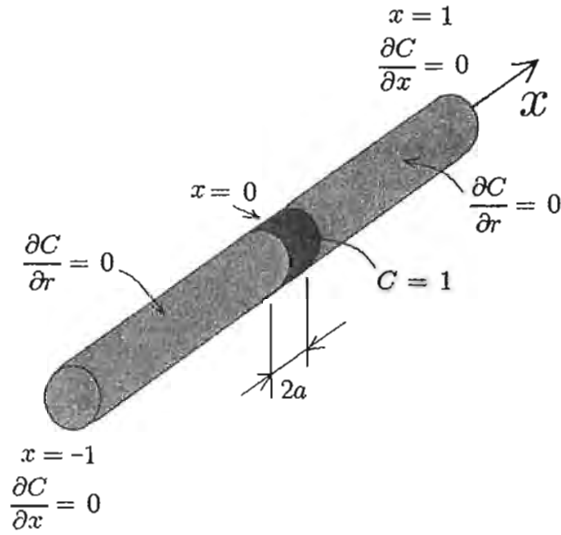


Figura 5-1: Esquema del modelo físico que muestra las condiciones de frontera para el contaminante.

$$\Phi \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) C^* = \Phi \nabla^* \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla^* C^*), \quad (5.4)$$

donde, C^* es la concentración másica del contaminante, Φ es la porosidad y \mathbf{D} es el tensor de dispersión. En coordenadas cilíndricas:

$$\Phi \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = \frac{\Phi}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \mathbf{D} \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\Phi}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \phi^*} \left(\mathbf{D} \frac{\partial C^*}{\partial \phi^*} \right) + \Phi \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mathbf{D} \frac{\partial C^*}{\partial x^*} \right). \quad (5.5)$$

Considerando que la velocidad es unidimensional en la mayor parte de la cavidad cilíndrica, excepto muy cerca de los bordes, el modelo para \mathbf{D} que corresponde a medios porosos isotrópicos presentado por Bear [14, 61] conduce a:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_l u^{*2}}{\Phi |u^*|} & 0 \\ 0 & \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_t u^{*2}}{\Phi |u^*|} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

donde α_l y α_t son las dispersividades longitudinal y transversal, respectivamente, D es el coeficiente de difusión molecular binario en ausencia del medio poroso para el contaminante en

el fluido, y τ es la tortuosidad del medio poroso. Nuevamente suponemos que $\alpha_l \approx \alpha_t \approx \alpha_D$, donde α_D es la dispersividad. Entonces, \mathbf{D} se simplifica a:

$$\mathbf{D} = \frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_D |\mathbf{u}^*|}{\Phi}. \quad (5.7)$$

Sustituyendo la ecuación (5.7) en la (5.5):

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} &= \Phi \left(\frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_D |u^*|}{\Phi} \right) \left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 C^*}{\partial \phi^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} \right) + \\ &\frac{\Phi}{r^*} \left(\frac{D}{\tau} + \frac{\alpha_D |u^*|}{\Phi} + \frac{\alpha_D}{\Phi} r^* \frac{\partial |u^*|}{\partial r^*} \right) \frac{\partial C^*}{\partial r^*} + \frac{\alpha_D}{r^{*2}} \frac{\partial |u^*|}{\partial \phi^*} \frac{\partial C^*}{\partial \phi^*} \\ &+ \alpha_D \frac{\partial |u^*|}{\partial x^*} \frac{\partial C^*}{\partial x^*}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Las condiciones de frontera son la condición de impermeabilidad en las paredes de la cavidad, además, se supone que el contaminante está en contacto con el interior de la cavidad porosa en la región que define el anillo $r = a$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-a \leq x^* \leq a$, donde la concentración es $C^* = C_{sat}$, las mismas condiciones estudiadas en el problema de la cavidad cilíndrica llena de fluido, ecuaciones (5.3a). Además, la concentración debe satisfacer la ecuación de transporte en $r^* = 0$, y se supone que la concentración inicial dentro de la cavidad es $C^* = 0$.

5.4 Ecuaciones dimensionales

Para el problema del transporte del contaminante a través de la cavidad cilíndrica llena de fluido existen dos tiempos característicos, t_c , el primero está el relacionado con el proceso difusivo, $t_c = a^2/D$, y el segundo con el tiempo convectivo, $t_c = a/u_c$. El presente análisis está enfocado en el efecto que tiene el movimiento convectivo, por tal razón se eligió el tiempo difusivo como tiempo característico. Así el tiempo adimensional se define como $t = t^*/(a^2/D)$. La concentración C^* se adimensionalizó con la concentración de saturación del trazador en el fluido, $C = C^*/C_{sat}$. Entonces, la ecuación adimensional que modela la dispersión del contaminante a través de la cavidad llena de fluido es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \Gamma \text{Pe} u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \phi^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (5.9)$$

donde $\text{Pe} = u_c a / D$ es el número de Peclet de difusión molecular, que representa la relación entre el transporte convectivo y difusivo.

Por otra parte, para el transporte del trazador dentro de la cavidad porosa el tiempo característico de difusión es $t_c = \tau a^2 / D$ y el tiempo característico de la convección es $t_c = a / u_c$. El tiempo adimensional queda definido como $t = t^* / (\tau a^2 / D)$. Entonces, la ecuación adimensional para el transporte del trazador dentro de la cavidad cilíndrica porosa es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\Gamma \text{Pe}}{\Phi} u \frac{\partial C}{\partial x} = & \left(1 + \frac{\text{Pe} |u|}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \phi^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) + \\ & \left(1 + \frac{\text{Pe} |u|}{\Phi \text{Pe}_\alpha} + \frac{\text{Pe}}{\Phi \text{Pe}_\alpha} r \frac{\partial |u|}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\text{Pe}}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \frac{1}{r^2} \frac{\partial |u|}{\partial \phi} \frac{\partial C}{\partial \phi} + \\ & \frac{\Gamma^2 \text{Pe}}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \frac{\partial |u|}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde C es la concentración adimensional, t es el tiempo adimensional, Φ es la porosidad, $\text{Pe} = \tau a u_c / D$ es el número de Peclet difusivo, y $\text{Pe}_\alpha = a / \alpha_D$ es el número de Peclet dispersivo.

Para ambos casos, cavidad llena de fluido o llena de medio poroso saturado, las condiciones de frontera de forma adimensional quedan de la siguiente manera:

$$C = 1, \text{ en } r = 1, -\Gamma \leq x \leq \Gamma, 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (5.11a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = 0, \text{ en } r = 1, -1 < x < -\Gamma, \Gamma < x < 1, 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (5.11b)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \text{ en } x^* = \pm 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (5.11c)$$

$$C|_{\phi=0} = C|_{\phi=2\pi}, \text{ en } -1 < x < 1, 0 < r < 1, \quad (5.11d)$$

además, en $\phi = 0, -1 < x < 1, 0 \leq r < 1$, se debe satisfacer la ecuación (5.9) para la cavidad llena de fluido y la ecuación (5.10) para la cavidad llena de medio poroso saturado. La concentración adimensional inicial dentro de la cavidad es $C = 0$.

Las soluciones de estos problemas se obtuvieron discretizando las ecuaciones (5.9) y (5.10)

por medio de diferencias finitas centrales para los términos difusivos, y para los términos convectivos un esquema UPWIND cuando $Pe \geq 3$ y diferencias centrales cuando $Pe < 3$. El problema se resolvió numéricamente con una malla de $21 \times 21 \times 401$, y un residual menor a 10^{-14} fue el criterio de convergencia.

5.5 Resultados

5.5.1 Cavidad cilíndrica llena de fluido

La Figura 5-2 muestra la manera en la que el trazador viaja a través de la cavidad conforme transcurre el tiempo. Allí se muestra la variación temporal de la concentración promedio transversal, C_{av} (donde, $C_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Crd\phi dr$), a lo largo de la cavidad para dos diferentes valores del número de Peclet, (a) $Pe = 100$ y (b) $Pe = 1000$, cuando la inclinación de la cavidad es $\gamma = 45^\circ$.

Debido a la ubicación de la superficie contaminante, en todos los casos la sustancia se transporta hacia arriba ($x > 0$) y hacia abajo ($x < 0$), y por las características del flujo convectivo estas dos secciones interactúan entre sí. La solución numérica muestra que como podría esperarse, las dos secciones se afectan mutuamente de manera semejante; por lo que el flujo neto de la especie a través de la sección en $x = 0$ es igual a cero. Consecuentemente, la distribución de la concentración adimensional promedio transversal, C_{av} , a lo largo de la cavidad es simétrica respecto a $x = 0$. Por esta razón en las gráficas sólo se muestra la distribución para $x > 0$. El trazador viaja más lejos cuando Pe es grande, además, la concentración cerca de la zona contaminante (donde $x \rightarrow 0$) aumenta con t . Este incremento en C_{av} provoca que $\partial C/\partial r$ disminuya cerca del lugar en el que el trazador entra a la cavidad, por lo que el flujo másico del trazador a través de la superficie contaminante debe disminuir con t . Entonces, el transporte del trazador a lo largo de la cavidad es más efectivo al inicio del fenómeno y disminuye con el tiempo como resultado del acumulamiento gradual del trazador cerca de la región contaminante.

La Figura 5-3 muestra el efecto del número de Peclet sobre el transporte del trazador. La Figura 5-3(a) presenta cuatro condiciones diferentes para el número de Peclet, incluyendo el proceso de difusión pura, $Pe = 0$. En todos los casos $\gamma = \pi/4$ y ha transcurrido un tiempo adimensional $t = 10$ después de que el transporte del trazador iniciara cerca de $x = 0$. Es claro

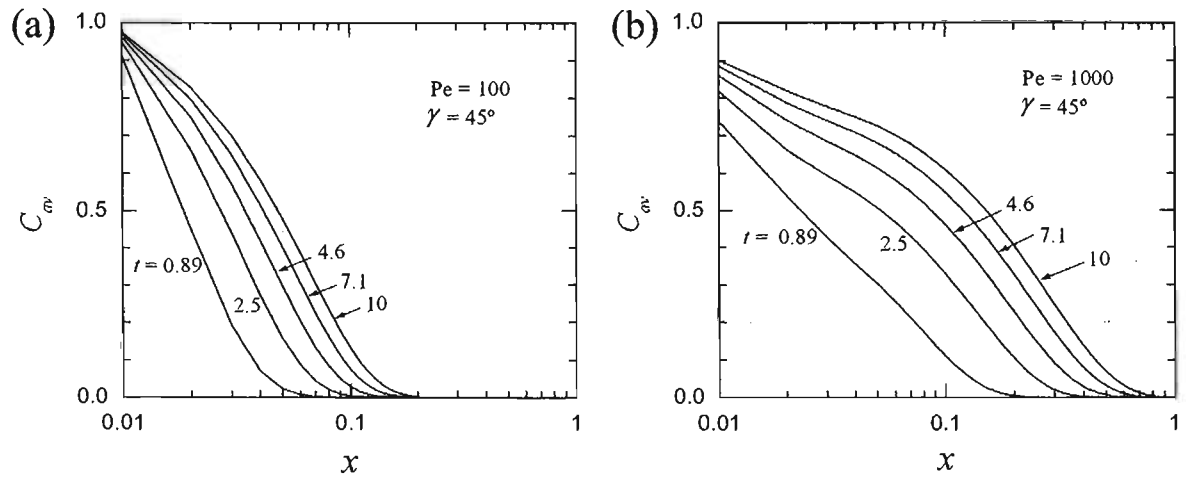


Figura 5-2: Variación temporal de la concentración promedio transversal, $C_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} C r d\phi dr$, a lo largo de la cavidad cilíndrica llena de fluido para dos diferentes valores del número de Peclet, (a) $Pe = 100$ y (b) $Pe = 1000$, cuando la inclinación de la cavidad es $\gamma = 45^\circ$.

que el aumento del flujo convectivo ocasiona que el trazador viaje más lejos, y de acuerdo con la ecuación (5.9) el transporte por convección mejora cuando ΓPe aumenta. Por otra parte, la rapidez con la que el trazador ingresa al sistema está dada por el número de Sherwood promedio en la superficie contaminante, $Sh = h_D a / D$, donde h_D es el coeficiente convectivo másico del trazador, a es el radio de la cavidad y D es el coeficiente de difusión del trazador en el fluido. A partir de la solución numérica es posible determinar el número de Sherwood promedio en la superficie contaminante con la siguiente expresión:

$$Sh = \frac{1}{4\Gamma\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial C}{\partial r} \right] d\phi dx. \quad (5.12)$$

Como se puede intuir de la Figura 5-2, el número de Sherwood disminuye con el tiempo, según lo muestra la Figura 5-3(b), donde se presenta también el efecto de Pe sobre Sh : El incremento en el número de Peclet produce un aumento en el número de Sherwood, además, el decremento de Sh con t es menor cuando Pe es grande debido a que la cantidad de trazador acumulado cerca de la zona contaminante disminuye con el aumento de Pe , como puede verse en la Figura 5-3(a).

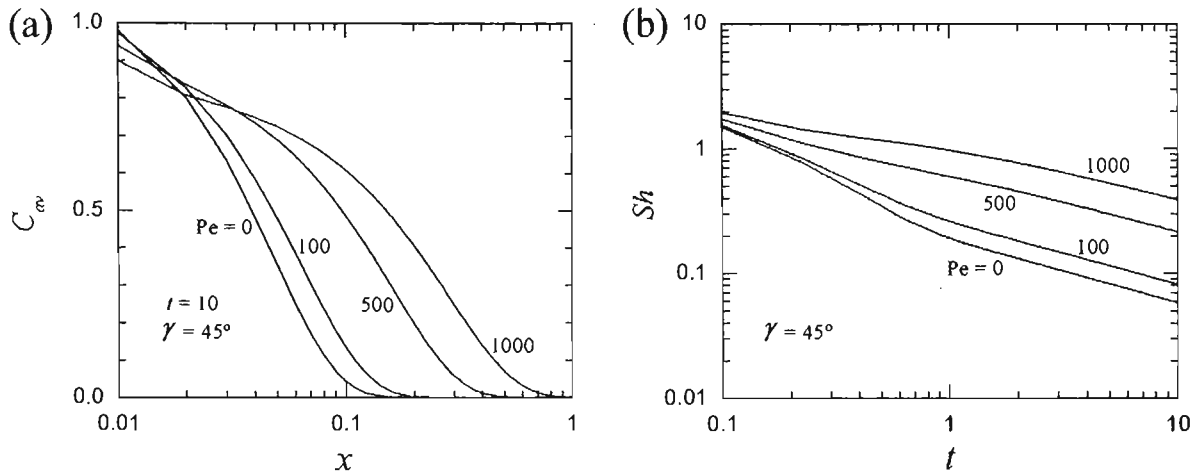


Figura 5-3: Efecto de Pe sobre el transporte del trazador dentro de la cavidad llena de fluido. (a) Concentración promedio trasversal C_{av} a lo largo del tubo lleno de fluido cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood promedio sobre la superficie contaminante Sh .

Como se comentó en el Capítulo 3, el ángulo de inclinación de la cavidad, γ , y la relación de conductividades térmicas fluido-roca, δ , afectan la distribución de temperatura en la roca, el flujo convectivo dentro de la cavidad, y por consecuencia, el transporte del trazador. Por esta razón, en el presente análisis se incluye el efecto de estos parámetros. La Figura 5-4(a) muestra el efecto de γ sobre la concentración promedio trasversal dentro de la cavidad llena de fluido, cuando el tiempo adimensional es $t = 10$. Se presentan los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 100$) y grandes ($Pe = 1000$) valores del número de Peclet. La concentración del trazador dentro de la cavidad aumenta con el incremento del ángulo de inclinación hasta que $\gamma = 45^\circ$, esto debido a que el movimiento convectivo se vuelve más intenso con el aumento de γ hasta que se alcanza $\gamma = 45^\circ$ después del cual el movimiento de convección disminuye. Este efecto es más evidente para valores grandes de Pe . Además, la rapidez con la que el trazador entra al sistema a través de las superficies contaminantes se modifica ligeramente con el ángulo de inclinación, según lo muestra la Figura 5-4(b). El efecto de γ sobre Sh es mínimo cuando la convección débil ($Pe = 100$).

