

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ENTROPÍA EPSILON EN FLUJOS  
TURBULENTOS**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**F Í S I C O**  
P R E S E N T A:  
**GUADARRAMA CETINA JOSÉ MANUEL**



**DIRECTOR DE TESIS: DR. GERARDO RUÍZ CHAVARRÍA**

México, D.F.

2005



m. 346252



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: José Manuel  
Guadarrama Cetina  
FECHA: 4/07/2005  
FIRMA: [Signature]

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Entropía epsilon en Flujos Turbulentos

realizado por José Manuel Guadarrama Cetina

con número de cuenta 09315617-8, quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Dr. Gerardo Ruiz Chavarría

[Signature]

Propietario Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco

[Signature]

Propietario Dr. Gustavo Martínez Mekler

[Signature]

Suplente Dr. José Marcos Salazar Cruz

[Signature]

Suplente Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach

[Signature]

Consejo Departamental de Física

[Signature]  
M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ



FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*A Mis Padres y Hermanas*

## Reconocimientos y Agradecimientos

La realización de este trabajo fue posible, gracias a la infinita paciencia del Dr. Gerardo Ruiz Chavarría mezclada con su confianza, además de haber sido un excelente profesor y director de tesis, ha sido una gran influencia que me ha impulsado para bien.

Hago mención de mis sinodales: Dr. Luis Antonio Dávalos, Dra. Catalina Elizabeth Stern, Dr. Gustavo Martínez y el Dr. Marcos Salazar, por su trato justo y sus oportunos comentarios para mejorar este trabajo.

Agradezco también al Dr. Ricardo Lima y al Dr. Edgardo Ugalde por los nuevos horizontes que se dibujan ante mí.

A toda la gente que ha estado conmigo (*o se ha adherido*) por estos largos siete años: Daniel padre, Julio, Daniel hijo y Alí, ojalá esto pueda servirles, Paola Ramos por enseñarme tantas cosas, Álvaro F. Vázquez por tu sentido de la competencia y tu amistad, Andrés Díaz por esas *chelas*, Carlos Álvarez y familia *¡salud!*, Román Neria y familia (donde quiera que andes) ya sabes que te debo y pagaré, a la chica de nombre extraño: Getzabeth y a muchas otras personas que coincidieron conmigo en algún momento dejando corazón, vida, tiempo y dedicación pero que ahora no están, sépanlo bien, les tengo siempre presentes.

*El que llegó hasta aquí por su propio pie, que no se detenga y se marche ya...  
Aún hay mucho por delante.*

JMGC

# ÍNDICE

## INTRODUCCIÓN 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 2

### CAPITULO 1

#### TURBULENCIA Y DINÁMICA DE FLUIDOS

##### 1 Turbulencia 3

##### 1.1 Mecánica de fluidos 5

##### 1.1.1 Descripción lagrangiana y euleriana de un fluido 5

##### 1.1.2 Aceleración de una partícula del fluido 6

##### 1.1.3 Conservación de la masa en un flujo y la ecuación de continuidad 7

##### 1.1.4 Ecuación de Navier-Stokes 10

##### 1.1.5 El número de Reynolds 13

##### 1.2 Teoría estadística 15

##### 1.2.1 Definiciones estadísticas 15

##### 1.3 Teoría de Kolmogorov 21

##### 1.3.1 Escala de Kolmogorov o escala disipativa 22

##### 1.3.2 Funciones de estructura 23

##### 1.3.3 El espectro de energía 26

##### 1.3.4 Comportamiento universal y la ecuación de Howart–Von Kármán 27

### CAPITULO 2

#### SISTEMAS SENSIBLES A CONDICIONES INICIALES Y EL CÁLCULO DE LA ENTROPÍA- $\varepsilon$

##### 2.1 Sensibilidad a condiciones iniciales 30

##### 2.2 Exponente de Lyapunov 32

##### 2.3 Dinámica simbólica 33

##### 2.4 Entropía 34

##### 2.4.1 Eventos independientes 35

##### 2.4.2 La función de información 35

##### 2.4.3 Conexión entre la entropía y la entropía de la información 36

##### 2.5 Entropía de Kolmogorov 37

##### 2.6 Entropía de bloque y entropía- $\varepsilon$ 37

##### 2.7 Entropía- $\varepsilon$ y exponente de Lyapunov 38

##### 2.8 Entropía- $\varepsilon$ con el método de tiempos de salida 38

##### 2.9 Ejemplos 40

##### 2.9.1 Cálculo del exponente de Lyapunov para el escalamiento del seno 40

##### 2.9.2 Cálculo del exponente de Lyapunov para el ejemplo del

oscilador armónico 42

2.9.3 Cálculo de la entropía-  $\varepsilon$  43

## CAPITULO 3

### TEORÍA DE CAPA LÍMITE Y CAPA LÍMITE TURBULENTA

3 Capa límite laminar 46

3.1 Separación de la capa límite: ecuación de Prandtl 46

3.1.1 Solución exacta: Blasius 49

3.2 Capa límite turbulenta 52

3.2.1 Subcapa viscosa y subcapa logarítmica 53

## CAPITULO 4

### METODOLOGÍA Y EXPERIMENTOS. MÉTODOS DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

4.1 Metodología 56

4.1.1 Anemometría de hilo caliente y túnel de viento 56

4.1.2 Experimento de capa límite turbulenta en placa plana 59

4.1.3 Experimento de transición a la turbulencia 61

4.2 Métodos de análisis 63

4.2.1 Modelos para el análisis de la turbulencia: el modelo  $\beta$ , el modelo bifractal y el modelo multifractal 63

4.2.2 Modelo multifractal y sus resultados para capa límite turbulenta en placa plana 74

4.2.3 Cálculo de  $h(\varepsilon)$  con el método de tiempos de salida 71

4.3 Resultados 74

4.3.1 Experimento de capa límite turbulenta en placa plana 74

4.3.2 Experimento de transición a la turbulencia 79

4.4 Discusión 87

### CONCLUSIONES 89

### Apéndice A

*Probabilidad y cálculo de variaciones 91*

### REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA 94

## INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es analizar diferentes flujos, en particular la capa límite turbulenta en una placa plana y la transición a la turbulencia debido a la presencia de un cilindro en un flujo de aire para caracterizarlos en términos de la entropía- $\epsilon$ .

Desde el punto de vista de la mecánica estadística, la entropía cuantifica el grado de desorden de un sistema. La teoría de la información utiliza éste concepto para conocer el grado de predictibilidad (mientras mayor sea el desorden, menos predecible será la evolución del sistema) que tiene un sistema mediante el cálculo de la entropía de Kolmogorov-Sinai ( $h_{KS}$ ). El uso de este concepto puede dar los resultados siguientes:  $h_{KS} = 0$ , el sistema es determinista, si  $h_{KS} \rightarrow \infty$  el sistema es aleatorio y por lo tanto, su grado de desorden es máximo, por otro lado, si  $0 < h_{KS} < \infty$  el sistema es caótico determinista. Para el estudio de sistemas que presentan un comportamiento con múltiples escalas espaciales y temporales, en lugar de usar la entropía de Kolmogorov-Sinai: es mejor utilizar una herramienta conocida como entropía- $\epsilon$  que, permite develar el comportamiento a diferentes escalas.

La presente tesis consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo hacemos un repaso de la mecánica de fluidos y del régimen turbulento, ya que es importante conocer las bases teóricas, tales como: el teorema de transporte Reynolds, el manejo estadístico de cantidades observables, la definición de la escala integral y escala de Kolmogorov, así como de resultados exactos provenientes de su teoría. En el segundo capítulo se hacemos una revisión para eventos dependientes de las condiciones iniciales y como éstos se pueden caracterizar por medio de herramientas como el exponente de Lyapunov, probabilidad, entropía de Kolmogorov, la entropía- $\epsilon$  ( $h(\epsilon)$ ) y la descripción del método de tiempos de salida en donde se propone una nueva dinámica simbólica que simplifica los cálculos y los efectúa más rápido. Al tratarse de dos campos extensos del conocimiento, los flujos turbulentos y la teoría de la información, es indispensable revisarlos en capítulos diferentes y establecer las herramientas de cálculo que se utilizarán posteriormente.

Para el tercer capítulo iniciamos con el análisis de capa límite laminar y aplicamos los conceptos revisados para capa límite turbulenta.

En el cuarto capítulo se comparan los resultados del cálculo de  $h(\epsilon)$  para mediciones de capa límite turbulenta, transición a la turbulencia y turbulencia desarrollada. Encontramos diferentes comportamientos que en el caso de capa límite concuerdan con el modelo multifractal y que en el fenómeno de transición a la turbulencia se asocian a una mezcla de una señal laminar con una turbulenta.



## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema consiste en caracterizar la región de capa límite turbulenta en una capa plana experimentalmente y posteriormente, aplicar el concepto de entropía- $\varepsilon$  para las mediciones de la velocidad a diferentes distancias de la placa y con ello, conocer los valores del exponente de escalamiento para las diferentes distancias. Según la teoría multifractal [1], se tiene la hipótesis de que dichos exponentes son mayores que 3. Con este mismo orden de ideas aplicaremos de igual manera el concepto de entropía- $\mathcal{E}$  en el fenómeno de transición a la turbulencia haciendo la hipótesis de que a una cierta distancia de un obstáculo inmerso en el flujo, se puede observar el fenómeno de la calle de von Kármán [2], pero con ciertas irregularidades. Además a la distancia del obstáculo donde se iniciaron las mediciones se presenta un flujo que no está exclusivamente en un régimen laminar, esto influye en el valor del exponente de escalamiento para la función entropía- $\varepsilon$ .

## CAPITULO 1

### TURBULENCIA Y DINÁMICA DE FLUIDOS

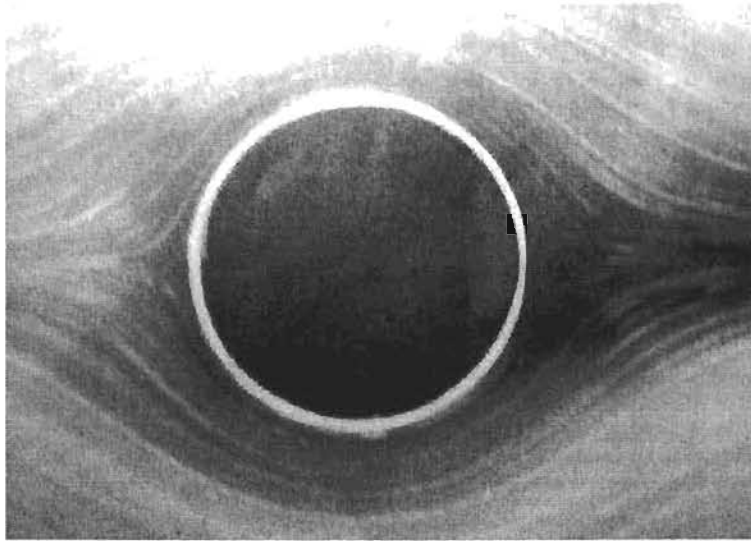
#### 1 Turbulencia

Para el estudio de flujos turbulentos se utilizan herramientas de estadística y teoría de la información ya que, para la medición de una cantidad observable que puede presentar una cantidad grande de fluctuaciones; como podría ser la velocidad de un flujo turbulento, se obtiene una cantidad grande de datos. El uso de la teoría de la información y la estadística permiten encontrar relaciones entre los fenómenos observados y las leyes que los rigen.

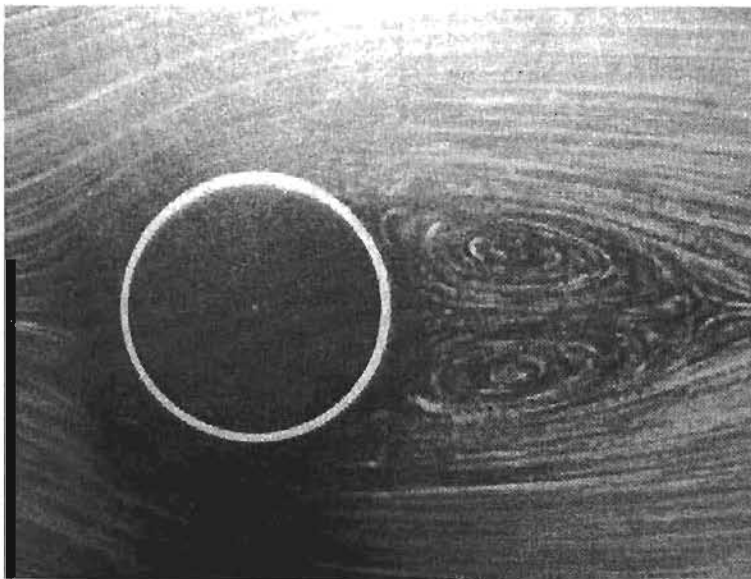
¿Qué entendemos por turbulencia? Podemos encontrar varias descripciones de ella en la literatura, por ejemplo, en “La turbulence” de Marcer Lesieur [3] se enfatiza que la turbulencia es un fenómeno para el cual las condiciones iniciales tales como la posición y la velocidad son importantes. Además, el sistema está regido por las ecuaciones de la dinámica de Newton – *sistema determinista*- y a partir de estas ecuaciones pueden hacerse predicciones. Se entiende por sensibilidad a las condiciones iniciales, si para dos estados iniciales del sistema que presentan una diferencia muy pequeña, la evolución en el tiempo del sistema divergerá notablemente entre una y otra, además se perderá la memoria de los estados iniciales. Un ejemplo inmediato de esto es, lo imprevisible que son los fenómenos meteorológicos, cuando por medio de las ecuaciones de la mecánica de fluidos se trata de crear un modelo para hacer predicciones, pero pronto se cae en cuenta de la falta de precisión en los cálculos. La sensibilidad a las condiciones iniciales en un flujo, no son suficientes para definir a la turbulencia, esta tiene también la propiedad de “mezclar”: la turbulencia se manifiesta por difundir las diversas sustancias transportadas en el flujo, por ejemplo, el humo, los colorantes, etc. La propiedad de difusión en la turbulencia es importante, aun más que, las propiedades de difusión molecular. En “Hydrodynamique physique” de Luc Petit, É. Guyon y J. P. Hulin [2] resaltan que para *números de Reynolds* grandes (en la sección 1.2.5 daremos una definición de este número y sus implicaciones) se producen inestabilidades en la evolución de las cantidades observables, ejemplo de esto son; las fluctuaciones de la velocidad sin alguna periodicidad aparente (ver figura 1.2). Mencionan que un factor importante de la transición a la turbulencia es la formación de remolinos de diversos tamaños para posteriormente obtener un flujo turbulento. Uriel Frisch en “Turbulence” [4] hace la observación que para un número de Reynolds grande se produce un rompimiento de simetrías que son consistentes con las ecuaciones de Navier – Stokes [N-S]. Por ejemplo, las simetrías que se tienen en un cilindro inmerso en un flujo, ver figura (1.1), al ir aumentando el número de Reynolds, ya sea mediante el incremento en el diámetro del cilindro o en la velocidad del flujo, las simetrías que se tienen en este sistema son: arriba-abajo  $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$ , la invariancia en el tiempo  $t$ , y la traslación espacial en el eje  $z$  en el cilindro. Según lo anterior, podemos decir, qué un flujo turbulento será caracterizado por:

- *Sensibilidad a las condiciones iniciales.*
- *La aparición de la turbulencia se dará con un número de Reynolds grande.*

- *La difusión de sustancias que componen al flujo y la mezcla de estas se da de forma muy efectiva.*
- *La formación de remolinos de diversos tamaños a diferentes escalas.*



(a)



(b)

Figura 1.1. En (a) se observa un cilindro que se interpone a un flujo laminar, notamos que; tanto en el lado derecho como en el izquierdo se ha perdido la simetría con un número de  $Re$  pequeño. Para el caso de la imagen (b) con  $Re$  más grande, esta simetría se ha perdido por completo [4].

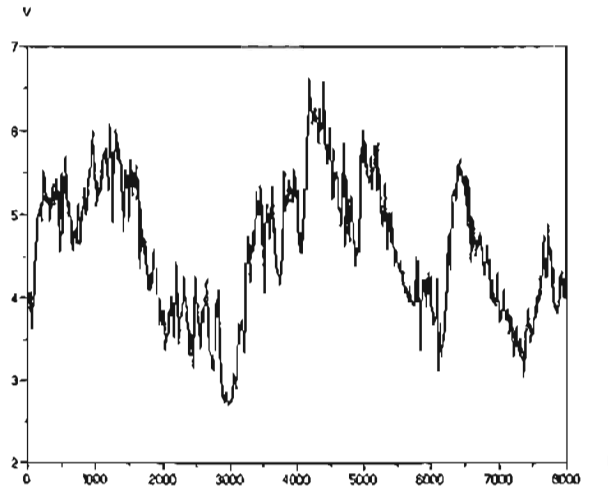


Figura 1.2 Gráfica de la velocidad medida a 220 cm de un cilindro de 10 cm de diámetro y  $R_\lambda = 297$ , para observar el fenómeno de transición a la turbulencia. No se puede apreciar regularidad alguna que pudiera ayudarnos a establecer cualquier relación para predecir cómo será la velocidad en algún tiempo dado (ver sección 4.1.3).

## 1.1 Mecánica de fluidos

### 1.1.1 Descripción lagrangiana y euleriana de un fluido

El conjunto de velocidades,  $v$ , de las partículas de un fluido en la posición  $r$  al instante  $t$ , definen un campo de velocidades  $\bar{u}(r, t)$ .

En la descripción euleriana del movimiento de un fluido pone interés a la velocidad  $\bar{u}(r, t)$  de una partícula que coincide al instante  $t$  con el punto fijo  $M$  con vector de posición  $r$ ; a cada instante, se observa la velocidad de partículas diferentes. A un instante posterior  $t'$ , la velocidad en un mismo punto  $r$  será  $\bar{u}(r, t')$ . Un ejemplo experimental de este método es la medición de la velocidad mediante el uso de una sonda de hilo caliente fija e inmersa en algún lugar del flujo (describiremos esta técnica en el capítulo 4). Entonces la velocidad será una función que depende del instante de observación y del vector de posición  $r$  fijo. La descripción euleriana presenta el inconveniente de introducir términos no lineales en la expresión de la aceleración, como lo veremos más adelante.

En la descripción lagrangiana, se sigue el curso del movimiento de una partícula del fluido, especificando una posición inicial  $r_0$  a un instante de referencia  $t_0$ . La velocidad del flujo estará entonces caracterizada por el vector  $\bar{u}(r_0, t)$ , que es función de dos variables  $r_0$  y  $t$ . Ver figura (1.3).

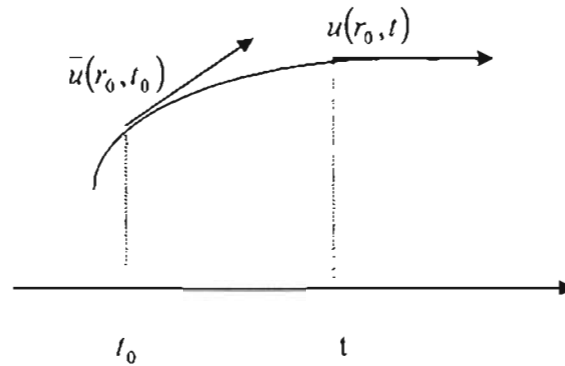


Figura 1.3 Descripción lagrangiana del movimiento de un fluido: cada partícula del fluido está representada por un vector de posición inicial  $r_0$  a un instante inicial  $t_0$  siguiendo su movimiento. La velocidad del flujo está caracterizada por la velocidad de cada partícula a un tiempo dado.

En la descripción lagrangiana se puede entender si se piensa en un barco que navega por la corriente de un río: la velocidad del barco representa la velocidad que queremos medir. Para hacer mediciones experimentales con este punto de vista se utilizan instrumentos que siguen el movimiento del fluido, tales como, balones con sondas en el caso de fenómenos atmosféricos ó partículas marcadas.

### 1.1.2 Aceleración de una partícula del fluido

Consideremos una partícula en un punto  $M_1(r_1)$  en el instante  $t$ ; su velocidad a este instante es  $\bar{u}(r_1, t)$  [2]. A un instante posterior  $t' = t + \delta t$ , esta partícula de fluido llegó a un punto  $M_2(r_2)$  tal que,

$$r_2 = r_1 + \bar{u}(r_1, t)\delta t + O(\delta t^2) \quad (1.1)$$

y su velocidad se vuelve  $\bar{u}(r_2, t')$ . La variación de la velocidad  $\delta u$  de esta partícula de fluido, en el intervalo de tiempo  $\delta t$  se asocia a:

- 1) La variación explícita del campo de velocidades  $u(r, t)$  con el tiempo, que está dada por  $[\bar{u}(r_1, t') - \bar{u}(r_1, t)]$  ver figura (1.4).
- 2) Por otra parte, la variación del campo de velocidad debido al desplazamiento de las partículas, dada por la siguiente relación  $[\bar{u}(r_2, t') - \bar{u}(r_1, t')]$ .

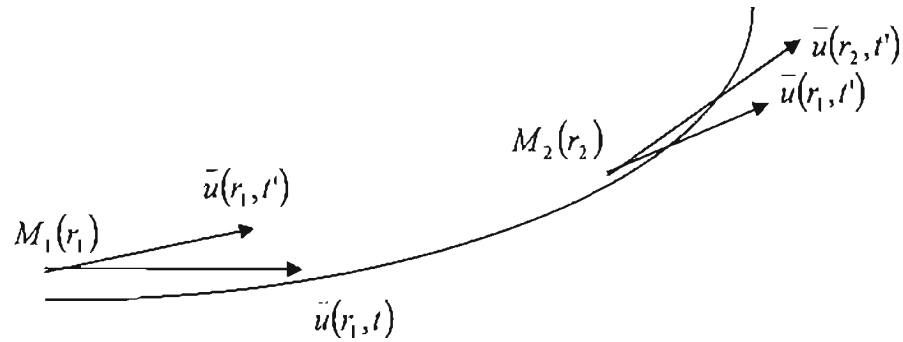


Figura 1.4 Descomposición de la aceleración de una partícula de fluido en un flujo estacionario.

La variación resultante de la velocidad  $\delta \bar{u}$  se escribe con la ayuda de un desarrollo de primer orden [5]:

$$\delta \bar{u} = \bar{u}(r_2, t') - \bar{u}(r_1, t) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \delta z,$$

donde  $\delta x, \delta y, \delta z$  son componentes del vector  $r_2 - r_1$ . La aceleración de la partícula del fluido es:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \end{aligned}$$

o en otra forma más compacta:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \quad (1.2)$$

La forma simbólica del segundo término de la derecha hace intervenir el producto escalar entre el vector de velocidad  $\mathbf{V}$  y el operador del gradiente.

### 1.1.3 Conservación de la masa en un flujo y la ecuación de continuidad

#### *Teorema de transporte de Reynolds*

Para analizar un flujo podemos utilizar lo que se conoce como *sistemas y volúmenes de control*, estos se apoyan de forma intrínseca en los puntos de vista lagrangiano y euleriano [6]. El teorema de transporte de Reynolds se aplica a la variación de cualquier cantidad extensiva.

1) Las cantidades que dependen de todas y cada una de las masas deben ser tales que se satisfagan las leyes básicas y secundarias aplicables. 2) Las cantidades que dependen de todos y cada uno de los volúmenes en el espacio deben ser tales que se satisfagan las leyes básicas y secundarias pertinentes. Para el caso 1) las leyes se aplican a una cantidad de materia determinada conocida como *sistema*. Un sistema puede cambiar de forma, posición y condición térmica, sólo por mencionar algunos ejemplos, pero debe contener la misma cantidad de materia. Para el caso 2), un volumen definido, conocido como *volumen de control*, se define en el espacio y su frontera se le denomina *superficie de control*. La cantidad de materia en el volumen de control puede cambiar con el tiempo pero no el volumen.

Se pueden relacionar el volumen de control y los sistemas mediante ciertas consideraciones. Para un campo arbitrario de velocidad de un flujo  $u(x, y, z)$  observado desde una referencia XYZ, en el cual se tiene un sistema de masa finita para los tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ , tal como en la figura (1.5). Además, el volumen del espacio ocupado por el sistema en el tiempo  $t$ . El volumen del espacio ocupado por el sistema es un volumen de control fijo en XYZ. Si  $B$  es una cantidad extensiva arbitraria (es decir, que  $B$  depende de la masa) y sea  $b$  la propiedad específica por unidad de masa.  $B$  queda definida como  $B = \iiint b dV$ , donde  $dV$  es el elemento de volumen.

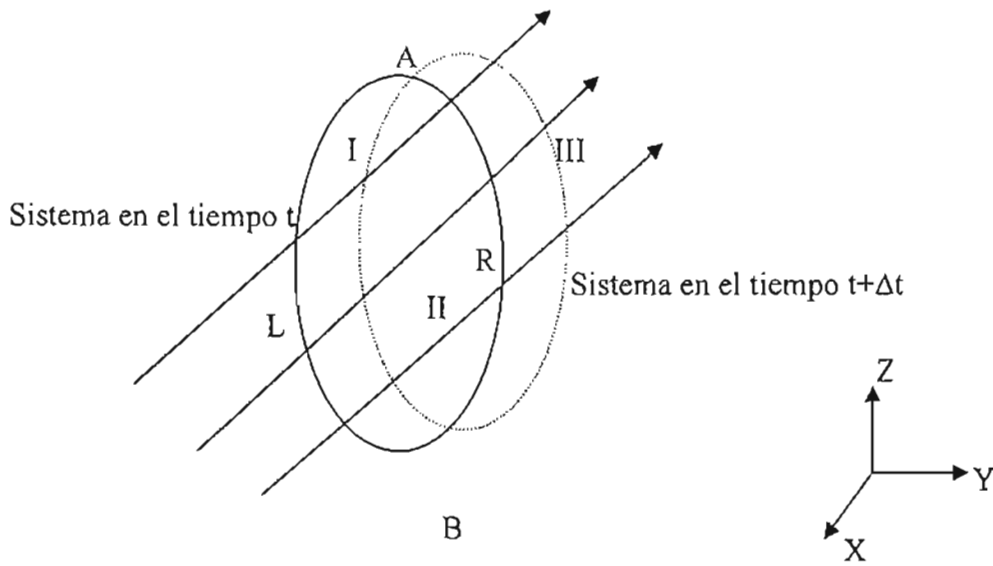


Figura 1.5 El sistema representa un elemento de fluido al tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ . Este diagrama ayudará a comprender mejor el teorema de transporte de Reynolds; se puede observar como se sigue la evolución de un elemento de fluido en el tiempo.

El sistema al instante  $t$  y en el instante  $t + \Delta t$  se divide en tres regiones como en la figura (1.5). La región II es común para el sistema en estos dos instantes. Ahora la tasa de cambio de  $B$  se calcula a continuación:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{DB}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint_{II} bdV + \iiint_I bdV\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint bdV + \iiint_I bdV\right)_t}{\Delta t} \right] \quad (1.3)$$

Aplicando la propiedad distributiva de los límites, podemos reordenar la relación (1.3),

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint_{II} bdV\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_I bdV\right)_t}{\Delta t} \right] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint_{II} bdV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right] - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint bdV\right)_t}{\Delta t} \right] \quad (1.4)$$

El primero de los límites de la relación (1.4) queda como función del tiempo y cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  el volumen II se convierte en el volumen de control, entonces:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint_{II} bdV\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_I bdV\right)_t}{\Delta t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} bdV \quad (1.5)$$

Donde  $VC$  es el volumen de control.

Para el segundo límite de la relación (1.4) podemos decir que la integral que contiene, aproxima la cantidad  $B$  que atraviesa parte de la superficie de control ARB en la figura (1.5) durante el tiempo  $\Delta t$ , es decir, si se tiene un elemento de volumen de la sección II y se examina la expansión de éste, se realiza con cierta rapidez y un eje del volumen dependerá de la velocidad, para obtener valores de longitud y obtener el elemento de volumen multiplicamos la diferencia  $\delta t$  temporal entre los volúmenes I y III por la velocidad de expansión  $u$ , cuando se evalúa el límite esta cantidad se convierte en el valor exacto del flujo de salida de  $B$  a través de la superficie de control. Para la integral evaluada con el tercer límite se tiene el flujo de entrada de  $B$  en el volumen de control. Entonces la siguiente diferencia es la tasa neta de flujo de salida de  $B$  a través del volumen de control:

$$\text{Tasa neta de salida de } B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint_{II} bdV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right] - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\left(\iiint bdV\right)_t}{\Delta t} \right] \quad (1.6)$$

De la relación (1.5) que es la representación del cambio de masa en el tiempo y aplicando el teorema de Gauss, podemos escribir el flujo de  $B$  por unidad de tiempo como:

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint bdV = - \iint_S [bu \cdot \hat{n}] dS \quad (1.7)$$

El valor de la velocidad que aparece en la integral de superficie nos indica que si tomamos un elemento de volumen comprendido entre el volumen I y III.



De la relación (1.7) tenemos  $\frac{\partial}{\partial t} \iiint b dV + \iint [b\bar{u} \cdot \bar{n} dS = 0$ , por tanto,

$$\frac{DB}{Dt} = \iiint \frac{\partial}{\partial t} b + \nabla(b\bar{u}) dV = 0 \quad (1.8)$$

Al integrando se le conoce como ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t} b + \nabla(b\bar{u}) = 0 \quad (1.9)$$

Haciendo la relación anterior igual a cero, se asegura que (1.8) siempre se cumpla.

