



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN**

**DESESTACIONALIZACIÓN DE SERIES DE
TIEMPO EN VARIABLES ECONÓMICAS**

T E S I S A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JOSE ANGEL JUAREZ ORDOÑEZ

ASESOR: MTRO. LUIS ALEJANDRO TAVERA PEREZ

JUNIO 2005.

m346361



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: José Angel Juárez
Ordoñez

FECHA: 07-07-05

FIRMA: _____

DEDICATORIAS

Dedico este trabajo a mi familia:

A Ana Sofia, a Liz, a mis padres, a mis hermanos y a Carolina (siempre los tengo presentes).

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que directa o indirectamente me han ayudado a lograr mis objetivos:

A toda mi familia, a mi asesor, Alejandro Tavera, a todos los profesores que han intervenido en mi formación, y a todos mis amigos.

RESUMEN

Existe un gran número de técnicas estadísticas para desestacionalizar series de tiempo económicas. Por otra parte, hay diversas metodologías para ajustar este mismo tipo de series por diferentes factores que las afectan. Este trabajo presenta algunos métodos sugeridos para llevar a cabo un análisis estadístico exhaustivo de las series económicas, tanto mensuales como trimestrales. Obviamente, se dio un mayor énfasis a la exposición de aquellos procedimientos que mejor se adaptan a las circunstancias de las series económicas mexicanas.

PALABRAS CLAVE:

Series de tiempo, Estacionalidad, Desestacionalización, Promedios Móviles, X12-ARIMA, Modelos RegARIMA, Días Laborables, Semana Santa, Outliers Aditivos, Cambios de Nivel, Cambios Temporales, Tendencia, Pronósticos.

ABSTRACT

There is a large number of statistical techniques for the seasonal adjustment of economic time series. Furthermore, there are several methodologies to adjust these type of series to different factors that affect them. This work presents some suggested methods to realize an exhaustive statistical analysis of monthly and quarterly economic series. Obviously, it is given a greater emphasis to the exposition of those procedures that fit better the circumstances of the Mexican economic time series.

KEYWORDS:

Time series, Seasonality, Seasonal Adjustment, Moving Averages, X12-ARIMA, RegARIMA Models, Trading Days, Easter, Additive Outliers, Level Shifts, Temporary Changes, Trend, Forecasts.

ÍNDICE

Introducción.....	1
Capítulo I. ANTECEDENTES.....	5
1.1 Breve Historia de la Desestacionalización.....	5
1.2 Promedios Móviles.....	12
1.2.1 Algunas Definiciones y un Poco de Teoría.....	12
1.2.1.1 Definiciones.....	14
1.2.1.2 Funciones de Ganancia y de Desfasaje.....	15
1.2.1.3 Conservación de la Tendencia.....	18
1.2.1.4 Eliminación de la Estacionalidad.....	19
1.2.1.5 Reducción del Componente Irregular.....	20
1.2.1.6 Un Ejemplo de Construcción de un Promedio Móvil....	20
Capítulo II. AJUSTES PREVIOS.....	22
2.1 Estimación del Efecto debido a la Composición Diaria del Mes (Días Laborables).....	22
2.1.1 Algunas Particularidades de Nuestro Calendario.....	22
2.1.2 Los efectos de Días Laborables.....	23
2.1.3 El Modelo de Regresión.....	24
2.1.4 Estimación de los Parámetros.....	25
2.2 Estimación del Efecto debido a la Semana Santa.....	27
2.2.1 Un Poco de Historia.....	27
2.2.2 El Cálculo de las Fechas de Pascua.....	27
2.2.3 Semana Santa y la Desestacionalización.....	28
2.2.4 El Modelo Easter.....	30
2.2.4.1 Modelo y Estimación.....	30
2.2.5 El Modelo Scaester.....	31
2.2.5.1 Modelo y Estimación.....	31
2.3 Modelos RegARIMA y Outliers.....	33
2.3.1 Modelos RegARIMA en X12-ARIMA.....	33
2.3.2 Regresores Utilizados en el Módulo RegARIMA.....	35
2.3.2.1 Outlier Aditivo.....	36
2.3.2.2 Cambio de Nivel.....	36
2.3.2.3 Cambio Temporal.....	36
2.3.2.4 Estacionalidad Fija.....	37
2.3.3 Detección automática de Outliers.....	37
2.3.3.1 Algoritmo para la Detección Automática de Outliers.	38
2.3.3.2 Inestabilidades de la Identificación de Outliers...	40

Capítulo III. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE SERIES DE TIEMPO.....41

3.1	Introducción.....	41
3.2	Función de Autocorrelación de Procesos Estacionarios...47	47
3.2.1	Propiedades de Autocorrelación de los Modelos Estacionarios.....	47
3.3	Modelos Lineales Estacionarios.....	56
3.3.1	Proceso Lineal General.....	56
3.3.2	Procesos Autorregresivos.....	65
3.3.3	Procesos de Promedios Móviles.....	77
3.3.4	Procesos Autorregresivos de Promedios Móviles.....	84
3.4	Modelos Lineales No Estacionarios.....	87
3.4.1	Procesos Autorregresivos Integrados de Promedios Móviles.....	87
3.5	Pronósticos.....	92
3.6	Identificación de Modelos.....	99
3.7	Estimación de Modelos.....	105

Capítulo IV. DESESTACIONALIZACIÓN CON EL MÉTODO X-11.....109

4.1	Componentes y Esquemas de Descomposición.....	109
4.2	Promedios Móviles.....	110
4.3	Un Algoritmo Simple de Desestacionalización.....	111
4.4	El Algoritmo Base del Método X-11.....	112
4.5	Puntos Atípicos y Efectos de Calendario.....	114
4.6	El Principio Iterativo de X-11.....	115
4.6.1	Etapas A: Ajustes Previos.....	116
4.6.2	Etapas B: Primera Corrección Automática de la Serie.....	116
4.6.3	Etapas C: Segunda Corrección Automática de la Serie.....	116
4.6.4	Etapas D: Desestacionalización.....	118
4.6.5	Etapas E, F y G: Correcciones por Valores Extremos, Estadísticas y Gráficas.....	118
4.7	De Census X-11 a X-11-ARIMA y X-12-ARIMA.....	118
4.8	Descripción Detallada del Método X-11 con Tratamiento de Valores Extremos.....	121
4.9	Diagnósticos del Ajuste Estacional en X-12-ARIMA.....	129
4.9.1	Uso de las Estimaciones del Espectro para detectar Efectos Estacionales y de Días Laborables.....	129
4.9.2	Diagnósticos para la Estabilidad de los Ajustes Estacionales y las Tendencias.....	132
4.9.2.1	Revisiones Históricas.....	132
4.9.3	Comparación de Modelos.....	134
4.9.3.1	Pronósticos Fuera de la Muestra.....	134
4.9.3.2	Historias AIC.....	136
4.9.4	Estadísticas de Calidad del Ajuste Estacional.....	137

Capítulo V: APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA A UNA SERIE REAL (PIB)	144
5.1 Presentación de la Serie.....	144
5.2 Análisis Básico de la Serie.....	146
5.3 Estimación y Ajuste de Efectos de Calendario y de Outliers.....	147
5.4 Identificación y Estimación del Modelo para la Serie Ajustada.....	158
5.5 Diagnósticos de los Modelos Identificados y Pronósticos.....	166
5.6 Desestacionalización de la Serie.....	181
5.7 Diagnósticos de la Desestacionalización.....	187
 CONCLUSIONES.....	 195
 BIBLIOGRAFÍA.....	 199

INTRODUCCIÓN

En nuestro país se ha vuelto cada vez más necesario poder contar con información veraz y oportuna sobre los diferentes datos e indicadores económicos y estadísticos. Los diferentes tipos de usuarios utilizan estos datos para distintos propósitos, como pueden ser el de conocer la evolución del desarrollo social y económico de nuestra nación, o elaborar investigaciones propias acerca de la situación actual del país, sus causas y sus consecuencias, por ejemplo.

Entre toda la variedad de datos que a los que se puede tener acceso se encuentran las cifras macroeconómicas. En los últimos años, este tipo de información ha cobrado una gran importancia, debido a que muestran la actualidad de la economía mexicana. Entre estas cifras importantes podemos encontrar datos tan trascendentes como son: el Producto Interno Bruto, la Balanza Comercial, el Desempleo, la Inflación, Índices de la Actividad Industrial e índices de la Actividad Económica (Índice Global de la Actividad Económica, por ejemplo), entre otros.

Existen diversos sectores en México y en el mundo que están interesados en tener disposición oportuna de estas variables macroeconómicas. En México, el principal proveedor de estos datos es el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), que es la institución encargada de calcular y difundir la mayoría de este tipo de información económica. Otras instituciones que proveen datos interesantes sobre la economía mexicana son el Banco de México (Banxico), la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y la Secretaría de Economía (SE), por mencionar algunas.

En la actualidad los usuarios de este tipo de información se encuentran tanto en el sector privado como público. Algunos de ellos son las instituciones gubernamentales como las Secretarías de Estado o gobiernos estatales y locales dentro de México. También los son instituciones extranjeras, como institutos de estadística o gobiernos del exterior. Dentro del ámbito privado podemos hallar instituciones financieras como bancos o casas de bolsa, e igualmente inversionistas privados y medios de comunicación pueden hacer uso de este tipo de información para diferentes propósitos. Como se puede ver existe una diversidad muy amplia de sectores que requieren de cifras altamente confiables y oportunas para desarrollar de manera óptima sus actividades.

Los datos macroeconómicos son dados a conocer generalmente en forma mensual o trimestral, aunque existen cifras que se presentan quincenalmente o incluso diariamente. Comúnmente la información económica recopilada trae consigo efectos que son ajenos a la naturaleza propia de los datos. Esta información puede estar afectada por varios sucesos. El más común de ellos se conoce por estacionalidad, que son comportamientos que se repiten con cierta regularidad en los mismos periodos de un ciclo. Por ejemplo, se puede observar que las ventas al menudeo de las tiendas departamentales se incrementan invariablemente en el mes de diciembre de cada año, para luego caer fuertemente en el mes posterior. Estos hechos distorsionan considerablemente la información relevante que los datos pueden presentar, es decir, pueden conducir a conclusiones erróneas.

Otro tipo de efecto que puede perturbar a las variables económicas son los llamados efectos de calendario, que se pueden desglosar en dos tipos. El primero de ellos resulta de la distinta composición de los días de la semana, y es conocido por efecto de días laborables. Las cifras macroeconómicas pudieran no ser comparables entre sí debido a que esta composición de los días podría influir de manera desigual a dos indicadores diferentes, o para una misma serie de datos causar efectos opuestos para dos periodos distintos. El segundo se conoce como efecto de Semana Santa, este es importante dado que esta celebración ocurre en distintas fechas cada año, en ocasiones se presenta en marzo y otras veces en abril. Por ejemplo, esto puede provocar que un mes o trimestre esté influenciado por un número mayor o menor de días laborables que otro.

Existen además alteraciones que los datos económicos pueden sufrir inesperadamente y que crean confusión acerca del comportamiento real de la variable. Estos efectos tienen diversas denominaciones, podemos encontrarlos con el nombre de outliers, en inglés, valores extremos, observaciones aberrantes, etc. Dentro de este tipo de alteraciones podemos apreciar cambios de nivel, cambios temporales y outliers aditivos.

Por estas razones anteriores y dado que se requiere que los usuarios dispongan de la información económica más completa, es necesario contar con una metodología capaz de proporcionar la información relevante y los efectos por las cuales estas variables se ven afectadas.

Esta tesina tiene como objetivo principal realizar un estudio acerca de un método de desestacionalización conocido como X-11, específicamente del programa X12-ARIMA, que se basa en este método para efectuar el ajuste estacional. Este programa incluye otras técnicas para elaborar el ajuste por los diversos efectos comentados anteriormente. El objetivo principal de este trabajo no sólo es elaborar este estudio, sino aplicar esta metodología a una serie nacional y así poder observar el desempeño que tiene la técnica con los datos mexicanos. Con esto podremos ver qué tan conveniente es realizar la desestacionalización y ajuste de las series mexicanas con este programa.

El programa X12-ARIMA incorpora múltiples técnicas y procesos para lograr los ajustes deseados. Para comprender los métodos empleados en este programa se requiere tener conocimientos de probabilidad, estadística, procesos estocásticos, análisis de series de tiempo ecuaciones en diferencia y econometría. Esto hace de este programa un tema de investigación aplicada relevante para la carrera de Actuaría en la UNAM.

La tesina se organiza de la siguiente manera. El primer capítulo, "Antecedentes", expone una introducción básica del ajuste estacional. Este capítulo reúne una breve historia de la desestacionalización así como definiciones y un poco de teoría acerca de promedios móviles necesarios para el desarrollo posterior del trabajo.

En el capítulo II, "Ajustes Previos", se exponen las técnicas empleadas para conseguir los distintos ajustes previos a la desestacionalización. Primero se analizan los efectos de días laborables y de Semana Santa. Posteriormente se introduce la descripción de los modelos $reg=ARIMA$, a partir de los cuales se realizarán los ajustes por outliers. En la última parte del capítulo se muestra un procedimiento para detectar automáticamente los efectos de outliers.

El capítulo III, "Análisis Estadístico de Series de Tiempo", se hace una presentación de la teoría de los Modelos ARIMA. Estos modelos son fundamentales en el proceso de desestacionalización dado que se necesita extrapolar la serie para poder llevar a cabo el proceso de desestacionalización. En este capítulo se presentan las características generales de estos modelos, las formas de obtener los pronósticos, de identificar los modelos, de estimarlos y de realizar el diagnóstico de ellos. También se exhiben las propiedades de los modelos ARIMA estacionales.

En el cuarto capítulo, "Desestacionalización con el Método X-11", se expone el procedimiento utilizado por el programa X12-ARIMA, llamado X-11, para alcanzar el ajuste estacional. Aquí se describe detalladamente el algoritmo que compone el método citado. Al final de este capítulo se describen varios diagnósticos sobre la descomposición o ajuste de la serie. Este es el tema central del trabajo y es mediante este proceso que se consigue la eliminación de los efectos estacionales presentes en los datos económicos.

Después, el capítulo V, "Aplicación de la Metodología a una Serie Rea (PIB)" despliega los resultados derivados del análisis de una serie real, en nuestro caso la serie del Producto Interno Bruto de México, mediante la aplicación de todos los procedimientos descritos en los capítulos anteriores. Este capítulo es de clara importancia porque se aplica el estudio realizado sobre el programa utilizado y su desempeño ante una serie real. También nos permite discernir si este paquete proporciona una forma apropiada de realizar el ajuste anhelado para el caso de datos mexicanos.

Finalmente, el trabajo termina con las conclusiones que arrojó el estudio de este tema.

Capítulo I: ANTECEDENTES

1.1 Breve Historia de la Desestacionalización

En la actualidad es común descomponer una serie observada X_t , en varios componentes no observados, siguiendo un modelo del tipo:

$$X_t = T_t + C_t + S_t + I_t$$

en donde T_t , C_t , S_t e I_t designan la *tendencia*, el *ciclo*, la *estacionalidad* y el *irregular*, respectivamente. El origen de esta idea proviene, sin duda, de la astronomía.

En el siglo XVII, dada una mayor precisión en las mediciones de los movimientos planetarios, se conducía a pensar que se contradecían las leyes de Kepler y se aceptó, poco a poco, la idea de que dichas leyes daban una aproximación de la posición del planeta, en lugar de su posición exacta. La posición observada fue entonces considerada como la suma de la posición teórica y de una fluctuación irregular. Más tarde, se observó que las órbitas de los planetas se modifican insensiblemente y se hizo la distinción entre movimientos seculares y periódicos. Nace así el modelo con componentes inobservables. A finales del siglo XVIII e inicios del siglo XIX, muchos matemáticos se interesaron en la explicación de esos movimientos periódicos o irregulares, es el caso (entre otros) de EULER, de LAGRANGE o de LAPLACE. Los economistas incorporaron en sus trabajos esta idea sobre la manera de descomponer una serie de tiempo. Algunos no dudaron en reconocer que esa idea provenía directamente de la astronomía o de la meteorología (el meteorólogo BUYS-BALLOT estudiaba en 1847 las variaciones periódicas de la temperatura, modelando la *tendencia* con un polinomio, la *estacionalidad* con variables indicadoras, y hacía implícitamente uso de técnicas de regresión lineal para estimar los parámetros). Paralelamente, el desarrollo de los conocimientos matemáticos dará a los investigadores los recursos necesarios para ir más allá de la simple visualización gráfica en el análisis de las series de tiempo. Entre los aportes más importantes hechos en esa área, se debe citar, evidentemente, los trabajos de Jean-Baptiste Joseph FOURIER(1822) sobre la descomposición de una serie en una suma de funciones trigonométricas. Estos trabajos permitieron el advenimiento del análisis armónico y luego facilitaron la

definición del análisis espectral, cuando se formuló la noción de proceso estocástico. La razón es que, en esa época, tanto en la economía como en las otras ciencias, la visión dominante es determinista, caracterizándose por la búsqueda de leyes exactas que expliquen todos los fenómenos físicos, económicos, demográficos, biológicos, etc.

En numerosos estudios de esa época, se trata de evidenciar ciclos que pudieran ser explicados a través del estudio y el análisis, pero también se trata de prever las crisis económicas. En esas condiciones, los componentes periódicos de corto plazo presentan poco interés y parece conveniente eliminarlas:

Toda fluctuación periódica, ya sea diaria, semanal, trimestral o anual, debe ser detectada y evidenciada, no solamente para estudiarla, sino también porque esas variaciones periódicas deben ser evaluadas y eliminadas para hacer resaltar aquellas que, irregulares o no periódicas, son probablemente más importantes e interesantes (JEVONS(1862)).

A fines del siglo XIX y a inicios del siglo XX, abundan las publicaciones sobre la descomposición de series económicas, así como sobre las técnicas de estimación de componentes o sobre los elementos de definición de las mismas. No cabe duda que W. M. PERSONS(1919) tuvo el mérito de haber propuesto en 1919, en un mismo trabajo, un método completo de descomposición, incluyendo una tentativa de definición y de formalización de los componentes inobservables, un esquema de composición y un método de estimación.

Según W. M. PERSONS, una serie de tiempo se descompone en cuatro tipos de fluctuaciones, las cuales hoy en día nos son familiares:

- a) *Una tendencia a largo plazo, o tendencia secular. Para una gran cantidad de series, tales como la producción de bienes, la tendencia secular puede ser considerada como el elemento de crecimiento;*
- b) *Un movimiento ondulatorio o cíclico que se sobrepone a la tendencia secular. Esas curvas parecen alcanzar sus picos durante los períodos de prosperidad industrial y presentan huecos durante los períodos de depresión. Sus altas y bajas constituyen el ciclo económico;*
- c) *Un movimiento estacional intra-anual, que presenta un comportamiento característico para cada serie;*

- d) Una variación residual, debida a acontecimientos que afectan una serie en particular, o bien a hechos excepcionales, tales como guerras o catástrofes naturales, que afectan simultáneamente a un gran número de series (PERSONS).

Estos componentes son luego combinados siguiendo los esquemas de composición aditivos o multiplicativos que son conocidos:

$$\begin{aligned} \text{Esquema aditivo:} & \quad X_t = T_t + C_t + S_t + I_t, \\ \text{Esquema multiplicativo:} & \quad X_t = T_t C_t S_t I_t. \end{aligned}$$

La mayoría de las publicaciones de esa época aceptan esos modelos y definiciones sin mucha discusión. Hacen énfasis más bien en las técnicas propiamente dichas de ajuste estacional o de extracción del ciclo. De la misma manera, fueron aceptados otros conceptos: la idea que la estacionalidad varía con el tiempo; la necesidad de tomar en cuenta simultáneamente todos los componentes cuando se estima la parte estacional; la imposibilidad de describir las tendencias y los ciclos con fórmulas matemáticas simples y explícitas; la necesidad de tratar los puntos atípicos.

Sin embargo, los trabajos de ese entonces se inspiraban principalmente en dos grandes métodos, de los cuales se hará una breve descripción en el caso específico de un modelo multiplicativo (ARMATTE(1992)).

- En 1910, el método de los vínculos relativos (relative links), elaborado por PERSONS, tiene la preferencia de los economistas estadísticos. Su principio consiste en: calcular para cada valor mensual de la serie, la relación X_t/X_{t-1} entre dicho valor y el valor del mes precedente; producir la tabla de valores de esas relaciones para los 12 meses; determinar luego las medianas $\{M_i, i=1, \dots, 12\}$, de esas doce series. Seguidamente, esas medianas eran encadenadas por multiplicación, tomando una base 100 para enero: $S_1 = 100$, $S_t = M_t S_{t-1}$. Luego, esos coeficientes estacionales eran corregidos con un factor $(S_{12}/S_1)^{1/12}$ para que $S_1 = S_{12} = 100$.
- La segunda manera de determinar los coeficientes estacionales es el método de los promedios móviles, utilizado a partir de 1922 por la US Federal Reserve y

que es popularizado más tarde por MACAULAY(1931). El método se basa en el cálculo de un promedio móvil centrado de orden 12, para obtener una estimación de la tendencia. La relación entre los datos originales y esta estimación produce una primera estimación del componente estacional. Para eliminar lo irregular, se calculan seguidamente las medianas (o las medias) de la componente de cada mes. Luego se ajustan esos nuevos índices de manera tal que la suma de los mismos sea igual a 1 y que se puedan obtener así los coeficientes estacionales definitivos.

A pesar de que esos métodos eran muy populares, fueron objeto de numerosas críticas a nivel teórico. Por ejemplo, SLUTSKY(1927) y YULE(1927), mostraron que el empleo de promedios móviles podía introducir ciclos artificiales en los datos. FISHER(1937) deploraba que se aplicaran métodos empíricos ad hoc cuando existían herramientas matemáticas adecuadas. En esos tiempos, el acontecimiento más importante es, seguramente, la aparición a fines de los años 20, de los modelos auto-regresivos (YULE(1927)) y de los promedios móviles (SLUTSKY(1927)) para el análisis de las series de tiempo. Es decir, en otros términos, la propuesta de una vía para que los economistas estadísticos pudieran salir del marco determinista tradicional, utilizando los primeros procesos estocásticos. Pero habría que esperar varios años todavía para que esos métodos alcancen un cierto éxito en el campo de la desestacionalización.

Después de la Segunda Guerra mundial, el desarrollo de la informática contribuyó grandemente a la difusión y al mejoramiento de los métodos de desestacionalización. En 1954, Julius SHISKIN elabora el *Census Method I*, en el US Census Bureau. Este método de desestacionalización será seguido, en 1957, por el *Census Method II* y por once versiones experimentales (X-1, X-2, etc.), hasta que en 1965 se produjo el paquete de desestacionalización X-11 (*X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program*, SHISKIN, YOUNG y MUSGRAVE(1967)). Esas diversas versiones se inspiraban directamente en los suavizamientos por promedios móviles y en los trabajos de MACAULAY(1931), constituyendo los primeros métodos automáticos de ajuste estacional. *Census X-11* se convirtió rápidamente en un estándar utilizado en todo el mundo. Las nuevas posibilidades de cálculo facilitaron el empleo de técnicas paramétricas de regresión para la estimación y la corrección de los efectos de calendario (días laborables, semana santa, etc.).

Además se integró en el paquete Census X-11 el tratamiento automático de esos efectos, basado en los trabajos de YOUNG(1965).

Paralelamente, la modelación paramétrica de las series de tiempo y el análisis espectral hicieron grandes progresos debidos, esencialmente, al desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos. Las herramientas de desestacionalización se beneficiaron poco a poco con esos avances.

El análisis armónico fue utilizado, desde muy temprano, para resolver los problemas de descomposición de series en un marco decididamente determinista. Se le utilizaba para poner en evidencia la periodicidad exacta, siendo que se sabía que los ciclos podían no ser rigurosamente periódicos o que las estacionalidades podían modificarse. Aún así, hubo que esperar el advenimiento de las computadoras, en los años 60s, para poder aprovechar los progresos cumplidos por la teoría y poder utilizar mejor el análisis espectral. Sólo entonces se pudo mejorar las estimaciones de la densidad espectral (BARTLETT(1950), TUKEY(1950)); estudiar los procesos no estacionales (PRIESTLEY(1965)); ejecutar rápidamente las transformaciones de Fourier (COOLEY y TUKEY(1965)); etc.

La popularización, en 1970, de los modelos ARIMA por BOX y JENKINS permitió que las herramientas de desestacionalización progresaran en dos rumbos. Por un lado, esos modelos constituyeron un aporte importante al desarrollo de Census X-11, el cual evolucionó en 1975 hacia X-11-ARIMA (DAGUM(1975,1980)). En esta nueva versión, los modelos ARIMA son empleados para prolongar la serie inicial antes de desestacionalizarla con el método X-11, lo cual permite limitar las revisiones de las estimaciones del fin de la serie cuando se dispone de un punto suplementario. Por otra parte, la modelación ARIMA fue también introducida en los métodos de desestacionalización basados en la teoría de extracción de señales. Existen numerosos ejemplos de trabajos que utilizan la modelación ARIMA y el análisis espectral para desestacionalizar (consultar por ejemplo: BELL Y HILLMER (1984)).

Actualmente, las dos grandes tendencias de la desestacionalización, el enfoque empírico y el enfoque por modelación, inspíran diversos métodos de los cuales algunos mezclan esas dos doctrinas. Es difícil evitar las principales críticas que se pueden hacer a cada uno de esos enfoques.

Por ejemplo, se reprocha a los métodos empíricos que no sean óptimos y que no se apoyen en modelos explícitos, lo cual hace particularmente difícil, o imposible, el conocimiento de las propiedades estadísticas de los estimadores utilizados. Los métodos basados en modelos son satisfactorios en ese aspecto, pero subsisten interrogantes en lo que hace a la pertinencia de la modelación, sobretodo cuando los modelos univariados son empleados para series económicas que dependen, esencialmente, de numerosos factores externos. Existen dudas también de que esos métodos de estimación no sean suficientemente robustos en el caso de series fuertemente perturbadas. Se invoca además la dificultad de modelar *a priori* algunas componentes de las cuales se sabe poca cosa, pero también la insuficiencia relativa de la teoría estadística de series no estacionales.

Por todo ello, las recientes mejoras introducidas no conciernen a los principios mismos de los métodos existentes, sino que tratan más bien de corregir algunos de sus defectos. Los principales aportes conciernen, por un lado, a los problemas relativos a la estimación de las componentes al principio y al fin de la serie. Por otra parte, se orientan hacia la eliminación de varias perturbaciones que influyen en los resultados de la desestacionalización (puntos atípicos, análisis de intervención, efectos de calendario, etc.).

Como se resume esquemáticamente en la Figura 1.1, los métodos de desestacionalización pueden ser clasificados en dos grandes categorías: los métodos *no paramétricos* y los métodos *paramétricos*.

Los métodos *no paramétricos*, llamados empíricos, permiten descomponer la serie en componentes inobservables mediante un procedimiento, a menudo *iterativo*, basado en suavizamientos sucesivos. Se puede agrupar el conjunto de suavizadores utilizados en esos métodos bajo la denominación: *regresiones locales*. Las regresiones locales consisten en ajustar polinomios, en general por mínimos cuadrados (ponderados o no), con intervalos deslizantes que se desfasan de un punto cada vez. En el centro del intervalo, el dato suavizado es el valor en esa fecha del polinomio ajustado (el dato suavizado a la fecha siguiente se obtiene mediante el ajuste de un polinomio en el intervalo siguiente). Se puede demostrar que las regresiones locales son equivalentes a la aplicación de promedios móviles particulares cuando las observaciones están espaciadas regularmente. Los métodos se distinguen esencialmente por su grado de robustez: en un primer grupo,

figuran *STL* (CLEVELAND et alii.(1990)), un método que se fundamenta en el método *LOWESS* (CLEVELAND(1979)), es decir en una técnica de suavizamiento robusta por regresiones locales y *SABL* (en el cual la robustez se obtiene mediante el empleo de los promedios móviles); en el segundo grupo figuran, el famoso método de desestacionalización *X-11* (US Census Bureau), *X-11-ARIMA* (Statistics Canada, DAGUM) y *X-12-ARIMA* (US Census Bureau, FINDLEY e alii.).

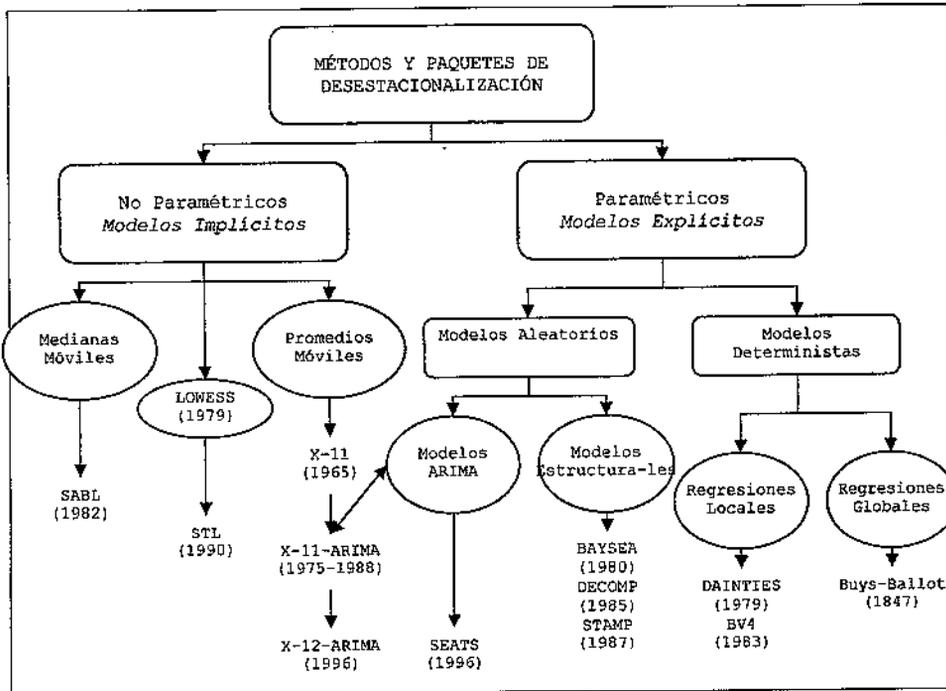


Figura 1.1 : Métodos y paquetes de desestacionalización

Los métodos paramétricos pueden también ser divididos en dos grandes conjuntos: los métodos basados en la regresión y los métodos que se apoyan en modelos estocásticos.

Los métodos basados en la regresión definen una función determinista del tiempo para cada componente, excepto para el irregular. Entre los métodos de este tipo se pueden citar *BV4* (Technische Universität Berlin, Deutsche Institut für Wirtschaftsforschung) y *DAINTIES*. Este último fue utilizado en los años 80s en la Comisión Europea (HYLLEBERG(1986)).

Los métodos basados en modelos estocásticos (no deterministas) utilizan modelos ARIMA para modelar los componentes inobservables. Entre los métodos de ese tipo se distinguen dos grupos: los métodos más recientes que estiman los modelos de los componentes a partir del modelo ARIMA de la serie original (BURMAN (1980), HILLMER y TIAO(1982)), el más reciente de ellos es SEATS (GOMEZ y MARAVALL(1996)); los métodos que modelan y estiman directamente las componentes (AKAIKE(1980), KITAGAWA y GERSCH(1984)), como por ejemplo STAMP (KOOPMAN et alii.(2000)), BAYSEA y DECOMP (Institute of Statistical Mathematics, Japan).

1.2 Promedios Móviles

El método de desestacionalización X-11 emplea los promedios móviles para estimar los principales componentes de una serie: la tendencia-ciclo y la estacionalidad. Esas herramientas no implican la utilización a priori de conceptos o de modelos sofisticados. Se basan en un principio muy simple y se revelan de uso muy flexible. Siempre se puede construir un promedio móvil que posea buenas propiedades en términos de conservación de la tendencia, de eliminación de la estacionalidad, de reducción del ruido, etc.

Aquí se estudiará las propiedades y los principios que han guiado la construcción de los promedios móviles utilizados en X-11.

1.2.1 Algunas Definiciones y un Poco de Teoría

Una serie de tiempo puede ser considerada desde el punto de vista del tiempo o desde el punto de vista de las frecuencias.

- En el *dominio del tiempo*, se considera la serie $\{X_t\}$ como una sucesión de T valores observados en los instantes t , t variando de 1 a T . Es de esta manera que se aborda generalmente una serie de tiempo y es fácil hacer la representación gráfica de su evolución en el transcurso del tiempo, como por ejemplo en la Figura 1.2. Nótese que esa serie se caracteriza por una fuerte estacionalidad que se traduce en el incremento de las Compras al Mayoreo en los Establecimientos Comerciales en los meses de diciembre y su posterior caída en los meses de enero.

Es particularmente fácil formalizar las modelaciones de una serie, poniendo en relación el valor al instante t y los valores de los periodos pasados.

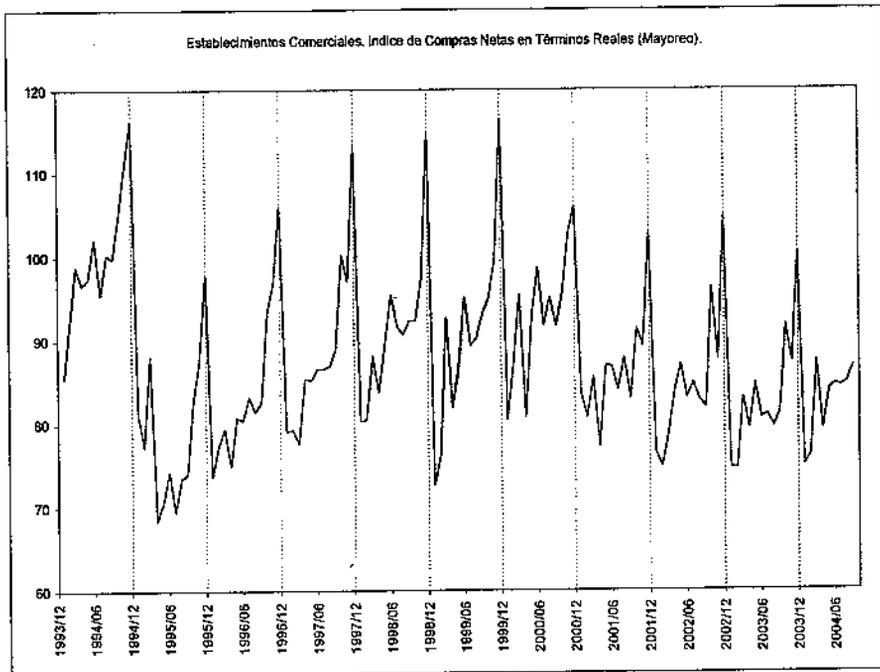


Figura 1.2 : Representación gráfica de la serie de tiempo del índice de Compras Netas en Términos Reales en Establecimientos Comerciales (1994/01 a 2004/09).

Es el caso, por ejemplo, de la modelación de la serie con un modelo ARIMA estacional; o de la expresión de una tendencia lineal, exponencial o aún localmente polinomial; o bien es el caso de la modelación del componente irregular con un ruido blanco.

- En cambio, en el dominio de las frecuencias, se expresa la serie $\{X_t\}$ como una suma de funciones sinusoidales. Se evalúa entonces, para cada frecuencia, la importancia de la misma en la composición de la serie. El gráfico que asocia a cada frecuencia su importancia en la serie es llamado *espectro* de la serie.

Esos dos enfoques son a menudo complementarios. Por ello, la continuación utilizaremos el uno o el otro para mostrar las cualidades y los defectos de los filtros de promedios móviles.

1.2.1.1 Definiciones

Se llama *promedio móvil de coeficientes* $\{\theta_k\}$ al operador designado con $M\{\theta_k\}$, o simplemente M , que es definido así:

$$M(X_t) = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k X_{t+k}$$

El valor al instante t de la serie bruta es reemplazado por una media ponderada de: los p valores pasados de la serie; el valor actual y los f valores futuros de la serie.

- El orden del promedio móvil está dado por la cantidad $p+f+1$.
- Cuando p es igual a f , es decir, cuando se emplean tantos puntos pasados como futuros, se dice que el promedio móvil es centrado.
- Además, si $\theta_{-k} = \theta_k$ para todo k , se dice que el promedio móvil M es simétrico. En ese caso, para señalar la lista de los coeficientes del promedio móvil, es suficiente indicar el orden del promedio móvil y los $k+1$ primeros coeficientes.

Generalmente, con un promedio móvil de orden $p+f+1$ calculado en un instante t , con p puntos pasados y f puntos futuros, es imposible suavizar los p primeros valores y los f últimos valores de una serie.

En el método X-11, los promedios móviles simétricos desempeñan un gran papel. Pero, para evitar la pérdida de información en los extremos de la serie, se hace un uso complementario de los promedios móviles asimétricos *ad hoc*, así como la extrapolación de la serie mediante modelos ARIMA, tanto el paquete X11-ARIMA como en el X12-ARIMA.

1.2.1.2 Funciones de Ganancia y de Desfasaje

Consideremos la serie $X_t = \text{sen}(\pi/3)$ y transformémosla con el promedio móvil asimétrico definido así: $M(X_t) = (X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)/3$, que reemplaza el valor al instante t con la media simple del valor del instante presente y de los dos valores de los instantes precedentes.

El resultado del suavizamiento está representado en la Figura 1.3, en donde se observan también dos fenómenos:

- En primer lugar se observa una reducción de la amplitud de la serie, lo cual corresponde perfectamente a nuestro objetivo de suavizamiento.
- Pero se observa también un desfase en el tiempo, es decir un *desfasaje*; las dos series no presentan los puntos de inversión en las mismas fechas.

Ese fenómeno de desfase es desagradable puesto que transforma las evoluciones mismas de la serie. Sin embargo, se puede demostrar que los promedios móviles simétricos no producen desfase (cf. KOOPMANS(1974)).

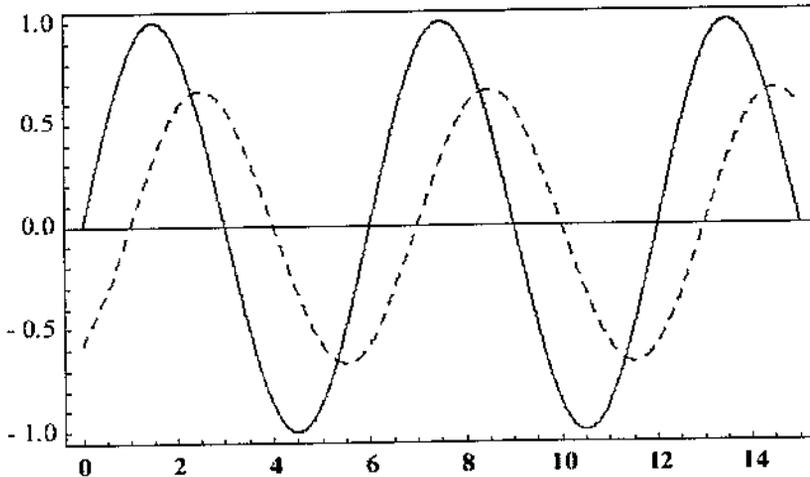


Figura 1.3: Suavizamiento de la serie $X_t = \text{sen}(\pi/3)$, utilizando el promedio móvil definido así: $(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)/3$. (Serie bruta en trazo grueso, serie suavizada en trazo punteado).

Para generalizar esas conclusiones, consideremos una serie $X_t = R \text{sen}(\omega t + \phi)$ de frecuencia ω (o de período $2\pi/\omega$), de amplitud R y de fase ϕ . La transformada de $\{X_t\}$ con un promedio móvil cualquiera, será también una senoide de amplitud modificada y que presentará un desfase con respecto a la serie original:

$$M(X_t) = M[R \text{sen}(\omega t + \phi)] = G(\omega) R \text{sen}[\omega t + \phi + \Gamma(\omega)]$$

- La función $|G(\omega)|$ es llamada *función de ganancia* del promedio móvil.
- La función $\Gamma(\omega)$ es llamada *función de desfase* del promedio móvil. A veces se representa $\Gamma(\omega)/\omega$, lo cual permite medir el desfase en número de períodos.

En el caso del promedio móvil asimétrico sobre 3 términos visto anteriormente, se obtiene:

$$\begin{aligned} M(X_t) &= \frac{1}{3}(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t) \\ &= \frac{1}{3}R\{\text{sen}[\omega(t-2) + \phi] + \text{sen}[\omega(t-1) + \phi] + \text{sen}(\omega t + \phi)\} \\ &= \frac{1}{3}R(1 + 2\cos\omega)\text{sen}(\omega t + \phi - \omega) \end{aligned}$$

y entonces:

$$G(\omega) = \frac{1 + 2\cos\omega}{3}$$

$$\Gamma(\omega) = -\omega \quad \text{sea} \quad \Gamma(\omega)/\omega = -1.$$

La función de ganancia representada en la Figura 1.4 muestra que el promedio móvil anula las frecuencias $120^\circ = 2\pi/3 = 4 \cdot 2\pi/12$. Este promedio móvil sería apropiado en el caso de encuestas repetidas cada 4 meses (o sea de período 3), puesto que eliminaría la estacionalidad, conservando las evoluciones de fondo que corresponden a bajas frecuencias. En cambio, este promedio introduce un desfase sistemático de un período, lo cual podría hacer que se tome conciencia tardíamente de eventuales inversiones de tendencia.

De modo entonces que la función de ganancia permite, esencialmente, ver las frecuencias que son eliminadas y las que son conservadas con un promedio móvil.

La función de desfase muestra los desfases introducidos por el empleo de promedios móviles asimétricos. Puesto que el método X-11 hace hincapié en el empleo de promedios móviles simétricos, dejamos de lado en este trabajo el estudio de esas funciones asimétricas.

En materia de suavizamiento, el filtro ideal sería aquel que deje sin cambio las bajas frecuencias, es decir las funciones periódicas de período superior al año (tendencia y ciclo) por ejemplo; y que, en cambio, elimine todas las altas frecuencias que corresponden a una periodicidad inferior o igual al año (estacionalidad e irregular).

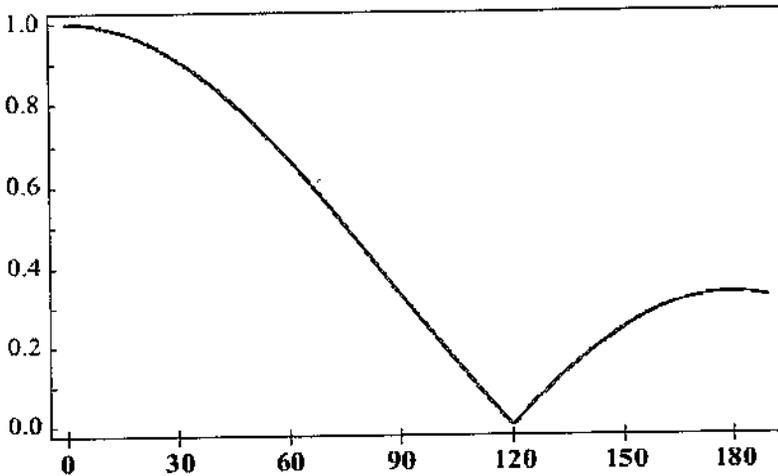


Figura 1.4: Función de ganancia del promedio móvil
 $(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)/3$.

La función de ganancia ideal de ese filtro, llamado de *bajo paso*, tendría entonces la siguiente forma:

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 \rightarrow \omega \leq \omega_0 \\ 0 \rightarrow \omega > \omega_0 \end{cases}$$

1.2.1.3 Conservación de la Tendencia

Se puede ver el desfase que produce el promedio móvil $(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t)/3$, aplicando este promedio asimétrico a una recta simple $X_t = at + b$. En efecto, se obtiene:

$$\begin{aligned} M(X_t) &= \frac{1}{3}(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t) \\ &= \frac{1}{3}[a(t-2) + b + a(t-1) + b + at + b] \\ &= a(t-1) + b \\ &= X_{t-1}. \end{aligned}$$

No obstante, sería de esperar que un promedio móvil respete ciertas tendencias simples, en particular aquellas que son polinomiales.

- Ahora bien, para que un promedio móvil respete las series constantes $X_t = a$, es necesario que:

$$M(X_t) = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k X_{t+k} = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k a = a \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k = a,$$

en consecuencia, es también necesario que la suma de los coeficientes del promedio móvil $\sum_{k=-p}^{+f} \theta_k$ sea igual a 1.

- Para que un promedio móvil conserve las rectas, es necesario que para todo t :

$$\begin{aligned} M(X_t) &= \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k X_{t+k} = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k [a(t+k) + b] \\ &= at \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k + a \sum_{k=-p}^{+f} k\theta_k + b \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k = at + b, \end{aligned}$$

lo que hace que: $\sum_{k=-p}^{+f} \theta_k = 1$ y $\sum_{k=-p}^{+f} k\theta_k = 0$.

- Generalizando, se puede incluso demostrar que, para que un promedio móvil conserve un polinomio de grado d , es necesario y suficiente que sus coeficientes verifiquen la siguiente relación:

$$\sum_{k=-p}^{+f} \theta_k = 1$$

y que:

$$\sum_{k=-p}^{+f} k^j \theta_k = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

En el caso del promedio móvil asimétrico sobre 3 términos, definido precedentemente, se obtiene:

$$\sum_{k=-2}^0 \theta_k = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

y

$$\sum_{k=-2}^0 k \theta_k = -2 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = -1$$

este promedio móvil conserva las constantes, a pesar de que no conserva las rectas.

En cambio, es fácil verificar que los siguientes promedios móviles simétricos conservan las rectas:

$$M_1(X_t) = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$$

$$M_2(X_t) = \frac{1}{8}(X_{t-2} + 2X_{t-1} + 2X_t + 2X_{t+1} + X_{t+2}).$$

1.2.1.4 Eliminación de la Estacionalidad

Como vimos en la Sección 1.2.1.2, a propósito de la definición de la función de ganancia, los promedios móviles pueden eliminar ciertas frecuencias y en consecuencia ciertos componentes estacionales. Por otra parte, la función de ganancia es la herramienta que permite identificar muy fácilmente las frecuencias que son eliminadas por un promedio móvil.

Generalizando, se puede afirmar que un promedio móvil simple de orden k (cuyos coeficientes son todos iguales a $1/k$) elimina las estacionalidades fijas de periodo k , con lo cual su función de ganancia se anula para la frecuencia $2\pi/k$.

Por otra parte, es posible tratar el caso de estacionalidades que varían linealmente con el tiempo, o aún aquellas que siguen una variación polinomial en el tiempo (GRUN-REHOMME y LADIRAY(1994)). Una vez más, la eliminación de esas estacionalidades implica que se adopten restricciones lineales sobre los coeficientes.

1.2.1.5 Reducción del Componente Irregular

Luego de la tendencia y de la estacionalidad, nos queda por ver el efecto de un promedio móvil sobre el componente irregular. En la descomposición de una serie bruta, el residuo es a menudo modelado bajo la forma de un ruido blanco, sucesión de variables aleatorias ε_t , de esperanza nula, no correlacionadas y de misma varianza σ^2 .

El promedio móvil transforma ese ruido blanco en una sucesión de variables aleatorias ε_t^* , de misma varianza igual a: $\sigma^2 \sum_{k=-p}^f \theta_k^2$. Entonces, para disminuir el componente irregular y, en consecuencia, para disminuir su varianza, es necesario disminuir la cantidad: $\sum_{k=-p}^f \theta_k^2$.

1.2.1.6 Un Ejemplo de Construcción de un Promedio Móvil

Busquemos por ejemplo un promedio móvil centrado sobre tres términos, de coeficientes $\{\theta_{-1}, \theta_0, \theta_1\}$, que reduzca al máximo el componente irregular y que conserve las rectas. Por lo desarrollado anteriormente, esa cuestión conduce a resolver el siguiente problema:

Minimizar $\sum_{k=-1}^1 \theta_k^2$, con las restricciones $\sum_{k=-1}^1 \theta_k = 1$ y $\sum_{k=-1}^1 k\theta_k = 0$. La segunda restricción hace que $\theta_{-1} = \theta_1$. Reemplazando en la primera, se obtiene $\theta_0 = 1 - 2\theta_1$, y el problema de minimización se convierte en:

$$\min_{\theta_1} [2\theta_1^2 + (1 - 2\theta_1)^2].$$

La derivada, con respecto a θ_1 , de la función a minimizar es $12\theta_1 - 4$ y este valor se anula para $\theta_1 = 1/3$. Encontramos así el promedio móvil simple, sobre 3 términos, con todos los coeficientes iguales a $1/3$. Este promedio, como ya lo hemos visto, elimina las estacionalidades de orden 3.

CAPÍTULO II. AJUSTES PREVIOS

En ocasiones es necesario realizar ajustes previos a las series que se van a desestacionalizar, apartando de ellas efectos que pueden interferir con el análisis final que se pretende. En este capítulo analizaremos tres tipos de efectos; los días laborables y la semana santa, considerados como efectos de calendario, y los outliers u observaciones aberrantes. Los dos primeros efectos se estimarán utilizando el componente irregular obtenido en una primera corrida (preliminar) del proceso X-11 (explicado a detalle en el capítulo IV. Para estimar los outliers utilizaremos el módulo regARIMA descrito más adelante, en el que se utilizan los datos originales corregidos por los efectos de calendario.

2.1 Estimación del Efecto debido a la Composición Diaria del Mes (Días Laborables)

Algunas series económicas (por ejemplo el índice mensual de volumen de negocios de una firma minorista) pueden estar fuertemente influenciadas por la composición diaria del mes: un sábado de más o de menos en un mes, puede hacer variar de manera no despreciable el índice mensual del volumen de negocios. Esos efectos de los días laborables, así como la estacionalidad, pueden hacer delicadas las comparaciones de los valores de la serie entre un mes y otro de un mismo año, o las comparaciones de los valores de un mismo mes entre un año dado y otro. Es por ello que, generalmente, cuando se considera que esos efectos son estadísticamente significativos, se les retira de la serie durante el proceso de desestacionalización.

Es bastante natural que se utilice un estimador del componente irregular para identificar la presencia eventual de efectos de días laborables, por ejemplo empleando un modelo de regresión lineal.

2.1.1 Algunas Particularidades de Nuestro Calendario

Nuestro calendario se funda en el ritmo solar. La Tierra efectúa un giro completo alrededor del Sol en 365 días y 6 horas aproximadamente. Para tomar en cuenta esas 6 horas suplementarias, el calendario admite 365 días para 3 de cada 4 años. Para el cuarto año (llamado año bisiesto) el calendario agrega un día más: el 29 de febrero. La regla que se respeta es que el año bisiesto debe corresponder a todo año cuya expresión numérica sea múltiple de 4.

