

01174



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELO MATEMÁTICO PARA LA
CARACTERIZACIÓN GEOMECÁNICA
DE FORMACIONES A TRAVÉS DE
PRUEBAS UNIAXIALES Y TRIAXIALES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**MAESTRO EN INGENIERIA
PETROLERA Y GAS NATURAL**

P R E S E N T A :
CASTILLO CASTILLO ALONSO

DIRECTOR: M. I. JOAQUIN MENDIOLA SANCHEZ



MÉXICO, D. F., CD. UNIVERSITARIA

2005

m. 345976



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A Dios que siempre ha estado conmigo.

A mi madre, todo lo que soy te lo debo a ti, gracias a tu valor, cariño y energía inquebrantable.

A la madre Paz, madre Cuquita y madre Adela por haber estado en los momentos más difíciles de mi vida.

A mi hermano

A mi tío Abel que siempre me apoyo y motivo para seguir.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, que es parte vital de mi formación y de mis valores.

Gracias al CONACYT por la apoyo otorgado durante mis estudios de posgrado, ya que sin su ayuda no lo hubiera logrado.

Al M.I. Joaquin Mendiola Sanchez por su ayuda y comprensión para la realización de esta tesis, así como un especial agradecimiento al Dr. Daniel García Gavito por el apoyo brindado y sus consejos.

A los profesores M.C. Jaime Ortiz Ramírez, Dr. Vicente Casariego González y Dr. Fernando Samaniego Verusco.

A mis compañeros Armando Sandoval, Plinio, Josué, Juan, Rodolfo, Enrique y Paola, por los momentos agradables que pasamos.

A los compañeros del IMP Rodolfo y Daniel Reyes Segura .

ÍNDICE

Capítulos	páginas
RESUMEN	VI
1.-INTRODUCCIÓN	1
2.- REVISIÓN DE LA LITERATURA	3
2.1.- Teoría elástica lineal	3
2.1.1.- Esfuerzo	3
2.1.2.- Deformación	3
2.1.3 Constantes elásticas	5
2.1.3.1.-Módulo de Young	6
2.1.3.2.-Relación de Possion	6
2.1.3.3.- Módulo volumétrico	7
2.1.3.4.- Módulo de corte	7
2.1.3.5.-Módulo de Lamé	7
2.1.4.-Ecuaciones de esfuerzo-deformación	8
2.2.- Teoría Poroelástica	9
2.2.1.-Constantes poroelásticas del material	9
2.2.2.-Mecánica continua	12
2.2.3.-Micro mecánica	15
2.2.3.1.- Respuesta del medio poroso	16
2.2.3.2.- Respuesta del fluido	17
2.2.4.- Pruebas con camisa y sin camisa	17
2.2.4.1-Interpretación de las constantes del material para pruebas sin camisa y con camisa	18
2.3.-Ecuaciones gobernantes	20
2.4.- Número de constantes poroelásticas necesarias	21
2.5.-Fuentes de obtención de las constantes de roca	21
2.5.1.-Núcleos	22
2.5.2.-Preparación del núcleo	23

2.5.3.-Equipo de laboratorio	24
2.5.4.-Mediciones de los esfuerzos y deformaciones durante las pruebas	25
2.5.5.-Pruebas de laboratorio más comunes en mecánica de roca	26
2.5.5.1.-Pruebas uniaxial	26
2.5.5.2.-Prueba triaxial	27
2.5.5.3.-Ensayos de compresibilidad	29
2.5.5.4.- Prueba hidrostática	29
2.5.5.5.-Pruebas true triaxial	30
2.5.5.6.-La prueba de Odómetro	31
2.5.5.7.-Prueba de un cilindro hueco	31
2.5.5.8.-Prueba de torsión	32
2.5.5.9.- Índice de pruebas	32
2.5.5.10.-Pruebas de velocidad de onda	35
2.6.- Determinación de las constantes poroelásticas	37
2.6.1.-Constantes de material drenado y no drenado	38
3.- MODELO MATEMÁTICO	40
3.1.- Planteamiento del problema	40
3.1.1.-Suposiciones	41
3.1.2.-Consideraciones	41
3.1.3.-Condiciones de frontera	43
3.1.3.1.- Condiciones de frontera generales	43
3.1.3.2-Condiciones de frontera particulares	44
3.1.4.- Condición inicial	45
3.2.-Solución	45
3.2.1.-Solución general	45
3.2.2- soluciones particulares	50

4.-ANÁLISIS DE RESULTADOS	60
4.1.- Efectos de la fuerza aplicada	61
4.1.1.-Esfuerzo en la dirección axial (z)	61
4.1.2.-Esfuerzo tangencial (θ)	62
4.1.3.-Esfuerzo radial (r)	63
4.1.4.-Presión de poro	64
4.1.5.-Flujo en la dirección radial (r)	65
4.1.6.- Desplazamiento en la dirección axial (z)	66
4.1.7.- Deformación en la dirección radial (r)	67
4.2.- Efecto del coeficiente de difusividad	68
4.3.- Efecto de la presión de confinamiento	69
4.3.1.- Esfuerzo en la dirección axial (z)	69
4.3.2.-Esfuerzo radial y tangencial (θ y r)	70
4.3.3.- Presión de poro y flujo radial (r)	71
4.3.4.- Desplazamiento axial y radial (z y r)	73
4.4.- Efecto de la presión de la presión de poro de la superficie del núcleo	75
4.4.1.-Esfuerzo axial (z)	75
4.4.2.-Esfuerzo tangencial y radial (θ y r)	76
4.4.3.- flujo radial (r) y Presión de poro	77
4.4.4.- Desplazamiento axial y radial (z y r)	79
5.- CONCLUSIONES	81
5.1.-Comentarios	83
6.- BIBLIOGRAFÍA	84
APÉNDICE	A1
NOMENCLATURA	BI

Lista de figuras

Nombre de la figura	páginas
Capitulo 1	
Capitulo 2	
2.1.- Estado de esfuerzos	3
2.2.-Relación de esfuerzo-deformación	5
2.3.- Equipo de laboratorio	24
2.4.- Interior de una celda triaxial	25
2.5.- Prueba de resistencia a la compresión de la roca	26
2.6.- Grafica de resultados de prueba una prueba triaxial (Deformación contra esfuerzo)	28
2.7.- Esquemas de la prueba true triaxial	30
2.8.- Pruebas de resistencia a la fractura	33
2.9.- Prueba de punto de resistencia a la carga	34
2.10.- Prueba de tensión indirecta	35
2.11.- Equipo de medición acústica	37
Capitulo 3	
3.1.-Representación grafica de la prueba	40
3.2.- Geometría de los núcleos	43
Capitulo 4	
4.1.- Efecto de la fuerza en el esfuerzo en z a diferentes radios	61
4.2.- Efectos de la fuerza en el esfuerzo en θ a diferentes radios	62
4.3.- Efectos de la fuerza en el esfuerzo en r a diferentes radios	63
4.4.- Efecto de la fuerza en la presión de poro a diferentes radios	64
4.5.- Efectos de la fuerza en el flujo en r a diferentes radios	65
4.6.- Efectos de la fuerza en la deformación en z	66
4.7.- Efectos de la fuerza en el desplazamiento en r	67
4.8.- El efecto del coeficiente de difusividad en el esfuerzo en r	68

4.9.- Efectos de la presión de confinamiento en el esfuerzo en z	69
4.10.- Efectos de la presión de confinamiento en el esfuerzo en θ	70
4.11.- Efecto de la presión de confinamiento en el esfuerzo en r	70
4.12.- Efecto de la presión de confinamiento en el flujo en r	71
4.13.-Efectos de la presión de confinamiento en la presión de poro	72
4.14.-Efectos de la presión de confinamiento en el desplazamiento en z	73
4.15.-Efectos de la presión de confinamiento en el desplazamiento en r	73
4.16.- Efectos de la presión de poro en el esfuerzo en z	75
4.17.- Efecto de la presión de poro en el esfuerzo en θ	76
4.18.- Efecto de la presión de poro en el esfuerzo en r	76
4.19.- Efecto de la presión de poro en el flujo en r	77
4.20.- Efecto de la presión de poro en la superficie del núcleo en la presión de poro	78
4.21.- Efecto de la presión de poro en el desplazamiento en z	79
4.22.- Efecto de la presión de poro en el desplazamiento en r	79

Resumen

Debido al creciente auge de las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas con núcleos para la determinación de los parámetros de rocas, ha surgido la necesidad de realizar modelos que puedan simular las pruebas. Por lo que en esta tesis tuvo como objetivo desarrollar modelos para dichas pruebas, para lograr esto se tomo las aproximaciones de la teoría poroelástica de la mecánica continua y micro mecánica, con lo cual se trata de considerar el fenómeno difusivo del fluido contenido en el poro y la deformación de la roca que sucede durante la realización de las pruebas.

En el presente trabajo se desarrollaron los modelos matemáticos para determinar los esfuerzos radial, tangencial y axial, deformación axial y radial, presión de poro y el flujo radial en las siguientes pruebas:

Prueba uniaxial

Prueba triaxial con y sin chaqueta

Prueba triaxial con chaqueta y condición de drene

Para realizar los modelos se consideró un cilindro saturado, homogéneo y la aplicación de una fuerza axial constante. A partir de los modelos desarrollados en este trabajo se podrá simular los diferentes escenarios durante las pruebas, las condiciones in-situ de los núcleos, determinar la ventana operacional con ayuda de un criterio de falla, así como la distribución de los esfuerzos durante las pruebas, entre otras muchas posibilidades.

Se seleccionaron las pruebas anteriores ya que éstas son básicas en la determinación de las propiedades de la roca.

1.-INTRODUCCIÓN

Durante la perforación de pozos se presentan problemas en el agujero, los cuales a menudo son debidas a su inestabilidad mecánica.

La inestabilidad en el agujero se manifiesta en varias formas, entre éstas se puede citar: la reducción del diámetro del pozo que ocurre en rocas plásticas por lo que tiende a fluir dentro del agujero; el agrandamiento del agujero que ocurre al perforar en exquistos, rocas pocas consolidadas o muy fracturada, que tienden a derrumbarse. Ahora bien, si al estar perforando, la presión del fluido es muy alta, puede ocurrir pérdida del lodo de perforación como resultado de un fracturamiento de la formación.

Para evitar los problemas debido a la inestabilidad se vio la necesidad de intentar conocer el comportamiento del agujero durante la perforación y en su fase productiva. A partir de la teoría de elasticidad y de poroelasticidad se han desarrollado expresiones para determinar el peso mínimo y máximo del lodo de perforación para evitar los problemas de estabilidad del agujero.

Para determinar el comportamiento del agujero a través de la teoría de poroelasticidad y elasticidad es necesario conocer las propiedades de las rocas a perforar, esto se logra realizando pruebas de laboratorio con núcleos tomados de las formaciones o estratos de interés. Ahora surge la necesidad de modelar como se comportara este núcleo cuando este bajos los esfuerzos a los que esta sujeto en la formación o en el estrato.

Para lograr lo anterior se tiene que estudiar un geometría cilíndrica , ya que esta es muy utilizadas en las pruebas de laboratorio de rocas, en especial en la industria del petróleo. Por lo tanto la solución de un cilindro poroso saturado es muy útil para la determinación de las propiedades mecánicas⁸.

En el siguiente trabajo se tratará de desarrollar los modelos para simular los efectos en la deformación, presión de poro, flujo del fluido y el campo de esfuerzos que sufre el núcleo durante las pruebas. En esta tesis se enfocará en 4 tipos de pruebas, las cuales son las siguientes:

- 1).- Prueba uniaxial
- 2):- Prueba triaxial sin chaqueta
- 3).- Prueba triaxial con chaqueta
- 4).- Prueba triaxial con chaqueta con drene

2.- REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1.- Teoría elástica lineal

Debido a la necesidad de describir el comportamiento de las rocas bajo un campo de esfuerzos, se desarrolló primero la teoría elástica como una primera aproximación de este fenómeno.

La teoría elástica trata de definir el comportamiento que tiene los materiales (sólidos) para resistir o recobrase de una deformación producida por una fuerza que actúa sobre este. El tipo de respuesta en esta teoría de los materiales entre el esfuerzo aplicado y la deformación sufrida por el material es del tipo lineal¹.

Para lograr lo anterior se necesita definir que es el esfuerzo, la deformación, así como unas constantes del material.

2.1.1.- Esfuerzo

Mientras que las fuerzas son transferidas a través de líquidos por la presión, las fuerzas son transferidas a través de los sólidos (rocas) por esfuerzos. **El esfuerzo** es la fuerza aplicada dividida por el área de contacto y tiene las mismas unidades que la presión. Es representada por la letra griega sigma, σ . El esfuerzo puede ser positivo o negativo y puede ser definido como sigue:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

Donde

F= Fuerza aplicada

A= Área

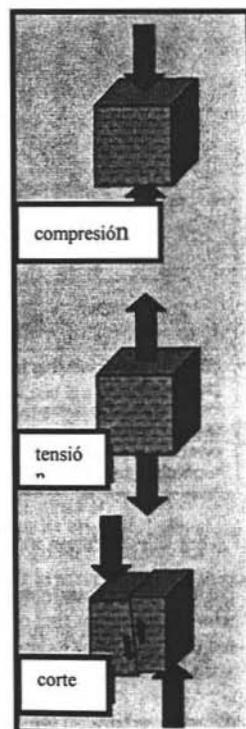


Figura 2.1 Estado de esfuerzos¹

Un sólido puede estar sujeto a los esfuerzos siguientes¹:

- Esfuerzo compresivo
- Esfuerzo de tensión
- Esfuerzo cortantes (cizallamiento)

Esfuerzos compresivos ocurre cuando el material está a compresión.

Esfuerzos de tensión ocurre cuando el material está en tensión, como un cable que suspende una carga.

Esfuerzo de corte resiste el movimiento lateral dentro del material.

Un sólido puede estar sujeto a los tres esfuerzos simultáneamente.

2.1.2.- Deformación

La deformación se define como el cambio de longitud o de anchura que sufre un material bajo la influencia de un campo de esfuerzos. Es representado por la letra griega epsilon ϵ .

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.2)$$

donde:

L= longitud

ΔL = cambio de longitud

Si se grafica el esfuerzo-deformación sufrido por un material, obtendríamos la grafica 2.2. De donde se puede observar que cuando el nivel de esfuerzo es bajo, la roca tiene un comportamiento elástico, la roca volverá a sus dimensiones originales cuando se le retira el esfuerzo. La porción de la línea recta del gráfico

representa la región de deformación elástica. Una vez que se obtenga este nivel de deformación, tal que se exceda el límite elástico, el material se deformará o fracturará permanentemente. Esto es referido como deformación inelástica. Una vez que se exceda la última resistencia, la roca se rompe.

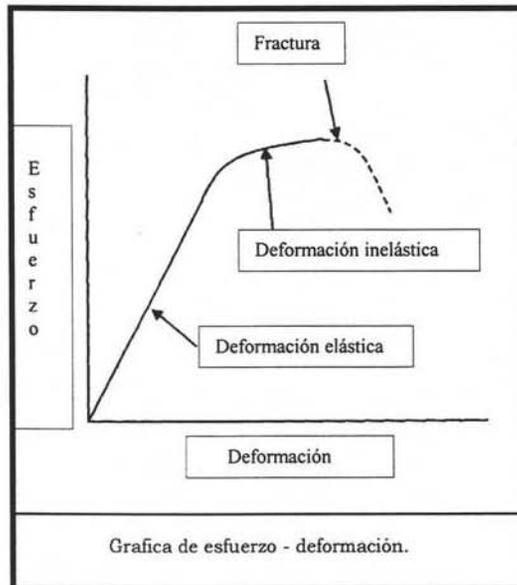


Figura 2.2 Relación de esfuerzo-deformación¹

La deformación que sufre en total la muestra es llamada deformación volumétrica, el cual es definido por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.3)$$

2.1.3 Constantes elásticas

A partir de la teoría de elástica se puede determinar algunas constante del material, las cuales son necesarias para desarrollar la teoría elástica. Las cuales son el modulo de Young (E), el modulo de Poissón (ν), el módulo volumétrico (K), el modulo de lame (λ) y el modulo de corte (G),

2.1.3.1.-Módulo de Young

El modulo de Young es la pendiente de la grafica de esfuerzo-deformación en la región donde se lleva a cabo la deformación elástica (Figura 2.2), el cual se representa con letra E:

$$E = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} . \quad (2.3)$$

La cual es una medición de la rigidez de la roca o expresa la resistencia que muestra un material a una determinada condición de carga⁴.

2.1.3.2.-Relación de Poisson

La relación de la deformación horizontal entre la deformación vertical es una función de la relación de Poisson y se expresa como:

$$\frac{\varepsilon_{hor}}{\varepsilon_{ver}} = \nu \quad (2.4)$$

donde:

ε_{ver} =Deformación vertical

ε_{hor} = Deformación horizontal

Se observa que las rocas fuertes o frágiles tienen una relación de Poisson pequeña; esto implica que muy poco del esfuerzo vertical aplicado se siente horizontalmente. De la misma manera para rocas dúctiles se tienen relaciones de Poisson relativamente alta, esto implica que casi todo el esfuerzo aplicado verticalmente se siente horizontalmente.

2.1.3.3.- Módulo volumétrico

La variación de la respuesta del material a una fuerza hidrostática puede ser representado por la ley de Hooke. La respuesta del material se define como:

$$\sigma_p = \epsilon_v K . \quad (2.5)$$

donde

K= Modulo volumétrico

σ_p = Esfuerzo hidrostático

ϵ_v = Deformación volumétrica

K es la medición de la resistencia que opone el material a una presión hidrostática aplicada sobre este. El inverso de K es conocida como la compresibilidad.

2.1.3.4.- Módulo de corte

Es el efecto de los esfuerzos paralelos compresionales que se producen sobre el material al cual se aplica una fuerza tangencial y se define como:

$$G = \frac{\text{Esfuerzo} \cdot \text{aplicado}}{\text{Deformación} \cdot \text{de} \cdot \text{corte}} . \quad (2.6)$$

2.1.3.5.-Módulo de Lamé

Es equivalente al módulo de Young (E), solo que a diferencia del E el parámetro de lamé (λ) está dado bajo condiciones de carga triaxiales, el cual esta definido por la relación entre el esfuerzo medio bajo condiciones de carga triaxial y la deformación volumétrica, y es escrito de la siguiente manera⁴:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\epsilon_v} . \quad (2.7)$$

2.1.4.-Ecuaciones de esfuerzo-deformación

A partir de la teoría elástica se puede describir el comportamiento de un material isotrópico que está expuesto a un campo de esfuerzo, y pueden ser descrito de la siguiente manera⁴:

Si consideramos que la deformación sufrida por un material en una dirección puede ser descrito por la ley de hooke:

$$\sigma_i = \varepsilon_i E. \quad (2.8)$$

donde:

$$i = x, y \text{ y } z$$

y para el caso de los esfuerzos cortante de igual manera pueden ser descrito por la ley de Hooke, de la siguiente manera:

$$\tau_{ij} = G\gamma_{ji}. \quad (2.9)$$

donde

$$j = x, y \text{ y } z$$

$$i \neq j$$

Pero sabemos que en la realidad los esfuerzos sufridos por los materiales son resentidos en todas direcciones y no una, entonces por medio de la teoría elástica se puede lograr determinar la variación de los esfuerzos en el material. Llegando a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2G)\varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= 2G\gamma_{xy}, \\ \tau_{xz} &= 2G\gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= 2G\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se logra determinar la variación de los esfuerzos en los materiales, lo cual constituye una primera aproximación para describir el fenómeno que se lleva a cabo en las rocas, cuando son sometidas a un campo de esfuerzos.