Para el caso de un fluido con densidad constante en el tiempo y el espacio,  $b$  se vuelve constante respecto al tiempo y el término de la derivada temporal desaparece, entonces la relación (1.9) queda como:

$$\nabla \cdot \rho\bar{u} = 0 \quad (1.10)$$

#### 1.1.4 Ecuación de Navier-Stokes

Para describir el movimiento de un fluido hacemos uso de la segunda ley de Newton a un elemento de volumen del fluido de masa  $dm$ , en general sabemos que el momento se puede escribir como:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (1.11)$$

El momento  $\bar{P}$  para la *masa del sistema* lo expresamos como,

$$P = \iiint [U dm]_{\text{masa del sist}} \quad (1.12)$$

Entonces,  $dF = dm \frac{dU}{dt}$ , donde  $U = (u_x, u_y, u_z)$ .

Usando la relación de aceleración (1.2) escribimos,

$$dF = dm \frac{DU}{Dt} = dm \left[ u_x \frac{\partial U}{\partial x} + u_y \frac{\partial U}{\partial y} + u_z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial t} \right] \quad (1.13)$$

Necesitamos ahora obtener las componentes de la fuerza. Las fuerzas actuantes sobre un elemento de volumen del fluido se clasifican en fuerzas másicas y fuerzas de superficie. Tomemos la componente  $x$  de la fuerza actuando sobre un elemento de volumen de masa  $dm$  y volumen  $dV = dxdydz$ . Todas las fuerzas que actúan en la dirección  $x$  originarán esfuerzos superficiales, entonces:

$$dF_{sx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (1.14)$$

Si la única fuerza de cuerpo por unidad de masa que actúa es  $\bar{g}$ , entonces la fuerza neta es:

$$\begin{aligned} dF_x &= dF_{Bx} + dF_{sx} = \left( \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz \\ dF_y &= dF_{By} + dF_{sy} = \left( \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dxdydz \\ dF_z &= dF_{Bz} + dF_{sz} = \left( \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dxdydz \end{aligned} \quad (1.15)$$

Sustituyendo lo anterior en la relación (1.13) obtenemos,

$$\begin{aligned} \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Para un flujo newtoniano el esfuerzo viscoso es proporcional a la deformación cortante y se puede expresar en términos de la viscosidad dinámica del fluido y los gradientes de velocidad.

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
\tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
\sigma_{xx} &= -p_x - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot U + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\sigma_{yy} &= -p_y - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot U + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\sigma_{zz} &= -p_z - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot U + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Si reemplazamos las ecuaciones de los esfuerzos en la relación de movimiento, obtendremos:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du_x}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot U \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \\
\rho \frac{Du_y}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot U \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] \\
\rho \frac{Du_z}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot U \right) \right]
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Las relaciones anteriores se denominan ecuaciones de Navier-Stokes [N-S], para una componente de la velocidad, tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = -\nabla P + \nu \nabla^2 U + \vec{f} \tag{1.19}$$

Siendo  $\vec{f}$  las fuerzas másicas. La viscosidad cinemática es  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Cabe observar que a diferencia de la ecuación de continuidad, la ecuación de N-S es una relación vectorial por lo que en realidad según las dimensiones en las que estemos trabajando, tendremos un conjunto de ecuaciones.

Si aplicamos el operador rotacional al campo de velocidades  $\vec{u}$ , entonces obtenemos la vorticidad:

$$\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u} \quad (1.20)$$

Podemos escribir la ecuación de N-S de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + -\bar{u} \times \bar{\omega} + \nabla \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{f} \quad (1.21)$$

Pues  $(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\bar{u} \times \bar{\omega} + \nabla \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \bar{u}] = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}, \\ \nabla \times (-\bar{u} \times \bar{\omega}) &= -\bar{u} \cdot \nabla \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \nabla)(-\bar{u}) - \bar{\omega} \nabla \cdot (-\bar{u}) + (-\bar{u}) \nabla \cdot \bar{\omega} \\ \text{Y } \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) &= -\bar{u} \cdot \nabla \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \nabla)(-\bar{u}) = -\bar{u} \cdot \nabla \bar{\omega} + (\bar{\omega} \cdot \nabla \bar{u}). \end{aligned}$$

Para el otro lado de la igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( -\nabla \left( \frac{1}{\rho} p \right) \right) &= 0, \\ \nabla \times (\nu \nabla^2 \bar{u}) &= \nu \nabla^2 \bar{\omega}, \end{aligned}$$

$\nabla \times \bar{f} = 0$ , si  $\bar{f}$  es conservativa, podemos decir que  $\bar{f} = -\nabla \phi$ .

Ahora podemos escribir la ecuación de vorticidad,

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\omega} = (\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{\omega} \quad (1.22)$$

Aquí queda eliminado el término del gradiente de presión, ya que el rotacional de un gradiente es nulo. El primer miembro describe el estiramiento de los tubos de vorticidad en la dirección de la velocidad. El segundo término del lado derecho de la igualdad describe el amortizamiento de  $\bar{\omega}$  por la viscosidad [2].

### 1.1.5 El número de Reynolds

El número de Reynolds se define como la siguiente cantidad:

$$\text{Re} = \frac{\rho U l}{\mu}, \text{ donde } U \text{ es la velocidad promedio del fluido} \quad (1.23)$$

Haciendo un análisis dimensional de la relación (1.19), conoceremos el significado de este importante número. Necesitamos una cantidad que sintetice información sobre la velocidad, escalas características, densidad y la viscosidad de un fluido de forma adimensional. Se pueden determinar otras cantidades adimensionales que puedan relacionarnos diferentes parámetros contenidos en la ecuación de N-S. Hacemos el uso del teorema  $\pi$  de Buckingham que dice: *el número de grupos adimensionales independientes que puede emplearse para describir un fenómeno en el que intervienen  $n$  variables es igual al número  $n-r$ , donde  $r$  es el número de dimensiones básicas necesarias para expresar las variables dimensionalmente* [6]. Así se puede hacer una formulación para el problema para obtener una relación funcional entre dos grupos adimensionales.

Si escribimos los miembros de la ecuación de N-S como el producto de una cantidad con significado físico *-dimensional* por una cantidad *adimensional* de la siguiente forma:

$$u^{\cdot} = \frac{u}{U}$$

$$p^{\cdot} = \frac{P}{\rho U^2}$$

$$x^{\cdot} = \frac{x}{L}$$

$$t^{\cdot} = \frac{t}{T}$$

$$T = \frac{L}{U}$$

Ahora podemos escribir la derivada parcial respecto del tiempo de la velocidad y obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(Uu^{\cdot})}{\partial(Tt^{\cdot})} = \frac{U}{T} \frac{\partial u^{\cdot}}{\partial t^{\cdot}}$$

Los otros términos quedan así:

$$\frac{U}{T} \frac{\partial u^{\cdot}}{\partial t^{\cdot}} + \frac{U^2}{L} (u^{\cdot} \cdot \nabla^{\cdot}) u^{\cdot} + \frac{U^2}{L} \nabla^{\cdot} p^{\cdot} = \nu \frac{U}{L^2} \nabla^{\cdot} u^{\cdot}$$

No tomamos en cuenta de la ecuación de N-S el término de la fuerza, esto es por simplicidad. Ahora agrupamos los términos constantes,

$$\frac{L^2}{U} \left( \frac{\partial u^{\cdot}}{\partial t^{\cdot}} + \frac{U^2}{L} (u^{\cdot} \cdot \nabla^{\cdot}) u^{\cdot} + \frac{U^2}{L} \nabla^{\cdot} p^{\cdot} \right) = \nu \frac{U}{L^2} \nabla^{\cdot} u^{\cdot}$$

$$\frac{UL}{\nu} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*) u^* + \nabla^* p^* \right) = \nabla^* u^*$$

El término constante que multiplica el lado izquierdo de la expresión anterior, no es otra cosa que el número de Reynolds (relación 1.23).

En un flujo, un número pequeño de Reynolds significa que las fuerzas viscosas y el transporte difusivo asociado son dominantes. El perfil del flujo resulta de un equilibrio entre las fuerzas de fricción viscosas y los gradientes de presión o fuerzas externas sobre el volumen que contiene al flujo.

A números de Reynolds grandes, el transporte de la cantidad de movimiento debido a la viscosidad es dominante, y comienzan a aparecer términos no lineales en las componentes de la velocidad y de sus gradientes, estos flujos son muy inestables, por ejemplo: la turbulencia.

## 1.2 Teoría estadística

No es posible hacer una determinación precisa de las variaciones del campo de velocidades del flujo a números de Reynolds grandes, esto es debido a que las velocidades medidas instantáneas no son una cantidad predecible. De éste se hacen descomposiciones entre valores medios y valores de las fluctuaciones presentadas. Cabe, antes de continuar, introducir algunos conceptos que nos ayudarán a comprender mejor las implicaciones de la descomposición de Reynolds.

### 1.2.1 Definiciones estadísticas

Tómese cierta magnitud  $A$ , que puede adoptar una serie de  $N$  valores  $a_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Entonces comenzamos definiendo el promedio de  $A$  como,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \quad (1.24)$$

Para un sistema  $Q$  que admite una propiedad observable  $A$ , cuya medición puede arrojar  $N$  valores diferentes  $a_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , suponemos que a cada valor  $a_i$  le corresponde a un diferente estado o configuración del sistema,  $a_i$  es una variable aleatoria o estocástica. Solamente será posible predecir con certeza el resultado de un solo experimento pero, podemos hacer afirmaciones estadísticas sobre un gran número de experimentos similares. En lugar de examinar un solo sistema  $Q$ , consideramos un conjunto muy grande de  $M$  sistemas semejantes a  $Q$  independientes entre sí. Este conjunto ideal se denomina ensemble.

Para el cálculo del promedio, suponemos que se puede medir de un *ensemble*. Si el promedio fuera temporal, es decir, continuo o de una serie temporal de medidas, la magnitud de  $A$  se obtendrá como una función continua en el tiempo, el promedio para cierto intervalo de medición se define como,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt \quad (1.25)$$

Podemos observar el siguiente caso: si el fenómeno que genera  $A$  es estacionario y se hace  $N \rightarrow \infty$ , entonces el promedio de ensemble y el temporal serán iguales, a esto se le llama hipótesis ergódica [2].

Si la variable  $A$  se puede expresar como una función continua del tiempo, en un cierto intervalo  $t \in [0, T]$ . Se define una fluctuación de  $A$  como,

$$a'(t) = a(t) - \langle A \rangle, \text{ y } \langle a' \rangle = 0 \quad (1.26)$$

Una magnitud importante en el estudio de la turbulencia es la desviación cuadrática media de la fluctuación  $\langle a'^2 \rangle^{1/2}$ , esta cantidad indica la escala de la variación de  $a(t)$  alrededor del valor medio. La fluctuación relativa  $\langle a'^2 \rangle^{1/2} \cdot \langle A \rangle^{-1}$  es también una medida importante de la variación.

Para analizar una magnitud  $a(t)$  son de trascendencia sus valores estadísticos; una función de densidad de probabilidad (fdp), que es aquella  $P(a)$  que tiene la propiedad de que  $P(a)da$  nos da la probabilidad de obtener un valor en el intervalo  $[a, a + da]$ .

$$\begin{aligned} a) \quad 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(a) da \\ b) \quad \langle A \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} a P(a) da \\ c) \quad \langle a'^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \langle A \rangle)^2 P(a) da \\ d) \quad \langle a'^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \langle A \rangle)^n P(a) da \end{aligned} \quad (1.27 \text{ a, b, c, d})$$

Para la estadística son de gran interés el tercer y el cuarto momento, pues  $S$  (sesgo) indica la simetría de la fdp alrededor de la media.  $K$  (kurtosis) indica la importancia de los valores simétricos de la fdp, pero alejados de la media, es decir las colas de la fdp. Estos dos últimos momentos pueden escribirse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} a) \quad S &= \langle a'^3 \rangle \cdot \langle a'^2 \rangle^{-3/2} \\ b) \quad K &= \langle a'^4 \rangle \cdot \langle a'^2 \rangle^{-2} \end{aligned} \quad (1.28 \text{ a, b})$$

Con relativa frecuencia se encuentran en la naturaleza series de valores con una fdp que tiene la forma teórica de la curva de Gauss.

$$P(a) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\left(\frac{-(a-\langle A \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)}, \text{ con } \sigma^2 = \langle a'^2 \rangle \quad (1.29)$$

La distribución (1.29) es simétrica y por lo tanto  $S = 0$  y el valor de  $K = 3$  [7].

Una manera de medir la rapidez con la que fluctúa una cierta señal, tanto en el tiempo como en el espacio, es mediante el uso de la autocorrelación. Por decir, se tiene cierta variable  $a(t)$ , con un promedio  $\langle A \rangle$  y una fluctuación  $a'(t)$ , y construimos otra a partir de esta mediante un desplazamiento  $\tau$  del tiempo,  $a(t+\tau) = \langle A \rangle + a'(t+\tau)$ . Al multiplicar las fluctuaciones de estas dos variables y hacer un promedio temporal, obtenemos un número diferente para cada valor de  $\tau$ . Si  $\tau$  es muy pequeño, el valor será cercano a  $\langle a'^2 \rangle$ , de tal forma que el coeficiente de autocorrelación temporal queda como

$$R(\tau) = \frac{\langle a'(t)a'(t+\tau) \rangle}{\langle a'^2 \rangle} \quad (1.30).$$

Se cumple que  $R(\tau) \rightarrow 1$  cuando  $\tau \rightarrow 0$ . Si la variable observable es estadísticamente estacionaria, la función de autocorrelación será simétrica respecto a,  $\tau = 0$  por tanto, su primera derivada será nula en el origen. En el fenómeno de la turbulencia se encuentra que la función de correlación tiende asintóticamente a 0 para valores grandes de  $\tau$ .

Podemos inmediatamente obtener una escala de tiempo asociada directamente a la autocorrelación temporal. Si se supone que la siguiente integral converge, podemos obtener la *escala integral de tiempo o, tiempo integral*

$$T_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r R(\tau') d\tau'. \quad (1.31)$$

Otra escala de tiempo característica asociada a la autocorrelación temporal la podemos obtener desarrollando la función de autocorrelación hasta el segundo orden en el origen,

$$R(\tau) \approx R(0) + \frac{dR(0)}{d\tau} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} \tau^2 \quad (1.32)$$

con  $R(0) = 1$  y  $\frac{dR(0)}{d\tau} = 0$ , de forma que



$$R(\tau) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} \tau^2 \quad (1.33)$$

y por otro lado, si desarrollamos hasta el segundo orden

$$a'(t+\tau) \approx a'(t) + \frac{da'(t)}{dt} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 a'(t)}{dt^2} \tau^2 \quad (1.34)$$

y multiplicando por  $a'(t)$ , promediando y dividiendo por  $\langle a'^2 \rangle$ , como en la función de autocorrelación  $R$  relación (1.30), comparamos términos y se obtiene,

$$\frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} = \left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle \cdot \langle a'^2 \rangle^{-1} \quad (1.35)$$

y

$$R(\tau) \sim 1 + \frac{1}{2} \frac{\left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle}{\langle a'^2 \rangle} \tau^2 \text{ cuando } \tau \rightarrow 0 \quad (1.36)$$

Esta última expresión da paso a la definición de un segundo tiempo característico,

$$T_2 = \left[ 2 \langle a'^2 \rangle \cdot \left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle^{-1} \right]^{1/2} \quad (1.37)$$

utilizando

$$a' \frac{d^2 a'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( a' \frac{da'}{dt} \right) - \left( \frac{da'}{dt} \right)^2 \Rightarrow \left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle = - \left\langle \left( \frac{da'}{dt} \right)^2 \right\rangle \quad (1.38)$$

que es la segunda derivada de la señal en cuestión.

El tiempo integral  $T_1$  indica las grandes escalas temporales de las fluctuaciones. El tiempo  $T_2$  da información sobre la importancia de las fluctuaciones rápidas temporales.

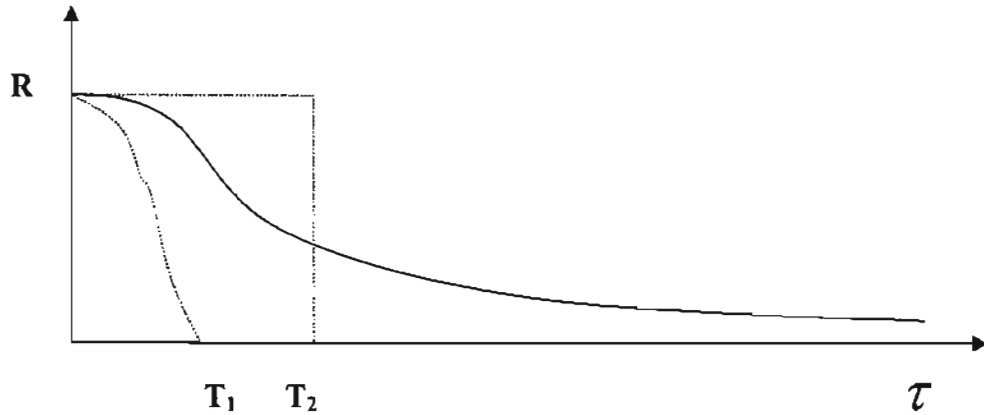


Figura 1.6 Autocorrelación temporal de una señal. Interpretación gráfica de las escalas características de tiempo.  $T_1$  es la escala integral de tiempo,  $T_2$  está asociada a las variaciones rápidas del sistema.

Estos cálculos también pueden efectuarse para una cantidad espacial.

Luego de haber visto los conceptos anteriores podemos proseguir con la ecuación de Reynolds. La idea principal es la de descomponer la velocidad de un flujo turbulento de la siguiente manera:

$$\bar{u} = \bar{U} + \bar{u}' \quad (1.45)$$

donde  $\bar{U} = \langle \bar{u} \rangle$ , luego la ecuación de continuidad se cumple también para el flujo medio y para las fluctuaciones,

$$\begin{aligned} a) \nabla \cdot \bar{U} &= 0 \\ b) \nabla \cdot \bar{U}' &= 0 \end{aligned} \quad (1.46 \text{ a, b})$$

al hacer el promedio de las ecuaciones de N-S se obtienen las llamadas ecuaciones de Reynolds para el flujo medio y que está dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{U} + (\bar{U} \cdot \nabla) \rho \bar{U} = -\nabla p + \nabla^2 \bar{U} + \tau_{ij} + \rho \langle \bar{f}' \rangle \quad (1.47)$$

donde la diferencia más notable entre las ecuaciones de N-S es el término del tensor de Reynolds.

$$\tau'_{ij} = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle \quad (1.48)$$

La ecuación (1.48) contiene información sobre la transferencia de cantidad de movimiento y de la pérdida de energía en el flujo medio debida a las correlaciones de las fluctuaciones de

velocidad. Existe un problema con las ecuaciones de Reynolds, y es que estas no son cerradas, es decir, que el número de variables es superior al número de ecuaciones a resolver. Hay una expresión que surge de generalizar el tensor de esfuerzos (1.17) para fluidos newtonianos utilizando la viscosidad dinámica turbulenta como  $\nu_t = \mu_t / \rho = l u'$ , donde  $\mu_t$  es la viscosidad turbulenta,  $l$  es una estimación de la distancia que ha de recorrer una partícula del fluido con una cierta dirección para que las componentes de su posición y velocidad pierdan su correlación. La velocidad  $u'$  representa las fluctuaciones de velocidad en el flujo turbulento (no es la intención enfocarse en este trabajo a buscar una expresión para el tensor de Reynolds).

Ahora, las dimensiones características de espacio y tiempo de un flujo turbulento están definidas a partir de las autocorrelaciones de las fluctuaciones de la velocidad. Es posible correlacionar las temporales y las espaciales con base en la *hipótesis de Taylor del flujo congelado*. La interpretación física de la hipótesis de Taylor nos dice que las fluctuaciones de la velocidad en el tiempo en un punto fijo del espacio formadas por un flujo turbulento “congelado”, moviéndose como un todo, son idénticas, desde un punto de vista estadístico las fluctuaciones de la velocidad en un instante dado a lo largo del eje  $x$ . Si el flujo es homogéneo con una velocidad media  $\bar{U}$  en la dirección  $x$ , podemos escribir la derivada parcial temporal como:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.49)$$

esto se puede hacer si las fluctuaciones  $u'$  son menores que la velocidad media  $U$ .

Retomemos la escala integral de tiempo. La integral de la correlación de fluctuaciones de la velocidad medidas en un solo punto con un desplazamiento temporal está dada por:

$$T = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (1.50)$$

con

$$R(\tau) = \frac{\langle u(x, t) \cdot u'(x, t + \tau) \rangle}{\langle u'(x)^2 \rangle} \quad (1.51)$$

como hipótesis para realizar esto, se piensa que el flujo turbulento es estadísticamente estacionario, de tal forma que, la autocorrelación  $R(\tau)$  es independiente de  $t$ . Se requiere, por convergencia que,  $R(\tau) \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , es decir, que las velocidades estén decorrelacionadas para el tiempo lo suficientemente largo [8].

Veremos dos tipos de escala integral: (1) la correlación espacial de velocidades longitudinales de las componentes de las velocidades en la dirección del vector de separación entre los puntos y (2) la correlación transversal de velocidades, si las componentes de las velocidades están en el plano perpendicular al vector de separación, entonces:

$$\begin{aligned}
 a) R_{\parallel}(r) &= \frac{\langle u_{\parallel}(x)u_{\parallel}(x+r) \rangle}{\langle u(x)^2 \rangle} \\
 b) R_{\perp}(r) &= \frac{\langle u_{\perp}(x)u_{\perp}(x+r) \rangle}{\langle u(x)^2 \rangle}
 \end{aligned}
 \tag{1.52 a, b}$$

donde las correlaciones no dependen de las propiedades vectoriales de  $\bar{r}$  si la turbulencia es isotrópica. Entonces podemos definir también la escala integral longitudinal de espacio como:

$$L_l = \int_0^{\infty} R_{\parallel}(r) dr \tag{1.53}$$

y la escala integral transversal de espacio como:

$$L_t = \int_0^{\infty} R_{\perp}(r) dr \tag{1.54}$$

Existe también una micro escala, llamada micro escala de Taylor. Para darnos una idea de la magnitud de estas escalas; si se produce turbulencia en el laboratorio con una rejilla, la escala integral tendrá el tamaño aproximado de los orificios de la rendija. La escala de Taylor está definida de la siguiente forma:

$$\frac{1}{L_{\lambda}^2} = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 R_{\parallel}(r)}{dr^2} \right|_{r \rightarrow 0} \tag{1.55}$$

### 1.3 Teoría de Kolmogorov

Debido al año en que Kolmogorov publicó dos artículos en los que explicaba una teoría estadística para el estudio de la turbulencia homogénea e isotrópica, a la teoría que expondremos brevemente se le conoce como teoría K41. Estas son sus hipótesis [9]:

- 1) Para un número de Reynolds lo suficientemente grande existe un intervalo de escalas de longitud donde un flujo turbulento está estadísticamente en equilibrio y sus propiedades están determinadas por la tasa de disipación de energía  $\varepsilon$  y la viscosidad  $\nu$ . Este estado de equilibrio es universal.
- 2) Si el número de Reynolds tiende a infinito, el espectro de energía y otras cantidades estadísticas en el intervalo de escalas de longitud estadísticamente en equilibrio son independientes de  $\nu$  y solamente dependen de  $\varepsilon$ .

La turbulencia consiste de una amplia gama de estructuras de diferentes escalas que contienen su energía, estas se encuentran limitadas naturalmente en una escala más grande y por una escala más pequeña  $\eta$  de la cual abundaremos en detalles en la sección 1.3.1. Por escalas pequeñas entenderemos la escala de disipación y el intervalo inercial postulado en la primera hipótesis de Kolmogorov. La segunda hipótesis de Kolmogorov dice que a una cierta escala pequeña, la turbulencia isotrópica y homogénea, estadísticamente queda determinada por el promedio de la disipación.

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left\langle \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \quad (1.56)$$

### 1.3.1 Escala de Kolmogorov o escala disipativa

La escala de Kolmogorov  $\eta$  se determina al hacer comparables el término no lineal con el término viscoso de la ecuación de N-S (1.19):

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \sim \frac{U^2}{\eta} \quad (1.57)$$

$U$  es una velocidad representativa. El término viscoso es por orden de magnitud:

$$\nu \nabla^2 \bar{u} \sim \nu U \eta^{-2} \quad (1.58)$$

Para obtener la escala de Kolmogorov igualamos estos términos:

$$U^2 \eta^{-1} = \nu U \eta^{-2} \quad (1.59)$$

Ahora podemos escribir la velocidad representativa como:

$$U = \frac{\nu}{\eta} \quad (1.60)$$

Por otro lado la energía es  $\varepsilon \sim U^2 / l$  ó  $\varepsilon \sim U^3 / \eta$  ya que  $l = \eta / U$ . Entonces podemos escribir  $U^3 \sim \varepsilon \eta$  y  $U \sim (\varepsilon \eta)^{1/3}$ , ahora la viscosidad la encontramos despejando de (1.60) e igualando con la velocidad característica  $(\varepsilon \eta)^{1/3} = \nu / \eta$ . Despejando  $\eta$  obtenemos  $\nu = \varepsilon^{1/3} \eta^{4/3}$  y al despejar  $\eta$  encontramos la escala disipativa ó de Kolmogorov:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (1.61)$$

Podemos escribir la velocidad representativa a esta escala:

$$U = \frac{\nu}{\eta} = \nu \left( \frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} = (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad (1.62)$$

### 1.3.2 Funciones de estructura

Una cantidad estadística utilizada con mucha frecuencia para conocer el comportamiento de la turbulencia, es la función de estructura [10] que es el momento de orden  $p$  de la diferencia de velocidad entre dos puntos separados por una distancia  $r'$  y que se define como:

$$S_p(r) = \langle \Delta u(r')^p \rangle = \langle (u(r+r') - u(r))^p \rangle \quad (1.63)$$

En la función de estructura (1.63) se hace una sustracción de los efectos del flujo medio y se está enfatizando los efectos de las diferencias de velocidad.

Ahora, si tenemos una función de estructura de orden  $p$ , según la teoría K41 podemos escribirla en términos de  $\varepsilon$  y  $r$ , elevados a una cierta potencia.

$$\langle \delta u(r)^p \rangle \sim \varepsilon^a r^b \quad (1.64)$$

Para encontrar el valor de estas potencias recurrimos a un análisis dimensional<sup>1</sup>.

Estas son las dimensiones de la función de estructura:  $\left[ \langle \delta u(r)^p \rangle \right] = \frac{L^p}{T^p}$ , las dimensiones de la tasa de disipación de energía:

$$[\varepsilon^a] = \left( \frac{L^2}{T^3} \right)^a$$

y para la longitud es:

$$[r^b] = L^b$$

Para encontrar las potencias  $a$  y  $b$  escribimos

$$\frac{L^p}{T^p} = \left( \frac{L^2}{T^3} \right)^a L^b = \frac{L^{2a+b}}{T^{3a}}$$

---

<sup>1</sup> Ver sección 1.1.5.

y dimensionalmente debe cumplirse que:

$$p = 2a + b$$

$$p = 3a$$

$$a = \frac{p}{3} \quad b = p - 2a = p - \frac{2}{3}p = \frac{p}{3}$$

Por lo tanto la relación (1.64) puede describirse como:

$$\langle \delta u(r)^p \rangle \sim \varepsilon^{\frac{p}{3}} r^{\frac{p}{3}} \quad (1.65)$$

Si hay autosemejanza<sup>2</sup> en el intervalo de escalas estadísticamente en equilibrio o región inercial, la función (1.63) puede determinarse mediante el producto de la diferencia de velocidad representativa elevada a una potencia  $p$  y una función  $F_p$  desconocida.

$$\langle \delta u(r)^p \rangle = \Delta U^p F_p \left( \frac{r}{L} \right) \quad (1.66)$$

Si se tiene independencia de la viscosidad y el único parámetro relevante es  $\varepsilon$ . Se propone tomar ahora un conjunto de cubos de arista  $r$ , tal que todos comparten un mismo valor de  $\delta u(r)$ . Entonces la estadística condicional de las diferencias de velocidad a una distancia  $s$  dentro de los elementos del conjunto es:

$$\langle \delta u(s)^p | \delta u(r) \rangle = \delta u(r)^p F_p \left( \frac{s}{r} \right) \quad (1.67)$$

En las relaciones (1.66) y (1.67) se hace una hipótesis de autosemejanza puesto que con la misma función  $F_p$  se describe un comportamiento a dos escalas diferentes. Al tomar el promedio de (1.67) de todos los valores posibles se obtiene como resultado la media no condicional, entonces se obtiene lo siguiente:

$$\langle \langle \delta u(s)^p \rangle \rangle = \langle \langle \delta u(r)^p \rangle \rangle F_p \left( \frac{s}{r} \right) \quad (1.68)$$

Y se puede entonces, determinar la función  $F_p$ :

---

<sup>2</sup> El comportamiento a diferentes escalas de un fenómeno que se puede describir mediante leyes de potencias, se dice que es autosemejante o si las características morfológicas son las mismas a diferentes escalas. Ver ejemplo de curva de Koch.

$$F_p\left(\frac{s}{L}\right) = F_p\left(\frac{r}{L}\right)F_p\left(\frac{s}{r}\right) \quad (1.69)$$

Al derivar la relación (1.69) con respecto a  $S$ , posteriormente hacer  $s = r$  permitirá obtener una ecuación diferencial ordinaria para  $F_p$ :

$$\xi F'_p(\xi) = F_p(\xi)F'_p(1),$$

con  $\xi = \frac{r}{L}$  la solución es:

$$F_p\left(\frac{r}{L}\right) = \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta(p)} \quad (1.70)$$

con  $\zeta(p) = F'_p(1)$ . Entonces la forma de la función de estructura se puede escribir de la siguiente forma:

$$\langle \delta u(r)^p \rangle = \Delta U^p \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta(p)} \quad (1.71)$$

Si un fenómeno presenta un determinado comportamiento a una escala de observación y al variar esta escala se continúa observando el mismo comportamiento entonces el fenómeno es autosemejante. Si el fenómeno en cuestión presenta en alguna de sus variables una relación de ley de potencias entonces, existe la autosemejanza [11]. Un ejemplo de lo anterior es la curva de Koch; inicialmente es una línea de longitud unitaria conocida como iniciador, de esta línea se forma una quebrada en cuatro segmentos de longitud  $1/3$  conocida como generador figura (1.7), lo siguiente es volver a quebrar cada segmento como se realizó inicialmente con el generador. A diferentes escalas se observarán las líneas sucesivas y todas tienen el mismo aspecto que el iniciador.



