

01159



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

ESTIMACIÓN DE GASTOS EN CAUCES NATURALES
DURANTE LA OCURRENCIA DE AVENIDAS

TESIS QUE PRESENTA:

FELICIANO GARCÍA HERNÁNDEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA CIVIL
(HIDRÁULICA)

DIRECTOR DE TESIS: DR. ÁLVARO A. ALDAMA RODRÍGUEZ

DEPFI, Campus Morelos, julio de 2005

m346531



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS.

Este trabajo está dedicado a todos aquellos que contribuyeron de una u otra forma a su realización.

Especialmente a mis padres y a mis hermanos, por su continuo e invaluable apoyo en todos los aspectos.

Agradezco a la UNAM la oportunidad que me brindó, al aceptarme como alumno en el Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería de la DEPMI.

Agradezco también al CONACyT, por el apoyo económico que me proporcionó durante la realización de los estudios.

Gracias le doy al Dr. Álvaro A. Aldama Rodríguez, por dirigir este trabajo.

Y hago un reconocimiento a los doctores:

Aldo I. Ramírez Orozco.

Ariosto Aguilar Chávez.

F. Javier Aparicio Mijares.

Nahun H. García Villanueva.

Por sus comentarios y recomendaciones hechos a este documento.

ÍNDICE.

	<i>Pág.</i>
RESUMEN.	1
1. INTRODUCCIÓN.	5
1.1. Objetivo del trabajo.	6
1.2. Antecedentes.	7
1.2.1. Problemas que involucran flujo no permanente en canales abiertos.	11
1.2.2. Métodos de integración de las ecuaciones de flujo no permanente.	13
2. ECUACIONES DE FLUJO NO PERMANENTE.	15
3. APLICACIÓN DEL ESQUEMA PREISSMAN PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT.	19
3.1. Discretización del sistema continuo.	19
4. DETERMINACIÓN DE GASTOS REALIZANDO HIDROMETRÍA EN DOS SECCIONES.	23
4.1. Estimación de gastos en cauces naturales con base en la medición de tirantes en dos secciones transversales.	23

4.2. Solución de las ecuaciones para un hidrograma de entrada dado.	29
4.3. Ajustes de regresión potencial y polinomial.	46
4.4. Comparación de resultados.	53
5. CONCLUSIONES.	58
BIBLIOGRAFÍA.	60

RESUMEN.

Se propone un método para determinar gastos en cauces naturales durante ocurrencia de avenidas. Dicho método consiste en la solución de las ecuaciones de Saint-Venant mediante el esquema numérico de discretización de Preissmann, y considerando realizar mediciones hidrométricas en dos secciones del cauce, con la finalidad de aproximar el resultado al comportamiento real del flujo.

En condiciones transitorias, la relación tirante-gasto en un cauce no es única, ya que para gastos crecientes se tiene una curva que relaciona dichas características del flujo y, para gastos decrecientes esa relación difiere.

El objetivo del trabajo es aplicar el método de hidrometría en dos secciones del cauce a canales de prueba teóricos, para observar el comportamiento del mismo y definir si es o no factible de aplicación a casos reales.

Al realizar hidrometría en dos secciones y resolver las ecuaciones de flujo, el resultado, comparado con el calculado mediante un programa de cómputo utilizando intervalos de discretización pequeños, es muy similar. Esto indica que el método se aproxima adecuadamente al comportamiento real del flujo, reflejándose en una disminución del error porcentual al determinar el gasto máximo ocurrido, con relación a la determinación del mismo utilizando una relación única entre el tirante y el gasto, correspondiente a flujo permanente.

De acuerdo a lo anterior, se concluye que es factible aplicar el método en casos reales, siempre que sea posible definir las variables a usar de acuerdo a como son tratadas en los ejemplos teóricos.

1. INTRODUCCIÓN

1. INTRODUCCIÓN

ESTIMACIÓN DE GASTOS EN CAUCES NATURALES DURANTE LA OCURRENCIA DE AVENIDAS.

1. INTRODUCCIÓN.

Los principales problemas a los que se enfrenta la ingeniería hidráulica son los relacionados con la construcción, operación y mantenimiento de obras civiles para el control y la adecuada distribución del agua. Dichas obras pueden ser de diferentes tipos y para diferentes funciones, tales como presas, bordos para protección contra inundaciones, canales, redes de distribución de agua, sistemas de alcantarillado, encauzamientos de ríos, etc.

Para la construcción de dichas obras, es necesario contar con datos útiles para realizar los diseños y tomar las decisiones adecuadas en cada caso. En este aspecto, son muy importantes los registros hidrológicos con que se cuente, ya que de la cantidad y de la precisión de dichos datos dependerá el diseño de las obras hidráulicas requeridas.

Además de lo anterior, es necesario contar con metodologías apropiadas y sustentadas lo suficientemente en los principios básicos de la naturaleza, de modo que se garantice que el funcionamiento de las obras será aquel para el que fueron diseñadas.

En este contexto de las obras hidráulicas, algo muy importante es la medición de las características de flujos en cauces, ya que esas mediciones pueden ser utilizadas como datos de entrada necesarios para metodologías de diseño. Los principales datos requeridos son el tirante y el gasto.

Es entonces necesario que el análisis y medición de las características de los flujos se haga de forma que se garantice que los resultados que se obtengan sean los que realmente ocurren. Respecto a esto, a través del tiempo se han utilizado algunos métodos de aforo del flujo en cauces. En México, los principales métodos usados son: secciones de control, relación sección-pendiente y relación sección-velocidad (Aparicio, 1987). Se pueden encontrar detalles de estos métodos en los Internacional Standard (ISO), referencias [9], [10] y [11]. Existen otros métodos, como el de trazadores, que consiste en soltar una cantidad conocida de partículas fluorescentes, radiactivas, etc., en una sección situada a una cierta distancia aguas arriba de la sección de aforos para medir el tiempo que tardan en llegar a la última. Este método aún se encuentra en etapa experimental, y su uso todavía está limitado en la práctica (Aparicio, 1987). Otro método consiste en la construcción de curvas elevaciones-gastos, y se construye con datos obtenidos de varios aforos. En el ISO 1100-2:1998(E) se encuentran mayores detalles acerca de la determinación de la relación elevaciones-gastos en un cauce, referencia [12].

La incertidumbre del método de elevaciones-gastos se debe a que, en flujo transitorio, la relación entre la elevación y el gasto no es única (ISO 1100-2:1998(E)). Aunado a esto, en la práctica no suele medirse el nivel durante una avenida, debido al peligro que la misma representa para el operador. Además, si se intentara medir de manera automática, es probable que una avenida de gran magnitud provoque daños al equipo de aforo, con lo cual no se logra el objetivo. También, los equipos automáticos de medición suelen ser costosos, por lo que, en general, no son instalados en todas las estaciones hidrométricas, y los únicos valores que suelen reportarse son gastos medios diarios.

Por otro lado, debe tomarse en cuenta que en la totalidad de los cauces naturales, el flujo es no permanente o transitorio, es decir, el flujo varía con respecto al tiempo (Yevjevich, 1975). Por ello, dejan de ser aplicables muchas hipótesis simplificadoras que se hacen para tratar el problema de una manera más sencilla. Esto produce que los resultados de mediciones, por ejemplo, del tipo curva de elevaciones-gastos, no sean representativos de la realidad al cien por ciento, traduciéndose esto en una incertidumbre en el dimensionamiento de las estructuras hidráulicas, lo que a su vez provoca incertidumbre en su funcionamiento.

1.1. Objetivo del trabajo.

Desarrollar una metodología para la determinación de los gastos en cauces naturales durante la ocurrencia de avenidas, considerando los efectos transitorios que se producen en el flujo.

Aunque las ecuaciones que definen el flujo en los cauces pueden resolverse de forma aproximada mediante programas de cómputo, éstos suelen ser muy costosos y complicados de usar y adaptar a casos particulares. Es por ello que en el presente trabajo se propone una metodología basada en la realización de hidrometría en dos secciones del cauce. Lo anterior se realiza con un enfoque numérico, para lo cual se hace uso de las ecuaciones generales de flujo a superficie libre, aproximadas mediante el esquema de Preissmann.

1.2. Antecedentes.

Como se ha mencionado, la mayor parte de los problemas de flujo en cauces naturales involucra flujo no permanente, por lo cual es importante que se trate el problema como tal, ya que las soluciones obtenidas mediante simplificaciones son muy limitadas en las aplicaciones. Sin embargo, si se quiere dar un tratamiento matemático al problema, éste se vuelve muy difícil, debido a que las variables son dependientes unas de otras y las ecuaciones no se pueden resolver exactamente para un caso general. Aunque puede lograrse una cierta aproximación al flujo no permanente para determinados casos considerándolo como flujo permanente, es difícil distinguir las situaciones en las que esto puede hacerse, quedando la decisión al juicio del ingeniero, lo que podría perder objetividad.

Por otro lado, este tipo de problemas trata con ondas traslatorias. Una onda traslatoria es una onda de gravedad que se propaga en un canal abierto y resulta en un desplazamiento apreciable de las partículas de agua en una dirección paralela al flujo (Chow, V. T., 1982). Por lo anterior, la teoría de la física de ondas es aplicable. Entonces, es necesario analizar el comportamiento de las ondas de agua en la superficie del cauce. Las investigaciones a este respecto, se han hecho básicamente con cuatro métodos: estudios teóricos o analíticos, experimentos en modelos físicos de pequeña escala o analogías eléctricas, observaciones en la naturaleza y simulaciones numéricas. En general, los resultados más útiles han surgido de la combinación de esos métodos. Las simulaciones numéricas han tenido últimamente un gran impulso debido a los avances tecnológicos, con lo cual los equipos de cómputo con que se cuenta son muy poderosos y por lo tanto, se pueden utilizar para integrar numéricamente las ecuaciones, utilizando algún

esquema numérico para discretizar las ecuaciones diferenciales parciales que rigen el fenómeno.

Los primeros estudios sobre flujo en canales iniciaron con los trabajos de Laplace y Lagrange. Sin embargo, el tratamiento matemático avanzado empezó con el desarrollo de dos ecuaciones diferenciales parciales, introducidas originalmente por Barré de Saint-Venant, en la forma siguiente (Yevjevich, 1975):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wU)}{\partial s} = 0 \quad (a)$$

y

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\chi F}{\omega \rho g} \quad (b)$$

donde, w es área de la sección transversal, U la velocidad media, ε la elevación de la superficie del agua sobre el nivel de referencia, $\chi F / \omega \rho g$ la pendiente de fricción, χ el perímetro mojado, ρ la densidad del agua, g la aceleración de la gravedad, ρg el peso específico, $\rho g F$ la fricción de las paredes por unidad de área, s la longitud a través del canal prismático rectangular, y t el tiempo.

Estas ecuaciones se han mantenido substancialmente sin cambios a través de años de intentos de modificarlas o mejorarlas. Básicamente, las ecuaciones resultantes de los intentos hechos son más completas y sofisticadas, pero se reducen a las ecuaciones básicas de Saint-Venant cuando se simplifican para uso práctico (Yevjevich, 1975).

Las suposiciones fundamentales para la deducción de las ecuaciones de Saint-Venant, son:

- 1) La superficie de la onda varía gradualmente, lo que es equivalente a establecer que la distribución de presiones a lo largo de la vertical es hidrostática, o que la aceleración vertical es pequeña;
- 2) Las pérdidas por fricción en flujo no permanente, no son significativamente diferentes de sus correspondientes en flujo permanente;
- 3) La distribución de velocidades a través del área mojada, no afecta substancialmente la propagación de la onda;
- 4) El movimiento de la onda se puede considerar como bidimensional, con efectos despreciables de diferencias eventuales en los niveles de las secciones transversales; y
- 5) La pendiente promedio del fondo del canal es tan pequeña, que $\sin\alpha$ se puede reemplazar por α , y $\cos\alpha$ por la unidad, donde α es el ángulo formado por el fondo del canal y un plano horizontal de referencia.

Los principales intentos hechos por varios investigadores para mejorar las ecuaciones de Saint-Venant han sido encaminados a introducir la aceleración vertical para ondas gradualmente variadas, estudiar e introducir eventualmente la diferencia en fricción entre el flujo permanente y el no permanente bajo el término general de las ondas gradualmente variadas, introducir los coeficientes de distribución de velocidad de Boussinesq y Coriolis, agregar variaciones en la tercera

dimensión, usar fondos curvos, y, usar varias fórmulas para las pérdidas por fricción.

Strelkoff (1969), ha presentado expresiones alternas de las ecuaciones, por ejemplo, en un sistema de coordenadas en movimiento. Así mismo, ha presentado expresiones que se adaptan en forma precisa a los efectos de varias incertidumbres.

Sin embargo, todos estos intentos por agregar complementos a las ecuaciones, no son cambios significativos de la descripción matemática básica del flujo no permanente proporcionada por las ecuaciones de Saint-Venant.

Por otro lado, las ecuaciones han sido verificadas experimental y además numéricamente, observándose que los resultados obtenidos son muy cercanos a los que se presentaron en modelos hidráulicos realizados especialmente para verificar la validez de dichas fórmulas.

El concepto de flujo gradualmente variado no permanente ha presentado problemas de definición a los investigadores en hidráulica, sin embargo, un parámetro que se suele usar para definir el límite para el flujo no permanente gradualmente variado a superficie libre es el número de Vedernikov, V , ya que para $V > 1.00$, la onda se amplifica. Se puede encontrar una clasificación de las ondas bajo diferentes criterios, así como sus propiedades en la referencia [16].