2.2.- Teoría Poroelástica

La teoría elástica considera que las rocas que son sólidas y están formadas de material rocoso, pero se sabe que las rocas son materiales porosos formado por un medio sólido continuo (matriz de roca), que contienen distribuidos al azar espacios porosos conectados o aislados. Cuando un fluido penetra la roca, ésta sufre un disturbio del estado inicial de esfuerzos o presión de poro, y toma lugar un complejo proceso de enlace mecánico e hidráulico. La perturbación en la presión de poro de un fluido en una roca saturada, hará que el fluido fluya hacia una zona de menor presión, y simultáneamente la roca sufrirá un "esfuerzo efectivo" que ocasionara un disturbio, lo cual con llevara una deformación de la roca. La teoría poroelástica entonces surgió para poder representar el fenómeno anteriormente mencionado⁵.

La teoría de poroelástica, enlaza la deformación mecánica de un sólido poroso con la filtración hidráulica de los fluidos contenidos en los poros interconectados.

2.2.1.-Constantes poroelásticas del material

Para poder lograr describir el fenómeno que sucede en las rocas se necesitan definir primero varias constantes que están relacionadas con las características propias de la roca y del fluido del poro y que se utilizan en la teoría poroelástica, las cuales son B (coeficiente de skempton), α (coeficiente de Biot), c (coeficiente de difusión), η (coeficiente de esfuerzo poroelástico), S (Coeficiente de almacenamiento), los módulos elásticos C y M (Modulo de Biot).

El coeficiente de presión de poro de Skempton

Este coeficiente es una expresión que está definida como la relación de la presión de poro inducida sobre el sobre el incremento del promedio del esfuerzo normal de confinamiento bajo condiciones sin drenado $\zeta=0$ (es decir, no se permite escapar el fluido de la muestra).

$$B = \frac{P_p}{P}. \quad (2.11)$$

Este coeficiente de presión de poro puede ser medido durante una prueba triaxial sin drenar (mas adelante se explicara). Este valor es relacionado a la compresibilidad del sólido, fluido, y esqueleto.

Coeficiente de Biot de esfuerzo efectivo

El concepto del esfuerzo efectivo fue primero introducido por Terzaghi como la proporción del total esfuerzo que carga efectivamente el esqueleto sólido causando la deformación sólida bajo los principios elástico y la otra parte del esfuerzo es soportado por le fluido, el coeficiente de Biot nos indica cuanto del esfuerzo total aplicado sobre la muestra es soportado por el fluido.

$$\alpha = \frac{3(v_v - v)}{B(1 - 2\nu)(1 + \nu_v)}, \quad \text{ó} \quad \alpha = 1 - \frac{K}{K_s}. \quad (2.12)$$

α coeficiente de Biot y es una característica del sólido poroso, y el valor del coeficiente varía de $0 < \alpha < 1$. De la ecuaciones anteriores nosotros reconocemos que α es independiente del fluido filtrado en la roca porosa y solo depende de las características de la matriz y los componentes de la matriz.

Coeficiente de Difusividad

Este puede ser establecido en la ausencia de fuerzas de cuerpo y la existencia de un fluido en la roca, donde se presenta un proceso de difusión existe para el fluido contenido en el poro, es decir, este coeficiente nos indica la capacidad del fluido para fluir en el medio poroso. Este es sacado de la derivación del proceso de difusión, y se obtiene de la ecuación de difusión siguiente:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c \nabla^2 \zeta = 0. \quad (2.13)$$

de donde c es el coeficiente de difusividad y es igual a

$$c = \frac{\kappa E_v B(1-\nu)}{3\alpha(1-\nu_v)(1+2\nu)}. \quad (2.14)$$

donde la constante c juega un rol de un coeficiente de difusividad. Donde combinado con una longitud característica L , se obtiene el tiempo característico $t^* = L^2/c$ el cual gobierna la transición del proceso poroelástico.

Coeficiente de esfuerzo poroelástico

El coeficiente η es el coeficiente del esfuerzo poroelástico, el cual se puede escribir como sigue:

$$\eta = \frac{\alpha(1-2\nu)}{2(1-\nu)}. \quad (2.15)$$

y este es solo para sólidos porosos y es semejante a α , esta ecuación implica que con la difusión de la presión de poro, un campo de esfuerzo es generado.

Constante C y M

C y M son módulos elásticos que son requeridos para describir el medio de dos fases (roca-fluido). C juega un rol de enlace entre la deformación del fluido y el sólido, mientras M es llamado el modulo de Biot y expresa las características propias del fluido del poro, y esta es definida bajo una deformación constante. Los cuales se encuentran definido como sigue:

$$C = \frac{K_f}{\phi} - \frac{\left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s}\right)}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s}\right)}, \quad (2.16)$$

$$M = \frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1 - 2v)(1 - 2v_u)}. \quad (2.17)$$

donde los subíndices f , fr , s hacen referencia a fluido, armazón poroso y sólido.

Constante de almacenamiento

El coeficiente de almacenamiento S es definido bajo condiciones particulares de deformación uniaxial y un esfuerzo normal constante en la dirección de la deformación.

$$S = \frac{\alpha^2(1 - v_u)(1 - 2v)^2}{2G(1 - v_u)(1 - v)}. \quad (2.18)$$

2.2.2.-Mecánica continúa

Esta es la primera aproximación para explicar el fenómeno poroelástico y fue presentada por Biot en 1941². A continuación se presenta esta aproximación.

De acuerdo a la teoría poroelástica, cuando un material de estructura sólida convectiva, tal como una roca, es sujeta a un esfuerzo compresivo, produce una deformación volumétrica sobre la roca. Dicha deformación será compuesta de dos componentes, los cuales son:

- 1) Deformación del esqueleto sólido
- 2) El cambio en el espacio poroso.

Considerando un volumen elemental representativo, lo bastante grande para ser representativo de la micro estructura y lo bastante pequeño de tal manera que éste representativo de la porosidad media del medio continuo.

La deformación para este volumen se define como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.19)$$

donde $u_{i,j}$ es el vector de desplazamiento y $e_{i,j}$ es la deformación del componente, la coma seguida por índice denota diferenciación con respecto a coordenadas espaciales.

El esfuerzo promedio al que esta sujeto dicho volumen representativo es idéntica a la ley de Hooke y se expresa como sigue:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[e_{ij} + \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} e_{kk} \right]. \quad (2.20)$$

donde las dos constantes elásticas son el módulo de Young E , la relación de Poisson ν y δ es la delta de Kronecker, e la deformación, u desplazamiento, y los índices repetidos implican la suma de Einstein.

Ahora para describir el fluido, necesitamos determinar la cantidad de fluido desplazado. La cantidad cinemática del fluido es escogida para ser esto es "la variación del fluido contenido en los poros" ζ , definido como la pérdida de volumen en los poros". El cambio de volumen del fluido ΔV_f , es igual al cambio en el volumen de poro ΔV_p , el cual es debido a dos distintas contribuciones: una asociada a la compresibilidad del fluido ΔV_f^{1*} y otra parte por pérdidas de fluido ΔV_f^{2*} . Por lo que ζ esta definido como:

$$\xi = \frac{\Delta V_f^{2*}}{\Delta V_p} \quad (2.21)$$

El parámetro dinámico de la presión de poro es introducido como definición

$$P = \frac{1}{V_p} \int P dV_p \quad (2.22)$$

donde P es la presión termodinámica del fluido y V_p es el volumen de poro.

Rescribiendo la ecuación 2.18 con la inclusión de la contribución de la presión de poro, se llega a la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[e_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} e_{kk} \right] + \frac{K}{H} \delta_{ij} P \quad (2.23)$$

esta expresión representa el esfuerzo efectivo que es soportado por este volumen representativo.

Por último expresamos la expresión de poro P en función de la deformación y la variación del contenido del fluido como sigue:

$$p = \frac{KRH}{H^2 - RK} \left[e_{kk} + \frac{H}{k} \zeta \right]. \quad (2.24)$$

donde K es el modulo volumétrico del sólido y los poros, e_{kk} la deformación volumétrica y H una constante.

Además de las ecuaciones anteriores, otras ecuaciones que ayudan a describir el fenómeno son:

La ecuación de equilibrio

$$\sigma_{ij,j} = -F_i. \quad (2.25)$$

Ley de Darcy

$$q_i = -\kappa(p_{,i} - f_i). \quad (2.26)$$

La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,j} = \gamma. \quad (2.27)$$

Donde q_i es el vector de flujo específico, conociendo que este es el flujo a través del medio poroso, f_i es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen del material (incluyendo el líquido y sólido), γ la velocidad de fluido inyectado, y κ es el coeficiente de la permeabilidad, el cual está relacionado con la "permeabilidad intrínseca" (K dimensión de longitud) como $\kappa = K/\mu$, en el cual μ es la viscosidad dinámica del líquido.

2.2.3.-Micro mecánica

Esta es la segunda aproximación al fenómeno poroelástico, la cual fue realizada por Green y Nagdi en 1965². Esta se basa en el estudio más profundo

del medio poroso, la presión de poro, retomando lo hecho por Biot. A continuación se presentan los avances mas importantes de esta aproximación.

2.2.3.1.- Respuesta del medio poroso

Denotando que V_s sea el volumen ocupado por el sólido, V_p , ϕ y V denotan respectivamente el volumen ocupado por los poros, la porosidad y el volumen total, entonces el volumen total de la roca puede ser expresado como sigue:

$$V = V_p + V_s. \quad (2.28)$$

La variación de la deformación total se puede dar en función de la deformación volumétrica sólida y la debida al cambio de porosidad.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V_s}{V_s} + \frac{\Delta \phi}{1 - \phi}. \quad (2.29)$$

La variación de la deformación volumétrica con respecto a la presión a la cual esta sujeta el sólido, puede ser dada para un material Hookeano como sigue:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{P}{K}. \quad (2.30)$$

donde K es el modulo de volumen del material;

Para un medio poroso, la presión total confinada es compartida tanto por el volumen sólido y el volumen del poro, y puede ser descrito como sigue:

$$P = \phi P_p + (1 - \phi) P_s. \quad (2.31)$$

en el cual, los subíndices (p) y (s) se refiere al poro y sólido respectivamente.

En base a la aproximación de la micro mecánica se puede deducir el valor de la constante H, el cual es igual a:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \quad (2.32)$$

2.2.3.2.- Respuesta del fluido

En base a las constantes anteriormente dadas se puede llegar a la siguiente función.

$$e = \frac{1}{3K} \sigma_{kk} - \frac{\alpha}{K} P_p \quad (2.33)$$

Esta ecuación nos muestra la contribución que tiene el fluido en la deformación, el cuál nos indica que el fluido contenido en la roca tiene un efecto tanto en la distribución del esfuerzo y en la deformación que se lleva en roca.

También a partir de los alcances de la micromecánica se puede obtener la variación del fluido contenido en el poro en función de las constantes del material, como sigue:

$$\zeta = -\frac{\alpha}{K} P + \frac{\alpha}{K} \left(1 - \frac{K_p}{K_s} + \frac{K_p}{K_f} \right) \quad (2.34)$$

2.2.4.- Pruebas con camisa y sin camisa

En las pruebas drenadas con camisa se asume que la muestra saturada de fluido está envuelta en una chaqueta plástica y sujeto a una velocidad de carga baja, previniendo cualquier incremento en la presión fluido del poro ($P=0$). La

variación del volumen del seno (matriz y poros) sin el efecto del fluido (totalmente drenado) siguiendo la ley de Hooke, es como sigue:

$$\frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{P}{K_p} \quad (2.35)$$

donde K obtenida es K_p el módulo volumétrico del poro, el cual caracteriza la resistencia a la compactación.

En las pruebas drenadas sin camisa se asume que la muestra de roca sin chaqueta de plástico es sumergida en un fluido, en un cámara triaxial, y sujeto a un incremento de la presión de confinamiento (P), permitiendo a un tiempo constante que la presión se equilibre, obteniendo $P=P_p=P_s$, entonces la respuesta volumétrica puede ser expresado como sigue

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{P}{K_s} = \frac{P_p}{K_s}, \quad \text{o} \quad \frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{P}{K_s} = \frac{P_p}{K_s} \quad (2.36)$$

donde K_s es el modulo del seno del sólido.

2.2.4.1-Interpretación de las constantes del material para pruebas sin camisa y con camisa

Las relaciones de Poissón drenada y Módulo volumétrico drenado de la condición de drenado es asociada con un largo tiempo de respuesta. Al final, toda la presión de poro generada durante la carga deberá ser disipada a la presión ambiente a través de la superficie drenada. Por lo tanto si $P=0$ y se sustituye en la ecuación 2.21 se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[e_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} e_{kk} \right] \quad (2.37)$$

donde ν y E son definidas como la relación de Poisson drenada y el modulo de Young drenado. Estos son dos propiedades del esqueleto sólido sin que el fluido soporte carga alguna. Análogamente se puede decir que el modulo del volumétrico drenado es caracterizado como la rigidez del esqueleto poroso y puede ser escrito como sigue:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2.38)$$

La razón de Poisson y el módulo volumétrico no drenado se asume bajo condiciones sin drene, la respuesta es instantánea y como el fluido no puede escapar, queda confinado en el esqueleto, y puede ser representado como.

$$\sigma_{ij} = \frac{E_v}{(1+\nu_v)} \left[e_{ij} + \frac{\nu_v}{(1-2\nu_v)} \delta_{ij} e_{kk} \right] + \frac{E_v B}{3(1-2\nu_v)} \delta_{ij} \zeta. \quad (2.39)$$

Con condiciones sin drene, $\zeta=0$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación de elasticidad.

Entonces el módulo volumétrico no drenado K_v es igual a:

$$K_v = \frac{E_v}{3(1-2\nu_v)}. \quad (2.40)$$

y esta representa la combinación de la rigidez del sólido y fluido.

Además de las ecuaciones anteriores es necesario incluir una relación que calcule la deformación real sufrida por la roca (restando a la deformación sufrida por la roca la deformación debido a la variación de fluido en el poro) bajo un

esfuerzo aplicado. Para el caso de que una carga constante aplicada sobre una roca, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \left(\zeta - \frac{GS}{\eta} \varepsilon \right) = 0. \quad (2.41)$$

2.3.-Ecuaciones gobernantes

Uniendo tanto la aproximación de la mecánica continua y la micro mecánica se puede llegar a las ecuaciones generales que gobiernan el fenómeno poroelástico, que junto con los coeficientes de los materiales medidos en laboratorio de mecánica de roca se pueden reescribir las ecuaciones gobernantes, permitiendo que la presión de poro sea el termino de unión entre ellas.

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk} \right] - \frac{\alpha(1-2\nu)}{E} \delta_{ij}P, \quad (2.42)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[e_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij}e_{kk} \right] + \alpha\delta_{ij}P, \quad (2.43)$$

$$P = \frac{E_\nu B}{3(1-2\nu_\nu)} \left[e_{kk} + \frac{\zeta}{\alpha} \right]. \quad (2.44)$$

y si se desea expresar las anteriores ecuaciones con la variación de contenido de fluidos ζ , entonces estas quedan de la siguiente forma:

$$e_{ij} = \frac{1}{E_\nu} \left[(1+\nu_\nu)\sigma_{ij} - \nu_\nu\delta_{ij}\sigma_{kk} \right] - \frac{B}{3} \delta_{ij}\zeta, \quad (2.45)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E_\nu}{(1+\nu_\nu)} \left[e_{ij} + \frac{\nu_\nu}{(1-2\nu_\nu)} \delta_{ij}e_{kk} \right] + \frac{E_\nu B}{3(1-2\nu_\nu)} \delta_{ij}\zeta, \quad (2.46)$$

$$\zeta = \frac{3\alpha(1-2\nu)}{E} \left[-\frac{\sigma_{kk}}{3} + \frac{P}{B} \right]. \quad (2.47)$$

Hay que recordar que además de las ecuaciones anteriores se necesitan las ecuaciones 2.23, 2.24 y 2.25 para poder describir el fenómeno de deformación-difusión que sucede en la roca.

2.4.- Numero de constantes poroelásticas necesarias

Para determinar la respuesta lineal poroelástica isotrópica de un material poroso 5 constantes independientes del material son necesarias, ya que a partir de estas 5 constantes las otras las podemos determinar a través de correlaciones. Junto a el coeficiente movilidad k , el cual es determinado de pruebas de permeabilidad, necesitamos medir las cuatro restantes. Dadas las relaciones que existen entre los parámetros elásticos, el sistema de cuatro constante se puede elegir de los siguientes tres grupos: (i) Coeficientes de material drenado ($G, \nu; E, K$); (ii) Constante sin drene ($G, \nu; E, K$); y (iii) Coeficiente de Biot (α) y coeficiente de Skempton (B).

2.5.-Fuentes de obtención de las constantes de roca

Las únicas dos fuentes de obtención de las propiedades de roca son las pruebas de laboratorio con núcleos y las pruebas de campo como sísmica, MWD, VSP y otras pruebas. Estas pruebas también pueden ser utilizadas para determinar la magnitud y dirección de los esfuerzos principales.

Las pruebas de campo tienen la ventaja de que las constantes de roca son tomadas in-situ y que pueden ser obtenidos a diferentes profundidades, pero estas no son mediciones directas de las constantes que son necesario para el análisis

de mecánica de roca. Pero los constantes de roca pueden, sin embargo, ser obtenidos por un adecuado proceso de interpretación de los datos obtenidos de campo.

Las pruebas de laboratorio en núcleos proporcionan la posibilidad de medir directamente las constantes de roca. El problema aquí es que el núcleo recibido en el laboratorio sea representativo de la formación a estudiar, además el núcleo puede ser alterado durante la toma y el transporte de este.

Generalmente en las pruebas de laboratorio con núcleos se basan en la aplicación de un esfuerzo sobre una muestra de roca, de esta se reporta tanto el esfuerzo aplicado como la deformación causada por la aplicación de este esfuerzo. Además estas pueden ser acompañadas por pruebas acústicas.

2.5.1.-Núcleos²

Los núcleos se obtienen a cierta profundidad, y pueden ser solo representativo de la formación en o cerca del agujero del pozo. La disponibilidad de núcleos es casi siempre limitada. Normalmente estos son tomados principalmente en el yacimiento, ya que el comportamiento mecánico de la formación a estudiar puede ser de gran importancia para la perforación o subsecuentemente durante el agotamiento del yacimiento.

El núcleo de roca es probable que se altere cuando es tomado en condiciones in-situ y llevado a condiciones de laboratorio. El núcleo in-situ puede estar a una profundidad de uno o más kilómetros, a una temperatura de 50°C a 150°C, y en equilibrio químico con el propio fluido del poro, cuando se toma el núcleo y se lleva a condiciones atmosférica de presión y temperatura. Esto además en contacto químico con el lodo de perforación activo e inactivo, y el enjarre puede penetrar en el núcleo. Esto

llevara una liberación de esfuerzo, abertura de microfracturas, etc., lo cual tiene un efecto muy severo en las propiedades de la roca ⁴.

Para disminuir y/o evitar los efectos de alteración del núcleo, en materiales poco consolidados son congelados después de tomar el núcleo, hasta realizar las pruebas de laboratorio, y otros núcleos son sumergidos en fluidos idénticos a los de in situ. Además el núcleo de roca debe ser orientado para procesar aquellos ensayos de laboratorio que involucre la determinación de la dirección de los esfuerzos principales.

La distribución de las fracturas, uniones, extractos, y fallas determinan las propiedades de cualquier tamaño en particular del núcleo de roca, Por lo tanto el tamaño del núcleo debe ser de un tamaño adecuado que contenga todas las características de la formación, pero lo mas pequeña para evitar las discontinuidades. El tamaño del núcleo estará en función del extracto y las características a estudiar. Como se vio anteriormente la selección del tamaño adecuado de núcleo conducirá a una mejor representación del estrato a estudiar.

2.5.2.-Preparación del núcleo

Los estándares de ISRM (International Society of Rock Mechanics) requieren que el espécimen de prueba estándar de mecánica de rocas sean exactamente, un cilindro circular con una relación de longitud y diámetro entre 2 y 3. La razón para esto, es que la muestra debe ser lo suficiente grande para que el esfuerzo de corte penetre a través de las paredes.

La superficie final deberá ser plana con una variación no mayor de $\pm 0.01\text{mm}$, y los lados deberán ser lisos y rectos con una desviación no mayor $\pm 0.3\text{mm}$ en toda la longitud de la muestra. El diámetro de la muestra deberá ser

medida con un aproximación de 0.1mm por el promedio de los diámetro medidos en ángulos rectos un del otro en la cima, a media altura y en el fondo de la muestra. La longitud de la muestra deberá ser determinada con una aproximación 1.0 mm. Además de realizar una descripción geológica de la muestra de roca.