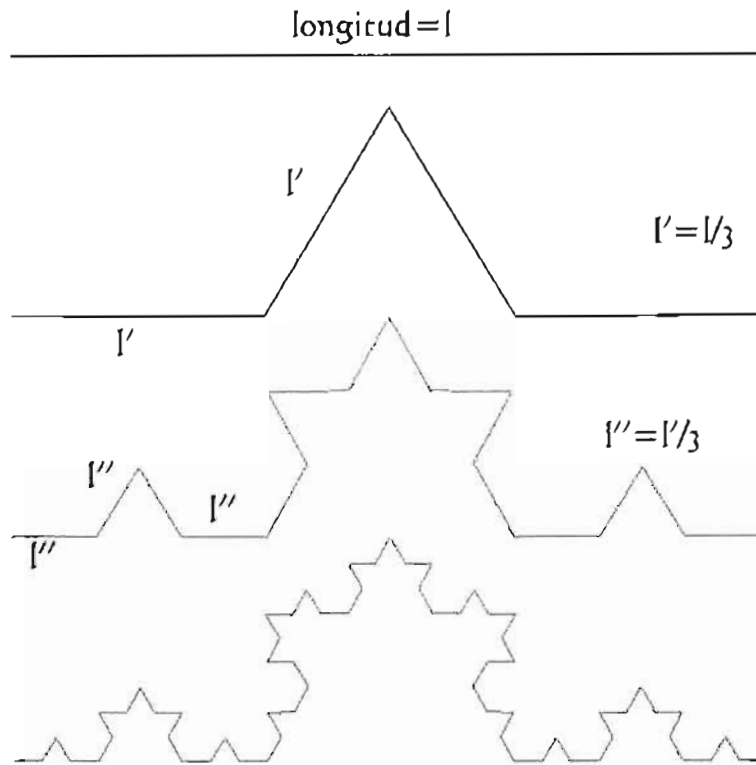


Figura 1.7. Curva de Koch.

### 1.3.3 El espectro de energía

La transformada de Fourier de la energía cinética por unidad de masa es:

$$E(k) = \int \frac{u^2}{2} e^{-ik \cdot r} dr \quad (1.72)$$

Las dimensiones del espectro de energía son:

$$[E(k)] = [u^2 L] = \frac{L^3}{T^2}.$$

La energía (1.72) se puede escribir como producto de  $\mathcal{E}$  y  $k$ :

$$E(k) = \mathcal{E} k^d \quad (1.73)$$

La dimensión de  $\mathcal{E}$  corresponde a la dimensión de energía. Los valores de  $c$  y  $d$  se determinan de la siguiente manera:

$$\frac{L^3}{T^2} = \left( \frac{L^2}{T^3} \right)^c L^{-d} = \frac{L^{2c-d}}{T^{3c}}$$

Como las dimensiones de uno y otro lado de la ecuación anterior son iguales se tiene que:

$$2 = 3c : 3 = 2 \text{ y } c - dc = \frac{2}{3}$$

$$d = 2c - 3 \Rightarrow d = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 3 = -\frac{5}{3}$$

Finalmente la expresión (1.73) queda de la siguiente forma:

$$E(k) = \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.74)$$

### 1.3.4 Comportamiento universal y la ecuación de Howart–Von Kármán

Una relación exacta que se deduce a partir de la ecuación de N-S con la hipótesis de homogeneidad e isotropía es la siguiente:

$$\langle \delta u(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r + 6\nu \frac{d}{dr} \langle \delta u(r)^2 \rangle \quad (1.75)$$

y lleva el nombre de ecuación de Howart von Kármán. Como se puede apreciar, esta ecuación concuerda con la teoría de Kolmogorov cuando el segundo término de la derecha es despreciable.

$$\langle \langle \delta u_1(r) \rangle^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r \quad (1.76)$$

A la relación anterior se le conoce como ley 4/5 de Kolmogorov. Veremos a continuación la importancia de la función de estructura de orden 3.

Rescribimos la relación (1.75) de forma adimensional para lo cual definimos dos variables:  $u^*$  y  $r^*$ .

$$u^* = uU^{-1} \text{ y } r^* = rL^{-1}$$

$U$  y  $L$  son respectivamente una velocidad representativa y una longitud característica. Las variables con asterisco son adimensionales, entonces obtenemos:

$$\langle \delta u(r)^3 \rangle = U^3 \langle \delta u^*(r)^3 \rangle$$

$$\langle \delta u(r)^2 \rangle = U^2 \langle \delta u^*(r)^2 \rangle$$

y

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{dr^*} \frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{L} \frac{d}{dr^*}$$

De acuerdo con lo anterior, rescribimos la ecuación (1.76) de Howart von Kármán:

$$U^3 \langle \delta u^{*3}(r^*) \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle L r^* + 6 \frac{\nu}{L} U^2 \frac{d}{dr^*} \langle \delta u^2(r^*) \rangle$$

dividimos la relación anterior entre  $U^3$  quedando:

$$\langle \delta u^{*3}(r^*) \rangle = -\frac{4}{5} \frac{\langle \varepsilon \rangle L r^*}{U^3} + 6 \frac{\nu}{LU} \frac{d}{dr^*} \langle \delta u^2(r^*) \rangle \quad (1.77)$$

Para la adimensionalización de la ecuación (1.73) se eligen entonces las cantidades  $L$  (1.61) y  $U$  (1.62) que cumplan con la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \varepsilon L U^{-3} &= 1 & \nu (UL)^{-1} &= 1 \\ \varepsilon &= U^3 L^{-1} & U &= \nu L^{-1} \end{aligned}$$

$$\langle \delta u^*(r^*)^3 \rangle = -\frac{4}{5} r^* + 6 \frac{d}{dr^*} \langle \delta u^*(r^*)^2 \rangle \quad (1.78)$$

Como se puede apreciar, la relación anterior muestra un comportamiento universal, pues no tiene ningún parámetro [6].

Si despejamos  $L$  y  $U$  se obtiene respectivamente la escala de Kolmogorov  $L = \left( \nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}$  y la velocidad característica  $U = (\varepsilon \nu)^{1/4}$ .

La teoría K41 ha tenido correcciones, debido a que la función de estructura (1.65) no se apega a resultados experimentales para exponentes diferentes de 3 (ver tabla 1). También se redefine la expresión para  $\varepsilon$  por una expresión que tome en cuenta las fluctuaciones de la tasa de disipación de energía.

En 1962 Kolmogorov y Oboukhov hacen una modificación, que se conoce cómo K62, que se basa en la utilización del promedio de la disipación de energía sobre un volumen de radio  $r$

$$\varepsilon_r(x, t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|h| < r} \varepsilon(x+h, t) dh \quad (1.79)$$

La nueva ley de escala que se propone es:

$$\langle \delta u(r)^\rho \rangle \sim \langle \varepsilon_r^{\rho/3} \rangle r^{\rho/3} \quad (1.80)$$

F. Estructura	K41	Experimento
S <sub>6</sub>	2	1.78
S <sub>5</sub>	1.66	1.55
S <sub>4</sub>	1.33	1.28
<b>S<sub>3</sub></b>	<b>1</b>	<b>1</b>
S <sub>2</sub>	0.67	0.7
S <sub>1</sub>	0.33	0.36

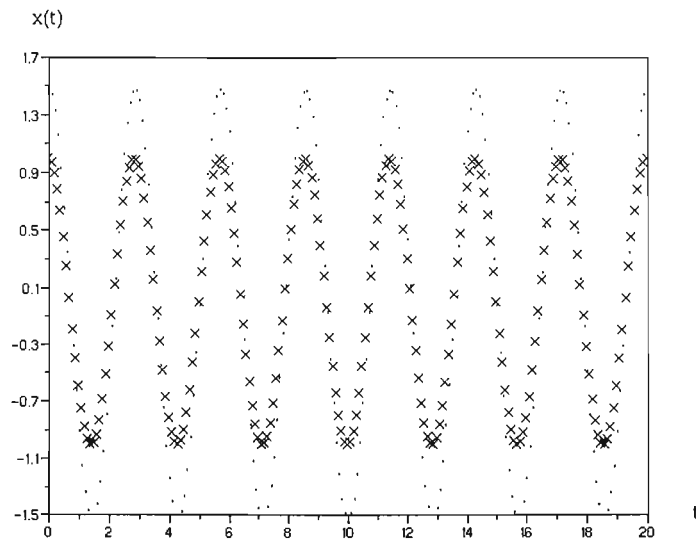
Tabla 1. Resultados teóricos y experimentales para funciones de estructura de diferente orden según la teoría K41. Se puede observar que la relación (1.65) solamente es consistente para la función de estructura de orden 3, ya que para otros órdenes, hay errores porcentuales de más del 10% entre los resultados teóricos y los experimentales [4].

## CAPITULO 2

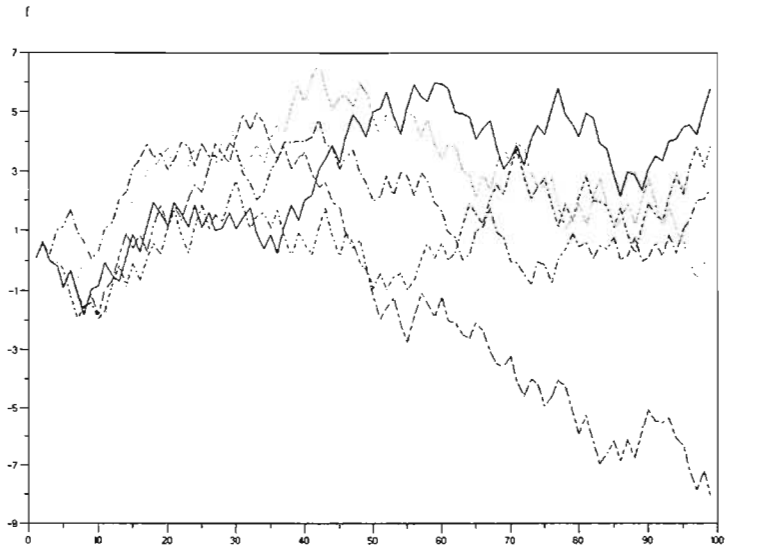
### SISTEMAS SENSIBLES A CONDICIONES INICIALES Y EL CÁLCULO DE LA ENTROPÍA- $\varepsilon$

#### 2.1 Sensibilidad a las condiciones iniciales

La irregularidad y la impredecibilidad de la evolución en el tiempo de sistemas no lineales ha sido llamada *caos* [12]. Ejemplo de estos sistemas; los osciladores mecánicos como el péndulo compuesto u objetos en vibración, rotación o calentados, otros ejemplos se encuentran en cavidades láseres, algunas reacciones químicas y los flujos turbulentos. Como veremos a continuación, las características principales de estos sistemas son que evolucionan a partir de dos condiciones muy cercanas en dos realizaciones diferentes, es decir, que presentan evoluciones divergentes; se les puede calcular a estos sistemas un exponente de Lyapunov positivo (ver las secciones precedentes de este capítulo) y también una *dimensión fractal* (ver sección 4.2.2). El comportamiento determinista y caótico se puede ver en la figura (2.1a, b). A pesar de su poca regularidad, los sistemas dinámicos caóticos, pueden provenir de ecuaciones deterministas tales como la segunda ley de Newton.



(a)



(b)

Figura 2.1. Se gráfica (a)  $x_1(t) = x_0 \text{sen}(2\pi\omega t)$  y  $x_2(t) = x_0' \text{sen}(2\omega\pi t)$  (líneas (×) y (•) respectivamente) para  $x_0 = 1$ ,  $x_0' = 1.5$  y  $\delta x_0 = 0.5$ , con  $\omega = 2.2$ , se puede observar que el único cambio en el comportamiento es la amplitud. (b) Se graficó la función  $f(x_t) = x_{t+1}$ , con  $x_{t+1} = x_t + 0.8 \text{sen}(2\pi x_t)$ , para cuatro condiciones iniciales distintas: línea continua  $x_0 = 0.1$ , línea punteada clara  $x_0 = 0.09$ , línea punteada oscura  $x_0 = 0.099$ , línea de puntos largos y cortos oscura  $x_0 = 0.0999$  y la línea de puntos largos y cortos clara  $x_0 = 0.09999$ . La diferencia respecto al valor inicial  $x_0 = 0.1$  es de  $1 \times 10^{-2}$ ,  $1 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-4}$  y  $1 \times 10^{-5}$ .

Si se considera una oscilador armónico (por ejemplo un resorte),  $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$  o bien  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  con  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , la solución general es:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)$$

Y como ejemplo, se toman dos condiciones iniciales muy parecidas,

$$x_1(0) = x_0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0$$

y

$$x_2(0) = x_0 + \delta x_0$$

$$\dot{x}_2(0) = 0$$

Las soluciones:

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

$$x_2(t) = (x_0 + \delta x_0) \cos(\omega t)$$

Podemos ver que las soluciones permanecen próximas (ver figura 2.1a)

$$\delta x = x_2(t) - x_1(t) = \delta x_0 \cos(\omega t).$$

La característica fundamental de los sistemas físicos caóticos radica en su sensibilidad al estado inicial. Se entiende por sensibilidad que, si dos sistemas idénticos tienen condiciones iniciales  $x$  y  $x + \delta$  respectivamente, donde  $\delta$  es una cantidad muy pequeña, entonces, sus estados dinámicos divergerán después de un tiempo de evolución de forma exponencial, ver figura (2.1b).

## 2.2 Exponente de Lyapunov

Si a un sistema se le permite evolucionar con dos condiciones iniciales distintas  $x$  y  $x + \delta$ , después de un tiempo de evolución, su divergencia puede ser cuantizada de forma aproximada mediante el exponente de Lyapunov<sup>3</sup>  $\lambda$ :

$$\delta(n) \approx \delta_0 e^{\lambda n}. \quad (2.1)$$

Si  $\lambda$  es negativo, las trayectorias convergen y la evolución no es caótica. Si  $\lambda$  es positivo, las trayectorias divergen; la evolución es sensible a condiciones iniciales, entonces el sistema es caótico.

Considérese un mapeo dado por una relación del tipo  $x_{t+1} = f(x_t)$ . La diferencia en la evolución de los dos sistemas con dos condiciones iniciales cercanas luego de  $n$ -iteraciones la podemos escribir como:

$$f^n(x + \delta) - f^n(x) \approx \delta e^{n\lambda} \quad (2.2)$$

o, bien si aplicamos el logaritmo a ambos lados de la ecuación,

$$\ln \left| \frac{f^n(x + \delta) - f^n(x)}{\delta} \right| \approx n\lambda \quad (2.3)$$

---

<sup>3</sup> Llamado así por el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918) [12].

Si  $\delta$  es pequeña, el cociente de las diferencias se puede aproximar por una derivada con respecto a la condición inicial y entonces:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx} \right| \quad (2.4)$$

Para la evaluación de la derivada tómesese en cuenta que  $f^n$  es la composición de  $n$ -veces la misma función. Por lo tanto se debe aplicar de forma iterada la regla de la cadena.

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{dx_1}{dx_0}$$

y

$$\ln \left( \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{dx_1}{dx_0} \right) = \ln \left( \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right) + \ln \left( \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \right) + \dots + \ln \left( \frac{dx_1}{dx_0} \right)$$

Finalmente se toma el límite cuando  $n$  tiende a infinito para tener todos los términos posibles, entonces:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \ln |f'^n(x_0)| \quad (2.5)$$

### 2.3 Dinámica simbólica

Una forma alternativa de caracterizar el comportamiento del sistema es mediante la introducción de una dinámica simbólica. Para ello, se va a definir un conjunto de celdas de tamaño  $\varepsilon$  que son visitadas por la cantidad observable. Además en un experimento o en un mapeo discreto, sólo se dispone de datos a intervalos de tiempo  $\tau$  fijos.

Los datos quedarán representados por medio de símbolos o etiquetas correspondientes a las celdas que éstos van ocupando luego de un tiempo  $T = n\tau$  y se dispone de un conjunto de  $n$  símbolos que representan la evolución del sistema:

$$W_k^n = \{L_k, L_{k+1}, \dots, L_{k+n-1}\} \quad (2.6)$$

$W_k^n$  será un arreglo llamado *palabra* (word), [13] y tendrá  $n$  símbolos (o *caracteres*). Una cantidad que es posible calcular con esta dinámica simbólica es la probabilidad de aparición de las distintas palabras de longitud  $n$  y por ejemplo, la entropía del sistema.



$$P(W_k^n(\varepsilon, \tau))$$

## 2.4 Entropía

Una apariencia intrincada de las trayectorias del sistema, nos lleva a preguntarnos sobre el grado de desorden existente. Se puede entonces, aplicar el concepto de entropía sobre palabras de longitud  $n$  [14]. La definición de esta cantidad es:

$$S = - \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i \quad (2.7)$$

En donde  $P_i$  es la probabilidad<sup>4</sup>. Para un conjunto de eventos  $A$ ,  $P$  está definida como el número de eventos ocurridos  $N_A$  entre todos los eventos posibles  $N$ .

$$P = \frac{N_A}{N} \quad (2.8)$$

A  $S$  también se le llama “cantidad de información” que produce un sistema. Es muy importante saber por qué la “información” es idéntica a la entropía de la termodinámica. Para poder cuantificar la cantidad de información producida por un sistema se deben hacer ciertas consideraciones; si se tiene un evento certero, la cantidad de *sorpres*a generada es cero, es decir, la cantidad de información es cero. La cantidad de información de un evento es una función decreciente de la probabilidad de que ocurra. Se plantea una función  $I(P)$  que cumpla con las condiciones mostradas en la figura (2.2):

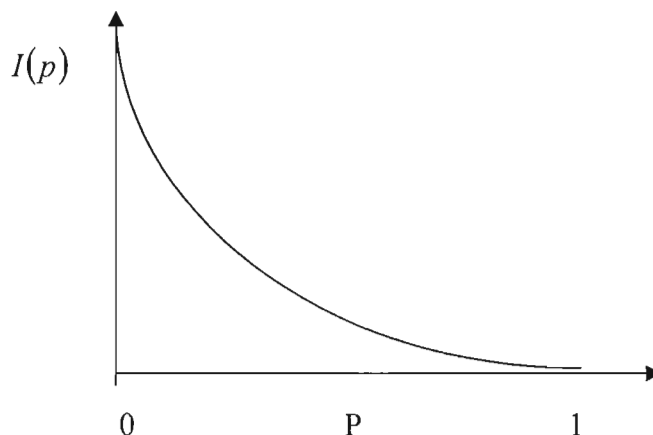


Figura 2.2. La relación esquemática entre la información  $I(P)$  si de un evento se conoce su probabilidad de ocurrencia [7].

La función que presenta el comportamiento de la figura (2.2) es:

<sup>4</sup> Ver apéndice A para más detalles.

$$I(P) = -a \ln(P) \quad (2.9)$$

$I(P)$  satisfice:  $P \rightarrow 0 \Rightarrow I \rightarrow \infty$  y  $P \rightarrow 1 \Rightarrow I \rightarrow \infty$ .

Debemos discutir ahora porqué la función  $I(P)$  se puede escribir como la relación (2.9).

### 2.4.1 Eventos independientes

La discusión presente nos introducirá a la noción y a la definición de eventos independientes. Cuando decimos, en lenguaje común, que dos eventos no tienen ninguna relación entre sí, estamos describiendo lo que en lenguaje técnico, es llamado “eventos independientes”. Podemos ver un ejemplo antes de dar una definición.

Si arrojamos dos dados y nos planteamos la siguiente pregunta; ¿cuál es la probabilidad de que el dado 1 dé un número menor ó igual a tres y que el dado 2 dé un número mayor ó igual a cinco? Respectivamente las probabilidades son:  $P(A) = \frac{3}{6}$  y  $P(B) = \frac{2}{6}$ .

Los eventos requieren que las dos condiciones sean satisfechas simultáneamente. Si  $A$  es el conjunto de los posibles resultados del dado 1 y  $B$  es el conjunto de resultados para el dado 2, queremos saber el número de posibles resultados que tienen estos eventos en común, debemos conocer su intersección  $A \cap B$ .

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Como podemos ver en el ejemplo la forma de obtener la probabilidad de dos eventos independientes es multiplicando la probabilidad del evento  $A$  por la probabilidad del evento  $B$ . La definición formal para eventos independientes es la siguiente:

*Los eventos  $A$  y  $B$  son independientes si y sólo si,*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

*Si los eventos  $A$  y  $B$  no satisfacen la relación anterior, entonces  $A$  y  $B$  no son independientes [7].*

### 2.4.2 La función de información

Una vez revisada la definición de eventos independientes, pediremos que la función  $I$  sea evaluada para situaciones de este tipo [7]. Entonces:

$$I(PQ) = I(P) + I(Q) \quad (2.10)$$

donde  $P$  y  $Q$  son probabilidades de esos eventos independientes con  $0 \leq P \leq 1$  y  $0 \leq Q \leq 1$ . Si derivamos respecto de  $P$ , obtenemos:  $QI'(PQ) = I'(P)$  y respecto de  $Q$ :  $PI'(PQ) = I'(Q)$ .

$$PQI'(PQ) = PI'(P) = QI'(Q) \quad (2.11)$$

$PI'(P) = QI'(Q) = c$ , al ser  $QI'(Q)$  independiente de  $P$

Integrando respecto de  $P$  la relación anterior,

$$\int dI(P) = -c \int \frac{dP}{P} \quad (2.12)$$

de tal forma que,  $I(P) = -c \ln P + d$ , donde  $c$  es una constante. Luego para los eventos independientes rescribimos el resultado de (2.12).

$$I(PQ) = -c \ln PQ + d = -c \ln P + d - c \ln Q + d \quad (2.13)$$

Se concluye que  $d$  se elimina debido a:  $d = 2d$  entonces  $d = 0$ , de (2.13) se recupera la relación (2.10). Y la función  $I(P)$  queda como:

$$I(P) = -c \log_b P \quad (2.14)$$

En teoría de la información es usual proponer a  $c$  como [7]:  $c = \frac{1}{\log_b 2}$ , tal que,

$$I(P) = \frac{-\log_b P}{\log_b 2} = -\log_2 P \quad (2.15)$$

Si para un sistema existen solamente dos posibilidades, entonces, la probabilidad de tener un resultado u otro es  $P = 1/2$ . La función de información la relación (2.15) adopta la propiedad que del sistema solamente se pueden obtener dos tipos de resultados, y si  $I(P) = 1$ , se dice que se tiene un bit de información.

### 2.4.3 Conexión entre la entropía y la entropía de la información

Si un evento tiene  $N$  posibles resultados con probabilidades  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , la información obtenida para el  $i$ -ésimo resultado es  $I(P_i)$ . Por otra parte, el valor esperado de la función de información queda como:

$$\langle I(P) \rangle = \sum_{i=1}^N P_i I(P_i) = -c \sum_{i=1}^N P_i \ln(P_i) \quad (2.16)$$

Donde  $\langle I(P) \rangle$  puede ser interpretada como la información necesaria para especificar el estado del sistema. Si todos los estados son igualmente probables, tal que,  $P_i = 1/N$  para toda  $i$ , entonces la entropía (relación 2.7) se reduce a  $S = \ln(N)$ . Si prevalece un solo estado en particular, la probabilidad que tiene será  $P_i = 1$ , entonces  $S = 0$  es el valor mínimo.

## 2.5 Entropía de Kolmogorov

La entropía de Kolmogorov [15] se define como:

$$K = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum P(W^n) \ln(P(iW^n)) \quad (2.17)$$

El límite cuando  $\tau \rightarrow 0$  se refiere al intervalo de tiempo en el que se miden dos datos sucesivos, el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se refiere a la construcción de una celda muy pequeña y el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se refiere a la construcción de palabras con una cantidad infinita de letras. Podemos agregar que, para un sistema analizado experimentalmente no podemos cumplir estrictamente con estos límites, pues; 1) tenemos una resolución cuyo máximo está definido por la frecuencia de adquisición y resolución en bits del sistema de conversión, 2) no es posible tener una cantidad infinita de datos.

## 2.6 Entropía de bloque y entropía- $\varepsilon$

Se define la “entropía de bloque” como:

$$H_n(\varepsilon, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum P(W^n) \ln(P(W^n)) \quad (2.18)$$

a diferencia de la entropía de Kolmogorov solamente se evalúa el límite temporal y, la cantidad de símbolos por palabra y de  $\varepsilon$ . Esto se hace pues se desea tener información de la entropía a diferentes escalas.

Para el cálculo de la entropía- $\varepsilon$ ,  $h(\varepsilon, \tau)$ , debemos tomar la diferencia entre la “entropía de bloque” de  $n$  y  $n+1$  símbolos y a diferentes valores de  $\varepsilon$ , de la siguiente manera:

$$h(\varepsilon, \tau) = \frac{1}{\tau} [H_{n+1}(\varepsilon, \tau) - H_n(\varepsilon, \tau)] \quad (2.19)$$

En esta relación se puede observar que se realizan comparaciones para la entropía de bloque de  $n+1$  y  $n$  letras. La entropía- $\varepsilon$  se define entonces como:

$$h(\varepsilon) = \lim_{\tau \rightarrow 0} h(\varepsilon, \tau) \quad (2.20)$$

## 2.7 Entropía- $\varepsilon$ y exponente de Lyapunov

Existe una relación entre el exponente de Lyapunov  $\lambda$  y la entropía  $h(\varepsilon)$ . La sensibilidad a las condiciones iniciales que caracteriza a los sistemas caóticos en la cual, para dos realizaciones del sistema que parten de dos condiciones iniciales muy cercanas se comparan sus evoluciones, se puede observar que divergen. Mientras en un inicio el sistema puede ser conocido con cierta precisión, la capacidad de predecir el estado del sistema posteriormente se reduce, por lo tanto es necesaria una cantidad mayor información para conocer cómo evoluciona del sistema.

Existe una relación entre el concepto del exponente de Lyapunov (sección 2.2) y el concepto de la entropía de Kolmogorov (sección 2.5). La evolución de un sistema puede clasificarse de las siguientes tres maneras: (a) tiene un comportamiento determinista no caótico, para el cual se calcula que  $K = 0$ , y  $\lambda \leq 0$ , (b) un sistema determinista y caótico, para  $0 < K$  y  $\lambda > 0$ , luego, si (c) es un sistema aleatorio para el cual sus estados futuros son completamente desconocido se tiene que  $K \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow \infty$  [12]. Según Ruelle y Eckmann [16] una relación del exponente de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov es:

$$K \leq \ln(e^{\lambda}) \quad (2.21)$$

Otra relación del exponente de Lyapunov con los conceptos de entropía que revisamos en este capítulo es la siguiente desigualdad:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) \leq \lambda$ . Es importante realizar el cálculo de  $\lambda$ , pues así encontraremos una cota superior para el valor de entropía de un sistema.