Por otra parte, la Figura 5-5(a) presenta el efecto de δ sobre la concentración promedio trasversal dentro de la cavidad, cuando el tiempo adimensional es $t = 10$. Nuevamente se muestran los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 100$) y grandes ($Pe = 1000$)

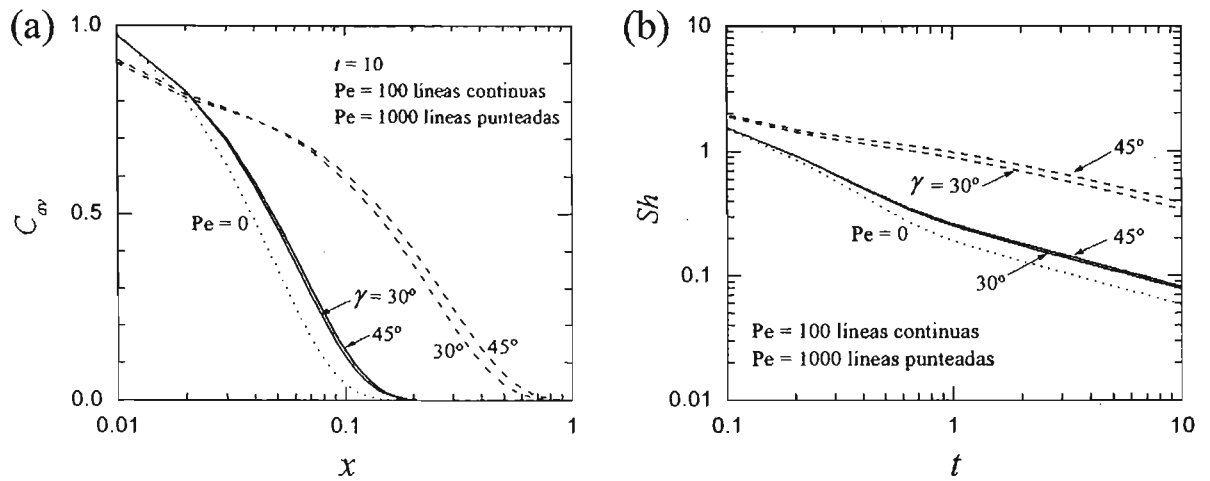


Figura 5-4: Efecto del ángulo de inclinación γ sobre el transporte del trazador dentro de la cavidad llena de fluido. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración promedio transversal C_{av} dentro de la cavidad cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

valores del número de Peclet. La concentración del trazador dentro de la cavidad aumenta conforme disminuye δ , esto debido a que el movimiento convectivo se vuelve más intenso con la disminución de δ . Este efecto es más notable para valores grandes de Pe . Además, el flujo másico a través de las superficies contaminantes también se modifica ligeramente con δ , según se muestra en la Figura 5-5(b). El efecto de δ sobre Sh es pequeño cuando la convección es débil ($Pe = 100$) y aumenta con el incremento del efecto convectivo.

5.5.2 Cavidad cilíndrica llena de medio poroso saturado de fluido

Existen dos parámetros importantes en el análisis del transporte del trazador a través de la cavidad porosa saturada de fluido. El primero es el número de Peclet difusivo, Pe , y el segundo es el número de Peclet dispersivo, Pe_α , que específicamente representa el efecto de mezclado que resulta de la combinación de la convección y la difusión en la escala de los poros. Como ya se mencionó, no es fácil estimar valores adecuados para el número de Peclet dispersivo, sin embargo, en este análisis se supone que $Pe_\alpha \gtrsim 10$. La dispersión hidrodinámica se puede despreciar cuando el número de Peclet característico del medio poroso, $Pe_{hom} = Vl/(D\Phi)$, es pequeño [33]. Aquí V es la velocidad máxima del flujo y l es una longitud típica de homogeneidad de

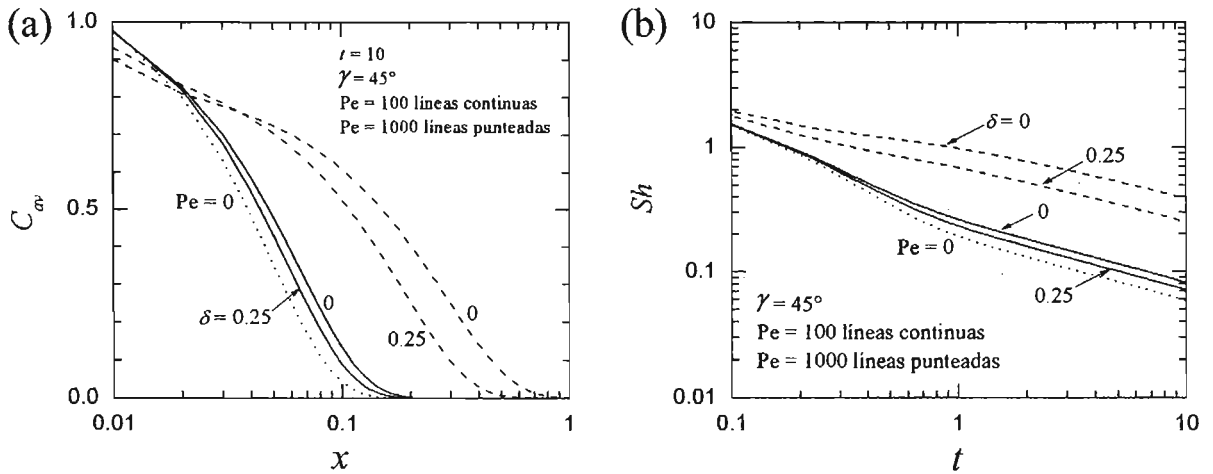


Figura 5-5: Efecto de la relación de conductividades térmicas δ sobre el transporte del trazador dentro de la cavidad llena de fluido. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración promedio transversal dentro de la cavidad cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

la estructura porosa. Para el presente caso $Pe_{hom} = Pe/(\Phi Pe_\alpha)$, entonces, en este problema la dispersión hidrodinámica se puede despreciar si $Pe/(\Phi Pe_\alpha) \ll 1$, criterio que también se puede intuir a partir de la información expuesta por la ecuación (5.10).

La Figura 5-6 muestra la variación temporal de la concentración media transversal, $C_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} C r d\phi dr$, dentro de la cavidad porosa para diferentes valores del número de Peclet, (a) $Pe = 1$ y (b) $Pe = 10$, cuando la inclinación de la cavidad es $\gamma = 45^\circ$. La distribución de la concentración adimensional promedio transversal, C_{av} , a lo largo de la cavidad porosa también es simétrica respecto a $x = 0$, por lo que en las gráficas sólo se muestra la distribución para $x > 0$. La Figura 5-6 deja ver que el trazador viaja más lejos con el transcurso del tiempo, especialmente cuando Pe es grande, además, la concentración cerca de la zona contaminante (donde $x \rightarrow 0$) aumenta con t . Nuevamente, el incremento en C_{av} en aquella zona implica que el flujo másico del trazador a través de la superficie contaminante debe disminuir con el tiempo. Entonces, el transporte del trazador a través de la cavidad es más efectivo al inicio del fenómeno y disminuye con el tiempo.

El efecto del número de Peclet sobre el transporte del trazador se presenta en la Figura 5-7(a). Se muestran cuatro condiciones diferentes para Pe , incluyendo la condición de difusión

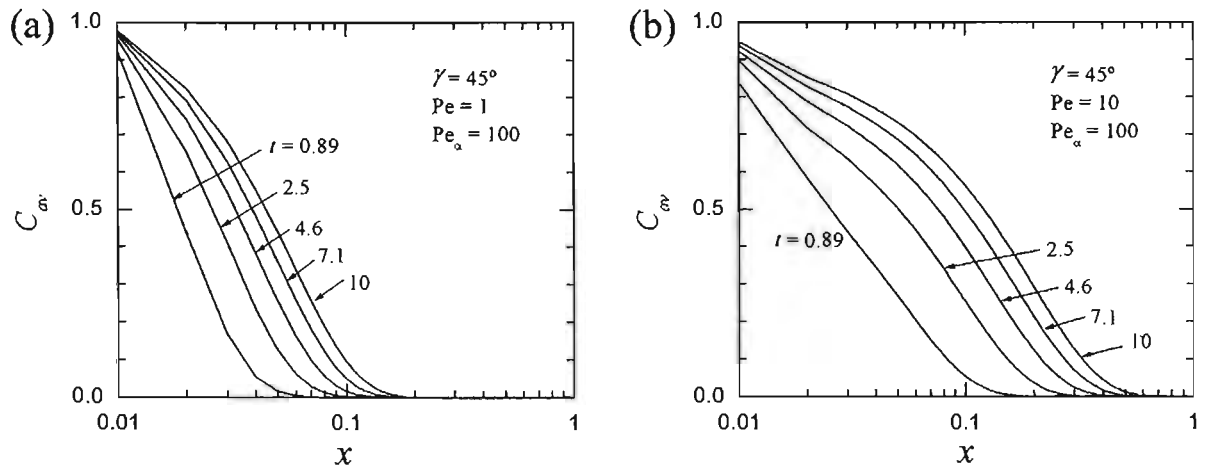


Figura 5-6: Variación temporal de la concentración media transversal, C_{av} , dentro de la cavidad porosa para diferentes valores del número de Peclet. (a) $Pe = 1$. (b) $Pe = 10$. La inclinación de la cavidad es $\gamma = 45^\circ$.

pura ($Pe = 0$). Todas las curvas corresponden a $\gamma = 45^\circ$ y a un tiempo adimensional $t = 10$, después de que el transporte del contaminante ha empezado. El trazador viaja más lejos conforme se incrementa el efecto convectivo, y de acuerdo con la ecuación (5.10) el transporte convectivo mejora cuando $\Gamma Pe / \Phi$ aumenta. La rapidez con la que el trazador entra en el sistema, cuantificada por número de Sherwood en las superficies contaminantes, $Sh = h_D d / D$ (calculado con la ecuación 5.12), disminuye con el tiempo, según se muestra en la Figura 5-7(b). Como ya se comentó, la concentración del trazador cerca de la superficie contaminante aumenta con el tiempo lo que causa una disminución en $\partial C / \partial r$ y consecuentemente Sh disminuye con t . El decremento de Sh con t es menor cuando Pe es grande debido a que la cantidad de trazador que se acumula cerca de la región contaminante disminuye con el incremento de Pe , según se observa en la Figura 5-7(a).

La Figura 5-8(a) muestra el efecto del número de Peclet dispersivo, Pe_α , sobre el transporte del trazador en la cavidad porosa. Las líneas continuas y punteadas corresponden a efectos convectivos débiles ($Pe = 1$) y fuertes ($Pe = 10$), respectivamente. Para efectos convectivos débiles el incremento de Pe_α disminuye ligeramente el transporte del trazador en la cavidad. Por otro lado, cuando el mecanismo de transporte es debido principalmente a la convección, $Pe = 10$, la concentración cerca de la zona contaminante es mayor para valores pequeños de Pe_α

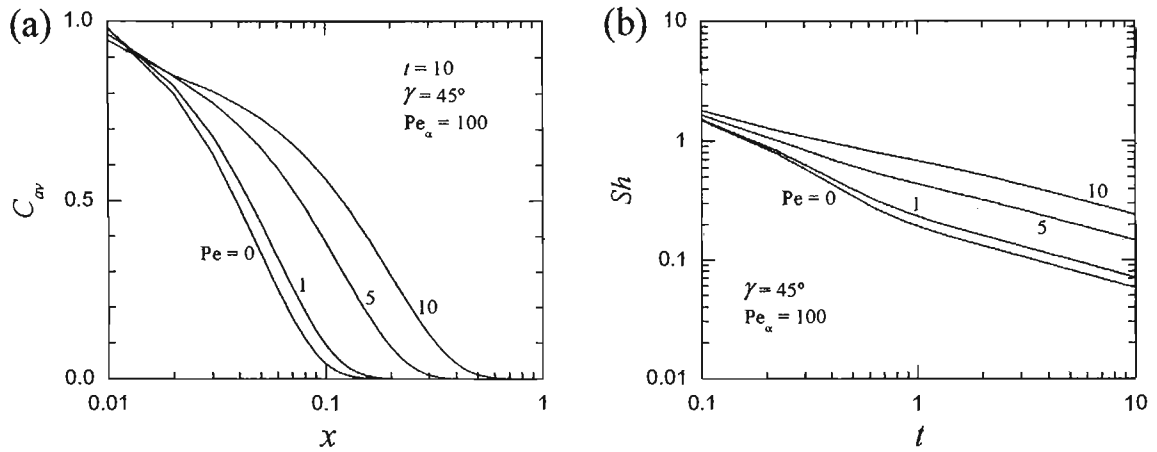


Figura 5-7: Efecto de Pe sobre el transporte del trazador en la cavidad porosa. (a) Concentración media transversal, C_{av} , dentro de la cavidad porosa cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

y menor para valores grandes de Pe_α . Esto indica que cuando la convección es importante la dispersión evita la acumulación del trazador en esa zona. Además, el trazador viaja más lejos para valores grandes de Pe_α , lo que implica que el efecto dispersivo favorece el transporte del contaminante.

Adicionalmente, el efecto dispersivo sobre el flujo del trazador a través de la superficie contaminante es muy importante como se puede ver en la Figura 5-8(b). Nuevamente, las líneas continuas y punteadas corresponden a valores bajos ($Pe = 1$) y altos ($Pe = 10$) del efecto convectivo, respectivamente. Cuando la convección es débil, el efecto dispersivo sobre Sh es pequeño, pero cuando la convección es dominante el aumento de Pe_α evita la acumulación del trazador cerca de la zona contaminante y provoca que la disminución de Sh con el transcurso del tiempo sea menor. Es decir, cuando la convección es dominante el aumento del efecto dispersivo evita que decaiga la rapidez con la que el trazador entra al sistema.

La Figura 5-9 muestra el efecto de la porosidad, Φ , sobre el transporte del trazador. La Figura 5-9(a) presenta la concentración promedio transversal dentro de la cavidad para diferentes valores de Φ , para un tiempo adimensional $t = 10$. Se presentan los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 1$) y grandes ($Pe = 10$) valores del efecto convectivo. La concentración del trazador dentro de la cavidad aumenta con la disminución de Φ , además, el número de

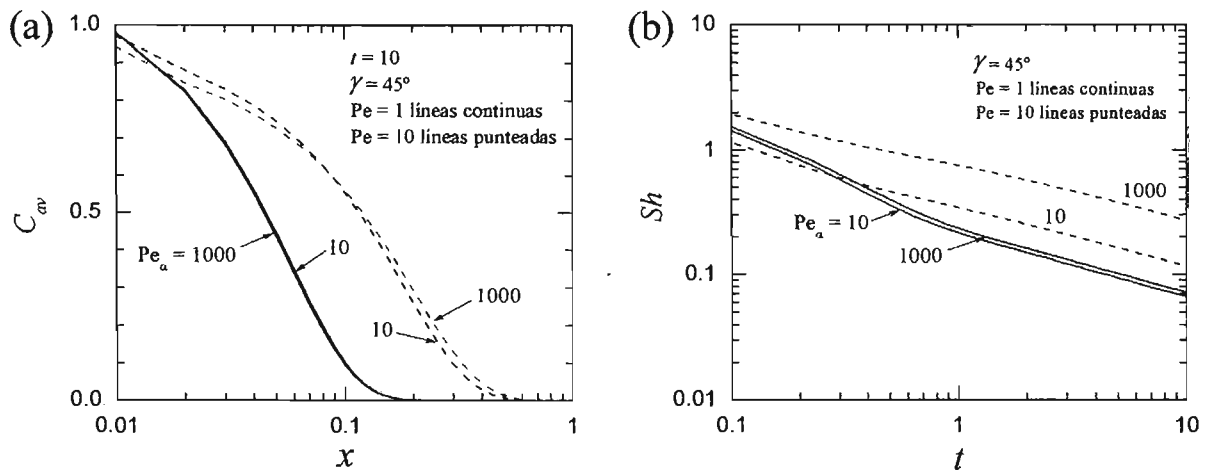


Figura 5-8: Efecto del número de Peclet dispersivo, Pe_α , sobre el transporte del trazador en la cavidad porosa. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración media transversal, C_{av} cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

Sherwood también es mayor para valores pequeños de Φ , Figura 5-9(b). El transporte del trazador mejora debido a que el efecto dispersivo se incrementa con la disminución de Φ , según se puede observar de la ecuación que modela el transporte del contaminante, ecuación (5.10). Así se explica que este efecto sea más evidente cuando la convección es dominante (valores grandes de Pe).