1.2.1. Problemas que involucran flujo no permanente en canales abiertos.

Problema clásico del movimiento de avenidas. El clásico problema que requiere la solución de las ecuaciones de flujo no permanente en canales abiertos, es el movimiento de ondas de avenidas a través de canales naturales o artificiales, áreas de inundación y embalses.

Tránsito de avenidas. Tránsito de la onda de avenida a través de cuerpos de agua es el término dado a un grupo de métodos y procedimientos, cuyo objetivo fundamental es determinar un hidrograma de salida, dado uno de entrada. Los procedimientos llamados de tránsito hidráulico, están basados ya sea en la teoría de flujo no permanente o en la simple ecuación de almacenamiento de agua. Cuando se usan las ecuaciones diferenciales parciales de flujo no permanente, la solución se obtiene integrando una versión simplificada, ya sea de manera exacta o numéricamente (Yevjevich, 1975; Weinmann y Laurenson, 1979; Aparicio, 1987).

El otro método, llamado tránsito hidrológico, en forma de la ecuación de almacenamiento, es extremadamente simple (Yevjevich, 1975). Para un canal o un embalse bien definido, la ecuación de almacenamiento se puede escribir como:

$$(Q_1 - Q_2)\Delta t = \Delta S = A\Delta H \quad (c)$$

donde, Q_1 es el gasto de entrada, Q_2 el gasto de salida, S el volumen almacenado de agua, A el área de la superficie de almacenamiento o del tramo del canal, y H la profundidad o elevación de esa área. El gasto de entrada se especifica como $Q_1 = f(t)$, y el almacenamiento se puede

expresar como $S = f(H)$. Si $Q_2 = f(t)$, la función $S = f(Q)$ se puede determinar por eliminación. En tal caso, la ecuación de almacenamiento tiene solo dos variables, Q_2 y t , en la forma de una ecuación de diferencias, cuya integración proporciona $Q_2 = f(t)$.

La ecuación de almacenamiento sirve generalmente para el cálculo de relaciones entre cinco funciones: (1) el hidrograma de entrada, $Q_1 = f_1(t)$; (2) el hidrograma de salida, $Q_2 = f_2(t)$; (3) un hidrograma intermedio, $Q_3 = f_3(t)$; (4) la curva de gastos de salida, $Q_2 = f_4(H)$; y (5) la función de almacenamiento, $S = f_5(H)$ o la función de área, $A = f_6(H)$, con cinco variables: Q_1 , Q_2 , H , S y t .

Tránsito de avenidas y teoría de flujo no permanente en canales. La diferencia entre el tratamiento del tránsito de avenidas por medio de la ecuación de almacenamiento y por medio de las ecuaciones diferenciales parciales de flujo no permanente consiste en el grado de aproximación usado, ya que ambos métodos emplean el mismo principio físico de conservación de masa.

Problemas de flujo no permanente a superficie libre. En este caso, así como en los problemas de tránsito de avenidas, los problemas pueden ser muy variados, siendo, entre otros, aquellos que tienen que ver con el flujo en túneles parcialmente llenos en plantas de bombeo e hidroeléctricas, el flujo en canales de navegación, en los canales de abastecimiento y drenaje municipal, debido a las variaciones de operación en el tiempo, canales de irrigación, etc. Otros problemas muy comunes son aquellos en que ocurre un flujo simultáneo del agua y sedimentos suspendidos, así como otras variables de la calidad del agua. En la actualidad, también se vuelve un problema elegir el método adecuado para aproximar la solución de las ecuaciones, más que la búsqueda de nuevos métodos.

1.2.2. Métodos de integración de las ecuaciones de flujo no permanente.

Para la solución de las ecuaciones de flujo no permanente, existen métodos variados, desarrollados desde diferentes puntos de vista. Los factores principales para la elección del método adecuado incluyen: el tipo de problema involucrado, los datos disponibles o los datos a ser determinados, y la precisión requerida de los resultados. Para seleccionar adecuadamente un método, se podrían tomar en cuenta cuestiones como qué forma de las ecuaciones proporcionaría el método más adecuado, tomando en cuenta los factores que influyen y el movimiento dado de la onda; qué método de solución es viable para resolver las ecuaciones diferenciales; qué grado de precisión en la predicción de la progresión y transformación de la onda puede ser esperado de las ecuaciones y el método de integración seleccionado.

Dado que, como se ha mencionado, no es posible resolver de forma exacta las ecuaciones de flujo, es necesario recurrir a métodos aproximados, mismos que pueden ser de varios tipos, como el uso de la ecuación de almacenamiento, con las implicaciones y simplificaciones que esto representa; la integración matemática, asumiendo hipótesis de simplificación, lo cual la limita problemas específicos; la integración numérica, cuya aproximación depende de la discretización que se realice; métodos gráficos y semigráficos, cuya aplicación se restringe a problemas simples, tales como a cuerpos de agua con bajas velocidades y capacidad de almacenamiento relativamente grande. También, existen otros métodos tales como el uso de modelos hidráulicos, analogías eléctricas, métodos empíricos, etc.

2. ECUACIONES DE FLUJO NO PERMANENTE

2. ECUACIONES DE FLUJO NO PERMANENTE.

La deducción de las ecuaciones puede realizarse de varias formas, por ejemplo, partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, o aplicando los principios de conservación de masa y de cantidad de movimiento a un volumen de control infinitesimal (Panton, 1984; Chow, 1982).

Las ecuaciones han sido desarrolladas lo suficientemente para casos particulares y más generales de flujo, y pueden consultarse deducciones detalladas en las referencias [2], [6] y [13]. En el presente trabajo se utilizará la forma presentada en la referencia [2].

En dicha referencia, las ecuaciones han sido deducidas mediante el principio de continuidad y de la segunda ley de Newton aplicadas a una región material arbitraria en un medio continuo. De esto, se deducen ecuaciones diferenciales que se integran en la vertical para obtener las ecuaciones que rigen el flujo a superficie libre en una dimensión. Realizando lo que se indica anteriormente, se obtienen las ecuaciones:

Conservación de masa:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = \tilde{q} \quad (1)$$

Cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{A}} \right) + g \tilde{A} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \tilde{S}_f \right) = 0 \quad (2)$$

donde, x es la coordenada en el sentido horizontal y t el tiempo, como variables independientes; \tilde{A} y \tilde{Q} son el área y el gasto, respectivamente, como variables dependientes; además, $(x,t) \in \Omega = [0,L] \times [0,T]$ delimitan el espacio de solución; L es la longitud de la conducción; T es el tiempo final de solución; \tilde{q} es el gasto lateral por unidad de longitud, g es la aceleración de la gravedad; $\tilde{h} = \tilde{y} + \tilde{z}_b$ es la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia; \tilde{y} es la elevación de la superficie libre del agua medida desde la plantilla del fondo del canal; \tilde{z}_b es la elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia y \tilde{s}_f es la pendiente de fricción.

Las dos ecuaciones anteriores, constituyen un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera (Aguilar, 2002), que está sujeto a las condiciones iniciales:

$$\tilde{A}(x,0) = A_0(x) \quad (3)$$

$$\tilde{Q}(x,0) = Q_0(x) \quad (4)$$

Las condiciones de frontera, se definen para flujo subcrítico y supercrítico, de la forma siguiente:

Flujo subcrítico:

$$A(L,t) = f(t); \quad t > 0 \quad (5)$$

$$Q(0,t) = g(t); \quad t > 0 \quad (6)$$

Flujo supercrítico:

$$A(0,t) = f(t); \quad t > 0 \quad (7)$$

$$Q(0,t) = g(t); \quad t > 0 \quad (8)$$

Estas ecuaciones son las que se resolverán. Para ello, se utilizará el esquema implícito de Preissmann, que se describe en el siguiente capítulo.

3. APLICACIÓN DEL ESQUEMA DE PREISSMANN PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT

3. APLICACIÓN DEL ESQUEMA PREISSMANN PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT.

3.1. Discretización del sistema continuo.

El esquema de Preissmann es un esquema implícito en diferencias finitas pesado en el tiempo y en el espacio (Liggett y Cunge, 1975; Aguilar, 2002).

Considérese una función continua $\tilde{F} : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^2$, donde $\Omega(x,t)$ es el espacio de solución y \mathfrak{R} es el conjunto de los números reales. A su vez, se tiene una variable discreta F_j^n que se aproxima a $\tilde{F}(x_j, t_n)$ en un punto (x_j, t_n) del espacio Ω . Además, el espacio de solución $\Omega(x,t)$ es cubierto con una malla uniforme de espaciado Δx para cualquier intervalo Δt , donde $\Delta x = \frac{L}{J}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$ y J y N son números enteros e indican la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de forma que $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, n\Delta t)$ y el conjunto de puntos de los subíndices j se agrupan en el vector \mathbf{J}_Ω . En la figura siguiente se muestra una representación gráfica del esquema de Preissmann en el plano $x-t$.

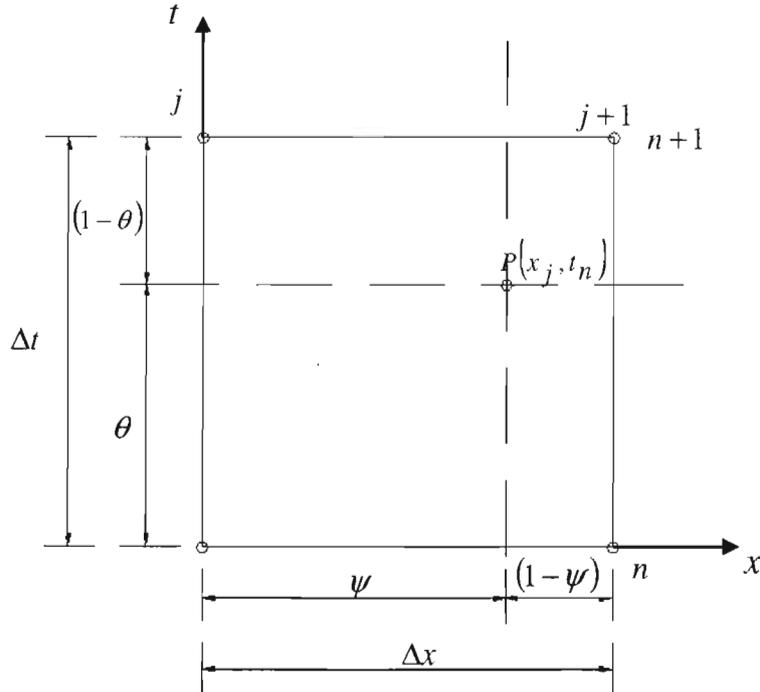


Fig. 1. Representación en el plano $x-t$ del esquema de Preissmann.

La discretización en diferencias finitas de Preissmann de las derivadas espacial y temporal, así como de los términos independientes, es como se muestra enseguida:

Discretización para las derivadas temporales:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = (1-\psi) \left[\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} \right] + \psi \left[\frac{F_{j+1}^{n+1} - F_{j+1}^n}{\Delta t} \right] \quad (9)$$

donde $\psi \in [0,1]$ es el factor de peso espacial.

Discretización para las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \theta \left[\frac{F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1}}{\Delta x} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{\Delta x} \right] \quad (10)$$

donde $\theta \in [0,1]$ es el factor de peso temporal.

Discretización de los términos independientes:

$$\tilde{F} = (1 - \theta) \left[(1 - \psi) F_j^n + \psi F_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) F_j^{n+1} + \psi F_{j+1}^{n+1} \right] \quad (11)$$

Las anteriores expresiones aproximadas son las que se aplicarán a las ecuaciones de flujo.

4. DETERMINACIÓN DE GASTOS REALIZANDO HIDROMETRÍA EN DOS SECCIONES

4. DETERMINACIÓN DE GASTOS REALIZANDO HIDROMETRÍA EN DOS SECCIONES.

4.1. Estimación de gastos en cauces naturales con base en la medición de tirantes en dos secciones transversales.

La metodología consistirá en la realización de mediciones de tirantes en dos secciones transversales del cauce, como se muestra enseguida.

Sea un cauce natural:

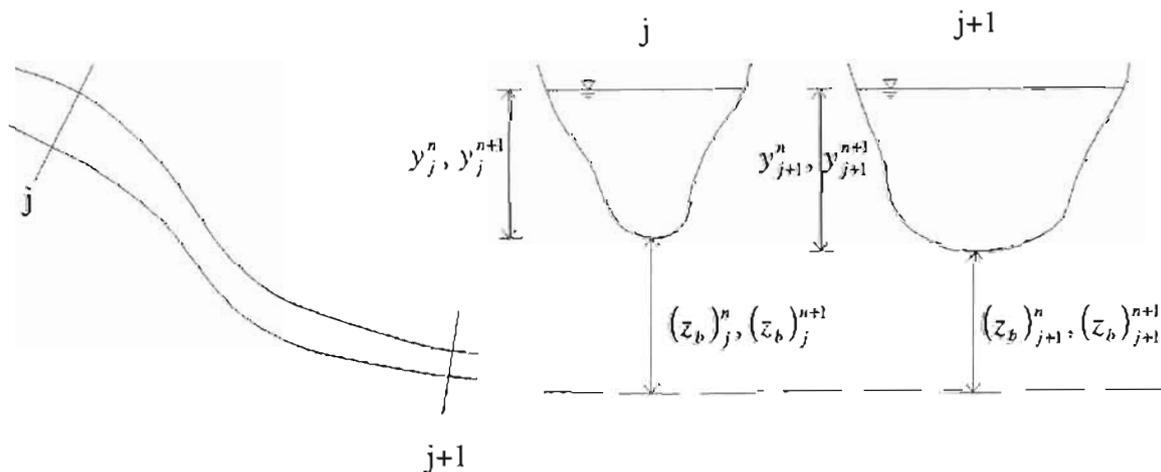


Fig. 2. Se muestra un cauce natural, así como las características de la sección transversal de dos puntos del cauce.