## 2.8 Entropía- $\varepsilon$ con el método de tiempos de salida (exit-times)

Para el cálculo de la entropía- $\varepsilon$  con el método de tiempos de salida [13], se deberá implementar la construcción de otra dinámica simbólica, la cual consiste en situar a una celda de tamaño  $\varepsilon$  centrada en el estado inicial del sistema, de tal manera que el primer par de símbolo  $t_i$  y  $k_i$  se obtiene cuando se satisface:

$$|x(t_0 + t_1) - x(t_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

En seguida se define otra celda centrada en  $x(t_1)$  y el siguiente par de símbolos  $t_2$ ,  $k_2$ , se obtiene cuando se satisface la condición:

$$|x(t_1 + t_2) - x(t_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donde  $t_i$  es el tiempo que tarda en salir el sistema de una celda de tamaño  $\varepsilon$  y  $k$  se introduce para mostrar si la variable  $x(t)$  salio hacia arriba ( $k=1$ ) o hacia abajo ( $k=-1$ ) de la celda. Cuando haya un estado que excede la condición anterior, entonces se construye otra celda centrada en el valor  $x(t_i + t_{i+1})$ ,  $|x(t_0 + t_1 + t_2) - x(t_0 + t_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . Se definen las *palabras* con el método de tiempos de salida como:

$$\Omega_i^n(\varepsilon, \tau_r) = \{(t_i, k_i), (t_{i+1}, k_{i+1}), \dots, (t_{i+n-1}, k_{i+n-1})\} \quad (2.22)$$

Luego, el cálculo de la entropía- $\mathcal{E}$  queda a continuación (haciendo analogía a la sección 2.6) como:

$$\begin{aligned} H_n^\Omega(\varepsilon, \tau_r) &= \sum P(\Omega^n) \ln P(\Omega^n) \\ h^\Omega(\varepsilon, \tau_r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [H_{n+1}^\Omega(\varepsilon, \tau_r) - H_n^\Omega(\varepsilon, \tau_r)] \\ h^\Omega(\varepsilon) &= \lim_{\tau_r \rightarrow 0} h^\Omega(\varepsilon, \tau_r) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Existe una relación entre la entropía  $h(\varepsilon)$  de la serie de tiempo original y la obtenida con la codificación de tiempos de salida ( $h^\Omega(\varepsilon)$ ). Esta relación nos la proporciona el teorema de McMillan se obtiene [13]:

$$h(\varepsilon) = \frac{h^\Omega(\varepsilon)}{\langle t(\varepsilon) \rangle} \quad (2.24)$$

donde  $\langle t(\varepsilon) \rangle$  es el promedio de tiempos de salida de la variable de celdas de tamaño  $\varepsilon$ . Se puede establecer una relación entre la frecuencia de aparición de las  $N$  palabras- $(\varepsilon, \tau)$  tal que:  $N(\varepsilon, \tilde{N})$  y  $\ln N(\varepsilon, \tilde{N}) \approx h(\varepsilon) \tilde{N} \tau = h(\varepsilon) T$ . Con el número de tiempos de salida  $M$ ;  $M(\varepsilon, \tilde{M})$  se puede también establecer el valor de  $h^\Omega(\varepsilon)$  como:  $\ln M(\varepsilon, \tilde{M}) \approx h^\Omega(\varepsilon) \tilde{M}$ . Por lo tanto, de la relación  $\tilde{M} = \frac{T}{\langle t(\varepsilon) \rangle}$ , donde  $\langle t(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{\tilde{M}} \sum_{i=1}^{\tilde{M}} t_i$ , se obtiene finalmente la entropía- $\varepsilon$  por unidad de tiempo como la ecuación (2.24).

En situaciones prácticas, existe un intervalo mínimo  $\tau_s$  en el muestreo, pues la frecuencia de adquisición de datos no es infinita. Con esto podemos estimar mejor el valor de  $h^\Omega(\varepsilon)$  por medio de  $h^\Omega(\varepsilon) \approx h^\Omega(\varepsilon, \tau_s)$ , en lugar de realizar el cálculo del límite de la relación (2.23).

En los casos que se abordan en este trabajo la contribución del escalamiento  $\varepsilon$  en  $h(\varepsilon)$  está dado por el valor promedio de los tiempos de salida  $\langle t(\varepsilon) \rangle$  y por el valor de  $h^\Omega(\varepsilon, \tau_r)$ . El término dominante de  $h(\varepsilon)$  es  $\frac{1}{\langle t(\varepsilon) \rangle}$ , mientras que  $h^\Omega(\varepsilon)$  da una corrección.

## 2.9 Ejemplos

La intención de introducir ejemplos es probar que los programas escritos y utilizados para los cálculos de  $h(\varepsilon)$  son correctos. Debemos reproducir los resultados expuestos en [13]

Los modelos que trabajaremos son: (a) uno sensible a las condiciones iniciales (función de escalamiento del seno) y (b) otro que no lo es.

$$(a) \quad x_{t+1} = x_t + \rho \text{sen}(2\pi x_t) \quad (2.25)$$

$$(b) \quad F = -kx \quad (2.26)$$

La relación (2.25) es un ejemplo de un sistema disipativo fuera del equilibrio, el cual puede mostrar una rica dinámica de estados periódicos y caóticos. La relevancia en este trabajo de (2.25)<sup>5</sup> radica en que podemos conocer si el algoritmo para estimar  $h(\varepsilon)$  es correcto.

$$\ddot{q} = -\frac{q}{\tau} + a \text{sen}(2\pi q) + \mu \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

Para el ejemplo se describe la relación (2.27) donde su evolución se realizará de forma iterada.

A la relación (2.25) se le conoce como mapeo de escalamiento del seno, donde  $\rho$  es un parámetro el cual tomamos como constante  $\rho = 0.8$ . Si se hace  $\rho = 0$  entonces, se elimina el término no lineal, por otra parte, al hacer  $x_0 = z$  con  $z \in Z$ , la función seno es periódica para estos valores y no hay escalamiento, si  $x_0 = 1$  y  $x_1 = x_0 + \rho \text{sen}(2\pi x_0)$  queda  $x_1 = x_0$ .

### 2.9.1 Cálculo del exponente de Lyapunov para el escalamiento del seno

Para calcular el exponente de Lyapunov de (2.25) consideramos dos condiciones iniciales  $x_0 = 0.1$  y  $x_0' = 0.1 + \delta_0$ ;  $\delta_0 = 1 \times 10^{-4}$  y  $\rho = 0.8$ . Se puede ver en la figura (2.4) el cálculo del exponente de Lyapunov.

De acuerdo a la relación (2.5) se requiere evaluar la derivada de  $x_{t+1}$  con respecto a  $x_t$ . Esto último es sencillamente:

---

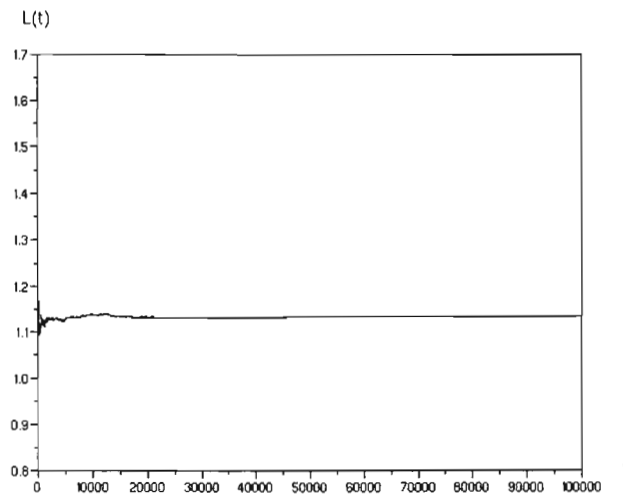
<sup>5</sup> Este modelo se usa para estudiar la conducción superiónica [17].

$$\frac{dx_{i+1}}{dx_i} = 1 + 2\pi\rho \cos(2\pi x_i) \quad (2.28)$$

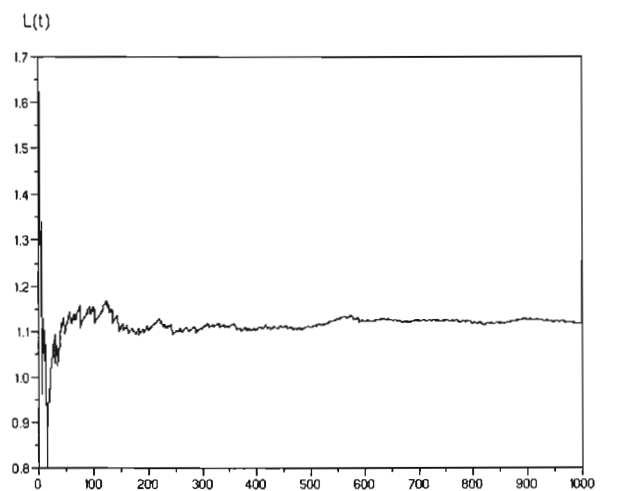
De acuerdo con la relación 2.5:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 + 2\pi\rho \cos(2\pi x_i)) \quad (2.29)$$

El exponente se encuentra acotado por un valor máximo, ya que  $\cos(2\pi x_i) \leq 1$  y entonces  $1 + 2\pi\rho \cos(2\pi x_i) < 1 + 2\pi\rho$ . El valor que se obtiene al calcular el exponente de Lyapunov con ayuda de la computadora es  $\lambda = 1.13$ . Por lo tanto  $\lambda \leq \ln(1 + 2\pi\rho) = 1.80$ .



(a)



(b)

Figura 2.4. Gráfica de  $\lambda = L(t)$  contra  $t$  para: (a) 10,000 realizaciones de 2.25 con condiciones iniciales:  $x_0 = 0.1$  y  $x'_0 = 0.0999$ ,  $\delta = 1 \times 10^{-4}$ . (b) Es un acercamiento de la gráfica (a) en donde es notorio como al inicio de la



evolución del sistema hay fluctuaciones del valor del exponente de Lyapunov, y conforme el tiempo de evolución es mayor, éste tiende a un valor constante  $\lambda = 1.13402$ .

## 2.9.2 Cálculo del exponente de Lyapunov para el ejemplo del oscilador armónico

En 2.26 tenemos la relación de la fuerza calculada para un resorte ideal. Podemos ver esta relación como una ecuación diferencial de segundo orden,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t) \quad (2.30)$$

por ello deben de satisfacerse dos condiciones iniciales; la posición inicial y su velocidad inicial,  $x(0) = x_0$  y  $v(0) = 0$ , para conocer si este sistema presenta sensibilidad a condiciones iniciales proponemos otra condición inicial  $x(0) = x_0 + \delta$  y  $v(0) = 0$ .

La solución general  $x(t)$  es:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (2.31)$$

Para los sistemas con condiciones iniciales  $x_0$  y  $x_0 + \delta$  las soluciones son:

$$(a) \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2.32)$$

$$(b) \quad x'(t) = (x_0 + \delta) \cos(\omega t)$$

hacemos,

$$x'(t) - x(t) = \delta \cos(\omega t) \leq \delta$$

si calculamos el exponente de Lyapunov con la relación 2.3 del cálculo anterior,

$$\ln \left| \frac{x'(t) - x(t)}{x_0' - x_0} \right| \Rightarrow \ln |\cos(\omega t)|$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln |\cos(\omega t)|$$

Dado que  $0 \leq |\cos(\omega t)| \leq 1$  entonces el logaritmo de la expresión anterior es siempre menor o igual a cero. Luego  $\lambda = \frac{1}{t} \ln |\cos(\omega t)| \leq 0$ . Esto refleja que la separación entre las trayectorias es siempre inferior o igual a  $\delta$ .

Interpretando el resultado obtenido de aplicar la definición 2.2, la evolución no es caótica, es decir, no hay sensibilidad a las condiciones iniciales.

### 2.9.3 Cálculo de la entropía- $\varepsilon$

Daremos a conocer el valor de la entropía- $\varepsilon$  de la relación (2.25), utilizando los métodos revisados desde 2.5 (figura 2.6) y el método de tiempos de salida de la sección 2.8 (figura 2.7). A continuación, se hará una comparación entre estos métodos y veremos que se cumple la desigualdad 2.21 de la sección 2.7.

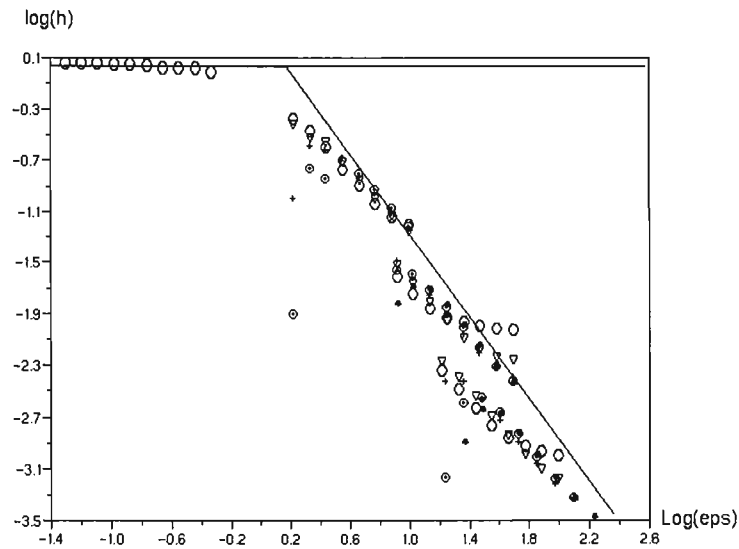


Figura 2.6 Método de Grassberger-Procaccia [15]:  $h(\varepsilon)$ , cuando se tiene  $\varepsilon \rightarrow 0$  se puede notar que la curva tiende hacia un valor constante, este corresponde con el calculado para el exponente de Lyapunov  $\lambda = 1.13$ . La ley de potencia del escalamiento es -1.5. Los cálculos se realizaron para  $\tau = 1$  ( $\circ$ ),  $\tau = 10$  ( $\diamond$ ),  $\tau = 100$  ( $\oplus$ ) y tamaños de palabras con  $n$  símbolos ( $n = 1, 4, 8, 12, 16, 20$ ).

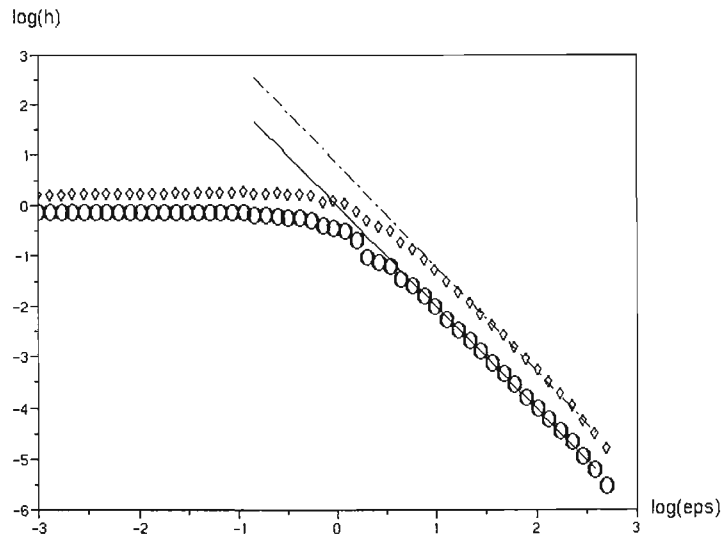


Figura 2.7 Se calculó el límite superior de  $h(\epsilon)$  ( $\diamond$ ) e inferior ( $\circ$ ) utilizando el método de tiempos de salida (ver sección 4.2.3 para mayores detalles). Este cálculo se realizó con  $4 \times 10^6$  iteraciones. Las líneas de tendencia trazadas tienen pendiente  $m_1 = 2.00$  (línea continua) y  $m_2 = 2.05$  (-).

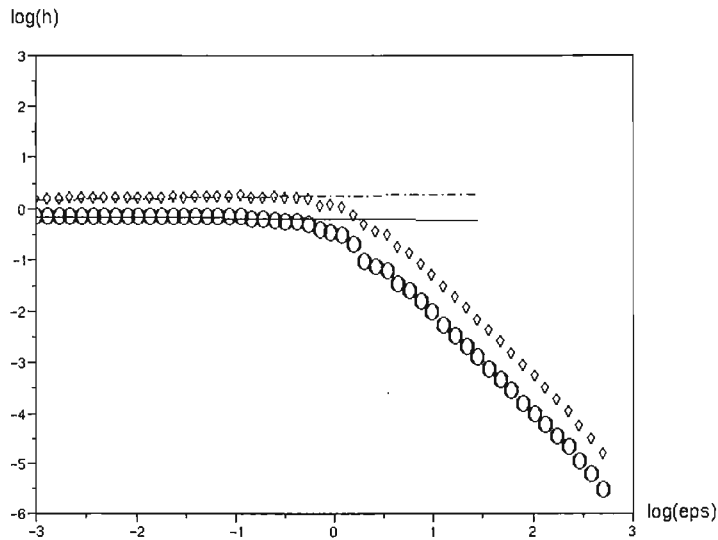


Figura 2.8. Al respecto del exponente de Lyapunov, hay un intervalo de escalas  $(-3,0)$  (aproximadamente) en el cual el escalamiento es casi nulo. Al observar los límites inferior y superior cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se tienen valores de  $\lambda_{\text{inf}} = 0.97$  y  $\lambda_{\text{sup}} = 1.06$ .

El método de Grassberger-Procaccia se aplica para diferentes cantidades de símbolos por palabra, comenzando por un símbolo hasta veinte símbolos. Posteriormente se hace una aproximación de  $h(\epsilon)$  trazando una recta con pendiente -2 para observar que los puntos calculados de  $h(\epsilon)$  se les puede aproximar con éste valor de pendiente. El exponente de

Lyapunov se obtiene cuando  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = \lambda$ , ver la figura 2.6. El valor de  $\lambda$  se obtiene directamente del ajuste de recta para los valores pequeños de  $\varepsilon$ .

A pesar de la eficacia para obtener el valor de  $h(\varepsilon)$  con el método de tiempos de salida del escalamiento del seno, se puede notar que los exponentes de Lyapunov no coinciden con el cálculo hecho por el método directo (figura 2.7) y que además, es mejor el resultado obtenido para  $\lambda$  con el método de Grassberger – Procaccia. Para valores iniciales del escalamiento del seno, pudieran haber fluctuaciones que sobrepasen en magnitud a las celdas definidas y entonces, ya no se cumple que éstos valores se encuentren en celdas contiguas, en cambio, cuando la magnitud de las celdas se incrementa, se eliminan estos problemas.

## CAPITULO 3

### TEORÍA DE CAPA LÍMITE Y CAPA LÍMITE TURBULENTA

#### 3 Capa límite laminar

En 1905 el ingeniero Ludwig Prandtl, motivado por encontrar el campo de velocidades de flujos reales cercanos a cuerpos de diferentes formas, hizo dos hipótesis; 1) que las fuerzas viscosas se pueden despreciar en cualquier región del flujo excepto muy cerca de fronteras sólidas, 2) el espesor de esa capa tiende a cero cuando la viscosidad tiende a cero. A esta se le conoce como capa límite.

#### 3.1 Separación de la capa límite: ecuación de Prandtl

Debemos tomar en cuenta que el flujo fuera de la capa límite tendrá un gradiente de velocidades pequeño y dentro de la capa límite no. Podemos despreciar los efectos debidos a la viscosidad fuera de la capa límite. Dentro de la capa límite los efectos de la viscosidad son notorios, entonces los gradientes de velocidad normales a la placa son grandes. En la figura (3.1) se muestra una capa límite sobre una placa plana; a continuación describiremos características cualitativas importantes de una capa límite:

- 1) Una capa límite siempre es delgada, es decir, si  $\delta$  es el espesor y  $x$  es una longitud medida desde donde inicia la capa límite *aguas abajo* tenemos que:  $\delta \ll x$ .
- 2) Este espesor  $\delta$  puede aumentar aguas abajo pero, siempre permanece pequeño.
- 3) En la pared  $y = 0$ , por la condición de adherencia, no hay deslizamiento. La velocidad aumenta suavemente conforme aumenta la altura desde la placa [18].

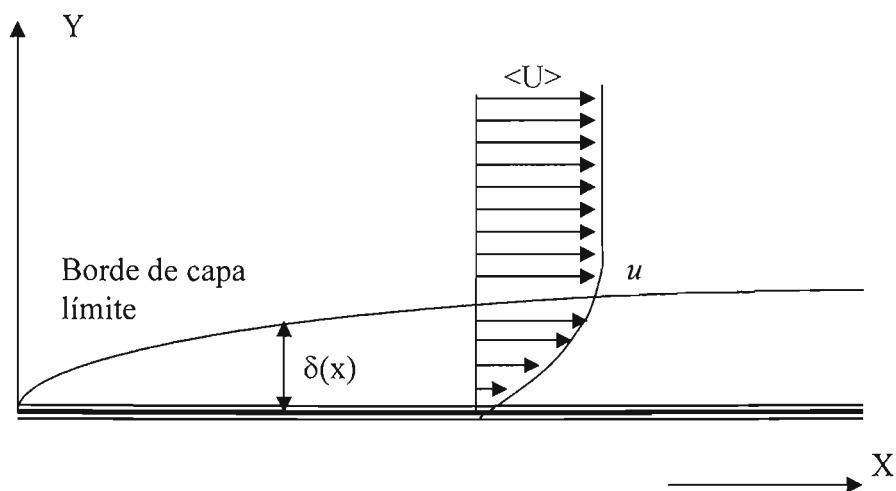


Figura 3.1. Perfil de la velocidad  $\langle U \rangle$  en la dirección del eje  $x$  lejos del plano. Es  $\delta(x)$  el espesor de la capa límite en donde hay influencia de la viscosidad.

Los parámetros importantes de la capa límite son el espesor,  $\delta(x)$ , que es función de la distancia a lo largo del objeto y el esfuerzo cortante en la superficie de éste. Estas cantidades se pueden determinar a partir del campo de velocidad de la capa límite  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ .

El espesor de la capa límite  $\delta$  se define para una altura la cual corresponderá a la velocidad  $u = 0.99\langle U \rangle$ .

Si consideramos un flujo bidimensional, estacionario, viscoso e incompresible,  $U(u, v)$  podemos escribir las ecuaciones de N-S de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

y la ecuación de continuidad como,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

Una vez escritas las ecuaciones para el flujo en cuestión, haremos algunas simplificaciones que nos conducirán a encontrar un valor aproximado del espesor de capa límite  $\delta$  y la ecuación de Prandtl.

Con ayuda de la ecuación de continuidad (3.2) realizaremos un análisis de las magnitudes que se están utilizando en la ecuación de N-S. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\langle U \rangle}{x}$$

Donde  $\langle U \rangle$  es la velocidad lejos de la pared. Si ahora despejamos el término de  $y$  de la ecuación de continuidad:

$$\frac{v}{\delta} \sim \frac{\langle U \rangle}{x}$$

podemos hacer la siguiente comparación:  $\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\langle U \rangle}{x}$ . Ahora interesa conocer el orden de magnitud de los términos de la ecuación (3.1) en la componente horizontal,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\langle U \rangle^2}{x} \text{ y } v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\langle U \rangle \delta \langle U \rangle}{\delta} = \frac{\langle U \rangle^2}{x}$$

Los términos de la velocidad de la componente horizontal y vertical tienen el mismo orden de magnitud.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\langle U \rangle^2}{x}$$

A continuación procedemos de igual forma con el lado derecho de (3.1), entonces para saber el orden de magnitud de los términos donde la presencia de la viscosidad es importante, hacemos el siguiente análisis:

$$\nu \nabla^2 U = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\langle U \rangle}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\langle U \rangle}{\delta^2}$$

pero  $x \gg \delta$ , entonces comparando términos  $\frac{\langle U \rangle}{\delta^2} \gg \frac{\langle U \rangle}{x^2}$ . En consecuencia el término dominante está dado por  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

Falta escribir el término de presión para la componente horizontal, para ello recurrimos a la ecuación de Bernoulli en donde los efectos por gravedad se consideran constantes debido al espesor pequeño de la capa límite. Entonces escribimos el gradiente de la presión como,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \langle U \rangle \frac{d\langle U \rangle}{dx} \sim \frac{\langle U \rangle^2}{x}$$

Ahora si, comparamos ambos lados de la ecuación N-S, obtenemos,

$$\frac{\langle U \rangle^2}{x} \sim \nu \frac{\langle U \rangle}{\delta^2} \tag{3.3}$$

De (3.3) podemos obtener la aproximación del espesor de capa límite:

$$\delta \sim \sqrt{\nu x / \langle U \rangle} \quad (3.4)$$

Una vez hecha la comparación de magnitudes, podemos reescribir la ecuación N-S para la componente horizontal, la cual es conocida como ecuación de Prandtl de capa límite.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \langle U \rangle \frac{d\langle U \rangle}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) junto con la ecuación de continuidad tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ v(x,0) &= 0 \\ u(x,y) &\rightarrow \langle U \rangle \text{ cuando } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Las primeras dos condiciones iniciales son condiciones de deslizamiento en la interfase fluido-sólido. A una distancia considerable de la placa la tercera condición inicial corresponde a un valor constante  $\langle U \rangle$ .

### 3.1.1 Solución exacta: Blasius

Hay dos métodos con frecuencia mencionados en la literatura de mecánica de fluidos para determinar una solución exacta de la ecuación de Prandtl; uno es el de Falkner y otro es el de Blasius. Vamos a referirnos a la segunda.

Consideramos que la velocidad  $\langle U \rangle$  del flujo fuera de la capa límite es constante y que el espesor es función de  $x$ , entonces el término de la presión es cero.

Para resolver este sistema de ecuaciones, se introduce una función de corriente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Con lo que se satisface automáticamente la ecuación de continuidad.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u, v) &= \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$



Entonces al rescribir (3.1) con el campo de velocidades que satisface la función de continuidad, obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial^3 y} \quad (3.6)$$

Si realiza el siguiente cambio de variable:  $\psi(x, y) = \sqrt{\langle U \rangle \nu x} f(\eta)$  con  $\eta = y / \sqrt{\nu x / \langle U \rangle}$ . Los términos que aparecen en (3.6) se escriben así:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\langle U \rangle}{2} \frac{y}{x} f' + \frac{1}{2} \sqrt{\nu \langle U \rangle} \frac{1}{x^{1/2}} f$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \langle U \rangle f'$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\langle U \rangle}{2} \sqrt{\frac{\langle U \rangle}{\nu}} \frac{y}{x^{3/2}} f'' = -\frac{U}{2x} \eta f''$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\langle U \rangle^2}{\nu x} f'''$$

Al sustituir lo anterior obtenemos:

$$-\frac{\langle U \rangle^2}{2x} \eta f' f'' - \frac{\langle U \rangle^2}{2x} (f - \eta f') f'' = \frac{\langle U \rangle^2}{x} f'''$$

$$-\frac{\langle U \rangle^2}{2x} f f''' = \frac{\langle U \rangle^2}{x} f'''$$

Entonces,

$$f''' + \frac{1}{2} f f''' = 0 \quad (3.7)$$

Las condiciones de frontera se traducen en:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$f'(\eta) \rightarrow 1 \text{ si } \eta \rightarrow \infty$$

donde  $f$  es una función que determinaremos a continuación con el método de Euler.

La ecuación de tercer orden se descompone en tres ecuaciones de primer orden, para las cuales definimos las siguientes funciones:

$$f'(\eta) = G(\eta)$$

$$G'(\eta) = H(\eta)$$

De la ecuación diferencial (3.7) podemos despejar a  $f'''$ :

$$H' = -\frac{1}{2} f(\eta)H(\eta)$$

Rescribimos ahora las funciones que componen la ecuación diferencial según la definición de derivada. Por tratarse de un método numérico, no evaluamos el límite de la definición.

$$G(\eta) = \frac{f(\eta + \Delta\eta) - f(\eta)}{\Delta\eta}$$

$$H(\eta) = \frac{G(\eta + \Delta\eta) - G(\eta)}{\Delta\eta}$$

$$H(\eta) = \frac{H(\eta + \Delta\eta) - H(\eta)}{\Delta\eta}$$

Despejamos los términos donde las funciones estén evaluada en  $\eta + \Delta\eta$ :

$$f(\eta + \Delta\eta) = G(\eta)\Delta\eta + f(\eta)$$

$$G(\eta + \Delta\eta) = H(\eta)\Delta\eta + G(\eta)$$

$$H(\eta + \Delta\eta) = -\frac{1}{2} f(\eta)H(\eta)\Delta\eta + H(\eta)$$

La integración inicia en  $\eta = 0$ .

Con base en la ecuación (3.6) que Blasius encontró para una capa límite [6], se realizó el cálculo numérico para (3.7) y  $f'(\eta) = 0.99$  cuando:

$$\frac{\delta}{x} = 4.96 \text{Re}_x^{-1/2}$$

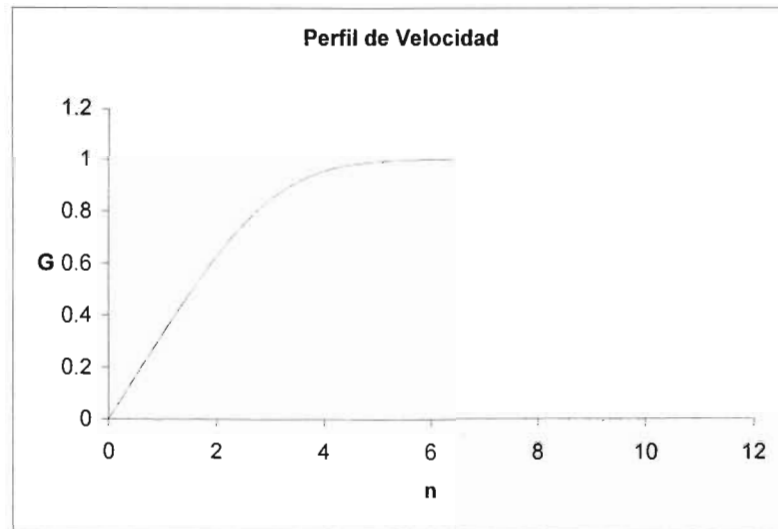


Figura 3.2 Perfil de velocidades obtenido al resolver numéricamente la ecuación diferencial (3.7) para  $\eta = 0, 0.01, \dots, 10$ . G representa  $\frac{u}{\langle U \rangle}$ .

### 3.2 Capa límite turbulenta

La ecuación para los valores medios del campo de velocidades son:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} \quad (3.8)$$

donde  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  son las componentes de velocidad promedio en la dirección horizontal y vertical respectivamente y  $\bar{\tau}(y) = \mu \left( \frac{du}{dy} \right) - \overline{\rho u'v'}$  es el esfuerzo cortante. Lejos de la placa el esfuerzo de Reynolds domina, pero cerca de la placa las contribuciones por efecto de la viscosidad son grandes y el esfuerzo de Reynolds puede despreciarse.