2.5.3.-Equipo de laboratorio

Un laboratorio de pruebas estándar de mecánica de rocas para el estudio de rocas sedimentarias incluyen el siguiente equipo:

- Marco de carga
- Celda triaxial
- Sistema de presión de confinamiento
- Sistema de presión de poro
- Computadora para el control y procesamiento de datos

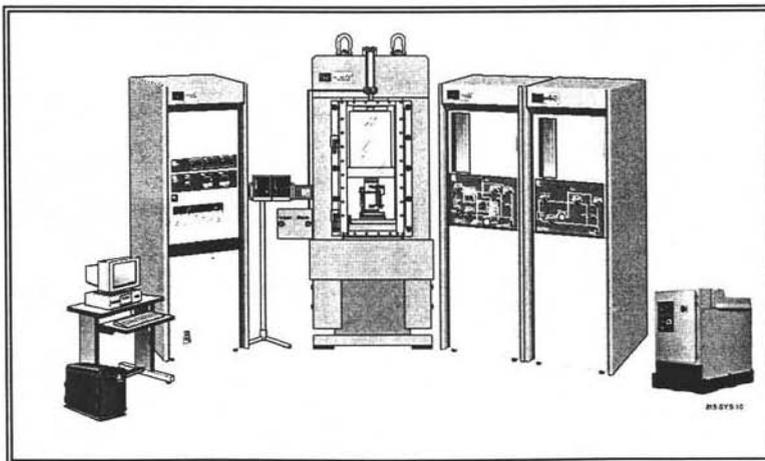


Figura 2.3.- Equipo de laboratorio (fotografía del Instituto Mexicano del Petróleo)

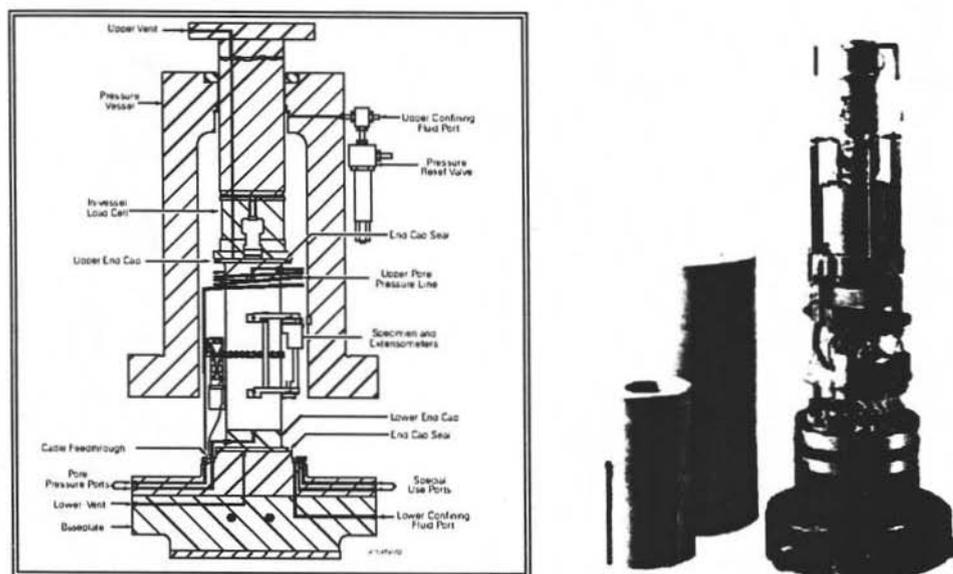


Figura 2.4.- Interior de una celda triaxial⁶.

2.5.4.-Mediciones de los esfuerzos y deformaciones durante las pruebas

Las mediciones de los efectos de aplicar un esfuerzo sobre un núcleo se realiza con extensómetros de deformación en la celda de carga, y transductores de presión del fluido confinado en la celda triaxial. La deformación que experimenta la roca se mide con los extensómetros y la presión de poro es medida con los transductores de presión que están en los pistones, con lo cual se puede medir además la velocidad del flujo y la permeabilidad.

2.5.5.-Pruebas de laboratorio mas comunes en mecánica de roca

2.5.5.1.-Pruebas uniaxial

En una prueba uniaxial, una muestra es insertada en el marco de carga y la carga axial es incrementada comprimiéndola paralelo a su eje axial, con cero presión de confinamiento. De esta prueba se reporta el esfuerzo axial aplicado mas la deformación axial y radial que sufrirá la muestra durante el incremento de la carga. Con estos datos se puede obtener⁴;

- La resistencia compresiva sin confinamiento C_0 como el máximo esfuerzo
- El modulo de Young E (es la pendiente de la grafica del esfuerzo axial y deformación axial)
- La relación de Poisson ν es la relación entre la deformación radial y axial

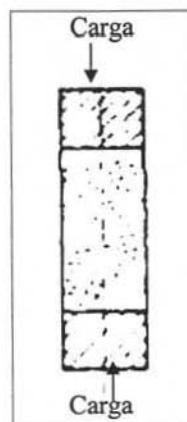


Figura 2.5.- Prueba de resistencia a la compresión de la roca⁴.

2.5.5.2.-Prueba triaxial

El ensayo de compresión triaxial de compresión permite medir parámetros estáticos y dinámicos para diferentes cargas utilizando una celda triaxial (Figura 2.4). Las variables estáticas permiten calcular la resistencia de la roca. La medición de los parámetros dinámicos permite conocer las velocidades de onda compresional (onda p) y de corte (onda s)⁴.

La celda triaxial consta de placas de titanio en la cima y la base de la muestra permite medir la presión de poro y producir las ondas "P" y "S" al momento de aplicar la carga axial. Además de colocar sobre la muestra un extensómetro axial y radial⁶.

El procedimiento experimental más común para conocer las propiedades mecánicas y las características de rigidez bajo condiciones de carga. La prueba se realiza aplicando un esfuerzo axial σ_z y una presión de confinamiento radial σ_r sobre un núcleo de roca: La presión de confinamiento es mantenida a través de la prueba por medio de una chaqueta de metal o de caucho, y σ_z es incrementado hasta que la falla ocurra. El resultado de la prueba de falla triaxial se muestra en la figura 2.6.

Los núcleos usualmente tiene un relación entre la longitud y diámetro de 2:1 y 3:1, con un diámetro usualmente en el rango de 6 pulgadas a menos de una pulgada.

La prueba de triaxial tiende a proporcionar una de la más útiles pruebas en el estudio de las propiedades de la mecánica de roca sobre un ancho rango de valores de esfuerzo y a diferentes temperaturas.

Como en el caso de las pruebas hidrostática, se tiene la opción de realizar pruebas con o sin drene. Entonces tanto las propiedades elástica y la resistencia dependerá del esfuerzo efectivo, las pruebas de drene suministrara un mejor control experimental por que la presión de confinamiento es controlada y mantenida constante a un valor conocido.

La prueba triaxial puede realizarse como una extensión: donde después de aplicar una presión de confinamiento σ_r , la carga axial σ_z es disminuida, manteniendo constante σ_r . Si la falla no ocurre cuando σ_z sea cero, σ_r es incrementado.

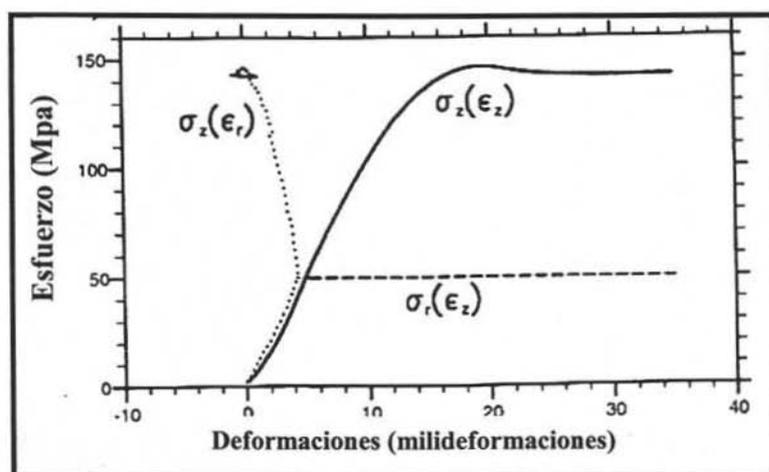


Figura 2.6.- Grafica de resultados de prueba una prueba triaxial (Deformación contra esfuerzo)⁴.

La prueba se realiza saturando la muestra con aceite y se le aplica una carga axial constante hasta que la muestra falle.

2.5.5.3.-Ensayos de compresibilidad

Dentro de la categoría de ensayos triaxiales, están los ensayos de compresión. La finalidad de esta prueba es clasificar la muestra por la medida de la resistencia a la compresión, algunos de los cuales son:

Compresibilidad uniaxial: En este ensayo se comprime el núcleo de roca en la celda triaxial y a medida que aumenta la presión de confinamiento de manera que la deformación solo ocurra axialmente. Tradicionalmente se mide el módulo de compresibilidad uniaxial, cambios de permeabilidad, porosidad y el esfuerzo efectivo: Esto simula la compresibilidad de un yacimiento a medida que disminuye la presión de poro.

Compresibilidad uniaxial con agotamiento. Se realiza disminuyendo la presión de poro en una tasa constante, hasta que alcance la presión de agotamiento del yacimiento, o la presión para proyecto de mantenimiento de presiones.

2.5.5.4.- Prueba hidrostática

La medición hidrostática es principalmente ejecutada para determinar el modulo volumétrico de la roca (o el modulo de carga) y de grano. La prueba hidrostática se ejecuta bajo condiciones de carga con la opción de ser con drene o sin drene.

En una prueba hidrostática con drene, la pendiente de la curva de esfuerzo-deformación volumétrica es el modulo volumétrico del armazón de la roca (K_{fr}). Para realizar esta prueba requiere que el fluido tenga canales de entrada y salida y distribuidos a través de los pistones de la celda triaxial, en adicción el suficiente tiempo para lograr el equilibrio en la presión de poro.

En una prueba sin drene, la presión de poro cambiara durante la prueba y la pendiente del curva de esfuerzo-deformación será igual al modulo volumétrico K de la roca, el cual incluye el efecto del fluido del poro y de la roca.

En una prueba sin camisa, es decir que la presión de poro es igual a la presión de confinamiento, la pendiente de la curva de esfuerzo deformación da el modulo volumétrico K_s de las partículas sólidas ($1/K_s$ es frecuentemente relacionada con la "compresibilidad del grano").

2.5.5.5.-Pruebas true triaxial

El termino triaxial tiende a ser estrechamente relacionado con el tipo de prueba en el cual dos esfuerzos principales son iguales debido a la presión de confinamiento, y el termino true triaxial tiene la opción de que durante la prueba los tres esfuerzos principales difieren uno del otro. En principio, el esfuerzo poliaxial homogéneo, puede ser obtenido por la aplicación de cargas a través de una muestra paralepipeda rectangular, donde las cargas son aplicadas perpendicularmente a la superficie.

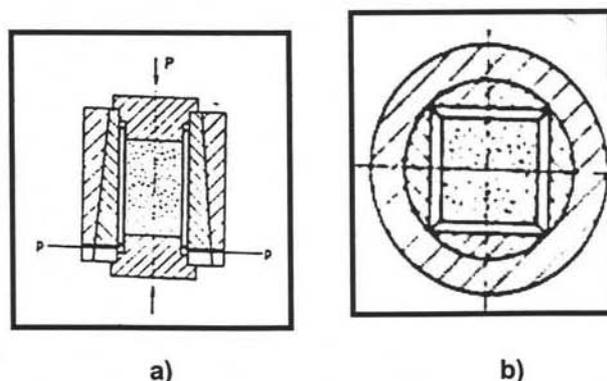


Figura 2.7.- Esquemas de la prueba true triaxial⁴.

2.5.5.6.-La prueba de Odómetro

Los experimentos de laboratorio son frecuentemente realizados en pruebas con rocas bajo compresión uniaxial, en una situación sin deformación lateral. Este tipo de prueba se emplea para simular la compactación de un yacimiento durante su decaimiento. En rocas, se recomienda usar la celda triaxial manteniendo la presión de confinamiento de tal manera que la deformación radial sea igual a cero o despreciable mientras se incrementa la fuerza uniaxial. El método de aplicación del criterio de cero deformación es usado para medir y monitorear la deformación diametral en un plano como parámetro de control. Esto requiere un espécimen homogéneo, el cual se requiere que sea isotrópico o transversalmente isotrópico con el eje de la muestra.

Teóricamente, de la curva de esfuerzo-deformación en la zona elástica, el comportamiento para rocas es dada por la ley de Hooke en la prueba del odómetro, de donde se puede calcular el modulo $d\sigma_z/d\epsilon_z$, el cual es llamado el modulo del odómetro o coeficiente de compactación uniaxial.

La prueba del odómetro además permite obtener información sobre el coeficiente de consolidación C_D . Es más, cuando la muestra esta a bajo del limite elástico, la prueba del odómetro suministra un método simple para determinar el esfuerzo de preconsolidación.

2.5.5.7.-Prueba de un cilindro hueco

Los cilindros huecos pueden ser usados para escalar el modelo y simular el agujero del pozo en el laboratorio. Además, con el cambio de esfuerzos externo y/o presión interna (agujero), una gran variedad de situaciones de carga pueden ser estudiadas, incluyendo un estado de esfuerzo triaxiales en la paredes del agujero. Una delgada pared del cilindro ofrece la posibilidad de tener un estado de

esfuerzos casi homogéneos, pero es muy difícil de preparar. El espesor de pared, y el tamaño del espécimen son determinados por el tamaño de grano.

Los cilindros huecos con carga axial y presión de fluido interna o externa suministra el mejor método de estudio de la resistencia y fractura de la roca bajo una variedad de esfuerzos principales diferentes.

Un método alternativo de estudio la estabilidad en un cilindro hueco es aplicar una presión en el agujero. Para rocas permeables, una funda puede ser aplicado a rocas para simular un enjarre. El colapso de agujero es estudiado por el decremento en la presión interna, manteniendo la presión de confinamiento constante. En principio, las fracturas hidráulicas pueden ser simuladas por el incremento de presión del agujero.

2.5.5.8.-Prueba de torsión

La torsión de un cilindro sólido o hueco combinada con carga axial y presión de fluido de confinamiento suministra otro método de estudio de falla bajo condiciones donde los esfuerzos principales son diferentes.

2.5.5.9.- Índice de pruebas

Hay varios un número de métodos de pruebas que pueden ser aplicados a rocas sin presión de confinamiento. Estas mediciones son índices de propiedades, la cuales pueden ser relacionadas con parámetros de la rocas.

Resistencia a la tensión

No obstante la importancia de la resistencia de la roca a la tensión en la practica y en conexión con la teoría de falla, es muy rara vez practicada por lo cual métodos de medición indirecta son utilizados

Indicadores de la resistencia a la tensión

Medición directa de la resistencia a la tensión

Se pegan los dos extremos del núcleo de la roca a una placa de metal fijada a la placa de la armadura de carga, Luego solo se aplica una fuerza de tensión y se obtiene el valor de resistencia a la tensión directo. Las mediciones directas de la resistencia a la tensión de la roca son difícil y no son muy comúnmente realizadas. Las pruebas indirectas para determinar la resistencia a la tensión de la roca, son más comunes que la prueba directa de resistencia a la tensión de la roca.

Resistencia a la fractura

El valor de la resistencia a la tensión de la roca se determina por la prueba de pandeo sobre roca. Esta prueba se puede realiza de dos formas, una es aplicando tres puntos de pandeo, la segunda forma es aplicando cuatro puntos de pandeo. La prueba se realiza colocando sobre un espécimen en forma de viga sobre cunas y se aplica de una o dos carga como se indica en la figura.

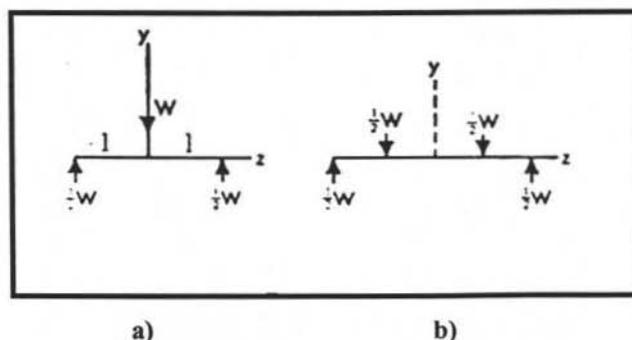


Figura 2.8.- Pruebas de resistencia a la fractura⁴.

De la figura a) es la prueba de tres puntos de pandeo y b) es la prueba de cuatro puntos de pandeo.

Punto de resistencia de carga

La resistencia a la tensión es medida usando una esfera-truncada (ver figura 2.9): La prueba se realiza con dos planchas cónicas de geometría estándar (con un ángulo de cono 60° y un radio de curvatura de 5mm) que aplican una fuerza sobre la muestra. La ventaja que tiene esta prueba es que la muestra no necesita ninguna forma especial.

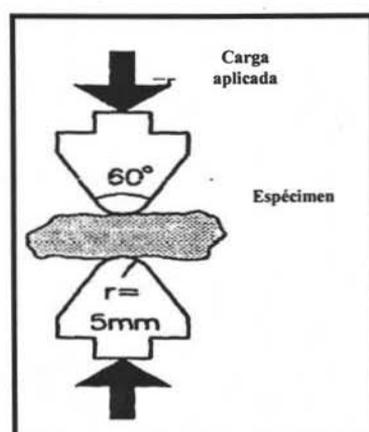


Figura 2.9.- Prueba de punto de resistencia a la carga⁴.

Tensión indirecta

La prueba es ejecutada por la aplicación de una fuerza compresiva con dos planchas a una muestra cilíndrica (ver figura 2.10). La muestra es un núcleo de roca, el cual tiene una radio aproximadamente igual a su espesor. La falla ocurrirá por una extensión o cierre de la fractura por la carga del plano diametral. La distribución de esfuerzos normal a lo largo del diámetro paralelo a el eje de carga (eje-Y) es uniforme y es dada por ⁶:

$$T_0 = \frac{2Pr}{\pi DT} \quad (2.48)$$

donde:

T_0 = resistencia a la tensión

P = carga de compresión

D = Diámetro del espécimen

T = espesor de la muestra

La prueba de tensión indirecta sus resultados tienden a ser mas reproducibles que los obtenidos por punto de resistencia de carga.

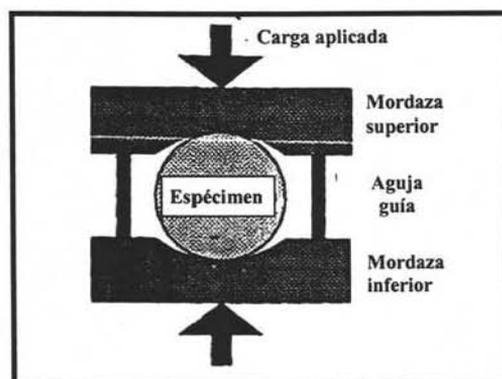


Figura 2.10.- Prueba de tensión indirecta⁴.

2.5.5.10.-Pruebas de velocidad de onda

Las pruebas de velocidad de onda de laboratorio pueden proporcionar correlaciones con la resistencia de la roca, y puede ayudar a evaluar la diferencia entre los módulos estáticos (de laboratorio) y dinámicos (de campo). Ellos pueden además suministrar información sobre los esfuerzos in-situ. Tres tipos de

mediciones de onda son hechas para determinar el comportamiento de la roca bajo carga dinámica, estas mediciones son resonancia, propagación del pulso e impacto.