En condiciones no permanentes, la relación $Q-y$ será de la siguiente forma:

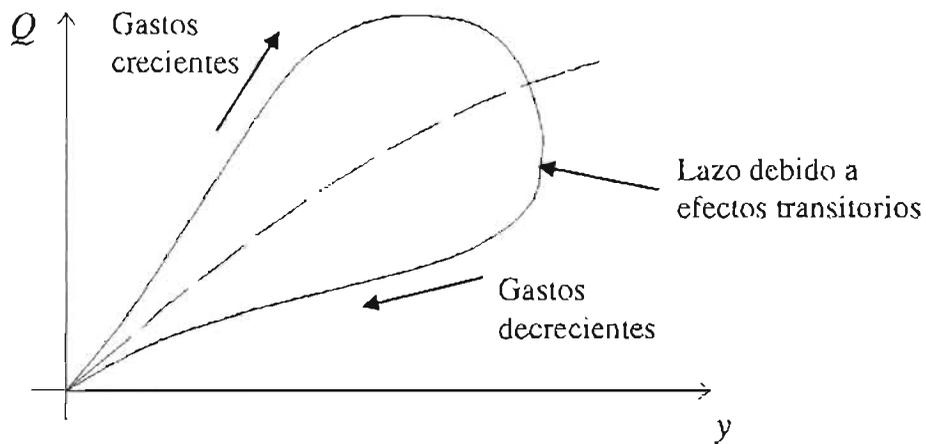


Fig. 3. Representación gráfica de la relación entre el tirante y el gasto en condiciones no permanentes.

Retomando las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = \tilde{q} \quad (1')$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{A}} \right) + g \tilde{A} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + g \tilde{A} S_f = 0 \quad (2')$$

donde:

$$g \bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = g \bar{A} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + g \bar{A} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial x} \quad (2'a)$$

y, de la fórmula de Manning:

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (2'b)$$

$$S_f = \frac{Q^2 n^2}{A^2 R^{4/3}} \quad (2'c)$$

Que, sustituyéndolas en la ecuación (2'), dan como resultado:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + g \bar{A} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial x} + gn^2 \frac{\bar{Q}^2}{\bar{A} \bar{R}^{4/3}} = 0 \quad (2'')$$

Luego, aplicando el esquema de Preissmann, con $\theta = \psi = \frac{1}{2}$, se obtiene:

Para la ecuación (1'):

$$\frac{A_j^{n+1} - A_j^n + A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n}{2\Delta t} + \frac{-Q_j^{n+1} - Q_j^n + Q_{j+1}^{n+1} + Q_{j+1}^n}{2\Delta x} = \frac{q_j^{n+1} + q_j^n + q_{j+1}^{n+1} + q_{j+1}^n}{4} \quad (12)$$

Para la ecuación (2''):

$$\begin{aligned} & \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n + Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{2\Delta t} + \frac{l}{2\Delta x} \left[\frac{(Q_{j+1}^n)^2}{A_{j+1}^n} - \frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n} + \frac{(Q_{j+1}^{n+1})^2}{A_{j+1}^{n+1}} - \frac{(Q_j^{n+1})^2}{A_j^{n+1}} \right] + \\ & g \left(\frac{A_j^n + A_{j+1}^n + A_j^{n+1} + A_{j+1}^{n+1}}{4} \right) \times \left(\frac{y_{j+1}^n - y_j^n}{2\Delta x} + \frac{y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{(z_b)_{j+1}^n - (z_b)_j^n}{2\Delta x} + \frac{(z_b)_{j+1}^{n+1} - (z_b)_j^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \\ & \frac{gn^2}{4} \left[\frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n (R_j^n)^{4/3}} + \frac{(Q_{j+1}^n)^2}{A_{j+1}^n (R_{j+1}^n)^{4/3}} + \frac{(Q_j^{n+1})^2}{A_j^{n+1} (R_j^{n+1})^{4/3}} + \frac{(Q_{j+1}^{n+1})^2}{A_{j+1}^{n+1} (R_{j+1}^{n+1})^{4/3}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

El objetivo es, dado el sistema de ecuaciones formado por (12) y (13), determinar Q_{j+1}^{n+1} y Q_j^{n+1} .

Aislando Q_{j+1}^{n+1} de la ecuación (12), se obtiene:

$$Q_{j+1}^{n+1} = Q_j^{n+1} + \alpha_j^n \quad (14)$$

donde:

$$\alpha_j^n = \frac{\Delta x}{2} (q_j^n + q_{j+1}^n + q_j^{n+1} + q_{j+1}^{n+1}) - \frac{\Delta x}{\Delta t} (A_j^{n+1} - A_j^n + A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n) - Q_{j+1}^n + Q_j^n \quad (15)$$

También, (13) se puede escribir como:

$$\beta_{j+1}^n (Q_{j+1}^{n+1})^2 + \beta_j^n (Q_j^{n+1})^2 + Q_{j+1}^{n+1} + Q_j^{n+1} + \gamma_j^n = 0 \quad (16)$$

donde:

$$\beta_{j+1}^n = \frac{\Delta t}{A_{j+1}^{n+1}} \left[\frac{gn^2}{2(R_{j+1}^{n+1})^{4/3}} + \frac{1}{\Delta x} \right] \quad (17)$$

$$\beta_j^n = \frac{\Delta t}{A_j^{n+1}} \left[\frac{gn^2}{2(R_j^{n+1})^{4/3}} - \frac{1}{\Delta x} \right] \quad (18)$$

$$\gamma_j^n = -(Q_j^n + Q_{j+1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(Q_{j+1}^n)^2}{A_{j+1}^n} - \frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n} \right] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{A_j^n + A_{j+1}^n + A_j^{n+1} + A_{j+1}^{n+1}}{4} \right] \times$$

$$(y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1} + y_{j+1}^n - y_j^n + (z_b)_{j+1}^{n+1} - (z_b)_j^{n+1} + (z_b)_{j+1}^n - (z_b)_j^n) +$$

$$\frac{gn^2 \Delta t}{2} \left[\frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n (R_j^n)^{4/3}} + \frac{(Q_{j+1}^n)^2}{A_{j+1}^n (R_{j+1}^n)^{4/3}} \right] \quad (19)$$

Luego, sustituyendo (14) en (16), se obtiene:

$$(\beta_{j+1}^n + \beta_j^n)(Q_j^{n+1})^2 + 2(\beta_{j+1}^n \alpha_j^n + 1)Q_j^{n+1} + \beta_{j+1}^n (\alpha_j^n)^2 + \alpha_j^n + \gamma_j^n = 0 \quad (20)$$

de donde:

$$Q_j^{n+1} = \frac{-2(\beta_{j+1}^n \alpha_j^n + 1) \pm \sqrt{4(\beta_{j+1}^n \alpha_j^n + 1)^2 - 4(\beta_{j+1}^n + \beta_j^n)(\beta_{j+1}^n (\alpha_j^n)^2 + \alpha_j^n + \gamma_j^n)}}{2(\beta_{j+1}^n + \beta_j^n)} \quad (21)$$

Con lo cual se puede determinar Q_j^{n+1} y, conocido éste, calcular Q_{j+1}^{n+1} a través de la ecuación (14).

4.2. Solución de las ecuaciones para un hidrograma de entrada dado.

Para verificar la aproximación de la metodología propuesta, se compararán los resultados obtenidos al solucionar las ecuaciones de Saint-Venant mediante un programa de cómputo desarrollado por Aguilar (2002), el cual considera el sistema de ecuaciones en su versión diferencial, con los correspondientes al método de hidrometría en dos secciones.

Ejemplo 1.

Características del canal de prueba:

Tipo de régimen: Subcrítico.

Tramos del cauce: 2

Ancho: 6.10 m

Talud: 2.0

Coefficiente de Manning: 0.025

Pendiente: 0.001

Longitud del primer tramo: 200 m

Discretización del primer tramo: 200

Longitud del segundo tramo: 100 m

Discretización del segundo tramo: 100

Elevación de referencia de plantilla de fondo al inicio del cauce: 100 m

Gasto de alimentación del cauce: 28 m³/s.

Tirante aguas abajo: 1.16 m.

Se usan mallas finas ($\Delta x = 1$ m, $\Delta t = 720$ s).

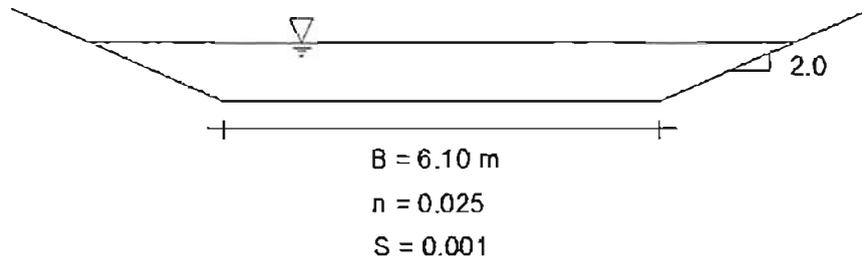


Fig. 4. Representación gráfica del canal del ejemplo 1.

Hora	m^3/s
0.0	28
2.0	28
2.5	30
3.0	32
3.3	35
3.6	38
4.0	40
4.4	38
4.7	35
5.0	32
5.5	30
6.0	28
10.0	28

Tabla. 1. Datos del hidrograma de entrada.

Tiempo total de simulación: 10 h.

Hidrograma tipo triangular por segmentos.

Con las características y los datos dados anteriormente, se obtienen los resultados mostrados en la figura 6, para varias separaciones de las secciones consideradas.

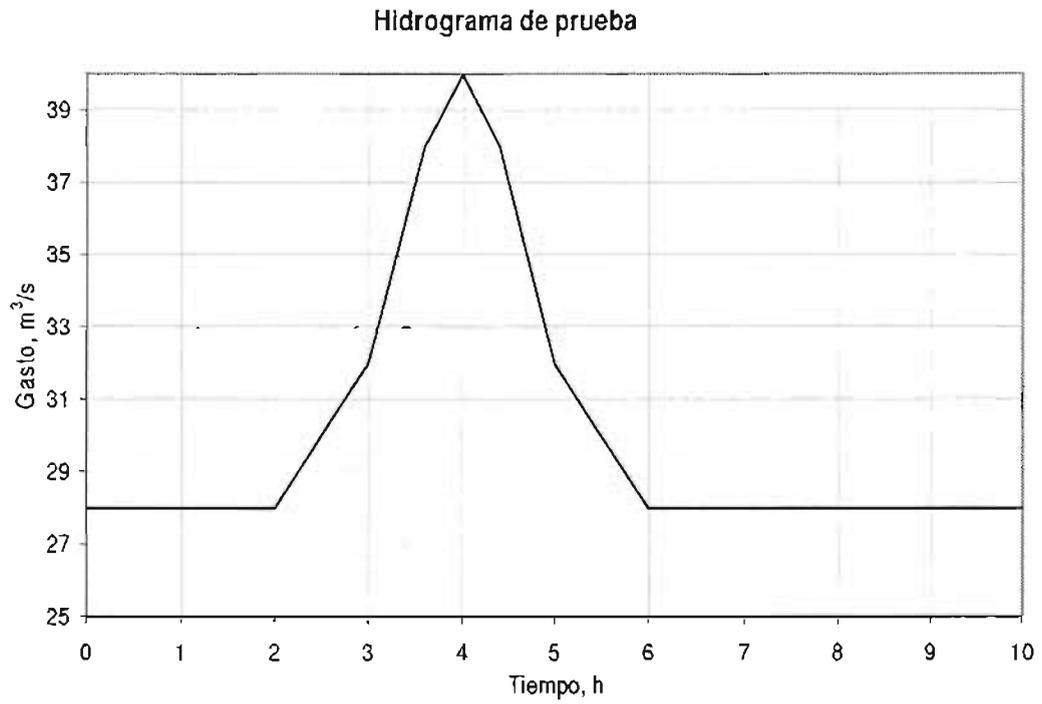


Fig. 5. Hidrograma de entrada para los canales de prueba de los ejemplos 1 y 2.