La Figura 5-10(a) muestra la concentración promedio transversal dentro de la cavidad para diferentes valores de γ cuando el tiempo adimensional es $t = 10$. Se presentan los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 1$) y grandes ($Pe = 10$) valores del número de Peclet. Se observa que la concentración del trazador dentro de la cavidad aumenta ligeramente con el incremento del ángulo de inclinación, esto debido a que el movimiento convectivo se vuelve más intenso con el aumento de γ . Este efecto es más evidente para valores grandes de Pe . Además, el ángulo de inclinación afecta muy ligeramente el comportamiento del número de Sherwood promedio en la superficie contaminante. Cuando la convección es dominante el efecto del ángulo de inclinación es ligeramente más notable, Figura 5-10(b).

Finalmente, la Figura 5-11(a) presenta el efecto de la relación de conductividades térmicas, δ , sobre la concentración promedio transversal dentro de la cavidad, cuando el tiempo adimensional

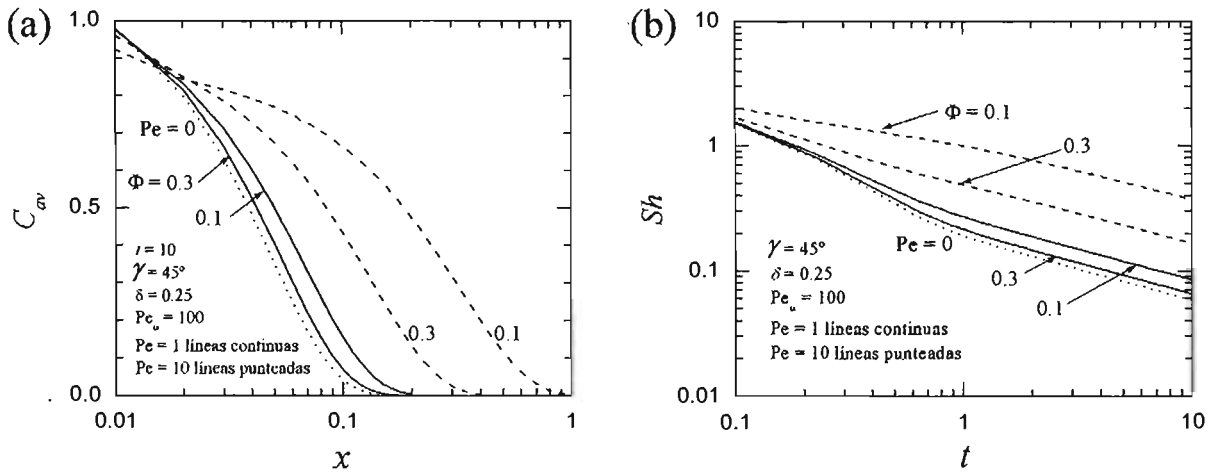


Figura 5-9: Efecto de la porosidad Φ sobre el transporte del trazador en la cavidad porosa. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración media transversal, C_{av} , dentro de la cavidad cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

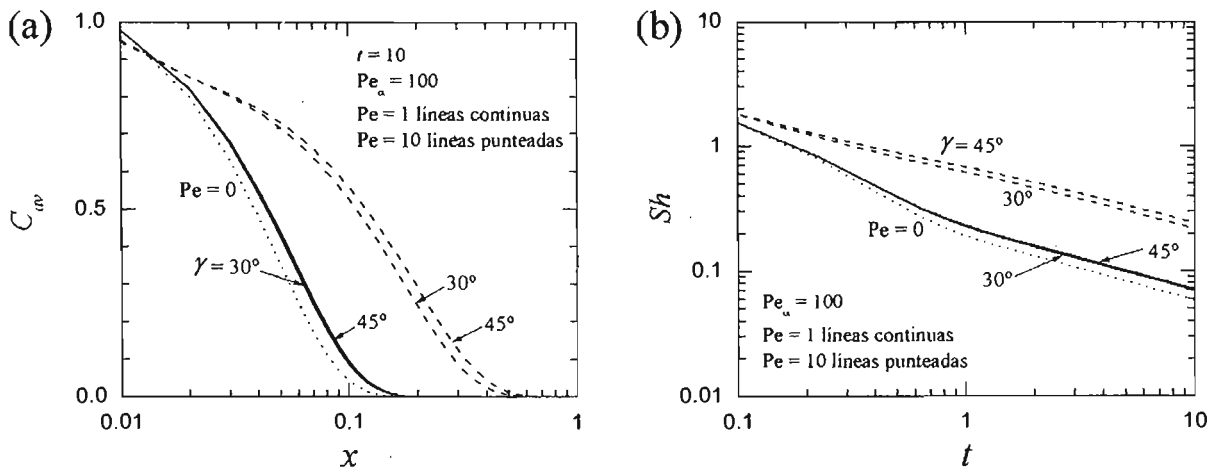


Figura 5-10: Efecto del ángulo de inclinación γ sobre el transporte del trazador en la cavidad porosa. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración media transversal, C_{av} , dentro de la cavidad cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

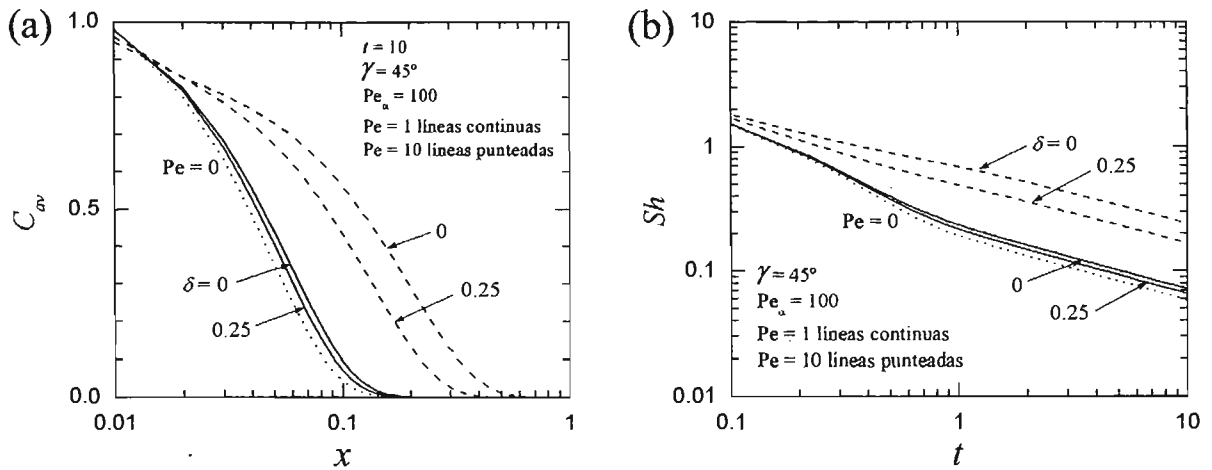


Figura 5-11: Efecto de la relación de conductividades térmicas δ sobre el transporte del trazador en la cavidad porosa. Las líneas sólida y punteada corresponden a efectos convectivos bajo y alto, respectivamente. (a) Concentración media transversal, C_{av} , dentro de la cavidad cuando $t = 10$. (b) Número de Sherwood en la superficie contaminante.

es $t = 10$. Se muestran los casos de difusión pura ($Pe = 0$), pequeños ($Pe = 1$) y grandes ($Pe = 10$) valores del efecto convectivo. La concentración del trazador dentro de la cavidad aumenta conforme disminuye δ , esto debido a que el movimiento convectivo se vuelve más intenso cuando δ es pequeña. Este efecto es más evidente para valores grandes de Pe . Por otra parte, según se muestra en la Figura 5-11(b) el flujo del trazador a través de la superficie contaminante también se modifica con δ . El efecto de δ sobre Sh es pequeño cuando la convección es débil ($Pe = 1$) y aumenta con el incremento del efecto convectivo.

Parte III

**INTERACCIÓN
MATRIZ-FRACTURA**

Parte III

**INTERACCIÓN
MATRIZ-FRACTURA**

Capítulo 6

Interacción entre la matriz porosa y una fractura inclinada

Los fenómenos de transporte en estructuras compuestas por una capa porosa y un medio fluido adyacente, por ejemplo el aire, han sido objeto de una importante cantidad de investigaciones. Estos procesos ocurren en una amplia variedad de aplicaciones industriales entre las que podemos mencionar a los aislantes térmicos, los procesos de filtración, la solidificación dendrítica, el almacenamiento de desechos nucleares, los procesos de secado, o en el contexto ambiental, los sistemas geotérmicos y la contaminación del agua subterránea [62, 63]. El problema básico del modelado se encuentra en el acoplamiento entre las ecuaciones de conservación en ambas regiones, y por lo tanto, en la definición de las condiciones de frontera apropiadas en la interfase fluido-medio poroso. Una descripción exacta de la transferencia de calor y especies que ocurren en este tipo de procesos depende entre otras cosas del modelo de transporte de la cantidad de movimiento en la interfase. Para el estudio de este problema existen dos aproximaciones diferentes generalizadas en su uso. La primera es la *aproximación de dos dominios* y la segunda es la *aproximación de un sólo dominio* [64].

En la aproximación de dos dominios la región del fluido se modela con las ecuaciones de Navier-Stokes mientras que el medio poroso se modela con la ecuación de Darcy. Entonces, debido a la diferencia en el orden de las ecuaciones diferenciales parciales correspondientes a cada región, resulta necesario el uso del término de Brinkman en la ecuación de Darcy. Para

resolver el problema acoplado se necesita una condición de no deslizamiento semiempírica en la interfase [65, 66]. Beavers y Joseph [67] hicieron uno de los primeros esfuerzos por estudiar las condiciones de frontera en la interfase. Por medio de experimentos detectaron la necesidad de una condición de deslizamiento para la velocidad en la interface. Desde entonces varios autores, entre ellos Ochoa-Tapia y Whitaker [68] y Goyeau *et al.* [69], han propuesto una variedad de condiciones de deslizamiento para la región de la interfase. El trabajo de Alazmi y Vafai [64] presenta una descripción de las diferentes condiciones de deslizamiento hasta entonces encontradas en la literatura. Se reportó la existencia de cinco categorías primarias para el flujo del fluido y cuatro categorías primarias para la transferencia de calor en la interfase, además, los autores también mostraron una comparación entre los resultados que se obtienen utilizando las diferentes condiciones de deslizamiento en un mismo problema. La ecuación de Brinkman es una ecuación lineal que contiene una propiedad del medio poroso (la permeabilidad K), de tal forma que la ecuación se reduce a la ecuación de Navier-Stokes cuando $K \rightarrow \infty$ y a la ecuación de Darcy cuando $K \rightarrow 0$, sin embargo, éste modelo ha sido objeto de una extensa crítica controversial [2, 70]. Lo más importante en este punto es mencionar dos limitaciones: la primera, la corrección de Brinkman es sólo significativa cuando el valor de la porosidad es alto, segundo, la viscosidad efectiva que depende de la estructura del material poroso puede diferir de manera importante de la viscosidad del fluido. A pesar de que este último aspecto puede ser importante, en muy pocos estudios se ha tenido el cuidado suficiente para determinar la viscosidad efectiva.

Por otro lado, en la aproximación de un sólo dominio la capa porosa se considera un pseudofluido y toda la región de estudio se trata como un medio continuo. La transición del medio fluido al poroso se alcanza a partir de variaciones espaciales continuas de las propiedades, tal como la permeabilidad en el término de Darcy de las ecuaciones de Navier-Stokes modificadas. En la región del fluido la viscosidad efectiva es igual a la viscosidad del fluido y la permeabilidad es infinita, de tal manera que el término de Darcy es igual a cero y se recuperan las ecuaciones de Navier-Stokes. Cuando la permeabilidad tiene valores finitos, todos los términos que involucran a la velocidad se retienen formalmente pero los términos de Darcy predominan. Esta aproximación ha sido muy utilizada en cálculos numéricos debido a que evita la formulación explícita de las condiciones de frontera en la interfase fluido-medio poroso, en particular, se

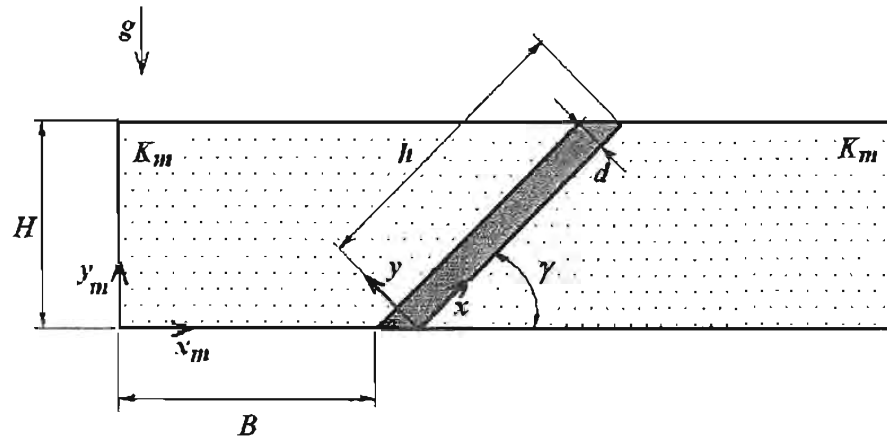


Figura 6-1: Esquema del modelo físico que muestra los sistemas coordenados empleados.

ha logrado una buena comparación con resultados experimentales en problemas de convección natural [71, 72, 73] y convección con doble difusión [74].

En los Capítulos 2 y 3 de esta tesis se impuso la condición de que la matriz es impermeable, sin embargo, también es importante analizar la interacción que puede existir entre una capa inclinada y la matriz de muy baja permeabilidad que la rodea, cuando ésta última se encuentra expuesta a un gradiente vertical de temperatura. Debido a que la porosidad de la matriz es muy baja, la aplicación del término de Brinkman no aparece como una opción para el acoplamiento de las ecuaciones correspondientes a ambas regiones. Entonces, se propone una forma alterna para estimar en primera aproximación el flujo de fluido que toma lugar entre las dos regiones.

6.1 Definición del problema

Se considera el caso de un bloque bidimensional de roca de anchura B y altura H , donde $H \ll B$. Existe una capa de anchura d que atraviesa la roca con un ángulo de inclinación γ respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura 6-1.

Se supone que la conductividad térmica de la roca es k_s y la capa está llena de un material cuya conductividad térmica es k_f . Las bases superior e inferior del bloque se mantienen a temperaturas constantes T_C y $T_H = T_C + \Delta T$, respectivamente, lo que produce un gradiente térmico vertical $G^* = \Delta T/H$ lejos de la capa.

En el presente análisis se calcula el flujo de interacción que existe entre la capa inclinada y la matriz de muy baja permeabilidad. Se estudian dos casos, capa llena de fluido y capa llena de medio poroso saturado de fluido, y al igual que en el problema de las capas conectadas simétricamente, se supone que $\delta \ll 1$ y $\delta/\Gamma \ll 1$, lo que físicamente representan capas gruesas [36, 75].

6.2 Análisis del problema de la interacción capa de fluido-matriz porosa

6.2.1 El problema de la interacción

Las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y de la energía en la capa bidimensional llena de fluido están dadas por las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3). En este caso se ha empleado la aproximación de Boussinesq, en la que se supone que $\rho(T)/\rho_0 = 1 - \beta(T - T_C)$. Además, es importante notar que P^* en (2.2) es la presión reducida dentro de la capa de fluido que considera el término hidrostático, es decir, $P^* = \hat{P}^* + \rho g(x^* \sin(\gamma) + y^* \cos(\gamma))$, donde \hat{P}^* es la presión intrínseca dentro de la capa.