Se define una velocidad característica en la proximidad de la placa como:

$$u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} \quad (3.9)$$

También se define una longitud adimensional  $\xi = \frac{u_* y}{\nu}$ . Entonces se puede escribir el perfil de la velocidad media en términos de la componente para la altura, el esfuerzo cortante en la región de capa límite y la viscosidad  $\nu$ ,  $\tau_0$  y  $u_*$  de la siguiente manera:

$$\bar{u}(y) = u_* f\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) \quad (3.10)$$

o de forma,

$$\bar{u}_+ = f(\xi), \text{ donde } \bar{u}_+ = \frac{\bar{u}}{u_*} \quad (3.11)$$

$f(\xi)$  es una función *universal* de una sola variable. A la relación (3.11) se le conoce como la ley universal de la placa, que fue formulada por Prandtl [8]. La expresión de la capa límite se puede obtener de la ecuación de Reynolds (1.47) añadiendo los términos correspondientes a  $\tau_0$ . Considerando el hecho de que las fluctuaciones de la velocidad en la capa límite son mucho menores que la media de la dirección preferencial de  $\bar{u}$  y que la derivada en  $x$  es mucho menor que la derivada en  $y$ , nuevamente utilizamos  $\langle U \rangle$  como la velocidad promedio, entonces:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sim \frac{\langle U \rangle^2}{L} \text{ y } \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim \frac{\langle U \rangle^2}{\delta} \text{ con } \delta \ll L, \text{ por lo tanto } \frac{\langle U \rangle^2}{L} < \frac{\langle U \rangle^2}{\delta}.$$

Rescribimos (3.12) y obtenemos:

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

De la ecuación (3.13) podemos estimar la variación del esfuerzo cortante  $\tau_0$  a lo largo de la vertical.

### 3.2.1 Subcapa viscosa y subcapa logarítmica

Si medimos la altura desde la placa tal que  $y = 0$ . Se puede obtener una aproximación a  $f(\xi)$  para cuando  $\bar{u} \bar{v}$  es despreciable y por lo tanto,  $\tau_0 = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dy}$ . Para valores suficientemente pequeños de  $y$ . En la capa límite se da la siguiente condición:

$$|\overline{uv}| \ll \nu \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right| \quad (3.14)$$

A esta región se le conoce como subcapa viscosa.

En la subcapa viscosa el valor  $\rho\nu \frac{d\overline{u}}{dy}$  es aproximadamente constante, le daremos el valor  $\tau_0$ .

$$\frac{\tau_0}{\rho\nu} = \frac{d\overline{u}}{dy}$$

Usamos la relación (3.9) y rescribimos la ecuación anterior:

$$\frac{u_*^2}{\nu} = \frac{d\overline{u}}{dy}$$

Que al integrarse resulta:

$$\overline{u}(y) = \frac{u_*^2}{\nu} y \quad (3.14)$$

o en forma adimensional  $f(\xi) = \xi$ , la constante de integración vale cero pues se debe cumplir la condición de frontera de adherencia. El espesor de la subcapa viscosa quedará limitado por el valor donde  $\overline{uv} = 0.1\nu \frac{d\overline{u}}{dy}$  [19].

Para distancias de la placa donde ya no domine el término de viscosidad y pueda ignorarse el término  $(\rho\nu)d\overline{u}/fy$ , de tal forma que,  $\tau_0 = -\rho\overline{uv}$ . La ley de variación de la velocidad media no dependerá de la viscosidad  $\nu$  pero debe estar determinada solamente por los valores de la densidad  $\rho$  y el esfuerzo del flujo  $\tau_0$ . Considerando el flujo en la región donde se puede despreciar el esfuerzo viscoso se pueden estudiar las diferencias de la velocidad  $\overline{u}(y_1) - \overline{u}(y_2)$  a dos diferentes alturas de la ésta región, en particular el incremento de  $\overline{u}(y) - \overline{u}(\delta)$  donde  $y > \delta$  y  $\delta = y_1 - y_2$ . El valor del gradiente de la velocidad media  $d\overline{u}/dy$  a una altura  $y$  para  $y > \delta$  debe ser independiente de la viscosidad  $\nu$  y además es función de los parámetros  $\tau_0$ ,  $\rho$  y  $y$  únicamente. Con estos parámetros se puede formular una combinación  $\tau_0^{1/2} / (\rho^{1/2} y) = u_* / y$  con dimensiones de un gradiente de velocidad. Para  $y > \delta$  la relación es:

$$\frac{d\overline{u}}{dy} = A \frac{u_*}{y} \quad (3.15)$$

y resolviéndola obtenemos:

$$\bar{u}(\xi) = A(u_*) \ln(\xi) + B \quad (3.16)$$

La relación (3.16) es conocida como la ecuación de la capa logarítmica. Las constantes  $A = 2.5$  y  $B = 5.26$  son conocidas como constantes de Von Kármán [20].

## CAPITULO 4

### METODOLOGÍA Y EXPERIMENTOS: MÉTODOS DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

#### 4.1 Metodología

##### 4.1.1 Anemometría de hilo caliente y túnel de viento

La anemometría de hilo caliente es un método para medir la velocidad de un flujo que consiste en el uso de un filamento muy delgado introducido en el flujo, el diámetro de este filamento metálico es del orden de micrómetros y con una longitud entre 200  $\mu\text{m}$  y 2 mm, el cual es calentado eléctricamente. Cuando éste es expuesto a un flujo, en nuestro caso de aire, el filamento se enfría y un dispositivo electrónico la mantiene a una temperatura constante mediante una diferencia de potencial en el filamento. La rapidez de respuesta de la sonda depende de sus dimensiones, pero por lo general se pueden detectar las fluctuaciones de la velocidad en un flujo turbulento.

#### Sonda

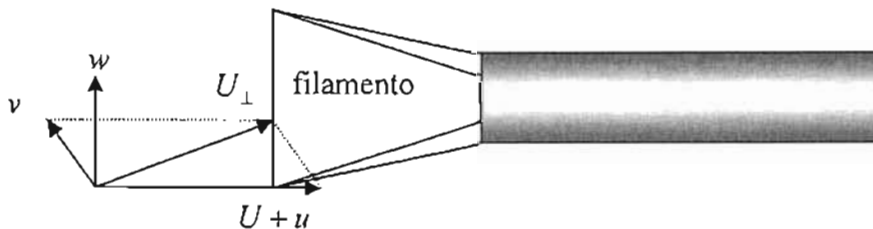


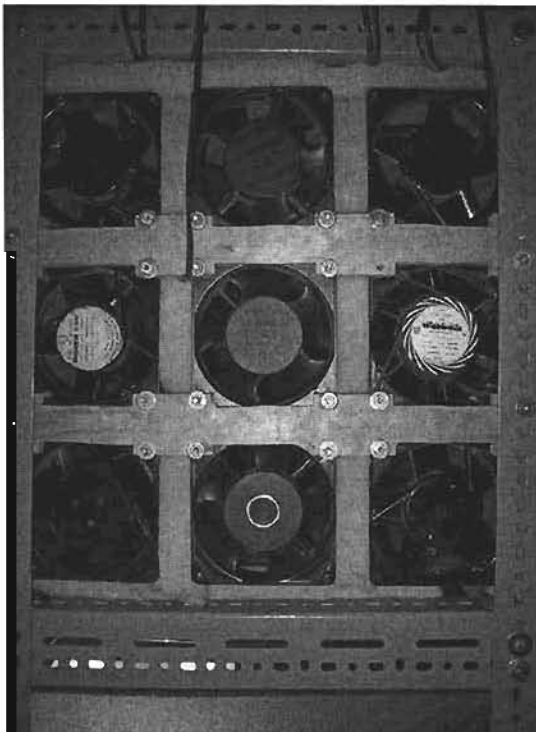
Figura 4.1 Esquema del sonda utilizado para la medición por el método de anemometría de hilo caliente. La sonda es más sensible a la componente de la velocidad  $U_{\perp}$ .

Las sondas pueden ser utilizadas para realizar mediciones de flujos en una, dos o tres dimensiones, no todos las sondas consisten de hilos metálicos delgados suspendidos entre dos sujetadores. Las puede haber de películas delgadas de material conductor depositadas en materiales aislantes, estas pueden ser de diferentes formas, esféricas, cilíndricas, etc. El platino y el oro son dos de los materiales que se seleccionan para su fabricación por que provee el máximo de sensibilidad a las fluctuaciones de la velocidad con un mínimo de inercia térmica. El tamaño de las sondas y su montaje en los sujetadores metálicos está diseñado para generar el mínimo de perturbaciones en el flujo [21].

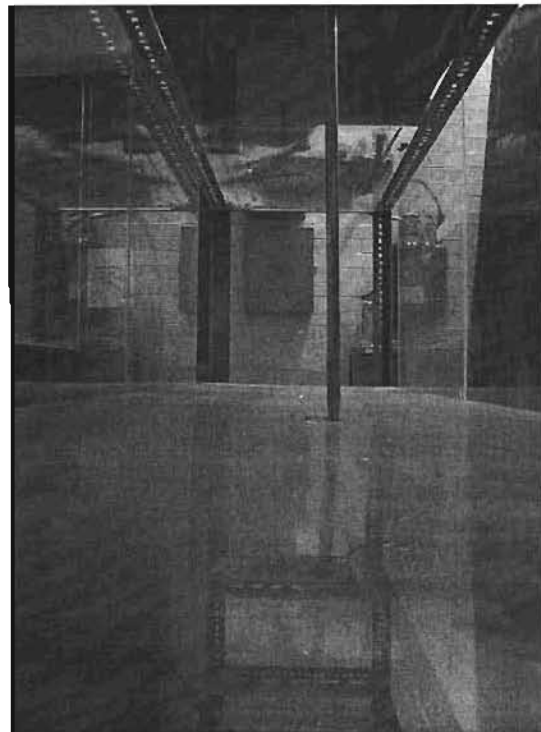
Las sondas pueden ser utilizadas para mediciones de flujos de aire (u otros compuestos) a velocidades de pocos cm/s hasta velocidades supersónicas, además pueden ser usadas en fluidos no conductores de la electricidad a números de Reynolds pequeños. Las sondas de hilo tienen una gran sensibilidad y una alta frecuencia en respuesta. Los soportes de la sonda son de acero

inoxidable, con una forma estrecha proveyendo una superficie de alrededor de 0.1mm de diámetro para sujetar los hilos metálicos (ver figura 4.1).

El túnel que a continuación describimos se encuentra ubicado en el Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias de la UNAM, no es el único que se usó. Típicamente un túnel de viento se encuentra conformado de las siguientes partes: (1) arreglo de ventiladores que inyectan el aire al interior (figura 4.2a), (2) el aire introducido circula por un arreglo de panal de abeja, (3) después por una serie de mallas finas (figura 4.2b), (4) por último el aire llega a la zona de mediciones, (figura 4.2c), todo lo anterior se puede ver el esquema presentado en la figura (4.5).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2 Túnel de viento del laboratorio de acústica del departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM. a) Arreglo de ventiladores, b) sección de trabajo, c) vista del túnel de viento.



El arreglo de ventiladores es necesario para inyectar el aire al interior del túnel y están conectados en paralelo y su potencia de funcionamiento está controlada por un potenciómetro y un estabilizador de corriente.

El arreglo de panal de abeja es un conjunto de tubos de 25 cm de largo por 0.60 cm de diámetro y tiene como propósito laminarizar el flujo y hacer que éste circule en una dirección fija. Al circular el aire por cada uno de los conductos del panal de abeja, se forma una capa límite dentro, esta capa límite invade al tubo y a la salida se puede obtener un flujo que tiene un perfil de velocidad de Poiseuille (figura 4.3). El número de Reynolds máximo asociado a los tubos del panal de abejas que se puede obtener es de 684, este número es menor que el número de Reynolds de 2300 donde experimentalmente se da la transición a la turbulencia. No es suficiente hacer circular el aire por el panal de abeja para tener el flujo laminar necesario, pues aún se conservan fluctuaciones del 2% de la velocidad. Para ello se coloca, luego del panal de abeja, un arreglo de mallas tipo mosquitero como mostramos en la figura (4.4). Con estas mallas las fluctuaciones decaen a una tasa menor al 1%.

### Flujo de Poiseuille

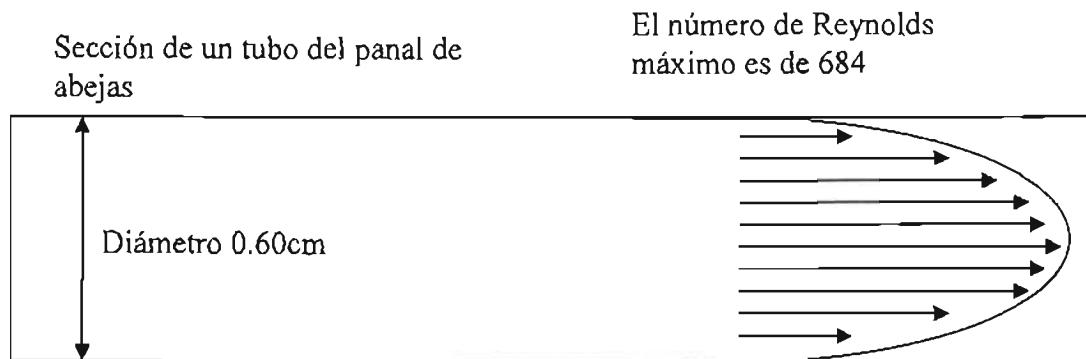


Figura 4.3 Se obtiene este perfil de velocidades debido a efectos de la viscosidad en los conductos del panal de abeja.

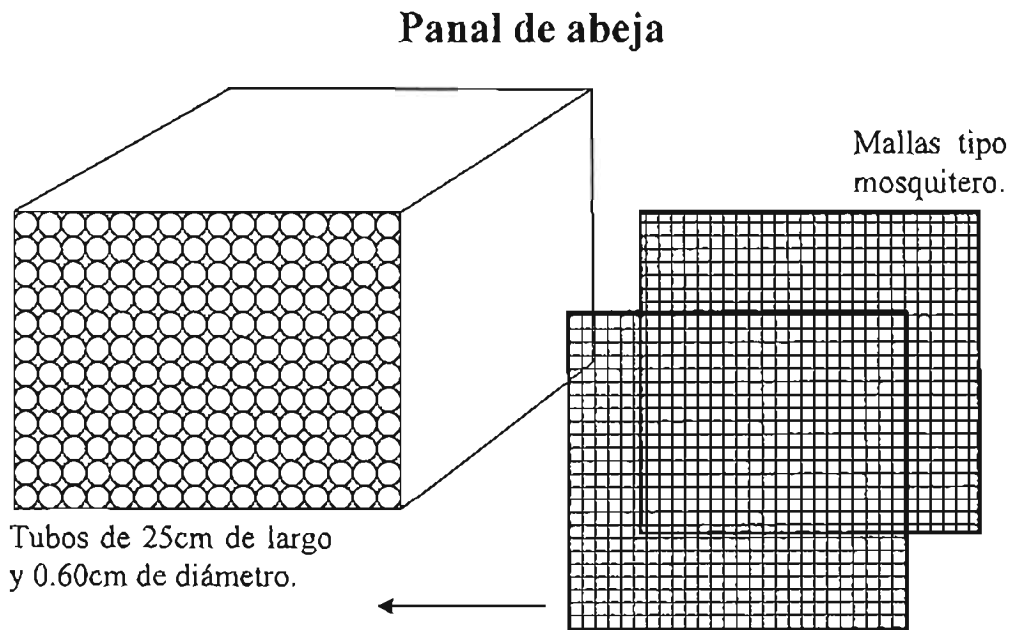


Figura 4.4 Arreglo de panal de abeja y mallas tipo mosquitero que se interponen entre la zona de inyección del aire y la sección de trabajo para dar estabilidad en el flujo.

## Esquema de un túnel de viento

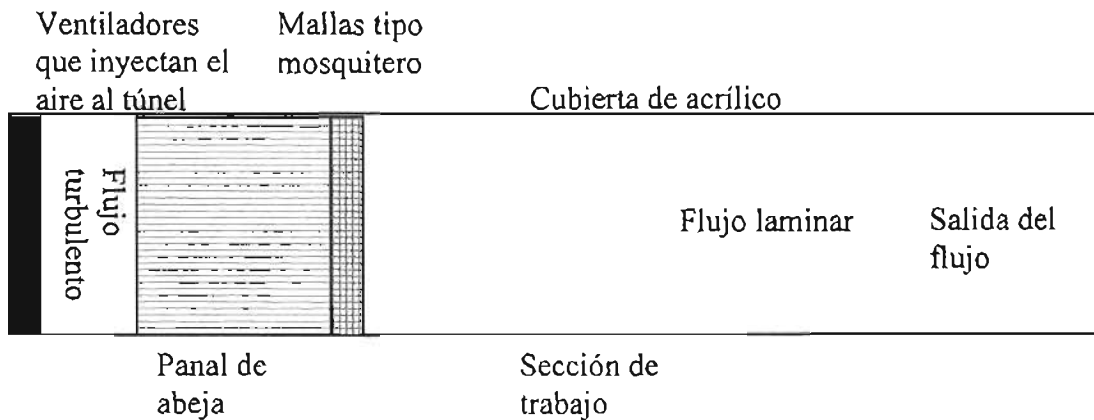


Figura 4.5 En este esquema se presentan las partes que son relevantes para el funcionamiento del túnel de viento.

### 4.1.2 Experimento de capa límite turbulenta en una placa plana

Los datos para este experimento se obtuvieron con el método de medición de anemometría de hilo caliente. El dispositivo experimental se conforma de una placa lisa de 2 m de largo puesta horizontalmente en la sección de trabajo del túnel de viento. Las mediciones de la velocidad se hicieron a 1.5 m aguas abajo, adquiriéndose  $10^7$  datos con una frecuencia de 32768 Hz.

Para este estudio nos enfocamos solamente en el eje vertical  $y$ , la distancia horizontal  $x$  permaneció constante (ver figura 4.6).



Figura 4.6. Esquema del dispositivo experimental para la capa límite turbulenta.

Se han utilizado variables estándar adimensionales [22] definidas de la siguiente manera: longitud adimensional  $\xi = u^* y / \nu$  y la velocidad adimensional  $\bar{u}_+(\xi) = u(\xi) / u^*$ , donde  $u^*$  (ecuación 3.9) es una velocidad característica de la subcapa viscosa con valor  $0.34 \text{ m/s}$ . En una gráfica semilogarítmica los datos se ajustan en una línea observándose la subcapa logarítmica, (ver figura 4.7).

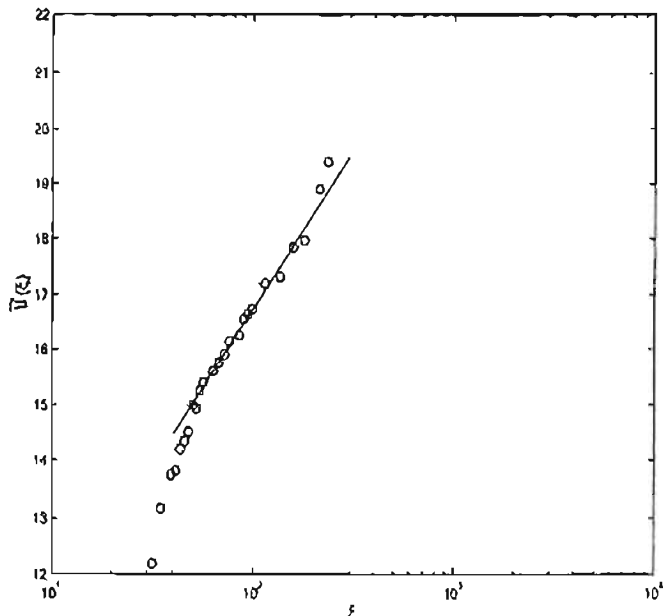


Figura 4.7 La capa límite turbulenta se divide en subcapa viscosa y subcapa logarítmica. En la gráfica hecha en escala semilog se visualiza la subcapa logarítmica con la línea recta.

El mejor ajuste de datos para la región de logarítmica turbulenta es:

$$\bar{u}(\xi) = \frac{1}{\chi} \ln \xi + B \quad (4.1)$$

Donde  $\chi = 0.4$  es la constante de von Karman y  $B = 5.26$ .

Comparando con resultados previos de otros autores, los datos que definen la subcapa logarítmica se ajustan aceptablemente para las constantes  $\chi$  y  $B$ , por lo tanto, decimos que hay concordancia con lo mostrado en la referencia [20]. La región en cuestión comienza a partir de  $\xi \approx 50$  donde se tiene el ajuste lineal de la ecuación (4.1), ver figura 4.7 y sección 3.2.1, [19].

#### 4.1.3 Experimento de transición a la turbulencia

Para observar el fenómeno de la transición a la turbulencia se realizó el siguiente experimento: En un túnel de viento se interpuso un obstáculo: objeto cilíndrico de 10 cm de diámetro. Posteriormente se hicieron mediciones de la velocidad del flujo desde 20 cm de distancia al cilindro y cada 40 cm aguas abajo hasta 220 cm (ver figura 4.8).

Cerca del cilindro se observa una mezcla de señal turbulenta con los vórtices que se desprenden del cilindro –la calle de von Kármán- Esto se puede observar en la figura (4.9a).

Usando nuevamente anemometría de hilo caliente, se hicieron adquisiciones de datos con una frecuencia de 20,000 Hz obteniéndose  $10^7$  datos para cada distancia. Estas muestras se almacenan en la computadora como archivos binarios para posteriormente ser analizados.

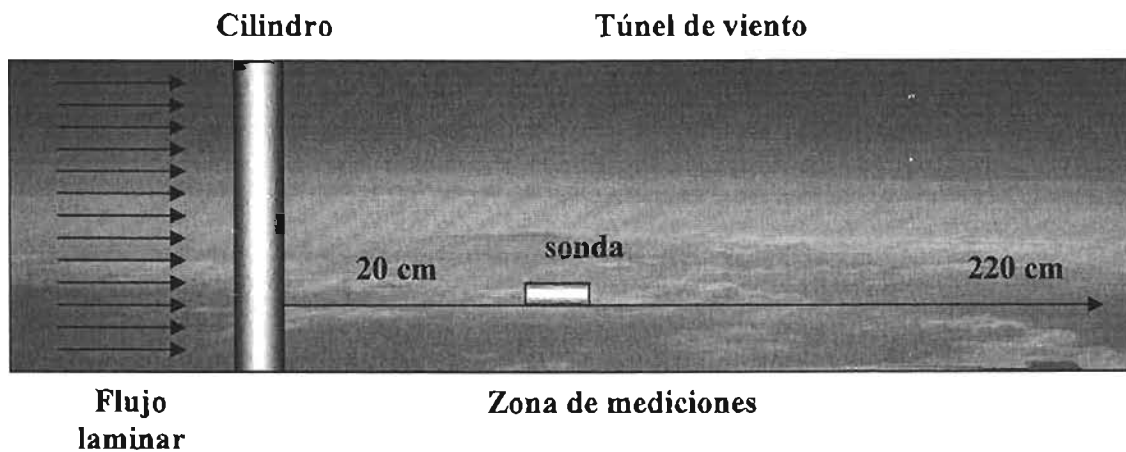
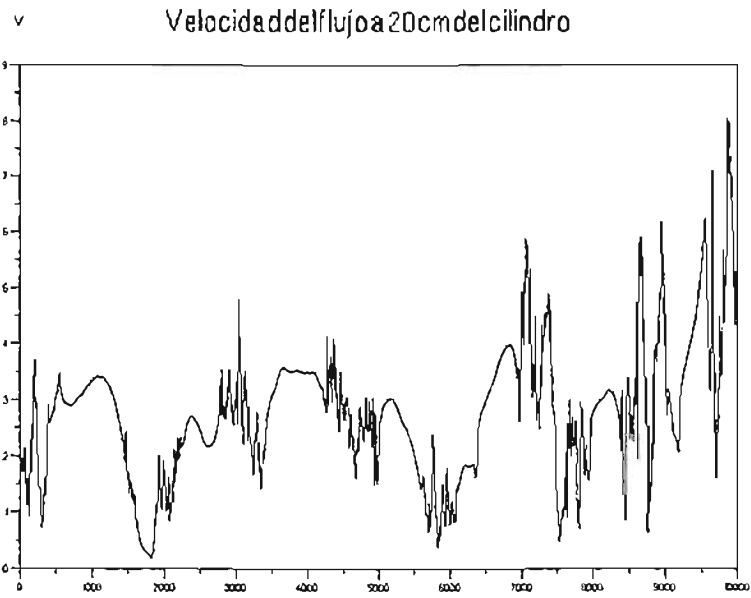
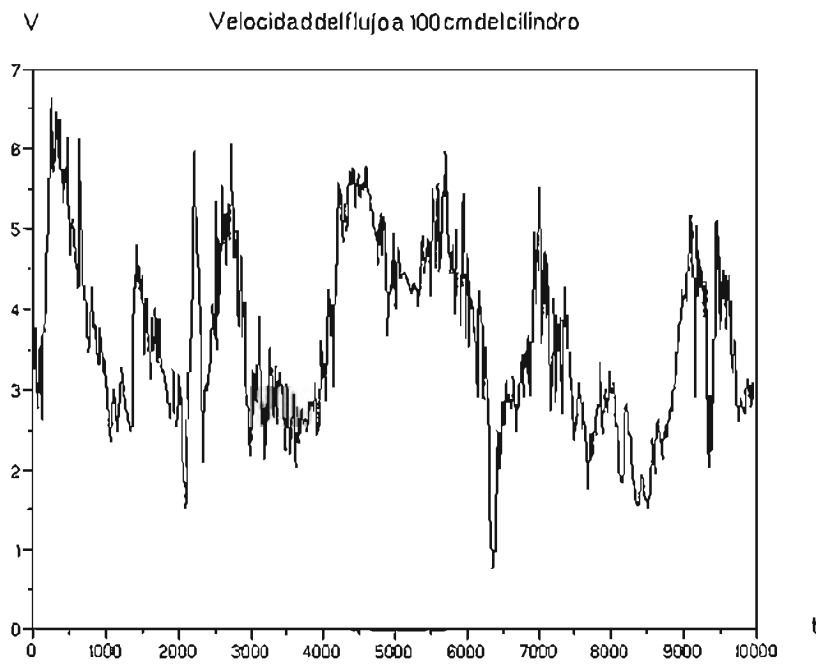


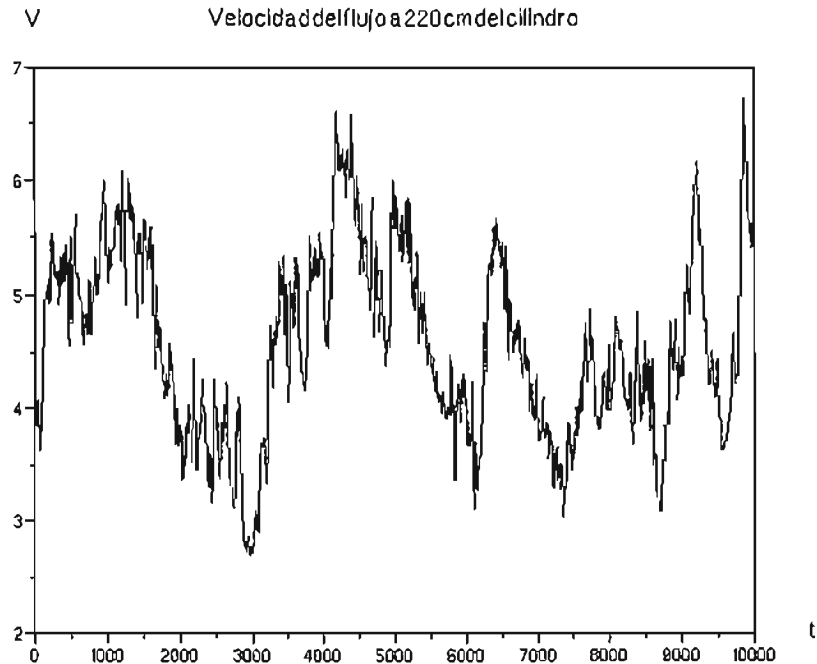
Figura 4.8. Esquema del dispositivo experimental para observar el fenómeno de transición a la turbulencia.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.9 Gráficas de las mediciones de la velocidad correspondientes al experimento de transición a la turbulencia que fueron tomadas a diferentes distancias de un cilindro de 10 cm de diámetro: (a) a 20 cm donde se puede apreciar partes suaves que corresponden a un comportamiento laminar del flujo, (b) a 100 cm no es tan evidente ya este comportamiento laminar y (c) a 220 cm ya no se aprecia la existencia del comportamiento laminar debido a la presencia del cilindro, para  $t = 1000$  se tiene apenas 0.05 seg.

A continuación llevaremos a cabo la exposición del modelo multifractal que tiene como finalidad dar bases teóricas para justificar e interpretar el análisis numérico de los datos experimentales. Esta teoría nos dará información relativa al comportamiento autosemejante de la velocidad y de la transmisión de energía en la región inercial tomando en cuenta los detalles de las fronteras físicas del fenómeno.

## 4.2 Métodos de análisis

### 4.2.1 Modelos para el análisis de la turbulencia: el modelo $\beta$ , el modelo bifractal y el modelo multifractal

Existen modelos que se aplican al fenómeno de la turbulencia, el estudio de estructuras fractales sirve para conocer en detalle como el sistema transmite su energía mediante la formación de estructuras en diferentes escalas. Surge la necesidad de plantear modelos alternativos ya que, la teoría K41 (ver tabla 1, página 37) no está dando resultados que no concuerdan con los experimentos. El primer modelo fractal en turbulencia es el modelo  $\beta$  que parte de la idea de que el volumen ocupado por las estructuras turbulentas disminuye con el decremento de la escala de longitud. Antes de entrar de lleno al tema, propondremos dos ejemplos sencillos que nos ayudarán a comprender el concepto de dimensión fractal, luego mencionaremos de manera breve, en qué consiste el modelo de cascada de Richardson.