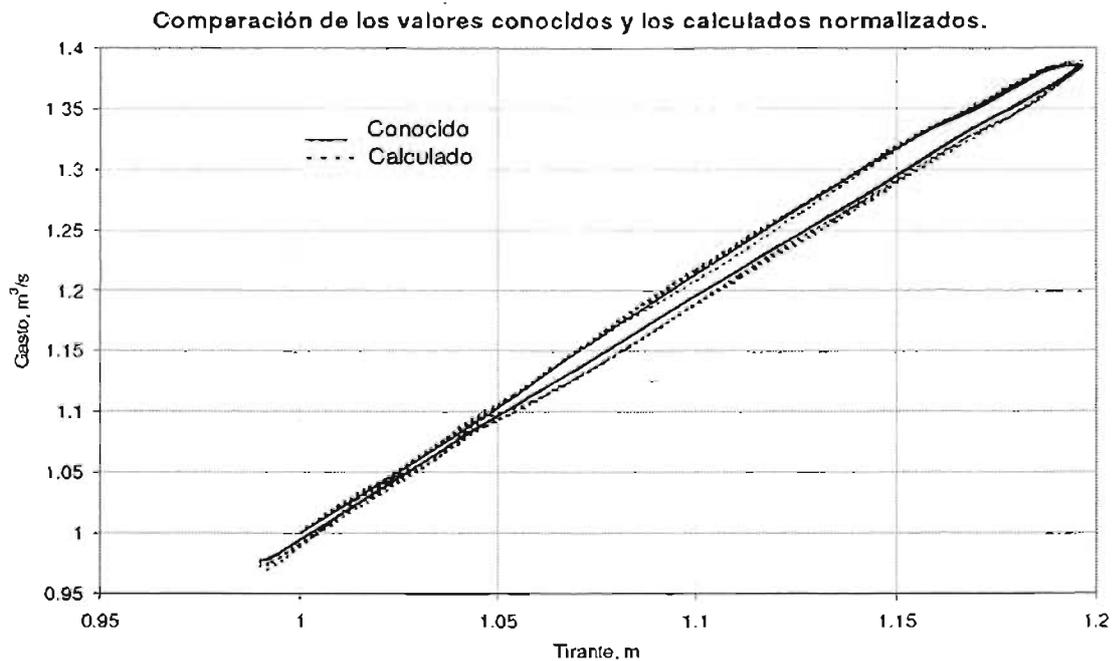


Fig. 6. Comparación de los valores conocidos y los calculados mediante el método propuesto.

En el ejemplo 1 se utilizó un canal pequeño y, aunque no es muy claro, se aprecia una aproximación aceptable para el caso dado.

Ahora se hará una prueba para un canal de mayores dimensiones:

Ejemplo 2.

Características del canal de prueba:

Tipo de régimen: Subcrítico.

Tramos del cauce: 2

Ancho: 10.0 m

Talud: 2.0

Coefficiente de Manning: 0.025

Pendiente: 0.0001

Longitud del primer tramo: 10000 m

Discretización del primer tramo: 100

Longitud del segundo tramo: 10000 m

Discretización del segundo tramo: 100

Elevación de referencia de plantilla de fondo al inicio del cauce: 100 m

Gasto de alimentación del cauce: 28 m³/s.

Tirante aguas abajo: 1.8938 m

Se usan mallas finas ($\Delta x = 100$ m, $\Delta t = 194.59$ s).

El hidrograma de entrada será el mismo que para el ejemplo 1. Lo que varía sustancialmente en este ejemplo con respecto del anterior, es el ancho de base del canal, pero sobre todo, la longitud del mismo, dimensiones que pasan de 6.10 m a 10 m y de 300 m a 20000 m, respectivamente.

Con los datos de entrada proporcionados anteriormente, se obtienen los resultados, que se muestran de manera normalizada en la gráfica siguiente, que representa la relación tirante-gasto en diferentes secciones del canal.

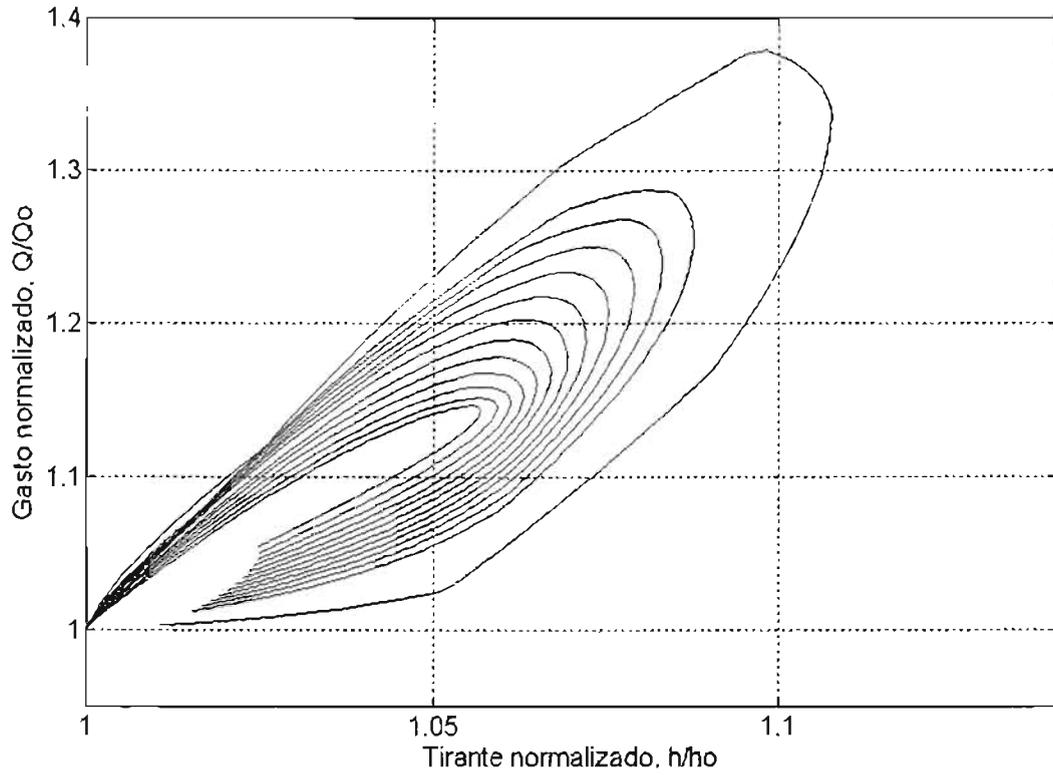


Fig. 7. Representación gráfica de la relación tirante-gasto para los valores normalizados del ejemplo 2.

Ahora, utilizando la metodología propuesta, realizando hidrometría en dos secciones transversales, se obtienen los resultados mostrados en la figura 8.

De acuerdo con la comparación realizada en dicha figura, la aproximación obtenida es bastante buena, ya que para la sección 1, la forma del lazo es muy parecida, y en las secciones 15 y 50, los valores son prácticamente iguales. Recuérdese que la separación entre secciones utilizada es de 100 m.

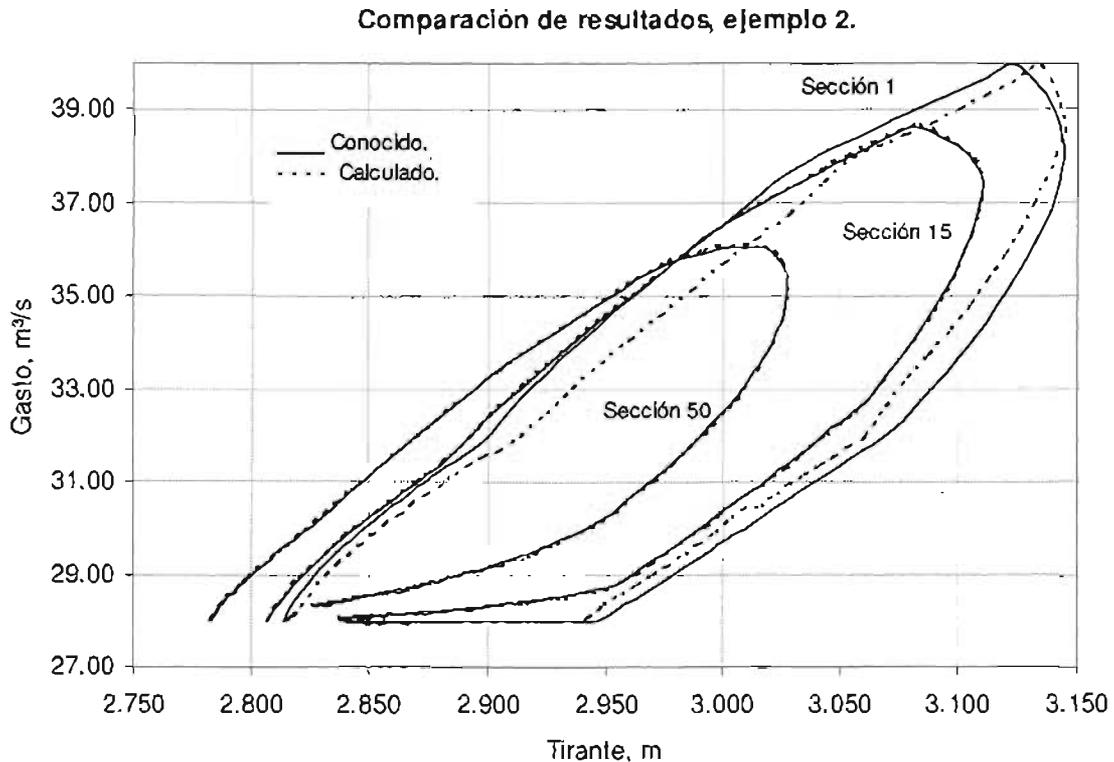


Fig. 8. Comparación de los resultados obtenidos mediante el programa de cómputo con los obtenidos realizando hidrometría en dos secciones del cauce.

Se probará a continuación un Δx diferente al utilizado por el programa de cómputo, para verificar la sensibilidad y convergencia del método para valores mayores de la distancia entre secciones.

Si para el mismo canal de prueba dado anteriormente se utilizan los mismos datos de entrada, pero una separación entre las dos secciones de $\Delta x = 1000, 2000, 3000, 4000$ y 5000 m, se obtienen los resultados siguientes.

Para $\Delta x = 1000$ m :

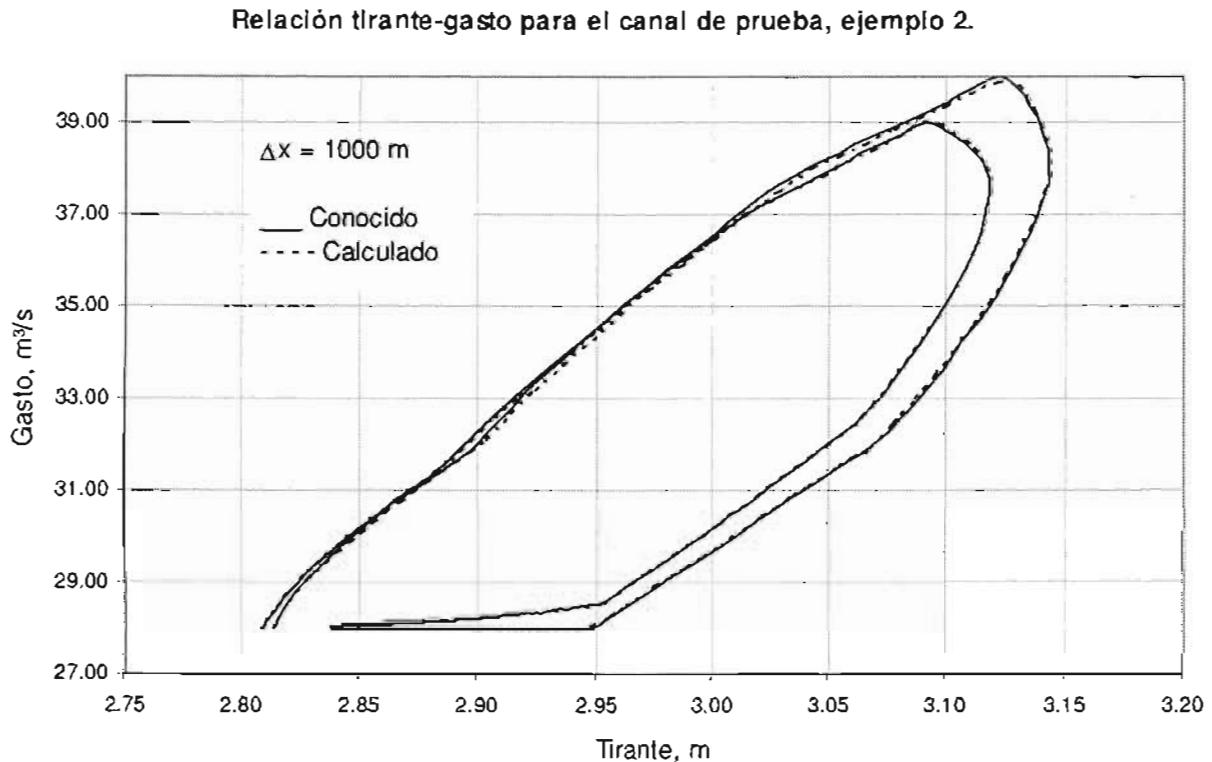


Fig. 9. Relación tirante-gasto para una separación de 1000 metros entre las secciones del canal de prueba.