Usando las variables adimensionales definidas en las ecuaciones (2.6), además, definiendo la presión adimensional como $P = P^*/P_c$, donde $P_c = \rho u_c^2$ con $u_c = \alpha_f \text{Ra} \Gamma/d$, se tiene que las ecuaciones adimensionales son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\text{Pr}}{\Gamma^2 \text{Ra}} \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\text{Pr} \sin(\gamma)}{\Gamma^3 \text{Ra}} \theta, \quad (6.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\text{Pr}}{\Gamma^2 \text{Ra}} \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\text{Pr} \cos(\gamma)}{\Gamma^4 \text{Ra}} \theta, \quad (6.3)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma^2 \text{Ra}} \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (6.4)$$

donde $\text{Ra} = g\beta\Delta T d^3/(\alpha_f \nu)$ y $\text{Pr} = \nu/\alpha_f$.

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento dentro de la matriz porosa son:

$$\frac{\partial u_m^*}{\partial x_m^*} + \frac{\partial v_m^*}{\partial y_m^*} = 0 \quad (6.5)$$

$$u_m^* = -\frac{K_m}{\mu} \frac{\partial \hat{P}_m^*}{\partial x_m^*}, \quad (6.6)$$

$$v_m^* = -\frac{K_m}{\mu} \left[\frac{\partial \hat{P}_m^*}{\partial y_m^*} + \rho(T)g \right], \quad (6.7)$$

$$u_m^* \frac{\partial T_m}{\partial x_m^*} + v_m^* \frac{\partial T_m}{\partial y_m^*} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T_m}{\partial x_m^{*2}} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y_m^{*2}} \right). \quad (6.8)$$

donde u_m^* y v_m^* son las componentes de la velocidad de filtración dentro de la matriz porosa, T_m es la temperatura en esa región, α_m es la difusividad térmica efectiva de la matriz porosa y K_m su permeabilidad. Utilizando la aproximación de Boussinesq, las ecuaciones de movimiento (6.6) y (6.7) quedan como:

$$u_m^* = -\frac{K_m}{\mu} \frac{\partial P_m^*}{\partial x_m^*}, \quad (6.9)$$

$$v_m^* = -\frac{K_m}{\nu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_m^*}{\partial y_m^*} - g\beta(T - T_o) \right], \quad (6.10)$$

donde P_m^* en (6.9) y (6.10) es la presión reducida dentro de la matriz porosa que considera el término hidrostático, es decir, $P_m^* = \hat{P}_m^* + \rho g y_m^*$, donde \hat{P}_m^* es la presión intrínseca dentro de la matriz. Observando que $y_m^* = x^* \sin(\gamma) + y^* \cos(\gamma)$, se tiene que la definición de la presión reducida en el interior de la matriz es igual a la definición de la presión reducida dentro de la capa de fluido. Entonces, en la interfase matriz-capa se debe cumplir que $P^* = P_m^*$.

En la zona de la matriz porosa se emplean las siguientes variables adimensionales:

$$x_m = \frac{x_m^*}{L}, y_m = \frac{y_m^*}{H}, u_m = \frac{u_m^*}{u_{cm}}, v_m = \frac{v_m^*}{v_{cm}}, P_m = \frac{P_m^*}{P_c}, \Gamma_m = \frac{H}{L} \quad (6.11)$$

donde u_{cm} y v_{cm} son las velocidades de filtración características dentro de la matriz porosa en las direcciones x_m y y_m , respectivamente. Es importante notar que para poder acoplar la presión en la interface matriz-capa es necesario que la presión en ambas zonas, fractura y matriz, haya sido adimensionalizada de la misma manera. Además, empleando la misma presión

característica P_c en la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento en ambas zonas es posible encontrar la escala de las velocidades dentro de la matriz porosa. Entonces, dentro de la matriz también se utiliza $P_c = \rho\alpha_f^2 Ra^2 \Gamma^2 / d^2$, por lo que las velocidades características en esa región son:

$$u_{cm} = \frac{Da\alpha_f Ra^2 \Gamma^2}{PrL}, \quad (6.12a)$$

$$v_{cm} = u_{cm} \Gamma_m, \quad (6.12b)$$

donde Da es el número de Darcy definido como $Da = K_m / d^2$. Es decir, la velocidad característica dentro de la matriz porosa, u_{cm} , está relacionada con la velocidad característica dentro de la fractura, u_c , de la siguiente manera:

$$u_{cm} = \frac{Da Ra \Gamma^2 \Gamma_m}{Pr \sin \gamma} u_c. \quad (6.13)$$

De esta forma, las ecuaciones adimensionales para el flujo dentro de la matriz porosa son:

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial y_m} = 0 \quad (6.14)$$

$$u_m = -\frac{\partial P_m}{\partial x_m}, \quad (6.15)$$

$$v_m = -\frac{1}{\Gamma_m^2} \left(\frac{\partial P_m}{\partial y_m} - \frac{Pr \sin \gamma}{\Gamma^3 Ra} \theta_m \right), \quad (6.16)$$

$$\frac{Da Ra^2 \alpha_f \Gamma_m^2 \Gamma^2}{Pr \alpha_m} \left(u_m \frac{\partial \theta_m}{\partial x_m} + v_m \frac{\partial \theta_m}{\partial y_m} \right) = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial y_m^2}. \quad (6.17)$$

Para el caso que nos ocupa $Da \sim 10^{-6}$, $Ra \sim 1$, $Pr \sim 10^{-1}$, $\alpha_f / \alpha_m \sim 10^{-2}$, $\Gamma_m \sim 10^{-1}$, $\Gamma \sim 10^{-2}$, por lo que el término $(Da Ra^2 \alpha_f \Gamma_m^2 \Gamma^2) / (Pr \alpha_m)$ en (6.17) es $O(10^{-13})$. Así, es posible suponer que la distribución de la temperatura en la matriz porosa cumple con $\nabla^2 \theta_m = 0$. Entonces, para este caso la distribución de la temperatura en la matriz porosa es igual a aquella que se obtiene cuando la matriz es impermeable. Además, como se puede ver de la ecuación (6.13), cuando Da es muy bajo, el flujo se lleva a cabo principalmente en la capa de fluido mientras que dentro de la matriz porosa el movimiento es mínimo, excepto tal vez cerca de la

capa.

En primera aproximación, este problema puede ser resuelto considerando que la matriz es impermeable, de manera análoga al primer caso tratado en el Capítulo 2. Una vez que se ha resuelto este problema, a partir del campo de velocidades dentro de la capa de fluido es posible determinar la distribución de presión en esa región. Cuando la permeabilidad de la matriz porosa es muy baja, el flujo y la distribución de la presión en el interior de la capa deben ser muy parecidos al caso en el que la matriz es impermeable. Una primera aproximación del flujo que ocurre dentro de la matriz porosa, cuando su permeabilidad es muy baja, se puede obtener empleando la ecuación de Darcy, aplicando las distribuciones de presión y temperatura dentro de la matriz. La distribución de la presión se puede calcular a partir de la ecuación que se deriva de la misma ecuación de Darcy, aplicando también la distribución de temperatura y las condiciones de presión que existen sobre la interface fluido-medio poroso, que en primera aproximación son aquellas obtenidas cuando la matriz es impermeable.

6.2.2 Presión dentro de la fractura de fluido .

De las ecuaciones de continuidad, (6.1), y de la cantidad de movimiento, (6.2) y (6.3), se tiene que dentro de la capa:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = & -\Gamma^2 \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\Gamma^2 \text{Pr}}{\text{Ra}} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\text{Pr} \cos \gamma}{\text{Ra} \Gamma^2} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Para establecer las condiciones de frontera se considera que $P = 0$ en $(x, y) = (1, 1)$. Entonces, como en las paredes de la fractura $u \approx v \approx 0$, de (6.2) se tiene que la presión a lo largo de la pared superior de la fractura (donde $y = 1$) está dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \theta + \frac{\text{Pr}}{\text{Ra} \Gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ en } y = 1, \quad (6.19)$$

y las otras condiciones de frontera en las paredes son:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \theta + \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ en } x = 0, 1, \quad (6.20a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\text{Pr} \cos \gamma}{\text{Ra} \Gamma^2} \theta + \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \text{ en } y = 0. \quad (6.20b)$$

La distribución de la presión sobre las paredes longitudinales (en $y = 0, 1$) son las condiciones de frontera para la presión dentro de la matriz porosa.

6.2.3 Presión dentro de la matriz porosa

De las ecuaciones de continuidad y Darcy, (6.14) y (6.15), (6.16), se tiene que la presión dentro de la matriz porosa está dada por:

$$\Gamma_m^2 \frac{\partial^2 P_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 P_m}{\partial y_m^2} = \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \frac{\partial \theta_m}{\partial y_m}, \quad (6.21)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{En } x_m = 0, u_m = 0, \text{ entonces: } \frac{\partial P_m}{\partial x_m} = 0, \quad (6.22a)$$

$$\text{en la pared derecha : } P_m = P_{\text{conocida}}, \quad (6.22b)$$

$$\text{en } y_m = 0, 1, v_m = 0, \text{ entonces: } \frac{\partial P_m}{\partial y_m} = \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \theta_m. \quad (6.22c)$$

Con el objetivo de definir una malla adecuada para la matriz porosa se introdujo la misma transformación no ortogonal utilizada en el Capítulo 2, esto es:

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= \frac{x_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m}, \text{ donde } \varepsilon_m = \Gamma_m \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \\ \eta_m &= y_m. \end{aligned} \right\} \quad (6.23a)$$

Utilizando el sistema coordenado $\xi_m - \eta_m$, la ecuación para la presión dentro de la matriz porosa es:

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon_m^2 \xi_m}{(1 + \varepsilon_m \eta_m)^2} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} + \left[\left(\frac{\Gamma_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_m \xi_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_m^2} - \\ & \frac{2\varepsilon_m \xi_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_m \partial \eta_m} + \frac{\partial^2 P_m}{\partial \eta_m^2} = - \frac{\text{Pr} \varepsilon_m \xi_m \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3 (1 + \varepsilon_m \eta_m)} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi_m} + \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \frac{\partial \theta_m}{\partial \eta_m} \end{aligned} \quad (6.24)$$

y las condiciones de frontera son:

$$\text{En } \xi_m = 0: \quad \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} = 0, \quad (6.25a)$$

$$\text{en } \xi_m = 1: \quad P_m = P_m(\eta_m), \quad (6.25b)$$

$$\text{en } \eta_m = 0: \quad \frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} - \varepsilon_m \xi_m \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} = \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \theta_m, \quad (6.25c)$$

$$\text{en } \eta_m = 1: \quad \frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} - \frac{\varepsilon_m \xi_m}{1 + \varepsilon_m} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} = \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\text{Ra} \Gamma^3} \theta_m. \quad (6.25d)$$

Entonces con la presión P_m así determinada se calcula la velocidad dentro de la matriz porosa.

6.2.4 Velocidad dentro de la matriz porosa

La velocidad dentro de la matriz porosa está dada por la ecuación de Darcy, (6.15) y (6.16), que en las coordenadas ξ_m - η_m , son respectivamente:

$$u_m = - \frac{1}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} \quad (6.26)$$

$$v_m = - \frac{1}{\Gamma_m^2} \frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} + \frac{\varepsilon_m \xi_m}{\Gamma_m^2 (1 + \varepsilon_m \eta_m)} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} + \frac{\text{Pr} \sin \gamma}{\Gamma_m^2 \Gamma^3 \text{Ra}} \theta_m \quad (6.27)$$

donde la distribución de la temperatura dentro de la matriz θ_m es la solución ya conocida para el caso en el que la matriz es impermeable.

6.3 Análisis del problema de la interacción capa porosa - matriz porosa

6.3.1 El problema de la interacción

Las ecuaciones de movimiento y de la energía en la capa porosa bidimensional están dadas por las ecuaciones (2.4) y (2.3) con α_f sustituida por α_{ef} , la cual es igual a la difusividad térmica efectiva del medio poroso. En este caso se ha empleado la aproximación de Boussinesq, en la que se supone que $\rho(T)/\rho_0 = 1 - \beta(T - T_C)$. Es importante notar que P^* en (2.4) es la presión reducida dentro de la capa porosa que considera el término hidrostático, es decir, $P^* = \hat{P}^* + \rho g(x^* \sin(\gamma) + y^* \cos(\gamma))$, donde \hat{P}^* es la presión intrínseca dentro de la capa.

Usando las variables adimensionales definidas en las ecuaciones (2.6), además, definiendo la presión adimensional como $P = P^*/P_c$, donde $P_c = \mu h u_c / K$ con $u_c = \alpha_{ef} Ra / d$, se tiene que las ecuaciones adimensionales dentro de la capa porosa son

$$u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \sin(\gamma)\theta \quad (6.28)$$

$$v = -\frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\cos \gamma}{\Gamma} \theta \quad (6.29)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma Ra} \left(\Gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (6.30)$$

donde $Ra = g\beta\Delta T K d / (\alpha_{ef}\nu)$ y $Pr = \nu / \alpha_{ef}$.

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento dentro de la matriz porosa son (6.9) y (6.10), en las que también se ha utilizado la aproximación de Boussinesq, y donde $P_m^* = \hat{P}_m^* + \rho g y_m^*$. En vista de que $y_m^* = x^* \sin(\gamma) + y^* \cos(\gamma)$, se tiene que la definición de la presión reducida en el interior de la matriz es igual a la definición de la presión reducida dentro de la capa porosa. Entonces, en la interfase matriz-capa se debe cumplir que $P^* = P_m^*$.

En la zona de la matriz porosa se emplean las variables adimensionales definidas en (6.11). Empleando la misma presión característica P_c en las ecuaciones de movimiento correspondientes a las dos zonas, capa porosa y matriz, es posible encontrar la escala de las velocidades dentro de la matriz. Se tiene entonces que $P_c = \mu \alpha_{ef} Ra / (K\Gamma)$, por lo que las velocidades características

en la matriz porosa son:

$$u_{cm} = \frac{\kappa \alpha_{ef} Ra \Gamma_m}{d \sin \gamma} \quad (6.31a)$$

$$v_{cm} = u_{cm} \Gamma_m \quad (6.31b)$$

donde $\kappa = K_m/K$ es la relación de permeabilidades entre la matriz y la capa porosa. Es decir, la velocidad característica dentro de la matriz, u_{cm} , está relacionada con la velocidad característica dentro de la capa porosa, u_c , de la siguiente manera:

$$u_{cm} = \frac{\kappa \Gamma_m}{\sin \gamma} u_c \quad (6.32)$$

De esta forma, las ecuaciones adimensionales para el flujo dentro de la matriz porosa son:

$$u_m = -\frac{\partial P_m}{\partial x_m} \quad (6.33)$$

$$v_m = -\frac{1}{\Gamma_m^2} \left(\frac{\partial P_m}{\partial y_m} - \sin(\gamma) \theta_m \right) \quad (6.34)$$

$$\frac{\kappa \alpha_{ef} Ra \Gamma_m^2}{\alpha_m \Gamma} \left(u_m \frac{\partial \theta_m}{\partial x_m} + v_m \frac{\partial \theta_m}{\partial y_m} \right) = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial y_m^2} \quad (6.35)$$

Para el caso que nos ocupa $Ra \sim 10^{-5}$, $\alpha_{ef}/\alpha_m \sim 10^{-1}$, $\Gamma_m \sim 10^{-1}$, $\Gamma \sim 10^{-2}$, por lo que el término $(\kappa \alpha_{ef} Ra \Gamma_m^2) / (\alpha_m \Gamma)$ en (6.35) es $O(10^{-6} \kappa)$. Así, cuando $\kappa \ll 1$, es posible suponer que la distribución de la temperatura en la matriz porosa cumple con $\nabla^2 \theta_m = 0$. Nuevamente, para este caso la distribución de temperatura en la matriz porosa es igual a aquella que se obtiene cuando la matriz es impermeable. Además, como se puede ver de la ecuación (6.32), cuando κ es muy baja, el flujo se lleva a cabo principalmente en la capa porosa y dentro de la matriz el movimiento es mínimo, excepto tal vez cerca de la capa.