Comenzaremos por la curva de Koch citada en la sección 1.3.2 (ver figura 1.7). Para conocer la longitud de ésta curva nos enfrentaremos con el problema de que ésta dependerá del tamaño de nuestra regla de medida, es decir, cada vez que queramos mirar con más detalle la curva, nos percataremos de que esta se compone de más y más segmentos y por supuesto, su longitud será mayor. Según la teoría que estudia las estructuras fractales [23], la curva de Koch tendrá una dimensión no entera. ¿Cómo es esto? Observemos primeramente como se define ésta curva: comenzamos con una línea de una longitud  $l_0$  medida con resolución  $(1/3)^0 l_0$ , si observamos con una resolución  $(1/3)^1 l_0$  la línea anterior se conforma por 4 segmentos y su longitud será  $4/3 l_0$ , una segunda observación con una resolución de  $(1/3)^2 l_0$  aparecerán  $4^2$  segmentos y la longitud será de  $(4/3)^2 l_0$ . La longitud para cualquier resolución es:  $l_n = (4/3)^n l_0$ . La definición de dimensión relaciona al número de segmentos necesarios para medir la estructura y el cociente entre la longitud  $l_0$  y la longitud a una determinada resolución  $n$ , como a continuación mostramos:

$$D = \frac{\log(\# \text{segmentos})}{\log(l_0 / l_n)} \quad (4.2)$$

Para la curva de Koch, se calcula la dimensión fractal:  $D = \log(4^n) / \log(3^n) = 1.26$ , que es un número no entero mayor que la unidad. La definición que se ha dado concuerda con las ideas que se tienen de dimensiones para líneas, superficies y volúmenes. El siguiente ejemplo es necesario para clarificar las ideas que se presentan del modelo  $\beta$ . Se trata de un cubo cuya medida por lado es  $l$  (ver figura 4.10). Si insertamos cubos que tengan por arista, una longitud  $l/2$ , podremos recuperar el volumen inicial con 8. Si volviéramos a construir cubos de  $l/4$ , necesitaríamos  $8^2$ . Una vez establecida la forma en la que vamos a construir los cubos y cuántos de ellos necesitamos para completar el volumen inicial, podremos calcular nuevamente la dimensión.

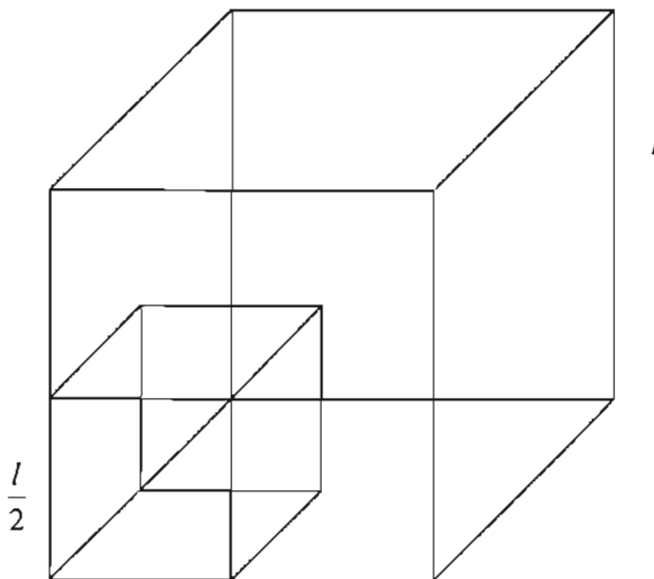


Figura 4.10 Se presenta un cubo de volumen  $l^3$  en el cual se inserta otro de volumen  $(l/2)^3$ , podemos ver fácilmente que con 8 de estos se puede ocupar el volumen del cubo más grande.

Entonces, requerimos  $8^n$  cubos de arista  $(l/2^n)$  para llenar el volumen, y por lo tanto, tendremos que su dimensión es:

$$D = \frac{n \log(8)}{n \log(2)} = 3, \text{ ya que } \log(8) = 3 \log(2).$$

Recuperamos el valor de la dimensión en donde se encuentra el cubo, o sea  $D = 3$ .

¿Qué pasaría si quitáramos algunos cubos en cada paso? Lo que ocurre es que para la nueva estructura tendríamos una dimensión diferente y menor que 3. Siguiendo con esta idea y para ejemplificar, quitamos un cubo en cada paso y volvemos a calcular la dimensión de la estructura, tendremos que:  $D = \log(7^n) / \log(2^n) = 2.8$

Lo anterior la podemos asociar entonces con la cascada de Richardson [3].

*“Los remolinos grandes tienen remolinos pequeños,  
Que se alimentan de su velocidad,  
Y los pequeños remolinos tienen más pequeños,  
Así hasta la viscosidad.”*

Brevemente podemos decir que si se tienen remolinos de cierto tamaño (o remolinos madre) que ocupan un cierto volumen  $V_i$  y posteriormente estos se dividirán en otro más pequeño siendo  $V_{i+1}$  su volumen total, tal que  $V_i > V_{i+1}$ , la suma de sus volúmenes será menor al del volumen madre. Las longitudes de los remolinos madre es  $l$  y el de remolinos hijo es  $lr$ , con  $r < 1$  (ver figura 4.11)

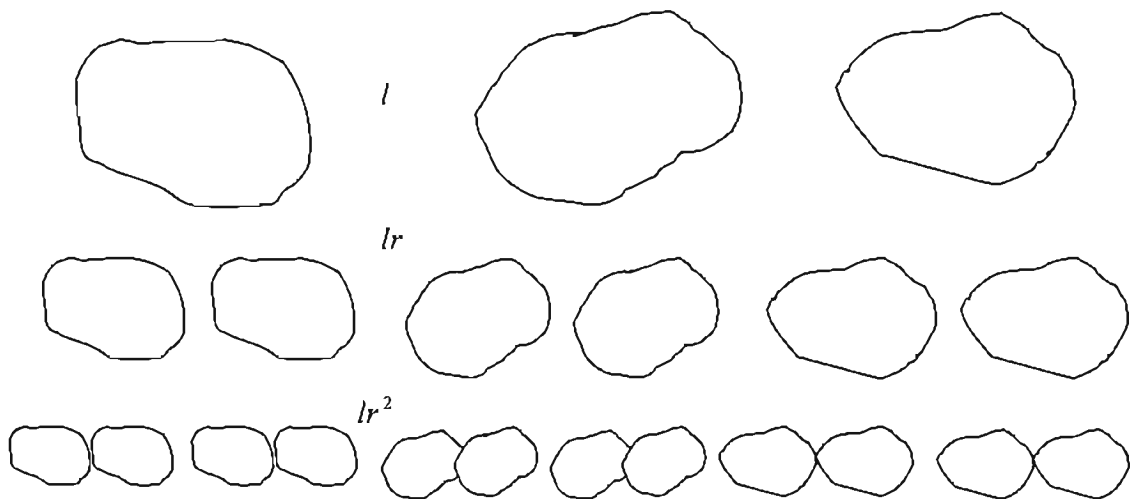




Figura 4.11 Ilustramos el modelo de cascada de Richardson que explica como los remolinos de gran tamaño, es decir que se encuentran en una escala  $l$  se van dividiendo en remolinos más pequeños que en conjunto contienen la misma cantidad de energía que el principal, esto sucede en la región inercial.

Es necesario cuantificar la reducción del volumen activo que utilizan los remolinos hijo, para ello se define un factor  $\beta$  que cuantifique el volumen ocupado por las estructuras de tamaño  $l_0 r^n$ .

La cascada de energía estará formada por una cantidad  $a$  de remolinos activos. Esto es un remolino madre dará lugar a un número de  $a$  remolinos hijo, a partir de esto podemos calcular la dimensión como:

$$D = \frac{\log a^n}{\log(l_0/l_n)}$$

o bien si se despeja  $a^n$ :

$$a^n = (l_0/l_n)^D$$

$\beta$  se define como  $V_{i+1}/V_i$  o  $\beta^n = (l_n^3 a^n)/l_0^3$ , sustituyendo el número de volúmenes activos dados en la ecuación previa,

$$\beta^n = \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^3 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D = \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{3-D} \quad (4.3)$$

Por ser  $l_0$  una cantidad constante, podemos escribir  $\beta^n$  como la fracción de volumen activo:

$$\beta_l \propto l^{3-D}, \text{ cuando } l \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

Lo anterior lo podemos generalizar para cualquier espacio de dimensión  $d$ .

$$\beta_l \propto l^{d-D} \quad (4.5)$$

A la cantidad a  $d - D$  se le conoce como *codimensión* y puede no ser un número entero.

Calculemos los exponentes de las funciones de estructura usando el modelo  $\beta$ . Sea  $u_l$  la diferencia de velocidad típica sobre una longitud  $l$ , el tiempo característico  $t_l$  es  $l/u_l$ . Los remolinos activos de tamaño  $l$  llenarán una fracción de espacio  $\beta^n$ , entonces la energía por unidad de masa asociada con el movimiento en la escala  $l$  (ver sección 1.3.2) es:

$$E_l \sim u_l^2 \beta_l = u_l^2 \left( \frac{l}{l_0} \right)^{3-D} \quad (4.6)$$

Entonces el flujo de energía  $\Pi_l$  en la escala  $l$  es:

$$\Pi_l \sim \frac{E_l}{l} \sim \frac{u_l^3}{l} \left( \frac{l}{l_0} \right)^{3-D} \quad (4.7)$$

Suponemos que el número de Reynolds es grande, entonces hay un intervalo inercial en el cual el flujo de energía es independiente de  $l$ , tal que,

$$\Pi_l \sim \varepsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0} \quad (4.8)$$

De la relación anterior podemos deducir el valor para  $u_l$ :

$$u_l \sim u_0 \left( l/l_0 \right)^{\frac{1-3-D}{3}} \quad (4.9)$$

Y el exponente de escalamiento para la velocidad lo nombramos  $h$ :

$$h = \frac{1}{3} - \frac{D-3}{3} \quad (4.10)$$

Para conocer el escalamiento de las funciones de estructura hay que considerar que la ecuación (4.9) se aplica en regiones activas. Entonces al promediar se debe multiplicar por la fracción de volumen.

$$S_p(l) = \langle \delta u_l^p \rangle \sim \delta u_0^p \left( \frac{l}{l_0} \right)^{ph} \left( \frac{l}{l_0} \right)^{3-D} = \delta u_0^p \left( \frac{l}{l_0} \right)^{ph+3-D} \quad (4.11)$$

El exponente de escalamiento para las funciones de estructura en el modelo  $\beta$ :

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + (3-D) \left( 1 - \frac{p}{3} \right) \quad (4.12)$$

Este resultado concuerda con la ecuación de Howart-von Kármán (1.73) para  $p=3$ , obteniéndose el valor de  $\zeta_3=1$ . Si ahora proponemos un valor  $p=6$  el exponente es  $\zeta_6 = D-1$ , esto discrepa de K41 si pues de acuerdo a esa teoría, el exponente de la función de estructura de orden 6 es igual a 2.

El modelo  $\beta$  es importante porque de éste podemos hacer generalizaciones, a continuación haremos una revisión breve del modelo bifractal para dar paso al modelo multifractal.

Anteriormente calculamos la dimensión fractal de un conjunto  $S$  formado por remolinos madre de una longitud  $l$  que dan paso a una nueva generación de remolinos hijo, más pequeños y así sucesivamente hasta una escala de disipación; el modelo bifractal plantea la existencia de dos conjuntos  $S_1$  y  $S_2$ . Dentro del conjunto  $S_1$  la velocidad tiene un exponente de escalamiento  $h_1$  y dentro de  $S_2$  tiene un exponente  $h_2$ , de tal forma que,

$$\frac{\delta u_l(r)}{u_0} \sim \begin{cases} (l/l_0)^{h_1}, r \in S_1, \dim S_1 = D_1 \\ (l/l_0)^{h_2}, r \in S_2, \dim S_2 = D_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Podemos determinar el comportamiento de la función de estructura de orden  $p$  la cual la escribiremos como una combinación lineal de componentes de la expresión de la relación anterior,

$$\frac{\langle \delta u_l^p \rangle}{u_0^p} = \mu_1 \left( \frac{l}{l_0} \right)^{ph_1+3-D_1} + \mu_2 \left( \frac{l}{l_0} \right)^{ph_2+3-D_2} \quad (4.14)$$

Las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son factores de peso del orden de la unidad.

Para conocer el escalamiento debemos averiguar cuál es el término dominante. Para saberlo, debemos tener en cuenta que  $l/l_0 \ll 1$ , por lo tanto, dominará aquél con exponente menor:

$$\langle \delta u_l^p \rangle \propto l^{\zeta_p} \text{ y } \zeta_p = \min\{ph_1 + 3 - D_1, ph_2 + 3 - D_2\} \quad (4.15)$$

Esta idea es punto de partida para hacer una generalización al modelo multifractal. Consideremos que tenemos  $n$  conjuntos  $S$ , podemos escribir la función de estructura como:

$$\langle \delta u_l^p \rangle \sim \sum_i^n \mu_i(h_i) \left( \frac{l}{l_0} \right)^{ph_i+3-D_i} \quad (4.16)$$

Si además en el lado derecho de (4.16) se trata de una expresión continua, la suma se convierte en una integral sobre  $h$ :

$$\langle \delta u_l^p \rangle \sim \int_0^\infty \mu(h) \left( \frac{l}{l_0} \right)^{ph+3-D} dh \quad (4.17)$$

Análogamente al modelo bifractal, tendremos que el término dominante en (4.17) será aquél que tenga exponente mínimo.

#### 4.2.2 Modelo multifractal y sus resultados para capa límite turbulenta en placa plana

En el modelo multifractal [1] se utiliza la siguiente expresión de escalamiento de una función de estructura en el rango inercial:

$$\langle \delta u(r)^p \rangle \sim u_0^p \int_0^\infty \mu(h) \left( \frac{r}{L} \right)^{ph+d-D(h)} d\mu \quad (4.18)$$

El término dominante en la integral es aquel que tiene exponente mínimo, ya que  $r \ll L$ . Entonces escribimos

$$\langle \delta u(r)^p \rangle \sim r^{\zeta_p}$$

donde  $\zeta_p = \min_h [ph + d - D(h)]$ ,  $d$  es la dimensión del espacio y  $D(h)$  es la dimensión fractal que depende del exponente de escalamiento  $h$ . El comportamiento estadístico de la turbulencia es producido por las estructuras de diferentes tamaños y dimensiones. El factor  $D(h)$  también es función de  $p$ , para un valor dado de  $p$ , se encuentra el mínimo de la siguiente expresión:

$$p - D'(h_*(p)) = 0$$

El exponente  $\zeta_p$  para el exponente mínimo  $h_*$  es:

$$\zeta_p = ph_*(p) + d - D(h_*(p)) \quad (4.19)$$

Usualmente el cálculo de las funciones de estructura [10] se hace con la ayuda de la hipótesis de Taylor. Brevemente, la hipótesis del flujo congelado se refiere a que las estructuras solamente se transportan pero no cambian de forma. Entonces si la medida de la velocidad a dos puntos distintos separados por una distancia  $r$ ,  $\delta u(r) = u(x+r) - u(x)$  es equivalente a la medición de la diferencia de velocidades en un punto a dos tiempos distintos, es decir, a  $\tau$  y a  $\tau+t$  encontramos que la diferencia de velocidades estará dada por  $\delta u(t) = u(\tau) - u(\tau+t)$  y que  $\delta u(r) = -\delta u(t)$ .

De acuerdo a esta afirmación el escalamiento  $\langle \delta u(r)^p \rangle \sim r^{\zeta_p}$  debe también satisfacerse si se miden las velocidades en un mismo punto a dos tiempos diferentes, o sea:

$$\langle \delta u(t)^p \rangle \sim t^{\zeta_p}$$

En la relación anterior para el cálculo de  $h(\varepsilon) = h^\Omega(\varepsilon, \tau_r) / \langle t(\varepsilon) \rangle$  con el método de tiempos de salida aparece el promedio de tiempo para que la señal abandone una celda de tamaño  $\varepsilon$ , es decir,  $\langle t(\varepsilon) \rangle$ . Dado que la señal es la velocidad del flujo en un punto, el promedio  $\langle t(\varepsilon) \rangle$  es una función de estructura inversa y  $h^\Omega(\varepsilon, \tau_r)$  aporta una corrección logarítmica., pues representa el promedio de tiempo para que haya una fluctuación de cierto tamaño en la velocidad. Para encontrar el valor del exponente que debe encontrarse en el régimen de capa límite turbulenta, debemos tomar en cuenta la siguiente suposición [13]:

$$\frac{1}{\langle t(\varepsilon) \rangle} \sim \langle t(\varepsilon)^{-1} \rangle$$

La distribución de probabilidad para  $\delta u(t)$  puede recuperarse invirtiendo la distribución de probabilidad multifractal. Por lo que esperamos el siguiente comportamiento según la teoría de Kolmogorov,

$$\langle t(\delta u)^p \rangle \sim \delta u^{\chi(q)}$$

donde  $\chi(q) = \min_h \left[ \frac{q + d - D(h)}{h} \right]$ . Finalmente la entropía- $\varepsilon$  es:

$$h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\chi(-1)}$$

Para el régimen de un flujo turbulento homogéneo e isotrópico se cumple la siguiente relación:

$$\chi(-1) = -3$$

$$\langle \delta u(t)^3 \rangle \sim t \Rightarrow h(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-3}$$

En la capa límite la ecuación de Howart-von Kármán no se aplica ya que  $\zeta_3 \neq 1$ . Para calcular el exponente de  $h(\varepsilon)$  necesitamos encontrar el valor de  $p$  para el cual  $\zeta_p = 1$  y que nombraremos  $p'$ . En el caso general  $p'$  no es un valor entero. De hecho  $p' \geq 3$ , si escribimos:

$$\chi(-1) = \min \left[ \frac{-1 - p'h + (p'h + d - D(h))}{h} \right]$$

Obteniéndose,

$$\chi(-1) = -p' \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Cálculo de $h(\varepsilon)$ con el método de tiempos de salida

El método de tiempos de salida para el cálculo de entropía- $\varepsilon$  tiene analogías con los métodos de compresión de imágenes.

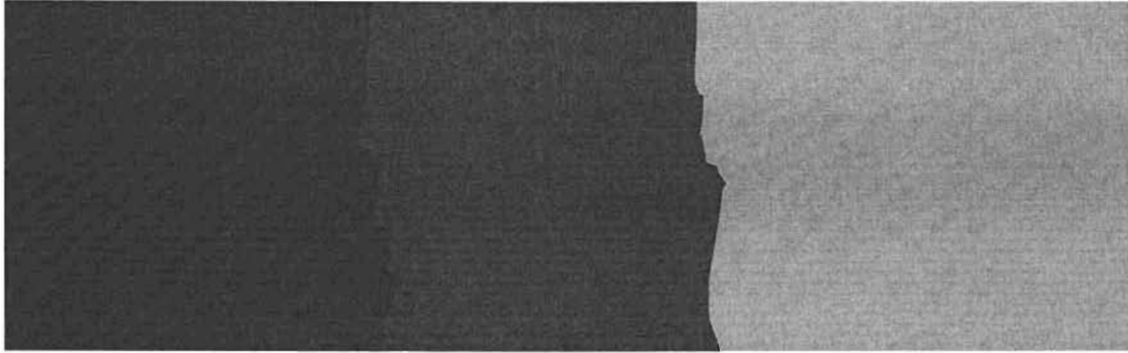
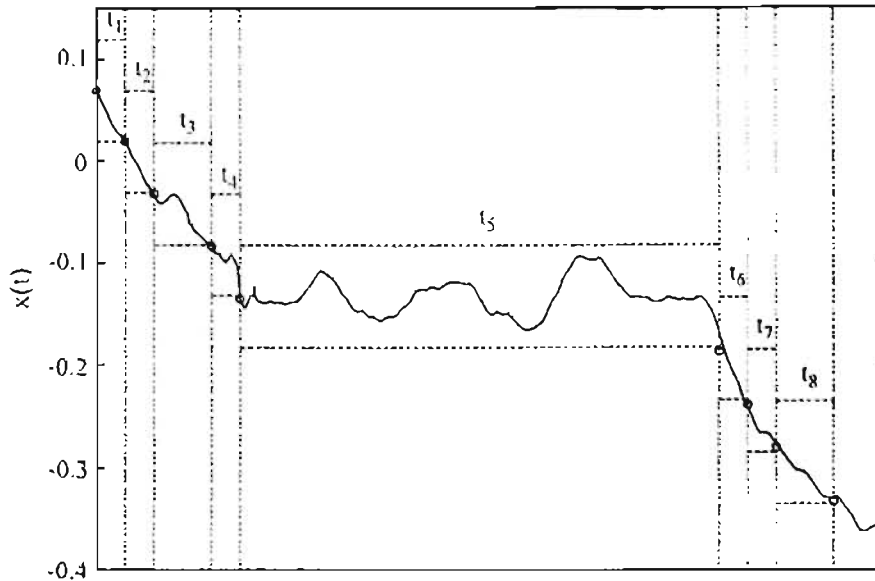


Figura 4.12 En esta imagen se pueden observar tres contrastes distintos, los cuales podrían codificarse sencillamente asignando un valor para el contraste a una determinada superficie de la imagen.

En un formato de imagen no comprimido (BMP) a cada píxel se le asigna un espacio en un archivo con información sobre la intensidad del color o el tono de grises, se tiene una gran cantidad de datos, sin importar que para grandes secciones de ésta imagen la intensidad sea la misma. Una manera alternativa de codificar la información es tomar bloques de píxeles contiguos para los cuales corresponde el mismo valor de información sobre color e intensidad. En el archivo se guarda la intensidad del color y el número de píxeles contiguos que comparten la misma tonalidad con lo que se elimina información redundante. En la medición de cantidades físicas, en donde se obtienen una gran cantidad de datos, estas pueden tener fluctuaciones muy grandes en pequeños intervalos de tiempo, pero también puede haber dentro del mismo conjunto de datos, regiones con fluctuaciones inferiores a un cierto valor. Se definen celdas de tamaño  $\varepsilon$  constante centradas en un valor inicial de la medición que conforma una señal y posteriormente, asignarle un símbolo a esa celda. En la siguiente gráfica podemos ver a que nos referimos.



1

Figura 4.13 Para las fluctuaciones que sobrepasan el valor de  $\varepsilon/2$  (ver sección 2.8), se define una nueva celda sucesora centrada en ese valor [13].

En la parte central de la gráfica hay una región donde la señal permanece confinada dentro de una celda durante varios tiempos tomamos una celda de tamaño  $\varepsilon$  centrada en un valor  $u(\tau)$ . Luego se mide el tiempo  $t$  que tarda la señal en salir de esta celda, es decir, se busca el primer valor de  $t$  para el cual  $u(t + \tau - u(\tau)) = \varepsilon/2$ . Esta codificación es un muestreo con intervalos de tiempo variable.

Como vimos en la figura 4.13, si en las mediciones existe un conjunto grande de datos en donde no se presentan fluctuaciones mayores a un cierto umbral, éstos quedarán definidos en una sola celda. La codificación que se propone toma al primer tiempo  $t_1$  como aquel en donde se cumple la siguiente condición:

$$|x(t_0 + t_1) - x(t_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

En la nueva codificación se requiere –para no perder información– saber si la señal pasa a la celda inferior o a la celda superior. Es por ello que requiere una etiqueta  $k$  que indica hacia donde migra la señal ( $k = \pm 1$ ). Las nuevas letras son:

$$(t_i, k_i)$$

Donde  $t_i$  corresponde al tiempo de salida de una celda  $i$  y a  $k_i$  se le podrán asignar valores 1 ó -1; si la fluctuación salió por debajo de  $\varepsilon/2$ , entonces se asigna un -1, si fue por arriba se asigna 1. Para fines prácticos de programación, podemos en lugar de asignar -1, para el evento

de salida por debajo de  $\varepsilon/2$ , asignamos un 0, este valor nos permitirá construir cadenas de números binarios y luego números enteros.

Luego es necesario conocer la frecuencia de repetición de estos arreglos. Para este punto del cálculo de  $h(\varepsilon)$ , podremos darnos cuenta que hemos ahorrado en cantidad de cálculos y de conteo, debido a que las celdas pueden ser variables en su anchura. Comparando con el método directo del cálculo de  $h(\varepsilon)$  que se tienen celdas de tamaño fijo, sin tomar en cuenta que pudiera haber una sección en la señal sin grandes fluctuaciones (ver figura 4.11).

En esta codificación se requiere contar la frecuencia de aparición de palabras  $\Omega = \{(t_i, k_i), (t_{i+1}, k_{i+1}), \dots, (t_{i+n-1}, k_{i+n-1})\}$ . Como ahora se están midiendo el tiempo de residencia en una celda, esto puede significar una reducción en el tiempo de cálculo de la entropía  $h(\varepsilon)$  con respecto al método directo, pues ahora se usa una sola letra para representar a un segmento de la señal en donde las fluctuaciones son menores a  $\varepsilon/2$ .

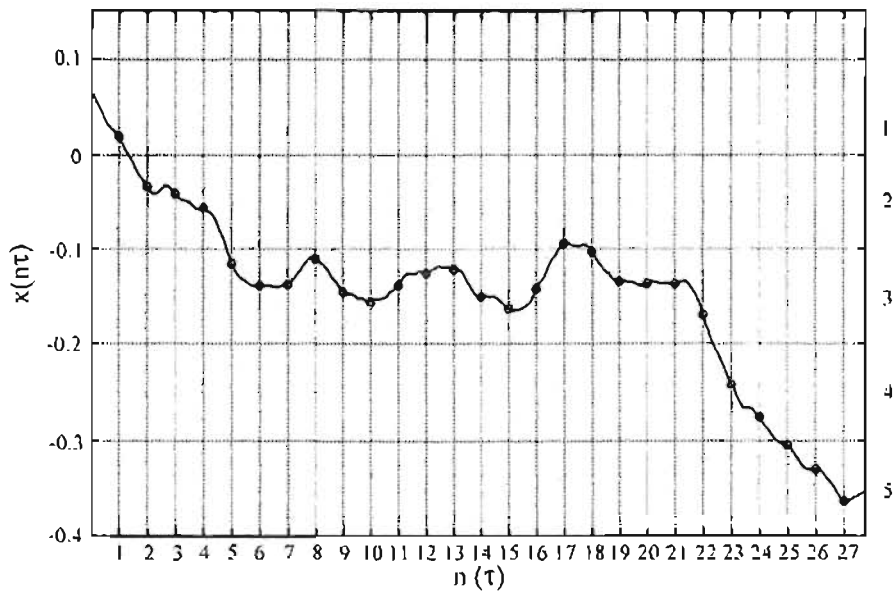


Figura 4.14 Esta dinámica simbólica se utiliza con regularidad y consiste en dejar el ancho  $\tau$  de las celdas es fijo, de esta forma se tiene que contar mucha información que puede ser redundante para el cálculo de la entropía- $\varepsilon$ , tiene inconvenientes como el tiempo que le lleva a una computadora realizar la estadística necesaria [13].

El método directo exige que se tenga una gran cantidad de datos, para construir también una cantidad grande de símbolos y arreglos, todo con el fin de realizar una buena estadística. Por estos motivos, el tiempo de cálculo puede aumentar en varios órdenes de magnitud con respecto al método de tiempos de salida. Para un muestreo de  $2 \times 10^6$  datos, el análisis con el método de tiempos de salida demorará a lo más 3 minutos en una computadora con procesador de 2 GHz, mientras que con el método usual, el mismo análisis puede demorar hasta un par de horas. Utilizando el método de tiempos de salida se obtiene una mejor convergencia para los valores de  $h(\varepsilon)$ , además simplifica el hecho de que la inversa del promedio de tiempos de salida



$1/\langle t(\varepsilon) \rangle$  nos debe el escalamiento del fenómeno, siendo  $h^\Omega(\varepsilon)$  (ver ecuación 2.23) un factor de corrección que no es dominante.

El modelo multifractal estima  $h(\varepsilon)$  cuya dependencia con respecto a  $\varepsilon$  es una ley de potencia. Para la estimación del exponente se puede acotar el valor de  $h(\varepsilon)$  separando las codificaciones para  $\varepsilon$  y para  $k$ . Para tal efecto se usan los siguientes resultados de la teoría de la información:

- 1) La entropía de una serie de tiempo compuesta  $\{t_i, k_i\}$  es mayor o igual que la entropía de cada una de las series  $\{t_i\}$  ó  $\{k_i\}$  por separado. En particular:  $h^\Omega(\{t_i, k_i\}) \geq h^\Omega(\{k_i\})$ .
- 2) Los estados posibles (o las palabras) alcanzan un máximo cuando  $\{k_i\}$  y  $\{t_i\}$  son independientes. Esto significa que  $h^\Omega(\{t_i, k_i\}) \leq h^\Omega(\{t_i\}) + h^\Omega(\{k_i\})$ .