Para $\Delta x = 2000$ m :

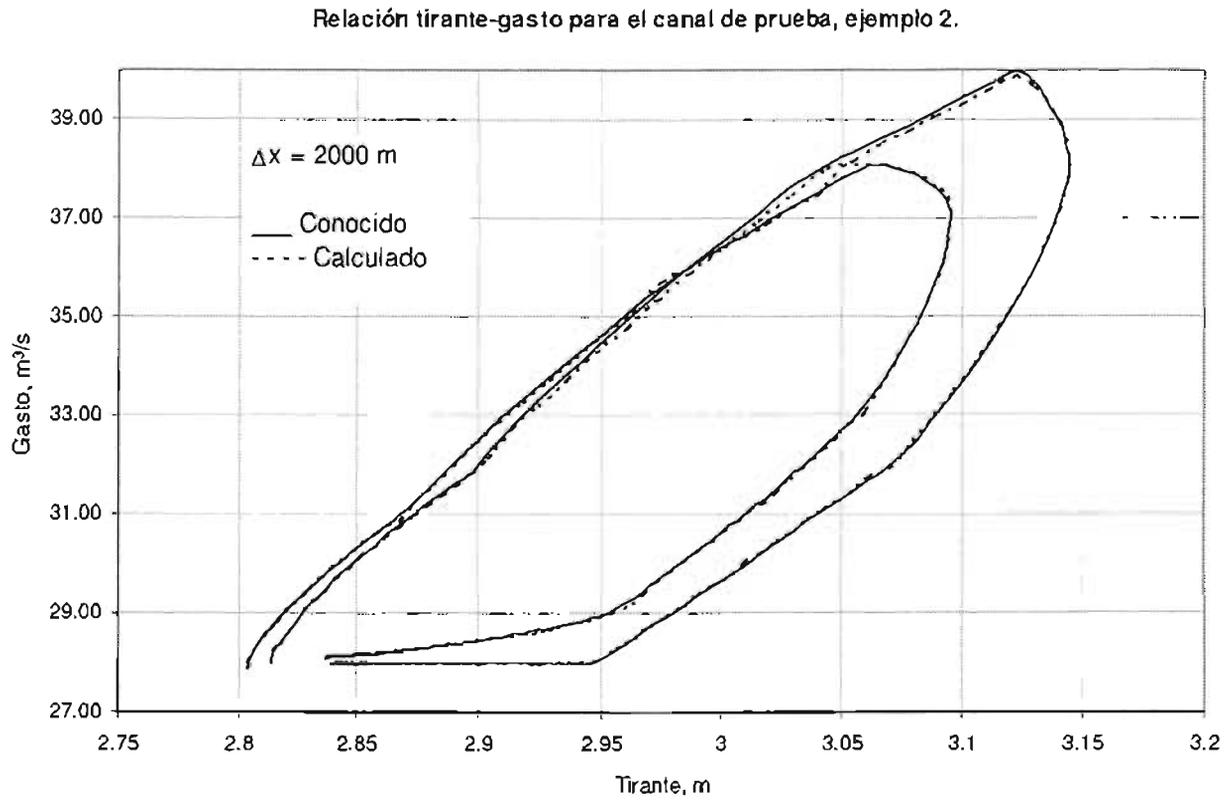


Fig. 10. Relación tirante-gasto para una separación de 2000 metros entre las secciones del canal de prueba.

Para $\Delta r = 3000$ m :

Relación tirante-gasto para el canal de prueba, ejemplo 2.

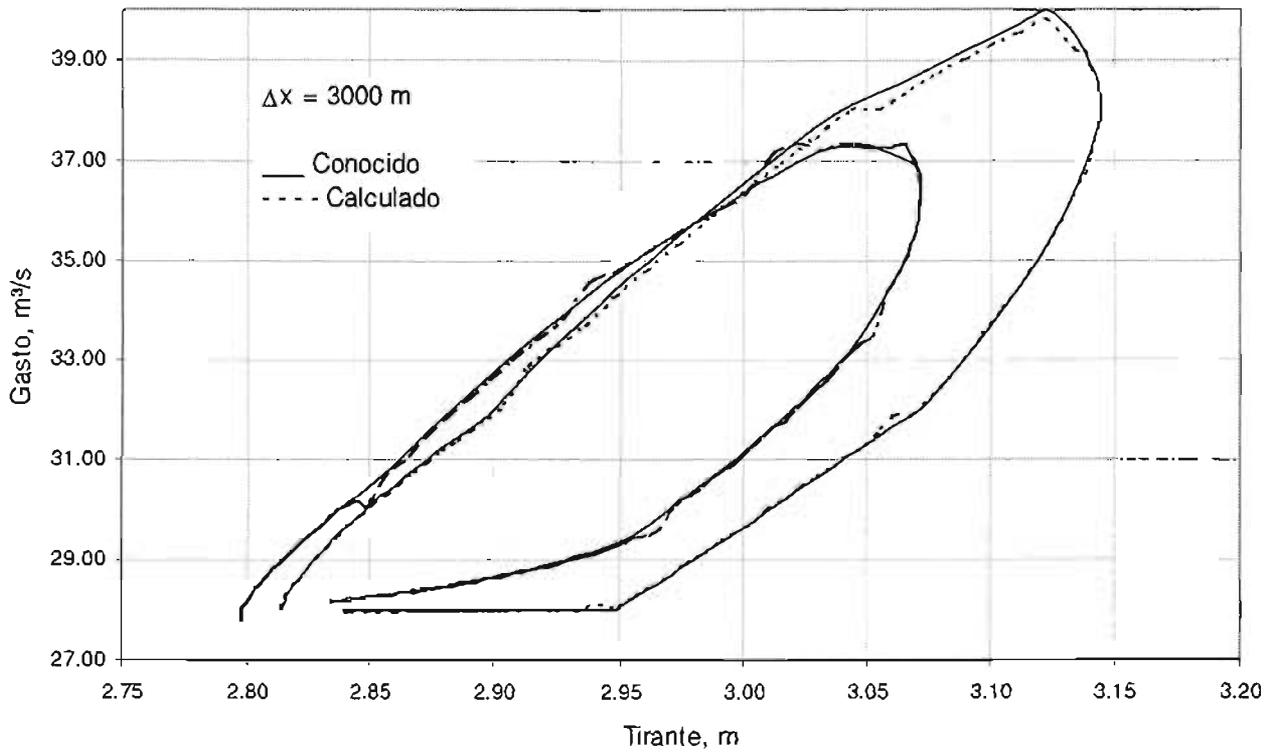


Fig. 11. Relación tirante-gasto para una separación de 3000 metros entre las secciones del canal de prueba.

Para $\Delta x = 4000$ m :

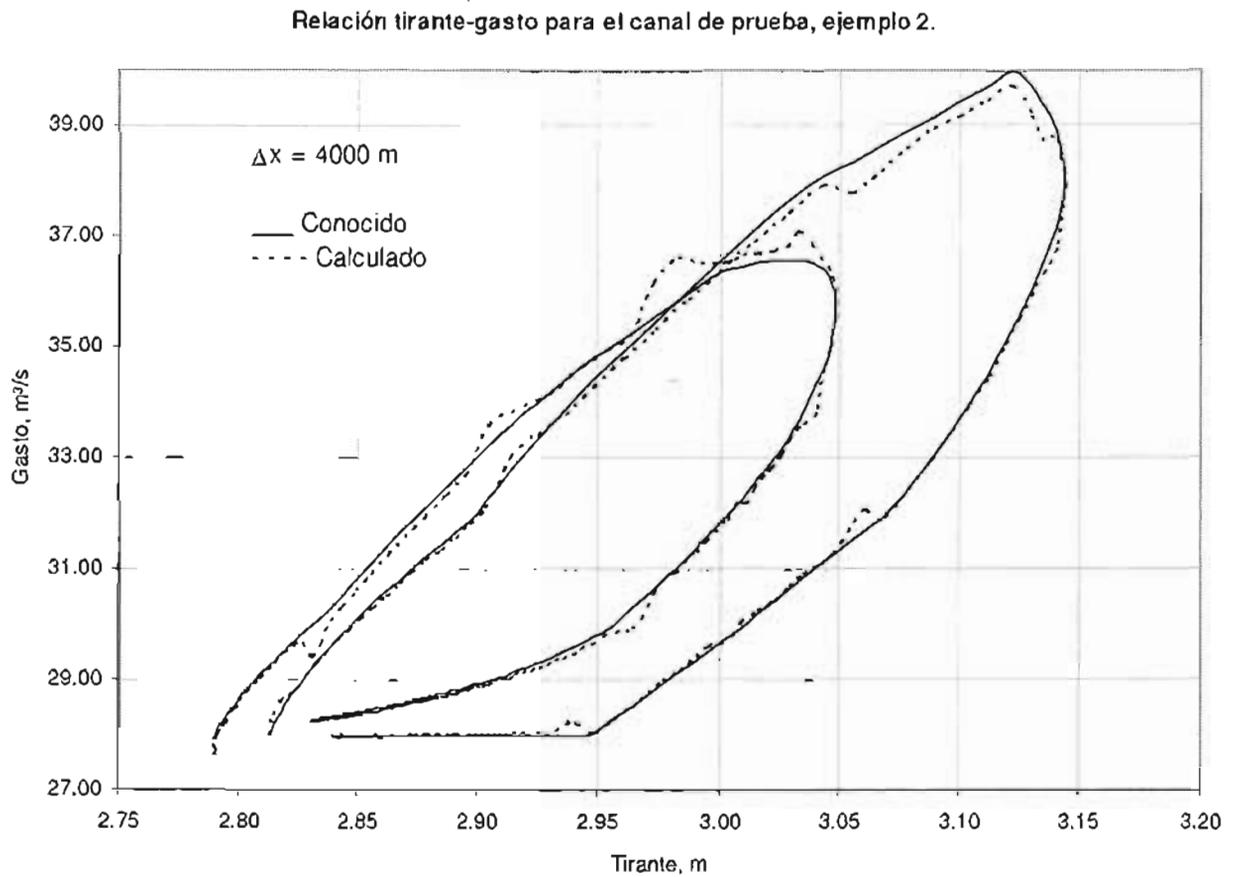


Fig. 12. Relación tirante-gasto para una separación de 4000 metros entre las secciones del canal de prueba.

Para $\Delta x = 5000$ m :

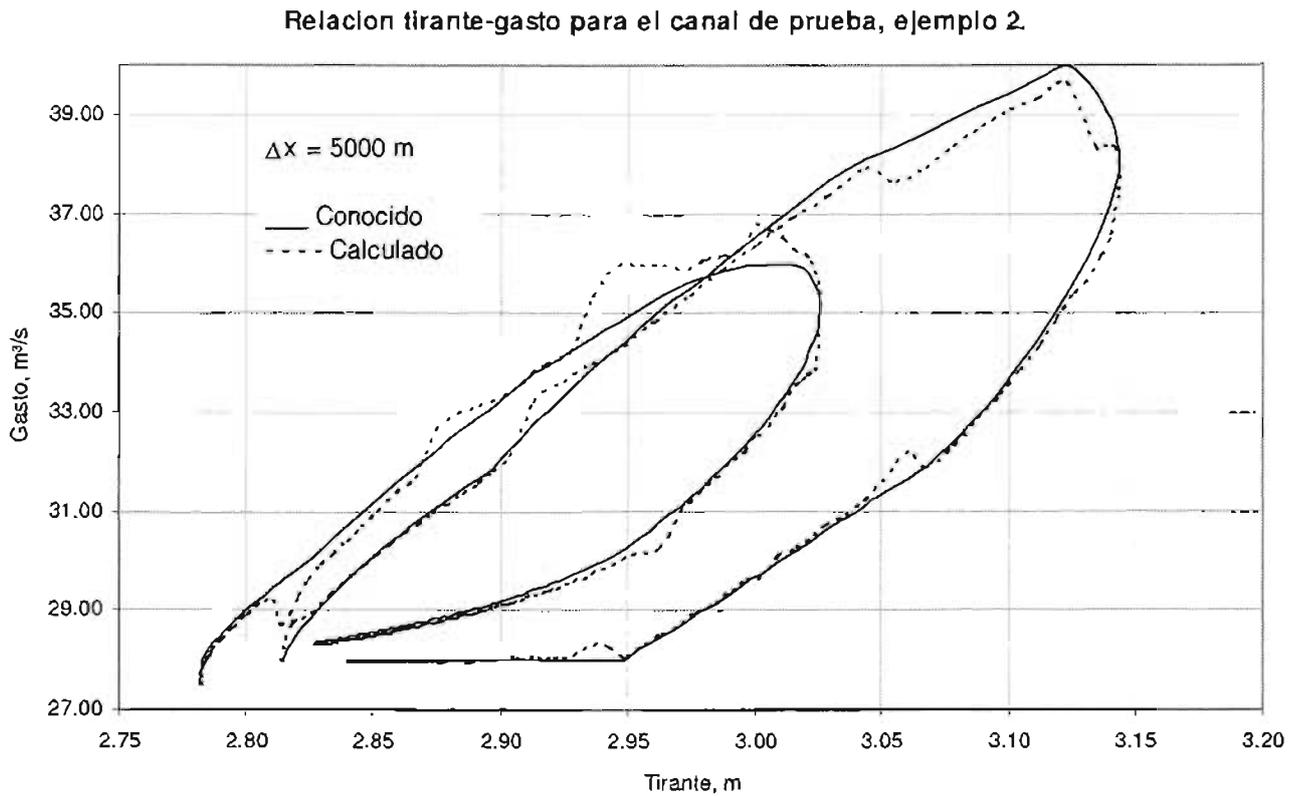


Fig. 13. Relación tirante-gasto para una separación de 5000 metros entre las secciones del canal de prueba.

En las figuras 9 a 13 se observa que el método de medición en dos secciones pierde aproximación mientras mayor sea la distancia entre las secciones consideradas.

Sin embargo, aún así, para el ejemplo 2, la aproximación es aceptable incluso para una distancia de 3000 m entre secciones, como se ve en la figura 11.

Para un tercer ejemplo, se considerará el caso en que el lazo debido a efectos transitorios es más complejo, debido al hidrograma de entrada.

Ejemplo 3.

Características del canal de prueba:

Tipo de régimen: Subcrítico.