En primera aproximación, este problema también se puede resolver considerando que la matriz es impermeable, de manera análoga al segundo caso tratado en el Capítulo 2. Una vez que se ha resuelto este problema, a partir del campo de velocidades en la capa porosa es posible determinar la distribución de presión en esa región. Cuando κ es muy baja, el flujo

y la distribución de presiones en el interior de la capa deben ser muy parecidos al caso en el que la matriz es impermeable. Una primera aproximación del flujo que ocurre dentro de la matriz porosa, cuando κ es baja, se puede obtener empleando la ecuación de Darcy, aplicando las distribuciones de presión y temperatura dentro de la matriz. Nuevamente, la distribución de la presión se puede calcular a partir de la ecuación que se deriva de la misma ecuación de Darcy, aplicando la distribución de temperatura y las condiciones de presión que existan sobre la interface capa-matriz, que en primera aproximación son aquellas obtenidas cuando la matriz es impermeable.

6.3.2 Presión dentro de fractura porosa

De las ecuaciones de continuidad, (6.1), y Darcy en la capa porosa, (6.28) y (6.29), se tiene que:

$$\Gamma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \Gamma^2 \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Gamma \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (6.36)$$

Para establecer las condiciones de frontera se considera que $P = 0$ en $(x, y) = (1, 1)$. Entonces, de (6.28) se tiene que la presión a lo largo de la pared superior de la fractura (donde $y = 1$) está dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -u + \sin \gamma \theta, \text{ en } y = 1, \quad (6.37)$$

y las otras condiciones de frontera en las paredes son:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sin \gamma \theta, \text{ en } x = 0, 1, \quad (6.38a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \Gamma \cos \gamma \theta, \text{ en } y = 0. \quad (6.38b)$$

La distribución de la presión que resulta sobre las paredes longitudinales (en $y = 0, 1$) son las condiciones de frontera para la presión dentro de la matriz porosa.

6.3.3 Presión dentro de la matriz porosa.

De las ecuaciones de continuidad y Darcy, (6.14), (6.33) y (6.34), se tiene que la presión dentro de la matriz porosa está dada por:

$$\Gamma_m^2 \frac{\partial^2 P_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 P_m}{\partial y_m^2} = \sin \gamma \frac{\partial \theta_m}{\partial y_m}, \quad (6.39)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{En } x_m = 0, u_m = 0, \text{ entonces: } \frac{\partial P_m}{\partial x_m} = 0, \quad (6.40a)$$

$$\text{en la pared derecha : } P_m = P_{conocida}, \quad (6.40b)$$

$$\text{en } y_m = 0, 1, v_m = 0, \text{ entonces: } \frac{\partial P_m}{\partial y_m} = \sin \gamma \theta_m. \quad (6.40c)$$

Para definir una malla adecuada a la matriz porosa, nuevamente se introdujo la transformación no ortogonal utilizada en el Capítulo 2, ecuaciones (6.23a). De esta manera la ecuación para la presión en la matriz es:

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon_m^2 \xi_m}{(1 + \varepsilon_m \eta_m)^2} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} + \left[\left(\frac{\Gamma_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_m \xi_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_m^2} - \\ & \frac{2\varepsilon_m \xi_m}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_m \partial \eta_m} + \frac{\partial^2 P_m}{\partial \eta_m^2} = - \frac{\varepsilon_m \xi_m \sin \gamma}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi_m} + \sin \gamma \frac{\partial \theta_m}{\partial \eta_m}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

y las condiciones de frontera son:

$$\text{En } \xi_m = 0: \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} = 0, \quad (6.42a)$$

$$\text{en } \xi_m = 1: P_m = P_m(\eta_m), \quad (6.42b)$$

$$\text{en } \eta_m = 0: \frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} - \varepsilon_m \xi_m \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} = \sin \gamma \theta_m, \quad (6.42c)$$

$$\text{en } \eta_m = 1: \frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} - \frac{\varepsilon_m \xi_m}{1 + \varepsilon_m} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} = \sin \gamma \theta_m. \quad (6.42d)$$

Entonces con la presión P_m así determinada se calcula la velocidad dentro de la matriz

porosa.

6.3.4 Velocidad dentro de la matriz porosa

La velocidad dentro de la matriz está dada por la ecuación de Darcy, (6.33) y (6.34), que en las coordenadas ξ_m - η_m , son respectivamente:

$$u_m = -\frac{1}{1 + \varepsilon_m \eta_m} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} \quad (6.43)$$

$$v_m = -\frac{1}{\Gamma_m^2} \frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} + \frac{\varepsilon_m \xi_m}{\Gamma_m^2 (1 + \varepsilon_m \eta_m)} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_m} + \frac{\sin \gamma}{\Gamma_m^2} \theta_m \quad (6.44)$$

donde la distribución de la temperatura dentro de la matriz θ_m es la solución ya conocida para el caso en el que la matriz es impermeable.

6.4 Resultados

6.4.1 Interacción capa de fluido-matriz de muy baja permeabilidad

La Figura 6-2 muestra la distribución de temperatura en la matriz de baja permeabilidad. Se presentan tres diferentes condiciones para el ángulo de inclinación, $\gamma = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Debido a que se despreciaron los términos advectivos en la ecuación de la energía, ecuación (6.17), las distribuciones que se muestran en la Figura 6-2 no dependen del número de Rayleigh. Es evidente que el efecto del ángulo de inclinación es importante sobre la distribución de la temperatura, encontrándose que los gradientes de temperatura son considerables cerca de las capas, especialmente cuando el ángulo de inclinación es pequeño.

El ángulo de inclinación γ también tiene un efecto importante en la distribución de temperatura dentro de la capa de fluido, como se muestra en la Figura 6-3. La difusión es el principal medio de transporte de calor en la capa. Debido a que los números de Rayleigh analizados son pequeños, $10^{-1} \leq Ra \leq 10$, el flujo de convección resultante es débil y no afecta a la distribución de temperatura dentro de la capa. De esta manera, las imágenes de la Figura 6-3 son válidas para ese rango del número de Rayleigh.

El movimiento del fluido resultante es bidimensional como se puede ver en la Figura 6-4,

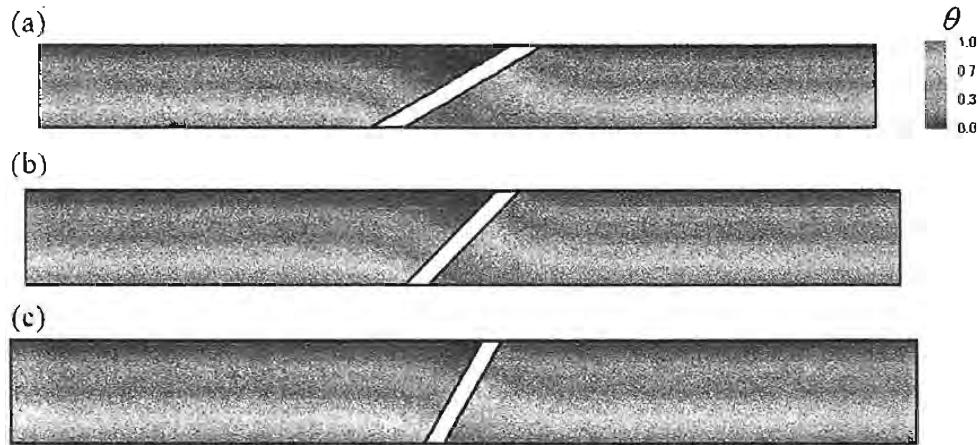


Figura 6-2: Distribución de temperatura en la matriz porosa de baja permeabilidad cuando $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$, $\Gamma_m = 0.25$. Se muestran tres diferentes condiciones para el ángulo de inclinación. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

donde se muestran los resultados numéricos de la función de corriente para $\gamma = 45^\circ$, cuando $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Como la capa está bajo el régimen de conducción, la imagen de la Figura 6-4 también es válida para $\gamma = 30^\circ, 60^\circ$ cuando $10^{-1} \leq Ra \leq 10$. En este caso, ni el ángulo de inclinación ni el número de Rayleigh afectan la forma de los patrones de flujo. El patrón de circulación es en sentido antihorario, además, el flujo transversal a la corriente principal se lleva a cabo de manera lenta y suave prácticamente a lo largo de toda la capa.

La distribución de la presión en el interior de la capa de fluido se muestra en la Figura 6-5 para los tres ángulos de inclinación estudiados. Resulta claro que como la inclinación de la capa juega un papel importante en la distribución de la temperatura en el interior de la capa, también lo hace en la distribución de la presión. En nuestro caso estamos interesados de manera particular en la presión adimensional que se ejerce sobre las paredes longitudinales de la capa, mismas que se muestran en la Figura 6-6, para los tres ángulos de inclinación estudiados. Es evidente que la presión sobre las paredes disminuye conforme se incrementa la inclinación de la capa, además, la ubicación de la presión máxima se traslada hacia arriba con el incremento de γ .

La distribución de la presión adimensional en el interior de la matriz de baja permeabilidad se presenta en la Figura 6-7 para los tres valores estudiados de γ . Se observa que el efecto

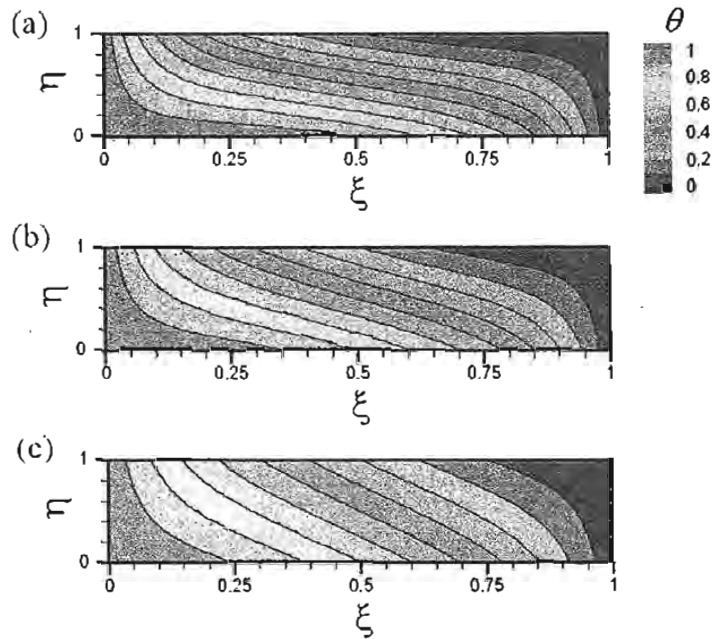


Figura 6-3: Efecto del ángulo de inclinación γ sobre la distribución de temperatura en dentro de la capa de fluido cuando $Pr = 0.3645$, $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Las imágenes de esta figura son válidas para $10^{-1} \leq Ra \leq 10$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

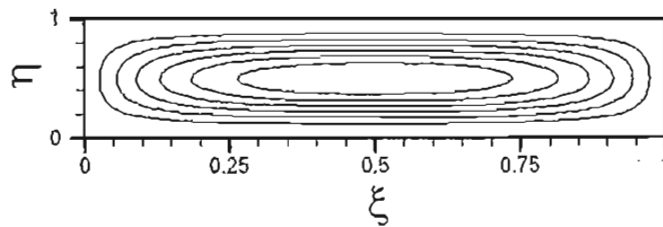


Figura 6-4: Líneas de corriente dentro de la capa de fluido para $\gamma = 45^\circ$, cuando $Pr = 0.3645$, $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Esta imagen también es válida para $\gamma = 30^\circ$, 60° cuando $10^{-1} \leq Ra \leq 10$.

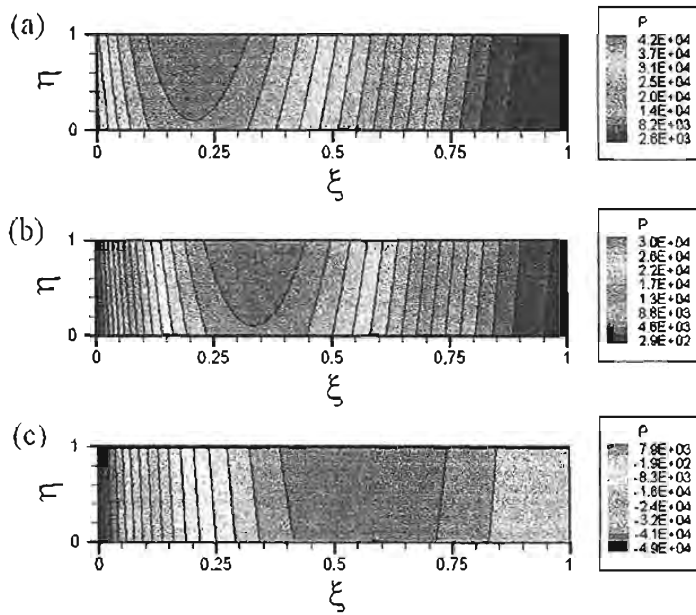


Figura 6-5: Distribución de la presión en el interior de la capa de fluido para los tres ángulos de inclinación estudiados cuando $Ra = 1$, $Pr = 0.3645$, $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

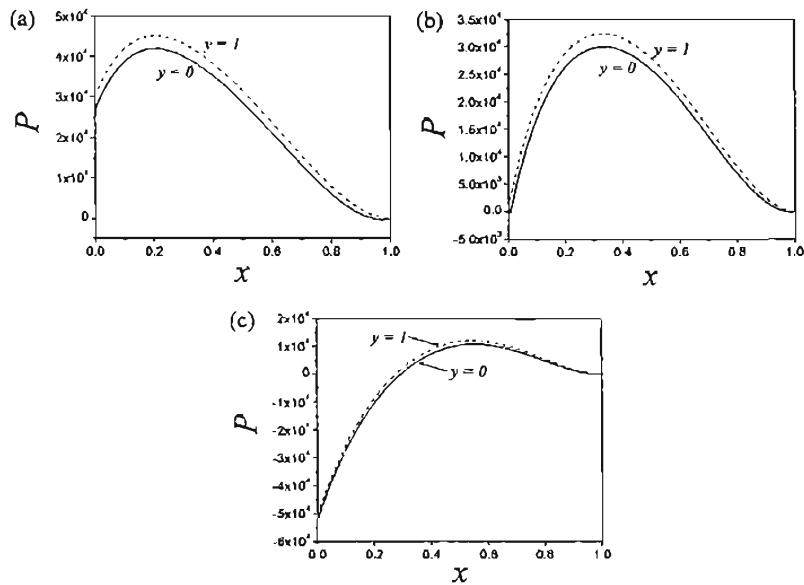


Figura 6-6: Distribuciones de la presión sobre las paredes longitudinales para los tres ángulos de inclinación de interés cuando $Ra = 1$, $Pr = 0.3645$, $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

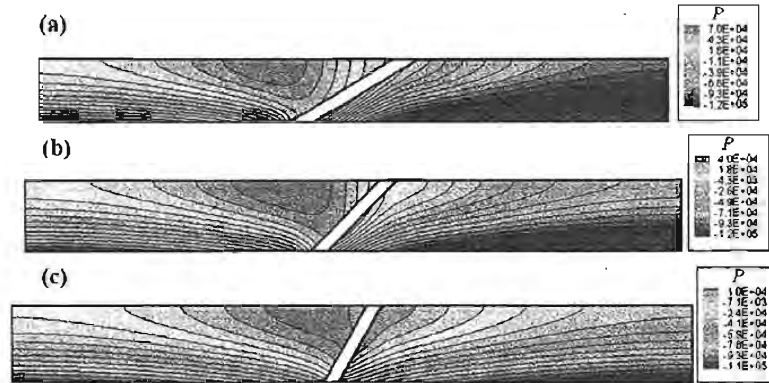


Figura 6-7: Distribución de la presión en el interior de la matriz de baja permeabilidad para los tres valores estudiados de γ cuando $Ra = 1$, $Pr = 0.3645$, $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$, $\Gamma_m = 0.25$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

del ángulo de inclinación sobre la distribución de la presión es importante. Las distribuciones de temperatura y presión dentro de la matriz, mostradas en las Figuras 6-2 y 6-7, son las condiciones que determinan la existencia de un posible flujo dentro de la matriz.