El rango de frecuencia donde las mediciones de velocidad de onda pueden ser limitadas principalmente por el tamaño de la muestra. La fuente de sonido y detectores usados para esta frecuencia son transductores piezo-eléctrico. Ellos se deforman mecánicamente cuando un voltaje externo es aplicado a este, y viceversa, un campo eléctrico es generado cuando ellos son deformados por un esfuerzo externo. Diferentes elementos piezo manufacturados son usados para generar ondas P y S. Los transductores son puestos en la caras opuestas de la muestra de roca, la velocidad del sonido son medidas por el tiempo de transición del pulso de la onda a través de la muestra. Las mediciones a varias frecuencias pueden ser obtenidas por el análisis de la forma de la onda, pero este es solo posible si el transductor es de banda ancha. Los transductores pueden ser fijados en los lados del pistón de una celda triaxial, o en el transmisor radial del fluido de confinamiento. La figura 2.11 ilustra un sistema de medición de velocidad de onda de laboratorio, y en particular se muestra como el transductor puede ser integrado en un sistema de prueba de mecánica de roca.

Las mediciones de velocidad de onda de laboratorio en núcleos pueden ser llevadas bajo las condiciones in situ. Con núcleos sin carga se puede determinar la orientación de las fracturas y determinar la orientación de los esfuerzos in situ.

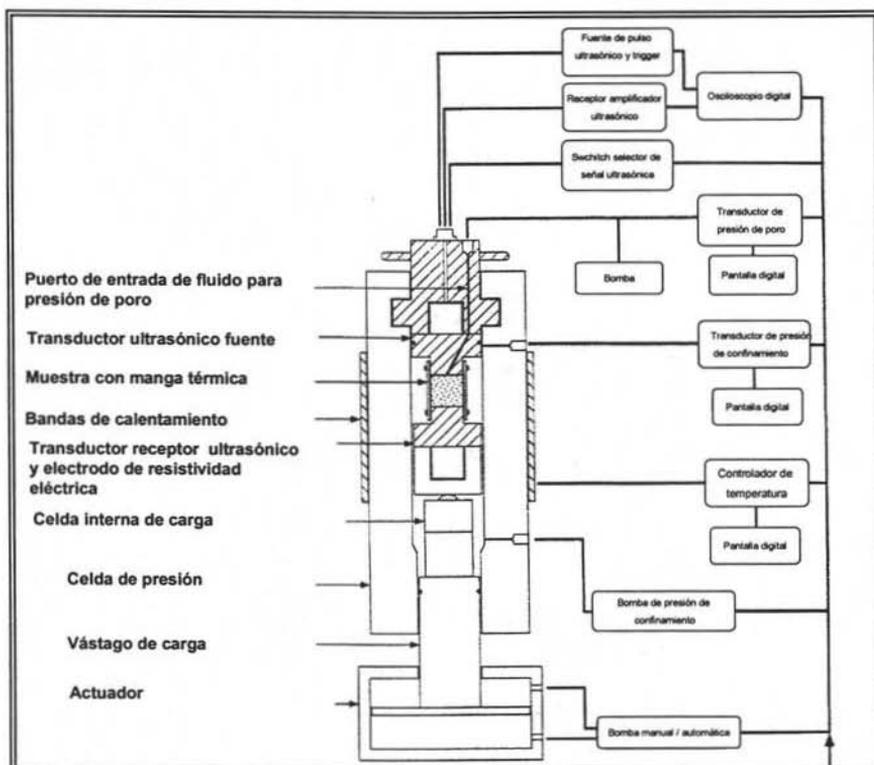


Figura 2.11.- Equipo de medición acústica (Esquema proporcionado por el Instituto Mexicano del Petróleo)

2.6.- Determinación de las constantes poroelásticas

La celda triaxial es el equipo de prueba más común usado para determinar los parámetros elásticos.

Las constantes pueden ser medidas a través de un procedimiento estándar triaxial, y es relativamente menos exacta que la medición de presión de poro intersticial, y la opción mejor es la de medir dos coeficientes drenados y cualquier otra combinación es aceptable.

2.6.1.-Constantes de material drenado y no drenado

Las pruebas drenadas y no drenadas no son solo definidas con respecto a la carga aplicada sobre la roca, sino también el tiempo necesario para asegurar un drenaje perfecto durante la ruptura de la prueba, el cual es dado por la siguiente relación:

$$t_f = \frac{20L^2}{3C} \quad (2.49)$$

y la velocidad de carga necesaria para asegurar condiciones de drene esta dada por

$$v_t = \frac{Rc}{t_f} \quad (2.50)$$

donde Rc es la fuerza de compresión bajo una presión de confinamiento.

Una vez que se conoce v_t , entonces la medición de las propiedades de drene sigue las técnicas estándar.

- 1.- El modulo de Young es obtenido de la pendiente de esfuerzo-deformación.
- 2.- La relación de Poisson es obtenida de la medición del desplazamiento radial y la deformación axial.

El coeficiente de Biot α

Se tiene tres métodos para medir el coeficiente de Biot, α . El primer método, conduce a una prueba drenada, consiste en una roca sujeta a una presión de confinamiento, si la medición del fluido drenado puede ser medido con exactitud ($\Delta V_p = \Delta V_f$) podemos obtener;

$$\alpha = \frac{\Delta V_f}{\Delta V} . \quad (2.51)$$

El segundo método, consiste en partir de las ecuaciones generales, podemos ver que si incrementamos la presión de poro mientras mantenemos la presión de confinamiento constante, y si medimos la deformación axial o radial, se puede obtener el coeficiente de Biot de la siguiente ecuación::

$$e_{i,j} = -\frac{\alpha}{K} p . \quad (2.52)$$

Otro método puede ser que se controle la deformación y se mida la presión de confinamiento necesaria para mantener tal equilibrio. Mientras se registra la presión de poro, de las ecuaciones constitutivas se puede despejar el coeficiente de Biot de la ecuación como se muestra a continuación:

$$e_{i,j} = 3\alpha p . \quad (2.53)$$

3.- Modelo matemático

3.1.- Descripción del problema

Durante las pruebas realizadas en laboratorio, los núcleos son sujetos a una carga axial por medio de unas placas rígidas, que están en contacto con las dos superficies planas del núcleo, y dependiente del tipo de prueba puede estar sujeta también a una presión de confinamiento, la cual es aplicada por medio de un fluido que rodea a la muestra. Además que la prueba se puede realizar cubriendo al núcleo con una chaqueta.

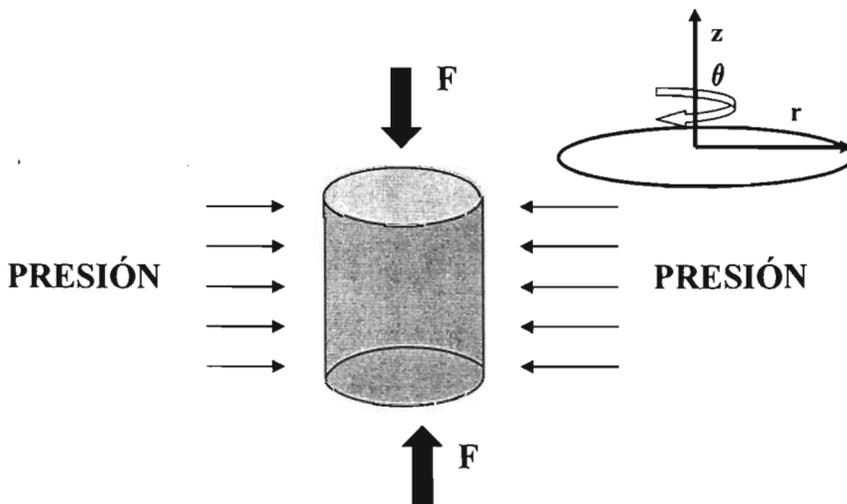


Figura 3.1 Representación grafica de la prueba

En este trabajo se enfocará en 4 tipos de pruebas, las cuales se en lista a continuación

- 1).- Prueba uniaxial
- 2).- Prueba triaxial sin chaqueta

3).- Prueba triaxial con chaqueta

4).- Prueba triaxial con chaqueta con drene

3.1.1.-Suposiciones

El problema se resolverá haciendo las siguientes suposiciones:

- El fluido contenido en la roca es incompresible
- Isotropico y homogéneo
- Presión de poro es homogénea en toda la roca al iniciar la prueba
- La presión de confinamiento es aplicada homogéneamente sobre la superficie del núcleo
- Transitorio

Para el problema en particular a estudiar consideraremos que entre las superficies planas del núcleo y las placas no se presentan efectos por fricción, además que la presión de confinamiento y la carga axial aplicada uniformemente sobre la superficie del núcleo. La presión de confinamiento y de carga aplicada sobre la muestra puede ser función del tiempo, pero para el caso a estudiar se considerará constante durante toda la prueba.

3.1.2.-Consideraciones

Debido a las condiciones de la prueba la presión de confinamiento y el desplazamiento en z son constante a través de la prueba.

Por obvias razones la geometría del núcleo se consideran coordenadas cilíndricas. Por condiciones de simetría debido a su geometría y condiciones de carga, se puede deducir que:

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0. \quad (3.1)$$

y todas las variables son independiente de θ , esto debido a la consideración de homogeneidad.

La velocidad de desplazamiento u_z es independiente de r y θ , debido a que se controla la deformación en z durante toda la prueba, lo que con lleva a que $\sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0$. Nótese que las superficies planas del cilindro son simétricas al plano $z=0$. No es difícil indagar que la sección transversal del eje en z exhibe el mismo comportamiento a cualquier altura. Por lo tanto, σ_{zz} , u_r , así como la presión de poro son independientes de z ⁶.

Considerando que las placas con que se aplican la carga son impermeables y por condiciones de simetría, se considera que no hay flujo en la dirección z ($q_z=0$).

Por el diseño de la prueba, durante su desarrollo puede controlarse la fuerza aplicada o la deformación sufrida por la muestra, para desarrollar el modelo matemático se considerará la primera opción.

Finalmente, al usar las ecuaciones básicas, se puede probar que excepto para u_z , todas las otras variables no triviales tal como σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , ϵ_{zz} , ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$, q_r , y ξ son independiente de z ; por lo tanto u_z puede ser determinado como sigue⁶:

$$u_z = z\epsilon_{zz}. \quad (3.2)$$

3.1.3.-Condiciones de frontera

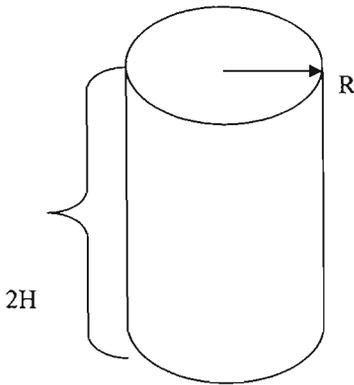


Figura 3.2 Geometría de los núcleos

3.1.31.- Condiciones de frontera generales

Cuando $r=R$

$$\sigma_{rr} = P_c(t), \quad (\text{CG.1})$$

$$p = P_i(t), \quad (\text{CG.2})$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \quad (\text{CG.3})$$

y a $z = \pm H$,

$$q_z = 0, \quad (\text{CG.4})$$

$$u_z = u_z(t), \quad (\text{CG.5})$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (\text{CG.6})$$

En la anterior figura, R y $2H$ son respectivamente el radio y la profundidad del cilindro, el centro del cilindro se seleccionó como el origen de referencia, y, p_i es la presión de poro en R y P_c es la presión de confinamiento. Debe hacer notar

que la pi no es necesariamente es la presión de confinamiento. Dependiente en como la presión de confinamiento es aplicada, PI puede ser igual a Pc, 0 o otra función dependiente del tiempo ⁽⁶⁾.

En adición, la sección transversal a cualquier punto en la dirección z, debe satisfacer la siguiente condición de equilibrio:

$$\int_0^R r \sigma_z \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \tag{CG.13}$$

3.1.3.2- Condiciones de frontera particulares

Dependiendo del tipo de prueba se tendrán las siguientes condiciones de frontera:

1).- Prueba uniaxial

$$P_c=0, \quad r=R, \tag{Cf.1}$$

$$P_I=0, \quad r=R, \tag{Cf.2}$$

$$\int_0^R r \sigma_z \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \tag{Cf.3}$$

2).- Prueba triaxial con chaqueta

$$P_c=P_c, \quad r=R, \tag{Cf.4}$$

$$P_I=p_i, \quad r=R, \tag{Cf.5}$$

$$\int_0^R r \sigma_z \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \tag{Cf.6}$$

3).- Prueba triaxial con chaqueta y drene

$$P_c=P_c, \quad r=R, \tag{Cf.7}$$

$$P_I=0, \quad r=R, \tag{Cf.8}$$

$$\int_0^R r \sigma_z \partial r = -\frac{F}{2\pi}, \tag{Cf.9}$$

4).- Prueba triaxial sin chaqueta

$$P_c = P_c, \quad r = R, \quad (\text{Cf. 10})$$

$$P_l = P_c, \quad r = R, \quad (\text{Cf. 11})$$

$$\int_0^R r \sigma_z \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \quad (\text{Cf. 12})$$

3.1.4.- Condición inicial

Debido a las condiciones de prueba para un tiempo cero la variación de fluido en el núcleo es cero. Dicha condición inicial puede ser expresada como sigue:

$$\xi(r, 0^+) = 0. \quad (\text{Cl. 1})$$

3.2.- Solución**3.2.1- Solución general**

Basados en las condiciones de simetría descrita anteriormente y las ecuaciones gobernantes en términos de coordenadas cilíndricas para el problema en cuestión, este puede ser desarrollado como sigue:

Primero retomaremos la ecuación de difusión 2.13 con la cual se calculará la variación del fluido en el poro de la roca, basado en las condiciones de simetría esta puede ser rescrita como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) c - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \quad (3.3)$$

aplicando la transformada de la Laplace

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) c - (s\zeta - \zeta(0)) = 0. \quad (3.4)$$

y considerando la condición inicial (Cl.1), que a tiempo cercanos a cero ($t \approx 0$) no hay cambio de fluido en el poro ($\zeta(r, 0^+) = 0$), esto nos conduce:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{s}{c} \zeta = 0. \quad (3.5)$$

donde s es el parámetro de transformada de Laplace, donde ζ es la denotación de transformada de Laplace. Haciendo el cambio de variable con $\phi = r\sqrt{\frac{s}{c}}$ se obtiene

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + \delta \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - \phi^2 \zeta = 0. \quad (3.6)$$

Esta ecuación es una ecuación de Bessel y su solución se muestra a continuación:

$$\zeta = A_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + A_2 K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (3.7)$$

donde I_0 y K_0 son funciones de Bessel modificado, y A_1 y A_2 son constantes. Como se desea tener una solución de 0 a R y de la ecuación anterior la función de Bessel $K_0(\delta)$ no esta definido en cero, por lo tanto se le asigna a la constante A_2 el valor de cero, por lo que la solución queda¹²:

$$\zeta = A_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (3.8)$$

Por la geometría del sistema el desplazamiento en r (u_r) es el que determinar la variación de los esfuerzos, la presión de poro y el flujo del fluido. Para realizar esto se resuelve primero la ecuación de la deformación que experimenta el núcleo cuando se comprime, la cual se puede obtener a partir de la ecuación 2.41 como sigue:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\zeta - \frac{GS}{\eta} \varepsilon \right) = 0. \quad (3.9)$$

posteriormente se utiliza la solución de ζ y si se sabe que la deformación (ε) que experimenta la roca puede ser descrita con las siguientes expresiones (son desarrolladas a partir de la ecuación 2.19, las cuales fueron desarrolladas por Biot):

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}. \quad (3.10)$$

donde

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}.$$

Al resolverse la ecuación 3.11 se puede obtener la siguiente solución (ver el apéndice A):

$$u_r = \frac{\eta}{GS \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz}) r}{2}. \quad (3.12)$$

A partir de la solución obtenida anterior y aplicando las ecuaciones gobernantes del fenómeno se desarrollara las expresiones para el comportamiento

de los esfuerzos, la presión de poro y flujo de fluido en el núcleo, como se muestra a continuación.

En base a la teoría poroelástica se demostró que la presión de poro puede ser descrita por la expresión:

$$p = M(\zeta - \alpha\epsilon). \tag{3.12}$$

al sustituir las soluciones de ζ y ϵ en la ecuaciones anteriores, se puede derivar la variación de la presión de poro a través de la prueba (ver apéndice B).

$$\bar{p} = M\left(1 - \frac{\alpha\eta}{GS}\right)A_1I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \alpha MA_3. \tag{3.13}$$

A partir de la ecuación de Darcy el flujo de fluido en la dirección r durante la prueba puede ser resuelto como se muestra a continuación:

$$q_r = -k \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{3.14}$$

la sustituir la solución para la presión de poro es fácil obtener la siguiente expresión:

$$q_r = -k \frac{\partial}{\partial r} \left(M\left(1 - \frac{\alpha\eta}{GS}\right)A_1I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \alpha MA_3 \right), \tag{3.15}$$

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} M\left(1 - \frac{\alpha\eta}{GS}\right)A_1I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right).$$

Se prosigue a encontrar una solución para los esfuerzos en el núcleo. Partiendo de la ecuación 2.43 y con las consideraciones previamente establecidas

se puede obtener las siguientes expresiones (Biot) para los esfuerzos en r (σ_{rr}), θ ($\sigma_{\theta\theta}$) y z (σ_{zz}).

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \alpha p, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \alpha p, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \alpha p. \quad (3.18)$$

Sustituyendo las expresiones de ε_{zz} , ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε y p en las ecuaciones anteriores y desarrollándolas es posibles obtener las siguientes expresiones:

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{1}{2(1-\nu_u)} A_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{zz}. \quad (3.19)$$

(ver apéndice C)

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} \left(A_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - A_1 \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) + \frac{1}{2(1-2\nu_u)} A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}. \quad (3.20)$$

(ver apéndice D):

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = \frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)} A_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} A_3 + \varepsilon_{zz}. \quad (3.21)$$

(ver apéndice E)

Ya que se cuenta con las ecuaciones generales que describen u_r , u_z , p , q_r , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} , ahora prosigue evaluarlas para las condiciones de frontera de cada prueba.