Tramos del cauce: 2

Ancho: 15 m

Talud: 2.0

Coefficiente de Manning: 0.025

Pendiente: 0.0001

Longitud del primer tramo: 40000

Discretización del primer tramo: 200

Longitud del segundo tramo: 40000

Discretización del segundo tramo: 200

Elevación de referencia de la plantilla de fondo al inicio del cauce: 100

Gasto de alimentación del cauce: 28 m³/s.

Tirante aguas abajo: 0.90 m.

Se usan mallas finas ($\Delta x = 200$ m, $\Delta t = 409.10$ s).

Hora	m ³ /s
0.0	28
1.0	28
2.0	33
3.0	55
3.5	60
4.0	55
5.0	40
6.0	55
6.5	60
7.0	55
8.0	33
9.0	28
10.0	28

Tabla. 2. Datos del hidrograma de entrada para el ejemplo 3.

Tiempo total de simulación: 10 h.

Hidrograma tipo triangular por segmentos.

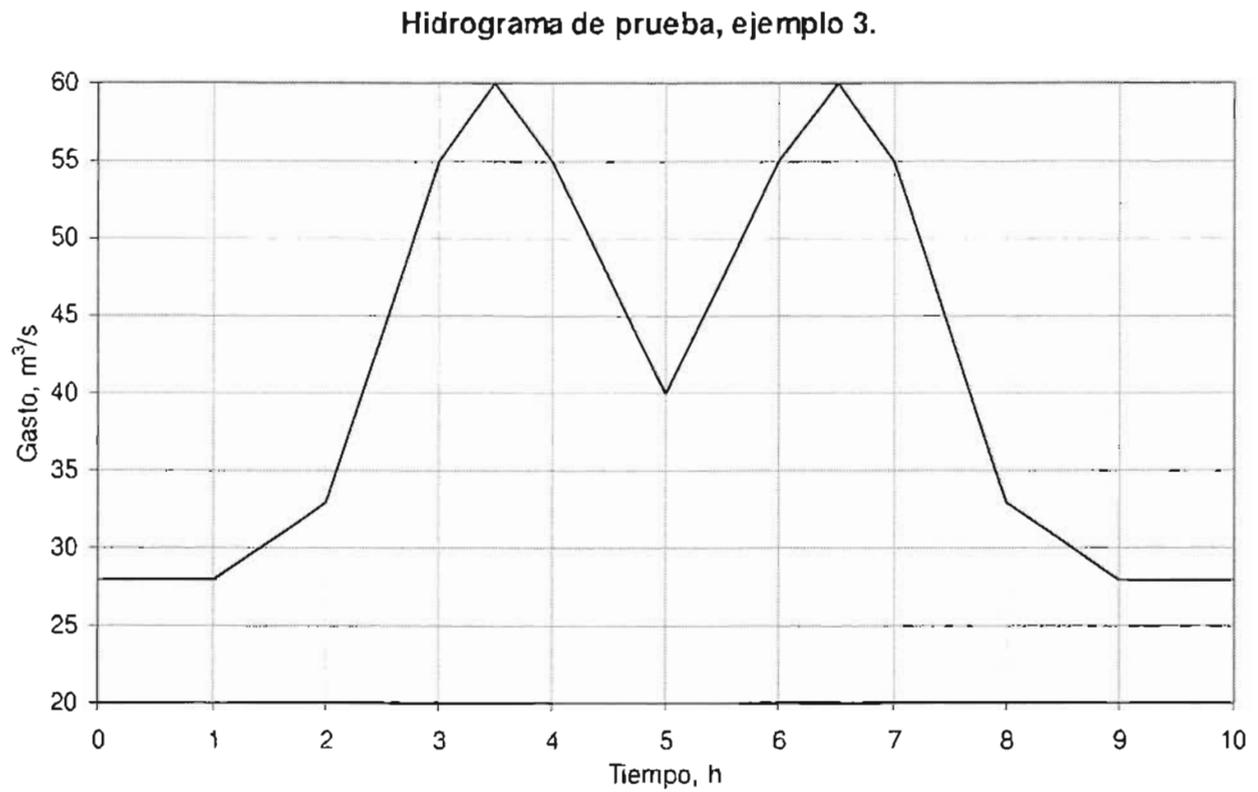


Fig. 14. Hidrograma de entrada para el canal de prueba del ejemplo 3.

Con los datos proporcionados para el ejemplo 3, se obtienen los resultados mostrados a continuación.

Relación tirante-gasto, ejemplo 3.

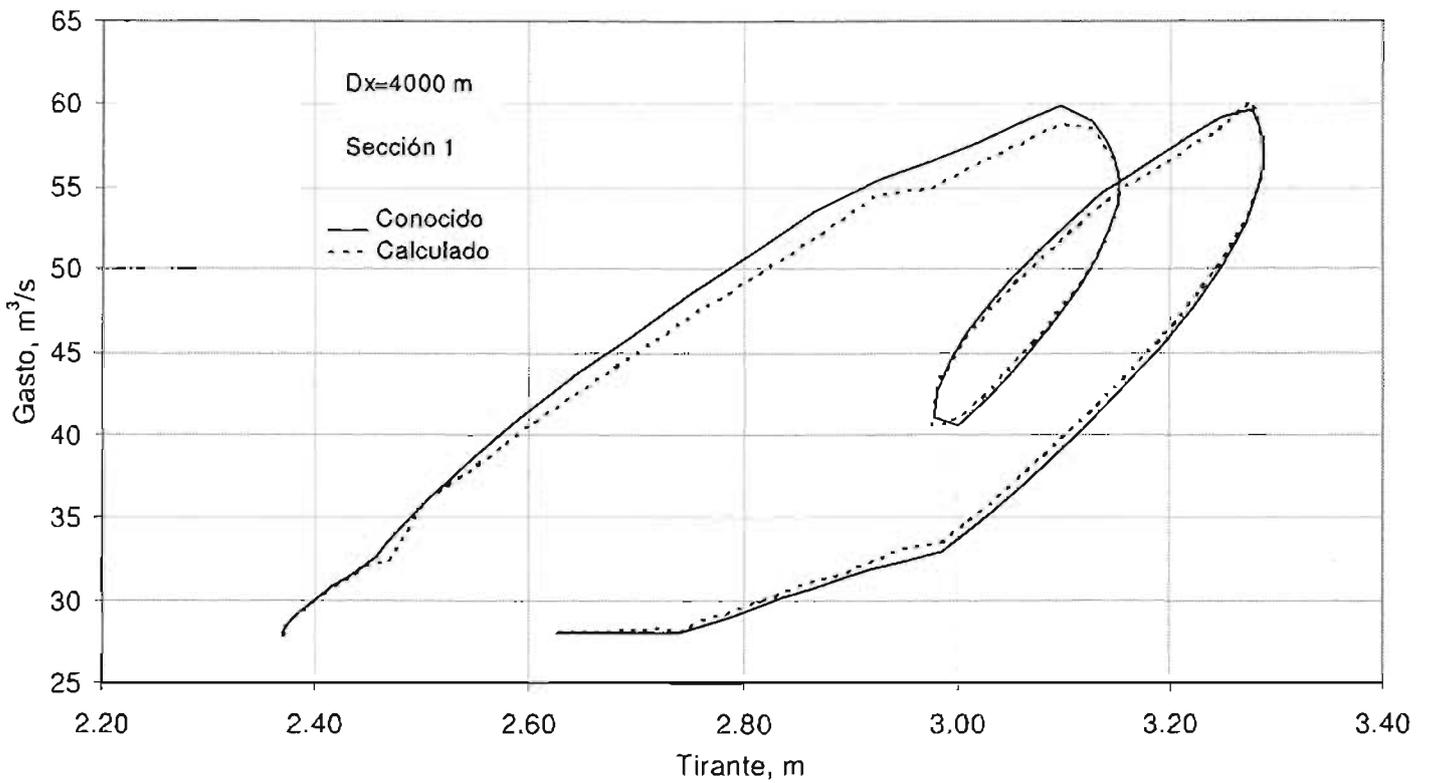


Fig. 15. Relación tirante-gasto para el canal del ejemplo 3, sección 1.

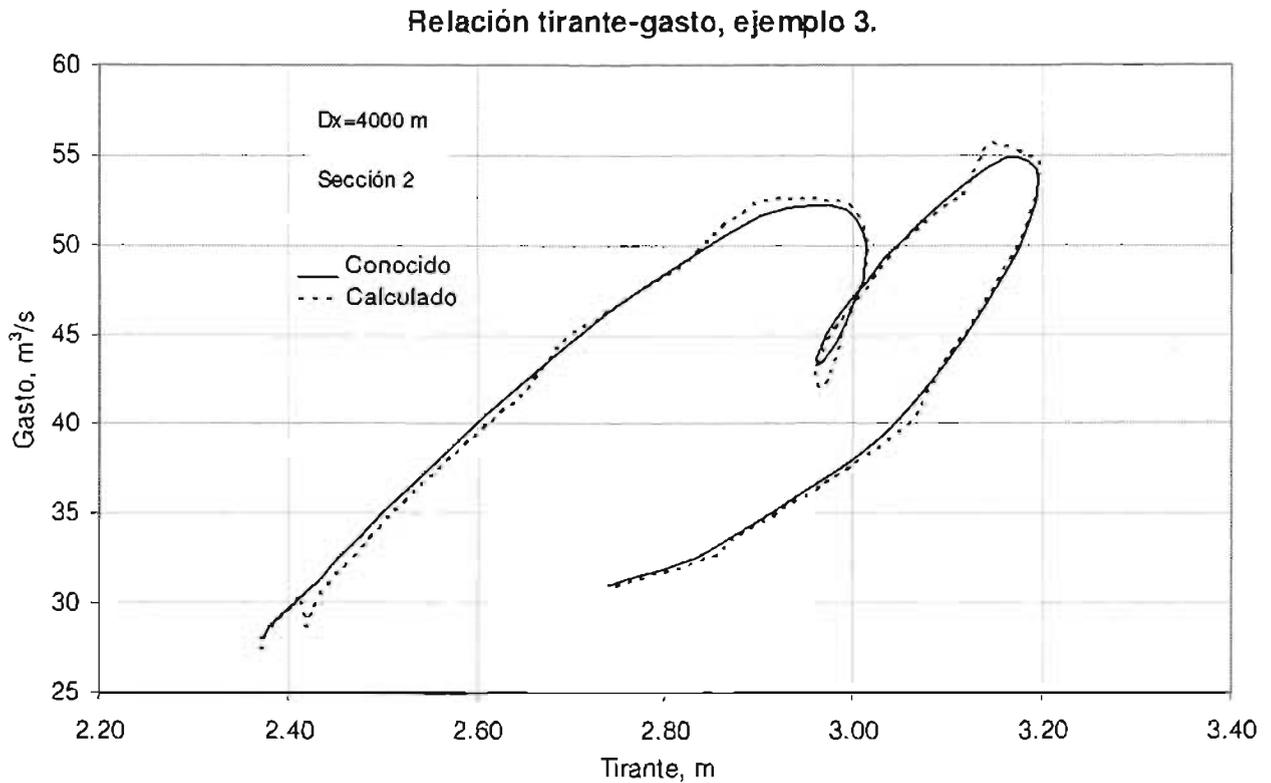


Fig. 15. Relación tirante-gasto para el canal del ejemplo 3, sección 2.

Nuevamente, en las figuras 14 y 15, se observa que la aproximación a la solución conocida es buena.

Es conveniente ahora realizar un ajuste por medio de una regresión a los resultados de los ejemplos 2 y 3, ya que, por tratarse de canales con mayores dimensiones, los lazos son más amplios, y conviene conocer una línea de tendencia para los mismos, con el fin de comparar el gasto máximo de la solución conocida con los calculados con la regresión y utilizando hidrometría en dos secciones.

4. 3. Ajustes de regresión potencial y polinomial.

Se realizarán primero ajustes a los resultados del ejemplo 2, para observar qué tipo de función se aproxima de mejor forma a dichos resultados.

Si el ajuste es de tipo potencial, tomando como punto común el inicio de los lazos, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{2.8601} \quad (22)$$

La gráfica de la función de ajuste se muestra en la figura 16.

Si el ajuste es potencial y la gráfica pasa por el punto representativo del lazo de mayor amplitud considerado, la función de ajuste es:

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{3.9141} \quad (23)$$

La gráfica correspondiente se muestra en la figura 17.