Por otra parte se ha observado que para la serie  $\{t_i\}$  satisface la desigualdad, en donde:  $h^\Omega(\{t_i\}) \leq H_i^\Omega(\{t_i\})$  (ver sección 2.8). Finalmente la entropía  $h(\varepsilon)$  satisface las siguientes desigualdades:

$$\frac{h^\Omega(\{k_i\})}{\langle t(\varepsilon) \rangle} \leq h(\varepsilon) \leq \frac{h^\Omega(\{k_i\}) + H_i^\Omega(\{k_i\})}{\langle t(\varepsilon) \rangle}$$

Nótese que ambas cotas son más sencillas de evaluar y como se verá más adelante mantienen la misma ley de potencia para valores grandes de  $\varepsilon$ .

Se debe resaltar que la codificación de tiempos de salida tal como se ha presentado, deja de ser adecuada para el cálculo de entropía cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Eso se debe a la idea de que la señal abandona la celda y migra a la celda inmediatamente superior o inmediatamente inferior ya no se cumple. Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña es posible encontrar eventos tales que  $u(t_i)$  está en una celda y  $u(t_{i+1})$  se encuentra en una celda no contigua. En estos casos el símbolo  $k_i$  ya no adoptaría valores  $\pm 1$ , sino  $\pm 2$  o mayores.

Por esta razón para la evaluación del límite  $h(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  es recomendable utilizar el método de Grassberger y Procaccia [15].

## 4.3 Resultados

### 4.3.1 Experimento de capa límite turbulenta en placa plana

En la sección (4.2.2) se ha deducido que el escalamiento de  $h(\varepsilon)$  en capa límite está relacionado con la función de estructura de orden  $p'$  tal que,

$$\langle \delta u(r)^{p'} \rangle \sim r$$

$h(\varepsilon)$  tiene también un comportamiento de ley de potencias:

$$h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-p'}$$

En el caso de turbulencia homogénea isotrópica está bien establecido que  $p'=3$  (la ley de potencia  $-\frac{4}{5}$  dada por la ecuación de Howart-von Kármán).

Cerca de una placa, este resultado ya no funciona, de hecho el valor de  $p'$  es mayor a 3.

Antes de presentar el cálculo de  $h(\varepsilon)$  para varias distancias de  $\xi$  de las placas, vamos a mostrar algunos resultados del campo de velocidades en esta configuración. Por principio de cuentas la función de distribución de probabilidades no es una gaussiana pues las colas de probabilidad son diferentes (ver figura 4.15).

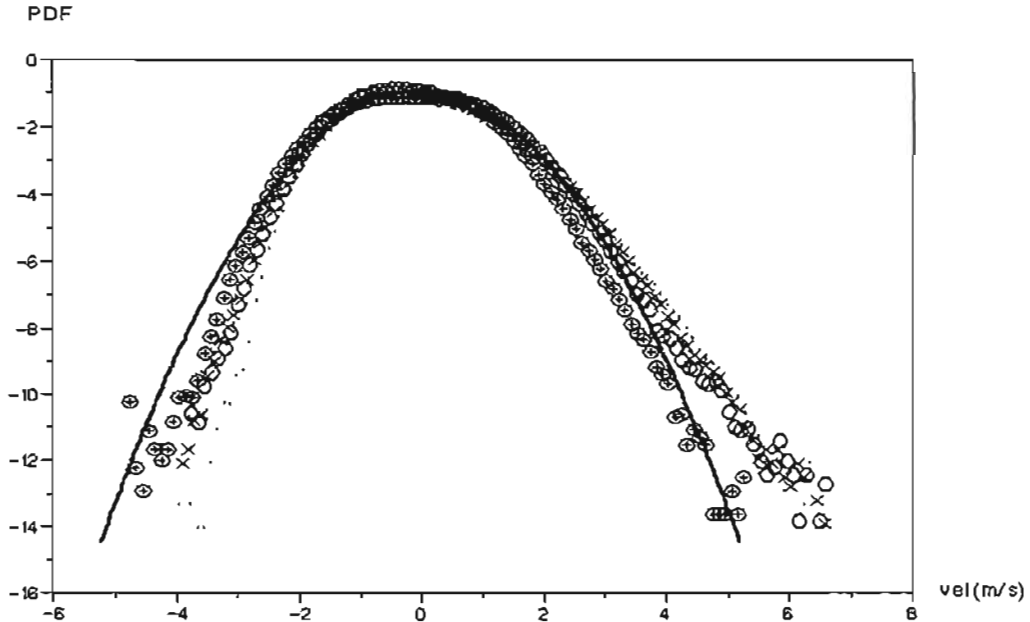


Figura 4.15 Se puede observar que las PDFs de la velocidad medida a diferentes alturas de una placa en el eje y se alejan de las colas de la distribución normal de Gauss (línea continua), aunque pareciera que en la parte central hay una tendencia hacia ésta distribución, se presentan diferentes PDFs para: (\*) a 125 mm, (●) a 1.46 mm, (+) a 4.7 mm y (○) a 10.7 mm.

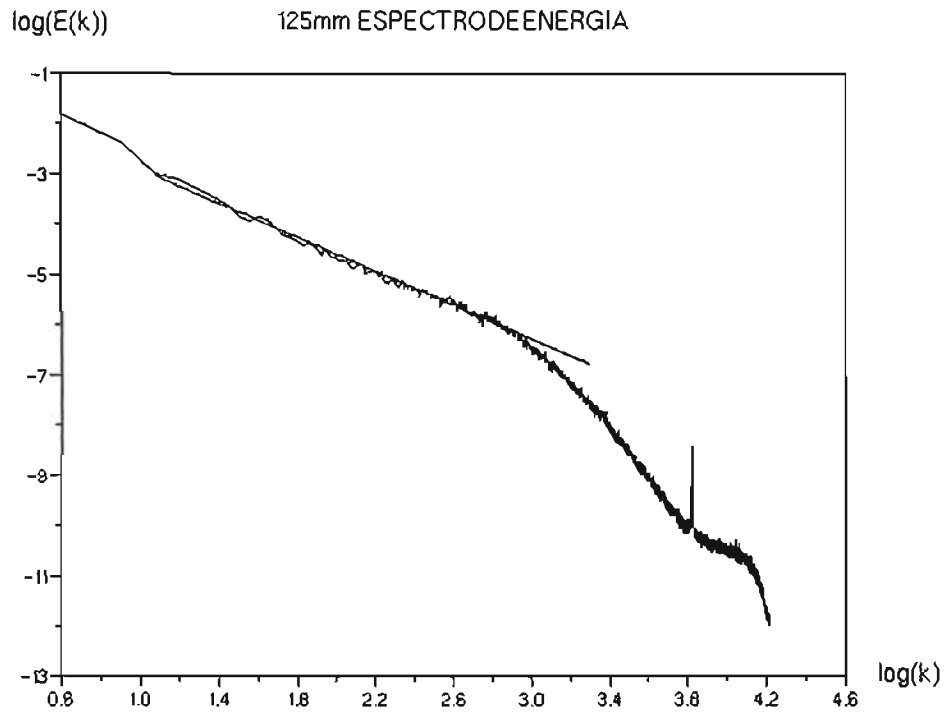
Aplanamiento	Asimetría	Distancia de la placa (mm)
3.12	0.43	1.46
3.21	0.67	4.7
2.74	0.08	10.7

Tabla 4.1 En esta tabla se presentan los valores estadísticos del sesgo y la asimetría para podemos dar una idea clara de cuanto se alejan las PDFs de la velocidad a diferentes distancias de la placa.

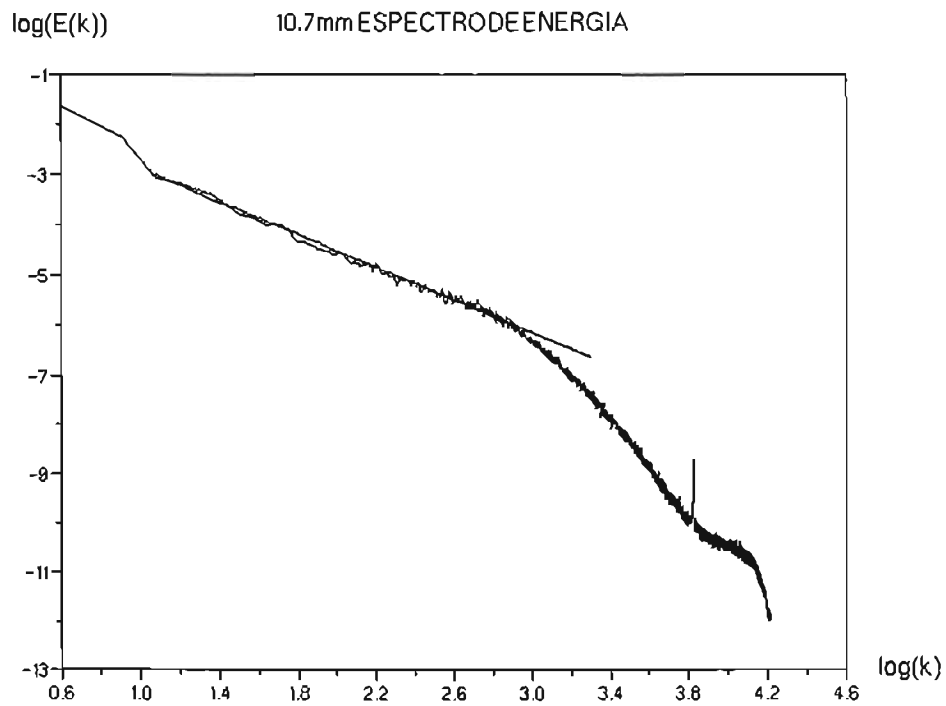
La transformada de Fourier de la energía cinética (figura 4.16), se resalta que a una distancia lo suficiente grande como para que el flujo se encuentre lejos de la influencia de la capa límite turbulenta se recupera la ley  $-5/3$ , lo cual indica que en el flujo hay un régimen turbulento homogéneo e isotrópico (figura 4.17a). Por otro lado, estas representaciones realizadas en la región logarítmica develan una tendencia a disminuir el valor de la pendiente conforme estamos más cerca de la placa, en un mismo intervalo de número de onda en donde se realiza el ajuste lineal (ver figura 4.16b, c, d y tabla 4.2).

Distancia (mm)	Valor de exponente
1.46	-1.43
4.7	-1.54
10.7	-1.63
125	-1.68

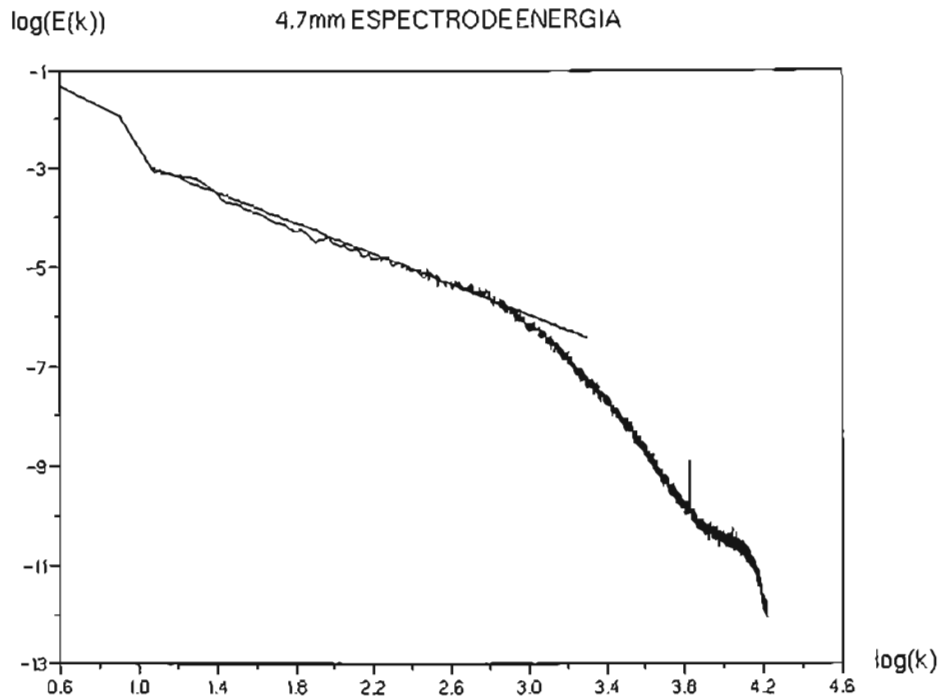
Tabla 4.2 Pendientes del ajuste lineal contra la distancia, a 125 mm se tiene una tendencia a recuperar la ley  $-5/3$ . Las gráficas de espectro de energía de donde se obtienen estos valores se presentan a continuación.



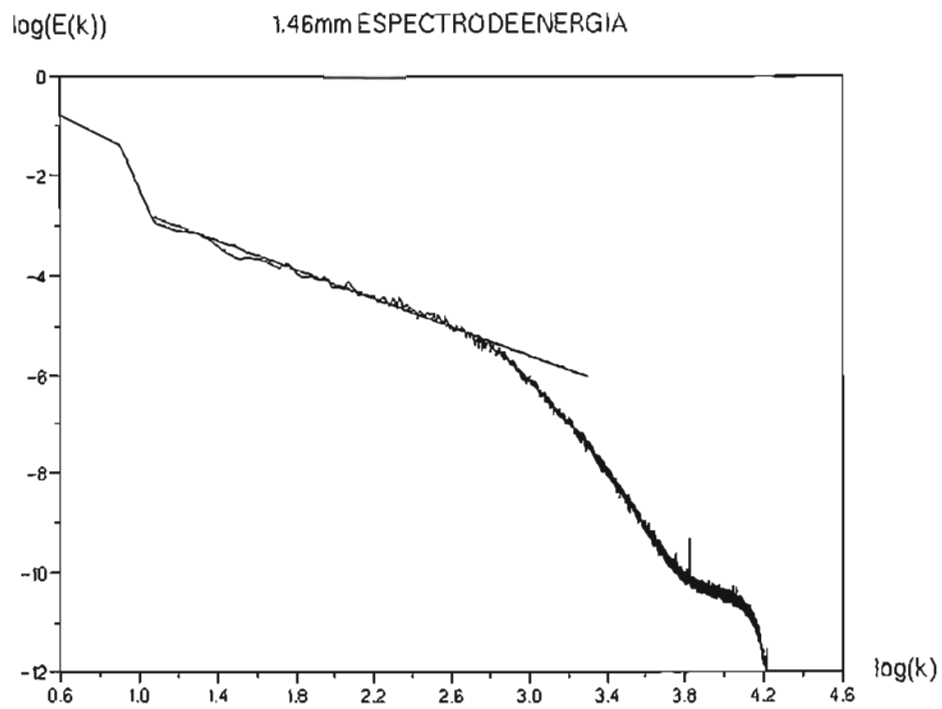
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.16 Espectros de energía cinética para distintas distancias de la placa  $E(k)$  en la región de la subcapa logarítmica y lejos de la placa. El pico que se observa en las gráficas en el intervalo (3.8, 4.0) puede deberse a ruido, no tiene relevancia experimental.

Una vez analizado el espectro del campo de velocidades, queda por observar como es el escalamiento obtenido del cálculo de la entropía-  $\varepsilon$  .

Por lo que hemos revisado, se hace notorio un comportamiento distinto en regiones cercanas a la pared con respecto a un flujo turbulento isotrópico. En la figura (4.17a) se exponen las gráficas obtenidas para las mediciones hechas lejos de la capa límite y otras dos mediciones para distancias cercanas a la capa. Es notoria la obtención de escalamientos distintos, mientras que para el flujo turbulento homogéneo e isotrópico se tiene una tendencia hacia éste:  $h(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-3}$  , para las mediciones cercanas a la placa, los exponentes para  $\varepsilon$  disminuyen respecto al exponente -3. Mientras más cerca se hagan mediciones de la placa, menor será el exponente que se obtenga, esto va en concordancia con lo expuesto en la sección (4.2.1). Debemos notar que para  $\varepsilon$  pequeño se tiene el escalamiento  $h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$  . Observamos que el exponente de escalamiento disminuye conforme nos acercamos a la placa (ver figura 4.17a).

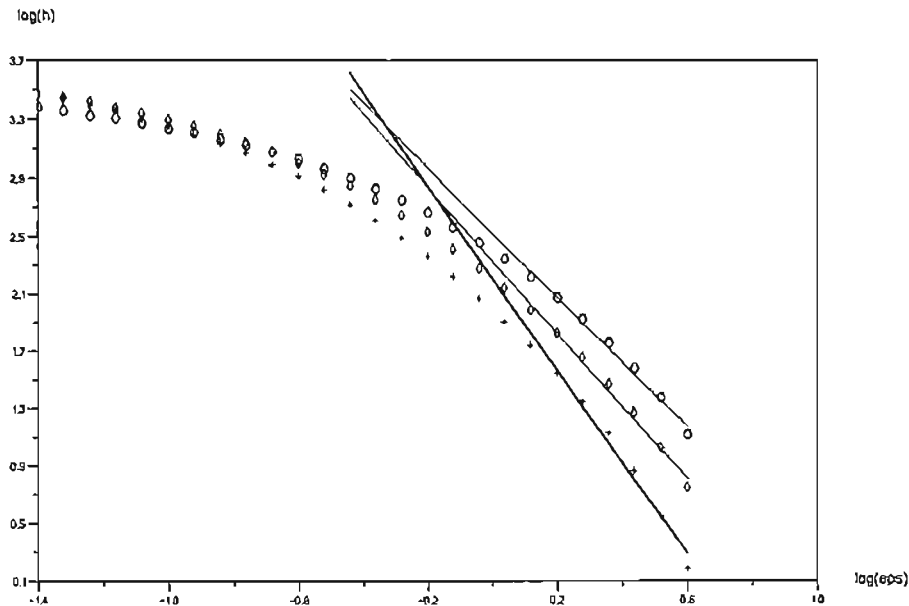


Figura 4.17 Se presenta el análisis de  $h(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-p}$  para las siguientes medidas del flujo a:  $p = -4.2$  , para  $\xi = 175$  (+),  $p = -4.5$  ( $\circ$ ) y  $p = -4.7$  para  $\xi = 45$  ( $\diamond$ ).

### 4.3.2 Experimento de transición a la turbulencia

Para el experimento descrito en la sección 4.1.3 presentamos las siguientes funciones de distribución de probabilidad (figura 4.18). Al observar las colas de las distribuciones se notan eventos que son trascendentes en el comportamiento del fenómeno de transición a la turbulencia. Para el campo de velocidad medido a 20 cm del obstáculo se pueden ver dos jorobas, luego la cola de la distribución se aleja de la distribución gaussiana.

Para fenómeno de transición a la turbulencia no se tiene un modelo que explique el escalamiento  $h(\varepsilon)$ , sin embargo hay algunos factores que afectan y que se mencionaron en páginas anteriores.

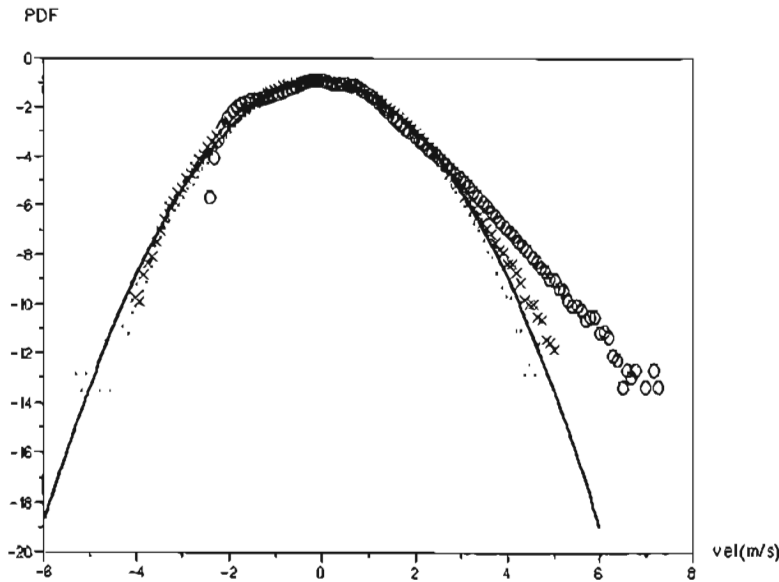


Figura 4.18 PDFs de la velocidad medidos a diferentes distancias del obstáculo cilindro. Podemos observar como las tres distribuciones que se presentan en esta gráfica difieren en sus colas de manera notable de una distribución normal (línea continua), inclusive en el caso de la medición de la velocidad a 20 cm se notan dos jorobas que aparecen casi en la parte central de la distribución. (○) A 20 cm, (+) a 100 cm y (●) a 220 cm.

Aplanamiento	Asimetría	Distancia del obstáculo (cm)
3.13	0.16	20
3.09	-0.03	100
2.87	0.07	220

Tabla 4.3 Valores de asimetría que nos indican que tan alejados están nuestras mediciones a diferentes distancias del cilindro de tener una distribución normal.

Las dos jorobas que aparecen en la distribución se deben a la presencia de vórtices a esa distancia del cilindro. Es conocido para el valor de número de Reynolds de 50 comienza la formación de vórtices. En el flujo que estudiamos está presente el fenómeno de la calle de von Kármán (figura 4.19), pero hay además muchas irregularidades, tal fenómeno en cuestión, es observado justo atrás del cilindro por lo cual, se detecta con la sonda el paso de los vórtices. En el espectro del campo de velocidades, observamos dos picos (figura 4.20), estos picos corresponden a la frecuencia de emisión de vórtices para las dos hileras.

## Esquema de la calle de von Kármán

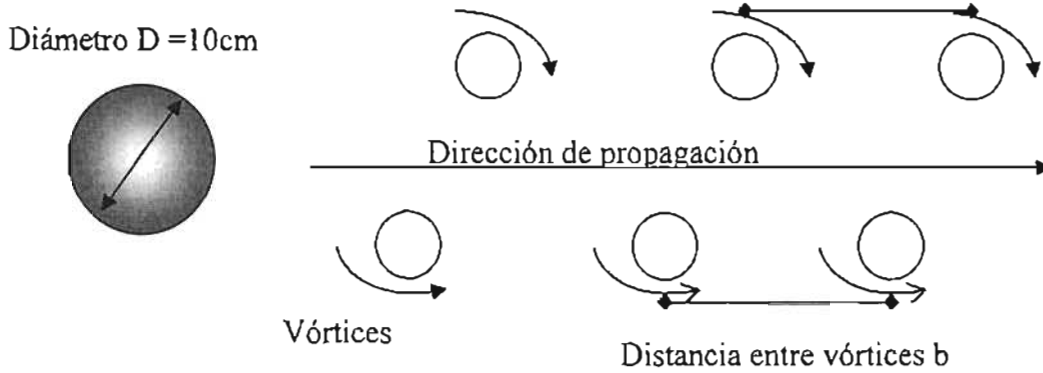


Figura 4.19. Hay dos hileras de vórtices que se forman, los vórtices giran en diferente sentido para cada hilera. La frecuencia con la que se generan, depende del diámetro del obstáculo y de la velocidad media del flujo.

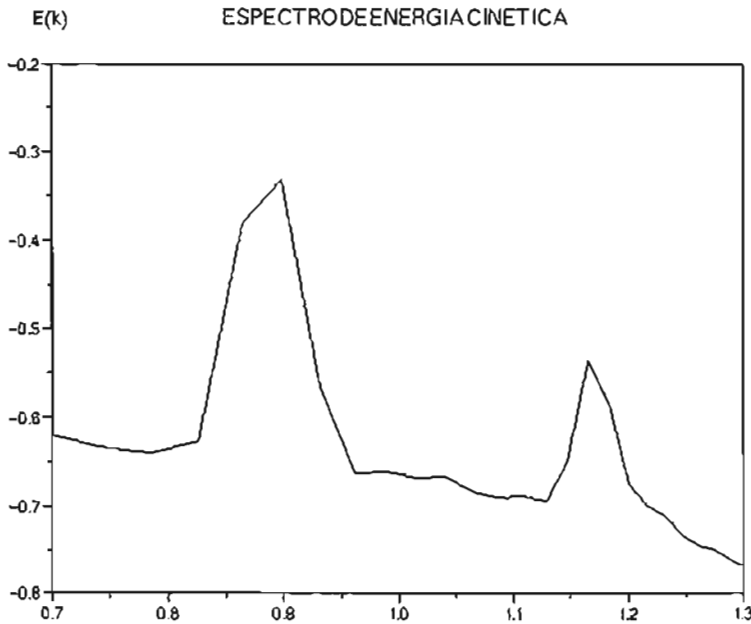


Figura 4.20 Para obtener el valor de frecuencia a partir de la definición del número de onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  y  $\lambda = \frac{2\pi U}{\omega}$ , entonces para obtener el valor de la frecuencia de los dos picos utilizamos la siguiente expresión:  $\omega = kU$ , si  $U = 4.23 \text{ m/s}$ , el valor de la frecuencia en el primer pico es 32.99 Hz y para el segundo pico 62.60 Hz con  $k = 7.8 \text{ m}^{-1}$  para el primer pico y  $k = 14.8 \text{ m}^{-1}$  para el segundo.



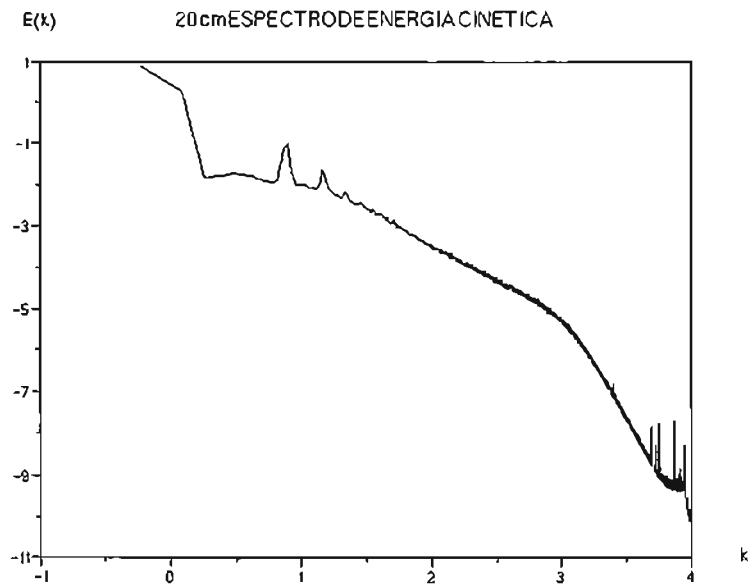


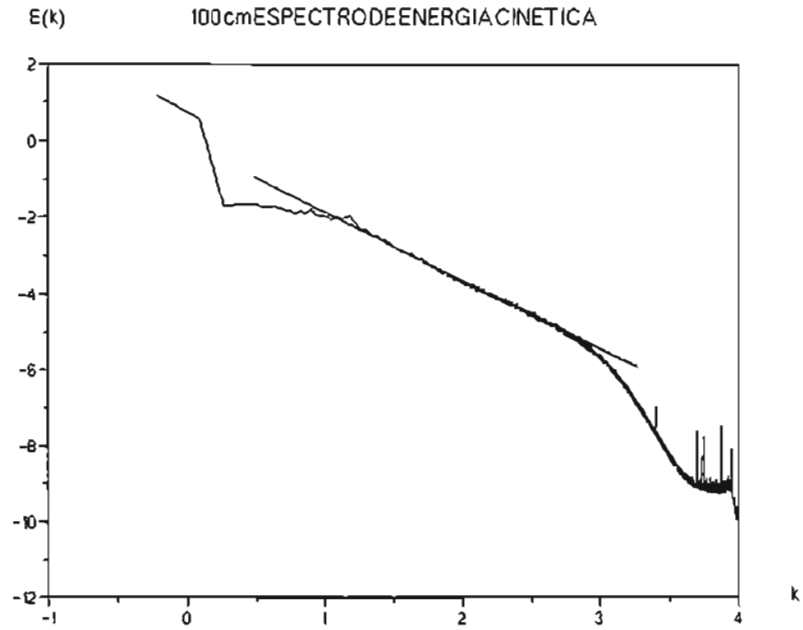
Figura 4.21 Espectro de energía cinética para el campo de de velocidades medido a 20 cm del obstáculo.

Podemos suponer que los picos que aparecen en el intervalo (0.5, 1.5) pueden deberse a la formación de vórtices a manera de una calle de von Kármán luego de que el flujo pasa por el cilindro.

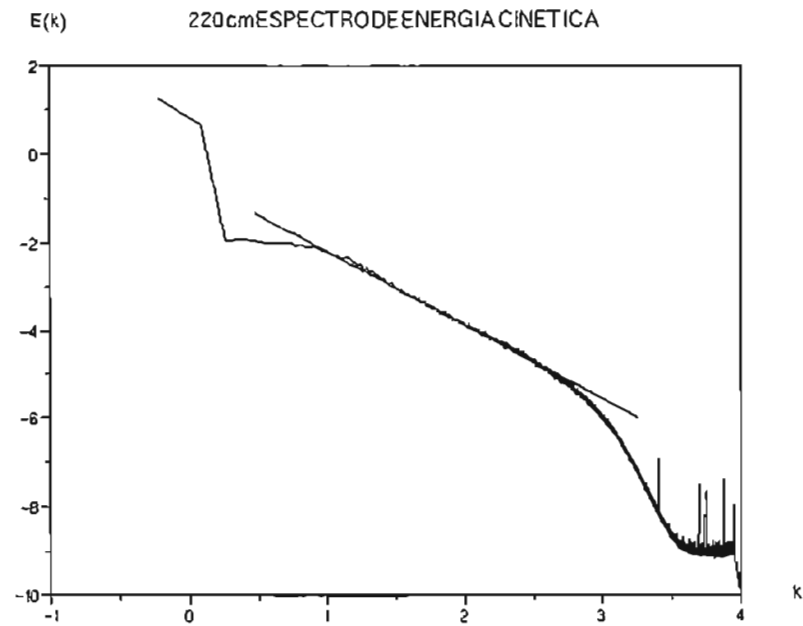
En el supuesto de tener la formación de la calle de von Kármán, la frecuencia del primer pico corresponde a la emisión de vórtices entonces, si se tiene que la frecuencia se puede escribir como:

$$\omega = 2\pi f = k \cdot U$$

además,  $k \approx \frac{2\pi}{b}$ , donde  $b$  es la distancia entre vórtices, para el cual obtenemos un valor de  $b_1 = 80 \text{ cm}$  para el primer pico y  $b_2 = 42 \text{ cm}$  b el segundo pico.