3.2.2- soluciones particulares

En base a las ecuaciones desarrolladas (3.12, 3.13, 3.15, 3.19, 3.20 y 3.21) en esta sección se presentan las expresiones para las diferentes pruebas:

1.- Prueba uniaxial

(ver apéndice F)

$$\tilde{u}_r = -\frac{r\tilde{\sigma}_0}{D2G} \left[(v_u - \nu) \left(\frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1-\nu)v_u I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right], \quad (3.22)$$

$$\tilde{u}_z = -\frac{z\tilde{\sigma}_0}{D2G} \left[(1-\nu)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 2(v_u - \nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right], \quad (3.23)$$

$$\tilde{p} = -\frac{(v_u - \nu) \left[I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] \tilde{\sigma}_0}{2\eta D}, \quad (3.24)$$

$$\tilde{q}_r = k\sqrt{\frac{s}{c}}\tilde{\sigma}_0 \frac{(v_u - \nu)}{2\eta D} I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (3.25)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(v_u - v)}{D} \left[\frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \sigma_0, \quad (3.26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(v_u - v)}{D} \sigma_0 \left[I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]. \quad (3.27)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_0}{D} \left[(v_u - v)I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - (1 - \nu)(1 + \nu_u)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]. \quad (3.28)$$

donde

$$D = (1 - \nu)(1 + \nu_u)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}. \quad (3.29)$$

2).- Prueba triaxial con chaqueta

(ver apéndice G)

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{r\bar{\sigma}_0}{D2G} \left[(v_u - \nu) \left(\frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1-\nu)v_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] \\
 & + \frac{rPc}{2GD} \left(-2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu)(1-\nu_u) I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{rpi}{D} \frac{\alpha(1-2\nu)}{2G} \left((1+\nu_u) \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} + (1-3\nu_u) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\
 u_z = & z \left(\begin{aligned}
 & 2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\bar{\sigma}_0}{2G} \left(\frac{1-\nu}{D} \right) I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\
 & + \frac{pi2\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}
 \end{aligned} \right), \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{(v_u - v) \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] \bar{\sigma}_0}{2\eta D} \\
 & + \frac{Pc}{D} \frac{(v_u - v)}{\eta} \left(I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\
 & + \frac{pi}{D} \left((1-v)(1+v_u) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \left(4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 q_r = & k \sqrt{\frac{s}{c}} \bar{\sigma}_0 \frac{(v_u - v)}{2\eta D} I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{Pc}{D} \left(\frac{(v_u - v)}{\eta} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{pi}{D} (1+v_u)(1-v) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right),
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = & \frac{(v_u - v)}{D} \left[\frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \bar{\sigma}_0 \\
 & + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-v)(1+v_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \\
 & + \frac{pi\alpha(1-2v)(1+v_u)}{D} \left(\frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} = & \frac{(v_u - v)}{D} \sigma_0 \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \\
 & + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \quad (3.35) \\
 & + \frac{pi\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u)}{D} \left(\frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} = & \frac{\sigma_0}{D} \left[(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \\
 & + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (3.36) \\
 & + \frac{pi\alpha(1 - 2\nu)}{D} \left(-(1 + \nu_u) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(1 + \nu_u) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)
 \end{aligned}$$

3).- Prueba triaxial con chaqueta y drene

(ver apéndice H)

$$u_r = -\frac{r\sigma_0}{2DG} \left[(v_u - \nu) \left(\frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1-\nu)v_u I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] + \frac{rPc}{2GD} \left(-2(v_u - \nu) \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu)(1-\nu_u) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \quad (3.37)$$

$$u_z = z \left(2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{1-\nu}{D} \right) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right), \quad (3.38)$$

$$p = -\frac{(v_u - \nu) \left[I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] \sigma_0}{2\eta D}, \quad (3.39)$$

$$+ \frac{Pc}{D} \frac{(v_u - \nu)}{\eta} \left(I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right)$$

$$q_r = k\sqrt{\frac{s}{c}} \sigma_0 \frac{(v_u - \nu)}{2\eta D} I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + k\sqrt{\frac{s}{c}} \frac{Pc}{D} \left(\frac{v_u - \nu}{\eta} \right) I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (3.40)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(v_u - v)}{D} \left[\frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \bar{\sigma}_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)$$
(3.41)

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(v_u - v)}{D} \bar{\sigma}_0 \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right]$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)$$
(3.42)

$$\sigma_{zz} = \frac{\bar{\sigma}_0}{D} \left[(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right]$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)$$
(3.43)

4).- Prueba triaxial sin chaqueta

(ver apéndice I)

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{r\sigma_0}{D2G} \left[(v_u - \nu) \left(\frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1-\nu)v_u I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] \\
 & + \frac{Pcr}{D} \left(\begin{aligned}
 & (\alpha(1-2\nu)(1+v_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu)(1-v_u) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\
 & + (\alpha(1-2\nu)(1-3v_u) + 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}
 \end{aligned} \right), \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z = z \left(\begin{aligned}
 & 2 \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{(1-\nu)}{D} \right) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \\
 & \frac{Pc}{2G} \frac{2}{D} \left((1-\nu)v_u I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + (\alpha(1-2\nu)(1-v_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)
 \end{aligned} \right), \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

$$p = \frac{(v_u - v) \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] \bar{\sigma}_0}{2\eta D} + \left(\frac{Pc}{D\alpha(1-2v)} \right) \left[\begin{aligned} & \left(\alpha(1-2v)(1+v_u)(1-v) - 2(V_u - V)(1-v) \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + 2(v_u - v)(1-v) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (2(v_u - v)) \left(2\alpha(1-2v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \end{aligned} \right], \quad (3.46)$$

$$q_r = k \sqrt{\frac{s}{c}} \bar{\sigma}_0 \frac{(v_u - v)}{2\eta D} I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{Pc}{2\eta D} \right) \left(\alpha(1-2v)(1+v_u) - 2((V_u - V)) \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (3.47)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(v_u - v)}{D} \left[\frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \bar{\sigma} + \frac{Pc}{D} \left[\begin{aligned} & - \left(\alpha(1-2v)(1+v_u) - 2(V_u - V) \right) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & - (1-v)(1+V_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\alpha(1-2v)(1+v_u) + 2(V_u - V) \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right], \quad (3.48)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(v_u - \nu)}{D} \bar{\sigma}_0 \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right]$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left(\begin{aligned} & -(\alpha(1-2\nu)(1+v_u) - 2(V_u - V)) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & - (1-\nu)(1+V_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1-2\nu)(1+v_u) + 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right), \quad (3.49)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\bar{\sigma}_0}{D} \left[(v_u - \nu) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1-\nu)(1+v_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right]$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left(-\alpha(1-2\nu)(1+v_u) + 2(V_u - V) \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (2\alpha(1-2\nu)(1+v_u) - 4(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right). \quad (3.50)$$

Nota: es importante notar que las definiciones de las constantes son dadas por las ecuaciones (M) 2.17, (η) 215, (c) 2.14 y 2.18 (S).

4.-Análisis de resultados

El siguiente paso a realizar con el modelo desarrollado es resolverlo, pero como el modelo está en el espacio de Laplace se procede a utilizar un método numérico de inversión de Laplace (Herald Stehfest⁷) para resolverlo.

Con los modelos obtenidos en este trabajo se determinará como afectan:

- Fuerza
- Presión de poro en la superficie del cilindro
- Presión de confinamiento
- Coeficiente de difusividad

en un núcleo durante una prueba, para lo cual se utilizarán los datos de una arenisca Weber, los cuales se enlistan a continuación.

Módulo de corte ($N \cdot m^{-2}$) = 1.2×10^{10}

Módulo de Poisson = 0.15

Módulo de Poisson drenado = 0.29

Coeficiente de difusividad (m^2/seg) = 2.1×10^{-2}

Coeficiente de esfuerzo = 0.26

Porosidad = 0.06

Los núcleos están saturados con un aceite mineral (Soltrol 170), el cual tiene una viscosidad de 4.06 Cp y densidad de 0.7774 g/ml. Por último la permeabilidad medida para este tipo de arenisca es de un 1 milidarcy.

Los núcleos tienen un radio de 0.01905 metros y una altura de 0.0718 metros. Para las pruebas se utilizó una fuerza fue de 16.3 MPa.

Nota:

En el presente trabajo no se presentará el método utilizado (Herald Stehfest⁷) para resolver los modelos obtenidos y solo se mostrarán las graficas obtenidas de la simulación bajo los diferentes escenarios posibles, ya que no es el fin de esta tesis presentar un método ya conocido y muy utilizado.

4.1.- Efectos de la fuerza aplicada

Para determinar los efectos de la fuerza aplicada sobre un núcleo se utilizará el modelo desarrollado para pruebas uniaxiales, ya que en esta prueba al núcleo solo se le aplica una fuerza axial ($p_i=p_c=0$).

4.1.1.-Esfuerzo en la dirección axial (z) (ver figura 3.1)

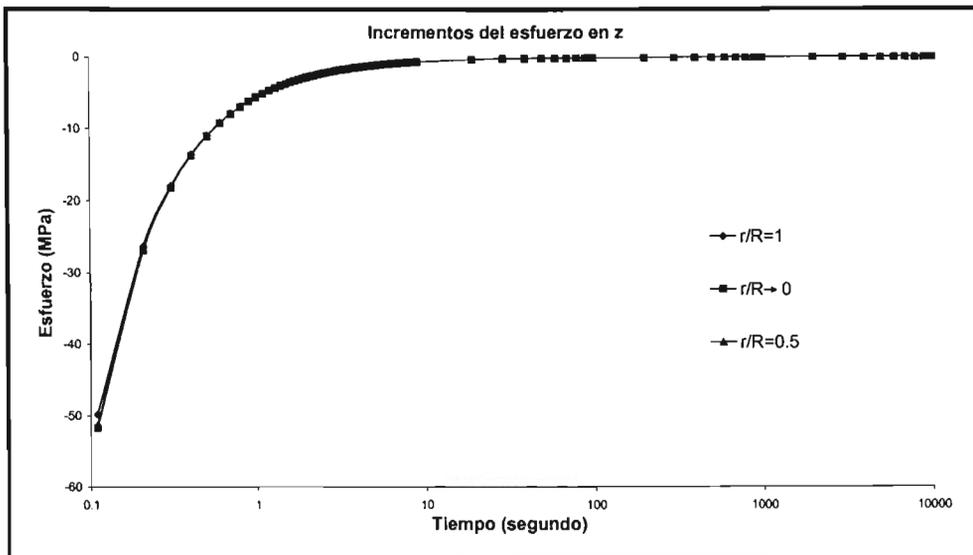


Figura 4.1.- Efecto de la fuerza en el esfuerzo en z a diferentes radios
(Modelo para la prueba uniaxial)

De la figura 4.1 se puede observar que al inicio de la prueba el núcleo presenta una disminución del esfuerzo en z , y como la prueba se va desarrollando este efecto se va desvaneciendo hasta llegar a un equilibrio. Este efecto se debe a que el núcleo al iniciarse se encuentra saturado y cuando se le aplica una fuerza al núcleo, tiende a expulsar el fluido contenido en los poros, pero al inicio de la prueba no todo el fluido puede escapar y oponen una resistencia al esfuerzo aplicado. De la misma figura se puede determinar que el mismo efecto es casi similar en el centro, a la mitad y en la orilla del cilindro.

4.1.2.-Esfuerzo tangencial (θ) (ver figura 3.1)

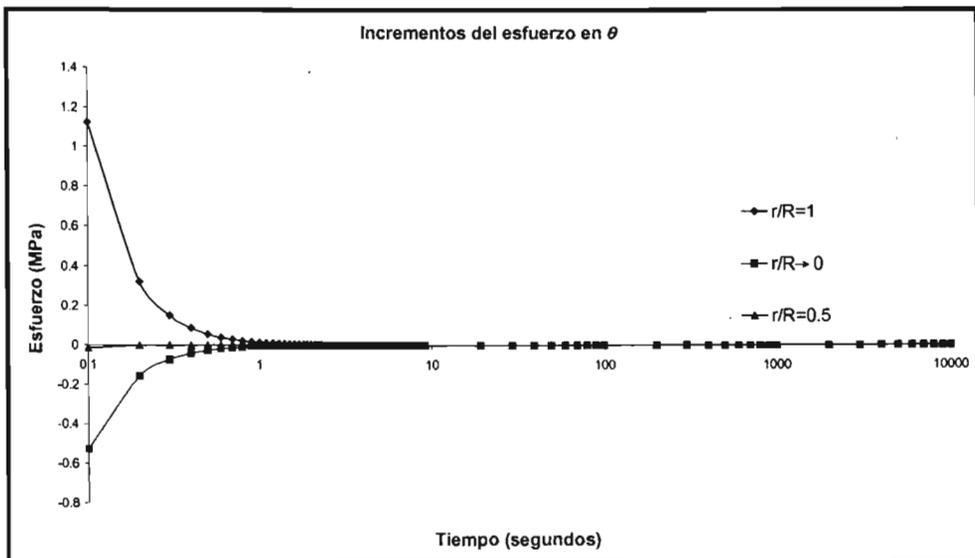


Figura 4.2.- Efectos de la fuerza en el esfuerzo en θ a diferentes radios
(Modelo para la prueba uniaxial)

De la figura anterior se puede observar que el esfuerzo en θ varía dependiendo de la posición. Mientras en el centro del fluido se observa un efecto compresivo debido a que los fluidos cerca del centro tiende a representar una mayor oposición al esfuerzo aplicado sobre el núcleo, mientras que en la orillas del núcleos esta oposición es menor y se tiene un efecto de tensión, un efecto dual se presenta al mitad del radio ($R/2$), donde al inicio de la prueba se presenta el efecto

compresivo y a tiempo largo un efecto de tensión. Debemos recordar que el esfuerzo en r y θ son el resultado de la variación de la presión de poro.

4.1.3.-Esfuerzo radial (r) (ver figura 3.1)

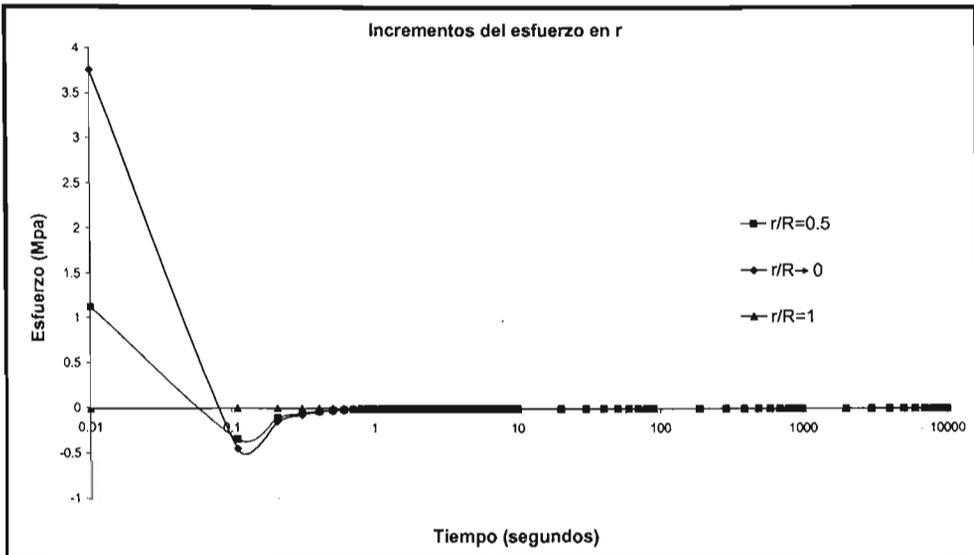


Figura 4.3.- Efectos de la fuerza en el esfuerzo en r a diferentes radios (Modelo para la prueba uniaxial)

A partir de la figura 4.3 se puede determinar que a tiempos muy cortos se observa, un esfuerzo de tensión y como prosigue la prueba el esfuerzo se vuelve compresivo (Al inverso que el esfuerzo en r). Este comportamiento es atribuido de nuevo al fenómeno poroelástico que se lleva a cabo en la núcleo, hay que volver a recordar que los esfuerzos en r y θ se generan por la variación de la presión de poro y como esta variación va disminuyendo al final de la prueba estos fenómenos tienden a desvanecerse, esto es debido a que los esfuerzos en el núcleo tienden al equilibrio. En adicción este efecto tiende a disminuir a medida que se aleja del centro del cilindro.

4.1.4.-Presión de poro

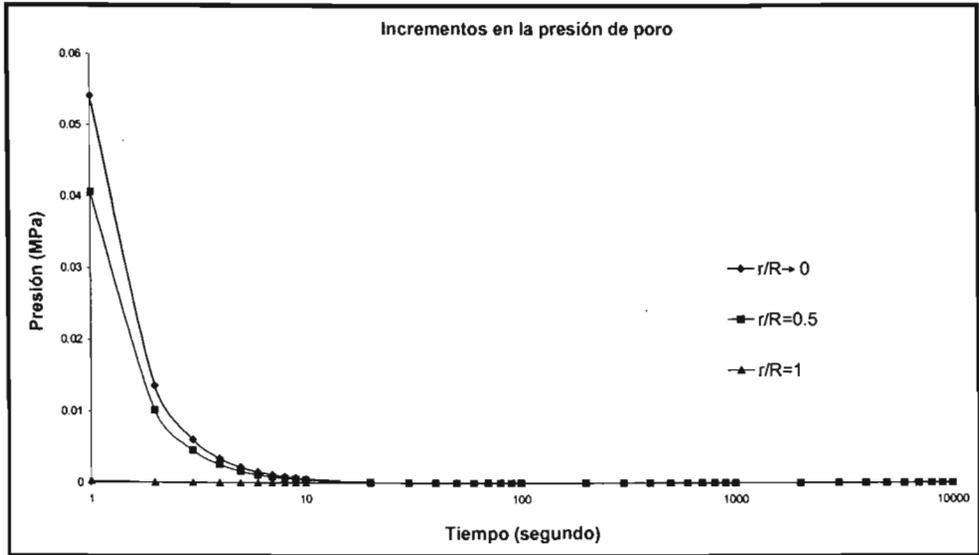


Figura 4.4 Efecto de la fuerza en la presión de poro a diferentes radios (Modelo para la prueba uniaxial)

De la figura anterior es posible determinar que al inicio de la prueba se presenta un incremento de la presión de poro y como continua la prueba este efecto va disminuyendo y además que se tiene un mayor incremento en el centro del núcleo y este va disminuyendo como se acerca a la orillas. El efecto mostrado en la figura de nuevo es asociado al efecto poroelástico, ya que a tiempos cortos el fluido no puede escapar del núcleo debido a la fuerza aplicada sobre este último, por lo tanto el fluido tiende a poner una resistencia, lo cual provoca un incremento en la presión de poro al inicio y este efecto tiende a disminuir cuando en el núcleo se llega a un equilibrio, dicho efecto es mayor en centro porque ahí es donde más oposición se le presenta al fluido a hacer desplazado.

4.1.5.-Flujo en la dirección radial (r)

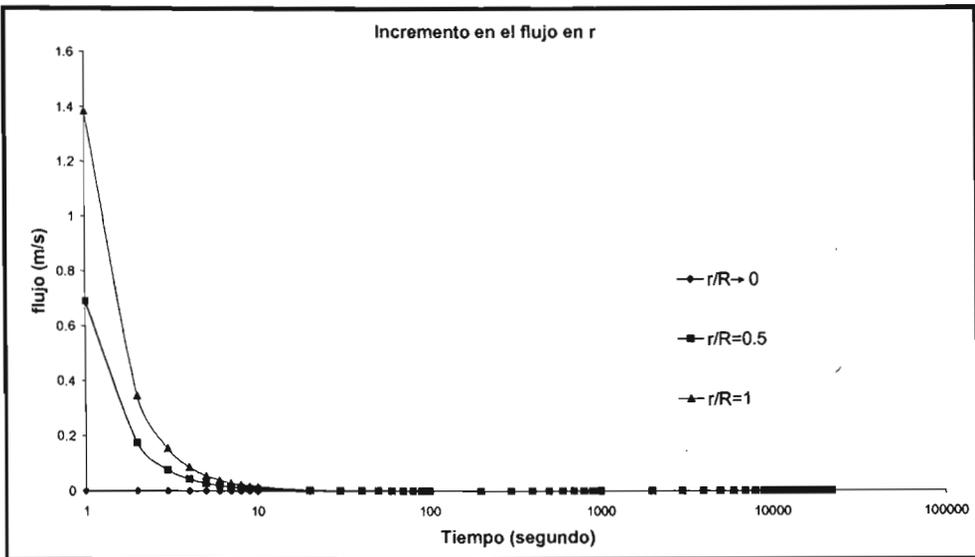
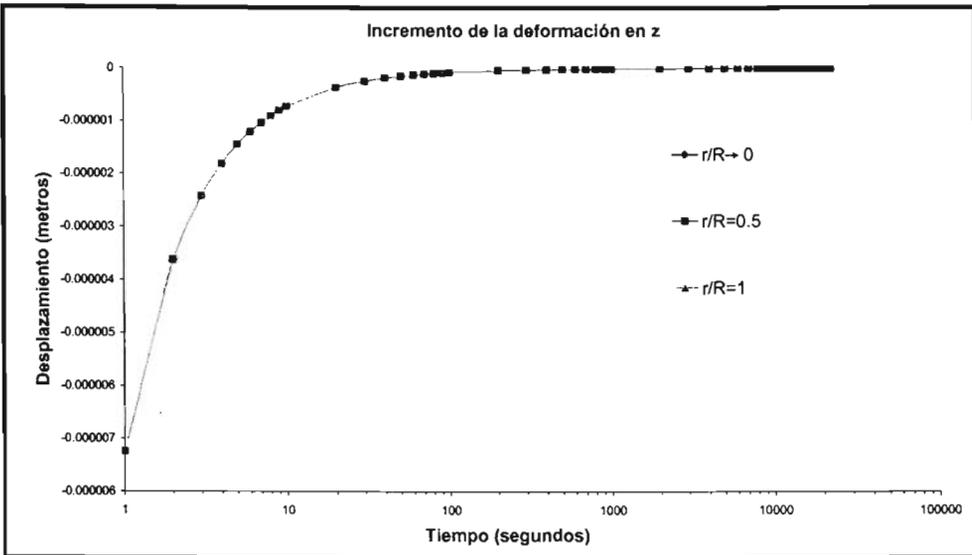


Figura 4.5.- Efectos de la fuerza en el flujo en r a diferentes radios (Modelo para la prueba uniaxial)

En la figura 4.5 se puede observar que el flujo es mayor al inicio de la prueba y este va disminuyendo con el seguir del tiempo, esto se debe, a que en un inicio los poros contiene una mayor cantidad de fluido y una mayor presión de poro lo cual provocará un mayor flujo, mientras el tiempo transcurre el fluido en el poro y una presión de poro menor lo que con lleva a un flujo menor. El otro efecto que se logra observar es que se tiene un mayor flujo cerca de la orilla del cilindro que en el centro, este efecto es debido a que en el centro es más difícil que el fluido pueda escapar, ya que a parte de desplazarse tiene que esperar a que el fluido que se encuentra en una posición delante de él se desplace, por el otro lado el fluido mas cercanas a la orilla del cilindro tiene menos dificultad para desplazarse.