Sin embargo, esta corrección es muy fuerte. Por eso es que los años seculares no son bisiestos, salvo cuando son divisibles por 400 (1600, 2000, 2400, ...). Aun así subsiste un pequeño error que es estimado a un día cada 4000 años... Nuestro calendario, expresado en meses, es entonces periódico (de período 4) al menos entre 1901 y 2099.

Para una fecha dada, el día que le corresponde sufre un desfase temporal: si el primero de enero de un año no bisiesto es un sábado, el año siguiente será un domingo; y si el año de referencia es bisiesto, el año siguiente será un lunes. Hay que esperar 28 años (4×7) para encontrar la misma estructura anual en términos de fechas y de días.

2.1.2 Los Efectos de Días Laborables

Admitiremos a continuación que el j -ésimo día de la semana tiene un efecto α_j , en donde $j=1$ designa el lunes, $j=2$ el martes, ... y $j=7$ el domingo. Cada α_j representa, por ejemplo, el promedio de ventas del día j . Si D_{jt} representa el número de días j en el mes t , la longitud del mes será $N_t = \sum_{j=1}^7 D_{jt}$ y el efecto acumulado para ese mes (las ventas totales del mes) será $\sum_{j=1}^7 \alpha_j D_{jt}$. Por otra parte, nótese que $\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^7 \alpha_j / 7$ es el efecto promedio diario, es decir el promedio de ventas de un día.

Como por construcción $\sum_{j=1}^7 (\alpha_j - \bar{\alpha}) = 0$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^7 \alpha_j D_{jt} &= \bar{\alpha} N_t + \sum_{j=1}^7 (\alpha_j - \bar{\alpha}) D_{jt} \\ &= \bar{\alpha} N_t + \sum_{j=1}^6 (\alpha_j - \bar{\alpha}) (D_{jt} - D_{7t}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

El efecto acumulado del mes se descompone en un efecto directamente ligado a la longitud del mes y en un efecto neto de cada día de la semana.

Se puede señalar que, en realidad, la suma $\sum_{j=1}^7 (\alpha_j - \bar{\alpha}) D_{jt}$ hace intervenir únicamente los días de la semana que aparecen 5 veces en el mes.

Todo mes contiene: 4 semanas completas para las cuales (por definición) se anula el efecto ligado a los días; mas 0, 1, 2 ó 3 días que participan en el efecto de días laborables del mes.

2.1.3 El Modelo de Regresión

La ecuación (2.1) debe ser corregida de esos efectos para ser homogénea con la variable a explicar, el componente irregular, el cual no contiene ni estacionalidad ni tendencia.

- El término $\bar{\alpha} N_t$ de esa ecuación contiene potencialmente tales componentes, puesto que los meses tienen diferente longitud y que (como vimos precedentemente) la variable N_t es periódica, de período 48 meses (4 años). Se pueden resumir esos efectos para la cantidad $\bar{\alpha} N_t^*$, en donde N_t^* representa la media, sobre 4 años, de la longitud del mes t . En otros términos, N_t^* es igual a: 30 ó a 31, si el mes considerado no es febrero; y es igual a 28.25 en el caso contrario. Se obtiene entonces: $\bar{\alpha} N_t = \bar{\alpha} N_t^* + \bar{\alpha} (N_t - N_t^*)$. En esta expresión el segundo término se anula, salvo para el mes de febrero.
- El segundo término de la ecuación (2.1) hace intervenir los D_{jt} , número de veces que el día j está presente en el mes t . Esas variables son periódicas, de período 336 meses (28 años) y de medias iguales para un mes dado. En ese término de la ecuación interviene la diferencia $D_{jt} - D_{jt}$ y como esas variables tienen todas el mismo comportamiento, en esa diferencia no hay ni estacionalidad ni tendencia.

La manera de corregir la ecuación (2.1) de esos efectos depende del esquema de composición que fue adoptado.

- En un esquema multiplicativo, se eliminan los efectos estacionales y tendenciales dividiendo la ecuación (2.1) con $\bar{\alpha}N_t^*$. Suponiendo que $\beta_j = \alpha_j/\bar{\alpha} - 1$, se obtiene:

$$\frac{1}{N_t^*} \sum_{j=1}^7 (\beta_j + 1) D_{jt} = \frac{N_t}{N_t^*} + \sum_{j=1}^6 \beta_j \left(\frac{D_{jt} - D_{jt}}{N_t^*} \right) \quad (2.2)$$

Si I_t es una estimación del componente irregular, X12-ARIMA estima los coeficientes $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_6)$ (y $\beta_7 = -\sum_{j=1}^6 \beta_j$) ajustando el siguiente modelo con mínimos cuadrados ordinarios:

$$N_t^* I_t - N_t = \sum_{j=1}^6 \beta_j (D_{jt} - D_{jt}) + e_t \quad (2.3)$$

Que corresponde al modelo propuesto por YOUNG (1965).

- En un esquema aditivo se debe, lógicamente, sustraer $\bar{\alpha}N_t^*$ a la ecuación (2.1). Lo que conduce a:

$$I_t = \beta_0 (N_t - N_t^*) + \sum_{j=1}^6 \beta_j (D_{jt} - D_{jt}) + e_t \quad (2.4)$$

en donde $\beta_0 = \bar{\alpha}$ y $\beta_j = \alpha_j - \bar{\alpha}$ para $j=1, \dots, 6$.

2.1.4 Estimación de los Parámetros

En el caso del esquema multiplicativo se puede escribir el modelo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{j=1}^6 \beta_j (D_{jt} - D_{jt}) + e_t \\ &= \sum_{j=1}^6 \beta_j Z_{jt} + e_t \end{aligned}$$

En esta expresión: $Y_t = N_t^* I_t - N_t$.

Designando $\sigma^2 = e'e/(n-6)$, siendo los e los residuos de la regresión, la solución por los mínimos cuadrados ordinarios conduce a los siguientes resultados:

Parámetros	Varianza
$\beta = (Z'Z)^{-1}Z'Y$	$s^2(\beta_j) = \sigma^2(Z'Z)^{-1}_{jj}$
$\hat{B}_7 = -\sum_{j=1}^6 \hat{\beta}_j$	$s^2(\hat{\beta}_7) = \sigma^2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (Z'Z)^{-1}_{ij}$

El empleo de los mínimos cuadrados ordinarios y las pruebas asociadas se apoyan en una hipótesis suplementaria: el componente irregular que se trata de explicar, no presenta ninguna (o una baja) autocorrelación.

Se dispone de las pruebas de Student (prueba t), para someter a prueba la nulidad de un coeficiente y de la prueba de Fisher (prueba F), para someter a prueba la existencia de un efecto global debido a los días laborables.

Hipótesis	Estadístico	Prueba y Ley seguida
$\beta_j = k$	$t_j = \frac{\beta_j - k}{s^2(\beta_j)}$	Prueba t, Ley de Student con $n-6$ grados de libertad
$B_j = 0$ $j=1, \dots, 6$	$F = \frac{\hat{\beta}' Z' Z \hat{\beta}}{6\sigma^2}$	Prueba F, Ley de Fisher con 6 y $n-6$ grados de libertad

2.2 Estimación del Efecto Debido a la Semana Santa

2.2.1 Un Poco de Historia

Según los Evangelios, la resurrección de Cristo se produjo durante la *Pascua judía*. Esta fiesta de la tradición hebraica es celebrada después del primer plenilunio de primavera, en el transcurso del cual (a través del sacrificio de un cordero) se conmemora el éxodo de Egipto. La tradición cristiana quiso conservar los lazos simbólicos entre ese sacrificio y el sacrificio de Jesús. Esa es la razón por la cual, en el Concilio de Nicé en el año 325 de nuestra era, se decidió que la Fiesta cristiana de Pascua sería celebrada el primer domingo siguiente al solsticio de primavera. Desgraciadamente, el calendario Juliano se fundaba en un año un poco más largo que en el calendario actual. Con lo cual, el solsticio de primavera se fue «acercando», de año en año, a los meses de invierno. Es así que, en 1582, cuando el Papa Gregorio XIII introdujo el calendario en vigor actual, el solsticio de primavera se cumplía prácticamente en el mes de febrero. Es muy probable que uno de los principales objetivos de la instauración del calendario gregoriano haya sido el de hacer coincidir la Fiesta de Pascua con la primavera.

2.2.2 El Cálculo de las Fechas de Pascua

La fijación con anterioridad de las fechas de Pascua fue objeto de estudio de célebres matemáticos. Incluso el mismo GAUSS propuso con este fin algoritmos interesantes, pero muy complejos. GARDNER(1981) menciona un algoritmo simple, propuesto por Thomas H. O'BEIRNE(1966), que es válido desde 1900 hasta 2099:

- Sea Y el año. Substraer 1900 de Y ; sea N el resultado de la resta.
- Dividir N entre 19; sea A el residuo de esta división.
- Dividir $(7A+1)$ entre 19; sea B el resultado de la división, de la cual se ignora el residuo.
- Dividir $(11A+4-B)$ entre 29; sea M el residuo de esta división.
- Dividir N entre 4; sea Q el resultado de la división, de la cual se ignora el residuo.
- Dividir $(N+Q+31-M)$ entre 7; sea W el residuo de esta división.

- La fecha de Pascua es entonces $25-M-W$. Si el resultado es positivo, se trata del mes de abril, en el caso contrario, se trata del mes de marzo (se interpreta 0 como el 31 de marzo, -1 como el 30 de marzo y así sucesivamente hasta -9 que es interpretado como el 22 de marzo).

Existen otros algoritmos de cálculo de las fechas de Pascua, algunos son incluso más generales. En el calendario gregoriano, la sucesión de las fechas de Pascua se repite, cada 5,700,000 años. En la Figura 5.1, se representa la distribución de esas fechas en un ciclo completo. Nótese que el Domingo Pascual cae mucho más a menudo en el mes de abril (76.7%) que en el mes de marzo (23.3%).

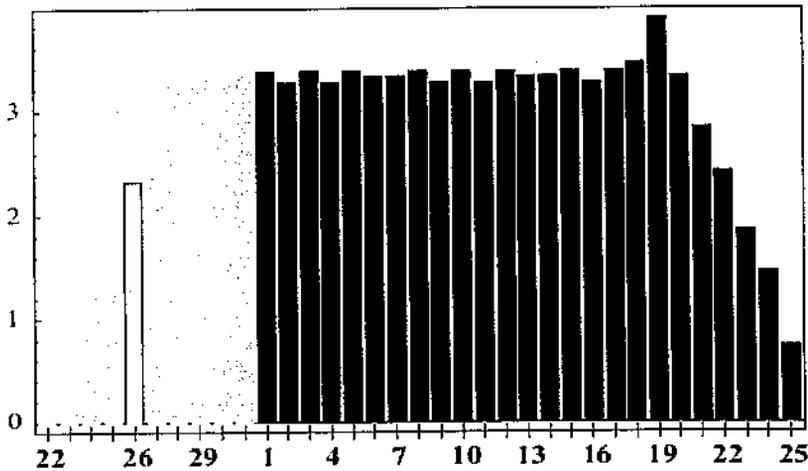


Figura 2.1: Distribución de las fechas de Pascua, entre el 22 de marzo y el 25 de abril, en un ciclo completo de 5,700,000 años.

2.2.3 Semana Santa y la Desestacionalización

¿Por qué nos tenemos que interesar en la Semana Santa en el marco del análisis de series de tiempo y de la desestacionalización? Simplemente porque la Semana Santa produce un cambio de nivel de actividad en numerosos sectores: el Jueves y Viernes Santos son días no laborables; se modifican los hábitos alimenticios; etc. Además, el Domingo Pascual puede caer tanto en el primer trimestre como en el segundo, tanto en marzo como en abril.

Lo más temprano que puede caer el Domingo de Pascua es el 22 de marzo (la última vez que esto ocurrió fue en 1818 y la próxima vez será en 2285) y lo más tarde es el 25 de abril (la última vez que esto ocurrió fue en 1943 y la próxima vez será en 2038). De modo que, los efectos potenciales de esta fiesta, no están completamente tomados en cuenta en la estacionalidad de una serie.

Los modelos que fueron elaborados para tomar en cuenta el efecto de Pascua dependen de la naturaleza de la serie.

- En 1997 el Domingo de Pascua cayó en el mes de marzo (el 30). Es el último año en que esto acontece desde 1991, en el que Pascua se festejó el 31 de marzo. En el caso de las ventas anuales de automóviles, por ejemplo, la variación observada entre marzo y abril de 1997, no es comparable a las variaciones observadas entre los mismos meses de los años precedentes. Para esas series, el impacto de Pascua (positivo o negativo) es *inmediato*, es decir que el mismo se concentra sobre el mes en el cual cae Pascua.
- Para otras series, las variaciones ligadas a Pascua pueden hacerse sentir durante el feriado pascual, pero también durante los días o las semanas precedentes. Ese efecto es llamado *gradual*. Se le observa por ejemplo en las ventas de chocolate, de flores, etc. En este caso, el efecto constante depende no solamente del hecho que Pascua sea en marzo o en abril, sino también de la fecha en la cual cae en el mes de abril. Las cifras del mes de marzo serán tanto más afectadas si la Pascua se festeja en los primeros días del mes de abril.

Por último, se pueden estimar los efectos de Pascua sobre los datos brutos mediante los modelos de regresión con errores ARIMA (regARIMA), o bien sobre una estimación preliminar del componente irregular obtenida después de haber eliminado los otros efectos presentes en la serie (tendencia, estacionalidad, efectos de días hábiles, etc.). Presentamos a continuación dos modelos que se utilizan en este segundo enfoque.

2.2.4 El Modelo Easter

El modelo easter forma parte también del marco más general de la estimación de los efectos de calendario que es propuesta por el método X-11 (capítulo IV), al fin de las Etapas B y C (explicadas más adelante). Específicamente con las estimaciones del componente irregular de las Tablas B13 y C13.

2.2.4.1 Modelo y Estimación

Se admite aquí que la Semana Santa tiene todavía un impacto sobre los w días ($1 \leq w \leq 25$) anteriores al Domingo Pascual y se formula el siguiente modelo:

$$I_{i,j} = a + bX_{i,j}(w) + \varepsilon_{i,j}$$

en el cual:

- $I_{i,j}$ es el valor del componente irregular, que corresponde al año i y al periodo (mes o trimestre) j .
- Para un año dado, sea $w_{i,j}$ el número de días, entre los w días antes de Pascua (incluyendo el Domingo de Pascua), que caen en el mes j (o en el trimestre). Se define en primer lugar, la variable $Z_{i,j}(w) = w_{i,j}/w$. Considerando las restricciones definidas sobre w , esa variable es nula, salvo para los meses de febrero, de marzo y de abril. En cambio, esa variable posee una cierta estacionalidad: los valores que conciernen el mes de febrero, por ejemplo, serán estructuralmente más bajos. La variable $X_{i,j}(w)$ se obtiene retirando a $Z_{i,j}(w)$ la media $\bar{Z}_{.,j}(w)$ que corresponde al mes j y que es calculada sobre los años disponibles. Se obtiene así: $X_{i,j}(w) = w_{i,j}/w - \bar{Z}_{.,j}(w)$. De esta manera se puede conservar el nivel de la serie, anulando el efecto de Pascua sobre los meses concernidos. En consecuencia, la variable explicativa es de media nula y sin estacionalidad.

En lugar de $\bar{Z}_{.,j}(w)$ se puede utilizar una media a largo plazo, calculada sobre el periodo 1583-1982.

Las restricciones definidas sobre el valor de w ($1 \leq w \leq 25$) hacen que sólo puedan ser corregidos los meses de febrero, de marzo y de abril.

Tal como fue hecho precedentemente, los valores de a y b son estimados por mínimos cuadrados ordinarios y el efecto de Semana Santa se deduce con:

$$\hat{E}_{i,j} = a + bX_{i,j}(w).$$

2.2.5 El Modelo Scaester

El modelo Scaester es muy parecido al modelo Easter discutido anteriormente. La diferencia es que en este nuevo modelo se considera normal la situación en la cual la Pascua cae en el mes de abril, y por lo tanto sólo corrige los datos de los años en los que Pascua afecta al mes de marzo. No es lo que hace el modelo anterior, que corrigen los meses de marzo, de abril y de febrero (eventualmente).

2.2.5.1 Modelo y Estimación

Tal como el modelo anterior se admite que la Fiesta de Pascua tiene un impacto sobre los w días ($1 \leq w \leq 24$) que preceden al domingo Pascual y entonces se define el siguiente modelo:

$$I_{i,j} = a + bX_{i,j}(w) + \varepsilon_{i,j}$$

siendo:

- $I_{i,j}$ el valor del componente irregular que corresponde al año i y al periodo j .
- Para un año i dado, sea w_i el número de días, entre los w días antes de Pascua (incluyendo el Domingo de Pascua), que caen en el mes de marzo.

De modo que:

$$X_{i,j}(w) = \begin{cases} w_i/w & \text{para un mes de marzo o un 1}^{\text{er}} \text{ trimestre} \\ -w_i/w & \text{para un mes de abril o un 2}^{\text{do}} \text{ trimestre} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las restricciones impuestas a w ($1 \leq w \leq 24$) hacen que no se anulen únicamente los valores de la regresión para marzo y abril (o las del primer y segundo trimestre). Se estiman los valores de a y b por mínimos cuadrados ordinarios.

Se pueden hacer varios comentarios sobre el cálculo:

- Si Pascua cae en el mes de marzo, el valor asociado $X_{i,3}(w)$ es igual a 1. Igualmente, si Pascua cae después del w de abril, el valor $X_{i,3}(w)$ es igual a 0. Generalizando, si se consideran los valores de la variable X para los meses de marzo, se obtiene $X_{i,3}(w) = f(Z_i)$, donde:

$$f(Z_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_i \leq 9 \text{ Pascua en marzo} \\ 0 & \text{si } Z_i > 9 \text{ Pascua en abril} \end{cases}$$

con Z_i igual al número de días entre el domingo de Pascua del año i y el 22 de marzo (la fecha más temprana de esta fiesta).

- Considerando que la variable explicativa tiene una forma simple, se puede dar una forma más explícita al estimador \hat{b} .

Los únicos valores no nulos de la variable X son los de los meses de marzo y abril, los cuales (además) son opuestos. Si admitimos que la serie de los valores $X_{i,j}$ no comienza en un mes de abril o que no se termina en marzo, a todo mes de marzo le corresponde un mes de abril y la suma de dos valores de la variable X de esos meses será nula. La media \bar{X} es también nula en ese caso y (en el caso general) será próxima a cero.

Si la serie estudiada tiene n observaciones, se puede escribir:

$$\hat{b} = \text{Cov}(X, I) / \text{Var}(X)$$

siendo:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j X_{i,j}^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j X_{i,j}^2 = \frac{2}{n} \sum_i \left(\frac{w_i}{w} \right)^2$$

y

$$\text{Cov}(X, I) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j X_{i,j} I_{i,j} - \bar{X} \bar{I} = \frac{1}{n} \sum_i \frac{w_i}{w} (I_{i,3} - I_{i,4}).$$

Vemos así que aparecen los valores de las diferencias, para cada año, de los irregulares de marzo y abril.

- Por último, puesto $\hat{a} = I - \hat{b}\bar{X}$ y que la media \bar{X} es cercana a cero, \hat{a} es muy similar a I , que es la media del componente irregular (o sea próxima de la media teórica que es igual a 0 en un esquema aditivo, y a 1 en un esquema multiplicativo).

Con $\hat{E}_{i,j} = \hat{a} + \hat{b}X_{i,j}(w)$ se deduce el efecto de Semana Santa, lo que permite asegurar que la Semana Santa no tiene impacto fuera de los meses de marzo y abril.

2.3 Modelos RegARIMA y Outliers

En el programa X12 existe un módulo en el cual se pueden estimar diferentes efectos en la serie económica simultáneamente con los modelos ARIMA a partir de los datos originales. Esto es a través de los llamados modelos regARIMA, los cuales consisten en modelos de regresión cuyos errores representan un proceso ARIMA. En este capítulo nos centraremos en describir los regresores que podemos utilizar en la parte de la regresión de estos modelos. En el siguiente capítulo se analizará más a fondo los modelos ARIMA, que junto con la parte de la regresión nos ayudarán a ajustar y extrapolar la serie previo a la desestacionalización.

2.3.1 Modelos RegARIMA en X12-ARIMA

Dada una serie de tiempo Y_t a ser modelada, normalmente es necesario tomar una transformación no lineal de la serie, $y_t = f_t(Y_t)$, para obtener una serie que pueda ser expresada adecuadamente por un modelo regARIMA. Por ejemplo, si Y_t es una serie positiva con movimientos estacionales proporcionales al nivel de la serie, usualmente se toman logaritmos, o más generalmente,

$$y_t = \log\left(\frac{Y_t}{d_t}\right) = \log Y_t - \log d_t$$

donde d_t es alguna secuencia apropiada de divisores. Estos posibles divisores incluyen (i) factores de longitud del mes N_t/N_t^* desestacionalizados y sin tendencia, (ii) factores combinados de días laborables y de Semana Santa obtenidos por un modelo de regresión del componente irregular de Y_t (obtenidos a partir de una corrida preliminar), y (iii) factores de ajuste definidos por el usuario que estimen los efectos de eventos económicos inusuales. X-12-ARIMA puede calcular las opciones (i) y (ii) vía las especificaciones del programa, y para la opción (iii) leyendo los divisores de un archivo de datos especificados por el usuario. Las transformaciones del programa incluyen una familia de transformaciones potencia de un parámetro (transformaciones "Box-Cox"),

$$y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} Y_t/d_t & \lambda = 1 \\ \lambda^2 + [(Y_t/d_t)^\lambda - 1]/\lambda & \lambda \neq 0, 1 \\ \log(Y_t/d_t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

la cual cambia suavemente en λ y permanece positiva si $Y_t/d_t > 1.0$. Como el programa permite cualquier valor de λ para ser usado con el propósito de obtener extensiones en los extremos de la serie, para obtener ajustes previos para una descomposición de ajuste estacional en X12-ARIMA, λ debe estar entre 0 y 1. Estos son los únicos valores de λ para los cuales es posible aislar el efecto en Y_t de los componentes de la regresión de y_t .

X12-ARIMA puede estimar modelos regARIMA de orden $(p, d, q)(P, D, Q)$ para y_t . Estos modelos de la forma

$$\phi_p(B)\Phi_p(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D \left(y_t - \sum_{i=1}^r \beta_i x_{ti} \right) = \theta_q(B)\Theta_q(B^s)a_t \quad (2.5)$$

donde s es la longitud del periodo estacional, $s=4$ ó 12 . Los polinomios $\phi_p(z)$, $\Phi_p(z)$, $\theta_q(z)$ y $\Theta_q(z)$ con grados p , P , q y Q respectivamente tienen términos constantes iguales a 1. Por ejemplo, si $p \geq 1$, tenemos $\phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$. Estos polinomios son delimitados de tal forma que las raíces de $\theta_q(z)$ y $\Theta_q(z)$ tengan magnitudes mayores o iguales a uno, y (en el proceso

de estimación por default) que las raíces de $\phi_p(z)$ y $\Phi_p(z)$ tengan también magnitudes mayores o iguales a uno. Dado que se asume que a_t es una secuencia de variables independientes con media 0 y varianza constante σ_a^2 , se sigue a partir de esto que $w_t = (1-B)^d(1-B^s)^p \left(y_t - \sum_{i=1}^r \beta_i x_{it} \right)$ es una serie de tiempo covarianza estacionaria que satisface la ecuación en diferencia $\phi_p(B)\Phi_p(B^s)w_t = \theta_q(B)\Theta_q(B^s)a_t$. Consecuentemente, podemos reexpresar el modelo (2.5) para y_t como

$$(1-B)^d(1-B^s)^p y_t = \sum_{i=1}^r \beta_i \left\{ (1-B)^d(1-B^s)^p x_{it} \right\} + w_t \quad (2.6)$$

Este es un modelo de regresión con errores estacionarios ARMA w_t para una diferenciación apropiada de y_t . Sus regresores resultan de aplicar la misma operación de diferenciación a las x_{it} . El modelo (2.6), junto con la suposición de que las innovaciones a_t en el modelo para w_t son *i.i.d.* $N(0, \sigma^2)$, determinan la función de verosimilitud que es maximizada para estimar los coeficientes de regresión β_i , σ^2 y los coeficientes de $\phi_p(B)$, $\Phi_p(B^s)$, $\theta_q(B)$ y $\Theta_q(B^s)$. La verosimilitud por default en X12-ARIMA es la verosimilitud Gaussiana exacta completa.

En la estimación del modelo, cualquiera de los coeficientes del proceso ARMA pueden ser tomados como valores fijos, como cero. El programa produce errores estándar asintóticos, correlaciones, y estadísticos t para los coeficientes estimados así como intervalos de confianza para los pronósticos. Con excepción de los intervalos de confianza, estos estadísticos permanecen válidos con datos no Gaussianos si la forma del modelo se especifica correctamente.

2.3.2 Regresores Utilizados en el Módulo RegARIMA

Existen diferentes tipos de regresores que se pueden introducir en la parte de la regresión del modelo regARIMA, en nuestro caso nos centraremos en aquellos que nos sirven para modelar observaciones aberrantes (outliers aditivos, cambios de nivel y cambios temporales) y la estacionalidad fija.

2.3.2.1 Outlier Aditivo

Esta clase de outlier es la más sencilla y se refiere a observaciones raras que ocurren en un punto en el tiempo, también son conocidos como valores extremos. Existen varios ejemplos en la práctica, un ejemplo es la equivocación en la captura de un dato, algún tipo de desastre natural como terremotos, inundaciones, etc.

La variable que utilizaremos para este tipo de outliers es la siguiente:

$$AO_t^{(t_0)} = \begin{cases} 1 & \text{para } t=t_0 \\ 0 & \text{para } t \neq t_0 \end{cases}$$

en donde t_0 es el tiempo donde ha ocurrido este outlier aditivo.

2.3.2.2 Cambio de Nivel

A este outlier se le conoce en inglés como *level shift*. En este caso se observa que la serie cambia de a un nivel inferior o superior y se mantiene en éste por el tiempo restante, es posible ver más de un cambio de nivel en una serie. Un ejemplo de este tipo se puede ver en el cambio de políticas económicas, en el cambio de metodologías en la obtención de los datos, etc. También se puede observar este fenómeno en devaluaciones y crisis económicas.

La variable utilizada en este caso es la siguiente:

$$LS_t^{(t_0)} = \begin{cases} -1 & \text{para } t < t_0 \\ 0 & \text{para } t \geq t_0 \end{cases}$$

en donde t_0 es la fecha donde acontece el cambio de nivel.

2.3.2.3 Cambio temporal

El último de outlier que analizaremos es el *cambio temporal* o *temporary change*. Aquí se observa que la serie sufre un cambio de nivel en una cierta fecha pero que paulatinamente regresa a su nivel anterior. Este tipo de outlier se observa por ejemplo cuando ocurre una huelga, también lo vemos como en el caso del cambio de nivel, en crisis económicas.

La variable referente a este efecto es la siguiente:

$$TC_t^{(t_0)} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0 \\ \alpha^{t-t_0} & \text{para } t \geq t_0 \end{cases}$$

donde α es la tasa de decaimiento hacia el nivel previo ($0 < \alpha < 1$) y t_0 es el momento en que se presenta el cambio.

2.3.2.4 Estacionalidad fija:

Este regresor conocido como *seasonal* se utiliza cuando observamos en la serie analizada un efecto estacional fijo, es decir, cuando la serie presenta una estacionalidad muy estable.

En el caso de un análisis mensual, las variables ocupadas para estimar este efecto son:

$$M_{1,} = \begin{cases} 1 & \text{enero} \\ -1 & \text{diciembre} \\ 0 & \text{otro-caso} \end{cases}, \dots, M_{11,} = \begin{cases} 1 & \text{noviembre} \\ -1 & \text{diciembre} \\ 0 & \text{otro-caso} \end{cases}$$

2.3.3 Detección Automática de Outliers (AO, LS y TC)

El programa X12-ARIMA contiene un proceso automático para la detección de outliers. Esta capacidad es útil cuando el analista no está familiarizado con la serie estudiada, es decir, no tiene información acerca de algún evento trascendente que pudo haber influido en la serie. El programa realiza entonces el proceso descrito a continuación.

Un *cambio de nivel* (level shift, LS) en el primer dato de la serie no puede ser estimado dado que el nivel de la serie no se conoce a priori. Por lo tanto, no se calcula ninguna prueba estadística para la identificación de un LS en el primer dato. También, un LS en el último dato no puede ser distinguido de un outlier aditivo (additive outlier, AO) en ese punto, y un LS en el segundo punto no puede ser distinguido de un AO en el primer dato. De este modo, para el segundo y último punto de la serie no se calculan estadísticos para la detección de LS si se ha detectado un AO en esos puntos.

Similarmente, un *cambio temporal* en el último dato no puede ser distinguido de un AO, entonces no se calcula ningún estadístico para la identificación de TC en ese punto si se ha detectado un AO.

El método *addone* trabaja de la siguiente manera. El programa calcula estadísticos t para cada tipo de outlier especificados (AO, LS y/o TC) en todos los puntos de la serie en donde se hará el análisis. Si el máximo estadístico t en valor absoluto excede el valor crítico, entonces un outlier se ha detectado y su apropiada variable de regresión es añadida al modelo. El programa entonces estima el nuevo modelo (el viejo modelo con el nuevo outlier incorporado) y busca outliers adicionales de la misma forma. Este proceso se repite hasta que no se detecten outlier adicionales. En este momento se realiza una eliminación "hacia atrás" para quitar los outliers "insignificantes" (aquellos cuyos estadísticos t ya no exceden el valor crítico) del modelo.

El método *addall* sigue los mismos pasos en general que el método anterior, excepto que el método *addall* incorpora todos los outliers cuyos estadísticos t en valor absoluto exceden el valor crítico y no el que tiene el mayor valor t . Generalmente muchos de los outliers identificados por este método serán econtrados "insignificantes" durante la eliminación hacia atrás, cuando el nuevo modelo es estimado. Este método depende por lo tanto fuertemente del proceso de eliminación "hacia atrás" para remover outliers innecesarios añadidos en el modelo durante la fase de detección.

2.3.3.1 Algoritmo para la Detección Automática de Outliers

El algoritmo procede de uno valores críticos γ^{ao} , γ^{ls} y γ^{tc} especificados para los estadísticos t de los regresores de AO, LS y TC, denotados por T_i^{ao} , T_i^{ls} y T_i^{tc} , que son calculados en cada punto de la serie, en cada iteración del método *addone* descrito a continuación. (Los valores críticos se muestran en la tabla 2.1) Sea T_i uno de estos estadísticos, γ su valor crítico correspondiente, β y ψ los vectores de los coeficientes de regresión y los coeficientes del modelo ARMA, y $a_i(\beta, \psi)$ las estimaciones de las innovaciones a_i , determinadas por estos coeficientes del modelo (10).

Inicialización: Estimar los coeficientes (β, ψ) del modelo (10) especificado por el usuario. Si el modelo incluye regresores de AO, LS ó TC, éstos serán mantenidos siempre en el conjunto de regresores.

Adición (detección):

1. Calcular el error estándar robusto, $\sigma_a^R = 1.49 \times \text{mediana}_i |a_i(\beta, \psi)|$, para los (β, ψ) actuales.
2. Usando los ψ y σ_a^R , calcular los valores de T_i para todos los regresores de AO, LS y TC no incluidos en el modelo, i.e., excluyendo aquellos especificados o ya identificados en la adición.
3. Determinar el regresor de outlier con valor $|T_i|$ máximo.
4. Si $\max |T_i| \geq \gamma$, añadir este regresor al modelo y reestimar β y ψ . De otro modo, parar.

Repetir Pasos 1 - 4 hasta que no haya outliers adicionales satisfaciendo $|T_i| \geq \gamma$.

Eliminación "hacia atrás": Empezar con el modelo incluyendo todos los regresores de outliers añadidos en la etapa de adición.

1. Calcular los estimadores máximo verosímiles de (β, ψ, σ_a) .
2. Usando las estimaciones (β, ψ, σ_a) , calcular los estadísticos T_i para cada regresor AO, LS y TC identificados en la adición que permanecen en el modelo. Determinar cuál de éstos regresores tiene el mínimo $|T_i|$.
3. Si $\min |T_i| < \gamma$, eliminar éste regresor del modelo y regresar al paso 1. De otro modo, parar.

En el método *addall*, en el paso 4 de la etapa de adición, se añade en el modelo todos los regresores de outliers cuyos $|T_i| \geq \gamma$.

2.3.3.2 Inestabilidades de la Identificación de Outliers

El conjunto de outliers identificados automáticamente puede cambiar si el conjunto de regresores o el modelo ARIMA cambian. Por ejemplo, en una serie con un efecto de Semana Santa fuerte, los meses de marzo y abril frecuentemente son identificados como outliers si no se especifican en el modelo regresores para este efecto, pero si son utilizados tales regresores no se detectarán esos meses como outliers. Una segunda fuente de inestabilidad en la detección de outliers se observa cuando regresores con estadístico t justo por debajo del valor crítico puede tener su estadístico t incrementado por arriba de ese valor crítico cuando un nuevo dato es añadido a la serie. Por el contrario, los regresores pueden salir del conjunto de outliers identificados cuando nuevos datos son incluidos. La salida del programa cuando la opción de identificación automática de outliers es utilizada muestra una lista de meses para los cuales los regresores de outliers están cercanos al valor crítico. Esto se hace para habilitar al usuario a considerar en un futuro el incluir tales regresores en corridas subsecuentes del programa.

Número de Observaciones Analizadas	Valor Crítico de Outlier	Número de Observaciones Analizadas	Valor Crítico de Outlier
1	1.96	48	3.63
2	2.24	72	3.73
3	2.44	96	3.80
4	2.62	120	3.85
5	2.74	144	3.89
6	2.84	168	3.92
7	2.92	192	3.95
8	2.99	216	3.97
9	3.04	240	3.99
10	3.09	264	4.01
11	3.13	288	4.03
12	3.16	312	4.04
24	3.42	336	4.05
36	3.55	360	4.07

Tabla 2.1: Valores Críticos (default) para la identificación de outliers

Capítulo III: ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE SERIES DE TIEMPO

3.1 Introducción

Una clase importante de modelos estocásticos para describir series de tiempo comprende a los llamados modelos estacionarios, que asumen que el proceso permanece en "equilibrio" alrededor de un nivel medio. Sin embargo, el pronóstico ha sido de particular importancia en la industria, los negocios y la economía, donde muchas series de tiempo son frecuentemente mejor representadas como no estacionarias y, en particular, sin tener un nivel medio a lo largo del tiempo. Varios métodos de pronósticos económicos utilizan promedios móviles ponderados exponencialmente que resultan ser apropiados para ciertos procesos no estacionarios.

El método estocástico, para el cual este pronóstico presenta un error cuadrático medio mínimo es un caso especial de una clase de procesos no estacionarios llamados Autorregresivos Integrados y de Promedios Móviles (ARIMA). Esta clase de procesos provee un rango de modelos, estacionarios y no estacionarios, que representan adecuadamente muchas de las series de tiempo encontradas en la práctica. El enfoque para pronosticar ha sido primero derivar un modelo estocástico adecuado para la serie en estudio. Una vez que el modelo ha sido determinado, se obtiene inmediatamente el procedimiento óptimo para el pronóstico.

Operadores

Se estará empleando extensivamente el operador de retraso B , que se define como $Bz_t = z_{t-1}$; por lo tanto $B^m z_t = z_{t-m}$. La operación inversa se da con el operador adelantado $F = B^{-1}$ dado por $Fz_t = z_{t+1}$; por lo tanto $F^m z_t = z_{t+m}$.

Otro operador importante es el operador diferencia ∇ , el cual puede ser descrito en términos de B , dado que $\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1-B)z_t$.

Modelo de Filtro Lineal

Los modelos estocásticos empleados aquí están basados en la idea de que una serie de tiempo en la que los valores sucesivos son altamente dependientes puede ser frecuentemente generada a partir de una serie de choques independientes a_t .

Estos choques son valores aleatorios de una distribución ajustada, generalmente se asume la Normal con media cero y varianza σ_a^2 . Dicha secuencia de variables aleatorias $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ se denomina proceso ruido blanco.

Se supone que el proceso ruido blanco a_t es transformado en el proceso z_t por el llamado filtro lineal, como se muestra en la figura 3.1.

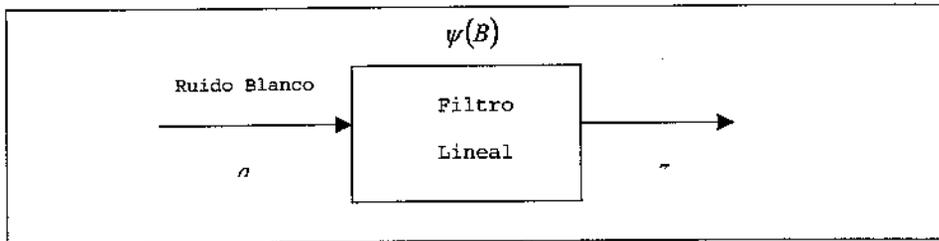


Figura 3.1: Representación de una serie de tiempo como la salida de un filtro lineal

La operación del filtro lineal simplemente toma una suma ponderada de choques aleatorios previos a_t , tal que

$$\begin{aligned} z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= \mu + \psi(B)a_t \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

En general, μ es un parámetro que determina el "nivel" del proceso, y $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ es el operador lineal que transforma a a_t en z_t , y se llama función transformadora del filtro.

La sucesión ψ_1, ψ_2, \dots formada por los ponderadores puede ser, teóricamente, finita o infinita. Si esta sucesión es finita, o infinita pero absolutamente sumable en el sentido de que

$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, se dice que el filtro es estable y que el proceso

z_t es estacionario. El parámetro μ es entonces la media sobre la cual varía el proceso.

Modelos Autorregresivos

Un modelo estocástico que puede ser de mucha utilidad en la representación práctica de ciertas series es el modelo autorregresivo. En este modelo, el valor actual del proceso es expresado como una combinación lineal finita de valores previos del proceso mas un choque a_t .

Denotemos los valores de un proceso de intervalos iguales de tiempo $t, t-1, t-2, \dots$ por $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$ y sean $Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$ desviaciones de μ ; es decir, $Z_t = z_t - \mu$.

Entonces, a

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t, \quad (3.1.2)$$

se le llama *proceso autorregresivo (AR)* de orden p . Si definimos el *operador autorregresivo* de orden p por

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

el modelo autorregresivo puede escribirse como

$$\phi(B)Z_t = a_t,$$

El modelo contiene $p+2$ parámetros desconocidos, $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_a^2$, los cuales en la práctica tienen que ser estimados a partir de los datos. El parámetro adicional σ_a^2 es la varianza del proceso *ruido blanco* a_t .

No es difícil ver que el modelo autorregresivo es un caso especial del modelo del filtro lineal de (3.1.1). Por ejemplo, podemos eliminar Z_{t-1} de (3.1.2) sustituyendo $Z_{t-1} = \phi_1 Z_{t-2} + \phi_2 Z_{t-3} + \dots + \phi_p Z_{t-p-1} + a_{t-1}$. Del mismo modo podemos sustituir Z_{t-2} , y así sucesivamente, para llegar eventualmente a una serie infinita sobre las a 's. Simbólicamente, tenemos que

$$\phi(B)Z_t = a_t,$$

es equivalente a

$$Z_t = \psi(B)a_t,$$

con

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B).$$

Los procesos autorregresivos pueden ser estacionarios o no estacionarios. Para que el proceso sea estacionario, las ϕ 's deben ser escogidas de tal manera que los ponderadores ψ_1, ψ_2, \dots en $\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ formen una serie convergente.

El requisito necesario para la estacionariedad es que el operador autorregresivo, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, considerado como un polinomio en B de grado p , tenga todas las raíces de $\phi(B) = 0$ mayores a 1 en valor absoluto, esto es, todas las raíces deben caer fuera del círculo unitario.

Modelos de Promedios Móviles

El modelo autorregresivo (3.1.2) expresa a la desviación Z_t del proceso como una suma ponderada "finita" de p desviaciones previas $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}$ del proceso mas un choque aleatorio a_t . De forma equivalente, como lo hemos visto anteriormente, expresa a Z_t como una suma ponderada infinita de las a 's.

Otro tipo de modelo, de gran importancia práctica en la representación de series de tiempo, es el proceso de promedios móviles finito. Aquí, hacemos a Z_t linealmente dependiente a choques previos a 's en un número finito q . Así, a

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.1.3)$$

se le llama proceso de promedios móviles (MA) de orden q . Si definimos un operador de promedios móviles de orden q por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q,$$

el modelo de promedios móviles se puede escribir como

$$Z_t = \theta(B)a_t$$

Contiene $q+2$ parámetros desconocidos $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$, los cuales tienen que ser estimados a partir de los datos.

Modelos Autorregresivos - de Promedios Móviles

Para obtener mayor flexibilidad al ajustar series de tiempo, algunas veces es ventajoso incluir los términos autorregresivos y los de promedios móviles simultáneamente en el modelo. Esto nos conduce al modelo autorregresivo - de promedios móviles (ARMA) de orden (p, q) .

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.1.4)$$

ó

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t$$

el cual emplea $p+q+2$ parámetros desconocidos $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$ que son estimados a partir de los datos.

Este modelo puede ser también escrito en términos del filtro lineal (3.1.1) como $z_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)a_t$. En la práctica, se obtienen frecuentemente representaciones adecuadas de series de tiempo con modelos autorregresivos, de promedios móviles o una combinación de ambos, en los cuales p y q no son mayores a 2, y por lo general son menores a 2.

Modelos No Estacionarios

Muchas de las series encontradas actualmente en la industria, en la economía o en los negocios, exhiben un comportamiento no estacionario y no varían sobre una media determinada. Dichas series nunca exhibirán comportamiento homogéneo de ningún tipo. En particular, a pesar de que el nivel general sobre la cual las fluctuaciones ocurren pueden ser diferentes en tiempos diferentes, el comportamiento general de la serie, cuando las diferencias en el nivel están presentes, puede ser similar.

Se mostrará en las siguientes secciones que dicho comportamiento puede ser representado por un operador autorregresivo generalizado $\phi(B)$, en el cual una o más de las raíces de la ecuación $\phi(B)=0$ caen en el círculo unitario. Particularmente, si existen d raíces unitarias, el operador $\phi(B)$ puede ser escrito como

$$\phi(B) = \phi(B)(1-B)^d$$

donde $\phi(B)$ es un operador estacionario. Entonces, el modelo que puede representar comportamientos no estacionarios homogéneos es de la forma

$$\phi(B)z_t = \phi(B)(1-B)^d z_t = \theta(B)a_t$$

esto es,

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \quad (3.1.5)$$

donde

$$w_t = \nabla^d z_t \quad (3.1.6)$$

Dicho comportamiento no estacionario homogéneo puede ser representado algunas veces por un modelo que requiere de la d -ésima diferencia para que sea estacionario. En la práctica, d toma el valor de 0,1 y a lo más 2.

El proceso definido por (3.1.5) y (3.1.6) provee un modelo poderoso para la descripción de series de tiempo estacionarias y no estacionarias y se llama proceso Autorregresivo Integrado y de Promedios Móviles (ARIMA), de orden (p,d,q) . El proceso se define por

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.1.7)$$

con $w_t = \nabla^d z_t$. Nótese que si reemplazamos a w_t por $z_t - \mu$, cuando $d=0$, el modelo (3.1.7) incluye al modelo mixto (3.1.4), como un caso especial, y también al modelo autorregresivo puro (3.1.2) y al modelo de promedios móviles puro (3.1.3).

La razón para la inclusión de la palabra *integrado* (sería más apropiado ser *suma*) en el nombre ARIMA es la siguiente. La relación inversa a (3.1.6) es $z_t = S^d w_t$, donde $S = \nabla^{-1} = (1-B)^{-1}$ es el operador *suma* definido por

$$S w_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_{t-j} = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \dots$$

Así, el proceso Autorregresivo Integrado y de Promedios Móviles (ARIMA) puede ser generado por la suma o la "integración" del proceso estacionario ARMA w_t , d veces.

Ideas Básicas en la Construcción de Modelos

Parsimonia

Hemos visto que los modelos matemáticos que necesitamos emplear contienen ciertas constantes o parámetros, cuyos valores deben ser estimados a partir de los datos. Es importante, en la práctica, que empleemos el menor número posible de parámetros para representaciones adecuadas. Este principio es llamado *parsimonia*. Nuestro objetivo debe ser entonces, obtener modelos adecuados pero parsimoniosos. El proceso de selección es necesariamente iterativo; esto es, es un proceso de evolución, adaptación, o ensayo y error y se describe en seguida.

Normalmente se supone que tenemos disponibles para el análisis valores sucesivos de la serie en consideración, si es posible, al menos 50 y mejor aun 100 o más observaciones. La figura 3.2 resume el proceso iterativo para la construcción de modelos para el control y el pronóstico que usaremos.

3.2 Función de Autocorrelación de Procesos Estacionarios

Un aspecto central en los modelos de series de tiempo es el supuesto de alguna forma de "equilibrio estadístico". Un supuesto particular de este tipo es el de la estacionariedad. Usualmente, una serie de tiempo estacionaria puede ser descrita por su media, su varianza y su función de autocorrelación. En este tema consideramos las propiedades de esta función, la cual es usada ampliamente en los siguientes capítulos.

3.2.1 Propiedades de Autocorrelación de los Modelos Estacionarios

Series de Tiempo y Procesos Estocásticos

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones generadas secuencialmente en el tiempo. Si el conjunto es discreto, se dice que la serie es discreta. Así, las observaciones de una serie de tiempo discreta hechas en los tiempos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N$, se denotan por $z(\tau_1), z(\tau_2), \dots, z(\tau_i), \dots, z(\tau_N)$. En este trabajo consideramos solamente series de tiempo discretas donde las observaciones se realizan en un intervalo fijo h .

Cuando tenemos N valores "sucesivos" disponibles de dicha serie para el análisis, escribimos $z_1, z_2, \dots, z_t, \dots, z_N$ para denotar a las observaciones obtenidas en intervalos equidistantes de tiempo $\tau_0 + h, \tau_0 + 2h, \dots, \tau_0 + th, \dots, \tau_0 + Nh$. Para muchos propósitos, los valores de τ_0 y h son irrelevantes. Si adoptamos a τ_0 como el origen y a h como la unidad de tiempo, podemos nombrar a z_t como la observación en el tiempo t .

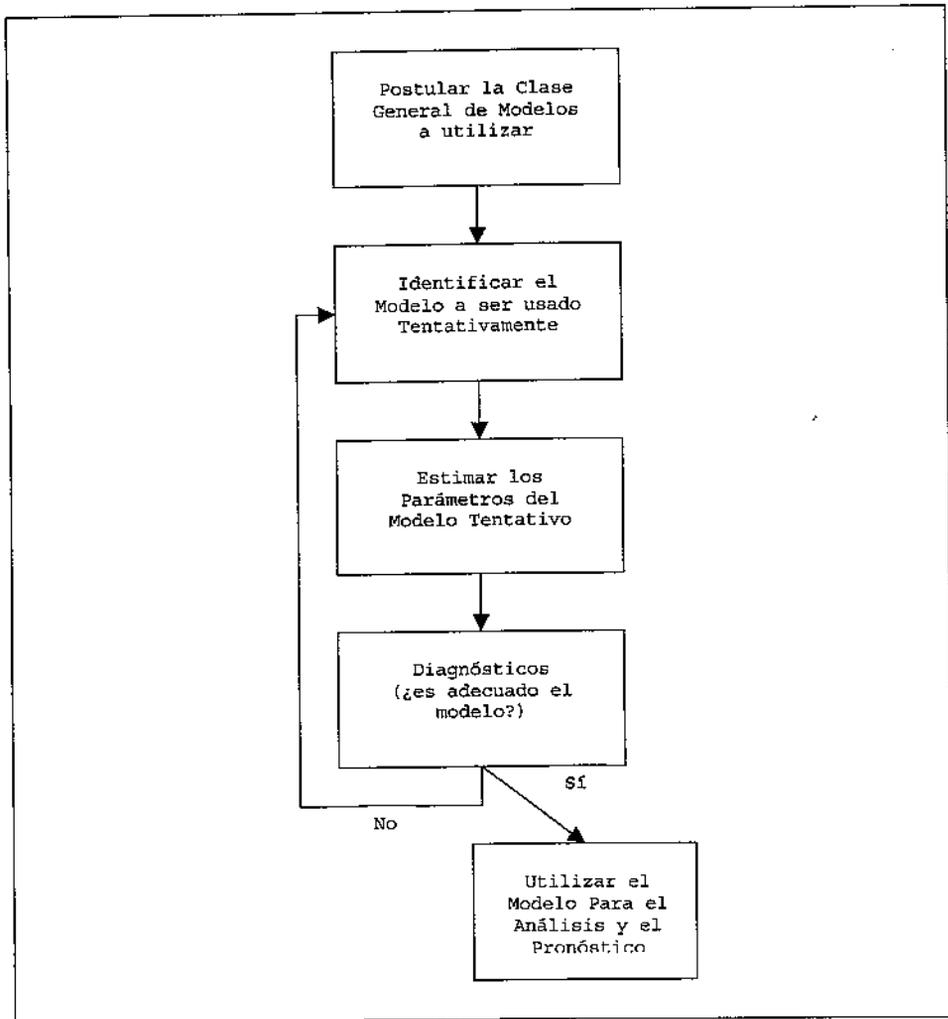


Figura 3.2 : Etapas en el enfoque iterativo para la Construcción de Modelos

Series de Tiempo Deterministas y Estadísticas

Si los valores futuros de una serie de tiempo están exactamente determinados por alguna función matemática como $z_t = \cos(2\pi ft)$, se dice que la serie de tiempo es determinista.

Si los valores futuros pueden ser descritos sólo en términos de una distribución probabilística, se dice que la serie de tiempo es no determinista o simplemente que es una serie de tiempo estadística. Es este tipo de series de tiempo (estadísticas) con las que estamos enfocados en este trabajo.

Proceso Estocástico

A un fenómeno estadístico que evoluciona en el tiempo de acuerdo a leyes probabilísticas se le llama proceso estocástico. La serie de tiempo a ser analizada puede ser asociada como una "realización" particular, producida por el mecanismo probabilístico señalado, del sistema en estudio. En otras palabras, "cuando analizamos una serie de tiempo, la suponemos como una realización de un proceso estocástico".