(a)



(b)

Figura 4.22 Espectro de energía cinética  $E(k)$  para (a) 100cm (b) 220cm del cilindro. Para ambas representaciones (a) y (b) se hizo un ajuste de recta en el intervalo de número de onda 2.5 y 3.98, y se obtuvieron las siguientes pendientes del ajuste: (a)  $m = -1.792$  y (b)  $m = -1.690$ . Interpretando el valor de la pendiente de la gráfica (b) podemos decir que se cumple la ley  $-5/3$  que nos indica que se trata de turbulencia homogénea e isotrópica.

Podemos decir, luego de las gráficas mostradas (figura 4.22), que comparando la ley  $-5/3$  predicha por la teoría para un flujo turbulento homogéneo e isotrópico y los datos experimentales obtenidos de la medición de la velocidad del flujo a 220 cm del cilindro, se calculó un valor aproximado de  $-1.69$  con un error porcentual del  $1.3\%$ , que podemos considerar experimentalmente aceptable respecto a la ley  $-5/3$ . Podemos decir que a 220 cm del cilindro se ha obtenido experimentalmente un régimen turbulento del flujo. Esto también tiene concordancia, luego de revisar el número de Reynolds que se tiene del flujo medio para esta distancia del cilindro (ver tabla 4.4).

Distancia del cilindro m	Velocidad media m/s	$R_\lambda$
0.20	2.78	232
1.0	3.94	363
2.20	4.14	297

Tabla 4.4  $R_\lambda = \frac{\sigma \lambda}{\nu}$ , donde  $\lambda = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\langle (du/dx)^2 \rangle}}$ .

Para el experimento de transición a la turbulencia encontramos los siguientes valores del exponente de  $h(\varepsilon)$  contra la posición (figura 4.23):

Exponentes

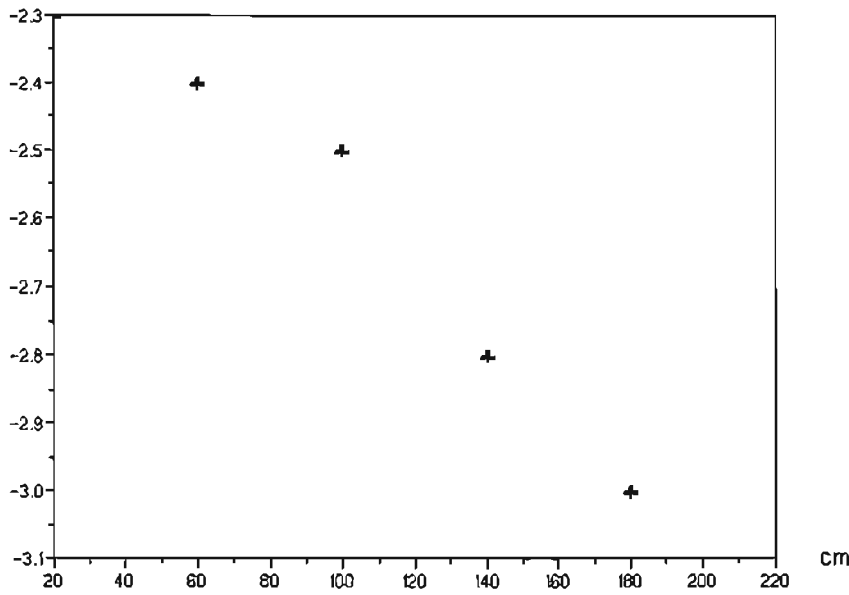


Figura 4.23. Gráfica correspondiente a la tabla 4.2. Se puede observar que para las mediciones cercanas al cilindro, el valor del exponente de  $h(\varepsilon)$  en valor absoluto es menor que 3, para las mediciones realizadas lejos del cilindro, el valor de la entropía- $\varepsilon$  tiende al valor de 3.

Distancia (cm)	P ( $\varepsilon^{-p}$ )
20	-2.3
60	-2.4
100	-2.5
140	-2.8
180	-3.0
220	-3.1

Tabla 4.5. Se presentan los exponentes de escalamiento obtenidos para las diferentes distancias del cilindro.

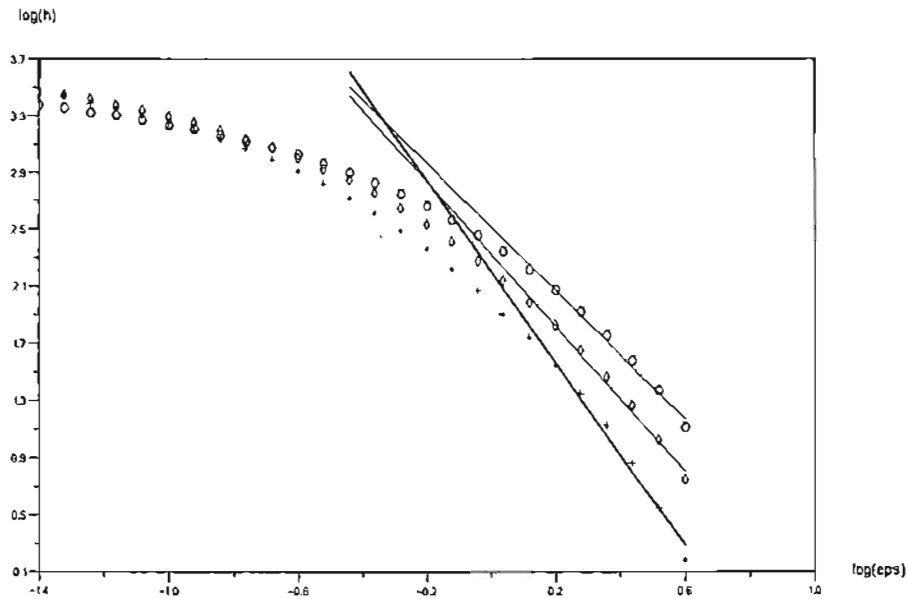


Figura 4.24. En esta gráfica observamos los exponentes de escalamiento de  $h(\varepsilon)$  que aparecen en la tabla (4.5) para las mediciones a 20cm ( $\circ$ ), 100cm ( $\diamond$ ) y 220cm ( $+$ ) del obstáculo.

Podemos decir de la tabla (4.5), que para las mediciones hechas en las proximidades del cilindro hay una mezcla entre la señal de un flujo laminar y un flujo turbulento (ver figura 4.9a), de la misma manera obtenemos valores del exponente de  $\varepsilon$  mayores que -3 para 60 cm, 100 cm y 140 cm. Y para las mediciones correspondientes a 180 cm y 220 cm se observa turbulencia completamente desarrollada, pues el valor del exponente de  $\varepsilon$  es -3 aproximadamente.

Un aspecto muy importante es el valor del exponente de Lyapunov que se obtiene. En la gráfica (4.25) se puede observar que, para una distancia de 20 cm del obstáculo, debido a que la señal tiene una mezcla de partes laminares y partes turbulentas (figura 4.9a) entonces se verifica que, la caoticidad es menor (sección 2.7), mientras que a 220 cm el exponente de Lyapunov aumenta. Físicamente quiere decir que a 20 cm del cilindro tenemos un flujo que conserva características laminares, pero la perturbación debida al cilindro, comienza a incrementarse en el flujo, el grado de desorden puede apreciarse con un exponente  $\lambda_{20cm}$  pequeño que tiende a un valor constante. Lejos del cilindro, a 220 cm, el sistema se encuentra completamente desordenado,  $\lambda_{220cm} > \lambda_{20cm}$  y su exponente no parece tender a un valor constante.

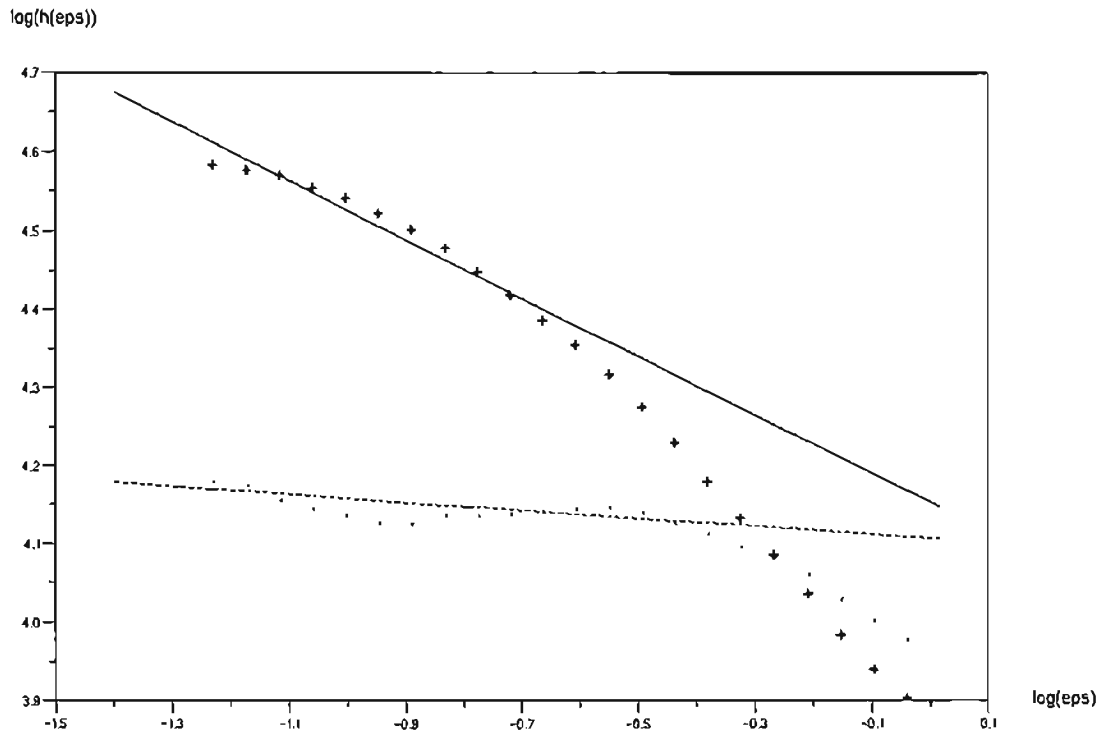


Figura 4.25 En esta gráfica se obtienen los exponentes de Lyapunov a 20 cm (●)  $\lambda = 12782$  y a 220 cm (+)  $\lambda = 14223$  (línea continua).

#### 4.4 Discusión

La conexión entre el experimento y la teoría no la podemos hacer mediante la simple observación de los fenómenos, tampoco sus representaciones gráficas de velocidad contra tiempo pueden ser muy útiles para conocer cómo es el sistema que estamos analizando. Hace falta revelar muchos detalles que no están a simple vista, hace falta, en principio, utilizar herramientas de análisis de datos, tales como la transformada de Fourier o las funciones de densidad de probabilidad.

Al tener una gran cantidad de datos que determinan nuestro sistema podemos hacer estimaciones, promedios, encontrar cantidades globales que nos permiten conocer cómo es nuestro sistema físico, pero al analizar con detalle las diferentes posibilidades que se nos presentan, como por ejemplo; las fluctuaciones de la velocidad, el comportamiento intermitente (el trabajo de tesis no está enfocado a analizar este tipo de eventos, aunque admitimos, pudieran ser influyente para el cálculo de  $h(\epsilon)$ ). La repetición de patrones de diferentes escalas en las mediciones de la velocidad, conforman un conjunto de observaciones que no se esperan obtener con la simple intuición. Se debe de hacer un trabajo de análisis estadístico para develar los diversos comportamientos del fenómeno y así saber lo que está ocurriendo con el sistema físico. Ejemplo claro de esto es el hecho de que no podemos decir cuál es la diferencia entre la gráfica 4.9b ó 4.9c, con sólo ponerlas una junto a la otra, y aunque pudiésemos comparar alguna de

estas dos gráficas con la 4.9a, difícilmente podríamos explicar de forma contundente sus diferencias, no sin antes hacer una comparación cuantitativa y exhaustiva de cada sistema; aquí cabe preguntarse ¿cuál gráfica representa un flujo turbulento en el régimen de isotropía y homogeneidad?

Un aspecto importante que se debe tomar en cuenta al realizar experimentos es el tipo de información que se quiere obtener de ellos. No es intención perder el orden de los experimentos de este trabajo, empero el experimento de transición a la turbulencia (ver sección 4.1.3) ofrece la ventaja de poder observar fácilmente lo que estamos argumentando: al medir la velocidad de un flujo de aire delante de un obstáculo, se esperaría tener formaciones de vórtices (la calle de von Kármán), pero al tener un flujo que sobrepasa el número de 2,500 Reynolds se puede pensar que el fenómeno de formación de vórtices quizás tendría algunas distinciones importantes con respecto a un flujo con un número de 600 Reynolds (se puede ver el fenómeno de la calle von Kármán perfectamente) y también pudiera pensarse que éste fenómeno no se haría presente. Al realizar un análisis espectral de la energía cinética, nos podemos percatar que en nuestro punto de medida a 20 cm del cilindro sí aparecen vórtices. Esta información se obtiene de observar dos picos que aparecen en la gráfica de espectro de energía (ver figura 4.20), pero conforme nos alejamos del obstáculo dejan de aparecer. Adicionalmente los exponentes son menores que  $-5/3$  al acercarse al cilindro (ver figuras 4.22a, b). A pesar de que este experimento de transición a la turbulencia solamente fue diseñado para medir la velocidad con una sonda de hilo caliente en la componente horizontal, podemos darnos cuenta de la existencia de procesos de transmisión de la escala de inyección a la escala disipativa. Ahora no es suficiente este análisis espectral. Para observar con más detalle lo que está sucediendo en el flujo en las diferentes distancias medidas desde el cilindro, para ello requerimos la aplicación de  $h(\varepsilon)$  que nos permitirá ver el comportamiento a diversas escalas y asociarlas con un exponente de escalamiento. El grado de desorden del fenómeno se conoce al estimar un exponente de Lyapunov ( $\lambda > 0$ ), para ello utilizamos la relación que existe entre  $h(\varepsilon)$  y  $\lambda$  (ver sección 2.7 y figura 2.24).

En el caso de la capa límite turbulenta en placa plana (ver sección 4.1.2), nos estamos basando en un modelo que hace una predicción sobre los valores de los exponentes de escalamiento, por lo tanto, también sobre el grado de desorden del flujo en la subcapa logarítmica (ver sección 4.2.2) con respecto a una región del fluido lo suficientemente alejada de la capa límite turbulenta como para ignorar sus efectos. Lo que esperamos ver como resultado del análisis espectral, es que las velocidades medidas en la región de la subcapa logarítmica (ver figura 4.7) tengan un exponente diferente (ver sección 1.3.3). De hecho se puede observar que los exponentes son mayores que  $-5/3$  (ver tabla 4.2). La intención es comprender lo que sucede con la velocidad dentro de la subcapa logarítmica con respecto a aquella de la región más alejada de la placa. Del comportamiento autosemejante dentro de la subcapa podemos decir que el exponente  $-p$  disminuye conforme nos acercamos a la placa (ver figura 4.17).

## Conclusiones

Hemos observado en los dos fenómenos estudiados que el grado de desorden en su evolución, depende de la forma en la que el flujo interactúa con sus fronteras sólidas, es decir: para el caso de la capa límite turbulenta en placa plana, observamos que en la región de la subcapa viscosa, la influencia de la placa produce un régimen no es isotrópico ni homogéneo, pues las condiciones geométricas de las fronteras afectan su desarrollo a lo largo de la placa, inclusive a una distancia grande de la placa donde se supone no hay influencia, no obstante, se tiene una tendencia hacia los resultados de la ley  $-5/3$ . El modelo multifractal predice una ley de escala  $h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-p'}$  en donde  $p'$  es aquel exponente en donde  $\langle \delta u(r)^{p'} \rangle \sim r$ .

El cálculo de la entropía se ve afectado sensiblemente por la presencia en la señal de partes laminares. Cuando se calcula el espectro de energía en el experimento de transición a la turbulencia, la ley  $-5/3$  no sufría grandes modificaciones, sin embargo, no se puede decir lo mismo para  $h(\varepsilon)$ . Una de las aplicaciones que se puede dar a esta herramienta de análisis es la de poder conocer si un flujo turbulento es homogéneo e isotrópico, pues en este último caso  $h(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-3}$ . En los experimentos que se realizaron cerca de fronteras sólidas, el exponente fue diferente de 3.

Para concluir de manera general, retomamos los puntos de vista expuestos en el capítulo 1, sobre la pregunta ¿qué es la turbulencia?, justo en este punto del trabajo tenemos argumentos cuantificables para poder decir qué características tienen los flujos turbulentos:

- *Un flujo turbulento tiene un grado de desorden representado por un exponente de Lyapunov que puede tender a infinito.*
- *Las leyes de potencia que describen el comportamiento autosemejante de un flujo turbulento homogéneo e isotrópico, tienen exponentes iguales a -3.*

El cómputo de la entropía- $\varepsilon$  con el método de tiempo de salida reduce el tiempo de cálculo considerablemente. Permite observar fácilmente la presencia de escalamientos, que por ejemplo, no eran tan claros con el método de Grassberger-Procaccia (figura 2.6), es decir, para analizar 10,000 datos, el método directo demora más de 35 min, mientras que el método de tiempos de salida no demora más de 1 minuto.

A lo largo de este trabajo revisamos conceptos de hidrodinámica, la teoría K41 sobre el comportamiento estadístico de los flujos turbulentos, también las bases para comprender cuando un fenómeno es caótico y cuando no con ayuda de exponentes de Lyapunov y la función de información o entropía, revisamos de dónde proviene dicha función, así mismo, como aplicar esta herramienta al análisis de datos mediante la construcción de una dinámica simbólica, en particular: el método de tiempos de salida. También realizamos un ejercicio de prueba que nos permitió saber que los algoritmos de cálculo de  $h(\varepsilon)$  estuviesen correctos antes de aplicarlos a los datos obtenidos de los experimentos. Analizamos el fenómeno de capa límite laminar y turbulenta, dimos una breve semblanza del funcionamiento del equipo experimental, abordamos



detalles de la teoría multifractal para el estudio de la capa límite turbulenta y justificamos el cálculo de  $h(\varepsilon)$  con el método de tiempos de salida.

El cálculo de  $h(\varepsilon)$  no solamente puede ser utilizado en el escrutinio de cantidades observables de los flujos turbulentos, puede ser también utilizado en otras ramas de la ciencia como la genética, la economía, sociología entre otras, de este tipo de aplicaciones proviene su importancia para la comprensión de fenómenos autosemejantes.

## Apéndice A

### *Probabilidad y cálculo de variaciones*

#### *Definición objetiva de la probabilidad frecuentista o de Venn*

Sea  $n$  el número de experimentos (o de veces que se repite un experimento) aleatorios. Sea  $m$  el número de veces que aparece el evento  $A$ . la frecuencia relativa de  $A$  es  $f_n(A) = \frac{m}{n}$ . La probabilidad de  $A$  se define como  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$ .

Esto es válido cuando el experimento tiene regularidad estadística.

#### *Definición matemática, axiomática de la probabilidad o de Kolmogorov*

Sea  $E$  un experimento. Sea  $S$  un espacio muestral asociado con  $E$ . con cada evento  $A$  de  $S$  asociamos un número real  $P(A)$  llamado probabilidad de  $A$  que satisface los siguientes axiomas.

- i)  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ii)  $P(S) = 1$
- iii) Si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- iv) Si  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$  son eventos que se excluyen mutuamente por pares entonces  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Sea  $\Omega$  un espacio de eventos posibles, distinguibles entre sí. Sea  $\omega_1 \in \Omega$   $\{\omega_1\}$  forman un campo de Borel, es decir,  $\mathbf{B} = \{\{\omega_1\}\}$ , lo cual significa que:  $b_i, b_j \in \mathbf{B} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} b_i \cap b_j &\in B \\ b_i \cup b_j &\in B \\ b_i^c &\in B \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} b_i &\in B \end{aligned}$$

Un campo de Borel es una estructura matemática en la que podemos establecer una medida  $\mu(B)$ . Si  $\mu(B) < \infty$ , la medida es acotada y puede normalizarse  $\mu(B) = 1$ .

En este caso el triple  $\langle \Omega, B, \mu \rangle$  es un espacio de probabilidad.

Definición de variable aleatoria. Se llama variable aleatoria a cualquier función que asigna números reales a los eventos de un experimento aleatorio. Es decir  $x$  mapea  $S$  en un conjunto de reales conocido como el recorrido de  $x$ ,  $R_x$ . Si  $R_x$  es finito ó infinito numerable, es decir, los valores  $x$  se pueden indicar  $x_1, x_2, \dots$ , se dice que  $x$  es una variable aleatoria discreta.

Con cada  $x_i$  hay asociada una probabilidad  $P(x_i)$  inducida por  $x$  desde  $S$ . A  $\{(x_i, P(x_i))\}$  se le conoce como distribución discreta de probabilidades.

Para el caso discreto debe cumplirse que  $0 \leq P(x_i) \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$ , entonces se dice que, la probabilidad está normalizada. Para que la probabilidad en el caso continuo esté normalizada deberá cumplirse la siguiente condición:  $f \geq 0$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Se conoce  $f$  como densidad de probabilidad y no tiene ningún significado probabilístico sino hasta que se realiza la integral  $P(x \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$ .

### **Leyes de probabilidad**

#### **Leyes discretas**

Ley geométrica  $P(k) = q^{k-1} p$ . Significa la probabilidad de tener 1 éxito en  $k$  intentos.

Ley de Pascal  $P(k) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$ . Significa la probabilidad de tener que hacer  $k$  intentos para obtener  $n$  éxitos.

Ley binomial  $P(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ . Significa la probabilidad de obtener  $n$  éxitos en  $k$  intentos.

Ley de Poisson  $P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ . Significa la probabilidad de observar  $k$  veces un evento de frecuencia de repetición  $\nu = \frac{\lambda}{t}$  a lo largo de un intervalo  $t$ .

#### **Leyes continuas**

Ley uniforme  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ .

Ley exponencial  $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda} x$ ,  $\lambda > 0$ .

Ley normal o Gaussiana  $f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $\sigma > 0$

### **Cálculo combinatorio**

Si hay  $n$  lugares y  $n$  diferentes objetos. Se pregunta: ¿con cuántos procedimientos pueden colocarse  $n$  diversos objetos en  $n$  sitios? Tómese cualquier objeto entre los  $n$  objetos diferentes.

A éste se le puede colocar en  $n$  sitios existentes mediante  $n$  maneras. Para cada una de las  $n$  posiciones del primer objeto, el segundo objeto puede ubicarse en  $n-1$  sitios y, por lo tanto, dos objetos pueden colocarse en  $n$  sitios por medio de  $n(n-1)$  procedimientos y así sucesivamente.

$$n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

$n!$  indica la cantidad diferente al colocar  $n$  objetos de  $n$  maneras distintas. Esto se llama permutación.

$$P_n = n!$$

Ordenaciones: Si se tienen objetos en una caja entonces, se realizan  $r$  extracciones de objetos de la caja, se toma un objeto al azar, se registra y se queda afuera, lo mismo con un segundo objeto y así sucesivamente hasta el  $r$ -ésimo. Tenemos un arreglo ordenado de  $r$  objetos.

¿Cuándo dos ordenaciones son distintas?

Cuando se tenga al menos un objeto distinto o cuando se tengan los mismo objetos pero al menos, dos de ellos estén en distinto orden.

$$O_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ordenaciones con repetición. Extracciones secuenciales de  $r$  objetos con reemplazo. Se extrae el primero objeto de la caja, se registra, se regresa, lo mismo con los siguientes hasta el  $r$ -ésimo. Siempre hay objetos dentro de la caja.

$$OR_n^r = n^r$$

Son los arreglos de tamaño  $r$  formados, usando  $n$  objetos distintos  $C(n, m) = \frac{n!}{[m!(n-m)!]}$ .

Se supone la realización de todas las combinaciones posibles  $C_n^r$ . Luego se ordena cada combinación. Se desea ordenar conjuntos de  $r$  objetos:  $P_r$

Entonces se tienen las ordenaciones de  $n$  objetos tomados de  $r$ .

$$C_n^r \cdot P_r = O_n^r$$

$$C_n^r = \frac{O_n^r}{P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- [1] Meneveau Charles and K. R. Sreenivasan, The multifractal nature of turbulent energy, Mason Laboratory, Yale University, New Haven, CT 06520, USA.
- [2] Guyon E., J. P. Hulin, L. Petite, Hydrodynamique physique, Savoirs actuels, EDP Science/CNRS Éditions, (2001).
- [3] Lesieur Marcel, La turbulence, Press Universitaires de Grenoble, (1994).
- [4] Frisch Uriel, Turbulence, Cambridge University Press, (1995).
- [5] Arfken G. B. and H. J. Weber, Mathematical methods for physicists, A Harcourt Science and Technology Company, (2001).
- [6] Shames Irving H., Mecánica de fluidos, 3<sup>a</sup> edición, McGraw Hill (1995).
- [7] Landsberger Peter T., Thermodynamics and statical mechanics, Dover Publications, Inc. New York, (1990).
- [8] Kundu Pijush K., Ira M. Cohen, Fluid mechanics, Academic Press, second edition, (2002).
- [9] Staicu Adrian D., Intermittency in turbulence, Cip-data Library Technische Universiteit Eindhoven, (2002).
- [10] Ruiz Chavarría Gerardo, Intermittencia de velocidad y temperatura en turbulencia desarrollada, Tesis doctoral FC-UNAM, 1995.
- [11] Broun Eliezer, Caos, fractales y cosas raras, Fondo de Cultura Económica, La Ciencia desde México, Vol. 150, (1996).
- [12] Baker G. L. and J. P. Gollub, Chaotic dynamics an introduction, Cambridge University Press, (1992).
- [13] Biferale L., M. Abel, M. Cenin, M. Falcioni, D. Vergni, A. Vulpiani, Exit-times and  $\varepsilon$ -entropy for dynamical systems, stochastic process, and turbulence, Physica D Elsevier 147 (2000) 12-35.
- [14] Maes Christian, F. Redig and A. Van Moffaert, On the definition of entropy production, via examples, Journal of Mathematical Physics, Vol. 41, number 3, (March 2000).
- [15] Grassberger Peter, Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal, Physical Review A, Rapid Communications, Vol. 28, number 4, (October 1983).
- [16] Eckmann J. P. and D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, The American Physical Society, Reviews of Modern Physics, Vol. 57, No. 3, Part 1, (July 1985).
- [17] Schell M., S. Freaser and R. Kapral, Diffusive dynamics in systems with translational symmetry: A one-dimensional-map model, Physical Review A, Vol. 26, number 1, (July 1982).
- [18] Gerhart Philip M., Richard J. Gross, J. I. Hochstein, Fundamentos de mecánica de fluidos, Addison-Wesley Iberoamericana, (1992).
- [19] Monin A. and A. M. Yaglom, Statical fluid mechanics: mechanics of turbulence, The MIT Press, (1973).
- [20] Landau and E.M. Lifshitz, Fluid mechanics, Vol. 6, Pergamon Press (1978).
- [21] DANTEC, Probes for hot-wire anemometry, First edition, publication no.: 196-105-01. Measurement Technology A/S, Tonsbakken 16-18, P.O. Box 121, DK-2740 Skovlunde, Denmark, 1996.
- [22] Ruiz Chavarría G., S. Ciliberto, C. Baudet, E. Lévêque, Scaling properties of streamwise component of velocity in a turbulent boundary layer, Physica D Elsevier 141 (2000) 183-198.
- [23] Sapoval B., Universalités et fractals, Flammarion, France, 1997.

- [24] García Aurora M., Nado de dos cuerpos esféricos con movimientos de pequeña amplitud, Tesis doctoral FC-UNAM, División de Estudios de Postgrado, (1998).
- [25] Mosteller F., E. K. Rourke, G. B. Thomas, Probability and statistics, Addison – Wesley, (1961).
- [26] Currie I. G., Fundamental mechanics of fluids, McGraw Hill, second edition, (1993).
- [27] Prem K. Kythe, P. Puri, M. R. Schäferkötter, Partial differential equations and boundary value problems with mathematica, Chapman & Hall/RCR, (2003).
- [28] White Frank M., Mecánica de fluidos, McGraw Hill, (1979).
- [29] Schlichting H., K. Gersten, Boundary layer theory, Springer, 8<sup>th</sup> Edition, 2000.
- [30] Pinton Jean-Francois, Mesure de vorticité par diffusion ultrasonore, These pour obtenir le diplôme de doctorat, l'Universite Claude Bernard – Lyon I, 1992.
- [31] H. Schlichting and K. Gersten, Boundary layer Theory, Springer 8<sup>th</sup> Revised and enlarged edition, 1999.