4.1.6.- Desplazamiento en la dirección axial (z)



**Figura 4.6.-Efectos de la fuerza en la deformación en z
(Modelo para la prueba uniaxial)**

De la figura anterior se puede determinar que la deformación sufrida por el núcleo es la misma desde la orilla hasta el centro del cilindro, además se observa que al inicio de la prueba la deformación es mayor y como la prueba continúa esta disminuye, esto es debido a que al inicio los poros contienen tanto fluido como el esqueleto sólido, al momento que se le aplica la fuerza existe expulsión del fluido fuera del poro acompañada de una deformación del esqueleto y un desequilibrio mayor, pero como continúa la prueba el fluido dentro del poro empieza a disminuir y la deformación empieza a ser aportada la mayor parte por el esqueleto con un desequilibrio menor, lo que conlleva a que la deformación disminuya, pero esta deformación continuará hasta el momento que se llega a un equilibrio de esfuerzos en el núcleo.

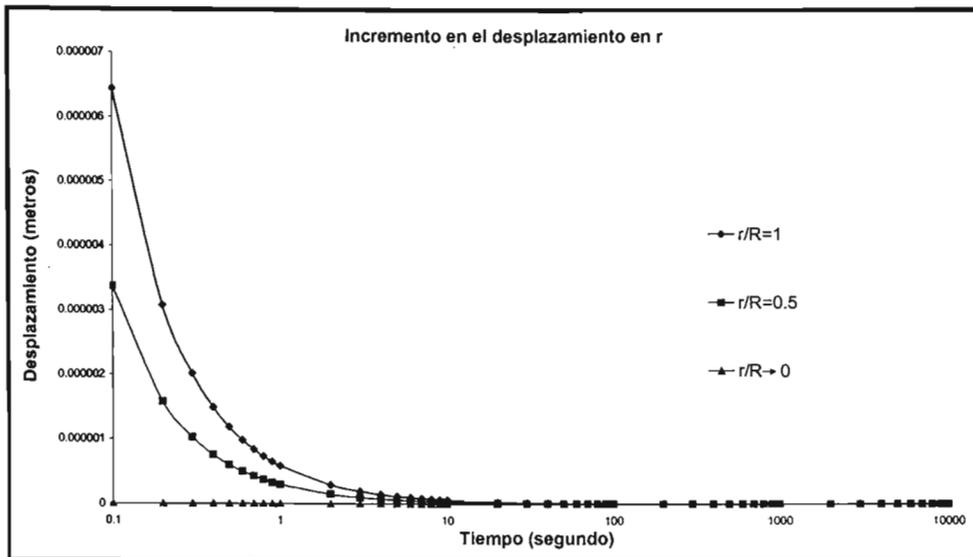
4.1.7.- Deformación en la dirección radial (r)

Figura 4.7.- Efectos de la fuerza en el desplazamiento en r
(Modelo para la prueba uniaxial)

Se puede establecer como aumenta la deformación entre mas nos vamos desplazamiento en r , esto es debido a que en el centro del cilindro tiene una mayor oposición a la deformación (presión de poro) que en la orilla, por el otro lado se tiene un mayor desplazamiento al inicio de la prueba y disminuye como continua la prueba, esto se debe al inicio se tiene un mayor desequilibrio por la fuerza aplicada sobre le núcleo y por lo tanto una mayor deformación experimentará, mientras mas tiempo transcurra en la prueba el desequilibrio disminuirá y por lo cual el desplazamiento será menor. Este fenómeno fue reportado por Mandel⁶.

4.2.- Efecto del coeficiente de difusividad

En esta parte se determinará como el coeficiente de difusividad afecta en el fenómeno poroelástico. Para lo cual se utilizará el modelo uniaxial, ya que en esta prueba el desplazamiento del fluido no se ve afectado por la presión de poro y presión de confinamiento.

Tomando como ejemplo la figura 4.3, se repetirá la misma simulación solo que ahora se supondrá un coeficiente de difusividad $1.6 \text{ m}^2/\text{s}$.

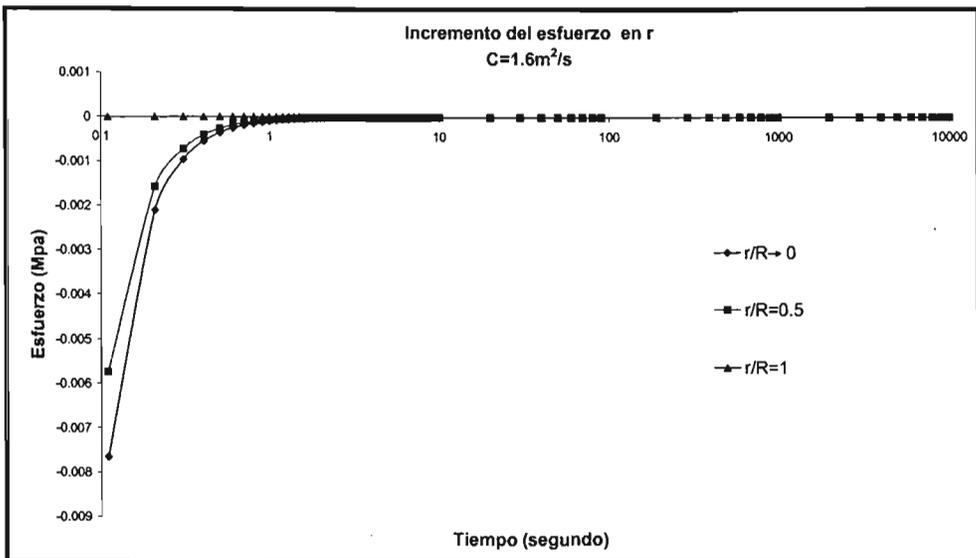


Figura 4.8.- El efecto del coeficiente de difusividad en el esfuerzo en r
(Modelo para la prueba uniaxial)

Al comparar las gráficas 4.8 ($C=1.6 \text{ m}^2/\text{s}$) y 4.3 ($C=0.021 \text{ m}^2/\text{s}$), se puede observar que entre más grande sea el coeficiente de difusividad se presentan efectos compresivos del inicio de la prueba, a comparación de la figura 4.3 donde al inicio de la prueba se presentan esfuerzos de tensión y con el proseguir de la prueba se obtiene un esfuerzo compresivo. Por lo tanto el coeficiente de difusividad juega un papel muy importante en el fenómeno poroelástico que tiene lugar en el núcleo.

4.3.- Efecto de la presión de confinamiento

Para poder observar el efecto que tiene la presión de confinamiento (PC) se utilizará el modelo desarrollado para la prueba triaxial drenado, debido a que en esta prueba se evita el efecto de la presión de poro en la pared del cilindro en el fenómeno poroelástico. Se utilizarán los mismos datos que en las pruebas uniaxiales, con la diferencia que aquí solo se variará la presión de confinamiento.

4.3.1.- Esfuerzo en la dirección axial (z)

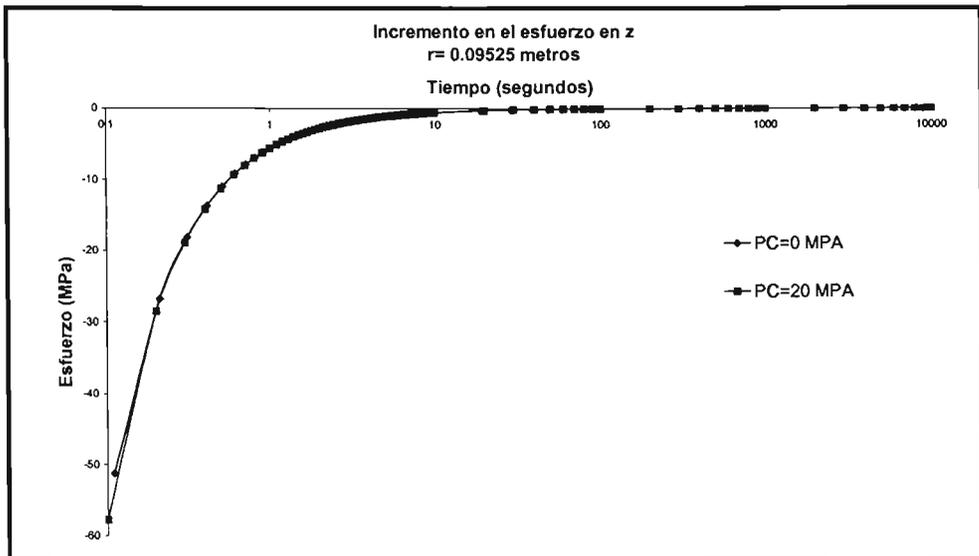


Figura 4.9.- Efectos de la presión de confinamiento en el esfuerzo en z
 (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta y drené)

Se puede determinar de la figura anterior que la presión de confinamiento no tiene un efecto significativo en el incremento en el esfuerzo en z, ya que la presión de confinamiento (PC) no actúa en el mismo sentido que la dirección en que se aplica el esfuerzo.

4.3.2.-Esfuerzo radial y tangencial (θ y r)

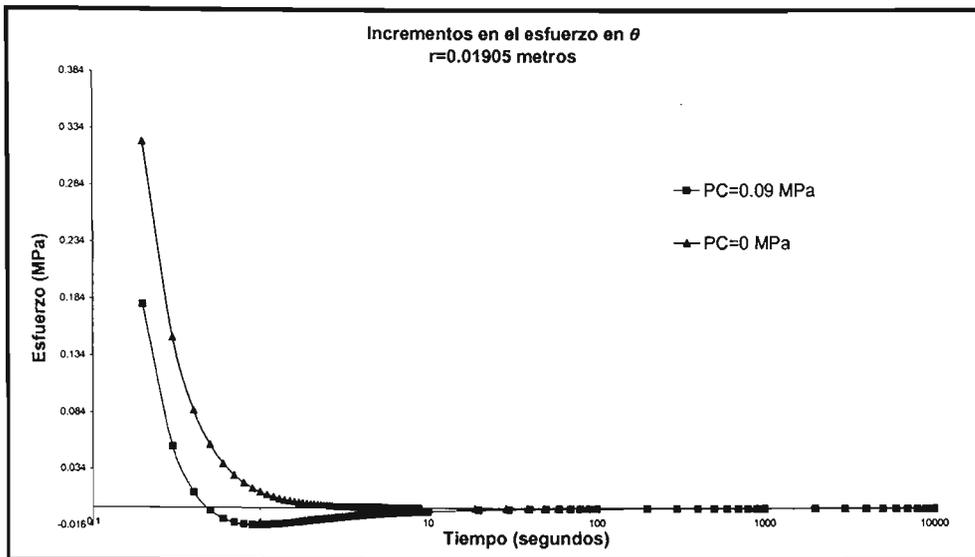


Figura 4.10.- Efectos de la presión de confinamiento en el esfuerzo en θ
 (Modelo para la prueba Triaxial con chaqueta y drene)

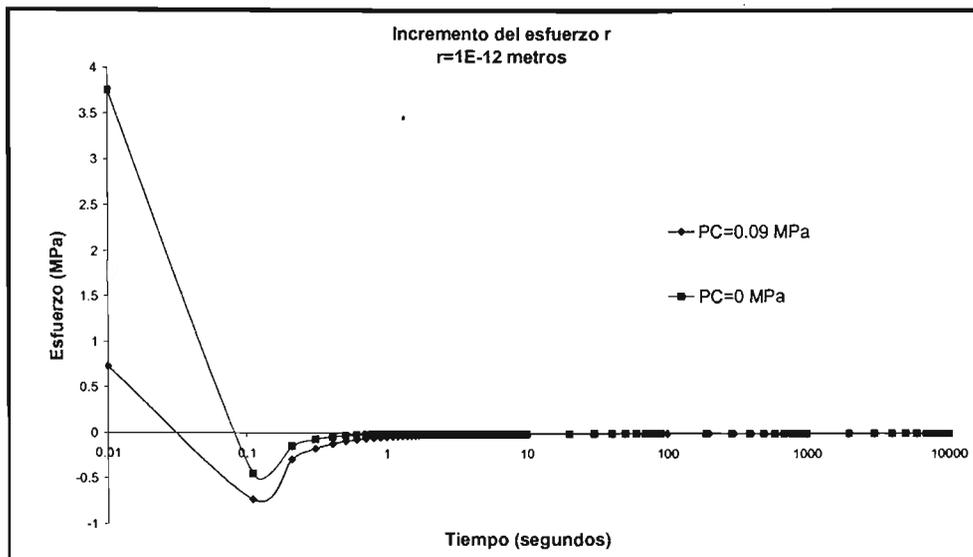


Figura 4.11.- Efecto de la presión de confinamiento en el esfuerzo en r
 (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta y drene)

De las anteriores graficas se puede observar que la presión de confinamiento tiene un efecto compresivo, dicho efecto se debe a que la presión de confinamiento comprime la pared del cilindro, lo cual produce un esfuerzo compresivo sobre los esfuerzos en θ y r .

4.3.3.- Presión de poro y flujo radial (r)

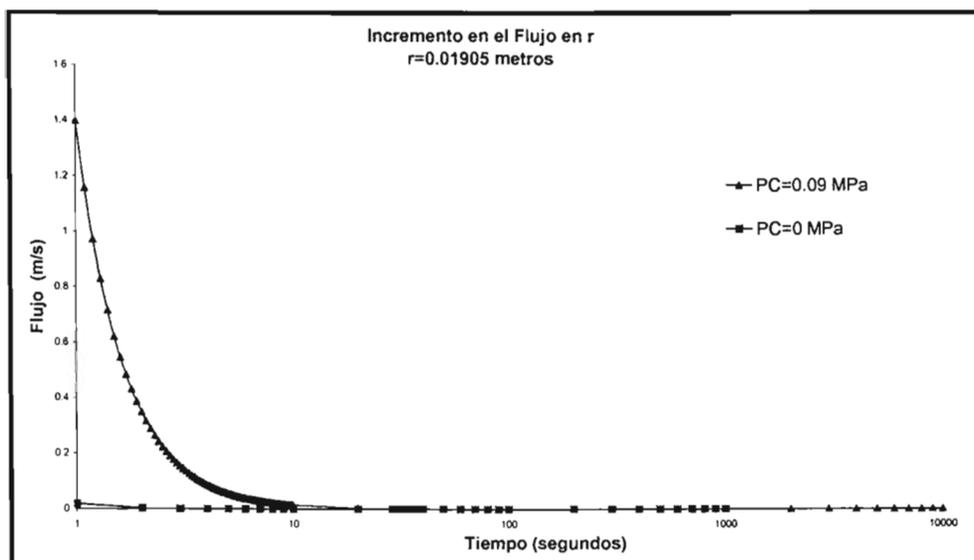
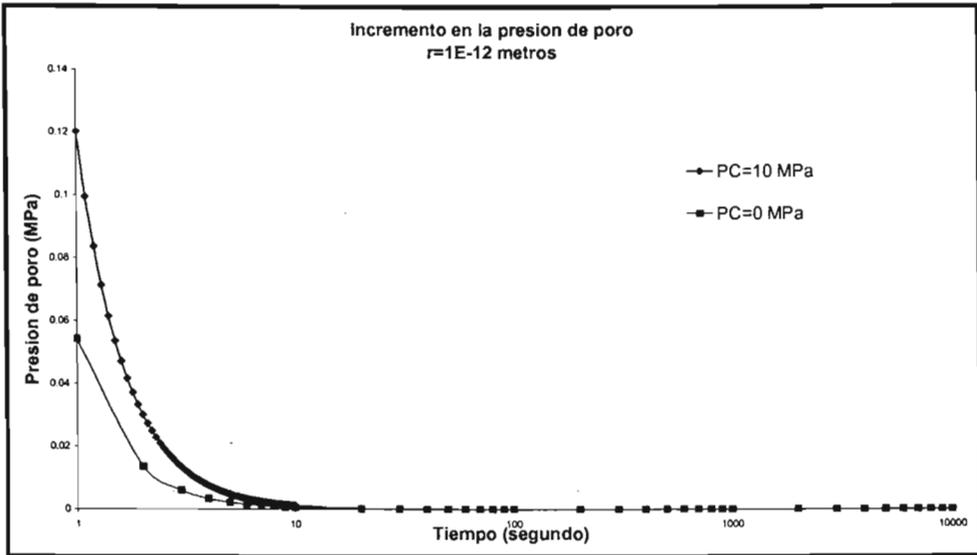


Figura 4.12.- Efecto de la presión de confinamiento en el flujo en r
(Modelo para la prueba triaxial con chaqueta y drene)



De las figuras anteriores se puede ver que el efecto de la presión de confinamiento es compresivo, lo cual con lleva a que el flujo en r aumente a medida que aumenta la presión de poro y este mismo efecto se ve el la presión de poro, donde el efecto compresivo de la presión de confinamiento nos lleva a un aumento en la presión en el poro.

4.3.4.- Desplazamiento axial y radial (z y r)

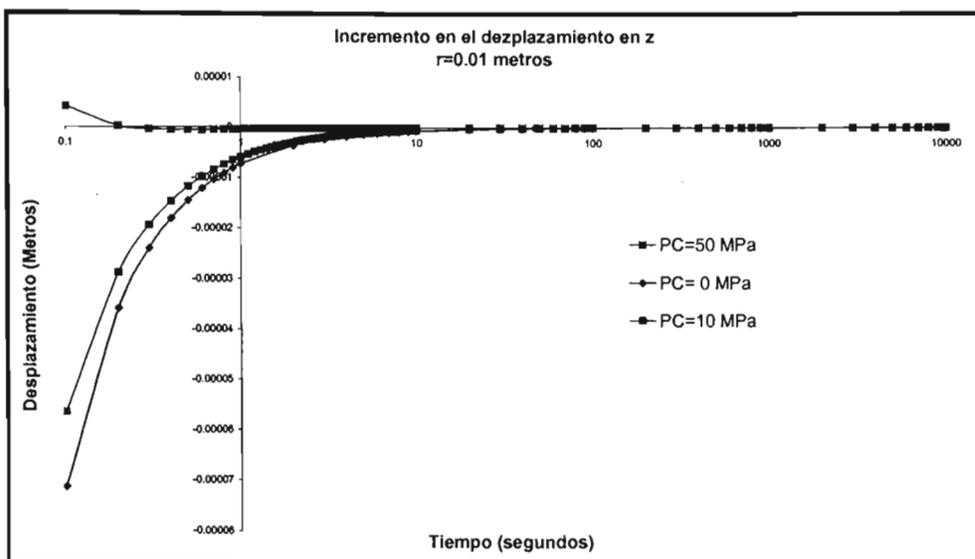


Figura 4.14.-Efectos de la presión de confinamiento en el desplazamiento en z (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta y drené)

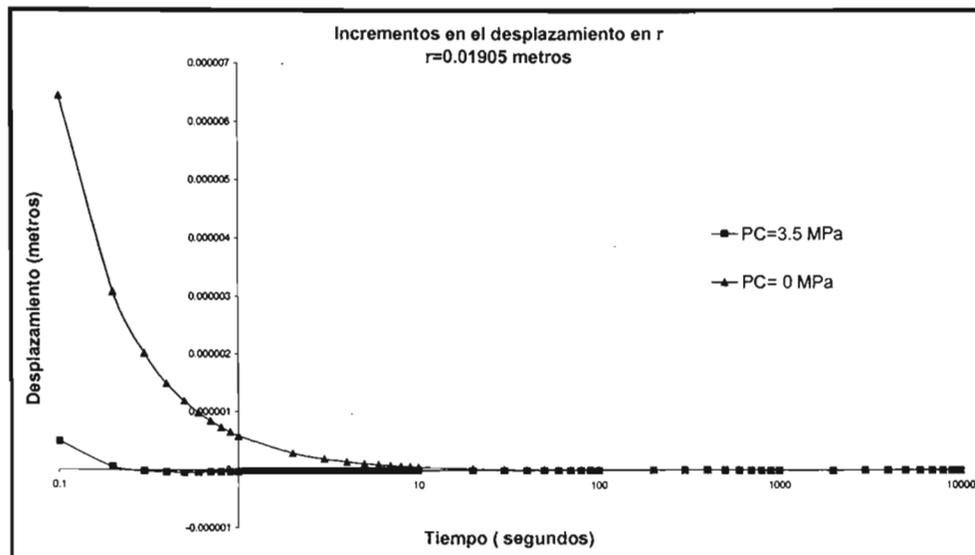


Figura 4.15.-Efectos de la presión de confinamiento en el desplazamiento en r (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta y drené)

De las figuras anteriores se puede determinar que el efecto compresivo de la presión de confinamiento, con lleva a que el desplazamiento en r disminuya hasta el grado que el desplazamiento sea compresivo, lo cual es un indicativo que se empieza a comprimir el núcleo en r , mientras tanto el desplazamiento en z disminuye como aumenta la presión confinamiento, esto es debido a la presión de confinamiento se opone a la deformación impuesta por la fuerza aplicada en z , además cuando la presión de confinamiento es tres veces mayor a la fuerza aplicada en z puede experimentar una expansión en z .