La Figura 6-8 muestra los flujos de interacción entre la capa de fluido y la matriz de baja permeabilidad para los tres valores estudiados de γ . En la figura se observan las líneas de corriente dentro de la matriz, además, los colores ilustran la distribución del módulo del vector de velocidad escalado con la velocidad característica, $|\mathbf{u}_m^*|/u_{cm}$. Como podría esperarse, el flujo de interacción entre la capa y la matriz únicamente toma lugar cerca de la capa de fluido y lejos de ella prácticamente no existe movimiento. Como se puede observar en la Figura 6-8, $|\mathbf{u}_m^*|/u_{cm} \sim 10^5$, lo que podría hacernos pensar que la velocidad dentro de la matriz es grande, sin embargo, de la ecuación (6.13), y suponiendo valores típicos como $Da \sim 10^{-6}$, $Ra \sim 1$, $\Gamma \sim 10^{-2}$, $\Gamma_m \sim 10^{-1}$, $Pr = 0.36$, entonces $|\mathbf{u}_m^*| \sim 10^{-5}u_c$. Es decir, para las condiciones que se están considerando aquí, la velocidad dentro de la matriz de baja permeabilidad es cinco ordenes de magnitud menor que la velocidad característica en la capa de fluido. De esta forma queda justificado que la interacción entre la capa de fluido y la matriz de baja permeabilidad es mínima. Se puede suponer entonces, como ya se hizo, que bajo estas condiciones el flujo en el interior de la capa de fluido no se modifica considerablemente respecto a la solución encontrada para una matriz impermeable.

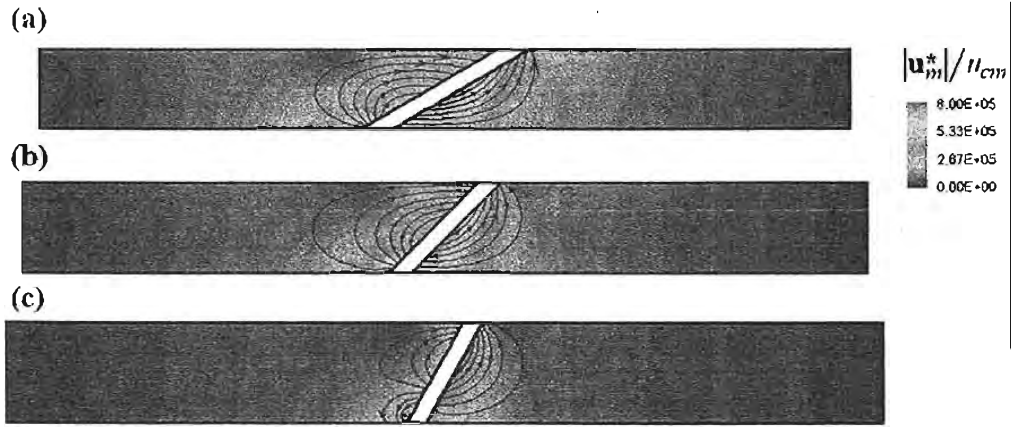


Figura 6-8: Flujos que resultan de la interacción entre la capa de fluido y la matriz de baja permeabilidad para los tres valores estudiados de γ . Los colores ilustran la distribución del módulo del vector de velocidad escalada con la velocidad característica, $|\mathbf{u}_m^*|/u_{cm}$. En los tres casos $Ra = 1$, $Pr = 0.3645$, $Da \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$, $\Gamma_m = 0.25$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

6.4.2 Interacción capa de medio poroso saturado - matriz de muy baja permeabilidad

La Figura 6-2 también corresponde a la distribución de temperatura en la matriz de baja permeabilidad cuando ésta interactúa con la capa de medio poroso saturado. En este caso también se despreciaron los términos advectivos en la ecuación de la energía, por lo que estas distribuciones no dependen del número de Rayleigh. Además, debido a que los números de Rayleigh considerados para la capa de medio poroso saturado son pequeños, $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$, la capa se encuentra bajo el régimen de conducción y la difusión es el principal medio de transporte de calor. Por esta razón el flujo de convección resultante dentro de la capa es débil y no afecta a la distribución de temperatura en su interior. Así, las imágenes de la Figura 6-3 también son válidas para la distribución de la temperatura en la capa de medio poroso saturado cuando $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$.

El movimiento del fluido dentro de la capa porosa se muestra en la Figura 6-9, donde se presentan los resultados numéricos de la función de corriente para $\gamma = 45^\circ$, cuando $Pr = 0.36$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Como la capa de medio poroso está bajo el régimen de conducción, la Figura 6-9 también es válida para $\gamma = 30^\circ, 60^\circ$ cuando $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$. En este caso, ni el ángulo

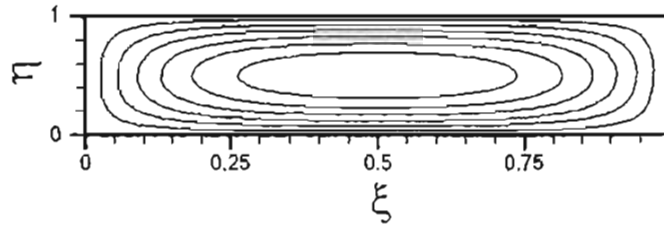


Figura 6-9: Líneas de corriente dentro de la capa de medio poroso para $\gamma = 45^\circ$, cuando $Pr = 0.3645$, $\nu \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. Esta imagen también es válida para $\gamma = 30^\circ, 60^\circ$ cuando $10^{-7} \leq Ra \leq 10^{-3}$.

de inclinación ni número de Rayleigh afectan la forma de los patrones de flujo. El patrón de circulación es en sentido antihorario, y el flujo transversal a la corriente principal se lleva a cabo de manera lenta y suave prácticamente a lo largo de toda la capa.

La distribución de presiones en el interior de la capa de medio poroso saturado se muestra en la Figura 6-10 para los tres ángulos de inclinación estudiados. Nuevamente, estamos interesados de manera particular en la presión que se ejerce sobre las paredes longitudinales de la capa de medio poroso, pues es la condición de frontera que experimenta la matriz de baja permeabilidad. La Figura 6-11 muestra las distribuciones de la presión sobre las paredes longitudinales para los tres ángulos de inclinación de interés. Se observa que la presión sobre las paredes disminuye conforme se incrementa la inclinación de la capa, además, la ubicación de la presión máxima siempre se encuentra en la parte superior de la capa.

La distribución de la presión dentro de la matriz de baja permeabilidad que interacciona con la capa de medio poroso saturado se presenta en la Figura 6-12 para los tres valores estudiados de γ . Nuevamente, las distribuciones de temperatura y presión dentro de la matriz, mostradas en las Figuras 6-2 y 6-12, son las únicas condiciones que establecen el posible flujo dentro de dicha matriz.

La Figura 6-13 muestra los flujos que resultan de la interacción entre la capa de medio poroso saturado de fluido y la matriz de baja porosidad para los tres valores estudiados de γ . En la figura se presentan las líneas de corriente dentro de la matriz, además, los colores ilustran la distribución del módulo del vector de velocidad escalado con la velocidad característica, $|\mathbf{u}_m^*|/u_{cm}$. El flujo de interacción únicamente toma lugar cerca de la capa porosa y lejos de

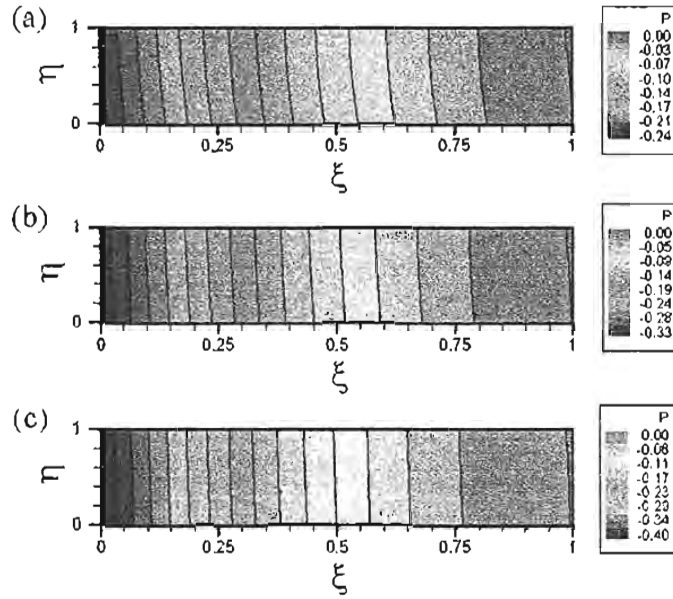


Figura 6-10: Distribución de la presión en el interior de la capa de medio poroso saturado para los tres ángulos de inclinación estudiados cuando $Ra = 10^{-5}$, $Pr = 0.3645$, $\kappa \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

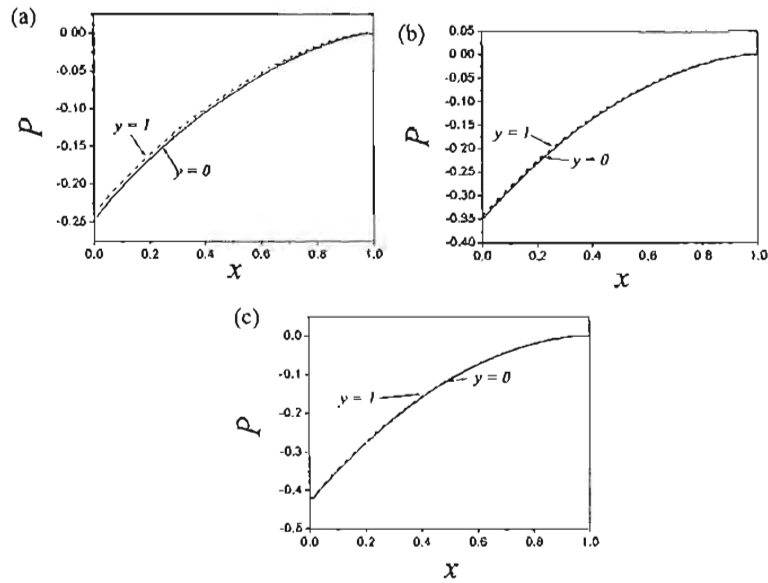


Figura 6-11: Distribuciones de la presión sobre las paredes longitudinales para los tres ángulos de inclinación de interés cuando $Ra = 10^{-5}$, $Pr = 0.3645$, $\kappa \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

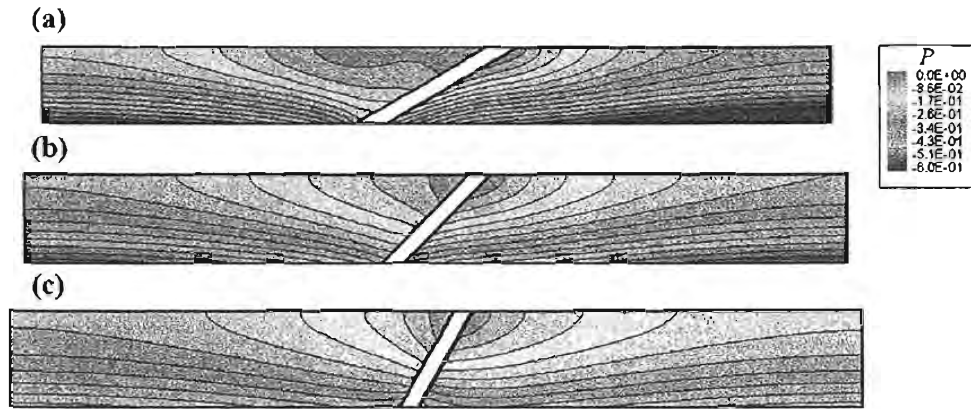


Figura 6-12: Distribución de la presión en el interior de la matriz de baja permeabilidad para los tres valores estudiados de γ cuando $Ra = 10^{-5}$; $Pr = 0.3645$, $\kappa \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$, $\Gamma_m = 0.25$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

ella prácticamente no existe movimiento del fluido. La Figura 6-13 muestra que $|\mathbf{u}_m^*|/u_{cm} \sim 1$, ahora aplicando la ecuación (6.32), y suponiendo que $\Gamma_m \sim 10^{-1}$, entonces $|\mathbf{u}_m^*| \sim \kappa u_c$. Es decir, para las condiciones que se están considerando aquí, la velocidad dentro de la matriz de baja permeabilidad es del orden de la velocidad característica en la capa de medio poroso multiplicada por la relación de permeabilidades. De esta forma queda justificado que la interacción entre la capa de medio poroso y la matriz de baja permeabilidad es mínima siempre que $K_m/K \ll 1$. Se puede suponer entonces, como ya se hizo, que bajo estas condiciones el flujo en el interior de la capa de medio poroso no se modifica considerablemente respecto a la solución calculada cuando la matriz es impermeable.

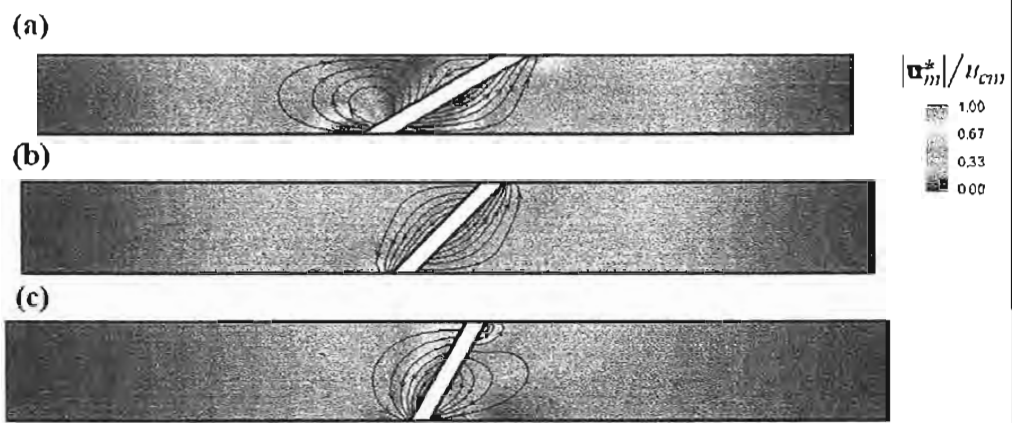


Figura 6-13: Flujos que resultan de la interacción entre la capa de medio poroso saturado de fluido y la matriz de baja permeabilidad para los tres valores estudiados de γ . Los colores ilustran la distribución del módulo del vector de velocidad escalada con la velocidad característica, $|\mathbf{u}_m^*|/u_{cm}$. En los tres casos $Ra = 10^{-5}$, $Pr = 0.3645$, $\kappa \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\Gamma = 0.01$, $\Gamma_m = 0.25$. (a) $\gamma = 30^\circ$. (b) $\gamma = 45^\circ$. (c) $\gamma = 60^\circ$.

Capítulo 7

Conclusiones generales

El presente trabajo de investigación estuvo dirigido al desarrollo de un análisis que permita tener una mejor comprensión de los fenómenos de transporte en redes de fracturas que se encuentran bajo el efecto de gradientes térmicos verticales. Debido a sus implicaciones en el contexto geofísico, existe un especial interés en el estudio del papel que juegan las fracturas gruesas o capas en el transporte de contaminantes. En particular, en esta tesis se muestra el efecto que tiene la convección natural en el transporte de contaminantes pasivos a través de fracturas ubicadas en el interior de medios porosos de muy baja permeabilidad. El objeto de interés no es solamente determinar que tan lejos se transporta el contaminante en las fracturas, sino también el cálculo de la rapidez con la que el contaminante ingresa a estos sistemas. En muchas aplicaciones prácticas, la matriz tiene una permeabilidad muy inferior respecto al material dentro de las fracturas, lo que hace que se comporte de manera similar a un sólido impermeable [14, 75]. Por esa razón, en el desarrollo de este trabajo se supuso que las fracturas se encuentran embebidas en un sólido impermeable. Sin embargo, debido a la relevancia de esta suposición, en la última parte de este trabajo se analizó la interacción que puede existir entre las fracturas y el medio poroso de baja permeabilidad que las rodea.

7.1 Convección natural en medios porosos fracturados

En la primera parte de esta tesis se estudió el movimiento de convección natural en fracturas localizadas en el interior de sólidos afectados por gradientes verticales de temperatura. Para

este fin, se consideraron dos geometrías diferentes, la primera de ellas consiste en dos capas de longitud finita conectadas simétricamente, y la segunda, en una cavidad cilíndrica inclinada muy esbelta. En ambos casos se supuso que la matriz es impermeable y se analizó el régimen de bajo número de Rayleigh.