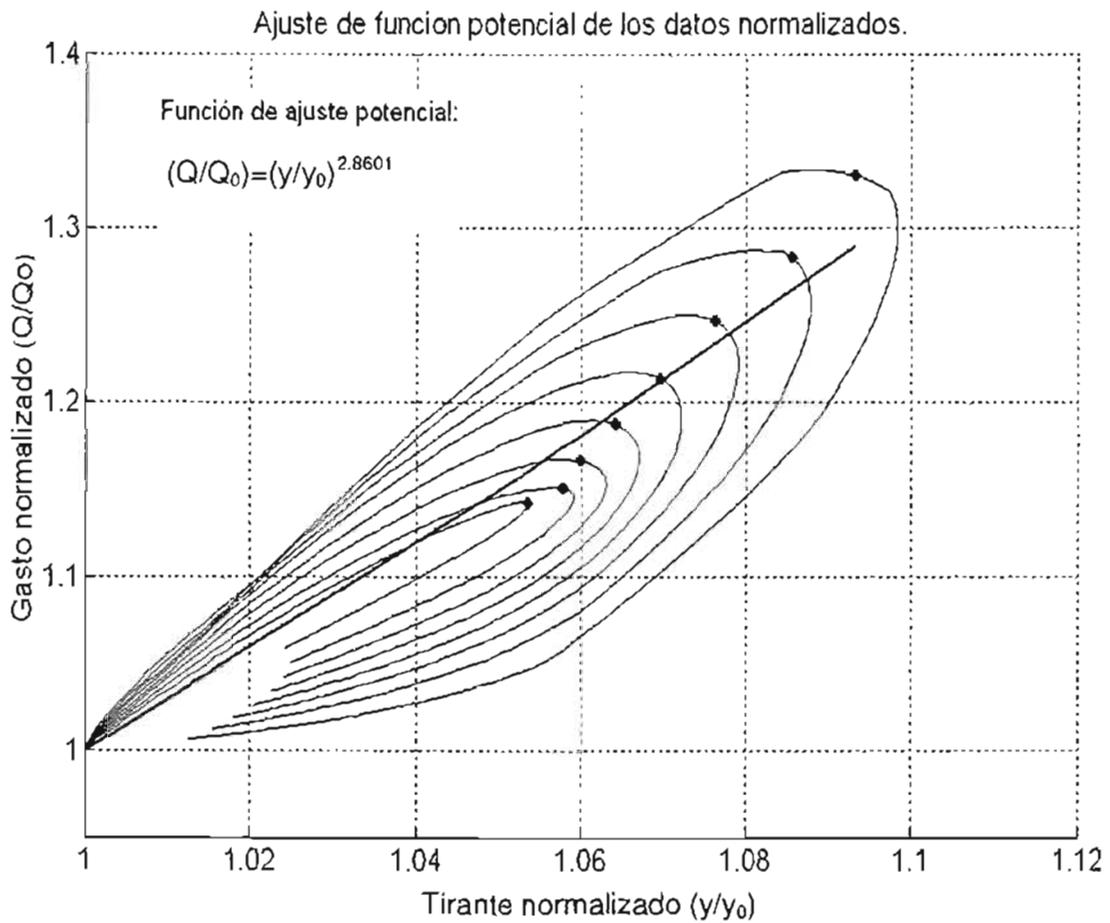


Fig. 16. Representación gráfica del ajuste de regresión potencial, cuando la gráfica pasa por el punto de inicio de los lazos.

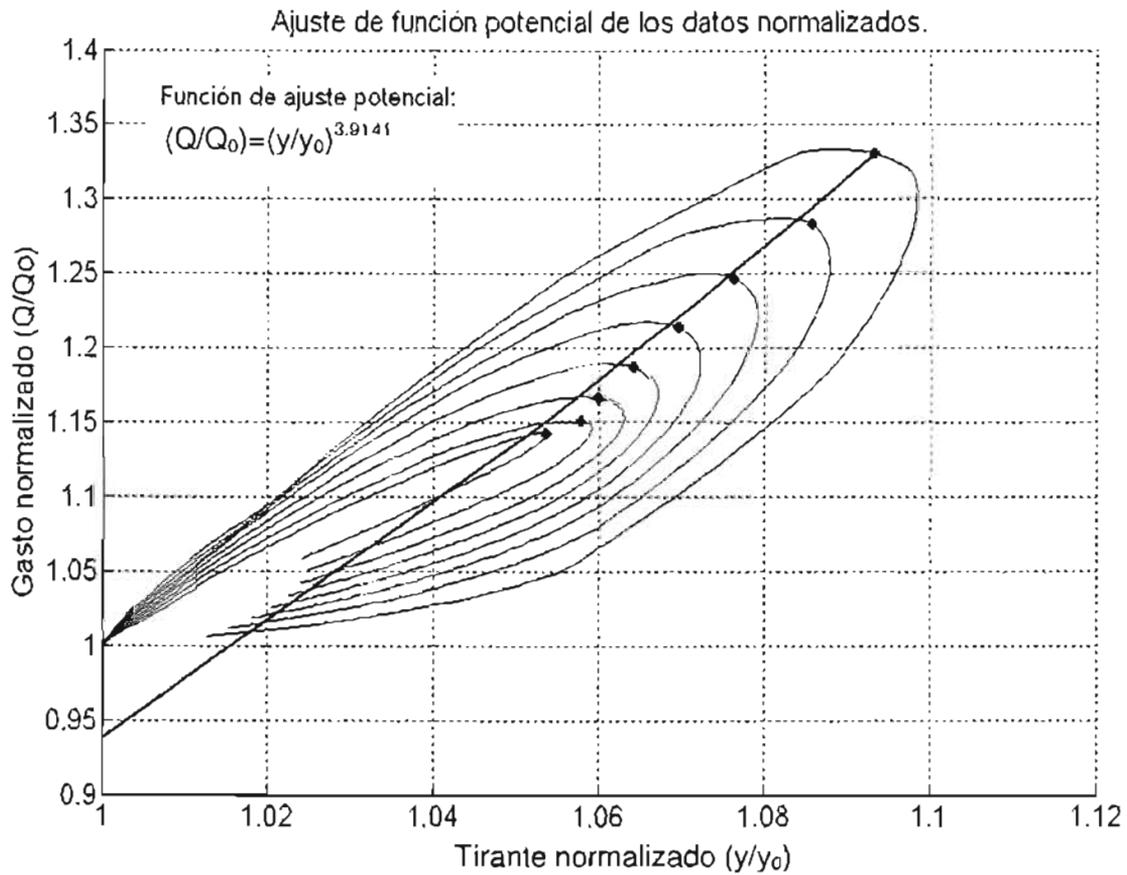


Fig. 17. Representación gráfica del ajuste de regresión potencial, cuando la gráfica pasa por el punto representativo del lazo de mayor amplitud considerado.

Para la realización de los ajustes de regresión anteriores, se han considerado solamente los valores indicados por medio de un punto en las curvas graficadas. Se ha hecho así ya que esos puntos son los representativos de cada curva en el caso de los datos normalizados.

Se observa que los ajustes realizados no se aproximan de forma adecuada a los valores de la relación tirante-gasto para el caso en estudio.

Se realizará a continuación un ajuste de regresión polinomial de segundo grado para los valores normalizados.

Para este caso, la función de ajuste es:

$$Q(y) = 13.3040 - 26.5029y + 14.1969y^2 \quad (23)$$

La gráfica correspondiente se muestra en la figura 18.

En dicha figura, se aprecia que la función se ajusta de mejor forma a los datos.

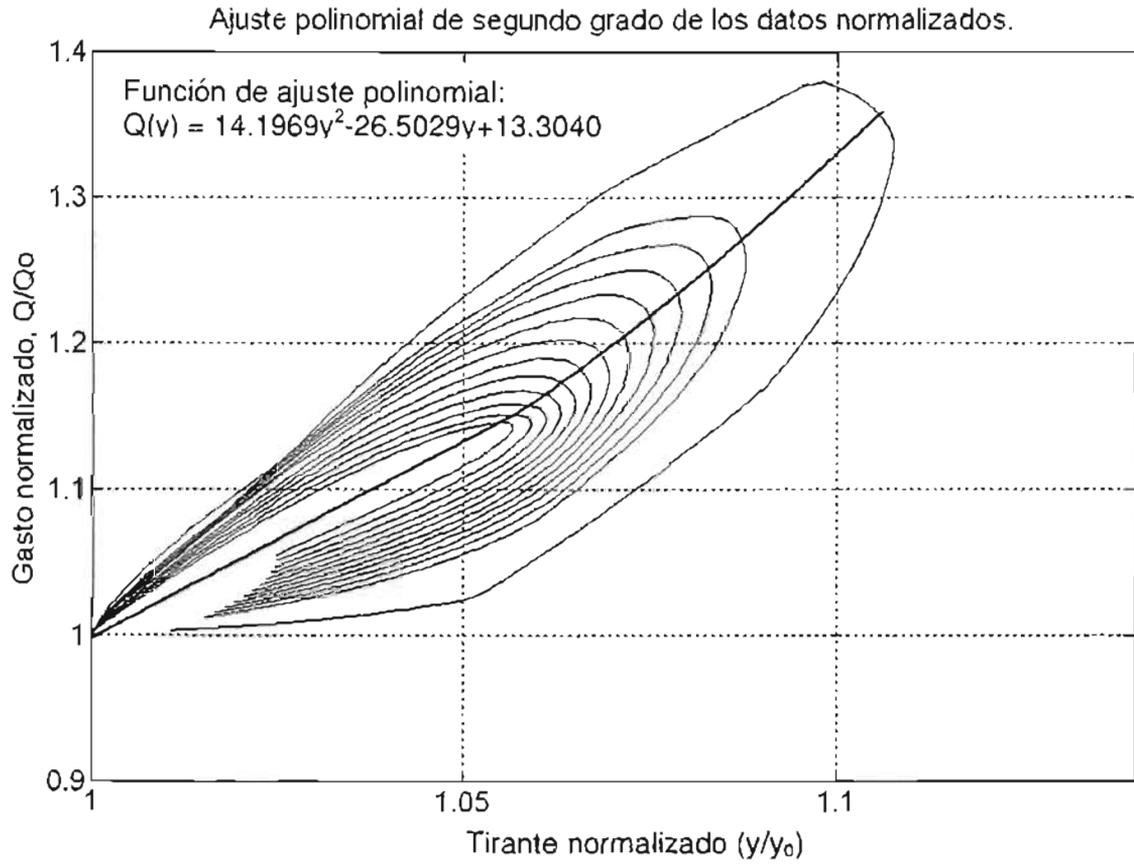


Fig. 18. Ajuste de regresión polinomial de segundo grado de los valores normalizados.

Ya que se observa una mejor aproximación de la función de tipo polinomial de segundo grado, este mismo tipo de función se calculará para los datos del ejemplo 3.

La función de ajuste, es:

$$Q(y) = 173.35 - 127.67y + 28.213y^2 \quad (24)$$

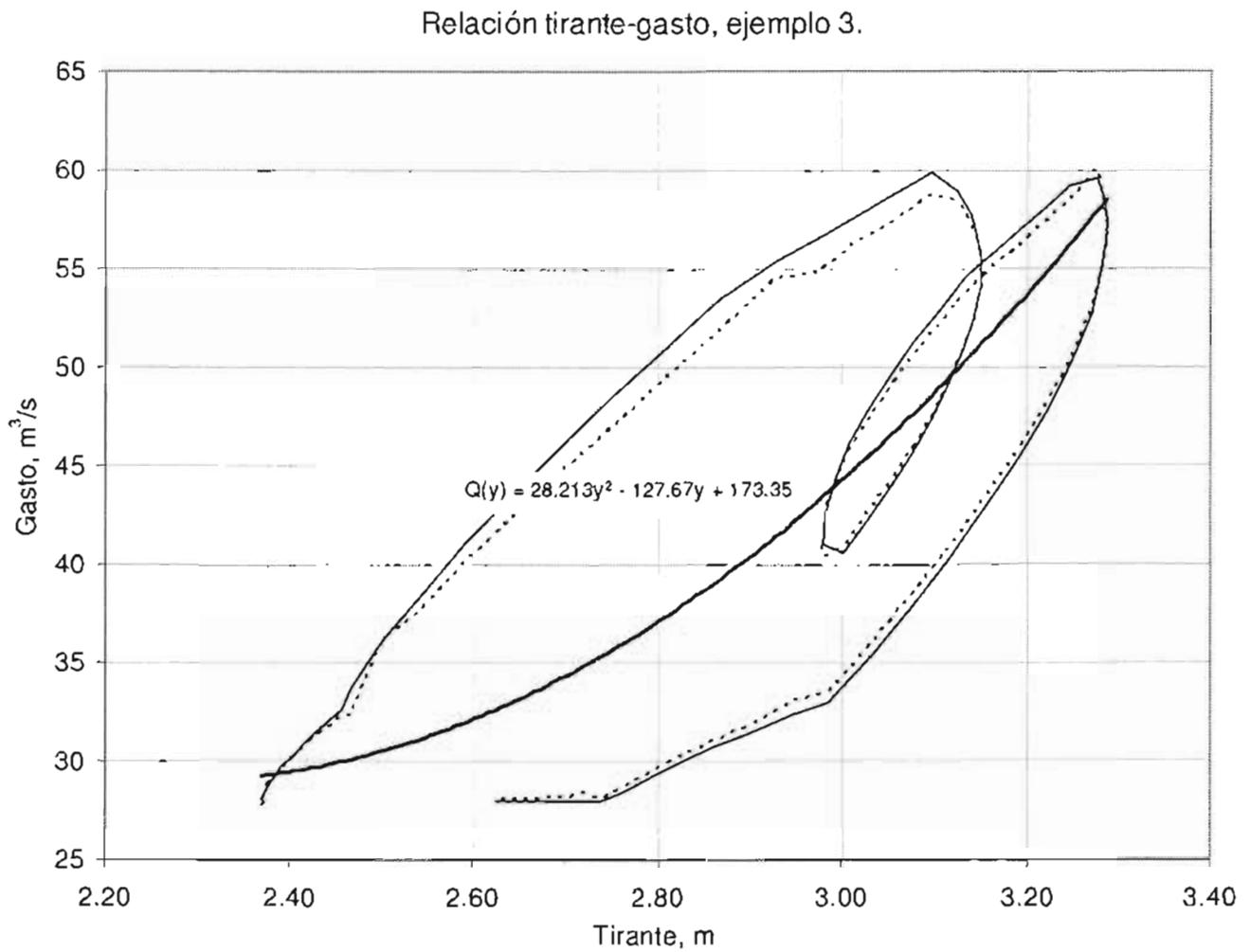


Fig. 19. Ajuste de regresión polinomial de segundo grado de los resultados del ejemplo 3.