Procesos Estocásticos Estacionarios

Una clase muy especial de procesos estocásticos, llamados procesos estacionarios, están basados en la suposición de que el proceso está en un estado particular de "equilibrio estadístico". Se dice que un proceso estocástico es "estrictamente estacionario" si sus propiedades de origen, esto es, si la distribución de probabilidad conjunta asociada con m observaciones $z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_m}$, tomadas en cualquier conjunto de tiempos t_1, t_2, \dots, t_m , es la misma a aquella asociada con m observaciones $z_{t_1+k}, z_{t_2+k}, \dots, z_{t_m+k}$, tomadas en los tiempos $t_1+k, t_2+k, \dots, t_m+k$.

Media y Varianza de un Proceso Estacionario

Cuando $m=1$, la suposición de estacionariedad implica que la distribución de probabilidad $p(z_t)$ es la misma para todo tiempo t y puede ser escrita como $p(z)$. De esta forma, el proceso estocástico tiene una media constante

$$\mu = E[z_t] = \int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz \quad (3.2.1)$$

la cual define el nivel sobre el que la serie fluctúa, y una varianza constante

$$\sigma_z^2 = E[(z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^2 p(z) dz \quad (3.2.2)$$

que mide la variación sobre este nivel de tiempo. Como la distribución de probabilidad $p(z)$ es la misma para todo tiempo t , su forma se puede inferir realizando el histograma de las observaciones z_1, z_2, \dots, z_N , de la serie de tiempo.

Adicionalmente, la media μ del proceso estocástico puede ser estimada por la media muestral

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t \quad (3.2.3)$$

de la serie de tiempo, y la varianza del proceso estocástico puede ser estimada por la varianza muestral

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2 \quad (3.2.4)$$

de la serie de tiempo.

Autocovarianza y Autocorrelación

La suposición de estacionariedad también implica que la distribución de probabilidad conjunta $p(z_{t_1}, z_{t_2})$ es la misma para todo tiempo t_1, t_2 , los cuales están separados por un intervalo constante. De aquí se sigue que la naturaleza de esta distribución conjunta puede ser inferida graficando un diagrama "scatter" usando pares de valores (z_t, z_{t+k}) de la serie de tiempo, separados por un intervalo constante o "retraso" k .

La covarianza entre z_t y z_{t+k} , separados por k intervalos de tiempo, la cual bajo la condición de estacionariedad debe ser la misma para toda t , se le llama covarianza en el retraso k y se define por

$$\gamma_k = \text{cov}[z_t, z_{t+k}] = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)] \quad (3.2.5)$$

Similarmente, la autocorrelación en el retraso k es

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]E[(z_{t+k} - \mu)^2]}} & (3.2.6) \\ &= \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2} \end{aligned}$$

esto último debido a que, para un proceso estacionario, la varianza $\sigma_z^2 = \gamma_0$ es la misma tanto en el tiempo $t+k$ como en el tiempo t . Así, la autocorrelación en el retraso k , es decir, la correlación entre z_t y z_{t+k} es

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (3.2.7)$$

lo cual implica que $\rho_0 = 1$.

Matriz de Autocovarianza

La matriz de covarianza asociada con un proceso estacionario, para las observaciones (z_1, z_2, \dots, z_N) tomadas en n tiempos sucesivos es

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \begin{bmatrix} \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1} \\ \gamma_1, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-2} \\ \gamma_2, \gamma_1, \gamma_0, \dots, \gamma_{n-3} \\ \dots \\ \gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \gamma_{n-3}, \dots, \gamma_0 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_z^2 \begin{bmatrix} 1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1} \\ \rho_1, 1, \rho_1, \dots, \rho_{n-2} \\ \rho_2, \rho_1, 1, \dots, \rho_{n-3} \\ \dots \\ \rho_{n-1}, \rho_{n-2}, \rho_{n-3}, \dots, 1 \end{bmatrix} = \sigma_z^2 P_n & (3.2.8) \end{aligned}$$

Una matriz de covarianza Γ_n de esta forma, la cual es simétrica con elementos constantes en cualquier diagonal, será llamada *matriz de autocovarianza* y la matriz de correlación correspondiente P_n , será llamada *matriz de autocorrelación*.

Ahora consideremos alguna función lineal de las variables aleatorias $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-n+1}$:

$$L_t = l_1 z_t + l_2 z_{t-1} + \dots + l_n z_{t-n+1}. \quad (3.2.9)$$

Como $\text{cov}[z_i, z_j] = \gamma_{|j-i|}$ para un proceso estacionario, la varianza de L_t es

$$\text{var}[L_t] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j \gamma_{|j-i|}$$

la cual es necesariamente mayor que cero si las l 's no son todas cero. De aquí se sigue que tanto la matriz de autocovarianza como la de autocorrelación son positivas definidas para cualquier proceso estacionario.

Condiciones Satisfechas por las Autocorrelaciones de un Proceso Estacionario

La condición de que la matriz de autocorrelación (3.2.8) sea positiva definida implica que su determinante sea mayor a cero. En particular, para $n=2$,

$$\begin{vmatrix} 1, \rho_1 \\ \rho_1, 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \rho_1^2 > 0$$

y de ahí que $-1 < \rho_1 < 1$.

Similarmente, para $n=3$, debemos tener

$$\begin{vmatrix} 1, \rho_1 \\ \rho_1, 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1, \rho_2 \\ \rho_2, 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1, \rho_1, \rho_2 \\ \rho_1, 1, \rho_1 \\ \rho_2, \rho_1, 1 \end{vmatrix} > 0$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} -1 < \rho_1 < 1 \\ -1 < \rho_2 < 1 \\ -1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1 \end{aligned}$$

Como P_n debe ser positiva definida para "todo" valor de n , las autocorrelaciones de un proceso estacionario deben satisfacer un gran número de condiciones.

Estacionariedad de Funciones Lineales

De la definición de estacionariedad se sigue que el proceso L_t obtenido al realizar la operación lineal (3.2.9) en el proceso estacionario z_t para un n fijo y para unos coeficientes l_1, \dots, l_n fijos, es también estacionario.

En particular, la primera diferencia $\nabla z_t = z_t - z_{t-1}$, y diferencias mayores $\nabla^d z_t$, son estacionarias.

Esto es de particular importancia para la discusión de series de tiempo no estacionarias.

Procesos Gaussianos

Si la distribución de probabilidad de las observaciones asociadas con cualquier conjunto de tiempos es una distribución Normal Multivariada, el proceso se llama Normal o Gaussiano. Dado que la distribución Normal Multivariada está totalmente descrita por sus momentos de primer y segundo orden, la existencia de una media fija μ y una matriz de autocovarianza Γ_n , para toda n , sería suficiente para asegurar la estacionariedad de un proceso Gaussiano.

Estacionariedad Débil

Hemos visto que para que un proceso sea estrictamente estacionario, toda la estructura probabilística debe depender solamente en las diferencias de tiempo. Un requisito menos restrictivo, llamado estacionariedad débil de orden f , es que los momentos hasta un orden f dependan sólo en las diferencias de tiempo.

Por ejemplo, la existencia de una media fija μ y una matriz de autocovarianza Γ_n de la forma (3.2.8) es suficiente para asegurar estacionariedad hasta el segundo orden. De esta manera, la estacionariedad de segundo orden, mas una suposición de normalidad, son suficientes para producir estacionariedad estricta.

Funciones de Autocovarianza y Autocorrelación

A la gráfica de γ_k con el retraso k se le llama *función de autocovarianza* $\{\gamma_k\}$ del proceso estocástico. Similarmente, a la gráfica del coeficiente de correlación ρ_k como una función del retraso k se le llama *función de autocorrelación* $\{\rho_k\}$ del proceso. Nótese que la función de autocorrelación no tiene dimensión, es decir, es independiente de la escala de medición de la serie de tiempo.

Como $\gamma_k = \rho_k \sigma_z^2$, el conocimiento de la función de autocorrelación $\{\rho_k\}$ y de la varianza σ_z^2 es equivalente al conocimiento de la función de autocovarianza $\{\gamma_k\}$.

Puesto que $\rho_k = \rho_{-k}$, la función de autocorrelación es necesariamente simétrica alrededor de cero y, en la práctica sólo es necesario graficar la parte positiva de la función. En lo sucesivo, cuando hablemos de la función de autocorrelación, nos referiremos a la mitad positiva.

Estimación de las Funciones de Autocovarianza y de Autocorrelación

Hasta ahora sólo hemos considerado la función de autocorrelación teórica que describe un proceso estocástico conceptual. En la práctica, nosotros tenemos una serie de tiempo finita z_1, z_2, \dots, z_N , de N observaciones, de la cual sólo podemos obtener estimaciones de la media μ y de las autocorrelaciones. La media $\mu = E[z]$ se estima con (3.2.3) por la media muestral. Es fácil ver que $E[\bar{z}] = \mu$, por lo tanto \bar{z} es un estimador insesgado de μ .

Un gran número de estimaciones de la función de autocorrelación han sido sugeridas por los estadísticos pero se ha concluido que el estimador más satisfactorio de la autocorrelación del k -ésimo retraso ρ_k es

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad (3.2.10)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (z_i - \bar{z})(z_{i+k} - \bar{z}) \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, K$$

es la estimación de la autocorrelación γ_k y z es la media muestral de la serie de tiempo.

A los valores r_k en (3.2.10) se les llama *función de autocorrelación muestral*. En la práctica, para obtener estimaciones útiles de la función de autocorrelación necesitaríamos al menos 50 observaciones, y las autocorrelaciones estimadas r_k serían calculadas para $k=0,1,\dots,K$, donde K no sea mayor a, digamos $N/4$.

Error Estándar de las Estimaciones de la Autocorrelación

Para identificar un modelo para una serie de tiempo es conveniente realizar una verificación rigurosa de si ρ_k es efectivamente cero más allá de un cierto retraso. Para este propósito, podemos usar la siguiente aproximación para la varianza del coeficiente de autocorrelación estimado de un proceso Normal estacionario

$$\text{var}[r_k] \approx \frac{1}{N} \sum_{v=-\infty}^{\infty} (\rho_v^2 + \rho_{v+k}\rho_{v-k} - 4\rho_k\rho_v\rho_{v-k} + 2\rho_v^2\rho_k^2) \quad (3.2.11)$$

Por ejemplo, si $\rho_k = \phi^k$ con $(-1 < \phi < 1)$, esto es, la función de autocorrelación decae exponencialmente, (3.2.11) nos da

$$\text{var}[r_k] \approx \frac{1}{N} \left[\frac{(1+\phi^2)(1-\phi^{2k})}{1-\phi^2} - 2k\phi^{2k} \right] \quad (3.2.12)$$

y en particular,

$$\text{var}[r_1] \approx \frac{1}{N} (1-\phi^2)$$

Para cualquier proceso en el cual las autocorrelaciones ρ_v son cero para $v > q$, todos los términos excepto el primero que aparece en la parte derecha de (3.2.11) son cero cuando $k > q$. Así, para la varianza de la autocorrelación estimada r_k , en retrasos k mayores que algún valor q "más allá del cual la función de autocorrelación teórica puede ser considerada haberse desaparecido". La aproximación de Bartlett nos da

$$\text{var}[r_k] \approx \frac{1}{N} \left(1 + 2 \sum_{v=1}^q \rho_v^2 \right) \quad \text{para } k > q \quad (3.2.13)$$

Para usar (3.2.6) en la práctica, se sustituyen las autocorrelaciones teóricas ρ_k por las autocorrelaciones estimadas r_k ($k=1,2,\dots,q$).

Un caso especial de particular interés ocurre cuando $q=0$, esto es, cuando las ρ_k son cero para todos los retrasos (diferentes de cero) y entonces la serie es completamente aleatoria. De ahí que los errores estándar de (3.2.13) para las autocorrelaciones estimadas r_k toman la forma $\frac{1}{N^{1/2}}$.

Bartlett ha dado expresiones aproximadas para la covarianza entre las correlaciones estimadas r_k y r_{k+s} en dos retrasos k y $k+s$ distintos. La aproximación se reduce a

$$\text{cov}[r_k, r_{k+s}] \approx \frac{1}{N} \sum_{v=q}^q \rho_v \rho_{v+s} \quad k > q \quad (3.2.14)$$

Adicionalmente, en este caso el resultado en (3.2.14) indica que las autocorrelaciones estimadas r_k y r_{k+s} en dos diferentes retrasos no están correlacionados, y se sabe también que las correlaciones r_k están aproximadamente distribuidas normalmente para un N grande, entonces una colección de autocorrelaciones estimadas para diferentes retrasos tenderá a ser independiente y normalmente distribuido con media 0 y varianza $1/N$.

3.3 Modelos Lineales Estacionarios

3.3.1 Proceso Lineal General

Dos Formas Equivalentes para los Procesos Lineales

En la sección 3.1 discutimos la representación de un proceso estocástico como la de una salida de un filtro lineal, cuya entrada es ruido blanco, es decir,

$$\begin{aligned} z_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \end{aligned} \quad (3.3.1.1)$$

donde $z_t = z_t - \mu$ es la desviación de algún origen o de la media del proceso, si este es estacionario.

El proceso lineal general (3.3.1.1) nos permite representar a z_t como una suma ponderada de valores actuales y pasados del proceso "ruido blanco" a_t . El proceso ruido blanco a_t puede ser considerado como una "serie de choques" que conducen el sistema.

Consiste en una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza constante, es decir,

$$E[a_t] = 0 \quad \text{y} \quad \text{var}[a_t] = \sigma_a^2$$

Puesto que las variables aleatorias a_t no están correlacionadas, se sigue que su función de autocovarianza es

$$\gamma_k = E[a_t a_{t+k}] = \begin{cases} \sigma_a^2 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.3.1.2)$$

Así, la función de autocorrelación del ruido blanco tiene la forma

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Para que z_t definida por (3.3.1.1) represente un proceso estacionario válido, es necesario que los coeficientes ψ_j sean absolutamente sumables, es decir, que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

El modelo (3.3.1.1) implica que, bajo condiciones apropiadas, z_t es también una suma ponderada de valores pasados de las z 's, mas un choque a_t , esto es

$$\begin{aligned} z_t &= \pi_1 z_{t-1} + \pi_2 z_{t-2} + \dots + a_t \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} + a_t \end{aligned} \quad (3.3.1.3)$$

Relación entre los ponderadores ψ y π

La relación entre estos ponderadores puede ser obtenida utilizando el operador de retraso previamente definido, y también necesitaremos el operador adelantado.

Como un ejemplo del operador B , considérese el modelo

$$z_t = a_t - \theta a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t,$$

en el cual $\psi_1 = -\theta$, $\psi_j = 0$ para $j > 1$.

Expresando a a_t en términos de las z 's obtenemos $(1 - \theta B)^{-1} z_t = a_t$. Ahora, para $|\theta| < 1$, tenemos $(1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \theta^3 B^3 + \dots) z_t = a_t$, y la desviación z_t expresada en términos de desviaciones previas, como en (3.3.1.3), es $z_t = -\theta z_{t-1} - \theta^2 z_{t-2} - \theta^3 z_{t-3} - \dots + a_t$, entonces para este modelo, $\pi_j = -\theta^j$. En general, (3.3.1.1) se puede escribir

$$z_t = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j \right) a_t,$$

ó

$$z_t = \psi(B) a_t, \quad (3.3.1.4)$$

donde

$$\psi(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

con $\psi_0 = 1$.

A $\psi(B)$ se le llama función de traslado del filtro lineal relacionando a z_t con a_t .

También se le puede considerar como la función generadora de los ponderadores ψ , tomando a B ahora simplemente como una variable cuya j -ésima potencia es el coeficiente ψ_j .

Del mismo modo, (3.3.1.3) puede ser escrita como

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j \right) z_t = a_t,$$

ó

$$\pi(B) z_t = a_t, \quad (3.3.1.5)$$

Así que

$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$$

es la función generadora de los ponderadores π . Después de operar ambos lados de (3.3.1.5) por $\psi(B)$, obtenemos

$$\psi(B)\pi(B)Z_t = \psi(B)a_t = Z_t.$$

En consecuencia

$$\psi(B)\pi(B) = 1,$$

esto es,

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B) \quad (3.3.1.6)$$

La relación (3.3.1.6) se usará para deducir los ponderadores π , conociendo los ponderadores ψ y viceversa.

Función Generadora de Autocovarianzas de un Proceso Lineal

La función de autocovarianza del proceso lineal (3.3.1.1) está dada por

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \quad (3.3.1.7)$$

En particular, fijando a $k=0$ en (3.3.1.7) encontramos que su varianza es

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \quad (3.3.1.8)$$

De aquí que la condición de estacionariedad de que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, implica que la serie en el lado derecho de (3.3.1.7) converge, y entonces garantiza que el proceso tendrá una varianza finita.

Otra forma de obtener las autocovarianzas de un proceso lineal es vía la función generadora de autocovarianzas

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \quad (3.3.1.9)$$

en la cual se observa que γ_0 , la varianza del proceso, es el coeficiente de $B^0=1$, mientras que γ_k , la autocovarianza de retraso k , es el coeficiente de B^j y $B^{-j}=F_j$.

Puede mostrarse que

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B) \psi(B^{-1}) = \sigma_a^2 \psi(B) \psi(F) \quad (3.3.1.10)$$

Por ejemplo, supóngase que

$$z_t = a_t - \theta a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t$$

tal que $\psi(B) = 1 - \theta(B)$. Entonces, sustituyendo en (3.3.1.10) nos da

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma_a^2 (1 - \theta B)(1 - \theta B^{-1}) \\ &= \sigma_a^2 [-\theta B^{-1} + (1 + \theta^2) - \theta B] \end{aligned}$$

Utilizando (3.3.1.8), las autocovarianzas

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta^2) \sigma_a^2 \\ \gamma_1 &= -\theta \sigma_a^2 \\ \gamma_k &= 0 \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

En el siguiente desarrollo, cuando tomamos a B en la función generadora como una variable, ésta se supondrá apta para tomar valores complejos. En particular, frecuentemente será necesario considerar las situaciones en que $|B| < 1$, $|B| = 1$ ó $|B| > 1$, es decir, cuando el número complejo B caiga dentro, en o fuera del círculo unitario.

Condiciones de Estacionariedad e Invertibilidad de un Proceso Lineal

Estacionariedad

La convergencia de la serie (3.3.1.8) asegura que el proceso tenga una varianza finita. También, hemos visto que las autocovarianzas y las autocorrelaciones deben satisfacer un conjunto de condiciones para asegurar estacionariedad.

Para un proceso lineal (3.3.1.1) estas condiciones están garantizadas por la simple condición de que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. (Esta condición puede ser también incluida en la condición de que la serie $\psi(B)$ debe converger para $|B| \leq 1$, esto es, debe estar en ó dentro del círculo unitario).

Invertibilidad

Hemos visto anteriormente que los ponderadores ψ de un proceso lineal deben satisfacer la condición de que $\psi(B)$ converja en o dentro del círculo unitario para que el proceso sea estacionario. Ahora consideraremos una restricción aplicada a los ponderadores ψ para asegurar lo que es llamada la *invertibilidad*. La condición de invertibilidad es independiente a la estacionariedad y también se aplica a los modelos lineales no estacionarios. Para ilustrar la idea básica de invertibilidad, consideremos nuevamente el modelo

$$z_t = (1 - \theta B)a_t \quad (3.3.1.11)$$

Expresando las a_t 's en términos de los valores presente y pasados z_t 's, (3.3.1.11) se vuelve

$$a_t = (1 - \theta B)^{-1} z_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots + \theta^k B^k) (1 - \theta^{k+1} B^{k+1})^{-1} z_t$$

es decir,

$$z_t = -\theta z_{t-1} - \theta^2 z_{t-2} - \dots - \theta^k z_{t-k} + a_t - \theta^{k+1} a_{t-k-1} \quad (3.3.1.12)$$

Si $|\theta| < 1$, dejando que $k \rightarrow \infty$, obtenemos la serie infinita

$$z_t = -\theta z_{t-1} - \theta^2 z_{t-2} - \dots + a_t \quad (3.3.1.13)$$

y los ponderadores π del modelo en (3.3.1.12) son $\pi_j = -\theta^j$.

Cualquiera que sea el valor de θ , (3.3.1.11) define un proceso estacionario perfectamente apropiado. Sin embargo, si $|\theta| \geq 1$, la desviación actual z_t en (3.3.1.12) depende de $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k}$, cuyos ponderadores se incrementan al incrementarse k .

Evitamos esta situación, exigiendo que $|\theta| < 1$. Debemos entonces decir que la serie es invertible. Vemos que esta condición es equivalente a $\sum_{j=0}^{\infty} |\theta|^j \equiv \sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, de manera que la serie

$$\pi(B) = (1 - \theta B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j$$

converja para toda $|B| \leq 1$, esto es, en ó dentro del círculo unitario.

Se puede ver que una extensión convergente para a_t es posible cuando $|\theta| \geq 1$, pero sólo en términos de z_t, z_{t+1}, \dots , (i.e., en términos del valor actual y valores futuros del proceso). La condición de invertibilidad es necesaria si estamos interesados en asociar eventos presentes con acontecimientos pasados de una manera razonable.

En general, el proceso lineal (3.3.1.1) es invertible y tiene la representación

$$\pi(B) z_t = a_t$$

si los ponderadores π_j son absolutamente sumables, es decir,

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty,$$

donde

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j.$$

Procesos Autorregresivos y de Promedios Móviles

Las representaciones (3.3.1.1) y (3.3.1.3) del proceso lineal general puede no ser muy útil en la práctica si contienen un número infinito de parámetros ψ_j y π_j . Ahora consideraremos cómo introducir la parsimonia y mantener aun modelos útiles.

Procesos Autorregresivos

Considérese el caso especial de (3.3.1.3) en el que sólo los p primeros ponderadores no son cero. El modelo se puede escribir

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t \quad (3.3.1.14)$$

donde ahora usamos los símbolos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ para el conjunto finito de los parámetros. El proceso definido por (3.3.1.14) se llama proceso autorregresivo de orden p , o más brevemente, proceso $AR(p)$. En particular, el proceso autorregresivo de primer orden ($p=1$), y de segundo orden ($p=2$) son de considerable importancia en la práctica.

Ahora podemos escribir a (3.3.1.14) en la forma equivalente

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) z_t = a_t$$

ó

$$\phi(B) z_t = a_t \quad (3.3.1.15)$$

Procesos de Promedios Móviles

Considérese el caso especial de (3.3.1.1) en donde sólo los primeros q ponderadores ψ no son cero. El proceso se escribe como

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.3.1.16)$$

donde ahora usamos los símbolos $-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$ para el conjunto "finito" de los parámetros. Al proceso definido por (3.3.1.16) se le llama proceso de promedios de orden q , que se abrevia como $MA(q)$. En particular, el proceso de primer orden ($q=1$), y de segundo orden ($q=2$) son de gran importancia práctica.

Procesos Autorregresivos - De Promedios Móviles

Hemos visto en la sección (3.3.1.1) que el proceso "finito" de promedios móviles

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t \quad \text{con} \quad |\theta_1| < 1$$

puede ser escrito como un proceso autorregresivo "infinito"

$$z_t = -\theta_1 z_{t-1} - \theta_1^2 z_{t-2} - \dots + a_t.$$

Ahora, si el proceso fuera realmente $MA(1)$, obtendríamos una representación no parsimoniosa en términos de un modelo autorregresivo. Recíprocamente, un $AR(1)$ puede no ser representado parsimoniosamente usando un proceso de promedios móviles.

En la práctica, para obtener una parametrización parsimoniosa, será frecuentemente necesario incluir términos de ambos procesos (autorregresivos y de promedios móviles) en el modelo. Así, a

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ó

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad (3.3.1.17)$$

se le llama proceso autorregresivo - de promedios móviles de orden (p, q) , que se abrevia como $ARMA(p, q)$. Por ejemplo, el proceso $ARMA(1, 1)$ es

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Nótese que como $\bar{z}_t = z_t - \mu$, donde $\mu = E[z_t]$ es la media del proceso en el caso estacionario, el proceso general $ARMA(p, q)$ en (3.3.1.17) se puede expresar de forma equivalente en términos del proceso original z_t , como

$$\phi(B)z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t \quad (3.3.1.18)$$

donde el término constante θ_0 en el modelo es

$$\theta_0 = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)\mu \quad (3.3.1.19)$$

3.3.2 Procesos Autorregresivos

Condiciones de Estacionariedad para los Procesos Autorregresivos

El conjunto de los parámetros ajustables $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ de un proceso $AR(p)$

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

ó

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) z_t = \phi(B) z_t = a_t$$

debe satisfacer ciertas condiciones para que el proceso sea estacionario. Por ejemplo, el proceso autorregresivo de primer orden

$$(1 - \phi_1 B) z_t = a_t$$

puede escribirse

$$z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j}$$

De esta forma,

$$\psi(B) = (1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \quad (3.3.2.1)$$

Hemos visto anteriormente que para darse la estacionariedad, $\psi(B)$ debe converger para $|B| \leq 1$. De (3.3.2.1) vemos que esto implica que el parámetro ϕ_1 de un proceso $AR(1)$ debe satisfacer la condición $|\phi_1| < 1$ para asegurar la estacionariedad.

Dado que la raíz de $1 - \phi_1 B = 0$ es $B = \phi_1^{-1}$, esta condición es equivalente a decir que la raíz de $1 - \phi_1 B = 0$ debe caer "fuera" del círculo unitario. Para el proceso general $AR(p)$, $z_t = \phi^{-1}(B) a_t$, obtenemos

$$\phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_p B)$$

donde $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ son las raíces $\phi(B) = 0$, y extendiendo $\phi^{-1}(B)$ en fracciones parciales llegamos a

$$z_t = \phi^{-1}(B) a_t = \sum_{i=1}^p \frac{k_i}{1 - G_i B} a_t$$

Así, si $\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ es una serie convergente para $B \leq 1$, esto es, si los ponderadores $\psi_j = \sum_{i=1}^p k_i G_i^j$ son absolutamente sumables tal que el $AR(p)$ represente un proceso estacionario debemos tener $|G_i| < 1$ para $i = 1, 2, \dots, p$.

De igual forma, las raíces de $\phi(B) = 0$ deben caer "fuera" del círculo unitario. Las raíces de la ecuación $\phi(B) = 0$ pueden ser consideradas como los ceros del polinomio $\phi(B)$. De esta manera, la condición de estacionariedad puede ser expresada diciendo que los ceros de $\phi(B)$ deben caer "fuera" del círculo unitario.

Función de Autocorrelación

Una relación importante para la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo estacionario se encuentra multiplicando a

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

por z_{t-k} para obtener

$$z_{t-k} z_t = \phi_1 z_{t-k} z_{t-1} + \phi_2 z_{t-k} z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-k} z_{t-p} + z_{t-k} a_t \quad (3.3.2.2)$$

Tomando el valor esperado en (3.2.2), obtenemos la ecuación en diferencia

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k > 0 \quad (3.3.2.3)$$

Nótese que la esperanza $E[z_{t-k} a_t]$ se desvanece cuando $k > 0$, dado que z_{t-k} sólo puede involucrar los choques a_j hasta el tiempo $t-k$, que no están correlacionados con a_t .

Dividiendo (3.3.2.3) entre γ_0 , vemos que la función de autocorrelación satisface de la misma forma la ecuación en diferencia

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0 \quad (3.3.2.4)$$

Ahora, supóngase que (3.3.2.4) se escribe

$$\phi(B)\rho_k = 0 \quad \text{donde} \quad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

y B opera ahora sobre k y no sobre t .

Entonces, escribiendo $\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B)$, la solución general de (3.3.2.4) es

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + \dots + A_p G_p^k \quad (3.3.2.5)$$

donde $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ son las raíces de la ecuación característica

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0.$$

Para la estacionariedad requerimos que $|G_i| < 1$. De este modo dos situaciones pueden surgir en la práctica si asumimos que las raíces G_i son distintas.

1. Una raíz G_i es real, en cuyo caso un término $A_i G_i^k$ en (3.3.2.5) decae a cero geométricamente al incrementarse k . Nos referiremos a esto como decaimiento exponencial.
2. Un par de raíces G_i, G_j son complejos conjugados, en cuyo caso ellas contribuyen un término $D^k \text{sen}(2\pi f k + F)$ para la función de autocorrelación (3.3.2.5), la cual sigue un comportamiento sinusoidal, con factor de decaimiento $D = |G_i| = |G_j|$ y frecuencia f tal que $2\pi f = \cos^{-1}[\text{Re}(G_i)]/D$.

En general, la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo estacionario consistirá en una mezcla de decaimientos exponenciales y decaimientos sinusoidales.

Dividiendo la ecuación anterior por $\gamma_0 = \sigma_z^2$ y substituyendo $\gamma_k = \gamma_{-k}$, la varianza σ_z^2 se puede escribir como

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \phi_1 - \rho_2 \phi_2 - \dots - \rho_p \phi_p} \quad (3.3.2.8)$$

Ahora discutiremos dos importantes procesos autorregresivos, el de primer y el de segundo orden.

Proceso Autorregresivo de Primer Orden (Proceso de Markov)

El proceso autorregresivo de primer orden es

$$\begin{aligned} z_t &= \phi_1 z_{t-1} + a_t \\ &= a_t + \phi_1 a_t + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots \end{aligned} \quad (3.3.2.9)$$

en donde ϕ_1 debe satisfacer la condición $-1 < \phi_1 < 1$ para que el proceso sea estacionario.

Función de Autocorrelación

Usando (3.3.2.4), la función de autocorrelación satisface la ecuación en diferencia de primer orden

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad \text{con} \quad k > 0 \quad (3.3.2.10)$$

la cual, con $\rho_0 = 1$, tiene la solución

$$\rho_k = \phi_1^k \quad \text{con} \quad k \geq 0 \quad (3.3.2.11)$$

La función de autocorrelación decae exponencialmente a cero cuando ϕ_1 es positivo, pero decae exponencialmente a cero y oscilando en signo cuando ϕ_1 es negativo. En particular, nótese que

$$\rho_1 = \phi_1 \quad (3.3.2.12)$$

Varianza

Usando (3.3.2.8), la varianza del proceso es

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \theta_1} \\ &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2}\end{aligned}\quad (3.3.2.13)$$

substituyendo $\rho_1 = \phi_1$.

Por lo tanto, cuando el parámetro tiene el valor positivo grande, por ejemplo $\phi_1 = 0.8$, los valores vecinos en la serie son similares y la serie exhibe tendencias marcadas. Esto se refleja en la función de autocorrelación, la cual decae exponencialmente a cero. Cuando, en el otro caso, el parámetro tiene el valor negativo grande, como $\phi_1 = -0.8$, la serie tiende a oscilar rápidamente, y se refleja en la función de autocorrelación, la cual alterna de signo conforme va decayendo a cero.

Proceso Autorregresivo de Segundo OrdenCondición de Estacionariedad

El proceso autorregresivo de segundo orden puede ser escrito de la siguiente forma

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t \quad (3.3.2.14)$$

Para que se dé la estacionariedad, las raíces de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0 \quad (3.3.2.15)$$

deben caer fuera del círculo unitario, lo que implica que los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 deben estar en la región triangular

$$\begin{aligned}\phi_2 + \phi_1 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ -1 &< \phi_2 < 1\end{aligned}\quad (3.3.2.16)$$

Función de Autocorrelación

Usando (3.3.2.4), la función de autocorrelación satisface la ecuación en diferencia de segundo orden

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad \text{con} \quad k > 0 \quad (3.3.2.17)$$

con valores iniciales $\rho_0 = 1$ y $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$.

De (3.3.2.5), la solución general de la ecuación en diferencia (3.3.2.17) es

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k \\ = \frac{G_1(1-G_2^2)G_1^k - G_2(1-G_1^2)G_2^k}{(G_1-G_2)(1+G_1G_2)} \quad (3.3.2.18)$$

donde G_1^{-1} y G_2^{-1} son las raíces de la ecuación característica (3.3.2.15).

Cuando las raíces son reales, la función de correlación consiste en una mezcla de decaimientos exponenciales. Esto ocurre cuando $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$. La función de autocorrelación permanece positiva mientras va decayendo cuando hay una raíz positiva dominante en (3.3.2.18). Por el contrario, ésta alterna de signo en tanto decae cuando hay una raíz negativa dominante.

Si las raíces G_1 y G_2 son complejas, es decir $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$, el proceso autorregresivo muestra un comportamiento *pseudo-periódico*. Este comportamiento se refleja en la función de autocorrelación, substituyendo $G_1 = De^{i2\pi f_0}$ y $G_2 = De^{-i2\pi f_0}$, obtenemos

$$\rho_k = \frac{D^k \text{sen}(2\pi f_0 k + F)}{\text{sen}F} \quad (3.3.2.19)$$

Nos referimos a (3.3.2.19) como un *decaimiento sinusoidal* con factor de decaimiento D , frecuencia f_0 , y fase F . Estos factores se relacionan con los parámetros del proceso de la siguiente manera:

$$D = |G_1| = \sqrt{1 - \phi_2} \quad (3.3.2.20)$$

donde se toma la raíz cuadrada positiva,

$$\cos(2\pi f_0) = \frac{\text{Re}(G_i)}{D} = \frac{\phi_1}{2\sqrt{1-\phi_2}} \quad (3.3.2.21)$$

$$\tan F = \frac{1+D^2}{1-D^2} \tan(2\pi f_0) \quad (3.3.2.22)$$

Ecuaciones de Yule Walker

Substituyendo $p=2$ en (3.3.2.6), las ecuaciones de Yule Walker son

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \quad (3.3.2.23)$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

las cuales, resueltas para ϕ_1 y ϕ_2 , dan

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \quad (3.3.2.24)$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

La ecuación (3.3.2.23) puede ser resuelta para expresar ρ_1 y ρ_2 en términos de ϕ_1 y ϕ_2 , para darnos

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad (3.3.2.25)$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$$

Que explican los valores iniciales para (3.3.2.17) señalados anteriormente. Las formas (3.3.2.18) y (3.3.2.19) para la función de autocorrelación son útiles para explicar los diferentes tipos que podemos encontrar en la práctica. Sin embargo, para calcular las autocorrelaciones de un proceso $AR(2)$, con valores dados de ϕ_1 y ϕ_2 , es más sencillo usar directamente la ecuación en diferencia (3.3.2.17).

Utilizando las condiciones de estacionariedad (3.3.2.16) y las expresiones (3.3.2.25) para ρ_1 y ρ_2 , se encuentra que los valores admisibles para ρ_1 y ρ_2 , para un proceso $AR(2)$ estacionario, deben estar en la región

$$\begin{aligned} -1 < \rho_1 < 1 \\ -1 < \rho_2 < 1 \\ \rho_1^2 < \frac{1}{2}(\rho_2 + 1) \end{aligned}$$

Varianza

De (3.3.2.8), la varianza del proceso es

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2} \\ &= \left(\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \right) \left\{ \frac{\sigma_a^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.2.26)$$

Función de Autocorrelación Parcial

Inicialmente, no sabemos qué orden de proceso autorregresivo ajustar a una serie de tiempo observada. Este problema es análogo a decidir el número de variables independientes a incluir en una regresión múltiple.

La función de autocorrelación parcial es un dispositivo que explota el hecho de que a pesar de que un proceso $AR(p)$ tiene una función de autocorrelación que es infinita en extensión, puede ser descrita por su naturaleza en términos de p funciones de las autocorrelaciones. Denotemos por ϕ_j , al j -ésimo coeficiente en una representación autorregresiva de orden k , tal que ϕ_{kk} es el último coeficiente.

De (3.3.2.4), ϕ_{kj} satisface el conjunto de ecuaciones

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k} \quad \text{para } j=1,2,\dots,k \quad (3.3.2.27)$$

llegando a las ecuaciones de Yule Walker (3.3.2.6), que pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} 1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1} \\ \rho_1, 1, \rho_1, \dots, \rho_{k-2} \\ \dots \\ \rho_{k-1}, \rho_{k-2}, \dots, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \dots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (3.3.2.28)$$

6

$$\bar{P}_k \bar{\phi}_k = \bar{\rho}_k \quad (3.3.2.29)$$

Resolviendo estas ecuaciones para $k=1,2,3,\dots$, sucesivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1, \rho_1 \\ \rho_1, 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, \rho_1 \\ \rho_1, 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \end{aligned} \quad (3.3.2.30)$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1, \rho_1, \rho_1 \\ \rho_1, 1, \rho_2 \\ \rho_2, \rho_1, \rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, \rho_1, \rho_2 \\ \rho_1, 1, \rho_1 \\ \rho_2, \rho_1, 1 \end{vmatrix}}$$

En general, para ϕ_{kk} , el determinante en el numerador tiene los mismos elementos que el denominador, pero con la última columna reemplazada por $\bar{\rho}_k$. La cantidad ϕ_{kk} , tomada como una función del retraso k , se le llama función de autocorrelación.

Para un proceso autorregresivo de orden p , la función de autocorrelación parcial ϕ_{kk} será no cero para k menor o igual a p y cero para k mayor que p . En otras palabras, la función de autocorrelación parcial de un proceso autorregresivo de orden p presenta un corte después del retraso p .

La función de autocorrelación parcial ϕ_{kk} dada por (3.3.2.28) es definida para cualquier proceso estacionario como una función de las autocorrelaciones ρ_k del proceso, pero la

característica distintiva de que $\phi_{kk} = 0$ para todo $k > p$ en un proceso $AR(p)$ sirve para caracterizar los procesos AR de orden p . A la cantidad ϕ_{kk} definida a través de (3.3.2.28) se le llama autocorrelación parcial del proceso $\{z_t\}$ en el retraso k , dado que es igual a la correlación parcial entre las variables z_t y z_{t-k} ajustada por las variables intermedias $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k+1}$, y ϕ_{kk} mide la correlación entre z_t y z_{t-k} después de ajustar por los efectos de $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k+1}$ (o la correlación entre z_t y z_{t-k} no tomada en cuenta por $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k+1}$). Ahora es fácil establecer a partir de la teoría de mínimos cuadrados que los valores $\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kk}$, que son la solución a (3.3.2.28) son los coeficientes de regresión en la regresión lineal de z_t en z_{t-1}, \dots, z_{t-k} ; esto es, son los valores de los coeficientes b_1, \dots, b_k que minimizan $E\left[\left(z_t - b_0 - \sum_{i=1}^k b_i z_{t-i}\right)^2\right]$. Por lo tanto, asumiendo por conveniencia que el proceso $\{z_t\}$ tiene media cero, el mejor pronóstico lineal (o regresión lineal), en el sentido del error cuadrático medio, de z_t basado en $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k+1}$ es

$$\hat{z}_t = \phi_{k-1,1} z_{t-1} + \phi_{k-1,2} z_{t-2} + \dots + \phi_{k-1,k-1} z_{t-k+1}$$

donde el proceso es un AR o no. Similarmente, el mejor pronóstico lineal o regresión de z_{t-k} basado en los valores $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k+1}$ es

$$\hat{z}_{t-k} = \phi_{k-1,1} z_{t-k+1} + \phi_{k-1,2} z_{t-k+2} + \dots + \phi_{k-1,k-1} z_{t-1}$$

Entonces la autocorrelación parcial de retraso k de $\{z_t\}$, ϕ_{kk} , puede ser definida como la correlación entre los "valores ajustados" de z_t y z_{t-k} , esto es,

$$\phi_{kk} = \text{corr}[z_t - \hat{z}_t, z_{t-k} - \hat{z}_{t-k}] \quad (3.3.2.31)$$

Como ejemplos, encontramos que $\phi_{11} = \text{corr}[z_t, z_{t-1}] = \rho_1$, mientras

$$\phi_{22} = \text{corr}[z_t - \rho_1 z_{t-1}, z_{t-2} - \rho_1 z_{t-1}]$$

$$= \frac{\gamma_2 - 2\rho_1\gamma_1 + \rho_1^2\gamma_0}{\left[\gamma_0 + \rho_1^2\gamma_0 - 2\rho_1\gamma_1\right]^{1/2}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

que parece concordar con la solución de las ecuaciones (3.3.2.30) con $k=2$ dadas anteriormente. Las autocorrelaciones parciales ϕ_{kk} definidas por (3.3.2.31) pueden ser mostradas similarmente por ser la solución de las ecuaciones de Yule Walker apropiadas (3.3.2.19). Como ϕ_{kk} es la solución de las ecuaciones "normales" para la regresión de mínimos cuadrados de z_t sobre z_{t-1}, \dots, z_{t-k} , también puede ser vista como un coeficiente de regresión parcial de z_t sobre z_{t-k} , ajustada por $z_{t-1}, \dots, z_{t-k+1}$. Esto es,

$$\phi_{kk} = \frac{\text{cov}[z_t - \hat{z}_t, z_{t-k} - \hat{z}_{t-k}]}{\text{var}[z_{t-k} - \hat{z}_{t-k}]} = \text{corr}[z_t - \hat{z}_t, z_{t-k} - \hat{z}_{t-k}]$$

que equivale a $\left(\rho_k - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_{k-i}\right) / \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_i\right)$, dado que

$$\sigma_{k-1}^2 = \text{var}[z_t - \hat{z}_t] = \text{var}[z_{t-k} - \hat{z}_{t-k}] = \gamma_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_i\right)$$

porque el proceso $\{z_t\}$ tiene la misma estructura de correlación tanto hacia delante como hacia atrás.

Estimación de la Función de Autocorrelación Parcial

Las autocorrelaciones parciales pueden ser estimadas ajustando sucesivamente modelos autorregresivos de orden 1,2,3,... por mínimos cuadrados y recogiendo las estimaciones $\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}, \dots$ del último coeficiente ajustado en cada etapa. Alternativamente, si los valores de los parámetros no están muy cerca de las fronteras no estacionarias, deben de utilizarse estimaciones de Yule Walker aproximadas de los modelos autorregresivos sucesivos. Las autocorrelaciones parciales estimadas pueden entonces ser obtenidas substituyendo las estimaciones r_j por las autocorrelaciones teóricas en (3.3.2.27), para llegar a

$$r_j = \hat{\phi}_{k1} r_{j-1} + \hat{\phi}_{k2} r_{j-2} + \dots + \hat{\phi}_{k(k-1)} r_{j-k+1} + \hat{\phi}_{kk} r_{j-k} \quad \text{con } j=1,2,\dots,k \quad (3.3.2.32)$$

y resolviendo las ecuaciones resultantes para $k=1,2,\dots$.

Sin embargo, estas estimaciones obtenidas por (3.3.2.32) se vuelven muy sensibles a los errores de redondeo y no deberían ser usadas si los valores de los parámetros están cercanos a las fronteras no estacionarias.

Errores Estándar de las Estimaciones de las Autocorrelaciones Parciales

En la hipótesis de que el proceso sea uno autorregresivo de orden p , las estimaciones de las autocorrelaciones parciales de orden $p+1$, y superiores, son aproximadamente independientes y normalmente distribuidas con media cero. También, si n es el número de observaciones usadas para el ajuste,

$$\text{var}[\hat{\phi}_{kk}] \approx \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad k \geq p+1$$

Por lo tanto el error estándar (S.E.) de la autocorrelación parcial estimada $\hat{\phi}_{kk}$ es

$$S.E.[\hat{\phi}_{kk}] = \sigma[\hat{\phi}_{kk}] \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{para} \quad k \geq p+1 \quad (3.3.2.33)$$

3.3.3 Procesos de Promedios Móviles

Condiciones de Invertibilidad para Procesos de Promedios Móviles

Ahora derivamos las condiciones que los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ deben satisfacer para asegurar la invertibilidad del proceso $MA(q)$:

$$\begin{aligned} z_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \\ &= \theta(B) a_t \end{aligned} \quad (3.3.3.1)$$

Hemos visto que el proceso de promedios móviles de primer orden

$$z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Es invertible si $|\theta_1| < 1$; esto es,

$$\pi(B) = (1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j$$

converge en o dentro del círculo unitario. Sin embargo, esto es equivalente a decir que la raíz, $B = \theta_i^{-1}$ de $(1 - \theta_i B) = 0$, cae afuera del círculo unitario.

La condición de invertibilidad para procesos de promedios móviles de orden mayor pueden ser obtenidas escribiendo a (3.3.3.1) como

$$a_t = \theta^{-1}(B)z_t$$

Entonces, si

$$\theta(B) = \prod_{i=1}^q (1 - H_i B)$$

Entonces, expandiendo por fracciones parciales, obtenemos

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B) = \sum_{i=1}^q \left(\frac{M_i}{1 - H_i B} \right)$$

que converge, o equivalentemente, los ponderadores $\pi_j = -\sum_{i=1}^q M_i H_i^j$ son absolutamente sumables, si $|H_i| < 1$, para $i = 1, 2, \dots, q$.

Como las raíces de $\theta(B) = 0$ son H_i^{-1} , se sigue que la condición de invertibilidad para un proceso $MA(q)$ es que las raíces de la ecuación característica

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0 \quad (3.3.3.2)$$

caigan fuera del círculo unitario. De la relación $\theta(B)\pi(B) = 1$ se sigue que los ponderadores π_j satisfacen la ecuación en diferencia

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2} + \dots + \theta_q \pi_{j-q} \quad \text{con} \quad j > 0$$

con la convención de que $\pi_0 = -1$ y $\pi_j = 0$ para $j < 0$, de donde los ponderadores π_j fácilmente pueden ser calculados recursivamente en términos de las θ_i . Nótese que dado que la serie

$$\psi(B) = \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

es finita, ninguna restricción es necesaria para los parámetros del proceso de promedios móviles para asegurar la estacionariedad.

Función de Autocorrelación de los Procesos de Promedios Móviles

Usando (3.3.3.1), la función de autocovarianza de un proceso $MA(q)$ es

$$\gamma_k = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

Entonces la varianza del proceso es

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 \quad (3.3.3.3)$$

Y

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2 & k=1,2,\dots,q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Por lo tanto la función de autocorrelación es

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k=1,2,\dots,q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.3.3.4)$$

Vemos que la función de autocorrelación de un proceso $MA(q)$ presenta un corte después del retraso q .

Parámetros de Promedios Móviles en términos de las Autocorrelaciones

Si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ son conocidos, las q ecuaciones (3.3.3.4) pueden ser resueltas para los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$. Sin embargo, a diferencia de las ecuaciones de Yule Walker (3.3.2.6) para un proceso autorregresivo, las cuales son lineales, las ecuaciones (3.3.3.4) son no lineales. Así, excepto en el caso simple donde $q=1$, estas ecuaciones tienen que ser resueltas iterativamente. Substituyendo ρ_k por las estimaciones r_k en (3.3.3.4) y resolviendo las ecuaciones resultantes, pueden obtenerse estimaciones iniciales de los parámetros de promedios móviles.

A diferencia de sus correspondientes estimaciones autorregresivas, obtenidas por una correspondiente sustitución en las ecuaciones de Yule Walker, las estimaciones resultantes pueden no tener eficiencia estadística alta. Sin embargo, proveen estimaciones útiles para la etapa de identificación. Más aun, proveen valores iniciales útiles para un procedimiento iterativo, que converge a las estimaciones máximo verosímiles eficientes.

Proceso de Promedio Móvil de Primer Orden

Ya hemos visto este proceso en la forma

$$\begin{aligned} z_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ &= (1 - \theta_1 B)a_t \end{aligned}$$

y ha sido visto que θ_1 debe caer en el rango $-1 < \theta_1 < 1$ para que el proceso sea invertible. Sin embargo, el proceso es estacionario para todos los valores de θ_1 .

Función de Autocorrelación

Usando (3.3.3.3), la varianzá del proceso es

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_a^2$$

y usando (3.3.3.4), la función de autocorrelación es

$$\rho_k = \begin{cases} -\theta_1 & k=1 \\ 1 + \theta_1^2 & \\ 0 & k \geq 2 \end{cases} \quad (3.3.3.5)$$

de donde se nota que ρ_1 debe satisfacer $|\rho_1| \leq \frac{1}{2}$ para un $MA(1)$.

De (3.3.3.5), con $k=1$, encontramos que

$$\theta_1^2 + \frac{\theta_1}{\rho_1} + 1 = 0$$

con raíces para θ_1 iguales a $\theta_1 = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\rho_1^2}\right)/(2\rho_1)$.

Dado que el producto de las raíces es la unidad, vemos que si θ_1 es una solución, también lo es θ_1^{-1} . Más aun, si θ_1 satisface la condición de invertibilidad $|\theta_1| < 1$, la otra raíz θ_1^{-1} será mayor a la unidad y no satisfará la condición.

Función de Autocorrelación Parcial

Usando (3.3.2.28) con $\rho_1 = -\theta_1/(1+\theta_1^2)$ y $\rho_k = 0$, para $k > 1$, obtenemos después de alguna manipulación algebraica

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{(1-\theta_1^{2(k+1)})}$$

Así $|\phi_{kk}| < \theta_1^k$, y la función de autocorrelación parcial es dominada por un decaimiento exponencial. Si ρ_1 es positiva, tal que θ_1 es negativa, la función de autocorrelación alterna en signo. Si, en otro caso, ρ_1 es negativa, tal que θ_1 es positiva, las autocorrelaciones parciales son negativas. De (3.3.1.13) se ha visto que los ponderadores π_j para un proceso $MA(1)$ son $\pi_j = -\theta_1^j$, y dado que estos son los coeficientes de la forma autorregresiva infinita del proceso se percibe que la función de autocorrelación parcial ϕ_{kk} para el $MA(1)$ esencialmente muestra un decaimiento exponencial.

Notamos ahora una dualidad entre los procesos $AR(1)$ y $MA(1)$. Así, mientras la función de autocorrelación de un proceso $MA(1)$ tiene un corte después del retraso 1, la función de autocorrelación de un proceso $AR(1)$ decae exponencialmente. De la misma forma, mientras la función de autocorrelación parcial de un proceso $MA(1)$ muestra un decaimiento exponencial, la función de autocorrelación parcial de un proceso $AR(1)$ tiene un corte después del retraso 1. Una dualidad aproximada correspondiente de esta clase ocurre en general en las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial entre los procesos AR y MA .

Proceso de Promedio Móvil de Segundo OrdenCondiciones de Invertibilidad

El proceso de promedio móvil de segundo orden se define por

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

que es estacionario para todos los valores de θ_1 y θ_2 . Sin embargo, es invertible sólo si las raíces de la ecuación característica

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0 \quad (3.3.3.6)$$

caen fuera del círculo unitario, esto es,

$$\begin{aligned} \theta_2 + \theta_1 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ -1 < \theta_2 &< 1 \end{aligned} \quad (3.3.3.7)$$

Estas son paralelas a las condiciones (3.3.2.16) requeridas para la estacionariedad de un proceso $AR(2)$.