En el estudio de la primera geometría, las fracturas conectadas simétricamente, se supuso que la conductividad térmica de la roca es muy grande comparada con la del material que se encuentra en la capa, como sucede comúnmente en yacimientos de agua o aceite. Se estudiaron dos casos importantes, la capa llena de fluido y la capa llena de un medio poroso saturado de fluido. El análisis muestra que la distribución de la temperatura en la roca depende la relación de aspecto e inclinación de las capas, además de la relación de conductividades térmicas capa-roca. En el límite de pequeños números de Rayleigh, la distribución de temperatura en las capas, los patrones de flujo y las velocidades adimensionales no dependen de ese parámetro. El ángulo de inclinación tiene un efecto importante sobre la distribución de temperatura en la roca, y por consecuencia sobre las características del flujo y en la transferencia de calor a través de las capas. El flujo convectivo resultante no mejora el proceso de transferencia de calor respecto al estado de conducción pura. Las mediciones experimentales realizadas para el caso de las capas de fluido, utilizando termografías y PIV, mostraron una buena comparación con los resultados numéricos. La velocimetría mostró la existencia de una región en la esquina superior en donde el fluido prácticamente no se mueve, por lo que no existe intercambio de masa entre las capas interconectadas, al menos para los pequeños valores del número de Rayleigh estudiados [76].

Por otro lado, en el análisis de la segunda geometría, se resolvió el problema conjugado de la convección natural a bajos números de Rayleigh dentro de una cavidad cilíndrica inclinada. Nuevamente, se estudiaron los dos casos de interés, la cavidad llena de fluido y la cavidad llena de un medio poroso saturado de fluido. Se analizó el caso general en el que las conductividades térmicas dentro y fuera de la cavidad son muy diferentes entre sí, y se solucionaron los problemas térmicos acoplados. Se obtuvieron soluciones analíticas para la temperatura en la matriz y para la velocidad, la temperatura y la presión dentro de la cavidad. La distribución de la temperatura en la roca cerca de la cavidad se afecta considerablemente cuando existe una diferencia importante entre las conductividades térmicas dentro y fuera de la cavidad. Las soluciones encontradas dependen explícitamente de la relación de conductividades térmicas y

del ángulo de inclinación de la cavidad. Dentro de la cavidad existe un flujo cortante paralelo similar a aquel que ocurre en fracturas largas [34] o en capas porosas largas [33]. Los datos experimentales obtenidos utilizando las técnicas de termografía y PIV mostraron una buena comparación con los resultados encontrados analíticamente para el caso de la cavidad llena de fluido [77, 79].

Es importante remarcar algunas diferencias fundamentales entre los resultados correspondientes a las dos geometrías estudiadas. El movimiento convectivo en el interior de las capas de longitud finita conectadas simétricamente muestra la relevancia de la componente transversal de la velocidad, cuya magnitud varía a lo largo de la capa. Esta circunstancia no se observa en el análisis de fracturas de longitud infinita debido a que para tal condición el flujo es unidimensional y la componente transversal aparece debido a los efectos de borde. Entonces, los fenómenos de transporte en la dirección transversal de las capas de longitud finita ocurren por difusión y convección, mientras que en capas de longitud infinita sólo ocurre difusión en la dirección transversal. Adicionalmente, la intensidad del movimiento convectivo en una capa de longitud infinita embebida en sólido afectado por un gradiente de temperatura vertical, como el caso de la cavidad cilíndrica estudiada, es máxima cuando la inclinación de la capa es de 45° . Por su parte, en el caso de las capas conectadas simétricamente la intensidad de la convección aumenta con el incremento del ángulo de inclinación de las capas, siempre que exista un contraste muy grande entre las conductividades térmicas dentro y fuera de las capas.

7.2 Transporte de un contaminante pasivo a través de las fracturas

A pesar de que los flujos de convección natural aquí estudiados son débiles y no mejoran de manera importante la transferencia de calor respecto a la condición de conducción pura, éstos han mostrado ser agentes que mejoran el transporte de minerales o contaminantes dentro de capas de fluido y de medio poroso saturado; fenómenos que resultan de enorme importancia en problemas geofísicos [24, 27, 32]. Sus consecuencias como la cementación y la disolución de minerales en las rocas, o la filtración de contaminantes en mantos acuíferos están estrechamente relacionados no solamente con los movimientos convectivos, sino también con las distribuciones

de temperatura y los flujos de calor entre la capa y la roca, todos ellos causados por el gradiente geotérmico [36]. Resulta entonces importante el análisis del transporte de contaminantes a través de los sistemas que se han supuestos como fracturas en rocas.

En el estudio del transporte de un trazador ideal a través de las capas inclinadas conectadas simétricamente se analizó la condición en la que el contaminante está situado inicialmente sobre las paredes en donde las capas se conectan entre sí. Se encontró que el movimiento convectivo es un medio efectivo para el transporte de agentes o especies contaminantes. Se estimó la distancia que el trazador se transporta a través de las capas conforme transcurre el tiempo, además de la rapidez con la que el trazador entra al sistema. El análisis muestra que el número de Peclet de difusión molecular y la relación de aspecto de la capa están íntimamente relacionados un eventual incremento en la razón de transporte del contaminante en capas de fluido, y para el caso de la capa porosa saturada, además del número de Peclet de difusión molecular, la dispersión hidrodinámica aparece como un efecto que merece consideración, especialmente si el transporte por convección es dominante [78, 80].

Por otro lado, también se estudió el transporte de la sustancia pasiva a través de la cavidad cilíndrica inclinada. En este caso se analizó la condición en la que el contaminante está situado inicialmente sobre la pared de la cavidad en una pequeña región localizada en el centro de ésta. La discusión incluyó los efectos del ángulo de inclinación y de la relación de conductividades térmicas. Al igual que en el caso de las capas interconectadas, se encontró que el número de Peclet de difusión molecular y la relación de aspecto de la capa están relacionados con el incremento en la razón de transporte del contaminante en la cavidad llena de fluido, y para el caso de la cavidad porosa saturada, también la dispersión hidrodinámica resulta tener un efecto de consideración, especialmente cuando domina el efecto convectivo.

En todos los casos estudiados el transporte del trazador es más efectivo al inicio del proceso de contaminación y disminuye con el tiempo como resultado de la acumulación gradual del trazador cerca de la región de contaminación. El transporte del contaminante a lo largo de los sistemas llenos de fluido, capa o cavidad cilíndrica, mejora con el incremento de ΓPe , mientras que en los sistemas llenos de medio poroso saturado el transporte mejora con el aumento de $\Gamma Pe/\Phi$. Además, en las dos geometrías estudiadas el efecto de la dispersión hidrodinámica se puede despreciar siempre que $Pe/(\Phi Pe_\alpha) \ll 1$.

7.3 Interacción entre la matriz porosa y una fractura inclinada

En este problema el movimiento dentro de la capa de fluido se modeló con las ecuaciones de Navier-Stokes mientras que en el medio poroso se utilizó la ecuación de Darcy. Además de que el uso del término de Brinkman en la ecuación de Darcy ha sido objeto de una extensa literatura controversial, dicha corrección es sólo significativa cuando el valor de la porosidad es alto. En nuestro caso la porosidad de la matriz es muy baja, por lo que la aplicación del término de Brinkman no aparece como una opción para el acoplamiento de las ecuaciones correspondientes a ambas regiones. Entonces, se propuso una forma alterna para estimar en primera aproximación el flujo de fluido que toma lugar entre las dos regiones.

Cuando la matriz de muy baja permeabilidad interactúa con la capa de fluido $Da \rightarrow 0$, y es posible despreciar los términos advectivos en la ecuación de la energía para la matriz. Lo mismo ocurre cuando la matriz que interactúa con la capa porosa tiene una permeabilidad muy inferior a aquella del material poroso dentro de la capa. En ambas situaciones, las distribuciones de temperatura en la matriz de baja permeabilidad son iguales a la calculada para el caso de la matriz impermeable y no dependen del número de Rayleigh. Los gradientes de temperatura son considerables cerca de las capas, especialmente cuando el ángulo de inclinación es pequeño. El ángulo de inclinación también tiene un efecto importante en la distribución de la temperatura dentro de las capas, y debido a que los números de Rayleigh analizados son pequeños, la difusión es el principal medio de transporte de calor y los patrones de convección no cambian con el ángulo de inclinación. Sin embargo, la inclinación sí afecta de manera importante la distribución de la presión en el interior de la capas, en consecuencia, afecta notablemente la presión reducida adimensional en el interior de la matriz de baja permeabilidad. En los dos casos, capa llena de fluido o llena de medio poroso saturado, el flujo de interacción con la matriz únicamente toma lugar cerca de la capa y lejos de ella prácticamente no existe movimiento. Para las condiciones de nuestro interés, la velocidad dentro de la matriz de baja permeabilidad es varios órdenes de magnitud menor que las velocidades características en las capas. Entonces, la interacción entre ambas regiones es mínima y los flujos en el interior de la capas no se modifican considerablemente respecto a las soluciones encontradas considerando una matriz impermeable.

Apéndice A

Funciones referenciadas en el texto

Las funciones A a N en la ecuación (2.16) son las siguientes:

$$A = -\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^4} \left(\frac{\varepsilon^4 \xi^4}{\Gamma^2} + \Gamma^2 + 2\varepsilon^2 \xi^2 \right) \quad (\text{A.1})$$

$$B = \frac{4\text{Pr}\varepsilon\xi}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^3} \left(\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{\Gamma^2} + 1 \right) \quad (\text{A.2})$$

$$C = -\frac{12\text{Pr}\varepsilon^2\xi}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^4} \left(\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{\Gamma^2} + 1 \right) + \frac{1}{(1+\varepsilon\eta)^3} \left[\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) (\Gamma^2 + \varepsilon^2 \xi^2) + \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) (\varepsilon\Gamma^2 \xi + \varepsilon^3 \xi^3) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$D = -\frac{12\text{Pr}\varepsilon^2}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^4} \left(\frac{3\varepsilon^2 \xi^2}{\Gamma^2} + 1 \right) + \frac{1}{(1+\varepsilon\eta)^3} \left[\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) 4\varepsilon^2 \xi + \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) (6\varepsilon^3 \xi^2 + 2\varepsilon\Gamma^2) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$E = \frac{8\text{Pr}\varepsilon}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^3} \left(\frac{3\varepsilon^2 \xi^2}{\Gamma^2} + 1 \right) - \frac{1}{(1+\varepsilon\eta)^2} \left[\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) 2\varepsilon\xi + \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) (\Gamma^2 + 3\varepsilon^2 \xi^2) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$F = -\frac{2\text{Pr}}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^2} \left(\frac{3\varepsilon^2 \xi^2}{\Gamma^2} + 1 \right) \quad (\text{A.6})$$

$$G = -\frac{24\varepsilon^4 \xi \text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)^4} + \frac{2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\eta)^3} \left[\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) + 3\varepsilon\xi \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$H = \frac{24\varepsilon^3 \xi \text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)^3} - \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon\eta)^2} \left[\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) + 3\varepsilon\xi \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

$$I = -\frac{12\varepsilon^2\xi \text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)^2} + \frac{1}{1+\varepsilon\eta} \left[\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) + 3\varepsilon\xi \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

$$J = \frac{4\varepsilon\xi \text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)} \quad (\text{A.10})$$

$$K = -\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$L = -\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2} \quad (\text{A.12})$$

$$M = -\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)} \left(\frac{\varepsilon\xi \sin(\gamma)}{\Gamma} + \cos(\gamma) \right) \quad (\text{A.13})$$

$$N = \frac{\text{Pr} \sin(\gamma)}{\text{Ra}\Gamma^3} \quad (\text{A.14})$$

Para el caso de la capa de fluido, las funciones R a V en la ecuación (2.17) son:

$$R = \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) \frac{1}{1+\varepsilon\eta} + \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} - \frac{2\varepsilon^2\xi}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)^2} \quad (\text{A.15})$$

$$S = -\frac{1}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^2} - \frac{1}{\text{Ra}\Gamma^2} \left(\frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \right)^2 \quad (\text{A.16})$$

$$T = \frac{2\varepsilon\xi}{\text{Ra}\Gamma^2(1+\varepsilon\eta)} \quad (\text{A.17})$$

$$U = -\frac{1}{\text{Ra}\Gamma^2} \quad (\text{A.18})$$

$$V = -\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$\text{donde } \frac{\partial\psi^0}{\partial x} = \frac{1}{1+\varepsilon\eta} \frac{\partial\psi^0}{\partial\xi} \quad (\text{A.20})$$

$$\text{y } \frac{\partial\psi^0}{\partial y} = \frac{\partial\psi^0}{\partial\eta} - \frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \frac{\partial\psi^0}{\partial\xi} \quad (\text{A.21})$$

Las funciones A a F en la ecuación (2.20) son:

$$A = \frac{2\varepsilon^2\xi}{(1+\varepsilon\eta)^2} \quad (\text{A.22})$$

$$B = \left(\frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{1+\varepsilon\eta} \right)^2 \quad (\text{A.23})$$

$$C = -\frac{2\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \quad (\text{A.24})$$

$$D = 1 \quad (\text{A.25})$$

$$E = -\left(\frac{\sin(\gamma)\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} + \frac{\Gamma \cos(\gamma)}{1+\varepsilon\eta} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$F = \sin(\gamma) \quad (\text{A.27})$$

Para la capa de medio poroso saturado, las funciones R a V en la ecuación (2.17) son:

$$R = \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial y} \right) \frac{1}{1+\varepsilon\eta} + \left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} - \frac{2\varepsilon^2\xi}{\Gamma\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^2} \quad (\text{A.28})$$

$$S = -\frac{\Gamma}{\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)^2} - \frac{1}{\Gamma\text{Ra}} \left(\frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \right)^2 \quad (\text{A.29})$$

$$T = \frac{2\varepsilon\xi}{\Gamma\text{Ra}(1+\varepsilon\eta)} \quad (\text{A.30})$$

$$U = -\frac{1}{\Gamma\text{Ra}} \quad (\text{A.31})$$

$$V = -\left(\frac{\partial\psi^0}{\partial x} \right) \quad (\text{A.32})$$

Funciones R a V en la ecuación (4.11), para el caso de la capa llena de fluido:

$$R = \frac{\Gamma\text{Pe}}{1+\varepsilon\eta} (u - \varepsilon\xi v) - \frac{2\varepsilon^2\xi}{(1+\varepsilon\eta)^2} \quad (\text{A.33})$$

$$S = -\left(\frac{\Gamma}{1+\varepsilon\eta} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \right)^2 \quad (\text{A.34})$$

$$T = \frac{2\varepsilon\xi}{1+\varepsilon\eta} \quad (\text{A.35})$$

$$U = -1 \quad (\text{A.36})$$

$$V = \Gamma\text{Pe}v \quad (\text{A.37})$$

y funciones R a V en la ecuación (4.11), para la capa llena de medio poroso saturado de fluido:

$$\begin{aligned}
R &= \left(\frac{\Gamma \text{Pe}}{\Phi} u - \frac{\Gamma^2 \text{Pe}}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial x} \right) \frac{1}{1 + \varepsilon \eta} \\
&\quad - \left(\frac{\Gamma \text{Pe}}{\Phi} v - \frac{\text{Pe}}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial y} \right) \frac{\varepsilon \xi}{1 + \varepsilon \eta} \\
&\quad - \left(1 + \frac{\text{Pe} |\mathbf{u}|}{\text{Pe}_\alpha \Phi} \right) \frac{2\varepsilon^2 \xi}{(1 + \varepsilon \eta)^2}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$S = - \left(1 + \frac{\text{Pe} |\mathbf{u}|}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \right) \left[\left(\frac{\Gamma}{1 + \varepsilon \eta} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon \xi}{1 + \varepsilon \eta} \right)^2 \right] \tag{A.39}$$

$$T = \left(1 + \frac{\text{Pe} |\mathbf{u}|}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \right) \frac{2\varepsilon \xi}{1 + \varepsilon \eta} \tag{A.40}$$

$$U = - \left(1 + \frac{\text{Pe} |\mathbf{u}|}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \right) \tag{A.41}$$

$$V = \left(\frac{\Gamma \text{Pe}}{\Phi} v - \frac{\text{Pe}}{\Phi \text{Pe}_\alpha} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial y} \right) \tag{A.42}$$

$$\text{donde } \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial x} = \frac{1}{1 + \varepsilon \eta} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial \xi}, \tag{A.43}$$

$$\text{y } \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial y} = \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon \xi}{1 + \varepsilon \eta} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial \xi}. \tag{A.44}$$

Bibliografía

- [1] PHILIP, J. R. 1982 Free convection at small Rayleigh number in porous cavities of rectangular, elliptical, triangular and other cross-sections. *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 1503.
- [2] NIELD, D. A. & BEJAN, A. 1999 *Convection in Porous Media*. Springer-Verlag, New York.
- [3] LIU, W., SHEN, S. & RIFFAT, S. B. 2002 Heat Transfer and phase change of liquid in an inclined enclosure packed with unsaturated porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer* **45**, 5209.
- [4] BEAR, J., TSANG, CH. & DE MARSILY, G. 1993 *Flow and contaminant transport in fractured rock*. Academic Press, Inc., San Diego Ca.
- [5] LAKE, W. L. 1989 *Enhanced Oil Recovery*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] DONALDSON E. C., CHILINGARIAN, G. V. & YEN, T. F. 1985 *Enhanced oil recovery, I. Fundamentals and analysis*. Elsevier/North-Holland Inc., New York.
- [7] PEARL R. M. 1960 *Geology. An Introduction to Principles of Physical and Historical Geology*. Barnes & Noble Inc., New York.
- [8] BATES, D. E. B. & KIRKALDY, J. F. 1977 *Field Geology*. Blandford Press, New York.
- [9] GOLF-RACHT, T. D. VAN 1982 *Fundamentals of fractured reservoir engineering*. Elsevier/North-Holland Inc., New York.