4.4.- Efecto de la presión de la presión de poro de la superficie del núcleo

Para determinar los efectos de la presión de poro de la superficie del núcleo (p_i) se utilizarán el modelo desarrollado para las pruebas triaxiales con chaqueta, ya que en este tipo de prueba se puede variar la presión de poro en la pared del cilindro sin afectar la presión de confinamiento. Se consideraran los mismos datos de los puntos 4.1, 4.2 y 4.3, con la única diferencia que en esta sección se variará la presión de poro en la superficie del cilindro y la presión de confinamiento.

4.4.1.-Esfuerzo axial (z)

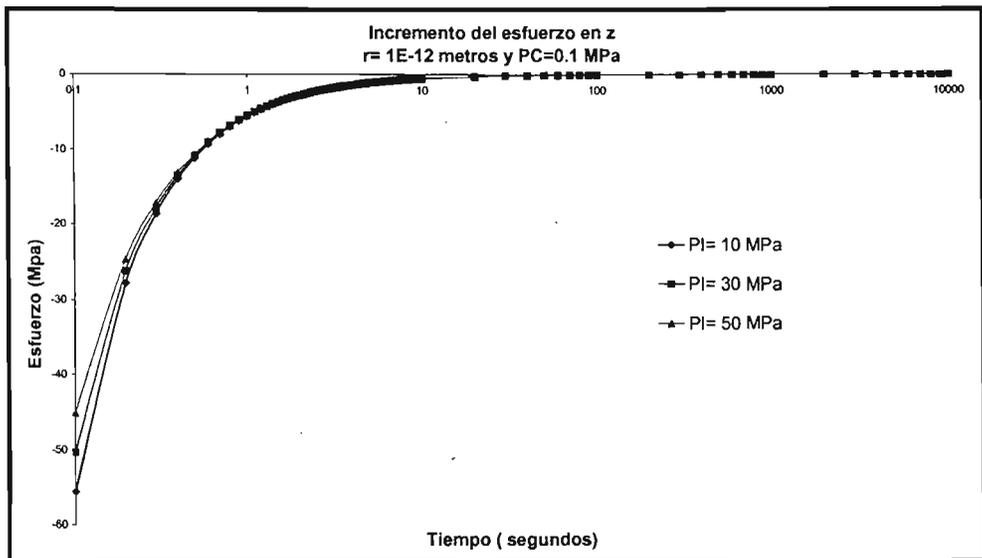


Figura 4.16.- Efectos de la presión de poro en el esfuerzo en z (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

Se puede observar que la presión de poro se opone a la fuerza aplicada en z, y esta oposición es mayor entre mayor presión de poro se tenga, ya que la presión de poro impone un esfuerzo tensión en la dirección z.

4.4.2.- Esfuerzo tangencial y radial (r y θ)

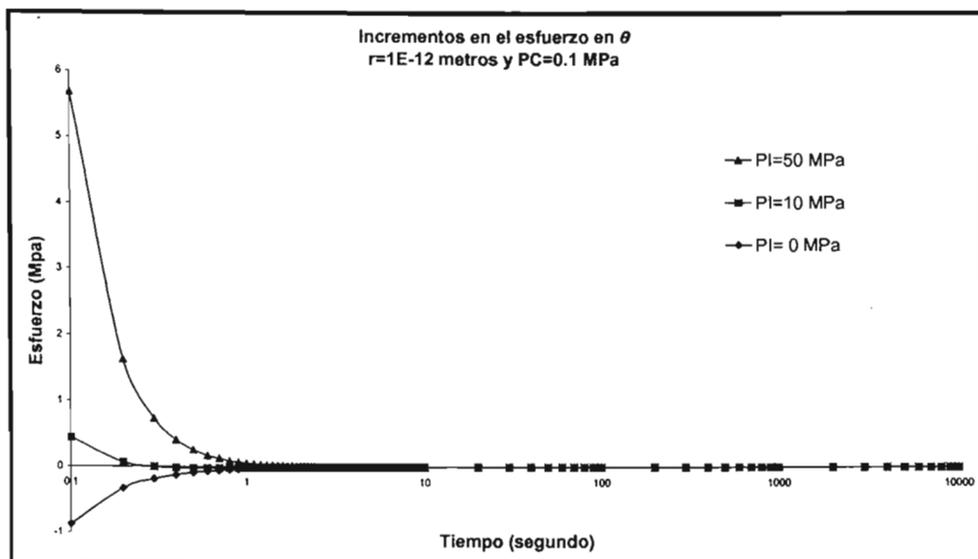


Figura 4.17.- Efecto de la presión de poro en el esfuerzo en θ
(Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

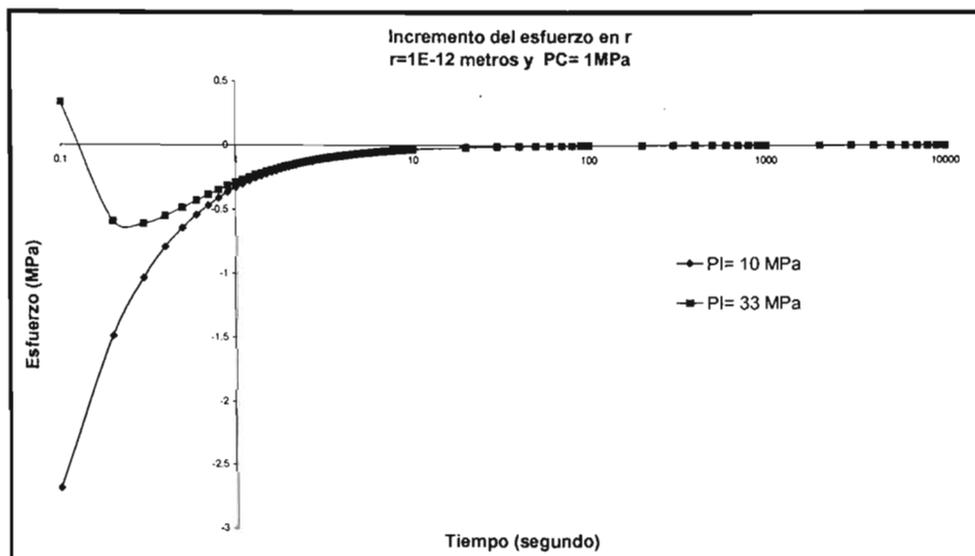


Figura 4.18.- Efecto de la presión de poro en el esfuerzo en r
(Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

Se puede determinar de las figuras que la contribución de la presión de poro en el esfuerzo en r y θ es de tensión, ya que a medida que se aumenta la presión de poro en la pared del cilindro se tiene una caída de los esfuerzos compresivos, ya que la presión de poro aumenta al aumentar la presión de poro en la superficie del núcleo (P1) lo cual crea un esfuerzo de tensión en el esqueleto del núcleo. Aquí se acentúa lo que se mencionaba al inicio, los esfuerzo en θ y r son generados por la variación de la presión de poro.

4.4.3.- Flujo radial (r) y presión de poro

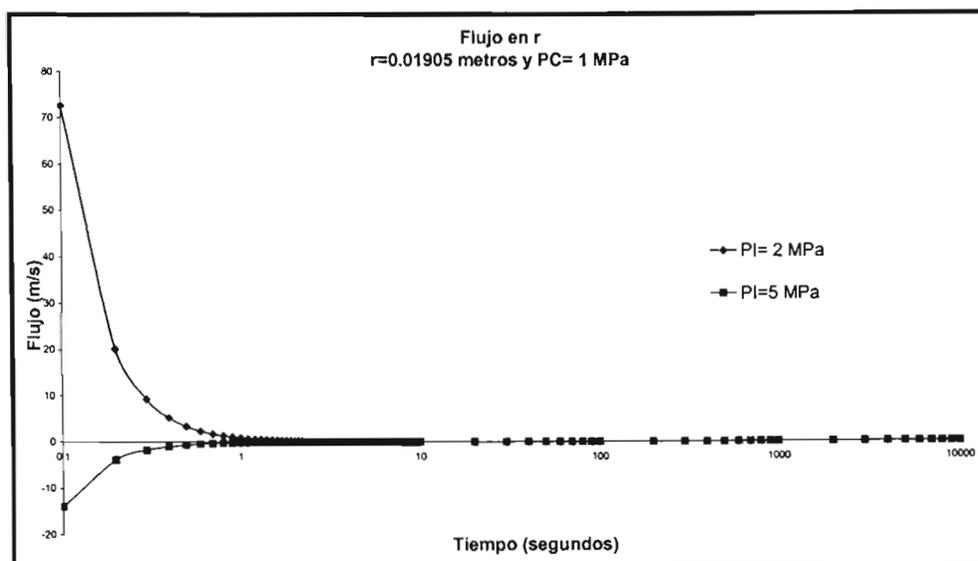


Figura 4.19.- Efecto de la presión de poro en el flujo en r (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

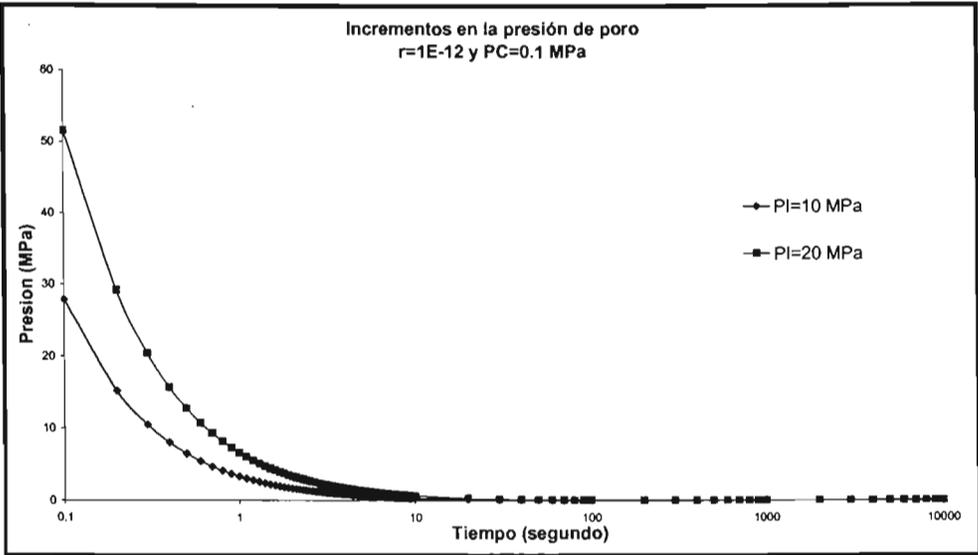


Figura 4.20.- Efecto de la presión de poro en la superficie del núcleo en la presión de poro (Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

Se puede determinar que un incremento en la presión de poro en la superficie contrae un mayor incremento de la presión en el poro por que ahora tiene otra fuerza que se opone a que el fluido puede desplazarse, este efecto se ve mas marcada en el flujo en r, ya que al seguir aumentando la presión de poro en la superficie llega un momento en que el fluido sea expulsado, este se introduce, lo que con lleva una mayor incremento en la presión de poro.

4.4.4.- Desplazamiento axial y radial (z y r)

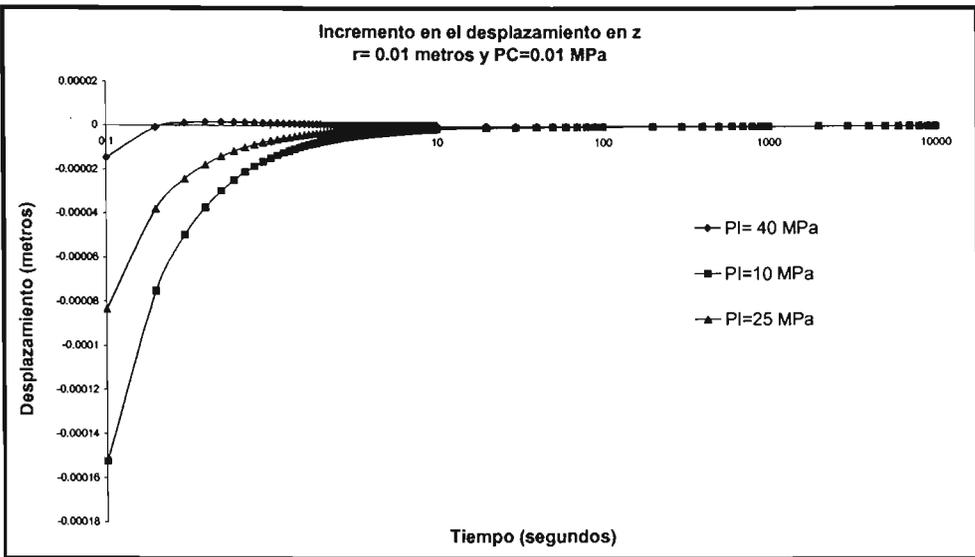


Figura 4.21.- Efecto de la presión de poro en el desplazamiento en z
(Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

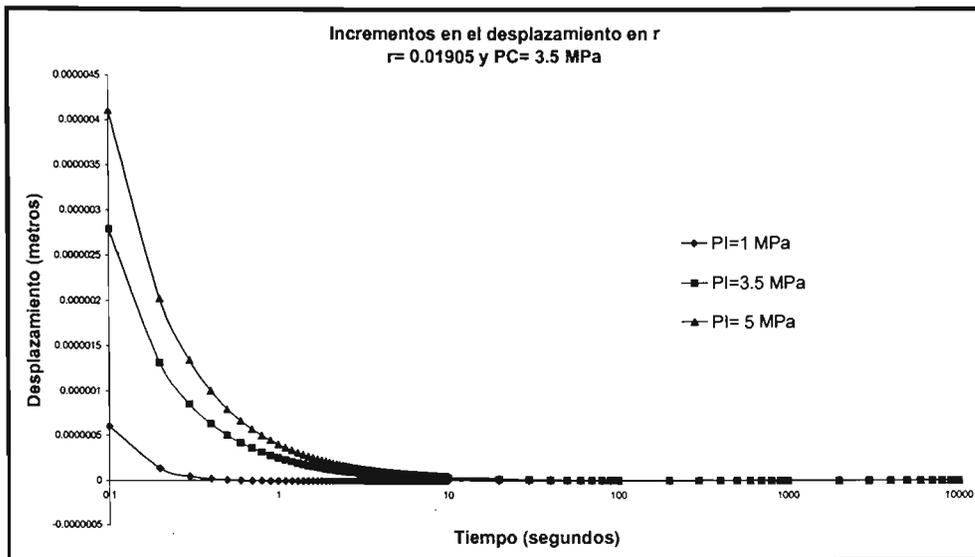


Figura 4.22.- Efecto de la presión de poro en el desplazamiento en r
(Modelo para la prueba triaxial con chaqueta)

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

El efecto de tensión de la presión de poro se remarca más en los desplazamiento en r y z , donde el desplazamiento en r se va incrementando como se incrementa la presión de poro en la superficie, esto es debido a que se incrementa la presión de poro en el cilindro lo que con lleva un aumento en el esfuerzo de tensión y un desplazamiento en r mayor. Este mismo fenómeno es idéntico para el desplazamiento en z , ya que el esfuerzo de tensión generado por la presión de poro puede disminuir drásticamente la contracción del núcleo en z , y para el caso en cuestión una presión de poro en la superficie tiene que ser de 3.5 a 4 veces mayor a la fuerza aplicada para lograr un expansión en z .

5.- Conclusiones

- Se desarrollaron las ecuaciones que simulan el proceso que ocurre en núcleo cuando este es sujeto a una presión de confinamiento, carga axial y presión de poro en la superficie del cilindro a partir de las ecuaciones gobernantes del fenómeno poroelástico.
- Durante la simulación fue posible observar que los esfuerzos radial y tangencial (r y θ) son generados principalmente por la variación de la presión de poro. Esto debido a que la fuerza axial y/o presión de confinamiento aplicadas durante las pruebas con lleva a que se produzca una presión de poro, la cual se refleja en los esfuerzos en r y θ . Al aumentar la presión de poro se observará un aumento en el comportamiento ya sea compresivo o de tensión, ya que entre menor sea desplazamiento del fluido contenido en el núcleo aumentará el efecto de tensión y mientras mayor sea el desplazamiento de fluido se incrementará el comportamiento compresivo.
- Se observa que los efectos poroelásticos a excepción de la deformación en el eje axial (U_z), dependerán de la variación del radio (r) dentro del núcleo, ya que la deformación en el sentido axial (z) depende más de la fuerza aplicada, mientras que los esfuerzos, deformaciones en el sentido radial, presión de poro y flujo depende de todos los factores que se involucran durante la prueba.
- Durante el desarrollo de las simulaciones se determinó que los tres factores principales que más influyen en el comportamiento poroelástico son:
 - Coeficiente de difusividad
 - Presión de confinamiento
 - Presión de poro en las paredes del cilindro

- El coeficiente de difusividad tiene un efecto muy marcado en el fenómeno poroelástico, ya que éste nos indica la capacidad de desplazarse del fluido en el medio poroso, que tan alto o bajo sea el valor de este coeficiente determina que comportamiento se presente (compresivo o tensión). Mientras más chico sea el valor del coeficiente, los efectos poroelástico son más marcados durante las pruebas.
- La presión de confinamiento tiene un efecto compresivo en el sentido radial y tangencial (r y θ), y de tensión en el sentido axial (z). Lo anterior es debido a que la presión de confinamiento tiene un efecto directo en las paredes circulares del cilindro, lo que induce que los esfuerzos en r y θ empiecen a tener un comportamiento compresivo, además esto provoca un aumento en la presión de poro, lo cual tiene un efecto en contra a la fuerza axial aplicada, lo que resulta que se tengan un efecto de tensión en el sentido axial (z).
- La presión de poro en la superficie del cilindro tiene un efecto de tensión, esto se debe a que la presión de poro en la superficie del cilindro afecta directamente como disminuye o aumente la presión de poro en el cilindro, lo que con lleva a que se presente en mayor o menor medida los efectos de tensión durante el desarrollo de las pruebas.
- Los modelos desarrollados en esta tesis permite predecir el comportamiento de los núcleos durante las pruebas uniaxiales, triaxiales con camisa con condición drenada y no drenada y triaxiales sin camisa. Utilizando estos modelos se podría obtener un escenario inicial de los efectos que tendría el núcleo durante las pruebas y en base a estos resultados diseñar el programa de las pruebas. Con estas mismas expresiones desarrolladas podemos simular el comportamiento del núcleo

bajo las condiciones in-situ y predecir su comportamiento, y con ayuda de un criterio de falla determinar la ventana operacional.