Función de Autocorrelación

Usando (3.3.3.3), la varianza del proceso es

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

y usando (3.3.3.4), la función de autocorrelación es

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0 \quad \text{para} \quad k \geq 3$$

Es decir, la función de autocorrelación tiene un corte después del retraso 2.

Función de Autocorrelación Parcial

La expresión exacta para la función de autocorrelación parcial de un proceso $MA(2)$ es complicada, pero es dominada por la suma de dos exponenciales si las raíces de la ecuación característica (3.3.3.6) son reales, y por una caída sinusoidal si las raíces de (3.3.3.6) son complejas. Es decir, se comporta como una función de autocorrelación de un proceso $AR(2)$.

Dualidad entre los Procesos Autorregresivos y de Promedios Móviles

Los resultados de las secciones anteriores han mostrado aspectos de la dualidad entre los procesos autorregresivos y los procesos de promedios móviles finitos. Esta dualidad tiene las siguientes consecuencias:

1. En un proceso autorregresivo estacionario de orden p , a_t puede ser representada como una suma ponderada finita de valores previos z_t , o z_t representada como una suma ponderada $z_t = \phi^{-1}(B)a_t$, de valores previos de a_t . También, en un proceso de promedios móviles invertible de orden q , z_t puede ser representada como una suma ponderada finita de valores previos de a_t , o a_t representada como una suma ponderada $\theta^{-1}(B)z_t = a_t$, de valores previos de z_t .
2. El proceso finito MA tiene una función de autocorrelación que es cero a partir de cierto punto, pero dado que es equivalente a un proceso AR infinito, su función de autocorrelación parcial es infinita y dominada por caídas exponenciales y/o sinusoidales. De la misma forma, el proceso AR tiene una función de autocorrelación parcial que es cero a partir de cierto punto, pero su función de autocorrelación es infinita y consta de caídas exponenciales y/o sinusoidales.
3. Para un proceso AR de orden p , los parámetros no requieren satisfacer ninguna condición para asegurar la invertibilidad. Sin embargo, para la estacionariedad, las raíces de $\phi(B)=0$ deben caer fuera del círculo unitario.

De la misma forma, los parámetros de un proceso MA no requieren satisfacer ninguna condición para asegurar la estacionariedad. Sin embargo, para la invertibilidad del proceso, las raíces de $\theta(B)=0$ deben caer fuera del círculo unitario.

3.3.4 Procesos Autorregresivos de Promedios Móviles

Propiedades de Estacionariedad e Invertibilidad

Hemos vistos anteriormente que para lograr parsimonia puede ser necesario incluir tanto términos autorregresivos como de promedios móviles. Por lo tanto puede ser necesario emplear el modelo autorregresivo de Promedios Móviles ($ARMA$)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.3.4.1)$$

esto es,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

o

$$\phi(B) z_t = \theta(B) a_t$$

donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son polinomios de grado p y q en B . De aquí en adelante se referirá a este proceso como un proceso $ARMA(p, q)$. Puede ser descrito de dos formas:

1. Como un proceso AR de orden p $\phi(B) z_t = e_t$, donde e_t sigue un proceso MA de orden q $e_t = \theta(B) a_t$,
2. Como un proceso MA de orden q $z_t = \theta(B) b_t$, donde b_t sigue un proceso AR de orden p $\phi(B) b_t = a_t$, tal que

$$\phi(B) z_t = \theta(B) \phi(B) b_t = \theta(B) a_t$$

De aquí que $\phi(B) z_t = \theta(B) a_t$ definirá un proceso estacionario dado que la ecuación característica $\phi(B)=0$ tiene todas sus raíces fuera del círculo unitario. Similarmente, las raíces de $\theta(B)=0$ deben estar fuera del círculo unitario para que sea invertible.

Por lo tanto el proceso estacionario e invertible $ARMA(p, q)$ (3.3.4.1) tiene tanto la representación de promedios móviles infinita

$$z_t = \psi(B)a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

donde $\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B)$, como la representación autorregresiva infinita

$$\pi(B)z_t = z_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} = a_t$$

donde $\pi(B) = \theta^{-1}(B)\phi(B)$, siendo ambos ponderadores ψ_j y π_j absolutamente sumables.

Función de Autocorrelación

La función autocorrelación parcial de un proceso mixto puede ser derivada por un método similar al usado para los procesos autorregresivos. Multiplicando la ecuación (3.3.4.1) por z_{t-k} y tomando esperanzas, vemos que la función de autocovarianzas satisface la ecuación en diferencia

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \theta_1 \gamma_{za}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(k-q)$$

donde $\gamma_{za}(k)$ es la función de covarianza cruzada entre z y a y está definida por $\gamma_{za}(k) = E[z_{t-k} a_t]$. Dado que z_{t-k} depende sólo de los choques que han ocurrido hasta el tiempo $t-k$ en la representación de promedios móviles infinita $z_{t-k} = \psi(B)a_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-k-j}$, se sigue que

$$\gamma_{za}(k) = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \psi_{-k} \sigma_a^2 & k \leq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto la ecuación anterior para γ_k podría ser expresada como

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} - \sigma_a^2 (\theta_k \psi_0 + \theta_{k+1} \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-k}) \quad (3.3.4.2)$$

con la convención de que $\theta_0 = -1$.

Vemos que (3.3.4.2) implica

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k \geq q+1$$

y entonces

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q+1 \quad (3.3.4.3)$$

$$\text{o} \quad \phi(B)\rho_k = 0 \quad k \geq q+1$$

Por lo tanto, para el proceso $ARMA(p, q)$ habrá q autocorrelaciones $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_1$ cuyos valores dependen directamente, por (3.3.4.2), en la elección de los parámetros ϕ . También, los p valores $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$ proveen los valores iniciales necesarios para la ecuación en diferencia $\phi(B)\rho_k = 0$, donde $k \geq q+1$, que entonces determina las autocorrelaciones en retrasos mayores. Si $q-p < 0$, toda la función de autocorrelación ρ_j , para $j=0, 1, 2, \dots$, consistirá en una mezcla de caídas exponenciales y/o sinusoidales, cuya naturaleza será dictada por el polinomio $\phi(B)$ y los valores iniciales. Si $q-p \geq 0$, habrá $q-p+1$ valores iniciales $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{q-p}$ que no siguen este patrón general. Estos hechos son útiles para identificar series mixtas.

Varianza

Cuando $k=0$ tenemos

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2 (1 - \theta_1 \psi_1 - \dots - \theta_q \psi_q) \quad (3.3.4.4)$$

que tiene que ser resuelta con p ecuaciones (3.3.4.2) para $k=1, 2, \dots, p$, para obtener $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$.

Función de Autocorrelación Parcial

El proceso (3.3.4.1) puede ser escrito como $a_t = \theta^{-1}(B)\phi(B)\varepsilon_t$ y $\theta^{-1}(B)$ es una serie infinita en B . Por lo tanto la función de autocorrelación parcial de un proceso mixto es infinito. Se comporta eventualmente como una función de autocorrelación parcial de un proceso de promedios móviles puro, siendo dominada por una mezcla de caídas exponenciales y/o sinusoidales, dependiendo del orden del promedio móvil y de los valores de los parámetros que contiene.

3.4 Modelos Lineales No Estacionarios

Muchas series de tiempo empíricas se comportan como si no tuvieran una media fija. Aun así, estas exhiben homogeneidad en el sentido de que a pesar del nivel local y la tendencia de la serie, una parte de la serie se comporta muy similarmente a cualquier otra parte. Los modelos que describen este comportamiento homogéneo no estacionario pueden ser obtenidos suponiendo alguna diferencia adecuada del proceso para que sea estacionario. Consideraremos ahora las propiedades de esta importante clase de modelos para los cuales la d -ésima diferencia es un proceso autorregresivo de promedios móviles mixto. Estos modelos son llamados procesos autorregresivos integrados de promedios móviles (*ARIMA*).

3.4.1 Procesos Autorregresivos Integrados de Promedios Móviles

Hemos visto anteriormente que un proceso *ARMA* es estacionario si las raíces de $\phi(B)=0$ caen fuera del círculo unitario y exhibe un comportamiento no estacionario explosivo si las raíces caen dentro del círculo unitario. El único otro caso es en el cual las raíces de $\phi(B)=0$ están sobre el círculo unitario. Observaremos que los modelos resultantes son de gran valor para representar series de tiempo homogéneas no estacionarias. En particular, las series no estacionarias son frecuentemente representadas por modelos en los cuales una o más de estas raíces son unitarias.

Consideremos el modelo

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad (3.4.1.1)$$

donde $\phi(B)$ es un operador autorregresivo no estacionario tal que d de las raíces de $\phi(B)=0$ son unitarias y las restantes caen fuera del círculo unitario. Entonces podemos expresar el modelo (3.4.1.1) en la forma

$$\phi(B)z_t = \phi(B)(1-B)^d z_t = \theta(B)a_t \quad (3.4.1.2)$$

donde $\phi(B)$ es un operador autorregresivo estacionario.

Dado que $\nabla^d z_t = \nabla^d z_t$, para $d \geq 1$, donde $\nabla = 1 - B$ es el operador diferencia, podemos escribir el modelo como

$$\phi(B)\nabla^d z_t = \theta(B)a_t \quad (3.4.1.3)$$

De la misma forma, el proceso está definido por las dos ecuaciones

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \quad (3.4.1.4)$$

y

$$w_t = \nabla^d z_t \quad (3.4.1.5)$$

Por lo tanto vemos que el modelo corresponde a asumir que la d -ésima diferencia de la serie puede ser representada por un proceso *ARMA* estacionario e invertible.

Una forma alternativa de ver al proceso para $d \geq 1$ resulta de invertir (3.4.1.5) para que quede

$$z_t = S^d w_t \quad (3.4.1.6)$$

donde S es el operador suma definido por

$$\begin{aligned} Sx_t &= \sum_{h=0}^t x_h = (1 + B + B^2 + \dots)x_t \\ &= (1 - B)^{-1}x_t = \nabla^{-1}x_t \end{aligned}$$

Entonces $S = (1 - B)^{-1} = \nabla^{-1}$. El operador S^2 es similarmente definido como

$$\begin{aligned} S^2x_t &= Sx_t + Sx_{t-1} + Sx_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=-\infty}^t \sum_{h=-\infty}^i x_h = (1 + 2B + 3B^2 + \dots)x_t \end{aligned}$$

y así sucesivamente para el orden d . La ecuación (3.4.1.6) implica que el proceso (3.4.1.3) puede ser obtenido sumando (o "integrando") el proceso estacionario (3.4.1.4) d veces. Por esto llamamos al proceso (3.4.1.3) como proceso autorregresivo integrado de promedios móviles (*ARIMA*).

Técnicamente, el operador suma infinito $S=(1-B)^{-1}$ no puede ser utilizado para definir procesos *ARIMA* no estacionarios, dado que la suma infinita involucrada será no convergente. En su lugar, podemos considerar el operador suma finito S_m para cualquier entero positivo m , dado por

$$S_m = (1+B+B^2+\dots+B^{m-1}) = \frac{1-B^m}{1-B}$$

Similarmente, el operador doble suma finito puede ser definido como

$$\begin{aligned} S_m^{(2)} &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=j}^{m-1} B^i = (1+2B+3B^2+\dots+mB^{m-1}) \\ &= \frac{1-B^m - mB^m(1-B)}{(1-B)^2} \end{aligned}$$

dado que $(1-B)S_m^{(2)} = S_m - mB^m$, y así sucesivamente.

Si en la ecuación (3.4.1.3) el operador autorregresivo $\phi(B)$ es de orden p , se toma la d -ésima diferencia, y el operador de promedios móviles $\theta(B)$ es de orden q , se dice que se tiene un modelo *ARIMA* de orden (p,d,q) , o simplemente un proceso *ARIMA*(p,d,q).

Forma General del Proceso Autorregresivo Integrado de Promedios Móviles

En ocasiones resulta necesario considerar una pequeña extensión del modelo *ARIMA* (3.4.1.3), añadiendo un término constante θ_0 . Entonces una forma general del modelo que podríamos utilizar para describir series de tiempo es proceso autorregresivo integrado de promedios móviles

$$\phi(B)z_t = \phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)\alpha_t \quad (3.4.1.7)$$

donde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

De aquí en adelante:

1. $\phi(B)$ será llamado *operador autorregresivo*; se asume que es estacionario, esto es, las raíces de $\phi(B)=0$ caen fuera del círculo unitario.
2. $\phi(B)=\phi(B)\nabla^d$ será llamado *operador autorregresivo generalizado*; es un operador no estacionario con d raíces de $\phi(B)$ unitarias.
3. $\theta(B)$ será llamado *operador de promedios móviles*; se asume que es invertible, esto es, las raíces de $\theta(B)=0$ caen fuera del círculo unitario.

Cuando $d=0$, el modelo (3.4.1.7) representa un proceso estacionario. Los requisitos para la estacionariedad e invertibilidad son independientes, y en general, los operadores $\phi(B)$ y $\theta(B)$ no serán del mismo orden.

Tendencias Estocásticas y Deterministas

Hemos visto anteriormente que cuando se omite el término constante θ_0 , el modelo (3.4.1.7) tiene la capacidad de representar series que tienen tendencias estocásticas, tipificadas por ejemplo, por cambios aleatorios en el nivel y pendiente de las series. En general, sin embargo, podríamos incluir una función determinista del tiempo $f(t)$ en el modelo. En particular, se puede incorporar una tendencia polinomial de grado d permitiendo que θ_0 sea distinto de cero. Por ejemplo, cuando $d=1$, podríamos usar el modelo con $\theta_0 \neq 0$ para estimar una posible tendencia lineal determinista en la presencia de ruido no estacionario. Está claro que para muchas aplicaciones el supuesto de una tendencia estocástica es frecuentemente más realista que el supuesto de una tendencia determinista. Esto es de una importancia especial debido a que una tendencia estocástica no requiere que la serie siga un patrón idéntico que fue desarrollado en el pasado. Cuando $d \geq 0$ asumiremos que $\theta_0 = 0$, a menos de que sea claro a partir de los datos o de la naturaleza del problema que una media distinta de cero, o más generalmente, un componente determinista de forma conocido, es necesario.

Algunos casos especiales importantes del modelo ARIMA

Anteriormente hemos analizado algunos casos especiales del modelo (3.4.1.7) correspondientes al caso estacionario, $d=0$. Los siguientes modelos representan algunos casos especiales del modelo no estacionario ($d \geq 1$), que son frecuentemente vistos en la práctica.

1. El proceso (0,1,1):

$$\nabla z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B) a_t$$

correspondiente a $p=0$, $d=1$, $q=1$, $\phi(B)=1$, $\theta(B)=1-\theta_1 B$

2. El proceso (0,2,2):

$$\nabla^2 z_t = a_t - \theta_1 a_t - \theta_2 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t$$

correspondiente a $p=0$, $d=2$, $q=2$, $\phi(B)=1$, $\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2$

3. El proceso (1,1,1):

$$\nabla z_t - \phi_1 \nabla z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad \text{ó} \quad (1 - \phi_1 B) \nabla z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

correspondiente a $p=1$, $d=1$, $q=1$, $\phi(B)=1-\phi_1 B$, $\theta(B)=1-\theta_1 B$

Para la representación de series de tiempo estacionales (de interés para este trabajo) rara vez se encontrarán situaciones para las cuales p , d ó q requieran ser mayores que 2. Generalmente, valores de cero y uno serán apropiados para estos coeficientes.

Transformación No Lineal de la Serie

Una profundidad considerable del rango de aplicaciones útiles del modelo (3.4.1.7) se logra permitiendo la posibilidad de la transformación. Entonces podríamos sustituir a z_t por $z_t^{(\lambda)}$, donde $z_t^{(\lambda)}$ es alguna transformación no lineal de z_t , involucrando uno o más parámetros λ . Una transformación adecuada podría ser sugerida por la situación, o en ciertos casos puede ser estimada a partir de los datos. Por ejemplo, si estuviéramos interesados en las ventas de un bien introducido recientemente, podríamos encontrar que el volumen de ventas estaba incrementándose a una tasa muy alta y que

eran los cambios porcentuales los que mostraban una estabilidad no estacionaria en lugar de los cambios absolutos. Esto puede apoyar el análisis del logaritmo de las ventas dado que

$$\nabla \ln(z_t) = \ln\left(\frac{z_t}{z_{t-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\nabla z_t}{z_{t-1}}\right) \approx \frac{\nabla z_t}{z_{t-1}}$$

donde $\nabla z_t / z_{t-1}$ son los cambios porcentuales o relativos, y la aproximación manteniéndose si los cambios relativos no son excesivamente grandes.

3.5 Pronósticos

Habiendo considerado algunas propiedades de los modelos *ARIMA*, se mostrará ahora cómo podrían ser usados para pronosticar valores futuros de una serie de tiempo observada. En la siguiente sección se verá el problema de ajustar el modelo a los datos observados. En esta sección, si embargo, procederemos como si el modelo fuera perfectamente conocido.

Pronósticos de Error Cuadrático Medio Mínimo y sus Propiedades

Estaremos preocupados con el pronóstico de un valor z_{t+l} , con $l \geq 1$, estando nosotros en el tiempo t . Este pronóstico se dice que es hecho en el origen t para l periodos adelante. El modelo *ARIMA* general $\phi(B)z_t = \theta(B)a_t$ puede ser expresado explícitamente en tres formas. En este caso expresaremos el modelo para z_{t+l} :

1. Directamente en términos de la ecuación en diferencia

$$z_{t+l} = \phi_1 z_{t+l-1} + \dots + \phi_{p+d} z_{t+l-p-d} - \theta_1 a_{t+l-1} - \dots - \theta_q a_{t+l-q} + a_{t+l} \quad (3.5.1)$$

2. Como una suma ponderada infinita de choques a_t ,

$$z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+l-j} \quad (3.5.2)$$

donde $\psi_0 = 1$ y los coeficientes ψ pueden ser obtenidos igualando los coeficientes en

$$\varphi(B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = \theta(B) \quad (3.5.3)$$

De la misma forma, para l positivo, con referencia al origen $k < t$, el modelo podría ser escrito en la forma truncada

$$z_{t+l} = a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1} + \psi_l a_t + \dots + \psi_{t+l-k-1} a_{k+1} + C_k(t+l-k) \quad (3.5.4)$$

$$= a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1} + C_l(t)$$

donde $C_k(t+l-k)$ es la función complementaria relativa al origen finito k del proceso y la función complementaria relativa al origen de pronóstico t puede ser expresada como $C_l(t) = C_k(t+l-k) + \psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots + \psi_{t+l-k-1} a_{k+1}$. Informalmente $C_l(t)$ está asociada con la suma infinita truncada

$$C_l(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t+l-j} \quad (3.5.5)$$

3. Como una suma ponderada infinita de observaciones previas, mas un choque aleatorio,

$$z_{t+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t+l-j} + a_{t+l} \quad (3.5.6)$$

También, si $d \geq 1$,

$$\bar{z}_{t+l-1}(\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t+l-j} \quad (3.5.7)$$

será un promedio ponderado, dado que $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$. Los ponderadores π pueden ser obtenidos de

$$\varphi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) \theta(B) \quad (3.5.8)$$

Derivación de los Pronósticos de Error Cuadrático Medio Mínimo

Ahora suponga, estando en el origen t , que queremos hacer un pronóstico $\hat{z}_t(i)$ de z_{t+i} que será una función lineal de observaciones actuales y previas $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$. Entonces también será una función lineal de choques actuales y previos $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$.

Suponga entonces que el mejor pronóstico es

$$\hat{z}_t(l) = \psi_t^* a_t + \psi_{t+1}^* a_{t-1} + \psi_{t+2}^* a_{t-2} + \dots$$

donde los ponderadores $\psi_t^*, \psi_{t+1}^*, \psi_{t+2}^*, \dots$ tendrán que ser determinados. Entonces, usando (3.5.2), el error cuadrático medio del pronóstico es

$$E[z_{t+l} - \hat{z}_t(l)]^2 = (1 + \psi_t^2 + \dots + \psi_{t-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{t+j} - \psi_{t+j}^*)^2 \sigma_a^2 \quad (3.5.9)$$

que se minimiza cuando $\psi_{t+j}^* = \psi_{t+j}$. Entonces tenemos

$$z_{t+l} = (a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1}) + (\psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots) \quad (3.5.10)$$

$$= e_t(l) + \hat{z}_t(l) \quad (3.5.11)$$

donde $e_t(l)$ es el error del pronóstico $\hat{z}_t(l)$.

Denotemos $E[z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \dots]$, la esperanza condicional de z_{t+l} , dado el conocimiento de todas las z 's hasta el tiempo t , por $E_t[z_{t+l}]$. Asumiremos que a_t es una sucesión de variables aleatorias independientes.

1. Entonces $E[a_{t+j} | z_t, z_{t-1}, \dots] = 0$, $j > 0$, y entonces de (3.5.2),

$$\hat{z}_t(l) = \psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots = E_t[z_{t+l}] \quad (3.5.12)$$

Entonces el pronóstico de error cuadrático medio mínimo en el origen t , para l periodos adelante, es la esperanza condicional de z_{t+l} en el tiempo l . Cuando $\hat{z}_t(l)$ sea tratada como función de l para t fijo, será llamada *función de pronóstico* para el origen t .

2. El error de pronóstico para l periodos adelante es

$$e_t(l) = a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1} \quad (3.5.13)$$

Dado que

$$E_t[e_t(l)] = 0 \quad (3.5.14)$$

el pronóstico es insesgado.

También, la varianza del error del pronóstico es

$$V(l) = \text{var}[e_t(l)] = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 \quad (3.5.15)$$

3. No sólo $\hat{z}_t(l)$ es el pronóstico de error cuadrático medio mínimo de z_{t+l} sino que cualquier función lineal $\sum_{i=1}^L w_i \hat{z}_t(i)$ de los pronósticos es un pronóstico de error cuadrático medio mínimo de la correspondiente función lineal $\sum_{i=1}^L w_i z_{t+i}$ de las observaciones futuras.

4. Los choques como errores de pronóstico de un periodo adelante. Usando (3.5.13), el error de pronóstico de un periodo adelante es

$$e_t(l) = z_{t+l} - \hat{z}_t(l) = a_{t+l} \quad (3.5.16)$$

Por lo tanto los choques a_t , que generan el proceso, y que hemos presentado puramente como un conjunto de variables aleatorias independientes o choques, resultan ser los errores de pronóstico de un periodo adelante. Para un pronóstico de error cuadrático medio mínimo, los errores de pronóstico de un periodo adelante no deber estar correlacionados. Si estuvieran correlacionados, el error de pronóstico a_{t+l} podría ser predecido a partir de errores de pronóstico a_t, a_{t-1}, \dots . Si la predicción obtenida fuera \hat{a}_{t+l} , entonces $\hat{z}_t(l) + \hat{a}_{t+l}$ sería un mejor pronóstico de z_{t+l} del que era $\hat{z}_t(l)$.

5. Correlación entre los errores de pronóstico. Aun cuando los errores de pronóstico de un periodo adelante no estén correlacionados, los errores de pronósticos para periodos más adelantados estarán correlacionados. Entonces los errores de pronóstico $e_t(l)$ y $e_{t-j}(l)$, hechos para el mismo periodo futuro l a partir de diferentes orígenes t y $t-j$ están correlacionados. También es cierto que los errores de pronóstico $e_t(l)$ y $e_t(l+j)$, hechos para diferentes tiempos futuros y del mismo origen, está correlacionados. Una consecuencia de esto es que frecuentemente habrá una tendencia para la función de pronóstico para caer totalmente por arriba o por debajo de los valores de la serie cuando estos sean ya disponibles.

Tres Formas Básicas para el Pronóstico

Hemos visto que el pronóstico de error cuadrático medio mínimo $\hat{z}_t(l)$ para l periodos adelante es la esperanza condicional $E_t[z_{t+l}]$, de z_{t+l} en el origen t . Usando este hecho, podemos escribir expresiones para el pronóstico en cualquiera de las tres maneras distintas, correspondientes a las tres formas de expresar el modelo, descritas anteriormente. Para simplificar la notación, adoptaremos temporalmente la convención de que los corchetes implican que se toma la esperanza condicional en el tiempo t . Entonces

$$[a_{t+l}] = E_t[a_{t+l}] \quad \text{y} \quad [z_{t+l}] = E_t[z_{t+l}]$$

Para $l > 0$, las tres formas de expresar los pronósticos son:

- *Pronósticos a partir de la ecuación en diferencia.* Tomando esperanzas condicionales en el tiempo t en (3.5.1), obtenemos

$$[z_{t+l}] = \hat{z}_t(l) = \varphi_1 [z_{t+l-1}] + \dots + \varphi_{p+d} [z_{t+l-p-d}] - \theta_1 [a_{t+l-1}] - \dots - \theta_q [a_{t+l-q}] + [a_{t+l}] \quad (3.5.17)$$

- *Pronósticos en la forma integrada.* Con (3.5.2) obtenemos

$$[z_{t+l}] = \hat{z}_t(l) = [a_{t+l}] + \psi_1 [a_{t+l-1}] + \dots + \psi_{l-1} [a_{t+1}] + \psi_l [a_t] + \psi_{l+1} [a_{t-1}] \quad (3.5.18)$$

llegando a la forma (3.5.12) que habíamos obtenido antes. Alternativamente, usando la forma truncada del modelo (3.5.4), tenemos

$$\begin{aligned} [z_{t+l}] = \hat{z}_t(l) &= [a_{t+l}] + \psi_1 [a_{t+l-1}] + \dots + \psi_{t+l-k-1} [a_{k+1}] + C_k(t+1-k) \\ &= [a_{t+l}] + \psi_1 [a_{t+l-1}] + \dots + \psi_{l-1} [a_{t+1}] + C_l(l) \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

donde $C_l(l)$ es la función complementaria en el origen t .

- *Pronósticos como una suma ponderada de observaciones previas y pronósticos hechos en tiempos adelantados previos a partir del mismo origen.* Finalmente, tomando esperanzas condicionales en (3.5.6) tenemos

$$[z_{t+l}] = \hat{z}_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j [z_{t+l-j}] + [a_{t+l}] \quad (3.5.20)$$

Nótese que el pronóstico de error cuadrático medio mínimo está definido en términos de la esperanza condicional

$$[z_{t+i}] = E_t[z_{t+i}] = E[z_{t+i} | z_t, z_{t-1}, \dots]$$

que teóricamente requiere tener conocimiento de las z 's desde el pasado infinito. Sin embargo, el requisito de invertibilidad, que se ha impuesto al modelo ARIMA general, asegura que los ponderadores π en (3.5.20) formen una serie convergente. En la práctica, los ponderadores π generalmente decaen rápidamente, por lo que independientemente de la forma del modelo que se emplee en el cálculo, sólo una longitud moderada de la serie $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-k}$ es necesaria para calcular los pronósticos con una precisión suficiente.

Para calcular las esperanzas condicionales que se presentan en las ecuaciones (3.5.17) a (3.5.20), nótese que si j es un entero no negativo,

$$[z_{t-j}] = E_t[z_{t-j}] = z_{t-j} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$[z_{t+j}] = E_t[z_{t+j}] = \hat{z}_t(j) \quad j = 1, 2, \dots$$

$$[a_{t-j}] = E_t[a_{t-j}] = a_{t-j} = z_{t-j} - \hat{z}_{t-j-1}(1) \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a_{t+j}] = E_t[a_{t+j}] = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

Entonces, para obtener el pronóstico $\hat{z}_t(t)$, se escribe el modelo en cualquiera de las tres formas descritas y se trata a los términos de la derecha con las siguientes reglas:

1. El valor z_{t-j} ($j=0, 1, 2, \dots$), que ya son conocidos en el origen t , permanecen sin cambio.
2. El valor z_{t+j} ($j=1, 2, \dots$), que no ha ocurrido aun, se reemplaza por su pronóstico $\hat{z}_t(j)$ en el origen t .
3. El valor a_{t-j} ($j=0, 1, 2, \dots$), que ya ha ocurrido, están disponibles a partir de $z_{t-j} - \hat{z}_{t-j-1}(1)$.
4. El valor a_{t+j} ($j=1, 2, \dots$), que aun no ha ocurrido, se reemplaza por ceros.

Para un cálculo de rutina, la forma más simple por mucho para trabajar es la forma de ecuación diferencial (3.5.17). Entonces los pronósticos son calculados explícitamente, para $l=1,2,\dots$, recursivamente como

$$\hat{z}_t(l) = \sum_{j=1}^{p+d} \varphi_j \hat{z}_t(l-j) - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t+l-j}$$

donde $\hat{z}_t(-j) = [z_{t-j}]$ denota el valor observado z_{t-j} para $j \geq 0$, y los términos de promedios móviles no están presentes para los tiempos adelantados $l > q$.

Cálculo de los Límites de Probabilidad de los Pronósticos para Cualquier Tiempo Adelantado

La expresión (3.5.15) muestra que, en general, la varianza del error de pronóstico de l periodos adelante para cualquier origen t es el valor esperado de

$$e_t^2(l) = [z_{t+l} - \hat{z}_t(l)]^2$$

y está dado por

$$V(l) = \left(1 + \sum_{j=1}^l \psi_j^2 \right) \sigma^2.$$

Asumiendo que las a 's son Normales, se sigue que dada la información hasta el tiempo t , la distribución de probabilidad condicional $p(z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \dots)$ de un valor futuro z_{t+l} del proceso será Normal con media $\hat{z}_t(l)$ y desviación estándar $\left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} \sigma_a$. Esta desviación se estima reemplazando el valor σ_a por s_a y entonces los límites de probabilidad aproximados $z_{t+l}(-)$ y $z_{t+l}(+)$ para un nivel de confianza de $1-\varepsilon$ estarán dados por

$$z_{t+l}(\pm) = \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} s_a$$

donde $u_{\varepsilon/2}$ es el cuantil de una distribución Normal Estándar correspondiente.

Estos límites son tales que *dada la información disponible hasta el origen t* , existe una probabilidad de $1-\varepsilon$ de que el valor real z_{t+h} , cuando ocurra, esté dentro de estos límites, esto es,

$$\Pr\{z_{t+h}(-) < z_{t+h} < z_{t+h}(+)\} = 1 - \varepsilon.$$

También debe ser explicado que las probabilidades descritas aplican a pronósticos *individuales* y no conjuntamente a los pronósticos para todos los diferentes tiempos adelantados.

3.6 Identificación de Modelos

En esta sección se discutirá un método para identificar modelos para series no estacionales. Los métodos de identificación son procedimientos aproximados aplicados a un conjunto de datos para indicar el tipo de representación del modelo que es digno para una investigación más profunda. El objetivo específico aquí obtener una idea de los valores p , d y q necesarios en el modelo ARIMA lineal general. El modelo tentativo obtenido provee un punto de partida para la aplicación de métodos de estimación más formales.

Objetivos de la Identificación

Deberá ser primeramente dicho que la identificación y la estimación necesariamente tienen puntos en común. Aquí se emplea el procedimiento de estimación para llevar a cabo parte de la identificación. También debe ser señalado que la identificación es necesariamente inexacta, debido que la pregunta de que qué tipos de modelos ocurren en la práctica y en qué circunstancias, es una propiedad del comportamiento de mundo físico y por lo tanto no puede ser decidida por argumentos puramente matemáticos. Más aun, dado que en la etapa de identificación no hay disponible una formulación del problema, métodos estadísticos *ineficientes* deben ser necesariamente utilizados. Es una etapa en la cual los métodos gráficos son particularmente útiles y donde el criterio debe ser ejercitado. Sin embargo, debe tenerse en mente que la identificación preliminar nos compromete sólo a tener consideraciones tentativas de una clase de modelos que serán posteriormente ajustados y verificados eficientemente.

Etapas del Procedimiento de Identificación

Nuestra tarea es entonces identificar una subclase de modelos de la familia ARIMA general

$$\phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$$

que puede ser usada para representar a una serie de tiempo dada. La desarrollo será como sigue

1. Diferenciar z_t , tantas veces como sea necesario para producir estacionariedad, esperando reducir el proceso bajo estudio a el proceso mixto autorregresivo de promedios móviles

$$\phi(B)w_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$$

donde

$$w_t = (1-B)^d z_t = \nabla^d z_t.$$

2. Identificar el proceso ARMA resultante.

Nuestras principales herramientas para lograr 1 y 2 serán la función de autocorrelación muestral y la función de autocorrelación parcial muestral. Estas son utilizadas no sólo ayudar a adivinar la forma del modelo, sino también para obtener estimaciones aproximadas de los parámetros. Esto último no se analizará en este trabajo.

Uso de la Función de Autocorrelación Muestral y de la Función de Autocorrelación Parcial Muestral para la IdentificaciónIdentificación del Grado de Diferenciación

Hemos visto en la sección 3.3.4 que para los procesos estacionarios mixtos autorregresivos de promedios móviles de orden $(p,0,q)$, $\phi(B)z_t = \theta(B)a_t$, la función de autocorrelación satisface la ecuación en diferencia

$$\phi(B)\rho_k = 0 \quad k > q$$

También, si $\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B)$, la solución de esta ecuación en diferencia para la k -ésima autocorrelación es, asumiendo raíces distintas, de la forma

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + \dots + A_p G_p^k \quad k > q - p \quad (3.6.1)$$

El requerimiento de estacionariedad de que las raíces de $\phi(B)$ caigan fuera del círculo unitario implica que las raíces G_1, G_2, \dots, G_p caigan dentro del círculo unitario.

Inspeccionando (3.6.1) encontramos que en el caso de un modelo estacionario en el cual ninguna de las raíces caen cerca de la frontera del círculo unitario, la función de autocorrelación "desaparecerá" rápidamente para k grandes y moderados. Supongamos ahora que una única raíz real, digamos G_1 , se aproxima a uno, por lo que $G_1 = 1 - \delta$, donde δ es algún número pequeño positivo. Entonces, dado que para k grande

$$\rho_k \approx A_1 (1 - k\delta)$$

la función de autocorrelación no desaparecerá rápidamente y caerá muy lentamente y muy cercano a la linealidad. Un argumento similar puede ser aplicado si más de una de las raíces se aproxima a uno.

Por lo tanto, una función de autocorrelación que no desaparece rápidamente será tomada como una indicación de que una raíz cercana a uno puede existir. La función de autocorrelación estimada tiende a seguir el comportamiento de la función de autocorrelación teórica. Entonces, una falla en la desaparición rápida de la función de autocorrelación podría lógicamente sugerir que deberíamos tratar al proceso estocástico como no estacionario en z_t , pero posiblemente como estacionario en ∇z_t , o en alguna diferencia mayor.

Por las razones dadas, se asume que el grado de diferenciación d , necesario para lograr la estacionariedad, ha sido alcanzado cuando la función de autocorrelación de $w_t = \nabla^d z_t$ desaparece bastante rápido. En la práctica, d es normalmente cualquiera de 0, 1 ó 2, y es generalmente suficiente inspeccionar las primeras 20 autocorrelaciones estimadas de la serie original, y de sus primeras y segundas diferencias si es necesario.

Identificación de los procesos ARMA resultantes

Habiendo decidido tentativamente qué d deberá de ser, se estudiará la apariencia general de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de la serie diferenciada apropiadamente, $w_t = (1-B)^d z_t$, para proveer una idea acerca de la elección de los órdenes de p y q para los operadores autorregresivos y de promedios móviles. Haciendo esto, recordamos el comportamiento característico de la función de autocorrelación teórica y de la función de autocorrelación parcial teórica para los procesos autorregresivos, de promedios móviles y mixtos, discutidos en las secciones 3.3.2, 3.3.3 y 3.3.4, respectivamente.

Brevemente, mientras que la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo de orden p decae exponencialmente, su función de autocorrelación parcial tiene un corte después del retraso p . Por el contrario, la función de autocorrelación de un proceso de promedios móviles de orden q tiene un corte después del retraso q , mientras que la función de autocorrelación parcial deca exponencialmente. Si ambas funciones decaen exponencialmente, un proceso mixto es sugerido. Es más, la función de autocorrelación de un proceso mixto, conteniendo un componente autorregresivo de orden p y un componente de promedios móviles de orden q , es una mezcla de comportamientos exponenciales y sinusoidales después de los retrasos $q-p$. Por el contrario, la función de autocorrelación parcial de un proceso mixto está dominada por una mezcla de comportamientos exponenciales y sinusoidales después de los retrasos $p-q$ (ver Tabla 3.6.1).

En general, el comportamiento autorregresivo (de promedios móviles), medido por la función de autocorrelación, tiende a imitar el comportamiento de promedios móviles (autorregresivo), medido por la función de autocorrelación parcial.

Son de particular importancia los procesos autorregresivos y de promedios móviles de primer y segundo orden. Las propiedades de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial teóricas para estos procesos están resumidas en la Tabla (3.6.2), la cual requiere un estudio cuidadoso y provee una conveniente tabla de referencia.

Relación entre las Autocorrelaciones Estimadas y las Teóricas

Las autocorrelaciones estimadas pueden tener varianzas bastante más grandes que las teóricas y pueden estar altamente correlacionadas entre ellas. Por esta razón, no se puede esperar una total adherencia de la función de autocorrelación estimada a la teórica. En particular, autocorrelaciones estimadas moderadamente grandes pueden ocurrir aun cuando la función de autocorrelación teórica haya desaparecido, y movimientos y tendencias aparentes pueden ocurrir en la función estimada, las cuales no tienen fundamento a partir de la función teórica. Cuando se emplea la función de autocorrelación estimada como una herramienta para la identificación, es usualmente posible estar confiablemente seguros acerca de características generales, pero más indicaciones difíciles de describir pueden o no representar efectos reales, y entonces dos o más modelos deberían ser trabajados e investigados en mayor grado en las etapas de estimación y diagnóstico de la construcción de modelos.

Errores Estándar de las Funciones de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial

Dado que nosotros no conocemos las correlaciones teóricas y dado que los valores estimados que calculamos diferirán en algo de sus contrapartes teóricas, es importante tener alguna indicación sobre qué tanto puede diferir un valor estimado de su correspondiente valor teórico. En particular, necesitamos algunos medios para juzgar si las autocorrelaciones y las autocorrelaciones parciales son efectivamente cero después de algún retraso específico q y p , respectivamente. Para retrasos mayores, en la hipótesis de que el proyecto es de promedios móviles de orden q , podemos calcular los errores estándar de las autocorrelaciones estimadas a partir de la forma simplificada de la fórmula de Bartlett (3.2.13), reemplazando las autocorrelaciones teóricas por las estimaciones muestrales. Entonces

$$\sigma[r_k] \approx \frac{1}{n^{1/2}} [1 + 2(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_q^2)]^{1/2} \quad k > q \quad (3.6.2)$$

Para las autocorrelaciones parciales utilizamos el resultado (3.3.2.33) que, bajo la hipótesis de que el proceso es autorregresivo de orden p , el error estándar de las correlaciones parciales estimadas de orden $p+1$ y mayores es

$$\sigma[\hat{\phi}_{kk}] \approx \frac{1}{n^{1/2}} \quad k > q \quad (3.6.3)$$

Bajo la hipótesis de que la autocorrelación ρ_k teórica es cero, la estimación r_k dividida entre su error estándar se distribuye aproximadamente como una Normal estándar. Un resultado similar se da para las autocorrelaciones parciales. Esto se utiliza como una guía para ver si las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales a partir de cierto retraso son esencialmente cero.

	Procesos Autorregresivos	Procesos de Promedios Móviles	Procesos Mixtos
Modelo en términos de z's	$\phi(B)z_t = a_t$	$\theta^{-1}(B)z_t = a_t$	$\theta^{-1}(B)\phi(B)z_t = a_t$
Modelo en términos de a's	$z_t = \phi^{-1}(B)a_t$	$z_t = \theta(B)a_t$	$z_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)a_t$
Condición de Estacionariedad	Raíces de $\phi(B) = 0$ fuera del círculo unit.	Siempre estacionario	Raíces de $\phi(B) = 0$ fuera del círculo unit
Condición de Invertibilidad	Siempre invertible	Raíces de $\theta(B) = 0$ fuera del círculo unitario	Raíces de $\theta(B) = 0$ fuera del círculo unitario
Función de Autocorrelación	Decaimiento exponencial y/o sinusoidal (infinita)	Corte después del retraso q (finita)	Mov. exponenciales y/o sinusoidales después del retraso $p - q$ (infinita)
Función de Autocorrelación Parcial	Corte después del retraso p (finita)	Decaimiento exponencial y/o sinusoidal (infinita)	Mov. exponenciales y/o sinusoidales después del retraso $p - q$ (infinita)

Tabla 3.6.1 : Resumen de las Propiedades de los Procesos Autorregresivos, de Promedios Móviles y ARMA Mixtos.

	Orden			
	(1,d,0)	(0,d,1)	(2,d,0)	(0,d,2)
Comportamiento de ρ_k	Decae exponencialmente	Sólo ρ_1 no es cero	Mezcla de mov. exponenciales y/o sinusoidales	Sólo ρ_1 y ρ_2 no son cero
Comportamiento de ϕ_{kk}	Sólo ϕ_{11} no es cero	Decae exponencialmente	Sólo ϕ_{11} y ϕ_{22} no son cero	Mezcla de mov. exponenciales y/o sinusoidales
Región Admisible	$-1 < \phi_1 < 1$	$-1 < \theta_1 < 1$	$-1 < \phi_2 < 1$ $\phi_2 + \phi_1 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$	$-1 < \theta_2 < 1$ $\theta_2 + \theta_1 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$

Tabla 3.6.2 : Comportamiento de las Funciones de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de un Proceso ARIMA de Orden (p,d,q).

3.7 Estimación de Modelos

El proceso de identificación conduce a una formulación tentativa para el modelo, entonces necesitamos obtener estimadores eficientes de los parámetros. Después de que los parámetros hayan sido estimados, el modelo ajustado tendrá que estar sujeto a diagnósticos y pruebas de bondad de ajuste. Para que éstas pruebas sean relevantes es necesario hacer un uso eficiente de los datos en el proceso de ajuste. Esta sección contiene una descripción general de los métodos de verosimilitud de estimación de los parámetros en los modelos estocásticos. Durante esta sección, los subrayados se usarán para denotar vectores y matrices.

Estudio de las Funciones de Verosimilitud y de Suma de Cuadrados

Función de Verosimilitud

Suponga que tenemos una muestra de N observaciones z con la cual asociamos una variable aleatoria N -dimensional, cuya distribución de probabilidad conocida $p(z|\xi)$ depende algunos parámetros ξ desconocidos. Usamos el vector ξ para denotar un conjunto general de parámetros y, en particular, puede referirse a los $q+p+1$ parámetros (ϕ, θ, σ^2) del modelo ARIMA. Antes de que los datos estén disponibles, $p(z|\xi)$ asociará una densidad con cada resultado diferente z del experimento, para ξ fijo. Después de que los datos han sido obtenidos, estamos conducidos a contemplar los diferentes valores de ξ que pudieron haber dado lugar al conjunto fijo de observaciones z obtenido realmente. La función aproximada para este propósito es la función de verosimilitud $L(\xi|z)$, la cual es de la misma forma de $p(z|\xi)$, pero en la cual z es ahora fija y ξ es variable. Es a menudo conveniente trabajar con el logaritmo de la función de verosimilitud $\ln[L(\xi|z)] = l(\xi|z)$ (log-verosimilitud). Una razón de que la función de verosimilitud es de fundamental importancia en la teoría de la estimación es debido al principio de verosimilitud, el cual dice que (dado que el modelo supuesto es correcto) todo lo que los datos tienen que decirnos acerca de los parámetros está contenido en la función de verosimilitud, siendo irrelevantes todos los demás aspectos de los datos.

En muchos ejemplos, para muestras moderadas y grandes, la función del logaritmo de verosimilitud será unimodal y puede ser aproximada adecuadamente sobre una región suficientemente extensa cerca del máximo por una función cuadrática. En tales casos, ésta función puede ser descrita por su máximo y por su segunda derivada en el máximo. Los valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud, o equivalentemente su logaritmo, se llaman *estimadores máximo verosímiles (ML)*. Las segundas derivada de la función de log-verosimilitud proveen medidas de dispersión de la función de verosimilitud y pueden ser usadas para calcular errores estándar aproximados para los estimadores.

Verosimilitud Condicional de un Proceso ARIMA

Supongamos que las $N = n + d$ observaciones originales z forman una serie de tiempo la cual denotamos por $z_{-d+1}, \dots, z_0, z_1, \dots, z_n$. Suponemos que esta serie es generada por un modelo ARIMA de orden (p, d, q) . A partir de estas observaciones podemos generar una serie w de $n = N - d$ diferencias w_1, \dots, w_n , donde $w_t = \nabla^d z_t$. Por lo tanto, el problema general de ajustar los parámetros ϕ y θ del modelo ARIMA $\phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$, es equivalente a ajustar a las w 's, el modelo ARMA (p, q) estacionario e invertible, que puede ser escrito como

$$a_t = \bar{w}_t - \phi_1 \bar{w}_{t-1} - \dots - \phi_p \bar{w}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad (3.7.1)$$

donde $w_t = \nabla^d z_t$ y $\bar{w}_t = w_t - \mu$ con $E[w_t] = \mu$. Para los tamaños de muestra normalmente considerados en el análisis de series de tiempo la aproximación $\bar{w} = \sum_{t=1}^n w_t / n$ para μ es adecuada.

Las w 's no pueden ser substituidas inmediatamente en (3.7.1) para calcular las a 's debido a la dificultad de la ecuación diferencial. Sin embargo, suponga que p valores w de las w 's y q valores a de las a 's previos al comienzo de la serie w nos son dados. Entonces los valores de a_1, \dots, a_n , condicionales en esta elección, pueden ser calculados a partir de (3.7.1). Entonces, para cualquier elección de parámetros (ϕ, θ) y de los valores iniciales (w^*, a^*) , podemos calcular sucesivamente un conjunto de valores $a_t(\phi, \theta, w^*, a^*, w)$, $t = 1, 2, \dots, n$.

Ahora, suponiendo que las a 's se distribuyen normalmente, su densidad de probabilidad es

$$p(a_1, \dots, a_n) \propto \sigma_a^{-n} \exp \left[- \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2\sigma_a^2} \right) \right].$$

Dado un conjunto particular de datos w , el log-verosimilitud asociado con los valores de los parámetros (ϕ, θ, σ^2) , condicional en la elección de (w, a) podría ser entonces

$$l(\phi, \theta, \sigma_a^2) = -n \ln(\sigma_a) - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_a^2} \quad (3.7.2)$$

donde

$$S(\phi, \theta) = \sum_{i=1}^n a_i(\phi, \theta | w_i, a_i, w).$$

Notamos que la log-verosimilitud l involucra a los datos sólo a través de la función de suma de cuadrados condicional. Se sigue que los contornos de l para cualquier valor fijo de σ_a^2 en el espacio de (ϕ, θ, σ^2) son contornos de S , que los estimadores máximo verosímiles son los mismos que los estimadores por mínimos cuadrados, y que podemos en general, estudiar el comportamiento de la verosimilitud condicional estudiando la suma de cuadrados condicionales. Los valores de los parámetros obtenidos al minimizar la función de la suma de cuadrados condicionales $S(\phi, \theta)$ serán llamados *estimadores de mínimos cuadrados condicionales*.

Verosimilitud Incondicional; Función de Suma de Cuadrados; Estimadores de Mínimos Cuadrados

La función log-verosimilitud incondicional correspondiente a las $N = n + d$ observaciones, asumidas en ser generadas por un modelo ARIMA, está dado por:

$$l(\phi, \theta, \sigma_a^2) = f(\phi, \theta) - n \ln(\sigma_a) - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_a^2} \quad (3.7.3)$$

donde $f(\phi, \theta)$ es una función de ϕ y de θ . La función de sumas de cuadrados incondicionales está dada por

$$S(\phi, \theta) = \sum_{i=1}^n [a_i | w, \phi, \theta]^2 + [e.]' \Omega^{-1} [e.] \quad (3.7.4)$$

donde $[a_t | w, \phi, \theta] = E[a_t | w, \phi, \theta]$ denota la esperanza condicional de a_t en w , ϕ y θ . En (3.7.4) tenemos $e_* = (w_{1-p}, \dots, w_0, a_{1-q}, \dots, a_0)$ denota el vector de los $p+q$ valores iniciales y los procesos a_t previos necesarios al tiempo $t=1$, $\Omega\sigma_a^2 = \text{cov}(e_*)$ es la matriz de varianzas-covarianzas de e_* y $[e_*] = ([w_{1-p}], \dots, [w_0], [a_{1-q}], \dots, [a_0])$ denota el vector de las esperanzas condicionales de los valores iniciales dados w , ϕ y θ . Una forma alternativa de representar la suma de cuadrados es como $S(\phi, \theta) = \sum_{t=-\infty}^n [a_t | w, \phi, \theta]^2$, la cual, en comparación con (3.7.4) indica que $\sum_{t=-\infty}^n [a_t | w, \phi, \theta] = [e_*] \Omega^{-1} [e_*]$.

Usualmente, $f(\phi, \theta)$ sólo es de importancia para n pequeño. Para valores moderados y grandes de n , (3.7.3) es dominada por $S(\phi, \theta)/2\sigma_a^2$, y entonces los contornos de la función incondicional de suma de cuadrados en el espacio de los parámetros (ϕ, θ) son contornos muy cercanos a los de la verosimilitud y log-verosimilitud. Se sigue, en particular, que los estimadores de los parámetros obtenidos al minimizar la suma de cuadrados (3.7.4), los cuales llamamos *estimadores de mínimos cuadrados (incondicionales o exactos)*, usualmente proveerán aproximaciones muy cercanas a los estimadores máximo verosímiles.

Capítulo IV: DESESTACIONALIZACIÓN CON EL MÉTODO X-11

El método X-11 está incluido en el programa X-12-ARIMA como una especificación, éste es utilizado para realizar la descomposición de las series, tanto mensuales como trimestrales, y se apoya en un principio de estimación iterativa de los diferentes componentes. Esa estimación se hace en varias etapas mediante el uso de promedios móviles adecuados.

4.1 Componentes y Esquemas de Descomposición

Los siguientes componentes pueden aparecer en algún momento de la descomposición:

1. La *tendencia*, que representa la evolución de la serie a largo plazo;
2. El *ciclo*, movimiento liso, casi periódico, en torno de la tendencia, que pone en evidencia una sucesión de etapas de crecimiento y de recesión.

X-11 no separa estos dos componentes. Las series estudiadas son generalmente muy cortas para permitir que se haga fácilmente la estimación de estos dos componentes. De modo que, a continuación, nos referiremos al componente *tendencia-ciclo*, designado C_t , para conservar la notación usual de X-11.