- [10] MERCER, J. W. & FAUST, C. R. 1979 Geothermal reservoir simulation, 3: Application of liquid- and vapor-dominated hydrothermal modeling techniques to Wairakei, New-Zealand. *Wat. Resour. Res.* **15** (3), 653.
- [11] SAHIMI, M. 1995 *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. VCH, Weinheim, Germany.
- [12] IWATA, SH., TABUCHI, T. & WARKENTIN, B. 1995 *Soil-water Interactions. Mechanisms and Applications*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- [13] PETTIJOHN F. J. 1949 *Sedimentary Rocks*. Harper & Brothers, New York.
- [14] BEAR, J. 1972 *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier, New York.
- [15] RABINOWICZ, M., DANDURAND, J-L., JAKUBOWSKI, M., SCHOTT, J. & CASSAN, J-P. 1985 Convection in a North Sea oil reservoir: inferences on diagenesis and hydrocarbon migration. *Earth and Planetary Science Letters* **74**, 387.
- [16] STEEFEL, C. I. & LASAGA, A. C. 1994 A coupled model for transport of multiple chemical species and kinetic precipitation/dissolution reactions with application to reactive flow in single phase hydrothermal systems. *American Journal of Science* **294**, 529.
- [17] DIJK, P. & BERKOWITZ B. 1998 Precipitation and dissolution of reactive solutes in fractures. *Water Resources Reseach* **34**, 457.
- [18] RAFFENSPERGER, J. P. & VLASSOPOULOS, D. 1999 The potential for free and mixed convection in sedimentary basins. *Hydrogeology Journal* **7**, 505.
- [19] WILSON, A. M., SANFORD, W., WHITAKER, F. & SMART, P. 2001 Spatial patterns of diagenesis during geothermal circulation in carbonate platforms. *American Journal of Science* **301**, 727.
- [20] HANOR, J. S. 1984 Variation in the composition of oil-field brines with depth in northern Louisiana and southern Arkansas: Implications for mechanisms and rate of mass transport and diagenetic reaction. *Gulf Coast Assoc. Geol. Soc. Trans.* **34**, 55.

- [21] PHILLIPS, O. M. 1970 On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid. *Deep-Sea Research* **17**, 435.
- [22] WOODS, A. W. 1991 Boundary-driven mixing. *J. Fluid Mech.* **226**, 625.
- [23] WUNSCH C. 1970 On oceanic boundary mixing. *Deep-Sea Research* **17**, 293.
- [24] PHILLIPS, O. M. 1991 *Flow and Reactions in Permeable Rocks*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [25] SIGURDSSON, H. 1999 *Melting the earth: the history of ideas on volcanic eruptions*. Oxford University Press, New York.
- [26] WOOD, J. R. & HEWETT, T. A. 1982 Fluid convection and mass transfer in porous sandstones - a theoretical model. *Geochimica et Cosmochimica Acta* **46**, 1707.
- [27] HEWETT, T. A. 1986 Porosity and mineral alteration by fluid flow through a temperature field. In *Reservoir characterization* (ed. Lake, L. W. & Carroll, H. B., Jr.), pp. 83-140. Academic Press, Orlando.
- [28] NAGATA, M. & BUSSE, F. H. 1983 Three-dimensional tertiary motions in a plane shear layer. *J. Fluid Mech.* **135**, 1.
- [29] ROBILLARD, L., & VASSEUR, P. 1992 Quasi-Steady State Natural Convection in a Tilted Porous Layer. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **70**, 1094.
- [30] ABDALLAH, G., THORAVAL, A., SFEIR, A. & PIGUET, J. P. 1995 Thermal convection of fluid in fractured media. *Int. J. Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts*, 32, 481.
- [31] DAVIS, S. H., ROSENBLAT, S., WOOD, J. R. & HEWETT, T. A. 1985 Convective Fluid Flow and Diagenetic Patterns in Domed Sheets. *American Journal of Science* **285**, 207.
- [32] WOODS, A. W. & LINZ, S. J. 1992 Natural convection and dispersion in a tilted fracture. *J. Fluid Mech.* **241**, 59
- [33] LINZ, S. J. & WOODS, A. W. 1992 Natural convection, Taylor dispersion, and diagenesis in a tilted porous layer. *Phys. Rev. A* **46**, 4869.

- [34] LUNA, E., CORDOVA, J. A., MEDINA, A. & HIGUERA, F. J. 2002 Convection in a finite tilted fracture in a rock. *Physics Letters A* **300**, 449.
- [35] MEDINA, A., LUNA, E., PEREZ-ROSALES, C. & HIGUERA, F. J. 2002 Thermal convection in tilted porous fractures. *J. of Physics (Cond. Matter)* **14**, 2467.
- [36] LUNA, E., MEDINA, A., PEREZ-ROSALES, C. & TREVINO, C. 2004 Convection and dispersion in a naturally fractured reservoir. *J. Porous Media* **7**, 303.
- [37] WANG, M., KASSOY, D. R. & WEIDMAN, P. D. 1987 Onset of convection in a vertical slab of saturated porous media between two impermeable conducting blocks. *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 1331.
- [38] RIAHI, N. 1983 Nonlinear convection in a porous layer with finite conducting boundaries. *J. Fluid Mech.* **129**, 153.
- [39] CRIMINALE, W. O., JR & LELONG, M-P. 1984 Optimum Expulsion of Brine from Sea Ice. *J. Geophys. Research* **89**, 3581.
- [40] LAKE, R. A. & LEWIS, E. L. 1970 *J. Geophys. Research* **75**, 583.
- [41] WILLHITE, G. P. 1967 Over-all Heat Transfer Coefficients in Steam and Hot Water Injection Wells. *J. Petroleum Technology* , 607.
- [42] RAMEY, H. J., JR. 1962 Wellbore Heat Transmission. *J. Petroleum Technology* , 427.
- [43] BASSOM, A. P. & REES, D. A. S. 1996 Free convection from a heated vertical cylinder embedded in a fluid-saturated porous medium. *Acta Mechanica* **116**, 139.
- [44] OLHOEFT, G. R., SINEX, D. B., SANDER, K. A., LAGMANSON, M. M., STILLMAN, D. E., LEWIS, S., CLARK, B. T., WALLIN, E. L. & KAUAHIKAWA, J. P. Hot and cold lava tube characterization with ground penetrating radar.
- [45] STEWART, W. E. & DONA, C. L. G. 1988 Free Convection in a Heat-Generating Porous Medium in a Finite Vertical Cylinder. *J. Heat Transfer* **110**, 517.
- [46] PRASAD, V. & CHUI, A. 1989 Natural convection in cylindrical porous enclosure with internal heat generation. *J. Heat Transfer* **111**, 916.

- [47] BEJAN, A. 1980 Natural convection in a vertical cylindrical well filled with porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 726.
- [48] SHAUGHNESSY, E. J. & VAN GILDER, J. W. 1995 Low Rayleigh number conjugate convection in straight inclined fractures in rock. *Numer. Heat Transfer Part A* **28**, 389.
- [49] GERSHUNI, G. Z. & ZHUKHOVITSKII, E. M. 1996 *Convective stability of incompressible fluids*. Keter, Jerusalem.
- [50] JERSCHOW, A. 2000 Thermal Convection Currents in NMR: Flow Profiles and Applications for Coherence Pathway Selection. *J. Magn. Reson.* **145**, 125.
- [51] HE, Y. L., TAO, W. Q., QU, Z. G. & CHEN, Z. Q. 2004 Steady natural convection in a vertical cylindrical envelope with adiabatic lateral wall. *Int. J. Heat Mass Transfer* **47**, 3131.
- [52] HAUGEN, K. B. & TYVAND, P. A. 2003 Onset of thermal convection in a vertical porous cylinder with conducting wall. *Phys. Fluids* **15**, 2661.
- [53] BAU, H. H. & TORRANCE, K. E. 1982 Low Rayleigh number thermal convection in a vertical cylinder filled with porous materials and heated from below. *J. Heat Transfer* **104**, 166.
- [54] STORESLETTEN, L. & TVEITEREID, M. 1991 Natural convection in a horizontal porous cylinder. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, 1959.
- [55] KIMURA, S. & BEJAN, A. 1980 Experimental study of natural convection in a horizontal cylinder with different end temperatures. *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 1117.
- [56] VAN DIKE, M. 1964 *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press. New York.
- [57] TAYLOR, G. I. 1953 Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. *Proc. R. Soc. Lond. A* **219**, 186.
- [58] SAFFMAN, P. G. 1959 A theory of dispersion in a porous medium. *Fluid Mech.* **6**, 321.
- [59] BARTON, N. G. 1983 The dispersion of solute from time-dependent releases in parallel flow. *J. Fluid Mech.* **136**, 243.

- [60] DENG, Q. H., ZHOU, J., MEI, CH. & SHEN, Y. M. 2004 Fluid, heat and contaminant transport structures of laminar double-diffusive mixed convection in a two-dimensional ventilated enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer* **47**, 5257.
- [61] BEAR, J. & BACHMAT, Y. 1990 *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht, The Netherlands.
- [62] LE BRETON, P., CALTAGIRONE, J. P. & ARQUIS, E. 1991 Natural Convection in a Square Cavity with Thin Porous Layers on Its Vertical Walls. *J. Heat Transfer* **113**, 892.
- [63] VALENCIA-LOPEZ, J. J. & OCHOA-TAPIA, J. A. 2001 A study of buoyancy-driven flow in a confined fluid overlying a porous layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, 4725.
- [64] ALAZMI, B. & VAFAI, K. 2001 Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, 1735.
- [65] SOMERTON, C. W. & CATTON, I. 1982 On the thermal instability of superimposed porous and fluid layers. *J. Heat Transfer* **104**, 160.
- [66] SINGH, A. K., LEONARDI, E. & THORPE, G. R. 1993 Three-dimensional natural convection in a confined fluid overlying a porous layer. *J. Heat Transfer* **115**, 631.
- [67] BEAVERS, G. & JOSEPH D. D. 1967 Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.* **30**, 197.
- [68] OCHOA-TAPIA, J. A. & WHITAKER, S. 1997 Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *Int. J. Heat Mass Transfer* **40**, 2691.
- [69] GOYEAU, B., LHUILLIER, D., GOBIN, D. & VELARDE, M. G. 2003 Momentum transport at a fluid-porous interface. *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 4071.
- [70] NIELD, D. A. 1983 The boundary correction for the Rayleigh-Darcy problem: limitations of the Brinkman equation. *J. Fluid Mech.* **128**, 37.
- [71] POULIKAKOS, D. 1986 Buoyancy-driven convection in a horizontal fluid layer extending over a porous substrate. *Phys. Fluids* **29**, 3949.

- [72] BECKERMANN, C., VISKANTA, R. & RAMADHYANI, S. 1988 Natural Convection in Vertical Enclosures Containing Simultaneously Fluid and Porous Layers. *J. Fluid Mech.* **186**, 257.
- [73] BECKERMANN, C., RAMADHYANI, S. & VISKANTA, R. 1987 Natural Convection Flow and Heat Transfer Between a Fluid Layer and a Porous Layer Inside a Rectangular Enclosure. *J. Heat Transfer* **109**, 363.
- [74] VAFAI, K. 2000 *Handbook of Porous Media*. Marcel Dekker, Inc. New York.
- [75] LUNA, E. 2003 *Inyección de Nitrógeno en un Yacimiento Petrolífero: Caso Cantarell*. Tesis Doctoral. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- [76] SANCHEZ, F., PEREZ-ROSALES, C. & MEDINA, A. 2005 Natural convection in symmetrically interconnected tilted layers. *J. Physical Society of Japan* **74** (4), 1170.
- [77] SANCHEZ, F., HIGUERA, F. J. & MEDINA, A. 2005 Natural convection in tilted cylindrical cavities embedded in rocks. *Phys. Rev. E* **71**, 066308.
- [78] SANCHEZ, F. & MEDINA, A. 2005 Passive dispersion in symmetrically interconnected layers under natural convection. *J. Fluid Mechanics*. Aceptado para publicación.
- [79] SANCHEZ, F., MEDINA, A. & HIGUERA, F. J. 2004 Thermal convection in tilted cylindrical cavities embedded in rocks. In *Proceedings of 2004 ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference*, July 11-15, 2004, Charlotte, North Carolina USA.
- [80] SANCHEZ, F., MEDINA, A. & HIGUERA, F. J. 2004 Thermal convection and dispersion in folded gaps embedded in impervious rocks. In *Proceedings of 2004 ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference*, July 11-15, 2004, Charlotte, North Carolina USA.
- [81] BARENBLATT, G. I. & ZHELTOV, I. P. 1960 Fundamental equations of filtration of homogeneous liquid in fissured rock. *Soviet Dokl. Akad. Nauk.* **13** (2), 545.
- [82] BARENBLATT, G. I., ENTOV, V. M. & RYSHIK, V. M. 1990 *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- [83] BATCHELOR, G. K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [84] BEJAN, A. 1995 *Convection Heat Transfer*, 2nd. ed. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [85] BENDER, C. M. & ORSZAG, S. A. 1978 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York.
- [86] CAI, R & ZHANG, N. 2003 Explicit analytical solutions of 2-D laminar natural convection. *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 931.
- [87] GEBHART, B., JALURIA, Y., MAHAJAN, R. L. & SAMMAKIA, B. 1988 *Buoyancy-induced Flows and Transport*. Hemisphere Publishing Corporation, Philadelphia.
- [88] HINCH, E. J. 1991. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [89] HOWLE, L., BEHRINGER, R. P. & GEORGIADIS, J. 1993 Visualization of convective fluid flow in a porous medium. *Nature* **362**, 230.
- [90] MERRIKH, A.A. & MOHAMAD, A.A. 2002 Non-Darcy effects in buoyancy driven flows in an enclosure filled with vertically layered porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer* **45**, 4305.
- [91] NITHIARASU, I., SEETHARAMU, K. N. & SUNDARARAJAN, T. 1997 Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium. *J. Heat Mass Transfer* **40**, 3955.
- [92] RHINES, P. B. & YOUNG W. R. 1983 How rapidly is a passive scalar mixed within close streamlines?. *J. Fluid Mech.* **133**, 133.
- [93] TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A. & PLETCHER R. H. 1997 *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd ed. Taylor & Francis, Philadelphia.
- [94] WEIDMAN, P. D. & KASSOY D. R. 1986 The influence of side wall heat transfer on convection in a confined saturated porous medium. *Phys. Fluids* **29**, 349.
- [95] WHITE, F. 1991 *Viscous Fluid Flow*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.