4.4. Comparación de resultados.

Conociendo los resultados anteriores, se observa que los casos en los que existe mayor incertidumbre al determinar los gastos máximos, corresponden a los ejemplos 2 y 3, principalmente en el último.

Si para el ejemplo 2, se consideran los valores del gasto máximo calculados mediante las tres formas, se obtiene lo siguiente.

El gasto máximo conocido, calculado mediante el programa de cómputo, es:

$$Q_{m\acute{a}x} = 40 \text{ m}^3 / \text{s} \quad \text{para} \quad y = 3.12 \text{ m}$$

El gasto máximo calculado para ese mismo tirante, con la función de regresión es:

$$Q(3.12) = 83.859(3.12)^2 - 467.75(3.12) + 680.23 = 37.29 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Y, el gasto máximo calculado con hidrometría en dos secciones, es:

$$Q_{m\acute{a}x} = 39.83 \text{ m}^3 / \text{s} \quad \text{para} \quad y = 3.12 \text{ m}$$

Se observa que la diferencia entre el valor conocido del gasto máximo y el calculado con la regresión polinomial es mayor que la que existe entre ese mismo y el calculado con el método propuesto, siendo el error correspondiente a cada caso de 6.775% y 0.425%, respectivamente.

En la figura siguiente se muestran esas diferencias.

Relación tirante-gasto para el canal de prueba, ejemplo 2

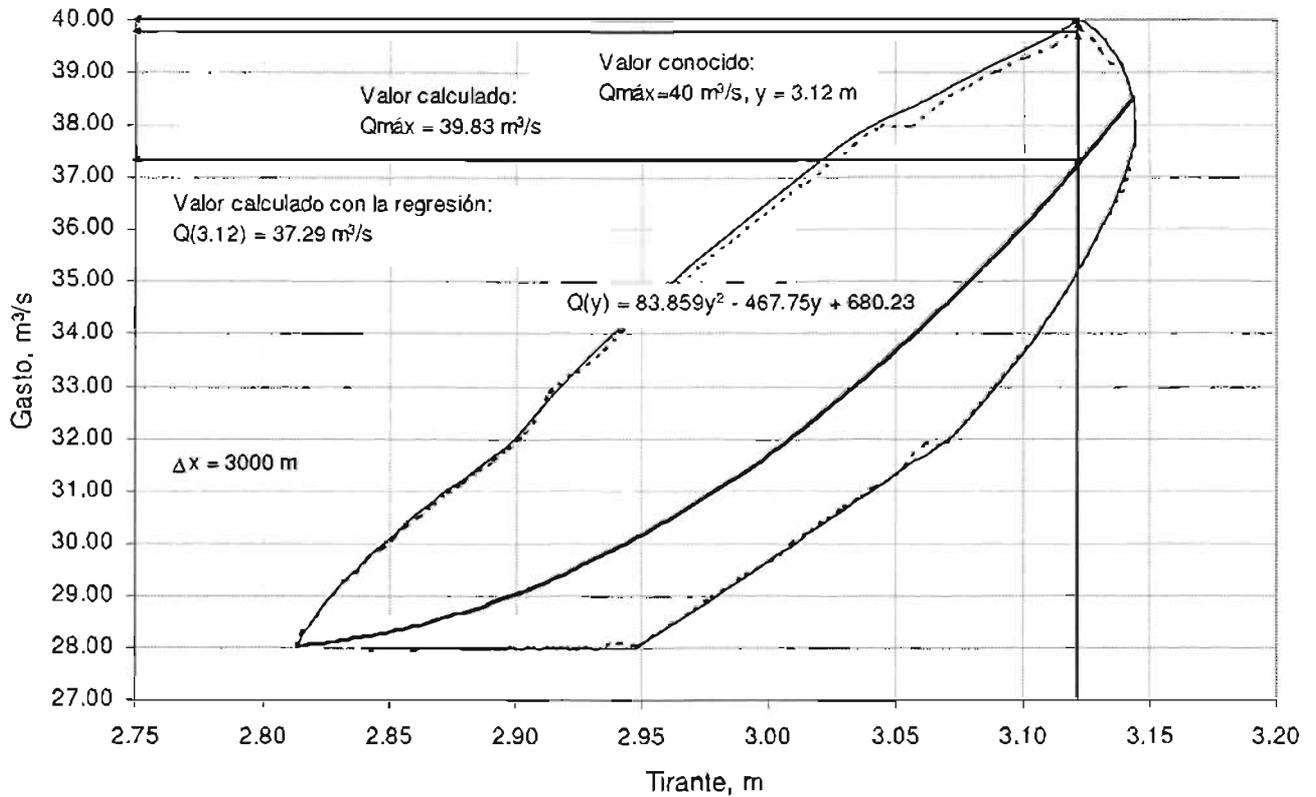


Fig. 20. Comparación de los resultados obtenidos en el ejemplo 2.

Haciendo lo mismo para el caso del ejemplo 3, se obtienen los siguientes resultados:

Gasto conocido, calculado mediante el programa de cómputo:

$$Q_{m\acute{a}x} = 60 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{para} \quad y = 3.10 \text{ m}$$

Gasto calculado mediante la función de regresión:

$$Q(3.10) = 28.213(3.10)^2 - 127.67(3.10) + 173.35 = 48.70 \text{ m}^3/\text{s}$$

Gasto calculado mediante hidrometría en dos secciones:

$$Q_{m\acute{a}x} = 58.84 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{para} \quad y = 3.10 \text{ m}$$

En este caso, los errores porcentuales son de 18.83% y 1.93% para la función de regresión potencial y la hidrometría en dos secciones, respectivamente.

La figura 21 es una representación gráfica de lo anterior.

Puede observarse claramente que la reducción del error porcentual es importante al realizar hidrometría en dos secciones.

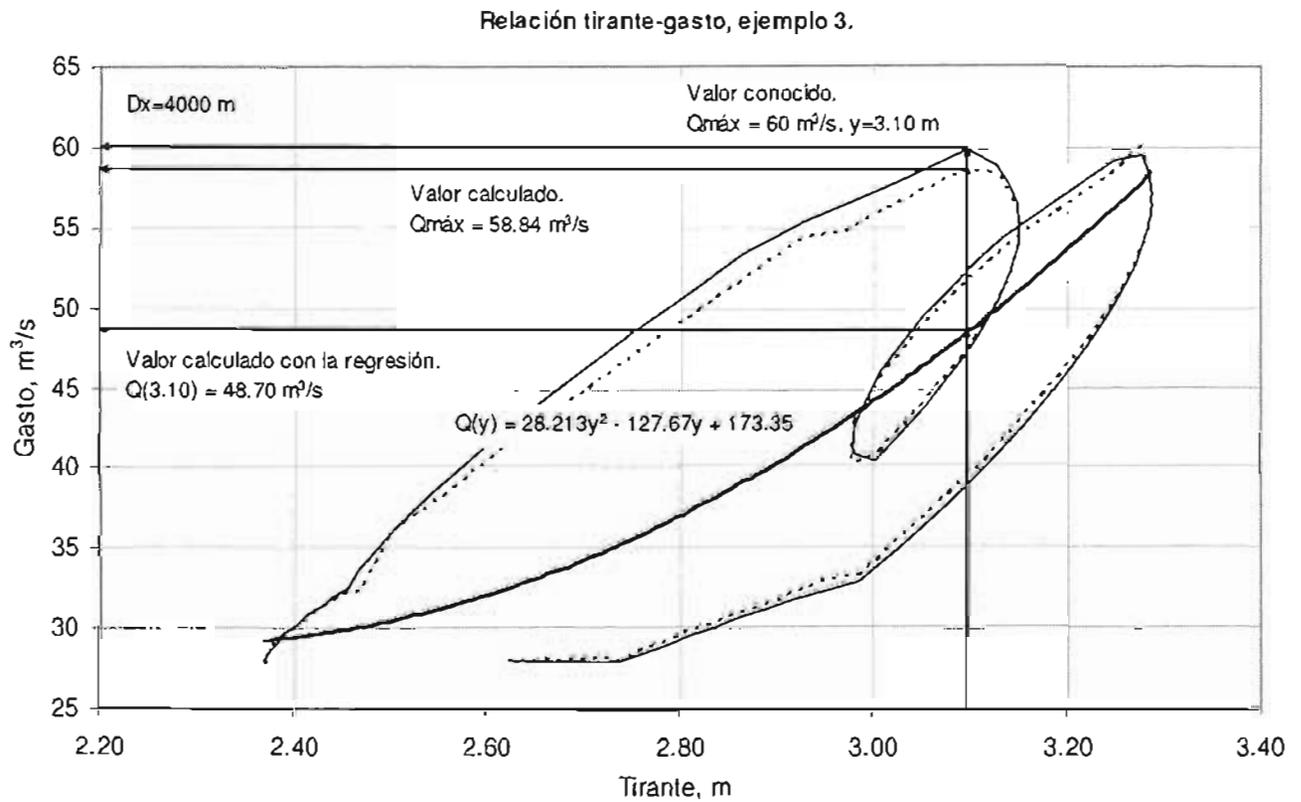


Fig. 21. Comparación de los resultados obtenidos en el ejemplo 3.

5. CONCLUSIONES

5. CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se ha presentado una metodología para la determinación de gastos en cauces durante avenidas, realizando mediciones hidrométricas en dos secciones del cauce y aplicando las ecuaciones de Saint-Venant, discretizadas mediante el esquema de Preissmann.

De acuerdo al objetivo planteado, los resultados obtenidos son satisfactorios, para los casos considerados. Es importante notar que los ejemplos aquí presentados son teóricos.

Para casos reales, será necesario realizar mediciones directamente en el cauce de interés, ya que en las estaciones hidrométricas que funcionan en la República Mexicana, sólo se reportan gastos medios diarios, por lo que las mediciones para la aplicación del método aquí presentado deberán hacerse exclusivamente para ese fin, aunque puede aprovecharse la realización de algún otro trabajo relacionado para la obtención de dichos datos.

Es probable que los resultados de la metodología presentada varíen al aplicarse a casos reales, ya que las condiciones suelen ser muy diferentes de los casos teóricos, y es difícil controlar y medir todas las variables que intervienen en el fenómeno de flujo en cauces naturales. Sin embargo, si es posible ajustar dichas condiciones a la forma en que fueron empleadas en el presente trabajo, es de esperarse que los resultados que se obtengan sean satisfactorios. Es en este sentido que deben entenderse las limitaciones que pueda ofrecer el método en esas condiciones.

Por lo anterior, se considera que el objetivo planteado al inicio de este documento, se ha cumplido, en las condiciones que en el mismo se han expuesto.

BIBLIOGRAFÍA.

1. Abbott, M. B., Computational Hydraulics, Elements of the Theory of Free Surface Flows; Pitman Publishing Limited, 1979.
2. Aguilar, Ch. A., Propiedades de propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a superficie libre; Tesis doctoral, UNAM, 2002.
3. Aparicio M., Fco. Javier, Fundamentos de Hidrología de Superficie; LIMUSA, Noriega Editores, 1987.
4. Cunge, J. A., Applied Mathematical Modeling of Channel Flow; Unsteady Flow in Open Channels, Vol. 1, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich; Water Resources Publications, 1975.
5. Cunge, J. A., Holly, F. M. Jr., Verwey A.; Practical Aspects of Computational River Hydraulics; Pitman Publishing Limited, 1980.
6. Chow, Ven Te, Hidráulica de los Canales Abiertos, Edit. Diana, 1982.
7. French, R. H., Hidráulica de canales abiertos; McGraw-Hill, 1988.
8. Henderson, F. M.; Open Channel Flow; The Macmillan Company, New York, 1966.
9. ISO 748:1997(E), Measurement of liquid flow in open channels – Velocity-area methods; International Standard.

10. ISO 1070:1992(E), Liquid flow in open channels – Slope-area method; International Standard.
11. ISO 1100-1: 1996(E), Measurement of liquid flow in open channels – Part 1: Establishment and operation of a gauging station; International Standard.
12. ISO 1100-2: 1998(E), Measurement of liquid flow in open channels – Part 2: Determination of the stage-discharge relation; International Standard.
13. ISO/TR 11627:1998(E), Measurement of liquid flow in open channels – Computing stream flow using an unsteady flow model; Technical Report.
14. Liggett, J. A.; Basic Equations of Unsteady Flow; Unsteady Flow in Open Channels, Vol. 1, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich; Water Resources Publications, 1975.
15. Liggett, J. A., Cunge, J. A.; Numerical Methods of Solution of the Unsteady Flow Equations; Unsteady Flow in Open Channels, Vol. 1, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich; Water Resources Publications, 1975.
16. Miller, W. A., Cunge, J. A., Simplified Equations of Unsteady Flow; Unsteady Flow in Open Channels, Vol. 1, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich; Water Resources Publications, 1975.
17. Panton, R. L., Incompressible Flow. John Wiley & Sons; Nueva York, 1984.

18. Stelkoff, Theodor, One-Dimensional Equations of Open Channel Flow; Journal of the hydraulics division, Proceedings of the American Society of civil Engineers; May, 1969.
19. Weinmann, Erwin P., Laurenson, Eric M., Aproximate Flood Rounting Methods: A Review; Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of civil Engineers; December, 1979.
20. Yevjevich, V.; Unsteady Flow in Open Channels, Vol. 1, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich; Water Resources Publications, 1975.