1. El componente *estacional*, designado S_t , que representa las fluctuaciones intra anuales (mensuales o trimestrales) que se repiten año con año de manera más o menos regular;
2. Un componente llamado de *días laborables*, designado D_t , que mide el impacto sobre la serie de la composición diaria del mes o del trimestre;
3. Un componente que mide el efecto de la *Semana Santa*, designado E_t ;
4. Por último, el componente *irregular*, designado I_t , que agrupa todas las otras fluctuaciones más o menos erráticas que no son tomadas en cuenta en los componentes precedentes.

Debemos señalar que esas definiciones son, de hecho, cualitativas y poco precisas. Por otra parte, continúan siendo objeto de controversias e interpretaciones diversas. Veamos a continuación, como ejemplo, dos citas de eminentes estadísticos que, evidentemente, no adoptan el mismo objetivo ni la misma definición.

- Sir KENDALL(1973): "La característica esencial de una tendencia es de ser suave".
- Andrew HARVEY(1989): "No existe, sin embargo, ninguna razón fundamental que haga que una tendencia sea suave".

En realidad, en el método X-11 los componentes son definidos de manera implícita por las herramientas que sirven para estimarlos.

El programa X-12-ARIMA considera cuatro modelos de descomposición:

- El modelo aditivo: $X_t = C_t + S_t + D_t + E_t + I_t$;
- El modelo multiplicativo: $X_t = C_t S_t D_t E_t I_t$;
- El modelo log-aditivo: $\log X_t = \log C_t + \log S_t + \log D_t + \log E_t + \log I_t$;
- El modelo pseudo-aditivo: $X_t = C_t (S_t + D_t + E_t + I_t - 1)$.

4.2 Promedios Móviles

Los promedios móviles constituyen la herramienta base del método de desestacionalización X-11. Se emplean para estimar los principales componentes de la serie: tendencia y estacionalidad. Son principalmente herramientas de suavizamiento, concebidos para eliminar un componente de la serie que no es deseado. Consideremos el ejemplo simple de una serie constituida con una tendencia y un componente irregular: si la tendencia es suave, los valores de la serie alrededor de la fecha t deben aportar información sobre el valor de esa tendencia en el instante t y debe ser posible utilizar un promedio de esos valores para obtener una estimación.

El promedio móvil de coeficientes $\{\theta_i\}$ se define de la siguiente manera:

$$M(X_t) = \hat{C}_t = \sum_{i=-p}^{+p} \theta_i X_{t+i}$$

El problema consiste entonces en encontrar un buen conjunto de coeficientes $\{\theta_i\}$.

A finales del siglo XIX, las limitadas capacidades de cálculo disponibles hicieron que los estadísticos buscaran los coeficientes de ponderación independientes de la serie mediante los métodos que son estudiados detalladamente en el Capítulo I.

4.3 Un Algoritmo Simple de Desestacionalización

Sea una serie bruta mensual X_t , admitimos que esa serie puede ser descompuesta en una tendencia-ciclo, una estacionalidad y una parte irregular, siguiendo un esquema multiplicativo: $X_t = C_t S_t D_t E_t I_t$.

Se puede imaginar un algoritmo simple de desestacionalización en cuatro etapas:

1. Estimación de la tendencia-ciclo por promedio móvil:

$$C_t^{(0)} = M_0(X_t).$$

El promedio móvil que será utilizado en esta etapa tendrá que reproducir lo mejor posible el componente tendencia-ciclo. Al mismo tiempo, tendrá que eliminar el componente estacional y reducir al máximo el componente irregular.

2. Estimación del componente estacional-irregular:

$$(S_t I_t)^{(0)} = X_t / C_t^{(0)}.$$

3. Estimación del componente estacional por promedio móvil sobre cada mes:

$$S_t^{(0)} = M_1[(S_t I_t)^{(0)}]$$

y en consecuencia,

$$I_t^{(0)} = (S_t I_t)^{(0)} / S_t^{(0)}.$$

En esta etapa se trata entonces de suavizar los valores del componente estacional-irregular de cada mes para extraer la evolución del coeficiente estacional del mes analizado. El promedio móvil empleado en esta etapa tendrá que reproducir lo mejor posible el componente estacional de cada mes, reduciendo al máximo el componente irregular. Se puede imponer aquí una restricción de normalización de los coeficientes, haciendo por ejemplo que la suma de los mismos sea igual al periodo.

4. *Estimación de la serie corregida por variaciones estacionales:*

$$A_t^{(0)} = (C_t I_t)^{(0)} = X_t / S_t^{(0)}.$$

La única dificultad reside entonces en la selección de los promedios móviles utilizados en las etapas 1 y 3.

4.4 El Algoritmo Base del Método X-11

El método X-11 no hace más que llevar a cabo ese algoritmo simple, utilizando promedios móviles cuidadosamente elegidos y afinando, poco a poco, las estimaciones de los componentes a través de las iteraciones del algoritmo.

Es posible entonces definir el algoritmo base del método X-11 diciendo que éste corresponde al doble uso consecutivo del algoritmo descrito precedentemente, cambiando cada vez los promedios móviles utilizados.

1. *Estimación de la tendencia-ciclo con un promedio móvil de 2x12:*

$$C_t^{(0)} = M_{2x12}(X_t).$$

El promedio móvil utilizado en esta etapa es un promedio móvil de 13 términos, llamado 2x12, que conserva las tendencias lineales, elimina las estacionalidades constantes de orden 12 y minimiza la varianza de la parte irregular.

2. Estimación del componente estacional-irregular:

$$(S_t I_t) = X_t / C_t^{(1)}.$$

3. Estimación del componente estacional con un promedio móvil 3x3 sobre cada mes:

$$S_t^{(1)} = M_{3 \times 3}[(S_t I_t)^{(1)}].$$

El promedio móvil utilizado en esta etapa es un promedio móvil de 5 términos, llamado 3x3. Los coeficientes son luego normalizados de manera tal que la suma de los mismos, para todo período de 12 meses, sea aproximadamente doce.

$$\bar{S}_t^{(1)} = S_t^{(1)} / M_{2 \times 12}(S_t^{(1)}).$$

4. Estimación de la serie corregida por variaciones estacionales:

$$A_t^{(1)} = (C_t I_t)^{(1)} = X_t / \bar{S}_t^{(1)}.$$

Por construcción, esta primera estimación de la serie corregida por variaciones estacionales debe contener menos estacionalidad. El método X-11 ejecuta una vez más este algoritmo simple, cambiando los promedios móviles para tener en cuenta esta propiedad.

5. Estimación de la tendencia-ciclo con el filtro móvil de Henderson de 13 términos:

$$C_t^{(2)} = H_{13}(A_t^{(1)}).$$

Los filtros móviles de Henderson no tienen propiedades particulares en términos de eliminación de la estacionalidad (la cual es ya inexistente o muy reducida en esta etapa). Sin embargo, tienen un buen poder de suavizamiento y conservan las tendencias localmente polinomiales de segundo grado.

6. Estimación del componente estacional-irregular:

$$(S_t I_t)^{(2)} = X_t / C_t^{(2)}.$$

7. Estimación del componente estacional con un promedio móvil 3x5 sobre cada mes:

$$S_t^{(2)} = M_{3x5} \left[(S_t I_t)^{(2)} \right].$$

El promedio móvil utilizado en esta etapa es un promedio móvil de 7 términos, llamado 3x5, que conserva las tendencias lineales. Los coeficientes son luego normalizados de manera tal que la suma de los mismos, para todo período de 12 meses, sea aproximadamente doce.

$$\bar{S}_t^{(2)} = S_t^{(2)} / M_{2x12} (S_t^{(2)}).$$

8. Estimación de la serie corregida por variaciones estacionales:

$$A_t^{(2)} = (C_t I_t)^{(2)} = X_t / \bar{S}_t^{(2)}.$$

4.5 Puntos Atípicos y Efectos de Calendario

Como todo operador lineal, los promedios móviles reaccionan mal ante la presencia de valores atípicos. Por ello, el método X-11 incorpora una herramienta de detección y de corrección de los valores extremos que es empleada para limpiar la serie antes de proceder a la desestacionalización, la cual es analizada más adelante.

Por otra parte, además de la estacionalidad, existen otros efectos que pueden explicar las variaciones constantes de una serie. Los más comunes son los efectos ligados al calendario: efecto de días laborables; efecto de Semana Santa; etc. Estos componentes son estimados con el componente irregular, mediante modelos de regresión lineal, explicados anteriormente en el capítulo 2. Estos efectos son estimados con el factor irregular de una primera corrida del método X-11, posteriormente, con la serie corregida por estos efectos y por outliers se realiza otra vez el proceso aquí descrito para obtener la descomposición final.

Como lo muestra la Tabla 2.2, el algoritmo base de X-11 nos permite obtener tres estimaciones diferentes del componente irregular:

- En la Etapa 3, retirando la estimación del componente estacional de la estimación del componente estacional-irregular obtenida en la Etapa 2, se obtiene:

$$I_t^{(1)} = (S_t I_t)^{(1)} / \hat{S}_t^{(1)}.$$

X-11 utilizará esta estimación para detectar y corregir los valores extremos, a fin de obtener una mejor estimación del componente estacional.

- En la Etapa 7, retirando la estimación de la componente estacional de la estimación del componente estacional-irregular obtenida en la etapa 6, se obtiene:

$$I_t^{(1)} = (S_t I_t)^{(2)} / \hat{S}_t^{(2)}.$$

X-11 utilizará nuevamente esta estimación para detectar y corregir los valores extremos, a fin de obtener una estimación más fiable del componente estacional.

- En la Etapa 8, retirando a la estimación de la serie corregida por variaciones estacionales, la estimación del componente tendencia-ciclo obtenida en la Etapa 5, se obtiene:

$$I_t^{(3)} = A_t^{(2)} / C_t^{(2)}.$$

X-11 utilizará esta estimación para evaluar el componente de días laborables, empleando una regresión lineal.

4.6 El Principio Iterativo de X-11

X-11 procede de manera iterativa en la evaluación de los diferentes componentes de la serie, tomando en cuenta la presencia eventual de valores extremos, de la siguiente manera: estima los componentes; busca los efectos molestos en el componente irregular; estima los componentes sobre una serie corregida; busca los efectos molestos en la componente irregular ; etc.

El paquete Census X-11 presenta cuatro Etapas de Tratamiento, designadas A, B, C, y D, seguidas de otras tres Etapas E, F, y G que presentan las estadísticas y los gráficos y que no forman parte de la descomposición propiamente dicha.

4.6.1 Etapa A: Ajustes Previos

Esta etapa no es obligatoria. Permite que el usuario pueda realizar una corrección *a priori* de la serie, introduciendo los coeficientes de ajuste. El usuario puede, entonces:

- introducir los coeficientes de ajuste mensuales (o trimestrales) que le permitirán corregir el efecto de ciertos días feriados, o modificar el nivel de la serie (por ejemplo, efecto de una huelga), etc.;

El programa calcula con esos datos los coeficientes de corrección que serán aplicados a la serie bruta. La serie así corregida (Tabla B1 de las salidas impresas) pasa entonces a la Etapa B.

4.6.2 Etapa B: Primera Corrección Automática de la Serie

Esta etapa consiste fundamentalmente en una primera estimación y corrección de los valores extremos y (si se tomó la opción) de los efectos ligados a los días laborables. Esta estimación se hace aplicando el algoritmo de base expuesto detalladamente en la Sección 2.4.

Esos tratamientos llevan a producir las Tablas B19 (evaluación de los efectos de días laborables) y B20 (valores de corrección de los valores considerados extremos), que sirven para corregir la serie bruta y que conducen a la serie de la Tabla C1.

4.6.3 Etapa C: Segunda Corrección Automática de la Serie

Aplicando siempre el mismo algoritmo base, esta etapa produce una estimación más precisa de los efectos de los días laborables (Tabla C19) y de los valores de corrección de los valores extremos (Tabla C20).

La serie, por fin *limpia*, figura en la Tabla D1 de las salidas impresas.

Serie bruta mensual: $X_t = C_t S_t I_t$

1. **Estimación de la tendencia ciclo con un promedio móvil 2×12 :**

$$C_t^{(1)} = M_{2 \times 12}(X_t)$$

2. **Estimación del componente estacional irregular:**

$$(S_t I_t)^{(1)} = X_t / C_t^{(1)}$$

3. **Estimación del componente estacional con un promedio móvil de 3×3 sobre cada mes:**

$$S_t^{(1)} = M_{3 \times 3}[(S_t I_t)^{(1)}] \text{ y normalización } \bar{S}_t^{(1)} = S_t^{(1)} / M_{2 \times 12}(S_t^{(1)})$$

4. **Estimación de la serie corregida por variaciones estacionales:**

$$A_t^{(1)} = (C_t I_t)^{(1)} = X_t / \bar{S}_t^{(1)}$$

5. **Estimación de la tendencia-ciclo con un filtro móvil de Henderson de 13 términos:**

$$C_t^{(2)} = H_{13}(A_t^{(1)})$$

6. **Estimación del componente estacional-irregular:**

$$(S_t I_t)^{(2)} = X_t / C_t^{(2)}$$

7. **Estimación del componente estacional con un promedio móvil de 3×5 sobre cada mes:**

$$S_t^{(2)} = M_{3 \times 5}[(S_t I_t)^{(2)}] \text{ y normalización } \bar{S}_t^{(2)} = S_t^{(2)} / M_{2 \times 12}(S_t^{(2)})$$

8. **Estimación de la serie corregida por variaciones estacionales:**

$$A_t^{(2)} = (C_t I_t)^{(2)} = X_t / \bar{S}_t^{(2)}$$

Tabla 4.1 : Algoritmo base del X-11

4.6.4 Etapa D: Desestacionalización

En esta etapa se aplica por última vez el algoritmo base. Se trata de la etapa de desestacionalización propiamente dicha, que permite producir las estimaciones finales siguientes:

- El componente estacional (Tabla D10);
- La serie corregida por variaciones estacionales (Desestacionalizada, Tabla D11);
- El componente tendencia-ciclo (Tabla D12);
- El componente irregular (Tabla D13).

4.6.5 Etapas E, F y G: Correcciones por Valores Extremos, Estadísticas y Gráficos

La etapa E muestra las siguientes series corregidas por valores extremos:

- La serie original corregida por valores extremos (Tabla E1);
- La serie desestacionalizada corregida por valores extremos (Tabla E2);
- El componente irregular corregido por valores extremos (Tabla E3).

Las etapas F y G presentan las estadísticas que permiten evaluar la calidad de la desestacionalización y las gráficas en formato de texto, respectivamente.

La Tabla 2.3 de presenta el resumen de las diferentes etapas del método X-11.

4.7 De Census X-11 a X-11-ARIMA y X-12-ARIMA

El uso de promedios móviles presenta algunos problemas en el tratamiento al inicio y al final de las series, sobretodo en lo que hace a la estabilidad de las estimaciones. Por ello, cuando se dispone de un punto suplementario y se desestacionaliza nuevamente una serie con el paquete Census-X-11, no es raro que se observen variaciones sensibles de las estimaciones en las fechas más recientes.

En 1975, Estela B. DAGUM(1975) propuso que se remediara gran parte de esos problemas utilizando los modelos ARIMA popularizados unos años antes por los trabajos de BOX y JENKINS(1970). Demostró también que se disminuían considerablemente las revisiones ajustando un modelo ARIMA a la serie, pronosticando los valores futuros de la misma mediante ese modelo y aplicando a la serie prolongada de esa forma el procedimiento de desestacionalización X-11. El paquete X-11-ARIMA se funda en esa idea (DAGUM(1988)).

Desgraciadamente, la estimación de modelos ARIMA es más delicada en presencia de valores extremos, de rupturas de nivel, de efectos de calendario, etc. Por ello, X-11 sigue el siguiente esquema:

1. *Primera desestacionalización con el método X-11:* Esta etapa permite, como hemos visto, estimar los valores extremos y los efectos de días laborables, pero también el efecto de Semana Santa, utilizando la estimación del componente irregular de la Tabla D13.
2. *Modelación ARIMA y extensión de la serie corregida por todos sus efectos.*
3. *Desestacionalización de la serie extendida con el método X-11.*

X-12-ARIMA se basa en el mismo principio, pero propone además un módulo muy completo (llamado Reg-ARIMA) que permite corregir la serie inicial por todo tipo de efectos indeseables. La estimación de esos efectos se hace empleando modelos ARIMA de regresión de errores (FINDLEY e alii. (1998)).

A continuación se presenta detalladamente el proceso de desestacionalización del método X-11, descrito arriba, incluyendo el tratamiento por valores extremos. Cabe mencionar que este análisis de los valores extremos es independiente a la estimación de outliers mediante el módulo Reg-ARIMA, que se realiza antes del proceso de descomposición.

ETAPA A: Ajustes Previos

- Para efectos conocidos e importantes.

ETAPA B: Primera corrección automática de la serie

- Estimación del componente irregular;
- Detección y corrección automática de valores extremos;
- Corrección de los efectos de días laborables.

ETAPA C: Segunda corrección automáticamente de la serie

- Estimación del componente irregular;
- Detección y corrección automática de valores extremos;
- Corrección de los efectos de días laborables.

ETAPA D: Desestacionalización

1. Cálculo de la serie desestacionalizada provisoria (Tablas D1 a D6);
2. Suavizamiento de la serie desestacionalizada con un filtro móvil de Henderson y nueva estimación de los coeficientes estacionales (Tablas D7 a D10);
3. Cálculo de la serie desestacionalizada definitiva (Tabla D11), extracción del componente tendencia-ciclo (tabla D12) y del componente irregular (Tabla D13).

ETAPA E: Componentes corregidos por valores extremos

ETAPA F: Evaluaciones de la calidad del ajuste estacional

ETAPA G: Gráficos

Tabla 4.2 : Esquema simplificado del funcionamiento del X-11

4.8 Descripción Detallada del Método X-11 con Tratamiento de Valores Extremos

Para una descomposición multiplicativa se realiza el siguiente proceso:

Se estima la tendencia inicial a partir de un promedio móvil centrado de 12 términos (13 términos, 2X12):

$$C_t^{(0)} = \frac{1}{24} C_{t-6} S_{t-6} I_{t-6} + \frac{1}{12} C_{t-5} S_{t-5} I_{t-5} + \dots + \frac{1}{12} C_t S_t I_t + \dots + \frac{1}{12} C_{t+5} S_{t+5} I_{t+5} + \frac{1}{24} C_{t+6} S_{t+6} I_{t+6}$$

El cociente entre la serie original y la tendencia estimada es el componente estacional-irregular (*SI ratio*):

$$S_t I_t^{(0)} = \frac{C_t S_t I_t}{T_t^{(0)}}$$

El factor estacional preliminar inicial se calcula usando un promedio móvil estacional de 5 términos (3X3):

$$S_t^{(0)} = \frac{1}{9} S_{t-24} I_{t-24}^{(0)} + \frac{2}{9} S_{t-12} I_{t-12}^{(0)} + \frac{3}{9} S_t I_t^{(0)} + \frac{2}{9} S_{t+12} I_{t+12}^{(0)} + \frac{1}{9} S_{t+24} I_{t+24}^{(0)}$$

Para encontrar el factor estacional inicial se divide el factor estacional preliminar inicial calculado anteriormente entre un promedio móvil centrado de 12 términos (13 términos, 2X12) de ellos mismos:

$$\bar{S}_t^{(0)} = \frac{S_t^{(0)}}{\frac{1}{24} S_{t-6}^{(0)} + \frac{1}{12} S_{t-5}^{(0)} + \dots + \frac{1}{12} S_{t+5}^{(0)} + \frac{1}{24} S_{t+6}^{(0)}}$$

Se dividen los componentes *SI* entre los factores estacionales iniciales para obtener los factores irregulares iniciales:

$$I_t^{(0)} = \frac{S_t I_t^{(0)}}{\bar{S}_t^{(0)}}$$

Para $3 \leq n \leq N-2$ se calcula una desviación estándar móvil de cinco años de la siguiente forma:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{60} \sum_{t=12(n-3)+1}^{12(n+2)} (I_t^{(0)} - 1)^2$$

y sea $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ y $\sigma_N, \sigma_{N-1} = \sigma_{N-2}$.

Se elimina la influencia de los irregulares grandes recalculando σ_n^2 para $3 \leq n \leq N-2$ como el promedio de los cuadrados $(I_t^{(0)} - 1)^2$ con $12(n-2)+1 \leq t \leq 12(n+2)$ para las cuales $|I_t^{(0)} - 1| \leq 2.5\sigma_n$ y se hacen $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ y $\sigma_N, \sigma_{N-1} = \sigma_{N-2}$.

Se definen las σ_t para $1 \leq t \leq 12N$ de cada mes t determinando su año n que satisface $12(n-1)+1 \leq t \leq 12n$ y se toma $\sigma_t = \sigma_n$.

Se asignan los ponderadores para $I_t^{(0)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Si } |I_t^{(0)} - 1| &\leq 1.5\sigma_t &\Rightarrow W_t &= 1 \\ \text{Si } 1.5\sigma_t < |I_t^{(0)} - 1| < 2.5\sigma_t &&\Rightarrow W_t &= (2.5\sigma_t - |I_t^{(0)} - 1|) / (2.5\sigma_t - 1.5\sigma_t) \\ \text{Si } |I_t^{(0)} - 1| &\geq 2.5\sigma_t &\Rightarrow W_t &= 0 \end{aligned}$$

Si $W_t = 1$, entonces el componente $S_t I_t^{(0)}$ no se reemplaza. Cuando $W_t \leq 1$, se reemplaza el componente SI por el promedio entre $W_t S_t I_t^{(0)}$ y los dos más cercanos componentes predecesores $S_{t-12} I_{t-12}^{(0)}$ y dos más cercanos componentes antecesores $S_{t+12k} I_{t+12k}^{(0)}$ con ponderador 1 obteniendo el componente SI ajustado por valores extremos $S_t I_t^{**}$. Por ejemplo, si $W_t < 1$ y $W_{t+12} = W_{t+24} = 1$, se reemplaza $S_t I_t^{(0)}$ con:

$$S_t I_t^{**} = \frac{1}{4 + W_t} [S_{t-24} I_{t-24}^{(0)} + S_{t-12} I_{t-12}^{(0)} + W_t S_t I_t^{(0)} + S_{t+12} I_{t+12}^{(0)} + S_{t+24} I_{t+24}^{(0)}]$$

A los componentes SI ajustados por valores extremos se aplica un promedio móvil estacional de 5 términos (3X3) para estimar de nuevo los factores estacionales iniciales.

$$S_t^{(1)} = \frac{1}{9} S_{t-24} I_{t-24}^{**} + \frac{2}{9} S_{t-12} I_{t-12}^{**} + \frac{3}{9} S_t I_t^{**} + \frac{2}{9} S_{t+12} I_{t+12}^{**} + \frac{1}{9} S_{t+24} I_{t+24}^{**}$$

Se ajustan los factores para que sumen 12 de la siguiente forma:

$$\bar{S}_t^{(0)} = \frac{S_t^{(0)}}{\frac{1}{24}S_{t-6}^{(0)} + \frac{1}{12}S_{t-5}^{(0)} + \dots + \frac{1}{12}S_{t+5}^{(0)} + \frac{1}{24}S_{t+6}^{(0)}}$$

Se obtiene el ajuste estacional inicial dividiendo la serie original entre los factores estacionales obtenidos anteriormente:

$$A_t^{(0)} = \frac{C_t S_t I_t}{\bar{S}_t^{(0)}}$$

Se decide qué filtro de Henderson utilizar (9, 13 ó 23) basándonos en el siguiente cociente::

$$\frac{\bar{I}}{\bar{C}} = \frac{\frac{1}{T-13} \sum_{t=8}^{T-6} |I_t^{H13} - I_{t-1}^{H13}| / I_{t-1}^{H13}}{\frac{1}{T-13} \sum_{t=8}^{T-6} |T_t^{H13} - T_{t-1}^{H13}| / T_{t-1}^{H13}}$$

donde T_t^{H13} es la tendencia de 13 términos de Henderson de $A_t^{(0)}$ descrita por:

$$T_t^{H13} = \sum_{j=-6}^6 h_j^{13} A_{t+j}^{(0)} \quad \text{e} \quad I_t^{H13} = \frac{A_t^{(0)}}{T_t^{H13}}$$

Se elige el filtro a utilizar de acuerdo con el siguiente criterio:

- Si $\bar{I}/\bar{C} \leq 1.0 \Rightarrow$ se utiliza el filtro de 9 términos.
 Si $1.0 < \bar{I}/\bar{C} < 3.5 \Rightarrow$ se utiliza el filtro de 13 términos
 Si $\bar{I}/\bar{C} \geq 3.5 \Rightarrow$ se utiliza el filtro de 23 términos

Los coeficientes para el filtro de Henderson de $(2H+1)$ se designan por $h_j^{(2H+1)}$, con $-H \leq j \leq H$.

Se obtiene la tendencia intermedia con el filtro de Henderson elegido:

$$C_t^{(2)} = \sum_{j=-H}^H h_j^{(2H+1)} A_{t+j}^{(0)}$$

Se calculan nuevos componentes SI dividiendo la serie original entre la tendencia intermedia calculada en el paso anterior.

$$S_t I_t^{(2)} = \frac{C_t S_t I_t}{C_t^{(2)}}$$

Se aplica un promedio móvil estacional de 7 términos (3X5) a los componentes SI para obtener los factores estacionales preliminares:

$$S_t^{(2)} = \frac{1}{15} S_{t-36} I_{t-36}^{(2)} + \frac{2}{15} S_{t-24} I_{t-24}^{(2)} + \frac{3}{15} S_{t-12} I_{t-12}^{(2)} + \frac{3}{15} S_t I_t^{(2)} + \frac{3}{15} S_{t+12} I_{t+12}^{(2)} + \frac{2}{15} S_{t+24} I_{t+24}^{(2)} + \frac{1}{15} S_{t+36} I_{t+36}^{(2)}$$

Se dividen los factores estacionales preliminares entre un promedio móvil centrado de 12 términos (2X12) de ellos mismos.

$$\tilde{S}_t^{(2)} = \frac{S_t^{(2)}}{\frac{1}{24} S_{t-6}^{(2)} + \frac{1}{12} S_{t-5}^{(2)} + \dots + \frac{1}{12} S_{t+5}^{(2)} + \frac{1}{24} S_{t+6}^{(2)}}$$

Se hace el mismo procedimiento para encontrar valores extremos, descrito arriba, y se reemplazan de nuevo los componentes SI de la misma forma que en la etapa anterior, se obtienen también los factores estacionales finales sin efecto de valores extremos.

Se obtiene la serie ajustada estacionalmente dividiendo la serie original entre los factores estacionales.

$$A_t^{(2)} = \frac{C_t S_t I_t}{\tilde{S}_t^{(2)}}$$

Se obtiene el componente irregular dividiendo la serie desestacionalizada entre la tendencia intermedia.

$$I_t^{(2)} = \frac{A_t^{(2)}}{C_t^{(2)}}$$

Con estos irregulares se realiza una primera estimación del efecto de días laborables de acuerdo al procedimiento explicado en el capítulo II.

Se aplica ahora el procedimiento de los valores extremos a estos mismos irregulares para encontrar los ponderadores finales W_t .

Se estiman los valores extremos a partir de los irregulares con los ponderadores obtenidos anteriormente. Para t con $W_t < 1$ definimos:

$$X_t = I_t^{(2)} / \left[1 + W_t (I_t^{(2)} - 1) \right].$$

Entonces la serie ajustada por valores extremos es:

$$\begin{array}{ll} C_t S_t I_t & \text{si } W_t = 1 \\ C_t S_t I_t / X_t & \text{si } W_t < 1 \end{array}$$

Se modifica la serie original con los factores de valores extremos pasados.

$$\left\{ C_t S_t I_t \left[1 + W_t (I_t^{(2)} - 1) \right] \right\} / I_t^{(2)} = C_t S_t I_t$$

Con esta serie obtenida en una primera corrida se realiza otra vez todo el procedimiento descrito atrás.

Se estima una tendencia aplicando un promedio móvil centrado de 12 términos (2X12) a la serie anterior.

Se divide la serie entre la tendencia estimada para hallar el componente SI .

Se aplica un promedio móvil estacional de 5 términos (3X5) a los componentes SI para obtener una estimación del factor estacional.

Se divide la serie entre este factor, estimándose una serie desestacionalizada preliminar.

Se elige un nuevo filtro de Henderson con el procedimiento descrito en la primera corrida para aplicarlo a la serie desestacionalizada preliminar, de esta forma se obtiene una estimación de la tendencia.

Se divide a la serie obtenida en la primera corrida entre la tendencia estimada para encontrar un nuevo componente SI .

A estos componentes se les aplica un promedio móvil estacional (para cada mes por separado) de 7 términos (3X5) obteniendo así los factores estacionales.

Se reintroducen los efectos de días laborables y de valores extremos y se encuentra una serie desestacionalizada, dividiendo a la *serie original* entre los factores estacionales obtenidos en el paso anterior.

Se divide a esta serie desestacionalizada entre la tendencia calculada unos pasos atrás con el filtro de Henderson obteniendo una nueva serie irregular.

Posteriormente se realiza el mismo procedimiento descrito en el capítulo II para hallar el efecto final de días laborales.

Con los nuevos irregulares se encuentran los ponderadores de valores extremos.

Se estima nuevamente una serie sin efectos de valores extremos. Aquí termina una segunda corrida del proceso X-11.

Para una tercera corrida se realiza prácticamente el mismo proceso.

A la serie obtenida en la segunda corrida se le aplica un promedio móvil centrado de 12 términos para encontrar una tendencia inicial.

Se divide a la serie entre esta tendencia estimada, encontrando así los componentes *SI*.

Se aplica un promedio móvil estacional de 5 términos (3X3) a estos componentes *SI* para encontrar los factores estacionales preliminares.

Se divide a la serie obtenida en la segunda corrida entre estos factores para obtener una serie desestacionalizada preliminar.

Se encuentra un nuevo filtro de Henderson para aplicarlo a la serie desestacionalizada preliminar obteniendo de esta forma la tendencia intermedia.

Se divide a la serie ajustada por días laborables obtenida en la segunda corrida del proceso X-11 entre la tendencia intermedia para encontrar el componente *SI* final.

Dividir la serie obtenida al final de la segunda corrida entre la tendencia intermedia, estos serán los componentes *SI* modificados por valores extremos. En este paso se muestran los valores que no son idénticos a los *SI* del paso anterior.

En esta etapa se lleva a cabo el siguiente procedimiento para encontrar el promedio móvil a utilizar en la fase final para estimar los factores estacionales finales.

Se estiman los componentes estacionales e irregulares de la siguiente forma:

F: estacional = promedio móvil de 7 términos (3X5) de los componentes *SI* finales.

$$\text{Irregular} = SI/S$$

Se utilizan datos hasta el último diciembre.

Se calculan las variaciones anuales medias para cada componente en cada mes *i*.

$$\bar{S}_i = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{t=2}^{N_i} \left| \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} - 1 \right|$$

$$\bar{I}_i = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{t=2}^{N_i} \left| \frac{I_{i,t}}{I_{i,t-1}} - 1 \right|$$

donde N_i es el número de observaciones para el mes *i*.

Se obtiene la siguiente expresión:

$$MSR_i = \frac{\bar{I}_i}{\bar{S}_i}$$

Se calcula después la expresión global:

$$MSR = \frac{\sum_i (N_i \bar{I}_i)}{\sum_i (N_i \bar{S}_i)}$$

$$= \frac{\sum_i \frac{N_i}{N_i - 1} \sum_{t=2}^{N_i} (I_{i,t} - I_{i,t-1}) / I_{i,t-1}}{\sum_i \frac{N_i}{N_i - 1} \sum_{t=2}^{N_i} (S_{i,t} - S_{i,t-1}) / S_{i,t-1}}$$

Las opciones para elegir el filtro estacional son las siguientes:

- Si $MSR < 2.5$ \Rightarrow se utiliza el promedio móvil de 3X3
 Si $3.5 < MSR < 5.5$ \Rightarrow se utiliza el de 3X5
 Si $MSR > 6.5$ \Rightarrow se utiliza el de 3X9

Si el MSR no cae en cualquiera de los rangos anteriores, se desecha el último año y se realiza el mismo procedimiento hasta que se selecciona algún filtro.

A continuación se aplica este promedio móvil estacional seleccionado a los componentes SI finales para obtener los factores estacionales finales.

Se divide a la serie ajustada por días laborables obtenida en la segunda corrida para obtener la serie desestacionalizada final.

Se divide la serie obtenida al final de la segunda corrida entre los factores estacionales finales para encontrar una serie desestacionalizada modificada, se busca un filtro de Henderson para aplicárselo y obtener la tendencia final.

Se divide esta tendencia final entre la serie desestacionalizada final para encontrar la serie irregular final.

A partir de estos irregulares se estima el efecto de Semana Santa.

Este es el final de la primera iteración del programa.

Si Semana Santa y/o días laborables fue significativo, se ajusta la serie original por estos efectos para poder analizarla por los diferentes tipos de outliers por medio del módulo Reg-ARIMA descrito anteriormente en el capítulo II.

Después de ajustar la serie por los outliers necesarios y después de haber encontrado un modelo satisfactorio para la serie y de haberla extendido por medio de éste, se realiza

otra vez todo el procedimiento descrito aquí, (sin las estimaciones de efectos de calendario) para hallar la descomposición final de la serie.

Si los efectos de calendario no son significativos sólo se realiza una corrida del proceso X-11.

Para obtener la serie original corregida por valores extremos se reemplazan aquellos valores para los cuales el ponderador final fue cero (los últimos ponderadores de la segunda corrida) con el producto de la tendencia final, el factor estacional final, el componente de días laborables y el de Semana Santa, es decir, se le asigna el valor de 1 al factor irregular.

De igual forma, para la serie desestacionalizada se reemplaza el factor irregular con 1 donde los ponderadores finales fueron cero.

La serie de los irregulares finales ajustados por valores extremos será cero donde los ponderadores fueron cero.

4.9 Diagnósticos del Ajuste Estacional en X-12-ARIMA

4.9.1 Uso de las Estimaciones del Espectro para detectar Efectos Estacionales y de Días Laborables

En ocasiones se necesitan diagnósticos sensibles para determinar la presencia de efectos estacionales o de días laborables en las series. Esto es especialmente cierto para detectar efectos residuales en una serie que ya ha sido ajustada por efectos estacionales y de días laborables. Para una serie ajustada por la aplicación directa del X12-ARIMA, la estacionalidad residual puede ser resultado de inadecuados procedimientos de ajuste escogidos, o de efectos estacionales de estimación dificultosa en la serie, por ejemplo, efectos muy variables. Con un ajuste de series compuestas (como una serie nacional que sea la suma de series regionales), cuyo ajuste sea obtenido a partir de sus componentes, puede suceder que alguna serie componente no sea ajustada por efectos estacionales o de días laborables (una o ambas), debido a que los efectos no fueron detectados o a que no son estimables con veracidad en estos componentes. Esto puede generar efectos residuales.

Dado que los efectos estacionales y de calendario son aproximadamente periódicos, es natural el uso de la estimación del espectro para detectar su presencia. El periodo que define los efectos estacionales es un año. Por lo tanto, en series mensuales, los efectos estacionales pueden ser descubiertos a partir de la existencia de picos prominentes en el espectro en cualquiera de las frecuencias $k/12$ ciclos por mes, para $1 \leq k \leq 6$. En series trimestrales las frecuencias relevantes son $1/4$ y $1/2$ ciclos por trimestre.

Los efectos de días laborables mensuales tienen un periodo de 28 años (336 meses). Este largo periodo nos lleva a una sobreabundancia de frecuencias asociadas potencialmente con los picos de efectos de días laborables, ver McNUTHY Y HUFFMAN (1989). Sin embargo, Cleveland y Devlin (1982) demostraron, para series de flujo, que las frecuencias más sensibles son típicamente la de 0.348 ciclos por mes y la de 0.432 ciclos por mes.

La experiencia empírica de W. P. Cleveland mostró que los picos en el periodo bisemanal, o frecuencia .304 ciclos por mes ($.304 = 1 - 2 \times .348$) son también útiles indicadores de un efecto de días laborables.

Cada vez que se realiza un ajuste estacional (con o sin ajuste de días laborables), X12-ARIMA estima automáticamente dos espectros: (1) el espectro de las diferencias mensuales de la serie ajustada modificada por valores extremos de la tabla E2 (o de las primeras diferencias de los logaritmos de esta serie para un ajuste multiplicativo); y (2) el espectro del componente irregular final ajustado por valores extremos, de la tabla E3. La primera diferencia es un procedimiento crudo para eliminar la tendencia que es frecuentemente adecuado para habilitar a la estimación del espectro a que revele efectos estacionales y de días laborables significativos. El programa compara la amplitud espectral en las frecuencias estacionales y de días laborables descritas anteriormente con las amplitudes en las frecuencias vecinas superiores e inferiores graficadas. Si estas amplitudes vecinas son menores por un margen que depende del rango de todas las amplitudes del espectro, entonces las gráficas de los espectros estimados son mostrados junto a un mensaje de precaución que da el número de picos "visualmente significativos" encontrados en las frecuencias estacionales y de días laborables.

El mejor estimador del espectro conocido para la detección de componentes periódicos no aleatorios es el periodograma. Para una serie x_t , con $1 \leq t \leq N$, el periodograma, en unidades de decibel, tiene la fórmula

$$10 \log_{10} \left(\frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N x_t e^{i2\pi n t} \right|^2 \right) \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5.$$

En las frecuencias $\lambda = 2\pi n/N$, $1 \leq n \leq [N/2]$, siendo A_λ y B_λ los estimadores de mínimos cuadrados de los coeficientes de la regresión de x_t sobre $A \cos(2\pi \lambda t) + B \sin(2\pi \lambda t)$, el periodograma es igual a

$$10 \log_{10} \left\{ \frac{N}{2} (A_\lambda^2 + B_\lambda^2) \right\}.$$

El periodograma es uno de los dos estimadores del espectro en X12-ARIMA, el otro siendo el estimador autoregresivo del espectro, el cual, en unidades de decibel tiene la forma

$$10 \log_{10} \left\{ \frac{\sigma_m^2}{2\pi \left| 1 - \sum_{j=1}^m c_j e^{i2\pi j \lambda} \right|^2} \right\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5$$

Los coeficientes c_j son los de la regresión por mínimos cuadrados de $x_t - \bar{x}$ sobre $x_{t-j} - \bar{x}$, con $1 \leq j \leq m$, con $\bar{x} = N^{-1} \sum_{t=1}^N x_t$, y σ_m^2 es la variancia muestral de los residuales de la regresión resultantes. El estimador de espectro por default en X12-ARIMA por lo general usa $m=30$.

Mientras que este estimador es menos sensitivo a la presencia de componentes periódicos que el periodograma, sus gráficas son mucho más estables bajo cambios leves en el rango de datos usados o en el conjunto de las frecuencias escogidas para su evaluación. Las frecuencias en radianes usadas en las gráficas del espectro producidas por X12-ARIMA son $\lambda = k/120$, con $0 \leq k \leq 60$, excepto que las tres frecuencias de días laborables .304, .348 y .432 son utilizadas en lugar de sus vecinos más cercanos de la forma $k/120$.

El espectro de cualquier rango de datos dentro de la serie puede ser estimado.

El rango por default para los estimadores del espectro calculados automáticamente son los 8 años más recientes si la serie es al menos de esta longitud. Los usuarios de los datos están normalmente más preocupados acerca de los datos recientes, y 8 años de datos mensuales son comúnmente suficientes para obtener estimadores satisfactorios de los efectos de días laborables. Cuando el patrón de los efectos cambia substancialmente en el transcurso de la serie, los diagnósticos calculados para toda la serie nos lleva a tomar decisiones que son inapropiadas para los datos recientes.

4.9.2 Diagnósticos para la Estabilidad de los Ajustes Estacionales y las Tendencias

Un ajuste estacional (y de días laborables y Semana Santa) que deja efectos residuales estacionales y de calendario es generalmente calificado como insatisfactorio. Aun si no se detecta ningún efecto residual, el ajuste será insatisfactorio si los valores ajustados (o estadísticos importantes derivados, como los cambios porcentuales mensuales) llevan a revisiones grandes cuando éstos son recalculados al disponer de valores nuevos de la serie de tiempo. Por esto, tales inestabilidades en el ajuste pueden causar que se cuestione el significado de los ajustes, o la función de los ajustadores. Estas inestabilidades pueden ser, sin embargo, también debidas a opciones de especificaciones inapropiadas en el programa utilizado para producir el ajuste, en cuyo caso son evitables.

4.9.2.1 Revisiones Históricas

Este tipo de diagnóstico de estabilidad en X12-ARIMA considera las revisiones asociadas con el ajuste estacional continuo sobre un periodo de años.

La revisión básica calculada por el programa es la diferencia entre el ajuste más reciente para un mes, obtenido cuando este mes es el último de los datos, y un ajuste posterior basado en todos los datos futuros disponibles en el momento del análisis del diagnóstico. Revisiones similares se obtienen para los crecimientos mensuales, las estimaciones de la tendencia, y los crecimientos de la tendencia. El conjunto de estas revisiones, calculadas sobre un conjunto consecutivo de puntos del tiempo dentro de la serie, se llaman revisiones históricas. Se mostrará cómo éstas pueden sugerirnos el número de años de pronósticos a calcularse para la extensión de las series y cómo pueden indicarnos cuando las

estimaciones finales de la tendencia (de Henderson) son suficientemente estables para servirnos como alternativa a los ajustes estacionales (El Instituto de Estadística de Australia prefiere publicar estas estimaciones de la tendencia en lugar de los ajustes estacionales, porque éstas estimaciones presentan menos cambios de dirección y por lo tanto parecen ser más interpretables para los usuarios de los datos, especialmente cuando los ajustes estacionales son muy volátiles).

Para describir la variedad de revisiones que pueden ser obtenidas, introducimos una notación precisa. Suponga que se ha escogido un conjunto de opciones para la aplicación de X12-ARIMA a la serie sin ajustar Y_t , $1 \leq t \leq N$. Para cualquier mes t , y cualquier entero u en el intervalo $t \leq u \leq N$, sea A_{tu} el valor del ajuste estacional en el tiempo t obtenido con esas opciones cuando sólo los datos Y_t , $1 \leq t \leq u$, son usados en su cálculo (Y_{u+1}, \dots, Y_N son ignorados). Para un t dado, conforme u se incrementa, estos ajustes convergen a un valor ajustado final.

Cuando se utiliza el filtro estacional $3xm$, la convergencia se alcanza por lo general en alrededor de $1+m/2$ años. Las revisiones más grandes suelen ocurrir cuando u es el mismo mes que t , específicamente $u=t+12, t+24, \dots$, y un mes después, $u=t+1, t+13, t+25, \dots$. Al ajuste A_{tt} obtenido de los datos hasta el tiempo t se le llama ajuste concurrente. Este es usualmente el primer ajuste obtenido para el mes t . Llamamos a A_{tN} el ajuste más reciente. En el caso de una descomposición multiplicativa, la revisión del ajuste concurrente al ajuste más reciente para el mes t es calculado por el programa como un porcentaje del ajuste concurrente,

$$R_{tN}^A = 100 \times \frac{A_{tN} - A_{tt}}{A_{tt}}.$$

Para unos N_0 y N_1 dados, con $N_0 < N_1$, la secuencia R_{tN}^A , con $N_0 < t < N_1$, se llama *historia de revisión* del ajuste estacional del tiempo N_0 al tiempo N_1 . Se sugiere que N_0 sea al menos tan grande como la longitud efectiva del filtro estacional usado, $12(2+m)$. Debería ser suficientemente grande para la estimación razonable de cualquier ajuste de días laborables y de semana santa a ser realizado.

Los cambios porcentuales mensuales o trimestrales,

$$\Delta\% A_{t|\mu} = 100 \times \frac{A_{t|\mu} - A_{t-1|\mu}}{A_{t-1|\mu}},$$

son frecuentemente tan importantes como el ajuste estacional. X12-ARIMA puede producir revisiones históricas para ellos:

$$R_{t|N}^{\Delta\% A} = \Delta\% A_{t|N} - \Delta\% A_{t|t} \quad \text{con} \quad N_0 < t < N_1.$$

El programa también calcula las cantidades análogas para las tendencias finales de Henderson $T_{t|\mu}$ y para sus cambios porcentuales mensuales o trimestrales $\Delta\% T_{t|\mu}$. Estas historias se denotan por $R_{t|N}^T$ y $R_{t|N}^{\Delta\% T}$, con $N_0 < t < N_1$. (Nótese que un N_0 un poco más grande se requiere para las revisiones históricas de la tendencia, dado que la longitud efectiva de los filtros de tendencia es 1 ó 2 años mayor que los filtros del ajuste).

4.9.3 Comparación de Modelos

Recordemos que el programa realiza una secuencia de corridas en rangos crecientes de datos dentro de la serie. Iniciando de un segmento inicial de la serie, los rangos crecen con cada nueva corrida por la adición de una observación hasta que la serie se concluye.

4.9.3.1 Pronósticos Fuera de la Muestra

Para obtener información acerca del comportamiento de los pronósticos de un modelo, los datos disponibles de la serie de tiempo fuera de cada rango pueden ser vistos como datos futuros a ser pronosticados por un modelo ajustado hasta el rango descrito. Estos pronósticos pueden ser comparados a los valores reales de la serie o, a los valores ajustados por outliers, para los valores identificados de esta forma. Como una opción, el programa X12-ARIMA calcula los errores de pronóstico fuera-de-la-muestra y los almacena para un análisis posterior, junto con sus sumas de cuadrados acumuladas. Cuando se dispone de los errores de pronóstico de dos modelos, la secuencia de las diferencias entre las sumas de cuadrados de los errores pueden ser un diagnóstico efectivo de selección de modelo. Demos ahora una descripción detallada del diagnóstico.

Suponga que estamos interesados en el pronóstico con horizonte h (periodos hacia delante) de la serie de tiempo Y_t , $1 \leq t \leq N$. Suponga que se ha propuesto un modelo regARIMA para la serie transformada $y_t = f(Y_t)$. Sea N_0 un número menor que $N-h$ y que sea suficientemente grande para que los datos y_t , $1 \leq t \leq N$ puedan conducirnos a estimadores razonables de los coeficientes del modelo. Para cada t en $N_0 \leq t \leq N-h$, sea $y_{t+h|t}$ el pronóstico de y_{t+h} obtenido estimando el modelo regARIMA utilizando sólo los datos y_s , $1 \leq s \leq t$ y usando este modelo estimado para pronosticar h periodos a partir del tiempo t . Entonces el pronóstico fuera de la muestra de h periodos de Y_{t+h} es $Y_{t+h|t} = f^{-1}(y_{t+h|t})$. Definimos el error de pronóstico asociado por $e_{t+h|t} = Y_{t+h} - Y_{t+h|t}$ si todos los regresores de outliers (Cambios de Nivel, Valores Extremos y Cambios de Nivel) en el modelo regARIMA de la serie completa y_1, \dots, y_N tienen el valor cero en el tiempo $t+h$.

En caso contrario, se define $e_{t+h|t} = f^{-1}(\bar{y}_{t+h}) - Y_{t+h|t}$, donde \bar{y}_{t+h} es obtenido sustrayendo de y_{t+h} todos éstos regresores. El diagnóstico principal calculado por el programa es la secuencia de los errores cuadráticos acumulados de los pronósticos fuera de la muestra,

$$SS_{h,M} = \sum_{t=N_0}^M e_{t+h|t}^2, \quad M = N_0, \dots, N-h$$

Suponga que hay dos modelos competidores, Modelo 1 y Modelo 2, por errores de pronóstico $e_{t+h|t}^{(1)}$ y $e_{t+h|t}^{(2)}$ y con sumas $SS_{h,M}^{(1)}$ y $SS_{h,M}^{(2)}$ respectivamente. Entonces graficamos una versión estandarizada de las diferencias $SS_{h,M}^{(1)} - SS_{h,M}^{(2)}$ definidas por

$$SS_{h,M}^{1,2} = \frac{SS_{h,M}^{(1)} - SS_{h,M}^{(2)}}{SS_{h,N-h}^{(2)} / (N-h-N_0)} \quad (4.1)$$

contra M , para $M = N_0, \dots, N-h$. La fórmula recursiva

$$SS_{h,M+1}^{1,2} = SS_{h,M}^{1,2} + \frac{(e_{M+1+h|M+1}^{(1)})^2 - (e_{M+1+h}^{(2)})^2}{SS_{h,N-h}^{(2)} / (N-h-N_0)}, \quad M = N_0, \dots, N-h-1,$$

muestra que sobre intervalos de valores de M donde la gráfica de (4.1) crece, el comportamiento de los pronósticos del Modelo 2 es mejor; donde ésta cae, el Modelo 1 es mejor; y donde ésta no tiene una dirección general, ningún comportamiento de los pronósticos domina. El denominador en (4.1) nos proporciona una escala para la interpretación de saltos en la gráfica. El diagnóstico tiene la importante virtud de no requerir el supuesto de que cualquiera de los modelos a ser comparado es correcto.

4.9.3.2 Historias AIC

Suponga que se ha utilizado el criterio AIC para decidir entre dos modelos para Y_1, \dots, Y_N con estadísticos AIC $AIC_{N|d+sD}^{(1)}$ y $AIC_{N|d+sD}^{(2)}$. Entonces la preferencia se determina por el signo de la diferencia

$$\begin{aligned} AIC_{N|d+sD}^{1,2} &= AIC_{N|d+sD}^{(1)} - AIC_{N|d+sD}^{(2)} \\ &= 2 \left\{ \hat{L}_{N|d+sD}^{(2)} - \hat{L}_{N|d+sD}^{(1)} \right\} + 2 \left\{ m^{(1)} - m^{(2)} \right\} \end{aligned}$$

donde $\hat{L}_{N|d+sD}^{(i)}$ denota el valor máximo del logaritmo de la función de verosimilitud y $m^{(i)}$ el número de parámetros estimados en el i -ésimo modelo, $i=1,2$. Frecuentemente se desea saber algo acerca de la estabilidad de la elección del modelo. En la situación clásica en la que el Modelo 1 es una versión contraída del Modelo 2, bajo el supuesto de que el Modelo 1 tiene la forma correcta, la distribución de $2 \left\{ \hat{L}_{N|d+sD}^{(2)} - \hat{L}_{N|d+sD}^{(1)} \right\}$ para una muestra grande es χ^2 con $m^{(2)} - m^{(1)}$ grados de libertad, de la cual se puede calcular un valor de probabilidad para $AIC_{N|d+sD}^{1,2}$. Sin embargo, los supuestos requeridos por este método son muy restrictivos. La opción de las historias de AIC en X12-ARIMA ofrece un diagnóstico más versátil de la estabilidad de la selección de modelos por el mínimo AIC. Para cada modelo, la secuencia de los valores AIC reestimados para los periodos de datos Y_1, \dots, Y_M , con $N_0 \leq M \leq N$ pueden ser obtenidos. A partir de ellos, la secuencia de las diferencias AIC

$$AIC_{M|d+sD}^{1,2} = AIC_{M|d+sD}^{(1)} - AIC_{M|d+sD}^{(2)}, \quad N_0 \leq M \leq N$$

puede ser calculada y examinada para la consistencia de signo.

4.9.4 Estadísticas de Calidad del Ajuste Estacional

En el proceso X-11, dentro de la etapa F, se presentan once estadísticas que permiten evaluar la calidad del ajuste estacional. El cálculo y la justificación de las mismas están detallados en LOTHIAN Y MORRY (1978). Estas estadísticas varían entre 0 y 3, pero se aceptan sólo los valores inferiores a 1. Adicionalmente se construye un indicador sintético de la calidad de la desestacionalización por combinación lineal de esas once estadísticas. Las estadísticas son las siguientes:

- **M1:** Es difícil identificar y extraer un componente estacional si es muy fuerte la influencia del componente irregular en la evolución de la serie. Esta estadística M1 evalúa la contribución del irregular a la varianza total. LOTHIAN Y MORRY han demostrado que, para una serie mensual, el retardo 3 es el que permite la mejor comparación de las contribuciones respectivas de los componentes irregular y estacional. La estadística M1 se define así:

$$M1 = 10 \times \frac{I_3^2 / \bar{O}_3^2}{1 - P_3^2 / \bar{O}_3^2}$$

Esta estadística se considera aceptable si no es superior al 10% (M1 se normaliza con un factor 10).

- **M2:** Se calcula esta estadística con la contribución del componente irregular a la varianza de la serie bruta previamente desestacionalizada. Esta estadística está definida así:

$$M2 = 10 \times \frac{\text{Contribución}(I)}{1 - \text{Contribución}(P)}$$

Esta estadística es considerada aceptable si no es superior al 10% (se normaliza con un factor 10).

- **M3:** X-11 estima sucesivamente cada uno de los componentes para obtener una desestacionalización correcta. En particular, es deseable que (cuando se hace la extracción de la tendencia-ciclo) no sea muy importante la contribución del irregular a la evolución de la estimación provisional de la serie desestacionalizada.

En caso contrario, es difícil separar esas dos componentes. La estadística M3 evalúa esa contribución con la razón I/\bar{C} . Se obtiene así:

$$M3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{I}{\bar{C}} - 1 \right)$$

- **M4:** Una de las hipótesis de base que condiciona la validez de las pruebas de Fisher que se hacen en el transcurso del tratamiento X-11, es que el componente irregular sea aleatorio. La estadística M4 prueba la presencia de autocorrelación con la duración media de las secuencias (ADR, "Average Durations of Runs") del irregular, según la siguiente fórmula:

$$M4 = \frac{\left| \frac{n-1}{ADR} - \frac{2(n-1)}{3} \right|}{2.577 \times \sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$$

En donde n es el número total de observaciones de la serie.

- **M5:** El valor MCD , evalúa el número de meses que son necesarios para que las variaciones absolutas del componente tendencia-ciclo tengan mayor importancia que las del componente irregular. Esta estadística permite entonces comparar la importancia de los componentes de tendencia e irregular.

El MCD es el número de meses k tal que: $I_j/\bar{C}_j \leq 1$ para todo $j \geq k$. El valor que se emplea aquí utiliza la siguiente interpolación lineal:

$$MCD' = (k-1) + \frac{\frac{I_{k-1}}{\bar{C}_{k-1}} - 1}{\frac{I_{k-1}}{\bar{C}_{k-1}} - \frac{I_k}{\bar{C}_k}}$$

Generalmente se admite que para una serie mensual, este valor no debe ser mayor a 6, lo que permite definir la estadística M5 de la siguiente forma:

$$M5 = \frac{MCD' - 0.5}{5}$$

- **M6:** X-11 suaviza una estimación del componente irregular para extraer el componente estacional, por ejemplo, con un promedio móvil 3x5. Si las evoluciones anuales del componente irregular son débiles con respecto a las evoluciones anuales del componente estacional (la razón I/S es baja), el promedio 3x5 no es lo bastante flexible como para seguir el movimiento estacional. LOTHIAN (1978) demostró que este promedio 3x5 funciona bien para los valores de la razón I/S comprendida entre 1.5 y 6.5. La estadística M6 se deduce de esos valores y de la razón I/S de la tabla D10. Entonces se obtiene así:

$$M6 = \frac{1}{2.5} \times \left| \frac{I}{S} - 4 \right|$$

- **M7:** Esta estadística es la prueba combinada para la presencia de una estacionalidad identificable. Esta prueba compara la contribución relativa de la estacionalidad estable (F_s) y de la estacionalidad móvil (F_M) descritas en seguida:

La prueba de estacionalidad estable se trata de una prueba de análisis de varianza con un factor. Se dispone de k muestras (las estimaciones del componente estacional-irregular de cada uno de los $k=12$ meses o de los $k=4$ trimestres), cuyos tamaños son, respectivamente: n_1, n_2, \dots, n_k . Cada una de esas muestras corresponde a un nivel diferente del factor A que en este caso es la estacionalidad. Se supone que ese factor influye únicamente sobre la media de las distribuciones y no sobre la varianza de las mismas. Se trata entonces de una prueba de "comparación" de las k medias $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$. Si se considera que cada muestra es extraída de una variable aleatoria X_j , que sigue una distribución de media m_j y de desviación estándar σ , el problema es entonces probar las hipótesis:

$$H_0: m_1 = m_2 = \dots = m_k$$

$$H_1: m_p \neq m_q \text{ al menos para un par } (p, q)$$

En donde m_1, \dots, m_k son los coeficientes estacionales estables para los 12 meses, o los 4 trimestres.

La ecuación (llamada ecuación de análisis de varianza) se formula así:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^k (x_{i,j} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

o sea que: $S^2 = S_A^2 + S_R^2$.

La varianza total se descompone en: la varianza de las medias; la varianza debida al factor estacional; y una varianza residual. Asumiendo la hipótesis H_0 , se puede demostrar que la cantidad:

$$F_s = \frac{S_A^2 / (k-1)}{S_R^2 / (n-k)}$$

tiene una distribución F de Fisher $F(k-1; n-k)$, con $k-1$ y $n-k$ grados de libertad. Lo que permite formular la siguiente prueba: si la cantidad F_s es mayor que el valor crítico de la distribución de Fisher, se concluye que existe una influencia significativa del valor estacional (i.e. las medias mensuales o trimestrales no son todas iguales).

La prueba de estacionalidad móvil se funda en un modelo de análisis de varianza con dos factores (el mes o el trimestre y el año). Esta prueba fue propuesta por HIGGINSON (1975).

La prueba se apoya en la modelación de los valores del componente estacional-irregular, únicamente para los años completos:

$$|SI_{ij} - \bar{x}| = X_{ij} = b_i + m_j + e_{ij}$$

donde:

- m_j designa el efecto del mes o del trimestre j ($j=1, \dots, k$);
- b_i designa el efecto del año i ($i=1, \dots, N$), siendo N el número de años completos;
- e_{ij} representa el efecto residual.

La prueba se basa en la descomposición $S^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_R^2$, siendo:

- S^2 la suma total de cuadrados: $S^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (X_{ij} - X_{..})^2$ con $X_{..} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N X_{ij} / (kN)$;

- S_A^2 la suma de cuadrados "inter meses":

$S_A^2 = N \sum_{j=1}^k (X_{.j} - X_{..})^2$ con $X_{.j} = \sum_{i=1}^N X_{ij} / N$;

- S_B^2 la suma de cuadrados "inter años":

$S_B^2 = k \sum_{i=1}^N (X_i - X_{..})^2$ con $X_i = \sum_{j=1}^k X_{ij} / k$;

- S_R^2 la suma de cuadrados "residual":

$S_R^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k (X_{ij} - X_i - X_{.j} + X_{..})^2$.

Con la siguiente estadística se puede someter a prueba la hipótesis nula $H_0^*: b_1 = b_2 = \dots = b_N$, es decir la hipótesis de que la estacionalidad evoluciona a través de los años:

$$F_M = \frac{S_B^2 / (N-1)}{S_R^2 / (N-1)(k-1)}$$

la cual (bajo H_0^*) se distribuye como una F de Fisher con $(N-1)$ y $(k-1)(N-1)$ grados de libertad.

La estadística M7 se construye con los valores de la estadística de Fisher de la prueba paramétrica de estacionalidad estable (F_S) y de la prueba de estacionalidad móvil (F_M). El valor de la estadística es el siguiente:

$$T = \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right)^{1/2}$$

$$\text{con } T_1 = \frac{7}{F_S} \text{ y } T_2 = \frac{3F_M}{F_S}.$$

Los filtros estacionales empleados por funcionan óptimamente para estacionalidades constantes, pero si el movimiento estacional evoluciona en el transcurso de los años, las

estimaciones de los coeficientes estacionales pueden ser erróneos. Se consideran dos tipos de movimientos: aquel que resulta de variaciones casi aleatorias de corto plazo; y el movimiento debido a las evoluciones de más largo plazo. La importancia del primer tipo de movimientos puede ser evaluada con la media de las evoluciones absolutas anuales (M8 y M10). En cambio, la media simple de las evoluciones anuales da una idea de la importancia de un movimiento (lineal) sistemático (M9 y M11).

Las estadísticas M8, M9, M10 y M11 se calculan con los coeficientes estacionales normalizados. Se aplica al componente estacional final, la transformación: $S_i = (S_i - \bar{S}) / \sigma(S)$. El coeficiente estacional normalizado para la i -ésima observación del periodo j se escribe: $S_{i,j}$, $i=1, \dots, n_j$, $j=1, \dots, k$, en donde el número de periodos es $k=4$ en el caso trimestral y $k=12$ en el caso mensual.

- **M8:** La amplitud de las variaciones del componente estacional se evalúa con la variación absoluta media:

$$|\bar{\Delta S}| = \frac{1}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)} \sum_{j=1}^k \sum_{i=2}^{n_j} |S_{i,j} - S_{i-1,j}|.$$

Si el límite de tolerancia es del 10%; obtenemos:

$$M8 = 100 \times |\bar{\Delta S}| \times \frac{1}{10}.$$

- **M9:** Con un límite de tolerancia de 10% se obtiene:

$$M9 = \frac{10}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)} \sum_{j=1}^k |S_{n_j,j} - S_{1,j}|.$$

- **M10:** Es equivalente a la estadística M8, medida sobre los años recientes:

$$|\bar{\Delta S}|_R = \frac{1}{3k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=n_j-4}^{n_j-2} |S_{i,j} - S_{i-1,j}|.$$

$$\text{y} \quad M10 = 100 \times |\bar{\Delta S}|_R \times \frac{1}{10}.$$

- **M11**: Es equivalente a la estadística M9, medida sobre los años recientes:

$$M11 = \frac{10}{3k} \sum_{j=1}^k |S_{n_j-2,j} - S_{n_j-5,j}|.$$

Por último se calcula una estadística global de calidad que es una combinación lineal de las estadísticas M1 hasta M11. Se obtiene de la siguiente forma:

$$Q = \frac{10M1 + 11M2 + 10M3 + 8M4 + 11M5 + 10M6 + 18M7 + 7M8 + 7M9 + 4M10 + 4M11}{100}$$

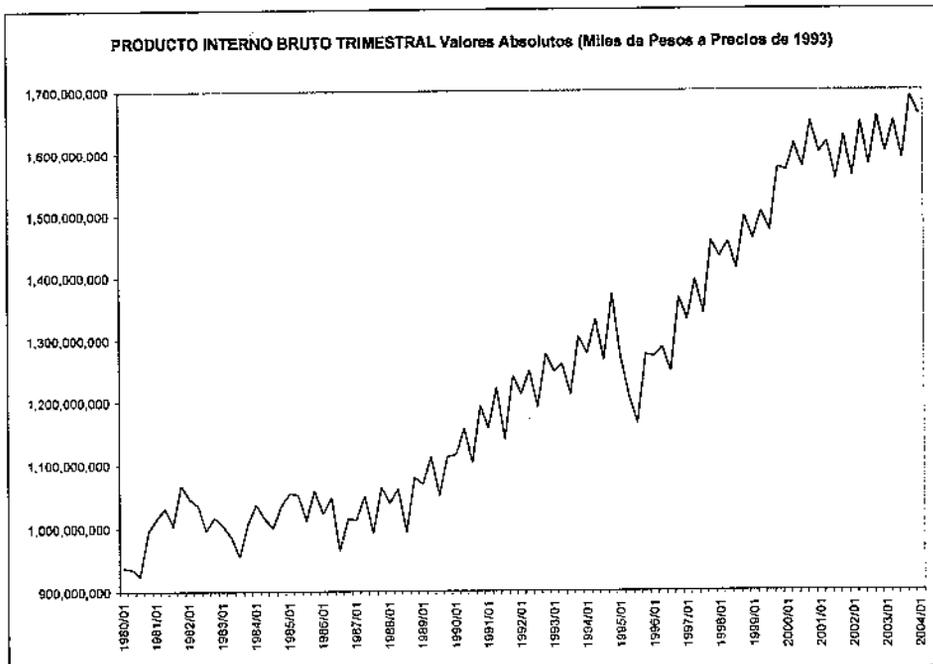
X-12-ARIMA calcula también una estadística global $Q2$, la cual se calcula de la misma manera que la estadística Q , pero sin tomar en cuenta la estadística $M2$.

Capítulo V: APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA A UNA SERIE REAL

En este capítulo analizaremos la serie de tiempo económica del Producto Interno Bruto de México aplicando la metodología descrita en los capítulos anteriores con el objetivo principal de desestacionalizar la serie. En primer lugar, se analizará si la serie requiere o no de ajustes previos de calendario y/o de outliers, utilizando las herramientas vistas en el capítulo II. Posteriormente se encontrará el mejor modelo ARIMA que describa a la serie para realizar los pronósticos necesarios, con la ayuda de los métodos analizados en el capítulo III. Finalmente, se aplicará la metodología vista en el capítulo IV para desestacionalizar la serie.

5.1 Presentación de la Serie

A continuación se muestra la serie del Producto Interno Bruto de México, los datos son trimestrales, comenzando en el primer trimestre de 1980 y terminando en el primer trimestre del 2004. Los datos están expresados en miles de pesos a precios de 1993. En la Tabla 5.1 se presentan los datos y en la Gráfica 5.1 se observa la serie.



Gráfica 5.1: PIB de México (1er Sem. 1980 - 1er Sem 2004).

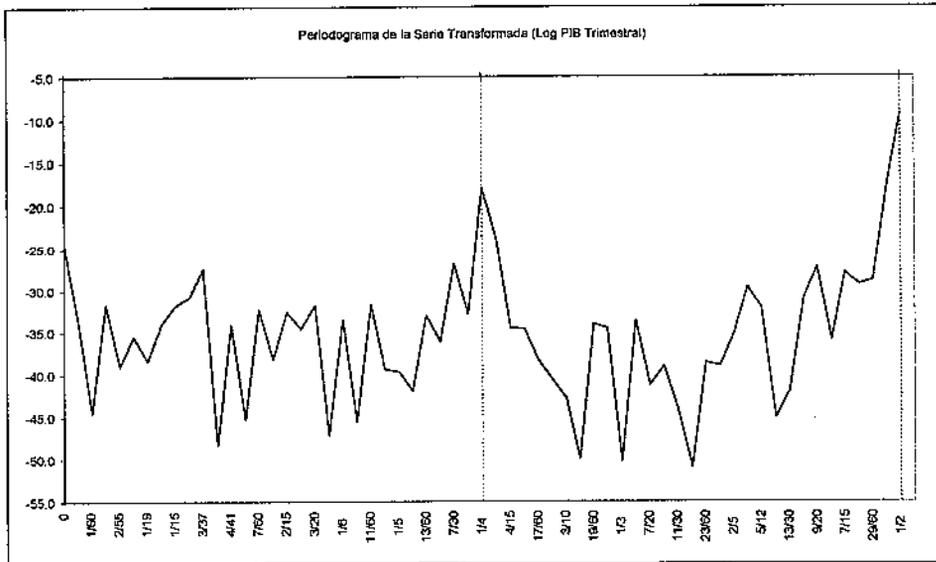
Aplicación de la Metodología a una Serie Real

PRODUCTO INTERNO BRUTO TRIMESTRAL					
Valores Absolutos					
(Miles de Pesos a Precios de 1993)					
PERIODO	PIB	PERIODO	PIB	PERIODO	PIB
1980/01	938,135,473	1988/01	1,038,644,468	1996/01	1,273,078,048
1980/02	935,461,213	1988/02	1,061,388,151	1996/02	1,287,401,277
1980/03	925,245,320	1988/03	993,273,989	1996/03	1,248,665,098
1980/04	995,587,268	1988/04	1,078,617,804	1996/04	1,366,292,008
1981/01	1,015,502,550	1989/01	1,068,782,832	1997/01	1,331,526,939
1981/02	1,031,140,564	1989/02	1,111,605,032	1997/02	1,395,247,461
1981/03	1,004,063,393	1989/03	1,050,907,032	1997/03	1,342,047,951
1981/04	1,067,220,882	1989/04	1,111,908,262	1997/04	1,457,278,334
1982/01	1,046,416,961	1990/01	1,115,169,614	1998/01	1,431,861,730
1982/02	1,036,684,784	1990/02	1,156,561,622	1998/02	1,455,594,109
1982/03	996,733,154	1990/03	1,102,849,467	1998/03	1,412,881,987
1982/04	1,016,645,993	1990/04	1,193,416,591	1998/04	1,496,902,413
1983/01	1,004,290,236	1991/01	1,157,545,393	1999/01	1,460,942,069
1983/02	986,439,942	1991/02	1,221,763,620	1999/02	1,504,374,752
1983/03	955,681,787	1991/03	1,140,121,717	1999/03	1,473,441,564
1983/04	1,007,248,324	1991/04	1,241,096,451	1999/04	1,575,240,003
1984/01	1,037,161,856	1992/01	1,211,845,485	2000/01	1,569,059,587
1984/02	1,015,362,063	1992/02	1,249,936,352	2000/02	1,614,588,108
1984/03	1,000,452,047	1992/03	1,191,295,606	2000/03	1,576,880,714
1984/04	1,035,536,327	1992/04	1,276,024,881	2000/04	1,648,860,834
1985/01	1,054,820,308	1993/01	1,248,725,336	2001/01	1,599,979,375
1985/02	1,052,453,707	1993/02	1,260,351,974	2001/02	1,617,802,538
1985/03	1,012,227,085	1993/03	1,211,579,717	2001/03	1,556,931,878
1985/04	1,058,455,295	1993/04	1,304,126,855	2001/04	1,626,989,107
1986/01	1,023,030,035	1994/01	1,277,838,033	2002/01	1,561,777,995
1986/02	1,047,877,706	1994/02	1,331,435,052	2002/02	1,648,073,906
1986/03	964,236,767	1994/03	1,267,386,307	2002/03	1,581,356,246
1986/04	1,014,174,474	1994/04	1,372,142,329	2002/04	1,657,088,724
1987/01	1,012,635,150	1995/01	1,272,241,550	2003/01	1,601,329,143
1987/02	1,050,061,130	1995/02	1,209,052,700	2003/02	1,649,943,739
1987/03	992,042,262	1995/03	1,165,580,183	2003/03	1,591,018,979
1987/04	1,064,327,502	1995/04	1,275,557,485	2003/04	1,690,011,028
				2004/01	1,661,053,324

Tabla 5.1: PIB Trimestral de México.

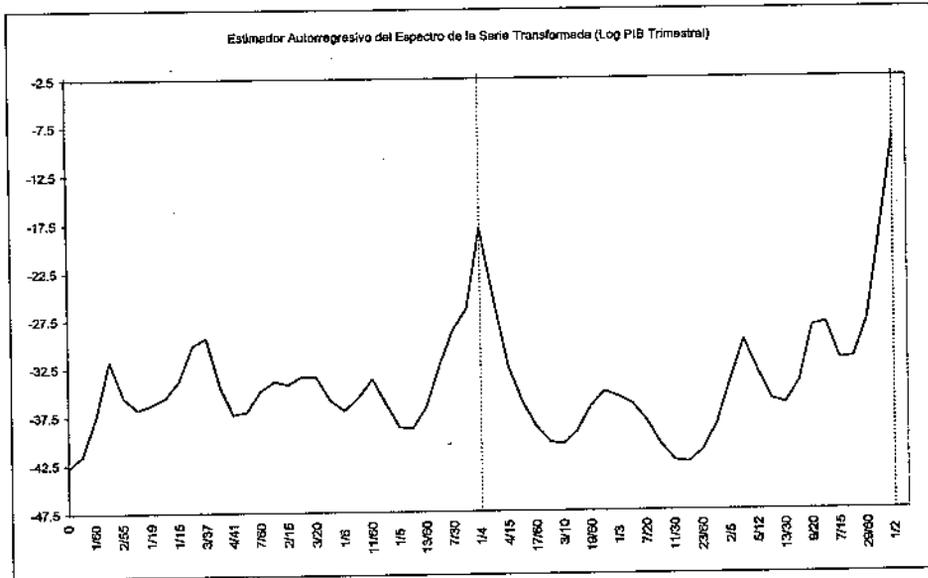
5.2 Análisis Básico de la Serie

De la gráfica 5.1 se puede observar que esta serie no es estacionaria, lo que implica que será necesario transformar la serie mediante el uso de diferencias, como se vio en el capítulo IV. A partir de esta gráfica no se puede observar si la serie requiere o no ajustes previos de calendario, pero lo que sí se puede ver es que existe un salto importante al principio del año de 1995, por lo que posiblemente sea necesario ajustar la serie por efectos de outliers en este periodo. Para realizar el análisis de la serie se utilizarán los datos transformados por logaritmos, esto con el objetivo de linealizar la tendencia y estabilizar la varianza de la serie. Analicemos ahora el espectro de la serie original transformada por logaritmos, para ello hacemos uso del periodograma y el estimador autorregresivo del espectro, detallados en el capítulo IV. Estos se presentan en las gráficas 5.2 y 5.3 respectivamente.



Gráfica 5.2: Periodograma del PIB.

En ambas gráficas se observa un valor muy alto del espectro para las frecuencias estacionales ($1/4$ y $1/2$), lo que indica que la serie presenta un fuerte comportamiento estacional.



Gráfica 5.3: Estimador Autorregresivo del Espectro del PIB.

Estos gráficos justifican la intención de desestacionalizar la serie del PIB, de la gráfica 5.1 se distingue un comportamiento periódico cada 4 meses, para el primer trimestre se observa constantemente una caída del PIB con respecto a un trimestre previo. Lo mismo sucede para el tercer trimestre.

5.3 Estimación y Ajuste de Efectos de Calendario y de Ouliers

En esta sección detreminaremos si la serie analizada requiere que se ajuste por días laborables y/o por Semana Santa. Asimismo, veremos si es necesario el ajuste por algún tipo de outlier. En primer lugar, incorporamos en el módulo reg-ARIMA las variables de días laborables y de Semana Santa, para observar si estos efectos son significativos. Para el caso de Semana Santa, si resulta ser significativo este efecto, se buscará el número w más significativo, es decir, el número de días en que la serie modifica su comportamiento antes del día de Pascua más representativo. Para la estimación de estos efectos se utilizó una descomposición multiplicativa. Los resultados fueron los siguientes:

Producto Interno Bruto Trimestral

C 15 Final irregular component regression

Irregular Regression Model
Trading Day + Easter[3]

Irregular Component Regression Span
From 1980.1 to 2004.1

OUTLIER DETECTION

From 1980.1 to 2004.1
Observations 97
Types AO only
Method add one
Critical |t| for AO outliers 3.80

Regression Model

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Trading Day			
Mon	-0.1786	0.08529	-2.09
Tue	0.0410	0.08179	0.50
Wed	0.0967	0.08158	1.18
Thu	0.2994	0.08504	3.52
Fri	-0.2311	0.09258	-2.50
Sat	0.0841	0.09271	0.91
*Sun (derived)	-0.1115	0.09301	-1.20
Easter[3]	-1.2496	0.11128	-11.23
Automatically Identified Outliers			
AO1984.2	-1.8790	0.28818	-6.52
AO1989.2	-1.4148	0.29783	-4.75
AO1995.2	-1.9891	0.28818	-6.90

*For full trading-day effects, the derived parameter estimate is obtained indirectly as minus the sum of the directly estimated parameters that define the effect.

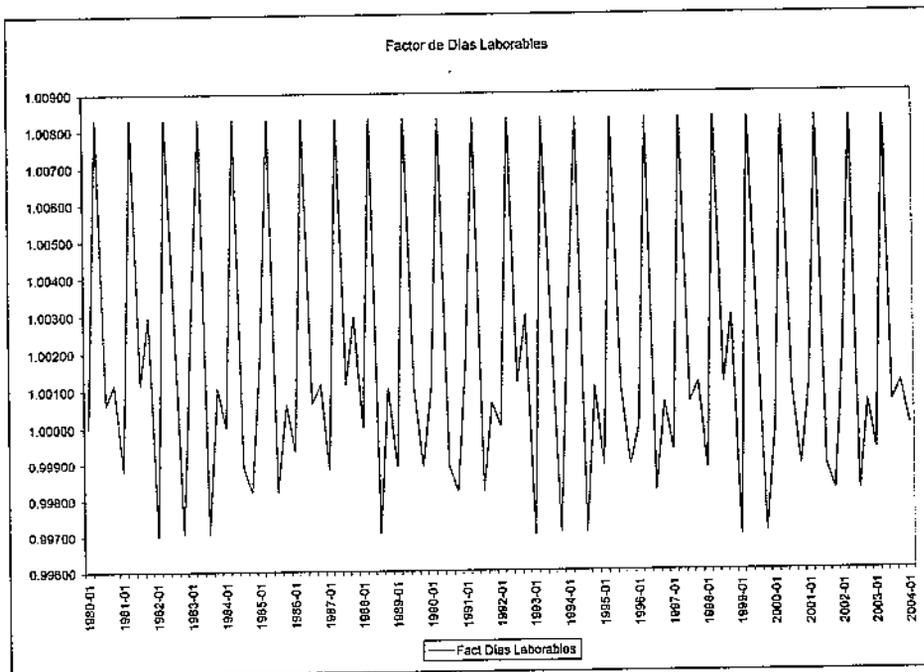
Chi-squared Tests for Groups of Regressors

Regression Effect	df	Chi-Square	P-Value
Trading Day	6	23.08	0.00

Variance 0.82133E-01

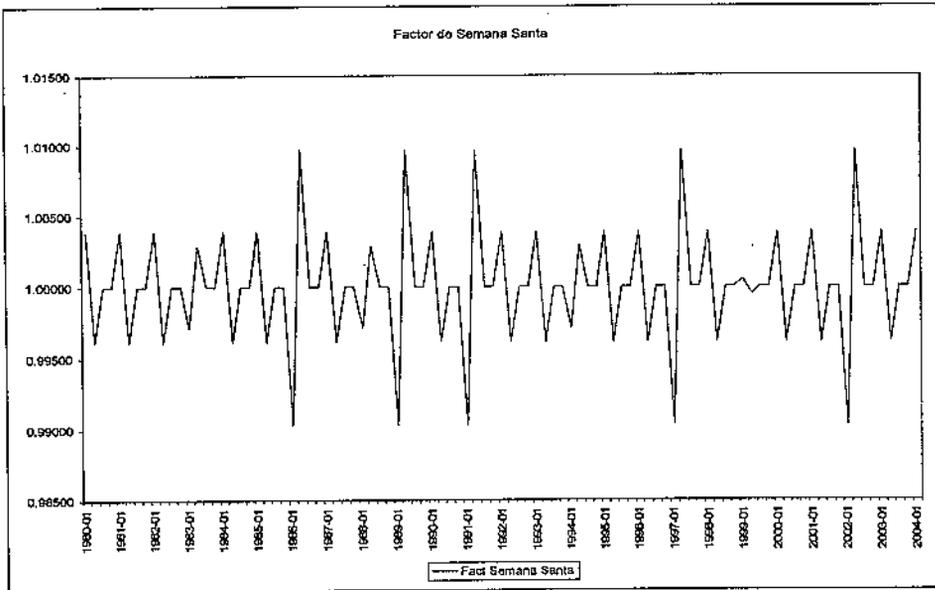
Tabla 5.2: Resultados de los Efectos de Días Laborables y de Semana Santa.

De la tabla 5.2 podemos observar que tanto el efecto de días laborables y de Semana Santa son significativos para el PIB, y el número de días antes del domingo de Pascua en que la serie empieza a cambiar su comportamiento es 3, esto nos indica que la actividad del PIB empieza a modificarse a partir del Viernes Santo. Como vimos en el capítulo II, este efecto tiene consecuencias para el primer y segundo trimestre, dependiendo en cuál de ellos caiga la Semana Santa. Los factores de días laborables, de Semana Santa y la combinación de estos dos se muestran en las gráficas 5.4, 5.5 y 5.6, respectivamente.

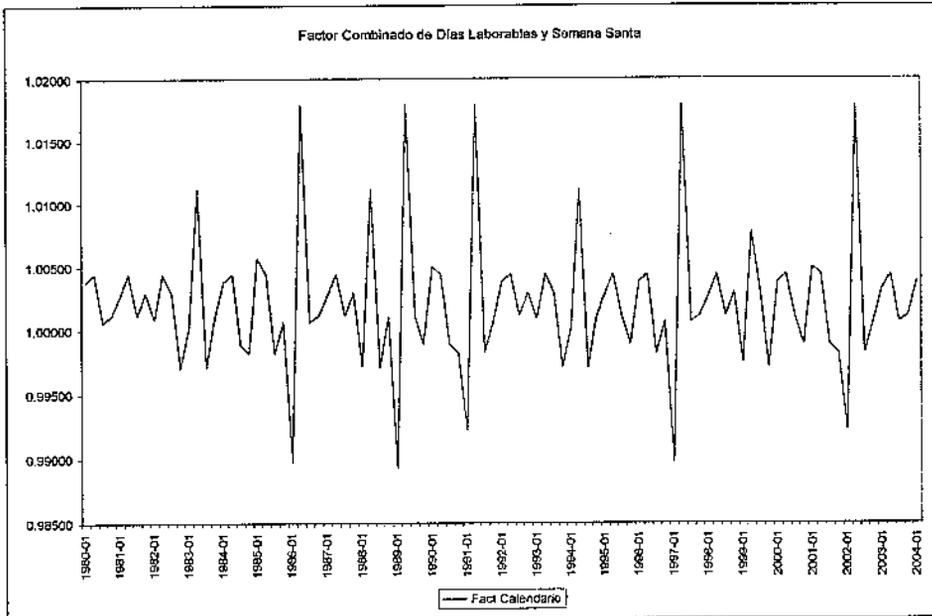


Gráfica 5.4: Factores de Días Laborables del PIB (estimación realizada conjuntamente con Semana Santa).

Cabe recordar que debido a que se realizó una descomposición multiplicativa de la serie, la serie tendrá que dividirse por estos factores para hallar la serie corregida. Es decir, un factor de 1 no afectará el valor del dato correspondiente.



Gráfica 5.5: Factores de Semana Santa del PIB (estimación realizada conjuntamente con Días Laborables).



Gráfica 5.6: Factores Combinados de Días Laborables y Semana Santa

Ahora analicemos la serie para detectar si requiere la incorporación de algún efecto de outlier. Para esto utilizaremos el método addone descrito en el capítulo II. Para el caso del análisis de la serie con ajustes tanto de Semana Santa como de días laborables, los resultados son los siguientes:

Producto Interno Bruto Trimestral			
Irregular Regression Model			
Trading Day + Easter[3]			
OUTLIER DETECTION			
From 1980.1 to 2004.1			
Observations 97			
Types AO, LS and TC			
Method add one			
Critical t for AO outliers		3.80	
Critical t for LS outliers		3.80	
Critical t for TC outliers		3.80	
Forward addition pass 1			

Robust root mse		1.50E-02	
Normal root mse		1.81E-02	

Outlier	t(AO)	t(LS)	t(TC)

LS1995.1	0.88	-4.49*	-0.85
LS1995.2	-4.40	-5.74*	-5.40
Add			
+LS1995.2		-5.74	
Regression Model			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value

Automatically Identified Outliers			
LS1995.2	-0.0765	0.01329	-5.76

Tabla 5.4 (Parte 1): Resultados de la Identificación Automática de Outliers para la serie del PIB

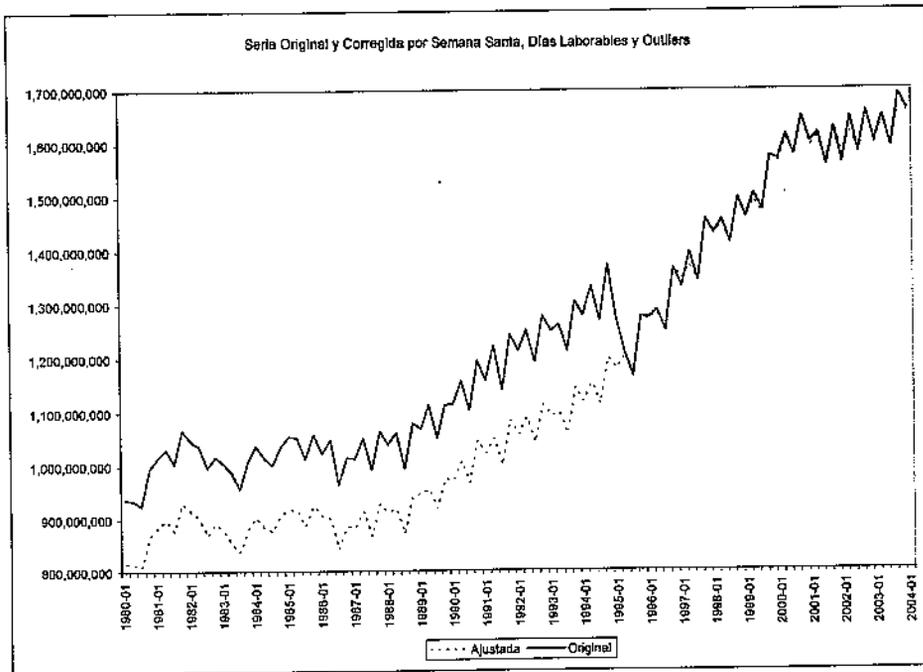
Con estos resultados (Tabla 5.4), confirmamos la necesidad de incluir algunas variables para corregir la caída de la serie a principios del año de 1995. Estas variables son:

Forward addition pass 2			
Robust root mse	1.46E-02		
Normal root mse	1.57E-02		
Outlier	t(AO)	t(LS)	t(TC)
AO1995.1	-4.72*	-4.72	-4.66
Add			
+AO1995.1	-4.72		
Regression Model			
Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Automatically Identified Outliers			
AO1995.1	-0.0584	0.01139	-5.13
LS1995.2	-0.1344	0.01611	-8.34
Forward addition pass 3			
Robust root mse	1.34E-02		
Normal root mse	1.39E-02		
Outlier	t(AO)	t(LS)	t(TC)
No more outliers identified			
Regression Model			
Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Automatically Identified Outliers			
AO1995.1	-0.0584	0.01139	-5.13
LS1995.2	-0.1344	0.01611	-8.34

Tabla 5.4 (Parte 2): Resultados de la Identificación Automática de Outliers para la serie del PIB

- En primer lugar, se incluirá un outlier aditivo ocurrido en el primer trimestre de 1995, que nos modelará el cambio brusco a la baja ocurrido en el PIB en este periodo.
- En segundo lugar, se incorporará un cambio de nivel o level shift ocurrido en el segundo trimestre de 1995, es decir una variable que capture la baja ocurrida en el PIB en ese periodo y que permaneció en ese nuevo nivel para los periodos subsecuentes.

Ya que tenemos los distintos efectos que serán corregidos previamente a la desestacionalización podemos estimar la serie corregida por los efectos de Semana Santa, Días Laborables, outlier additivo y cambio de nivel. Esta serie ajustada se exhibe en la gráfica 5.7. Esta nueva serie está lista para ser representada mediante un proceso ARIMA adecuado y así poder realizar los pronósticos deseados.



Gráfica 5.7: Serie Original y Corregida por Semana Santa, Días Laborables y Outliers.

En ocasiones, para las series trimestrales se omite la estimación del efecto de días laborables, ya que éste puede ser compensado entre los trimestres, debido al número de días que tiene cada uno de ellos. Generalmente para series mensuales este efecto es muy importante, a diferencia de las trimestrales. Por lo tanto, analizaremos paralelamente la serie sin considerar este efecto. Los resultados de la estimación del efecto de Semana Santa obtenidos sin estimar la variable de días laborables se muestra en la tabla 5.3.

Producto Interno Bruto Trimestral

C 15 Final irregular component regression

Irregular Regression Model
Easter[4]

Irregular Component Regression Span
From 1980.1 to 2004.1

OUTLIER DETECTION
From 1980.1 to 2004.1
Observations 97
Types AO only
Method add one
Critical |t| for AO outliers 3.80

No AO outliers identified

Largest outlier t-value : -3.67416 (AO1995.2)

Regression Model

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Easter[4]	-0.0131	0.00148	-8.88

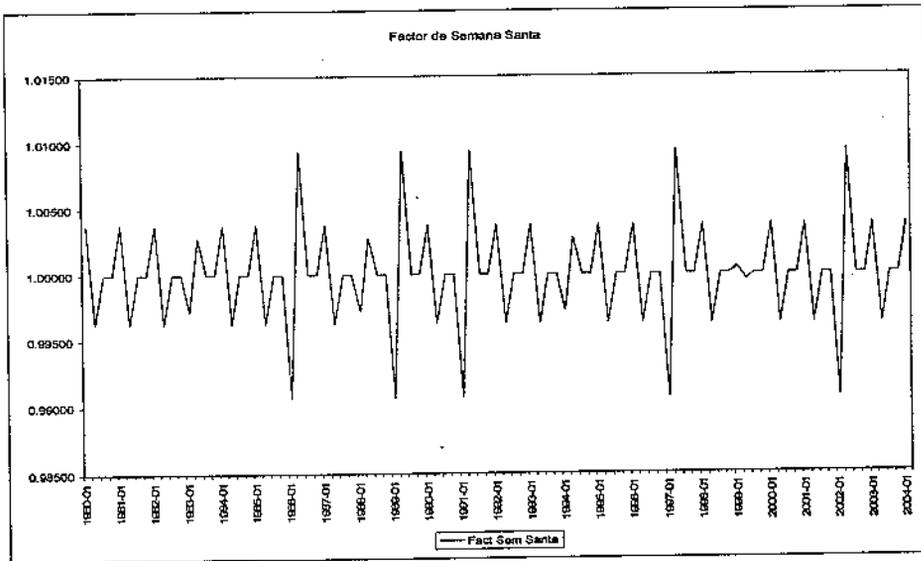
Variance 0.17225E-04

Tabla 5.3: Resultados del Efecto de Semana Santa, excluyendo el análisis de días laborables.

En esta última tabla se muestra que, en el caso del análisis excluyendo el efecto de días laborables, el número de días antes del domingo de Pascua, para el cual el comportamiento de la serie cambia, es ahora de 4. Esto es, el comportamiento se modifica a partir del Jueves Santo. Como se señaló en el caso anterior, este efecto tiene consecuencias para el primer y segundo trimestre, dependiendo en cuál de ellos caiga la Semana Santa. Los factores de de Semana Santa se muestran en la gráfica 5.8.

A continuación se realizará el mismo análisis que en el caso anterior para detectar automáticamente la presencia de outliers en la serie ajustada por el efecto de Semana Santa, los resultados se presentan en la tabla 5.4 de la página siguiente.

Aplicación de la Metodología a una Serie Real



Gráfica 5.8: Factores de Semana Santa (excluyendo el análisis de Días Laborables).

Producto Interno Bruto Trimestral

Irregular Regression Model
Easter[4]

OUTLIER DETECTION
From 1980.1 to 2004.1
Observations 97
Types AO, LS and TC
Method add one
Critical |t| for AO outliers 3.80
Critical |t| for LS outliers 3.80
Critical |t| for TC outliers 3.80

Forward addition pass 1

Robust root mse 1.54E-02
Normal root mse 1.84E-02

Outlier	t(AO)	t(LS)	t(TC)
TC1994.4	3.84	0.92	4.02*
LS1995.1	0.70	-4.51*	-0.99
LS1995.2	-4.27	-5.50*	-5.19
Add			
+LS1995.2		-5.50	

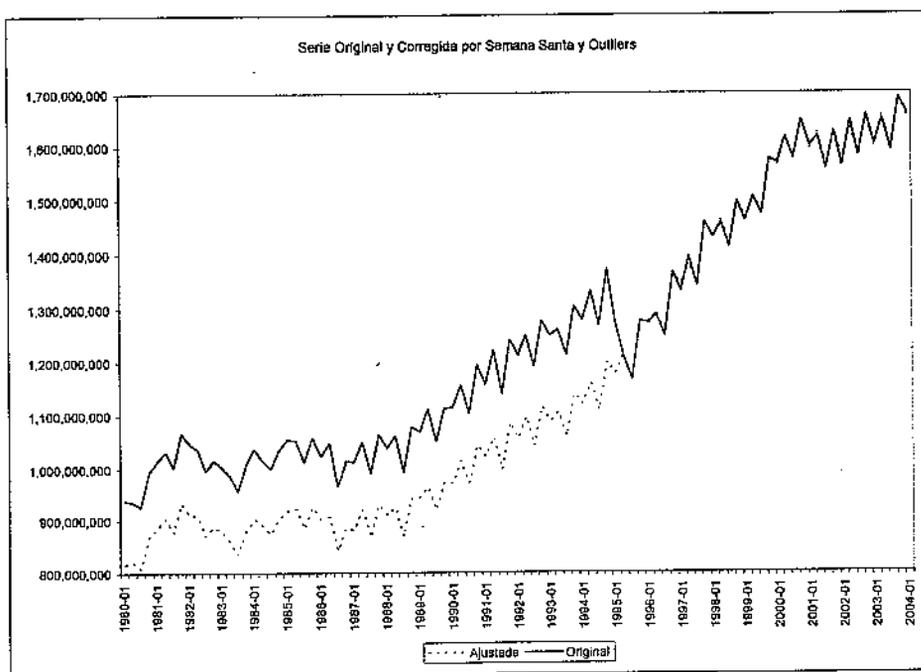
Tabla 5.4 (Parte 1): Identificación Automática de Outliers.

Regression Model			
Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Automatically Identified Outliers			
LS1995.2	-0.0761	0.01356	-5.61
Forward addition pass 2			
Robust root mse	1.45E-02		
Normal root mse	1.60E-02		
Outlier	t (AO)	t (LS)	t (TC)
AO1995.1	-4.89*	-4.89	-4.82
Add			
+AO1995.1	-4.89		
Regression Model			
Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Automatically Identified Outliers			
AO1995.1	-0.0601	0.01162	-5.17
LS1995.2	-0.1352	0.01643	-8.23
Forward addition pass 3			
Robust root mse	1.41E-02		
Normal root mse	1.42E-02		
Outlier	t (AO)	t (LS)	t (TC)
No more outliers identified			
Regression Model			
Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
Automatically Identified Outliers			
AO1995.1	-0.0601	0.01162	-5.17
LS1995.2	-0.1352	0.01643	-8.23

Tabla 5.4 (Parte 2): Identificación Automática de Outliers (excluyendo el análisis de Días Laborales).

Con los resultados de la gráfica 5.4 concluimos que las variables de outliers necesarias, independientemente de que se incluya o no el efecto de días laborales, son un outlier aditivo para el primer trimestre de 1995 y un cambio de nivel o level shift para el segundo trimestre de 1995.

Ahora que tenemos los efectos por los cuales será corregida la serie del PIB, podemos encontrar la serie que será utilizada para ser ajustada por el mejor modelo ARIMA en la siguiente sección. Esta serie se muestra en la gráfica 5.9.

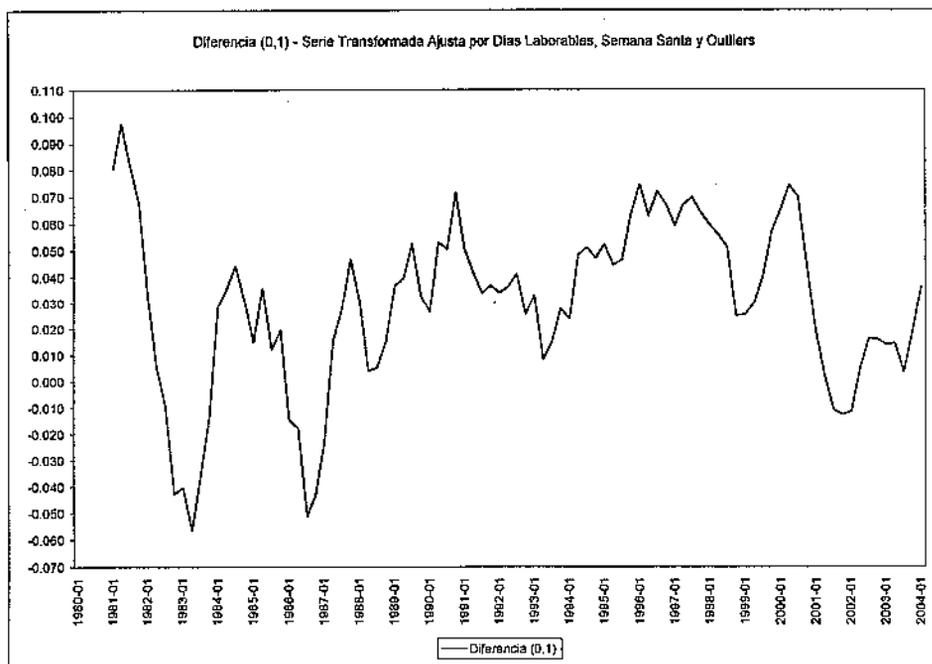


Gráfica 5.9: Serie Original y Corregida por Semana Santa y Outliers.

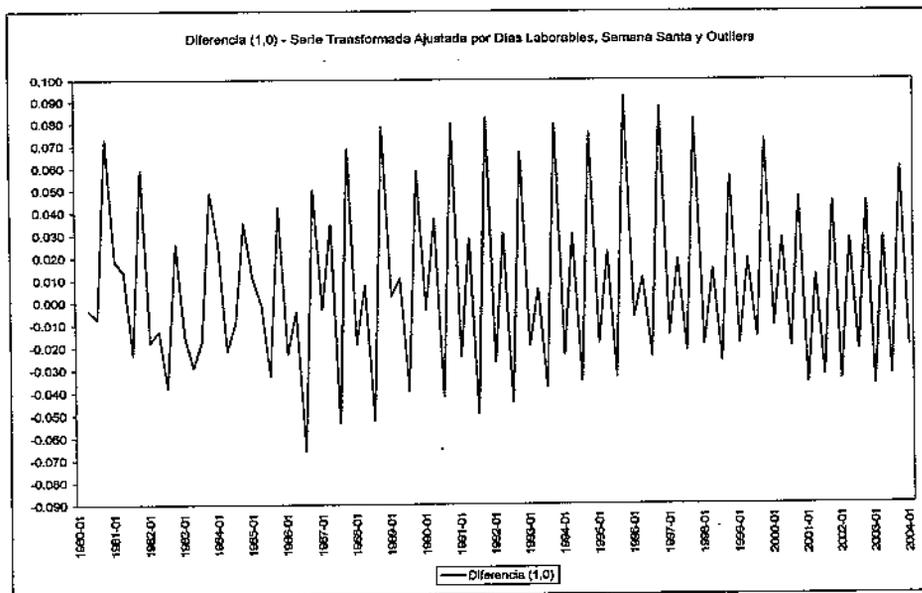
Examinando las gráficas 5.7 y 5.9 se podría decir, que el análisis que se realizará en la siguiente sección para los dos casos en los que hemos estado trabajando, no variará mucho entre las dos opciones, ya que se observa que las relaciones más importantes de la serie se mantienen en los dos formas de ajuste que se han hecho.

5.4 Identificación y Estimación del Modelo para la Serie Ajustada

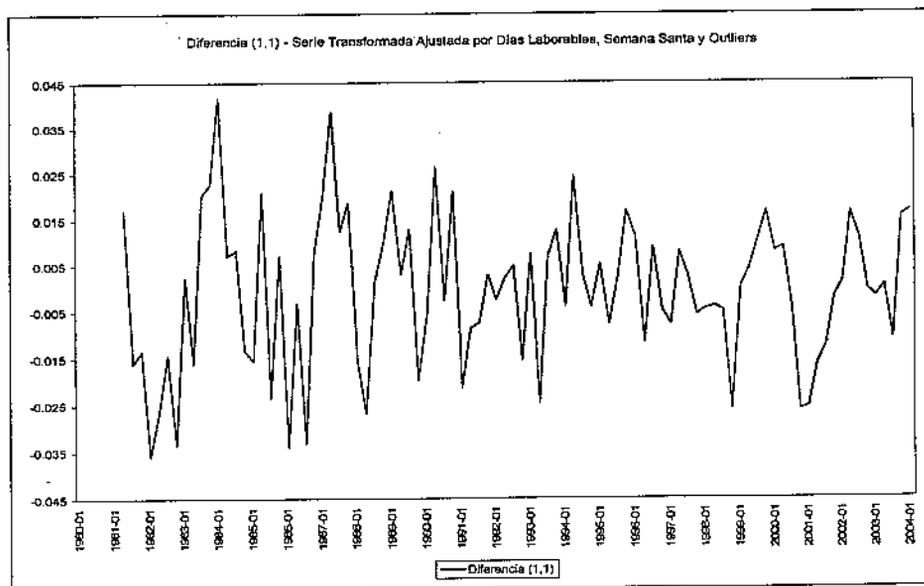
En esta sección haremos uso de las técnicas vistas en el capítulo III para hallar el mejor modelo ARIMA tanto para la serie que fue ajustada por días laborables, Semana Santa y Outliers como para la serie que únicamente fue ajustada por Semana Santa y Outliers. Se comenzará analizando para cada uno de los casos qué diferencia es necesaria para volver estacionaria la serie. Para el primer caso, se muestran en las gráficas 5.10, 5.11 y 5.12 las gráficas de las diferentes diferencias que se aplicaron a la serie. Como se señaló en el capítulo III, en la práctica generalmente no son necesarias diferencias mayores a dos para lograr la estacionariedad de las series. En nuestro caso se utilizaron diferencias ordinarias y estacionales de no más de un grado.



Gráfica 5.10: Diferencia (0,1) de la Serie Transformada Ajustada por Días Laborables, Semana Santa y Outliers.

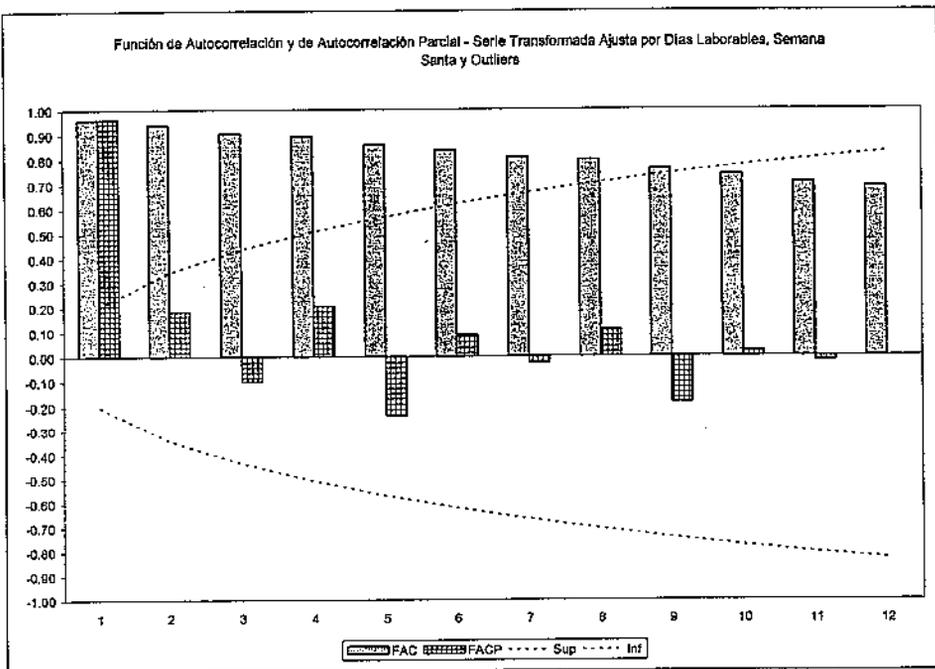


Gráfica 5.11: Diferencia (1,0) de la Serie Transformada Ajustada por Días Laborables, Semana Santa y Outliers.



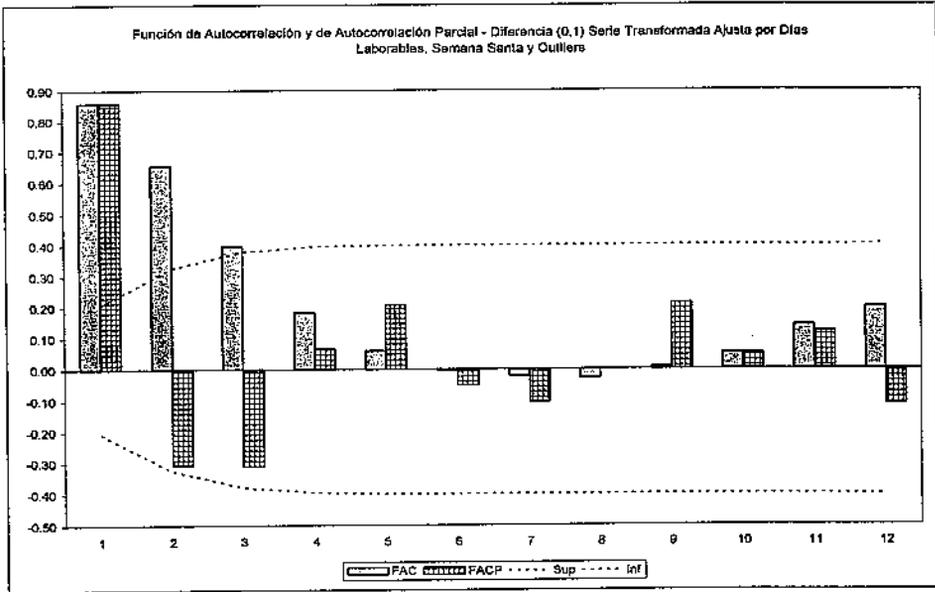
Gráfica 5.12: Diferencia (1,1) de la Serie Transformada Ajustada por Días Laborables, Semana Santa y Outliers.

Estudiando estas últimas gráficas podemos concluir que aplicando la diferencia (0,1) no se logra el objetivo de volver estacionaria a la serie. Por el contrario, tanto la diferencia (1,0) como la diferencia (1,1) muestran un comportamiento estacionario. Sin embargo, la diferencia (1,0) presenta un comportamiento estacional muy marcado, que quizá sea oportuno eliminar. Veamos ahora las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para confirmar estas ideas. En las gráficas 5.13, 5.14, 5.15 y 5.16 se muestran estas funciones para la serie transformada, la diferencia (0,1), la diferencia (1,0) y la diferencia (1,1), respectivamente.

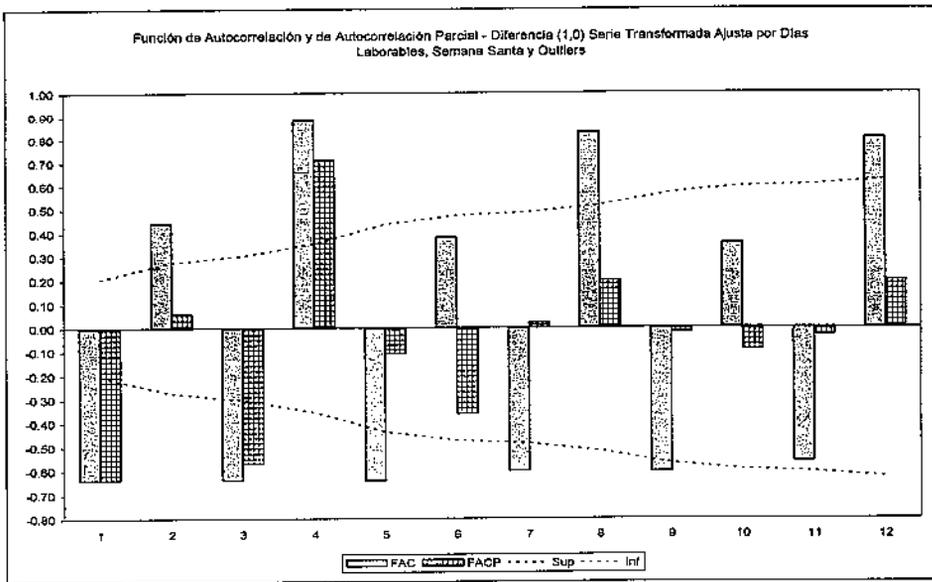


Gráfica 5.13: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Serie Original Transformada.

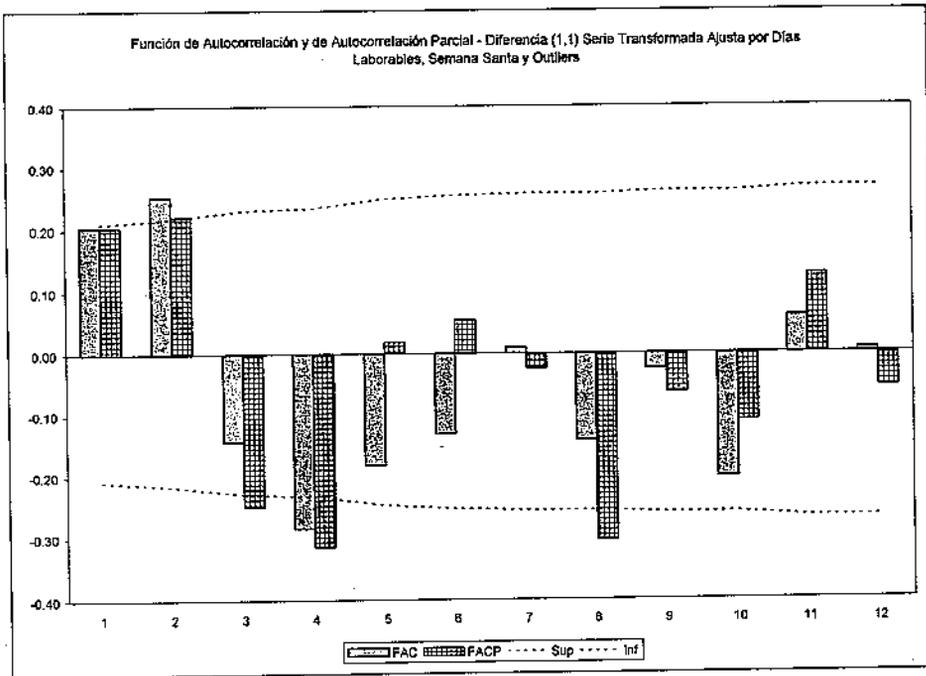
Analizando estas gráficas confirmamos la idea de que la diferencia (1,0) no es óptima, se observa tanto en la función de autocorrelación como en la de autocorrelación parcial un comportamiento estacional muy fuerte, estas dos funciones tienen un decaimiento muy lento en retrasos estacionales.



Gráfica 5.14: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Diferencia (0,1).



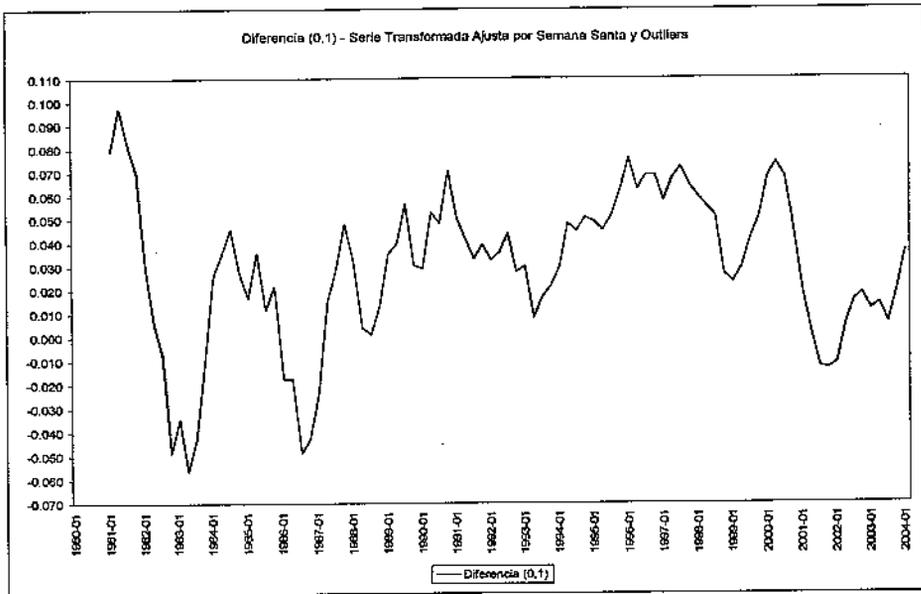
Gráfica 5.15: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Diferencia (1,0).



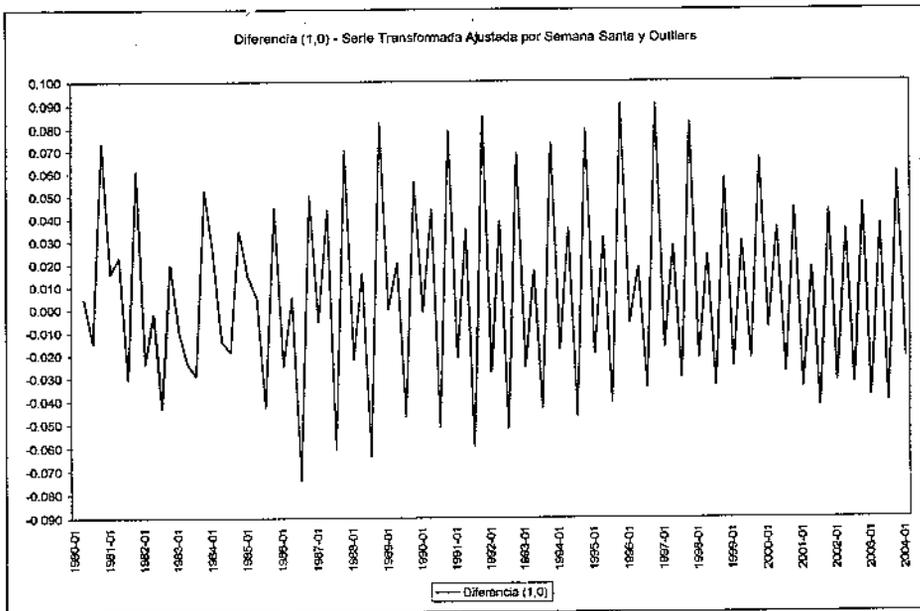
Gráfica 5.16: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Diferencia (1,1).

Utilizando la gráfica 5.16 podemos ver que existe una correlación muy fuerte en la gráfica de autocorrelación entre los datos, y los retrasos 1 y 2 de ellos mismos. Esto nos indica que posiblemente se requiera incluir en el modelo 2 parámetros de promedios móviles o autorregresivos ordinarios. También, en esta misma gráfica se observa una correlación grande entre los datos y sus retrasos de orden 4 en la función de autocorrelación, mientras que, en la función de autocorrelación parcial se observa una correlación grande entre los datos y sus retrasos de orden 4 y 8, lo que señala que existe una relación estacional importante. Por estas razones, quizá sea necesario introducir un parámetro de promedio móviles estacional ó 2 autorregresivos estacionales. Por lo tanto, un posible modelo ARIMA que ajuste correctamente a la serie analizada sea el $(0,1,2)(0,1,1)$.

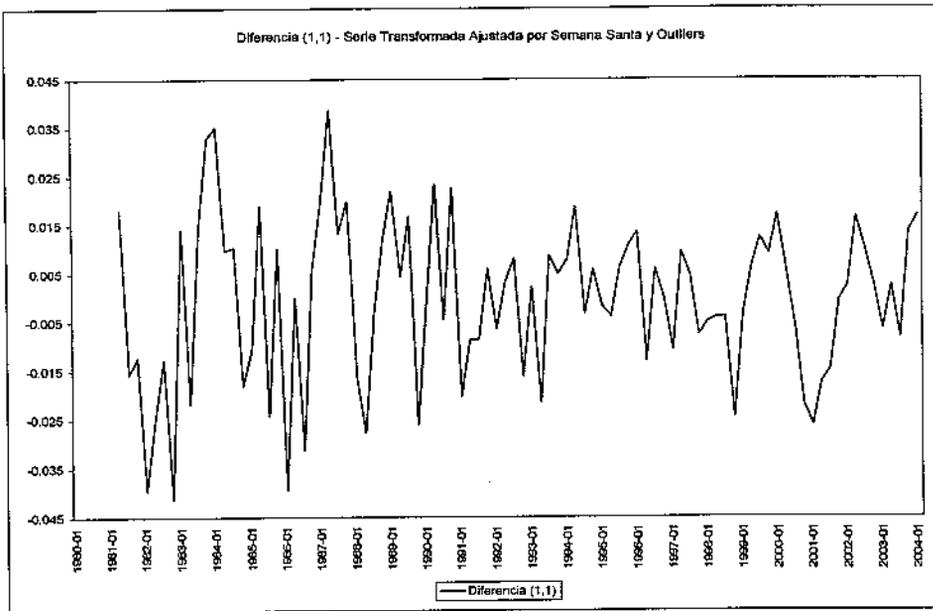
Para el caso en el que se omitió el ajuste por días laborables, se llegaron a las mismas conclusiones. Los resultados se muestran a continuación en las gráficas 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 y 5.23.



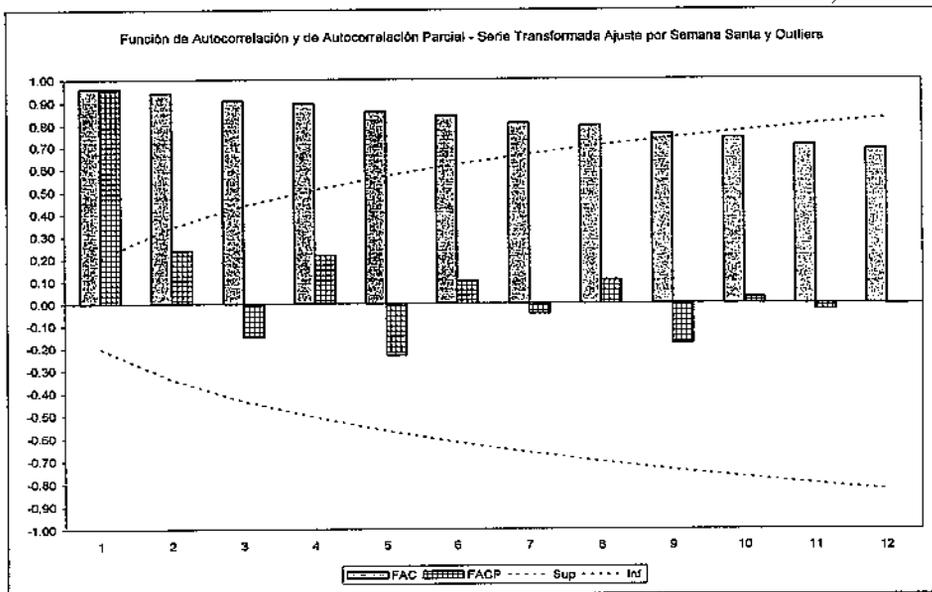
Gráfica 5.17: Diferencia (0,1) de la Serie Transformada Ajustada por Semana Santa y Outliers.



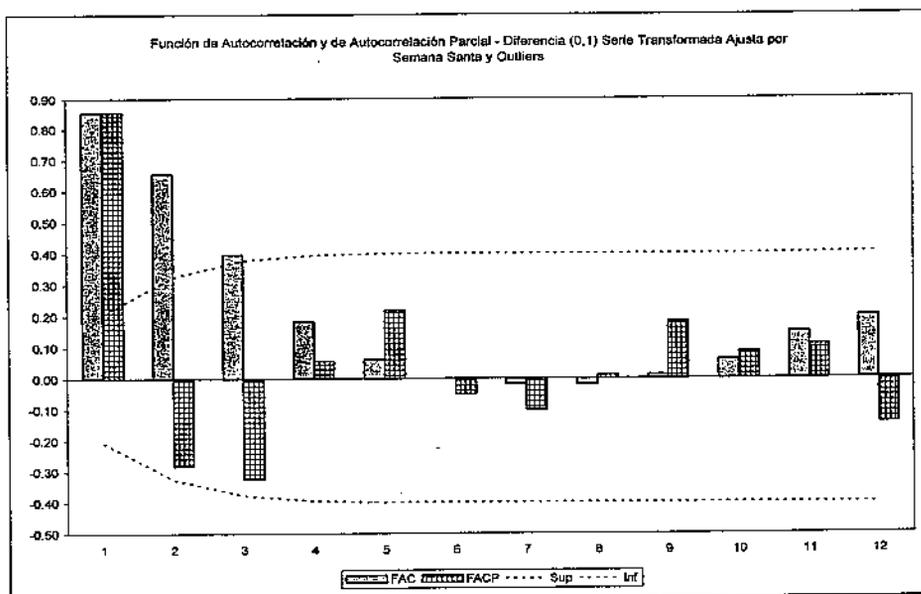
Gráfica 5.18: Diferencia (1,0) de la Serie Transformada Ajustada por Semana Santa y Outliers.



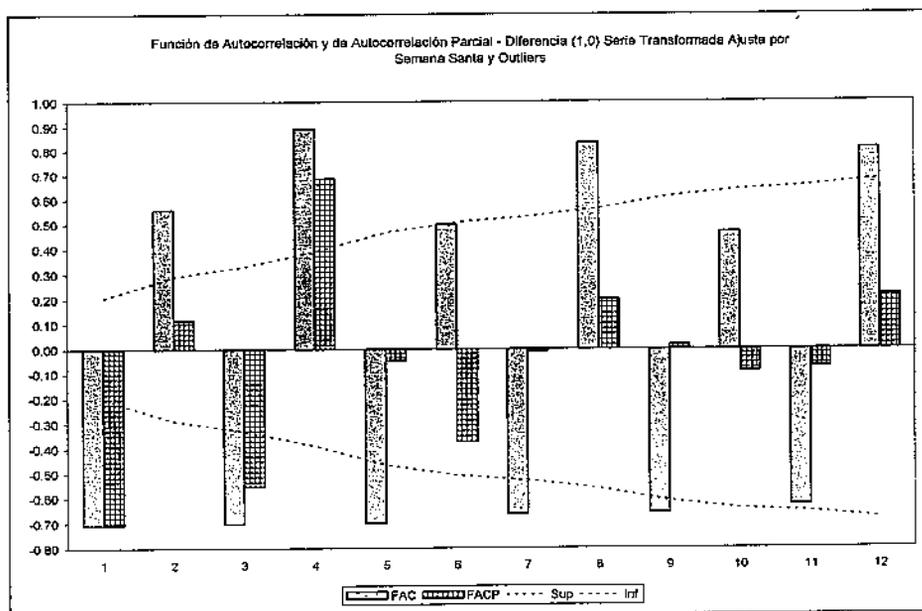
Gráfica 5.19: Diferencia (1,1) de la Serie Transformada Ajustada por Semana Santa y Outliers.



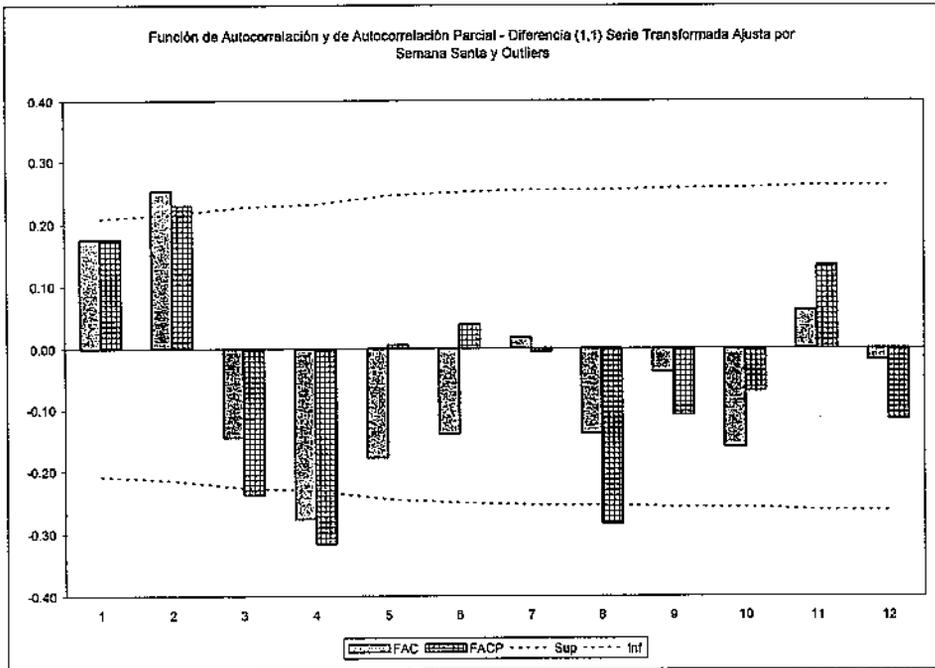
Gráfica 5.20: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Serie Original Transformada.



Gráfica 5.21: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Diferencia (0,1).



Gráfica 5.22: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Diferencia (1,0).



Gráfica 5.23: Función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial de la Diferencia (1,1).

5.5 Diagnósticos de los Modelos Identificados y Pronósticos

Con los resultados de la sección anterior podemos ahora estimar el modelo identificado y checar si este modelo es el adecuado. De lo contrario, se requerirá hallar otro que cumpla con los requisitos expuestos en el capítulo III. En primer lugar veamos los resultados de la tabla 5.5, obtenidos para el modelo propuesto, en el caso de la serie que incorpora el ajuste por días laborables.

Producto Interno Bruto Trimestral

C 15 Final irregular component regression

Irregular Regression Model
Trading Day + Easter[4]

MODEL DEFINITION

Transformation
Log(y)

Regression Model
AO1995.01 + LS1995.02

ARIMA Model
(0 1 2)(0 1 1)

regARIMA Model Span
From 1980.1 to 2004.1

MODEL ESTIMATION/EVALUATION

Exact ARMA likelihood estimation
Max total ARMA iterations 200
Max ARMA iter's w/in an IGLS iterati 40
Convergence tolerance 1.00E-05

Average absolute percentage error in within-sample forecasts:
Last year: 1.59 Last-1 year: 1.83 Last-2 year: 1.17
Last three years: 1.53

Estimation converged in 13 ARMA iterations, 76 function evaluations.

Regression Model

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
AO1995.01	-0.0552	0.01098	-5.03
LS1995.02	-0.1268	0.01656	-7.66

ARIMA Model: (0 1 2)(0 1 1)
Nonseasonal differences: 1
Seasonal differences: 1

Parameter	Estimate	Standard Errors
Nonseasonal MA		
Lag 1	-0.1540	0.09656
Lag 2	-0.3925	0.10229
Seasonal MA		
Lag 4	0.3766	0.10189
Variance	0.18826E-03	

ARMA Parameter Correlation matrix

Parameter	1	2	3

Nonseasonal MA			
Lag 1	1.00		
Lag 2	0.10	1.00	
Seasonal MA			
Lag 4	-0.01	0.33	1.00

Likelihood Statistics

Effective number of observations (nefobs)	92
Number of parameters estimated (np)	6
Log likelihood	263.4490
Transformation Adjustment	-1926.0591
Adjusted Log likelihood (L)	-1662.6101
AIC	3337.2202*
AICC (F-corrected-AIC)	3338.2085*
Hannan Quinn	3343.3271*
BIC	3352.3510*

* NOTE: These statistics do not contain a penalty for parameters estimated by xllregression to produce the prior adjustment factors because the xllregression estimates are not maximum likelihood estimates. Therefore they cannot be compared to the statistics from models in which regression variables in a regARIMA model are used to estimate the same effects.

DIAGNOSTIC CHECKING

Sample Autocorrelations of the Residuals

Lag	1	2	3	4
ACF	-0.03	0.04	-0.10	0.04
SE	0.10	0.10	0.10	0.11
Q	0.07	0.19	1.14	1.29
DF	0	0	0	1
P	0.000	0.000	0.000	0.255

Lag	5	6	7	8
ACF	-0.17	-0.05	0.09	-0.09
SE	0.11	0.11	0.11	0.11
Q	4.20	4.43	5.34	6.09
DF	2	3	4	5
P	0.123	0.219	0.254	0.297

Lag	9	10	11	12
ACF	0.00	-0.21	0.07	-0.02
SE	0.11	0.11	0.11	0.12
Q	6.09	10.74	11.26	11.33
DF	6	7	8	9
P	0.413	0.150	0.187	0.254

The P-values approximate the probability of observing a Q-value at least this large when the model fitted is correct. When DF is positive, small values of P, customarily those below 0.05, indicate model inadequacy.

Histogram of the Standardized and Mean-Centered Residuals

Standard Deviations	Frequency
-3 +	
-2 +#####	#####
-1 +#####	#####
0 +#####	#####
1 +#####	#####
2 +##	##
3 +	#

One '#'= 1 observation[s]

Summary Statistics for the Unstandardized Residuals

Minimum	-0.032
Maximum	0.034
Median	0.000
Robust Std Dev	0.015

Normality Statistics for regARIMA Model Residuals:

Number of residuals :	92
Geary's a :	0.8071
Kurtosis :	2.8567

No indication of lack of normality.

Tabla 5.5: Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA(0,1,2) (0,1,1).

En la Tabla 5.5 se observa que el parámetro de promedios móviles de orden 1, el $MA(1)$, no es significativo. Entonces eliminemos este parámetro y estimemos nuevamente el modelo. Los resultados de este nuevo modelo se muestran a continuación, en la tabla 5.6.

En la primera parte de la tabla 5.6 se puede ver que los efectos de outliers identificadas anteriormente son significativas y presentan una relación negativa en la serie. Con este resultado vemos que estas variables, tanto el outlier aditivo como el cambio de nivel, siguen siendo significativos aun cuando cambiamos ligeramente el modelo, recordemos que estas variables están muy ligadas al modelo ARIMA, ya que conjuntamente forman los modelos reg-ARIMA.

Producto Interno Bruto Trimestral

C 15 Final irregular component regression

Irregular Regression Model
Trading Day + Easter[4]

MODEL DEFINITION

Transformation
Log(y)

Regression Model
AO1995.01 + LS1995.02

ARIMA Model
(0 1 [2])(0 1 1)

regARIMA Model Span
From 1980.1 to 2004.1

MODEL ESTIMATION/EVALUATION

Exact ARMA likelihood estimation
Max total ARMA iterations 200
Max ARMA iter's w/in an IGLS iterati 40
Convergence tolerance 1.00E-05

Average absolute percentage error in within-sample forecasts:
Last year: 1.60 Last-1 year: 1.77 Last-2 year: 1.29
Last three years: 1.55

Estimation converged in 8 ARMA iterations, 43 function evaluations.

Regression Model

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
AO1995.01	-0.0591	0.01132	-5.22
LS1995.02	-0.1340	0.01600	-8.37

Tabla 5.6 (Parte 1): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).

Analizando la parte 2 de la tabla 5.6 vemos que los dos parámetros incluidos en este nuevo modelo, el de promedios móviles ordinario de orden 2 y el de promedios móviles estacional de orden 1, son significativos, es decir, son distintos de cero estadísticamente hablando. También podemos observar que no existe correlación significativa entre los parámetros estimados.

```

ARIMA Model: (0 1 [2])(0 1 1)
  Nonseasonal differences: 1
  Seasonal differences: 1

```

Parameter	Estimate	Standard Errors

Nonseasonal MA		
Lag 2	-0.3809	0.10426
Seasonal MA		
Lag 4	0.4216	0.10078
Variance	0.19191E-03	

```

ARMA Parameter Correlation matrix
Parameter      1      2
-----
Nonseasonal MA
  Lag 2      1.00
Seasonal MA
  Lag 4      0.38  1.00

```

```

Likelihood Statistics
-----
Effective number of observations (nefobs)      92
Number of parameters estimated (np)           5
Log likelihood                                262.4746
Transformation Adjustment                     -1926.0591
Adjusted Log likelihood (L)                   -1663.5845
AIC                                            3337.1690*
AICC (F-corrected-AIC)                       3337.8667*
Hannan Quinn                                 3342.2581*
BIC                                           3349.7780*

```

* NOTE: These statistics do not contain a penalty for parameters estimated by xllregression to produce the prior adjustment factors because the xllregression estimates are not maximum likelihood estimates. Therefore they cannot be compared to the statistics from models in which regression variables in a regARIMA model are used to estimate the same effects.

Tabla 5.6 (Parte 2): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).

En la parte 3 de la tabla 5.6 y en la gráfica 5.24 se exhibe la función de autocorrelación muestral de los residuales del modelo, en la cual se observa que no existe correlación entre los residuales y sus retrasos. En este caso, en que hemos encontrado un modelo adecuado, conviene ver el espectro de los residuales para definir si existe algún efecto periódico fuerte que no hayamos incorporado al modelo. En las gráfica 5.25 se muestra la estimación del espectro de los residuales.

DIAGNOSTIC CHECKING

Sample Autocorrelations of the Residuals

Lag	1	2	3	4
ACF	0.10	0.02	-0.12	0.03
SE	0.10	0.11	0.11	0.11
Q	1.01	1.06	2.52	2.63
DF	0	0	1	2
P	0.000	0.000	0.112	0.269

Lag	5	6	7	8
ACF	-0.16	-0.05	0.07	-0.06
SE	0.11	0.11	0.11	0.11
Q	5.09	5.37	5.90	6.25
DF	3	4	5	6
P	0.165	0.251	0.317	0.396

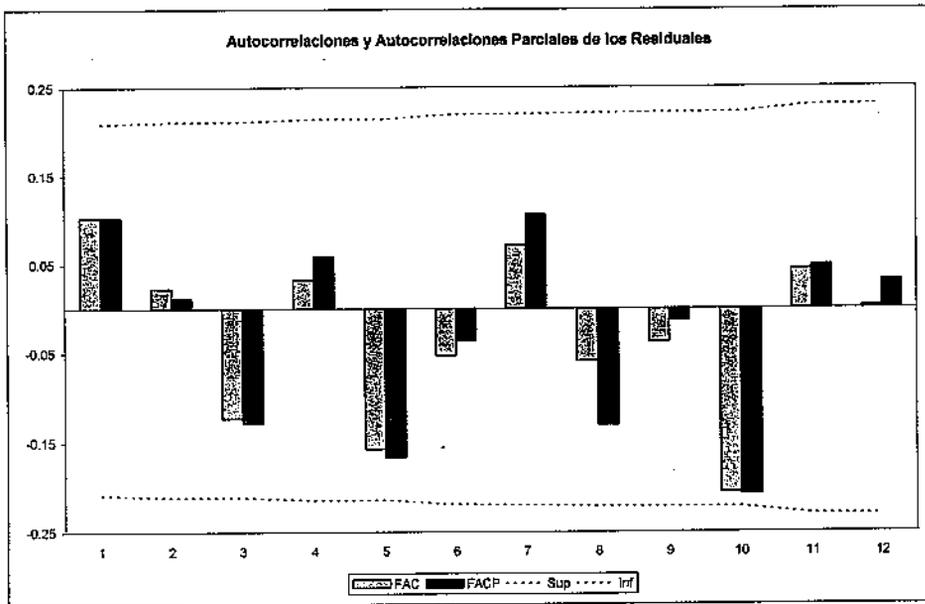
Lag	9	10	11	12
ACF	-0.04	-0.21	0.04	0.00
SE	0.11	0.11	0.11	0.12
Q	6.40	10.85	11.06	11.06
DF	7	8	9	10
P	0.494	0.210	0.272	0.353

The P-values approximate the probability of observing a Q-value at least this large when the model fitted is correct. When DF is positive, small values of P, customarily those below 0.05, indicate model inadequacy.

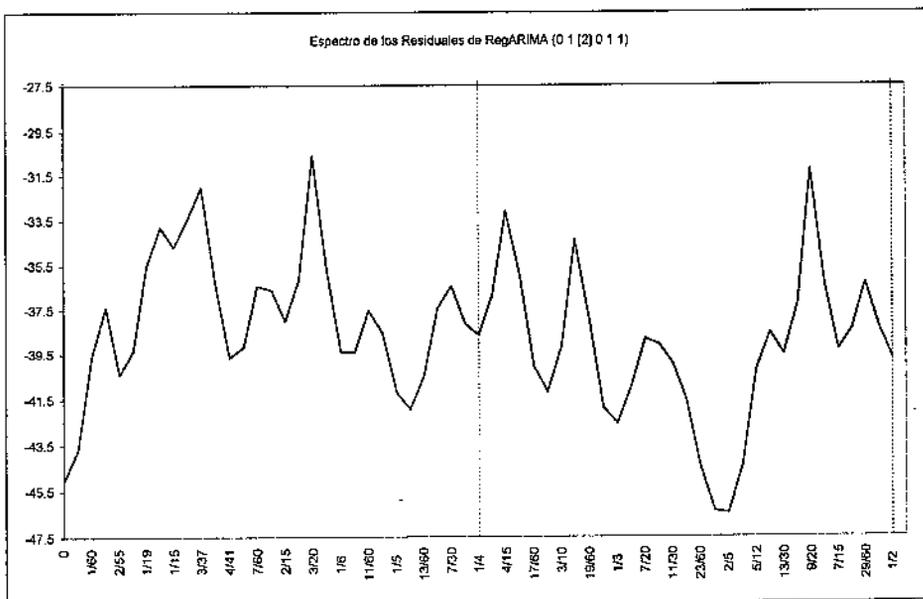
Tabla 5.6 (Parte 3): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).

Finalmente, en la última parte de la tabla 5.6 se presenta el histograma de los residuales del modelo y algunos estadísticos para comprobar la normalidad de los residuales. Como puede verse no existe indicación alguna de ausencia de normalidad en los errores.

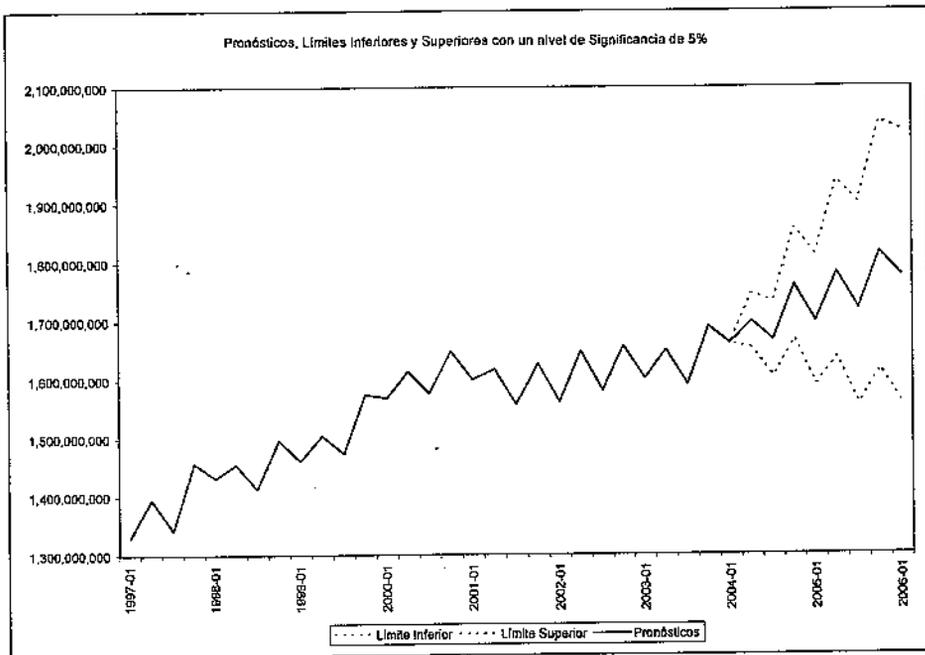
Con el análisis de la gráfica que presenta el espectro de los residuales, podemos concluir que no existe algún efecto periódico conocido que hayamos dejado de incorporar a nuestro modelo. Por lo tanto se puede concluir que el modelo descrito en la tabla anterior es el más adecuado para representar a la serie del PIB, en el cual se hace un ajuste por el efecto de días laborables. Ahora que ya tenemos el modelo adecuado, podemos obtener los pronósticos necesarios para extender la serie y aplicar entonces la metodología descrita en el capítulo IV para realizar la desestacionalización de la serie. Estos pronósticos se presentan a continuación en la tabla 5.7 y en la gráfica 5.26.



Gráfica 5.24: Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial de los Residuales del Modelo.



Gráfica 5.25: Estimación del Espectro de los Residuales del Modelo.



Gráfica 5.26: Pronósticos de la serie del PIB (8 periodos, a partir del segundo trimestre del 2004).

Los resultados obtenidos para el caso en el que se evitó el ajuste por días laborables no difieren mucho del caso anterior. Igualmente, fue necesario eliminar el parámetro de promedios móviles ordinario de orden uno, debido a que no fue significativo. La tabla con los estadísticos finales de esta estimación se muestran la tabla 5.8.

De la misma forma que en el caso anterior, se puede ver en esta tabla que las variables de outliers utilizadas son significativas en este modelo, también los parámetros del modelo ARIMA son significativos, tanto el ordinario de orden dos como el estacional de orden uno, es decir para el retraso cuatro. Se observa también que no existe correlación entre estos parámetros estimados. A partir de esta misma tabla y de la gráfica 5.27, que muestra la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los errores del modelo, se puede concluir que no existe correlación entre ellos mismos y sus retrasos. También vemos en la gráfica 5.28, donde se presenta la estimación del espectro de los residuales del modelo, que no hay algún efecto periódico conocido que se haya omitido en el análisis.

Producto Interno Bruto Trimestral

C 15 Final irregular component regression

Irregular Regression Model
Easter[4]

MODEL DEFINITION
Transformation
Log(y)

Regression Model
AO1995.01 + LS1995.02

ARIMA Model
(0 1 [2])(0 1 1)

regARIMA Model Span
From 1980.1 to 2004.1

MODEL ESTIMATION/EVALUATION
Exact ARMA likelihood estimation
Max total ARMA iterations 200
Max ARMA iter's w/in an IGLS iterati 40
Convergence tolerance 1.00E-05

Average absolute percentage error in within-sample forecasts:
Last year: 1.72 Last-1 year: 1.42 Last-2 year: 1.67
Last three years: 1.61

Estimation converged in 9 ARMA iterations, 51 function evaluations.

Regression Model

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	t-value
AO1995.01	-0.0601	0.01162	-5.17
LS1995.02	-0.1352	0.01643	-8.23

Tabla 5.8 (Parte 1): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).

Con la ayuda de la última parte de la tabla se concluye que no se viola el supuesto de la normalidad de los residuales, es decir, no hay indicios de falta de normalidad de estos.

Cabe recordar que estos resultados son similares a los obtenidos a partir de la serie que fue ajustada por el efecto de días laborables.

```

ARIMA Model: (0 1 [2])(0 1 1)
Nonseasonal differences: 1
Seasonal differences: 1

```

Parameter	Estimate	Standard Errors

Nonseasonal MA		
Lag 2	-0.3800	0.10360
Seasonal MA		
Lag 4	0.4336	0.09992
Variance	0.20087E-03	

```

ARMA Parameter Correlation matrix
Parameter      1      2
-----
Nonseasonal MA
Lag 2          1.00
Seasonal MA
Lag 4          0.37  1.00

```

Likelihood Statistics	
Effective number of observations (nefobs)	92
Number of parameters estimated (np)	5
Log likelihood	260.3483
Transformation Adjustment	-1926.0591
Adjusted Log likelihood (L)	-1665.7108
AIC	3341.4216*
AICC (F-corrected-AIC)	3342.1193*
Hannan Quinn	3346.5107*
BIC	3354.0305*

* NOTE: These statistics do not contain a penalty for parameters estimated by xllregression to produce the prior adjustment factors because the xllregression estimates are not maximum likelihood estimates. Therefore they cannot be compared to the statistics from models in which regression variables in a regARIMA model are used to estimate the same effects.

Tabla 5.8 (Parte 2): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).

De la misma forma que en el caso anterior, se presentan los pronósticos obtenidos con esta estimación del modelo en la tabla 5.9 y en la gráfica 5.29. Ya que se han obtenido estos pronósticos para los dos casos analizados en este trabajo, podemos utilizar la metodología descrita en el capítulo IV para desestacionalizar la serie. Los resultados son presentados en la siguiente sección.

DIAGNOSTIC CHECKING - Sample Autocorrelations of the Residuals

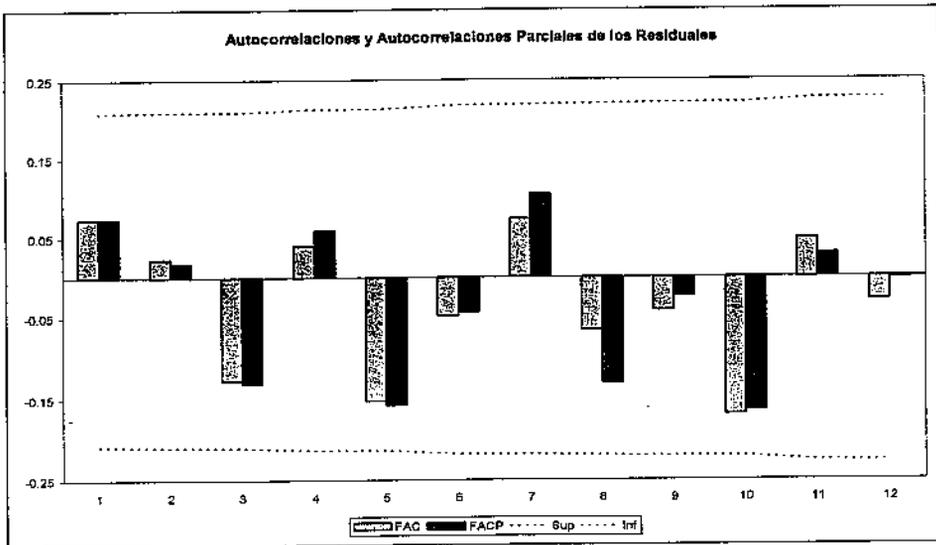
Lag	1	2	3	4
ACF	0.07	0.02	-0.13	0.04
SE	0.10	0.10	0.10	0.11
Q	0.51	0.56	2.13	2.29
DF	0	0	1	2
P	0.000	0.000	0.145	0.319

Lag	5	6	7	8
ACF	-0.15	-0.05	0.07	-0.07
SE	0.11	0.11	0.11	0.11
Q	4.58	4.82	5.37	5.81
DF	3	4	5	6
P	0.205	0.307	0.372	0.445

Lag	9	10	11	12
ACF	-0.04	-0.17	0.05	-0.03
SE	0.11	0.11	0.11	0.11
Q	5.99	9.00	9.25	9.34
DF	7	8	9	10
P	0.541	0.342	0.414	0.500

The P-values approximate the probability of observing a Q-value at least this large when the model fitted is correct. When DF is positive, small values of P, customarily those below 0.05, indicate model inadequacy.

Tabla 5.8 (Parte 3): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).



Gráfica 5.27: Función de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial de los Residuales del Modelo.

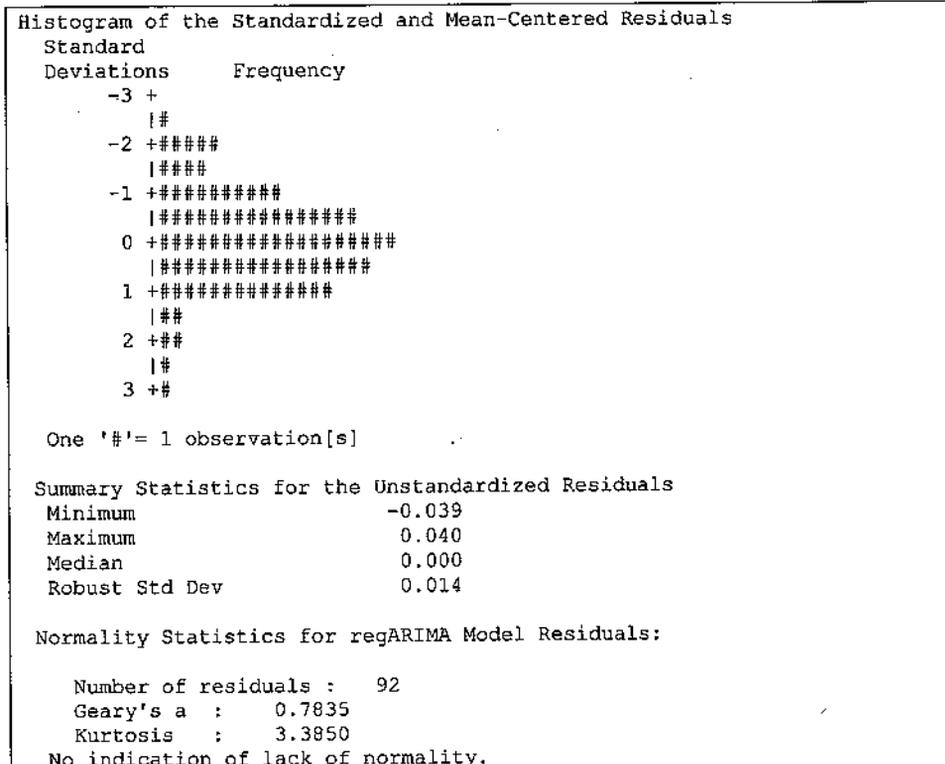
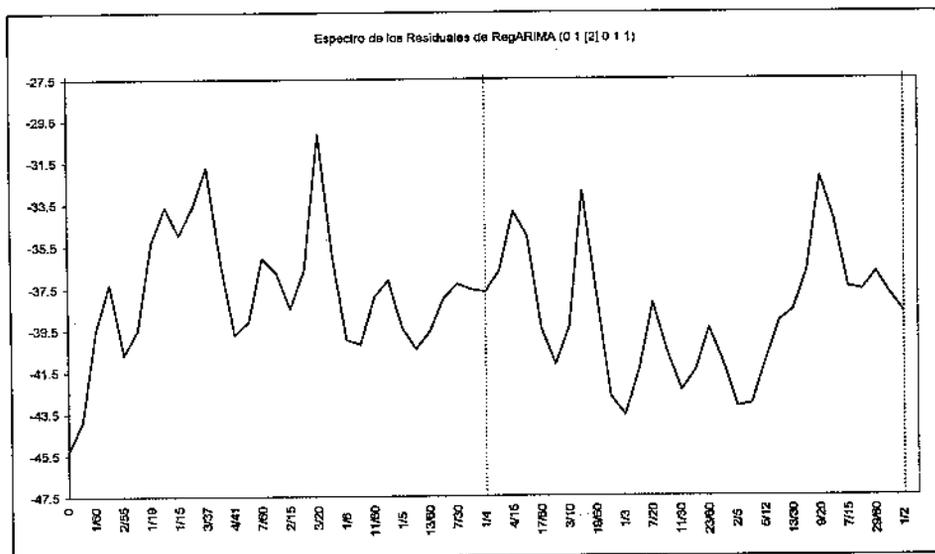


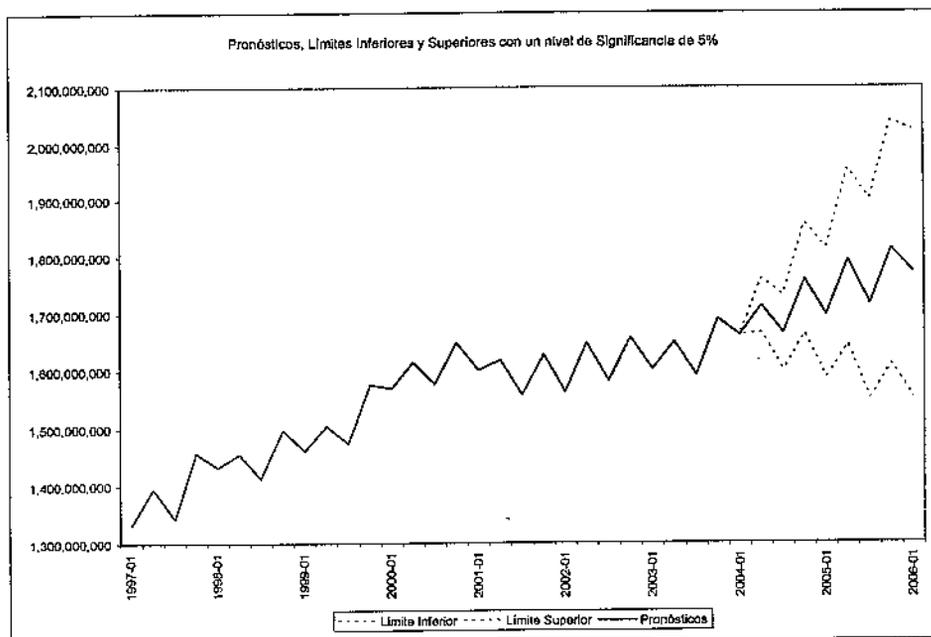
Tabla 5.8 (Parte 4): Estimación y Análisis de Residuales del modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).

PRONÓSTICOS			
Límites calculados con un nivel de significancia de 5%			
2do Trimestre de 2004 a 1er Trimestre de 2006			
(Miles de pesos a precios de 1993)			
Periodo	Límite Inferior	Pronósticos	Límite Superior
2004-02	1,665,416,651	1,712,327,087	1,760,558,866
2004-03	1,600,501,038	1,664,626,412	1,731,321,020
2004-04	1,664,524,901	1,758,439,869	1,857,653,659
2005-01	1,586,356,702	1,696,195,228	1,813,638,918
2005-02	1,644,504,435	1,792,286,825	1,953,349,589
2005-03	1,550,010,702	1,715,818,631	1,899,363,385
2005-04	1,610,710,557	1,812,517,132	2,039,608,134
2006-01	1,551,747,236	1,771,482,417	2,022,333,199

Tabla 5.9: Pronósticos utilizando el modelo ARIMA (0,1,[2])(0,1,1).



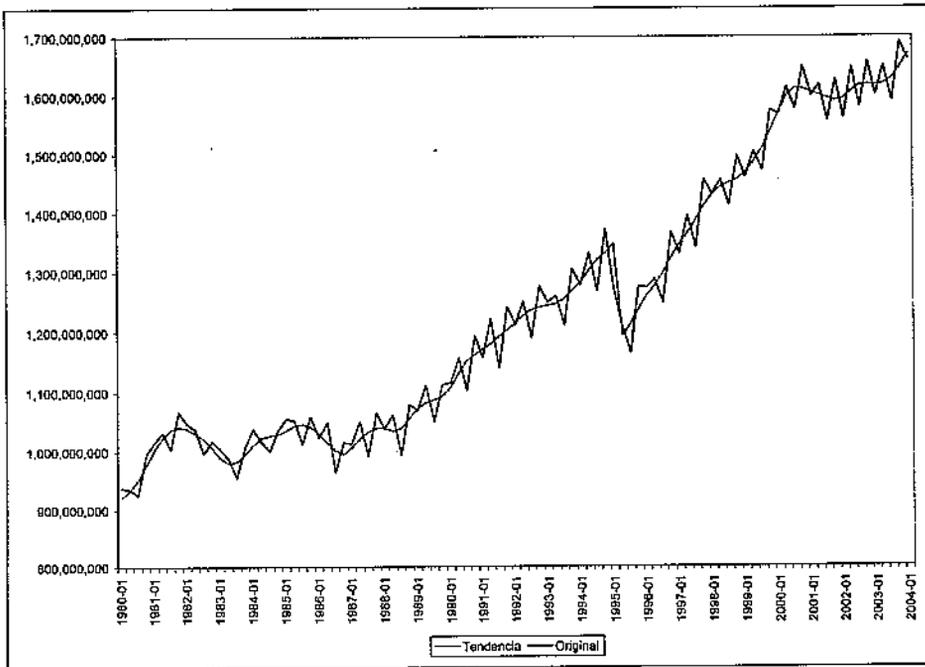
Gráfica 5.28: Estimación del Espectro de los Residuales del Modelo.



Gráfica 5.29: Pronósticos de la serie del PIB (8 periodos, a partir del segundo trimestre del 2004).

5.6 Desestacionalización de la Serie

En esta sección analizaremos los resultados obtenidos a partir de la metodología descrita en el capítulo IV para la descomposición de la serie. En la gráfica 5.26 se muestra la serie original acompañada por la tendencia, en el caso de la serie que fue ajustada tanto por días laborables como por Semana Santa.



Gráfica 5.26: Serie Original y Tendencia

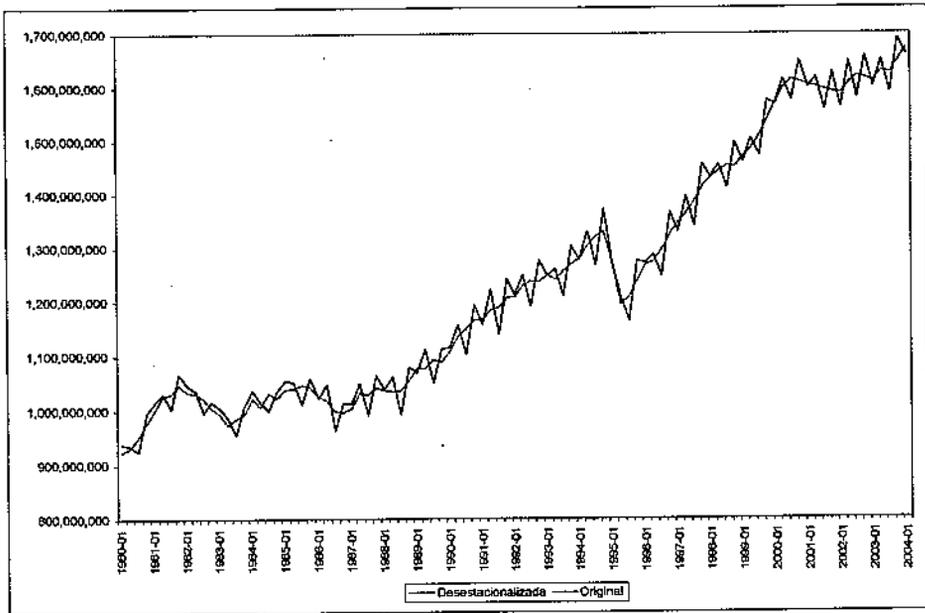
Para la obtención de la tendencia final se utilizó un filtro de Henderson de 5 términos. Cabe señalar que se incluyó nuevamente el efecto del cambio nivel o level shift, quedando la serie en su nivel original. También dentro del análisis de descomposición de la serie se realizaron unas pruebas para detectar la presencia de estacionalidad, de las que se concluye que existe estacionalidad aunque no hay evidencia de existencia de estacionalidad móvil en la serie. Estas pruebas se muestran en la tabla 5.10.

Test for the presence of seasonality assuming stability.				
	Sum of Squares	Dgrs.of Freedom	Mean Square	F-Value
Between quarters	386.0740	3	128.69132	
208.532**				
Residual	57.3930	93	0.61713	
Total	443.4669	96		
**Seasonality present at the 0.1 per cent level.				
Nonparametric Test for the Presence of Seasonality Assuming Stability				
	Kruskal-Wallis Statistic	Degrees of Freedom	Probability Level	
	77.0617	3	0.000%	
Seasonality present at the one percent level.				
Moving Seasonality Test				
	Sum of Squares	Dgrs.of Freedom	Mean Square	F-value
Between Years	8.6022	23	0.374010	0.874
Error	29.5288	69	0.427953	
No evidence of moving seasonality at the five percent level.				

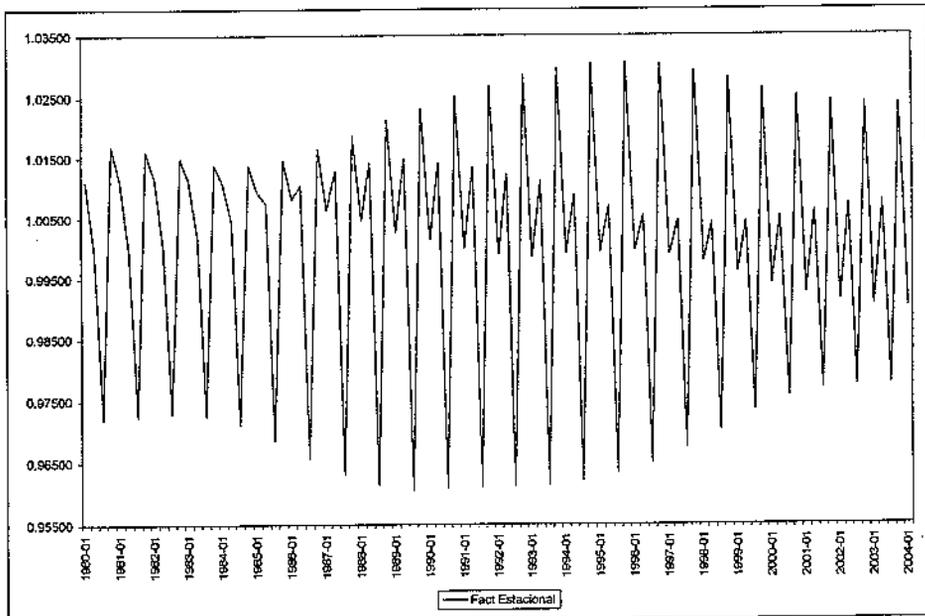
Tabla 5.10: Pruebas para la Presencia de Estacionalidad.

A continuación se presentan, en las gráficas 5.27 y 5.28, la serie original junto a la desestacionalizada final y los factores estacionales finales, respectivamente. Para el cálculo de los factores estacionales finales se hizo uso de un promedio móvil estacional de 3x5. La serie desestacionalizada también está corregida por los efectos de días Laborables y de Semana Santa. A partir de la gráfica 5.28, es decir, de los factores estacionales se observa en primer lugar un comportamiento estacional muy fuerte, confirmando el análisis del espectro llevado a cabo anteriormente, y en segundo lugar vemos que este comportamiento cambia significativamente a partir de 1985. En la gráfica 5.29 se muestran las tasas de crecimiento trimestral a partir del segundo trimestre de 1980, estos fueron calculados a partir de la serie desestacionalizada y no de la serie original.

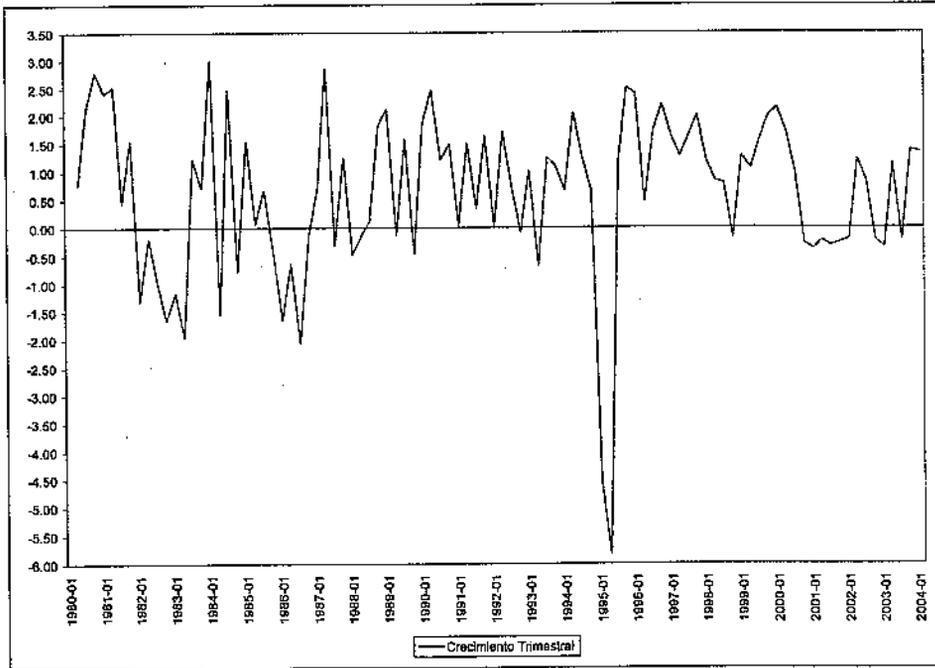
Aplicación de la Metodología a una Serie Real



Gráfica 5.27: Serie Original y Desestacionalizada.



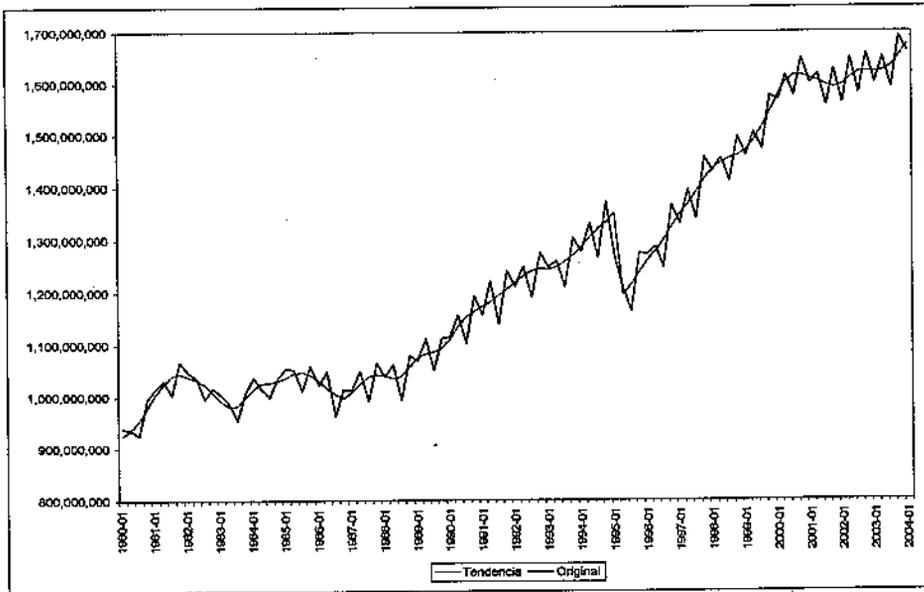
Gráfica 5.28: Factores Estacionales.



Gráfica 5.29: Tasas de Crecimiento Trimestral.

A continuación se presentan los mismos resultados anteriores pero para el caso del análisis que omite el ajuste por días laborables. En la gráfica 5.30 se muestra la serie original junto con su tendencia. Posteriormente, en la tabla 5.11, se presentan las pruebas para comprobar la existencia de estacionalidad. Después, en la gráfica 5.31 se muestra la serie original junto con la serie desestacionalizada final, y en la gráfica 5.32 los factores estacionales. Finalmente, en la gráfica 5.33 vemos las tasas de crecimiento trimestrales. Para el cálculo de la tendencia y de los factores estacionales se utilizó, al igual que en el caso anterior, un filtro de Henderson de 5 términos y un promedio móvil estacional de 3x5, respectivamente. Recordemos que para el cálculo de las tasas de crecimiento trimestrales se utiliza la serie desestacionalizada y no la serie original.

En la siguiente sección se observarán los diagnósticos del ajuste estacional presentado aquí. Se verá si es necesario hacer alguna modificación al análisis anterior o si los resultados obtenidos son satisfactorios.



Gráfica 5.30: Serie Original y Tendencia.

Test for the presence of seasonality assuming stability.

	Sum of Squares	Dgrs. of Freedom	Mean Square	F-Value
Between quarters	428.3258	3	142.77525	
Residual	58.7401	93	0.63161	
Total	487.0659	96		

226.048**

**Seasonality present at the 0.1 per cent level.

Nonparametric Test for the Presence of Seasonality Assuming Stability

Kruskal-Wallis Statistic	Degrees of Freedom	Probability Level
76.3980	3	0.000%

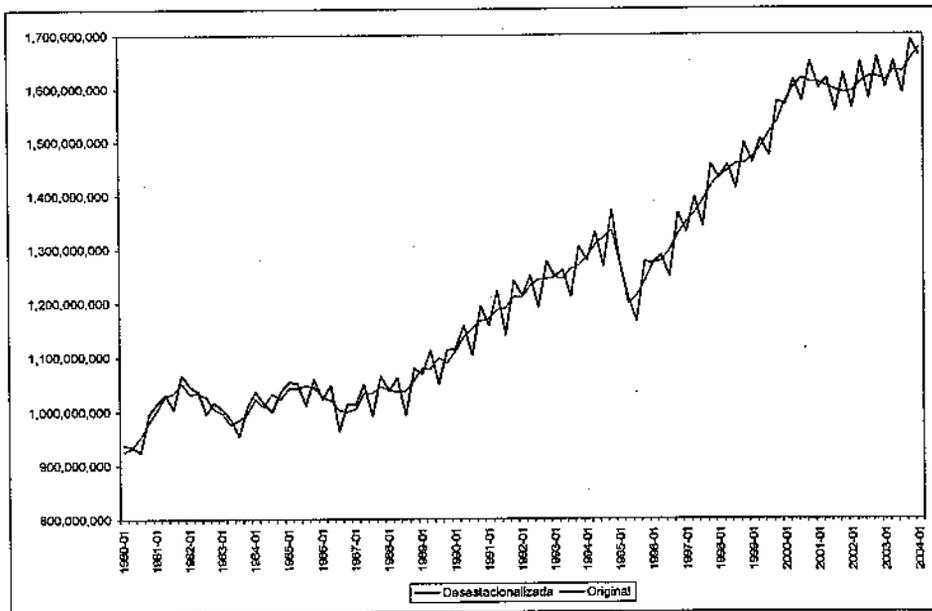
Seasonality present at the one percent level.

Moving Seasonality Test

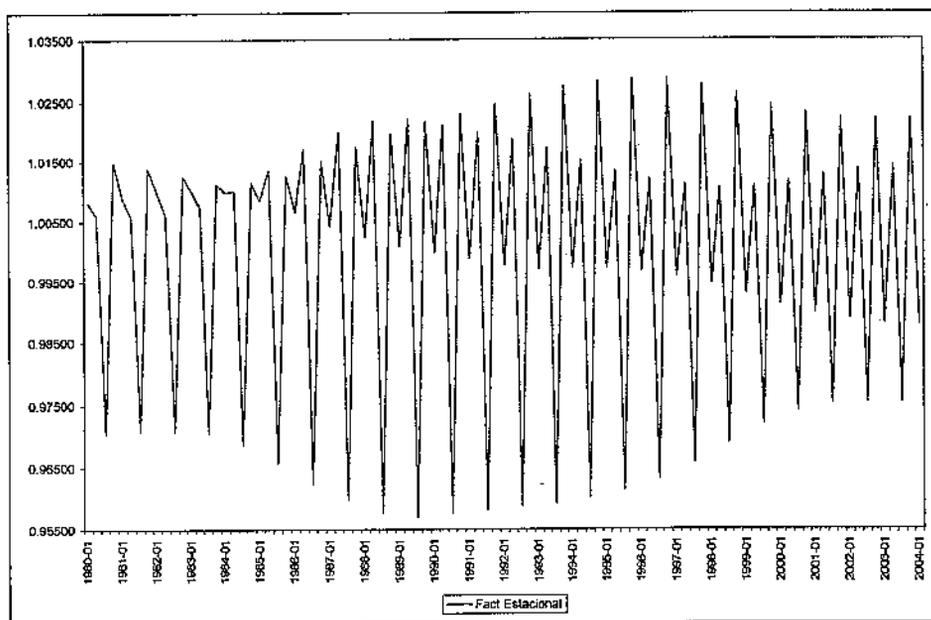
	Sum of Squares	Dgrs. of Freedom	Mean Square	F-value
Between Years	12.4690	23	0.542132	1.253
Error	29.8449	69	0.432534	

No evidence of moving seasonality at the five percent level.

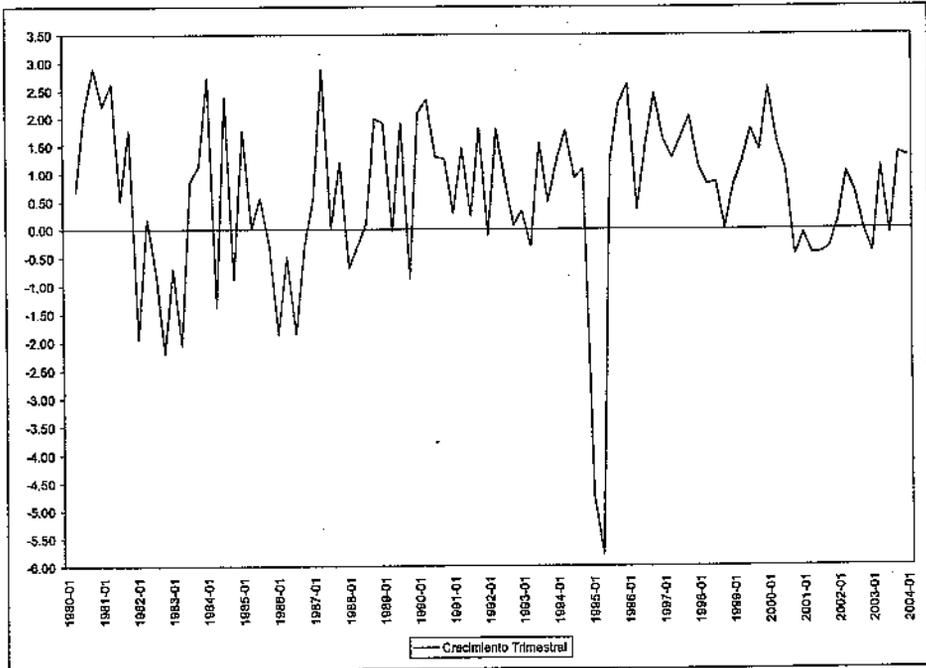
Tabla 5.11: Pruebas para la presencia de Estacionalidad.



Gráfica 5.31: Serie Original y Desestacionalizada.



Gráfica 5.32: Factores Estacionales.



Gráfica 5.33: Tasas de Crecimiento Trimestral.

5.7 Diagnósticos de la Desestacionalización

En la sección 5.5 analizamos los diagnósticos del ajuste de la serie del PIB mediante un proceso ARIMA, aquellos resultados nos sirvieron para determinar si un modelo era apropiado o no para la serie en cuestión, y en caso de que no lo fuera nos proporciona información sobre los cambios que pudieran hacerse para encontrar algún modelo apropiado. En esta sección los diagnósticos son distintos, ahora basaremos nuestro análisis en los resultados de la desestacionalización. Nuestro objetivo principal es determinar si el ajuste realizado en la sección anterior cumple con los requisitos de una buena descomposición, y en caso de no ser así, modificar las especificaciones utilizadas para lograr un mejor ajuste de acuerdo a las fallas encontradas. Veamos primero los resultados del ajuste para el caso en que se incluyó el ajuste por días laborables.

F 2. Summary Measures

F 2.A: Average percent change without regard to sign over the indicated span

Span in quarters	A1 O	D11 CI	D13 I	D12 C	D10 S	A2 P	D18 TD&H	F1 qcd
1	3.77	1.17	0.52	1.03	3.18	0.13	0.60	1.25
2	2.95	2.07	0.30	2.02	2.46	0.27	0.62	2.19
3	4.52	2.98	0.44	2.96	3.14	0.40	0.55	3.07
4	3.86	3.85	0.38	3.83	0.12	0.54	0.48	3.80

Span in quarters	E1 Mod.O	E2 Mod.CI	E3 Mod.I
1	3.80	1.50	0.45
2	3.08	2.35	0.26
3	4.51	3.22	0.38
4	3.87	4.04	0.34

F 2.B: Relative contributions to the variance of the percent change in the components of the original series

Span in quarters	E3 I	D12 C	D10 S	A2 P	D18 TD&H	TOTAL	RATIO (X100)
1	1.75	9.09	85.96	0.15	3.04	100.00	81.45
2	0.61	38.33	56.74	0.67	3.65	100.00	112.51
3	0.76	45.57	51.26	0.85	1.56	100.00	94.53
4	0.76	95.74	0.09	1.93	1.48	100.00	102.20

F 2.C: Average percent change with regard to sign and standard deviation over indicated span

Span in quarters	A1 O		D13 I		D12 C	
	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.
1	0.83	4.35	0.00	0.70	0.77	0.93
2	1.57	3.33	0.00	0.40	1.53	1.79
3	2.39	4.97	0.00	0.61	2.29	2.56
4	3.05	3.30	0.01	0.49	3.04	3.20

Span in quarters	D10 S		D11 CI		F1 qcd	
	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.
1	0.05	3.76	-0.77	1.17	0.63	1.44
2	0.04	2.76	1.54	1.87	1.26	2.36
3	0.08	3.68	2.29	2.64	1.87	3.16
4	0.00	0.14	3.05	3.25	2.47	3.73

F 2.D: Average duration of run

CI	I	C	qcd
3.31	1.25	8.73	3.10

Tabla 5.12 (Parte 1): Estadísticos de Ajuste de la Desestacionalización.

F 2.E: I/C Ratio for quarters span

SPAN	1	2	3	4
I/C	0.50	0.15	0.15	0.10

quarters for cyclical dominance: 1

F 2.F: Relative contribution of the components to the stationary portion of the variance in the original series

I	C	S	P	TD&H	Total
0.19	68.37	8.08	76.87	0.60	154.11

F 2.G: The autocorrelation of the irregulars for spans 1 to 6

SPAN	1	2	3	4	5	6
ACF	-0.73	0.44	-0.30	0.19	-0.05	-0.13

F 2.H: The final I/C Ratio from Table D12: 0.41
 The final I/S Ratio from Table D10: 2.70

F 2.I:	Statistic	Prob. level
F-test for stable seasonality from Table B 1. :	173.990	0.00%
F-test for stable seasonality from Table D 8. :	208.532	0.00%
Kruskal-Wallis Chi Squared test		
for stable seasonality from Table D 8. :	77.062	0.00%
F-test for moving seasonality from Table D 8. :	0.874	63.00%

F 3. Monitoring and Quality Assessment Statistics

All the measures below are in the range from 0 to 3 with an acceptance region from 0 to 1.

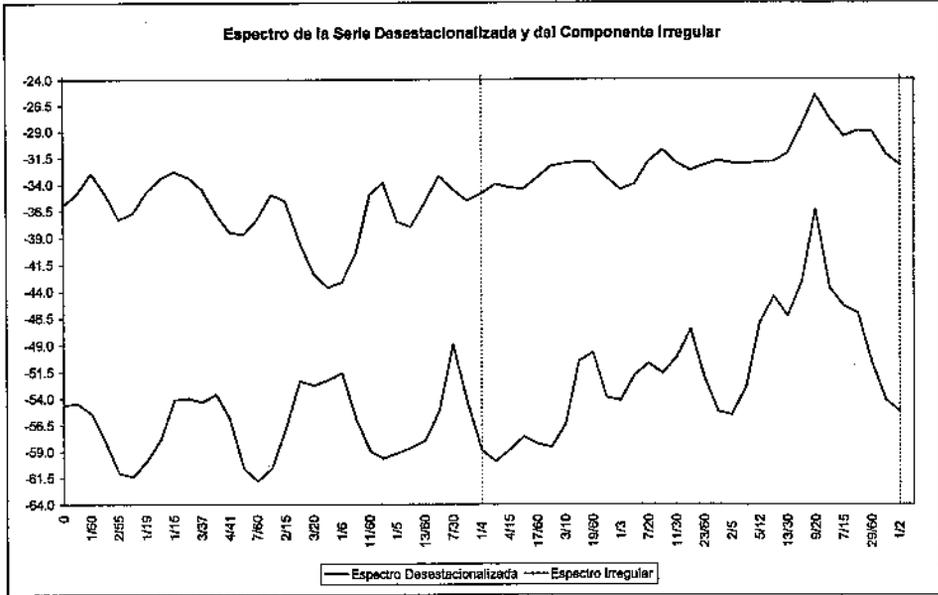
1. The relative contribution of the irregular over one quarter span (from Table F 2.B). M1 = 0.175
2. The relative contribution of the irregular component to the stationary portion of the variance (from Table F 2.F). M2 = 0.083
3. The amount of quarter to quarter change in the irregular component as compared to the amount of quarter to quarter change in the trend-cycle (from Table F2.H). M3 = 0.112
4. The amount of autocorrelation in the irregular as described by the average duration of run (Table F 2.D). M4 = 1.195
5. The number of quarters it takes the change in the trend-cycle to surpass the amount of change in the irregular (from Table F 2.E). M5 = 0.200

Tabla 5.12 (Parte 2): Estadísticos de Ajuste de la Desestacionalización.

6. The amount of year to year change in the irregular as compared to the amount of year to year change in the seasonal (from Table F 2.H).	M6 = 0.520
7. The amount of moving seasonality present relative to the amount of stable seasonality (from Table F 2.I).	M7 = 0.152
8. The size of the fluctuations in the seasonal component throughout the whole series.	M8 = 0.570
9. The average linear movement in the seasonal component throughout the whole series.	M9 = 0.212
10. Same as 8, calculated for recent years only.	M10 = 0.690
11. Same as 9, calculated for recent years only.	M11 = 0.690
*** ACCEPTED *** at the level 0.34	
*** Check the 1 above measures which failed.	
*** Q (without M2) = 0.38 ACCEPTED.	

Tabla 5.12 (Parte 3): Estadísticos de Ajuste de la Desestacionalización.

En la tabla 5.12 encontramos los principales estadísticos utilizados para determinar la efectividad del ajuste estacional, en ella podemos ver los valores de los estadísticos "M", descritos en el capítulo anterior. Como ahí se explicó, cada uno de ellos se considera aceptable si su valor es menor a 1. En ocasiones, como es nuestro caso, se presentan estadísticos que no cumplen este requisito. Esto puede ser problemático cuando se observan varios estadísticos con esta condición. Sin embargo, para el análisis que nos interesa realizar no es grave tener un estadístico mayor a 1, más aun, generalmente es difícil encontrar un ajuste en que todos y cada uno de estos cumplen con este requisito. Es por esto que se obtiene un estadístico global en el cual se puede resumir los resultados de todos los estadísticos conjuntamente. Este estadístico es denominado por "Q" no es más que un promedio ponderado de todos los estadísticos "M". La descripción detallada de estos estadísticos se dio en el capítulo IV. Otro análisis útil para verificar la calidad del ajuste es el del espectro, tanto de la serie desestacionalizada como la del componente irregular. Las estimaciones de los espectros de estos componentes se encuentran en la gráfica 5.34.



Gráfica 5.34: Estimación del Espectro de la Serie Desestacionalizada y del Componente Irregular.

La gráfica 5.34 resulta ser muy interesante e importante. En primer lugar se observamos el espectro de la serie desestacionalizada, en este se puede concluir que los efectos estacionales presentes en la serie original y encontrados muy claramente en la gráfica del espectro de la serie original, ya no están presentes en esta serie final. Esto se corrobora analizando el espectro del componente irregular, en este tampoco se observa el efecto estacional encontrado en la serie original, esto es, ya fue eliminado en el proceso de desestacionalización. Este era el objetivo de nuestro trabajo, se logró eliminar el efecto estacional de una serie llevando a cabo un análisis profundo de la serie. A continuación se muestran, en la tabla 5.13, los mismos estadísticos para el caso del ajuste en que no fue considerado el efecto de los días laborables. Se verá que los resultados importantes son básicamente iguales, las conclusiones son las mismas. La gráfica 5.35 muestra el espectro de la serie desestacionalizada y del componente irregular para este caso descrito.

F 2. Summary Measures

F 2.A: Average percent change without regard to sign over the indicated span

Span in quarters	A1 O	D11 CI	D13 I	D12 C	D10 S	A2 P	D18 TD&H	F1 qcd
1	3.77	1.17	0.54	1.04	3.53	0.14	0.47	1.25
2	2.95	2.08	0.30	2.04	2.13	0.27	0.47	2.19
3	4.52	3.00	0.48	2.99	3.51	0.41	0.37	3.08
4	3.87	3.86	0.38	3.84	0.13	0.55	0.35	3.81

Span in quarters	E1 Mod.O	E2 Mod.CI	E3 Mod.I
1	3.81	1.25	0.51
2	3.08	2.14	0.27
3	4.51	3.02	0.45
4	3.87	3.85	0.35

F 2.B: Relative contributions to the variance of the percent change in the components of the original series

Span in quarters	E3 I	D12 C	D10 S	A2 P	D18 TD&H	TOTAL	RATIO (X100)
1	1.84	7.77	88.71	0.13	1.55	100.00	96.97
2	0.79	46.09	49.89	0.81	2.41	100.00	95.26
3	0.93	41.00	56.68	0.76	0.63	100.00	106.96
4	0.79	96.33	0.10	1.96	0.81	100.00	101.95

F 2.C: Average percent change with regard to sign and standard deviation over indicated span

Span in quarters	A1 O		D13 I		D12 C	
	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.
1	0.83	4.35	0.00	0.72	0.77	0.94
2	1.57	3.33	0.00	0.41	1.54	1.81
3	2.39	4.97	0.00	0.63	2.30	2.58
4	3.06	3.30	0.01	0.51	3.05	3.22

Span in quarters	D10 S		D11 CI		F1 qcd	
	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.	Avg.	S.D.
1	0.06	4.07	0.77	1.18	0.63	1.46
2	0.03	2.63	1.54	1.88	1.26	2.36
3	0.08	4.03	2.30	2.65	1.88	3.17
4	0.00	0.15	3.05	3.26	2.47	3.73

F 2.D: Average duration of run	CI	I	C	qcd
	3.56	1.19	7.38	3.31

Tabla 5.12 (Parte 1): Estadísticos de Ajuste de la Desestacionalización.

F 2.E: I/C Ratio for quarters span

SPAN	1	2	3	4
I/C	0.52	0.15	0.16	0.10

quarters for cyclical dominance: 1

F 2.F: Relative contribution of the components to the stationary portion of the variance in the original series

I	C	S	P	TD&H	Total
0.25	68.79	9.07	78.01	0.26	156.38

F 2.G: The autocorrelation of the irregulars for spans 1 to 6

SPAN	1	2	3	4	5	6
ACF	-0.72	0.46	-0.29	0.16	-0.02	-0.15

F 2.H: The final I/C Ratio from Table D12: 0.43
 The final I/S Ratio from Table D10: 2.56

F 2.I:	Statistic	Prob. level
F-test for stable seasonality from Table B 1. :	188.359	0.00%
F-test for stable seasonality from Table D 8. :	226.048	0.00%
Kruskal-Wallis Chi Squared test for stable seasonality from Table D 8. :	76.398	0.00%
F-test for moving seasonality from Table D 8. :	1.253	23.33%

F 3. Monitoring and Quality Assessment Statistics

All the measures below are in the range from 0 to 3 with an acceptance region from 0 to 1.

1. The relative contribution of the irregular over one quarter span (from Table F 2.B). M1 = 0.184
2. The relative contribution of the irregular component to the stationary portion of the variance (from Table F 2.F). M2 = 0.115
3. The amount of quarter to quarter change in the irregular component as compared to the amount of quarter to quarter change in the trend-cycle (from Table F2.H). M3 = 0.148
4. The amount of autocorrelation in the irregular as described by the average duration of run (Table F 2.D). M4 = 1.572
5. The number of quarters it takes the change in the trend-cycle to surpass the amount of change in the irregular (from Table F 2.E). M5 = 0.200

Tabla 5.12 (Parte 1): Estadísticos de Ajuste de la Desestacionalización.

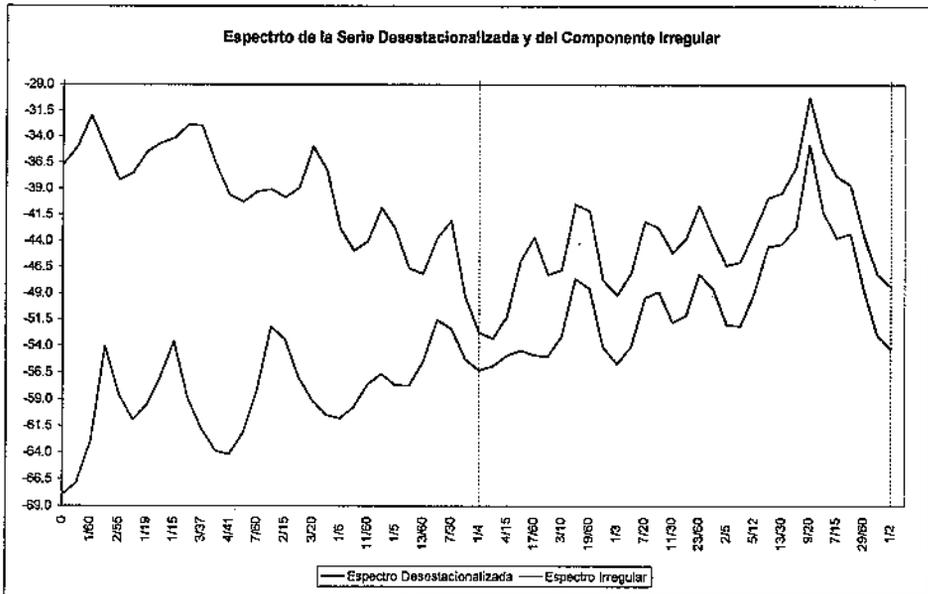
6. The amount of year to year change in the irregular as compared to the amount of year to year change in the seasonal (from Table F 2.H).	M6 = 0.577
7. The amount of moving seasonality present relative to the amount of stable seasonality (from Table F 2.I).	M7 = 0.154
8. The size of the fluctuations in the seasonal component throughout the whole series.	M8 = 0.569
9. The average linear movement in the seasonal component throughout the whole series.	M9 = 0.197
10. Same as 8, calculated for recent years only.	M10 = 0.623
11. Same as 9, calculated for recent years only.	M11 = 0.623

*** ACCEPTED *** at the level 0.38

*** Check the 1 above measures which failed.

*** Q (without M2) = 0.42 ACCEPTED.

Tabla 5.12 (Parte 1): Estadísticos de Ajuste de la Desestacionalización.



Gráfica 5.34: Estimación del Espectro de la Serie Desestacionalizada y del Componente Irregular.

CONCLUSIONES

En general, la utilización de datos estadísticos, y en particular, de datos económicos, cobran una importancia cada vez mayor para diferentes sectores de la sociedad. Es por esto que es trascendental que los datos proporcionados por las instituciones dedicadas a difundirlos provengan de una elaboración muy cuidadosa de los mismos.

Como se mencionó en el presente trabajo, los datos económicos están generalmente afectados por diversos factores, ajenos o no, a la propia situación económica que podrían distorsionar el análisis realizado, y por lo tanto, las conclusiones. Por ejemplo, si un agente quisiera elaborar un modelo econométrico en donde utiliza datos no desestacionalizados, podría encontrar diferentes obstáculos para la terminación de un buen trabajo, ya que distintas series pueden estar afectadas por varios factores, es decir, cada una de ellas podría estar influida por sucesos estacionales desiguales, o por efectos de días laborables y de Semana Santa de diversa magnitud. Existen variados ejemplos en los cuales la utilización de datos que no han sido ajustados estacionalmente pueden conducir a conclusiones erróneas.

En este trabajo se mencionaron distintos efectos de este tipo y posibles mecanismos para corregirlos o aislarlos de los datos con los cuales se desea trabajar. El principal de ellos, y del cual se deriva el nombre de esta tesina, es de la estacionalidad. Este componente, que está presente en la mayoría de las series económicas y del cual se explicaron sus características anteriormente, necesita ser disminuido al máximo con el objetivo de obtener una serie que pueda representar con mayor precisión el entorno económico que originalmente debería de describir y que pudiera relacionarse con otras series más claramente.

Para lograr la corrección de este efecto se propuso la utilización del método X12 ARIMA, desarrollado por el U.S. Census Bureau, y que es una derivación de los métodos X11 y X11 ARIMA, ampliamente conocidos y difundidos. Cabe mencionar que no es el único método utilizado actualmente para desestacionalizar series económicas, pero sí es probablemente el método cuyo uso está más extendido.

En este trabajo no se pretende argumentar que el método descrito aquí es el mejor para lograr el objetivo del ajuste estacional, sin embargo, sí se pretende mostrar las bondades que proporciona el método ante la manipulación de datos mexicanos. Como se acaba de mencionar, existen otros métodos que se manejan actualmente con el mismo propósito.

El principal de ellos es el denominado TRAMO SEATS, desarrollado por Agustín Maravall en el Banco de España. Este programa podría constituir un método alternativo en el desarrollo del ajuste deseado para las series mexicanas. La metodología usada para la descomposición de las series en TRAMO SETAS es significativamente diferente a la utilizada en X12 ARIMA para el mismo propósito. Pero aunque estos dos métodos tienen una base distinta, si convergen en varios análisis, sobre todo en el tratamiento de los demás efectos, es decir, de días laborables, de Semana Santa y de outliers. Lo importante de todo esto es señalar que aunque se utilice una cierta metodología para realizar una actividad, es posible encontrar otra que pueda complementar o enriquecer nuestro análisis.

En cuanto a los demás efectos analizados en el presente trabajo, es importante advertir que se presentaron los métodos que mejor se ajustan a los datos mexicanos, aunque de la misma forma que en la desestacionalización, es posible hallar otra metodología con la cual se pudiera hacer el análisis. También es importante suscribir que el conocimiento profundo de los métodos y del escenario del problema nos ayuda a establecer la forma más adecuada de llevar a cabo un determinado análisis.

En lo que se refiere a los efectos de días laborables y de Semana Santa que se corrigen completando a la desestacionalización cabe mencionar que se utilizaron los modelos que enfrentan los comportamientos típicos de los comportamientos de estas variables. De la misma forma se puede indicar que existen diversos métodos alternativos para realizar un análisis más acorde a los efectos no tan comunes.

Otro punto de trascendencia en este trabajo es el análisis de outliers que se presentan. Como se observa en muchas series mexicanas, la economía mexicana ha tenido momentos en que ha sido muy variable, con grandes brincos en determinados momentos, con observaciones fuera de lo común, con cambios estructurales, etc.

Por lo tanto las técnicas mostradas en este trabajo para el tratamiento y corrección de estos acontecimientos son substanciales para corregir esas variabilidades de los datos y entonces lograr un análisis más preciso de los datos en cuestión.

En este trabajo se dedicó un capítulo para mostrar el desempeño de las técnicas descritas a lo largo de la tesina sobre una serie en particular. En primer lugar es primordial subrayar que se realizó un análisis estándar de la serie en cuestión, este análisis puede variar de acuerdo a los objetivos específicos del analista. Por ejemplo, un cierto analista pudiera estar interesado en establecer los distintos outliers que han influenciado a una serie, independiente del efecto que haya tenido la Semana Santa o los días laborables en dicha serie.

Por otra parte, aunque ya se subrayaron en su momento las bondades de los procedimientos explicados en el presente estudio, es necesario también establecer las limitaciones que engloban estos métodos. El principal de ellos es que, aunque es un método muy eficaz para derivar los diferentes efectos en las partes medias de la serie, hay que ser cautelosos con su interpretación a finales de esta, es decir, que hay que ser muy cuidadosos sobre las conclusiones de un análisis de coyuntura. Esto es debido a que para lograr un ajuste en los datos finales de la serie se hace uso de la metodología de Box y Jenkins para establecer una extrapolación de la serie que permita aplicar las técnicas de desestacionalización sobre la serie extendida. Este estudio de series de tiempo desarrollado por estos autores, es un análisis univariado que es muy limitado para prever los cambios en las variables económicas. También es importante señalar que mientras más datos se van haciendo disponibles, los ajustes se van haciendo más robustos para los datos intermedios.

Otra característica importante del trabajo es que presenta también las técnicas necesarias para realizar pronósticos de estas mismas series económicas, es decir, todos los procesos están ligados entre sí y pueden ser utilizados para diferentes propósitos.

Por todo lo anterior podemos afirmar que los procedimientos descritos en este trabajo forman una metodología muy eficaz para conseguir el objetivo de la desestacionalización y ajuste de series económicas.

BIBLIOGRAFÍA

- ∞ AKAIKE, H. (1980): "Seasonal Adjustment by a Bayesian Modeling", *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1-13.
- ∞ ARMATTE, M. (1992): "Conjonctions, conjecture et conjecture. Les baromètres économiques (1885-1930)", *Histoire et Mesure*, 7, 99-149.
- ∞ BARTLETT, M. S. (1950): "Periodogram Analysis and Continuous Spectra", *Biometrika*, 35, 1-16.
- ∞ BELL, W.R. and HILLMER, S.C. (1984): "Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, 291-394.
- ∞ BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. and REINSEL G.C. (1994): "Time Series Analysis: Forecasting and Control", Third Edition, New Jersey: Prentice-Hall Inc.
- ∞ BROCKWELL, P.J. and DAVIS, R.A. (1998): "Time Series: Theory and Methods", Second Edition, *Springer Series in Statistics*, Springer.
- ∞ BURMAN, J.P. (1980): "Seasonal Adjustment by Signal Extraction", *Journal of The Royal Statistical Society, Series A*, 143, 321-337.
- ∞ CLEVELAND, W.S. (1979): "Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots", *Journal of The American Statistical Association*, 74, 829-836.
- ∞ CLEVELAND, R.B., CLEVELAND, W.S., McRAE, J.E. and TERPENNING, I. (1990): "STL a Seasonal-tendance Decomposition Procedure Based on Loess", *Journal of Official Statistics*, 6, 3-73.
- ∞ COOLEY, J.W. and TURKEY, J.W. (1965): "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematics of Computation*, 19, 297-301.
- ∞ DAGUM, E.B. (1975): "Seasonal Factor Forecasts from ARIMA Models", *Proceedings of the International Institute of Statistics, 40th Session, Contributed Papers*, 3, Warsaw, 206-219.
- ∞ DAGUM, E.B. (1988): "The X-11-ARIMA/88 Seasonal Adjustment Method, Methodology Branch", *Statistics Canada, Ottawa, ON, Canada*.
- ∞ FINDLEY, D.F., MONSELL, B.C., BELL, W.R., OTTO, M.C. and CHEN, B. (1998): "New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program", *Journal of Business and Economic Statistics*, 16.
- ∞ FISHER, A. (1937): "A Brief Note on Seasonal Variation", *Journal of Accountancy*, 64, 54-59.

- α FOURIER, J.B. (1822): "Théorie analytique de la chaleur", Ed. de 1988, Paris: Ed. Jacques Gabay.
- α GARDNER, M. (1981): "Mathematical Games", *Scientific American*, February 1981, 17-20.
- α GÓMEZ, V. and MARAVALL, A. (1996): "Programs TRAMO and SEATS", Banco de España, Documento de Trabajo 9628.
- α GRUN-REHOMME, M. and LADIRAY, D. (1994): "Moyennes mobiles centrées et non centrées: construction et comparaison", *Revue de Statistique Appliquée*, XLII, 33-61
- α HAMILTON, J.D. (1994): "Time Series Analysis", New Jersey: Princeton University Press.
- α HARVEY, A.C. (1989): "Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter", Cambridge: Cambridge University Press.
- α HIGGINSON, J. (1975): "An F-test for the Presence of Moving Seasonality when Using Census Method II-X-11 Variant", Working Paper, Methodology Branch, Statistics Canada, Ottawa, ON, Canada.
- α HILLMER, S.C. and TIAO, G.C. (1982): "An ARIMA Model Based Approach to Seasonal Adjustment", *Journal of The American Statistical Association*, 77, 63-70.
- α HYLLEBERG, S. (1986): "Seasonality in Regression", Orlando: Academic Press.
- α JEVONS, W.S. (1862): "On the Study of Periodic Commercial Fluctuations, Investigations in currency and finance", London: Macmillan, 1984.
- α KENDALL, M. (1973): "Time Series", London: Charles Griffin & Co.
- α KITAGAWA, G. and GERSCH, W. (1984): "A Smoothness Priors State Space Modeling of Time Series with Trend and Seasonality", *Journal of The American Statistical Association*, 79, 378-389.
- α KOOPMANS, S.J., HARVEY, A.C., DOORNIK, J.A. and SHEPARD, N.G. (2000): "STAMP, Structural Time Series Analyser, Modeler and Predictor", London: Timberlake Consultants Press.
- α KOOPMANS, L.H. (1974): "The Spectral Analysis of Time Series", New York: Academic Press.
- α LADIRAY, D. and QUENNEVILLE, B. (2001): "Seasonal Adjustment with the X-11 Method", *Lecture Notes on Statistics*, Springer.
- α LOTHIAN, J. (1978): "The Identification and Treatment of Moving Seasonality in the X-11 Seasonal Adjustment Method", Working Paper 78-10-004, Methodology Branch, Statistics Canada, Ottawa, ON, Canada.

- α LOTHIAN, J. and MORRY, M. (1978): "A Set of Quality Control Statistics for the X-11-ARIMA Seasonal Adjustment Method", Working Paper 78-10-005, Methodology Branch, Statistics Canada, Ottawa, ON, Canada.
- α LJUNG, G.M. (1993): "On Outlier Detection in Time Series", *Journal of The Royal Statistical Society, B*, 55, 559-567.
- α MACAULAY, F.R. (1931): "The Smoothing of Time Series", National Bureau of Economic Research.
- α MCNULTY, M.S., and HUFFMAN, W.E. (1989): "The Sample Spectrum of Time Series with Trading-Day Variation", *Economics Letters*, 31, 367-370.
- α O'BEIRNE, T. (1966): "The Regularity of Easter", *Bulletin of The Institute of Mathematics and Its Application*, 2, 46-49.
- α PERSONS, W.M. (1919): "Indices of Business Conditions", *Review of Economic Statistics*, 1, 5-107.
- α PIERCE, D.A. (1980): "Data Revisions with Moving Average Seasonal Adjustment Procedures", *Journal of Econometrics*, 14, 95-114.
- α PRIESTLEY, M.B. (1965): "Evolutionary Spectra and Nonstationary Processes", *Journal of The Royal Statistical Society, Series B*, 27, 204-237.
- α SHISKIN, J., YOUNG, A. and MUSGRAVE, J.C. (1967): "The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program", Washington DC, Technical Paper No. 15, Bureau of the Census, US Department of Commerce.
- α SLUTSKY, E. (1927): "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclical Processes", *Econometrika*, 84, 105-146 (1937), translation of a Russian paper (Conjecture Institute, Moscow).
- α TØNDERING, C. (2000): "Frequently Asked Questions About Calendars", Internet: <http://www.tondering.dk/claus/calendar.html>.
- α YOUNG, A.H. (1965): "Estimating Trading-Day Variations in Monthly Economic Series", Washington DC, Technical Paper No. 12, Bureau of the Census, US Department of Commerce.
- α YULE, G.U. (1927): "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers", *Philosophical Transactions of The Royal Society, Series A*, 226, 267-298.