5.1.-Comentarios

En esta tesis se realizó el primer intento de tratar de simular el complejo fenómeno poroelástico que tiene lugar en un núcleo durante las pruebas, al realizar dichos modelos se supuso que la fuerza aplicada durante la prueba es constante, pero se sabe que las pruebas no siempre se realiza de esta manera, hay pruebas que se realizan a ritmo de deformación constante, por lo que se aconseja que en los próximos trabajos sobre el mismo tema se trate de desarrollar los modelos pero ahora suponiendo este modo de realización de prueba. Además de determinar como afectan la temperatura y los cambios en la porosidad.

Bibliografía

- 1.-John Michthell, 2001, Trouble free Drilling, Volumen 1, Drilbert Engineering Inc. Estados Unidos, Capítulo 6.
- 2.-J.C. Jaeger, N. G. W. COOK, 1979, Fundamentals of rock mechanics, 3 edición, London Chapman and Hall, Estados Unidos, Capítulo 4 y 7.
- 3.- Unidad de perforación y mantenimiento de pozos (PEMEX), 2000, Un siglo de la Perforación en México, PEMEX, México, tomo 4.
- 4.-Erling Fjaer, Rune M. Holt, Per horsrud, Arne M. Raaen y Rasmus risnes 1992, Petroleum related rock mechanics, Elsevier, Holanda.
- 5.- M. Zaman, Giancarlo Gioda, John booker, 2000, Modelling in Geomechanics, Wiley, Gran Bretaña, 559 a 591.
- 6.- Abousleiman, Y. Y L. Cui, 1998, Poroelastic solutions in transversely isotropic media for wellbore and cylinder. *Intr. J. Solid Structures*, 35(34-36),: 4905 a 4929.
- 7.- Stehfest, H. 1970. Numerical inversion de Laplace transforms. *Comm. ACM*. 14: 47-49 y 624.
- 8.- Detournay, E. Y A. H. D. Cheng, 1993. Fundamentals of poroelasticity. *Comprehensive Rock Engineering: principles, Practice y Projectos. Volumen II, Analysis and Design Method. C.*, Pergamon Press, 113 a 171.
- 10.- Cryer, C. W. 1963. A comparison of the three dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 16: 401-412.
- 11.-Abouleisman, Y., A.H.D. Cheng, L.Cui, E. Detournay y J.C. Roegiers, 1996. Mandiel's problems revisited. *G' eotechnique*. 46(2), 187-195.

- 12.-Dennis G. Zill, 1997, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Tercera edición, Grupo editorial iberoamérica, Colombia.
- 13.-R. Spiegel, 1974, Transformada de Laplace, 3 edición, Serie Schaum's, México, 42 a 78.
- 14.-G. N. Watson. 1996, A treatise on the theory of Bessel functions, Segunda edición, Estados unidos, 38 a 65.
- 15.-Yudell. L. Luke; 1962, Integral of Bessel Functions, segunda edición, Mcgraw-Hill, Estados unidos, capítulo 1.

Apéndice

A

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN GENERAL PARA EL DESPLAZAMIENTO EN R (U_r)

Solución de la deformación total en función del desplazamiento en r (u_r). Para realizar esto se enumeran a continuación las ecuaciones que describen el fenómeno.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\zeta - \frac{GS}{\eta} \varepsilon \right) = 0, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}, \quad (1.2)$$

donde

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}.$$

1).- Para resolver las ecuaciones anteriores se simplifica la ecuación 1.1 a una expresión mas sencilla, para lo cual primero reagrupo la ecuación como se muestra:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \zeta - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{GS}{\eta} \varepsilon = 0. \quad (1.4)$$

tomando la solución de $\zeta = A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{S}{c}} \right)$ y sus sustituyendo en la ecuación anterior, se puede resolver esta como se muestra a continuación:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right)}_{\text{Primer termino}} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{GS}{\eta} \varepsilon}_{\text{Segundo termino}} = 0. \quad (1.5)$$

retomando la ecuación 3.6

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{s}{c} \zeta. \quad (1.6)$$

y sustituyendo la solución de ζ se obtiene.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \frac{s}{c} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.7)$$

Se puede observar que esta es la solución para el primer termino de la ecuación 1.5 y al sustituirla se puede reducir dicha expresión a:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \varepsilon = \frac{s}{c} \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.8)$$

2).- Se procede a resolver la ecuación anterior, para lo cual se procede resolver la parte homogénea de la ecuación.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \quad (1.9)$$

al observa la ecuación anterior, es muy fácil reconocer que esta es igual a:

$$r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \quad (1.10)$$

dicha ecuación puede ser resuelta por la solución propuesta por Cauchy -Euler, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m(m-1)r^m + mr^m &= 0, \\ r^m(m^2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

de donde las raíces son $r_1=r_2=0$, y la solución de la parte homogénea es igual a:

$$\epsilon = A_3 r^0 + A_4 r^0 \ln(r). \quad (1.12)$$

como se desea encontrar una solución cuando $r \rightarrow 0$, se le asigna el valor de cero a A_4 , lo cual nos conduce a la siguiente solución:

$$\epsilon = A_3. \quad (1.13)$$

Posteriormente se resuelve la parte no homogénea. Para realizar esto, se tiene que tomar en cuenta que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) = \frac{s}{c} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.14)$$

y observando la parte no homogénea de la ecuación 1.8, se puede proponer la siguiente solución particular:

$$\epsilon = B I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.15)$$

al sustituir la solución particular en la ecuación 1.8 se puede obtener:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) B I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \frac{s}{c} \frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.16)$$

y desarrollando las derivadas en la ecuación anterior se puede determinar el valor de la constante B como sigue

$$\frac{s}{c} B I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \frac{s}{c} \frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (1.17)$$

$$B = \frac{\eta}{GS} A_1. \quad (1.18)$$

obteniéndose la siguiente solución particular.

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.19)$$

Y la solución final para la ecuación 1.8 es igual a:

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + A_3. \quad (1.20)$$

3).- Utilizando la solución obtenida en el paso anterior (1.20) se procederá a resolver la ecuación de la deformación en función de u_r , para lograrlo primero se debe sustituir la ecuación 1.3 en 1.2, al realizar esto se llega a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon_{zz}. \quad (1.21)$$

es fácil deducir que esta ecuación puede ser resuelto por factor integrante:

$$\varepsilon - \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}, \quad (1.22)$$

$$e^{\int \frac{1}{r} dr} = r, \quad (1.24)$$

$$r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r = (\varepsilon - \varepsilon_{zz})r, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = (\varepsilon - \varepsilon_{zz})r, \quad (1.26)$$

$$\int^r \partial(ru_r) = \int ((\varepsilon - \varepsilon_{zz})r) dr. \quad (1.27)$$

y sustituyendo la solución de la deformación (1.20) en la ecuación anterior se puede llegar a:

$$\int^r \partial(ru_r) = \int \left(\left(\frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_2 - \varepsilon_{zz} \right) r \right) dr, \quad (1.28)$$

$$\int^r \partial(ru_r) = \int \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) r dr + \int (A_2 - \varepsilon_{zz}) r dr, \quad (1.30)$$

$$ru_r = \frac{\eta}{GS \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) r + \frac{(A_2 - \varepsilon_{zz})r^2}{2}, \quad (1.31)$$

$$u_r = \frac{\eta}{GS \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_2 - \varepsilon_{zz})r}{2}, \quad (1.32)$$

B

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN GENERAL PARA LA PRESIÓN DE PORO
(P)

Esta sección se obtendrá la solución de la variación de la presión en función del desplazamiento en r (u_r). Para lograra este objetivo se utilizarán las siguientes ecuaciones

$$p = M(\zeta - \alpha\varepsilon), \quad (1.33)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}, \quad (1.34)$$

donde

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (1.35)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r},$$

$$u_r = \frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}, \quad (1.36)$$

$$\zeta = A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.37)$$

Primero se sustituye las ecuaciones 1.34 en la 1.35 para obtener:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon_{zz}. \quad (1.38)$$

sustituyendo la solución de u_r

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2} \right) + \frac{\left(\frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2} \right)}{r} + \varepsilon_{zz} \quad (1.39)$$

y utilizando la siguiente propiedad de las derivadas de las funciones de Bessel

$$\frac{\partial}{\partial x} (I_p(Kx)) = K(I_{p-1}(Kx)) - \frac{p}{x} (I_p(Kx)). \quad (1.40)$$

se puede llegar a la siguiente solución

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{A_3}{2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{A_3}{2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \varepsilon_{zz} \quad (1.41)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3 \quad (1.42)$$

Posteriormente se prosigue a sustituir las soluciones de ϵ y ζ y agrupando términos en la ecuación I.33 se llega a:

$$p = MA_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M\alpha \left(\frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3 \right), \quad (I.44)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M\alpha A_3. \quad (I.45)$$

C

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN DEL ESFUERZO EN R (σ_{rr})

Para realizar el objetivo en de este apartado primero se necesitan conocer las ecuaciones con las cuales se necesitan para llevarlo acabo, las cuales a continuación se enumeran.

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \frac{2G}{(1-2\nu)}\varepsilon - \alpha p, \quad (1.46)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (1.47)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3, \quad (1.48)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (1.49)$$

$$u_r = \frac{\eta}{GS \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{rr})r}{2}. \quad (1.50)$$

Primero se divide entre 2G la ecuación 1.46

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \frac{\alpha p}{2G}. \quad (1.51)$$

de la ecuación anterior se puede ver que se tiene tres termino principales (ε_{rr} , ε , p) de los cuales ε_{rr} no sido desarrollo, para lo cual se sustituye la ecuación 1.50 en la 1.49 y desarrollándola como se muestra a continuación :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2} \right], \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{A_3}{2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{2G} = & -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{A_3}{2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{2} \\ & + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3 \right) \\ & - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M\alpha A_3 \right) \end{aligned}, \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{2G} = & -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \left(\frac{\eta}{GS} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\eta}{GS} - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right) \right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right). \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha^2 M}{2G} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2} \end{aligned} \quad (1.55)$$

El termino $A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)$ de la ecuación anterior lo divido en dos partes

$$\left(\underbrace{\frac{\eta}{GS} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\eta}{GS}}_1 - \frac{\alpha}{2G} \underbrace{\left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right)}_2 \right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.56)$$

desarrollándolo y reemplazando las definiciones de las constantes M, η , y S del la segunda parte de la ecuación I.56 se obtiene:

$$\frac{\alpha M}{2G} \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) = \frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{G} \left(\frac{\alpha(1-2v)}{2(1-v)} \right) \left(\frac{2G(1-v)(v_u - v)}{\alpha^2(1-v_u)(1-2v)^2} \right) \right), \quad (I.57)$$

$$\frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(1 - \left(\frac{(v_u - v)}{(1-v_u)(1-2v)} \right) \right), \quad (I.58)$$

$$\frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v_u)(1-2v) - (v_u - v)}{(1-v_u)(1-2v)} \right), \quad (I.59)$$

$$\left(\frac{(1-v)(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \right). \quad (I.60)$$

posteriormente se realiza siguiente el coeficiente

$$\frac{\eta}{GS} = \frac{1}{G} \left(\frac{\alpha(1-2v)}{2(1-v)} \right) \left(\frac{2G(1-v)(v_u - v)}{\alpha^2(1-v_u)(1-2v)^2} \right), \quad (I.61)$$

$$\frac{\eta}{GS} = \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right). \quad (I.62)$$

y sustituyendo este resultado en la primera parte de la ecuación I.56 es posible llegar a:

$$\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right) + \frac{v}{(1-2v)} \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right), \quad (I.63)$$

$$\frac{(v_u - v)(1 - 2v) + v(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)^2} = \frac{(v_u - v)(1 - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)^2}. \quad (1.64)$$

reemplazando el desarrollo de los dos términos (1.64 y 160) en la ecuación 1.56.

$$\left(\frac{(v_u - v)(1 - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)^2} - \frac{(v_u - v)(1 - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)^2} \right) = 0. \quad (1.65)$$

Agrupando y sustituyéndola definición de la constante M en el termino de A_3

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1 - 2v)} + \frac{\alpha^2 M}{2G} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1 - 2v)} + \frac{\alpha^2 \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1 - 2v)(1 - 2v_u)} \right) \right), \quad (1.66)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1 - 2v)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1 - 2v)(1 - 2v_u)} \right) \right) = \left(\frac{(1 - 2v) + 2v}{2(1 - 2v)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1 - 2v)(1 - 2v_u)} \right) \right), \quad (1.67)$$

$$\left(\frac{1}{2(1 - 2v)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1 - 2v)(1 - 2v_u)} \right) \right) = \left(\frac{(1 - 2v_u) + 2(v_u - v)}{2(1 - 2v)(1 - 2v_u)} \right) = \frac{(1 - 2v)}{2(1 - 2v)(1 - 2v_u)}, \quad (1.68)$$

$$\frac{(1 - 2v)}{2(1 - 2v)(1 - 2v_u)} = \frac{1}{2(1 - 2v_u)}. \quad (1.69)$$

cada termino ya simplificado (A_3 (1.69) y $A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)$ (1.65)) es reemplazado en la ecuación 1.55

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (0) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1 - 2v_u)} \right) A_3 - \frac{\epsilon_{zz}}{2}. \quad (1.70)$$

se llega al siguiente resultado:

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\epsilon_{\alpha}}{2}. \quad (1.71)$$

D

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN GENERAL PARA EL ESFUERZO EN θ ($\sigma_{\theta\theta}$)

En este apartado se desarrollara la ecuación que se describe el esfuerzo en θ ($\sigma_{\theta\theta}$) que sufre el cilindro, para lograr se cuenta con las siguientes ecuaciones.

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2Gv}{(1-2v)}\varepsilon - \alpha p, \quad (1.72)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (1.73)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3, \quad (1.74)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad (1.75)$$

$$u_r = \frac{\eta}{GS \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}. \quad (1.76)$$

Primero se determina el termino de $\varepsilon_{\theta\theta}$ en función de u_r , lo cual se logra sustituyendo la ecuación 1.76 en 1.75

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\frac{\eta}{GS \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}}{r} = \frac{\eta}{GSr \sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{A_3}{2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}. \quad (1.77)$$

dividiendo entre $2G$ la ecuación 1.72

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = \epsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \epsilon - \frac{\alpha}{2G} P. \quad (1.78)$$

y reemplazando los términos P (1.73) y $\epsilon_{\theta\theta}$ (1.77) por sus definiciones en la ecuación 1.72

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = & \frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{A_3}{2} - \frac{\epsilon_{zz}}{2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3 \right) \\ & - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3 \right) \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = & \frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \left(\frac{\eta}{GS} \frac{\nu}{(1-2\nu)} - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right) \right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.80) \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha^2}{2G} M \right) A_3 - \frac{\epsilon_{zz}}{2} \end{aligned}$$

Posteriormente se desarrollara el término $A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)$ de la ecuación anterior, para lo cual este será dividido en dos partes.

$$\left(\underbrace{\frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\eta}{GS}}_1 - \underbrace{\frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right)}_2 \right). \quad (1.81)$$

luego se sustituyendo la definición de las constantes η , S y M en la segunda parte

$$\frac{\alpha M}{2G} \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) = \frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{G} \left(\frac{\alpha(1-2v)}{2(1-v)} \right) \left(\frac{2G(1-v)(v_u - v)}{\alpha^2(1-v_u)(1-2v)^2} \right) \right), \quad (1.82)$$

$$\frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(1 - \left(\frac{(v_u - v)}{(1-v_u)(1-2v)} \right) \right), \quad (1.82)$$

$$\frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v_u)(1-2v) - (v_u - v)}{(1-v_u)(1-2v)} \right), \quad (1.83)$$

$$\left(\frac{(1-v)(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \right). \quad (1.84)$$

posteriormente la primera parte puede ser simplificado hasta

$$\frac{v}{(1-2v)} \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right). \quad (1.85)$$

reemplazando cada parte desarrollada en la ecuación 1.81

$$\frac{(v_u - v)v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} - \frac{(v_u - v)(1-v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} = \frac{vv_u - v^2 - v_u + v + vv_u - v^2}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2}, \quad (1.86)$$

$$\frac{2vv_u - 2v^2 - v_u + v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2}. \quad (1.87)$$

y multiplicando por $\frac{-1}{-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{2G}{2G} \right) \left(\frac{(1-v)}{(1-v)} \right)$

$$\frac{2v v_u - 2v^2 - v_u + v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} = \frac{(-2v v_u + 2v^2 + v_u - v)}{(-1)\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{2G}{2G} \right) \left(\frac{(1-v)}{(1-v)} \right), \quad (1.89)$$

$$\frac{(-2v v_u + 2v^2 + v_u - v)}{(-1)\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{2G}{2G} \right) \left(\frac{(1-v)}{(1-v)} \right) = \frac{(v_u - v)(1-2v)}{(-1)\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{2G}{2G} \right) \left(\frac{(1-v)}{(1-v)} \right), \quad (1.90)$$

$$- \frac{(v_u - v)(1-2v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{2G}{2G} \right) \left(\frac{(1-v)}{(1-v)} \right). \quad (1.91)$$

retomando las definiciones de η , S en la ecuación anterior es posible reducir la ecuación anterior a:

$$- \left(\frac{\alpha(1-2v)}{2(1-v)} \right) \left(\frac{2G(v_u - v)(1-v)}{\alpha^2(1-v_u)(1-2v)^2} \right) \left(\frac{1}{G} \right) = - \frac{\eta}{GS}. \quad (1.92)$$

Luego se procede a desarrollar el termino de A_3 como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1-2v)} + \frac{\alpha^2 M}{2G} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1-2v)} + \frac{\alpha^2}{2G} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \right), \quad (1.93)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1-2v)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1-2v)(1-2v_u)} \right) \right) = \left(\frac{(1-2v) + 2v}{2(1-2v)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1-2v)(1-2v_u)} \right) \right), \quad (1.94)$$

$$\left(\frac{1}{2(1-2v)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1-2v)(1-2v_u)} \right) \right) = \left(\frac{(1-2v_u) + 2(v_u - v)}{2(1-2v)(1-2v_u)} \right) = \frac{(1-2v)}{2(1-2v)(1-2v_u)}, \quad (1.95)$$

$$\frac{(1-2v)}{2(1-2v)(1-2v_u)} = \frac{1}{2(1-2v_u)}. \quad (1.96)$$

reemplazando cada termino simplificado (A_3 (1.96) y $A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)$ (1.92)) en la ecuación 1.80 se obtiene finalmente.

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = \frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{\eta}{GS} A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (1.97)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} A_1 \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}. \quad (1.98)$$

E

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN GENERAL PARA EL ESFUERZO EN Z (σ_{zz})

En esta sección se mostrará el procedimiento para obtener la expresión del esfuerzo en z (σ_{zz}) a partir de las siguientes ecuaciones.

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \alpha p, \quad (1.99)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (1.100)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3. \quad (1.101)$$

Primero divido entre 2G la ecuación 1.99

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \frac{\alpha}{2G} p. \quad (1.102)$$

sustituyendo las definiciones de ε (1.101) y p (1.100) en la ecuación anterior y agrupando términos.

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\eta}{GS} A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + A_3 \right) - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3 \right), \quad (1.103)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = \varepsilon_{zz} + \left(\frac{\eta}{GS} \frac{\nu}{(1-2\nu)} - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right) \right) A_1 I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{\nu}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha^2 M}{2G} \right) A_3, \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} &= \frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ &+ \left(\frac{\eta}{GS} \frac{\nu}{(1-2\nu)} - \frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right) \right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.105) \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha^2}{2G} M \right) A_3 - \frac{\varepsilon_z}{2} \end{aligned}$$

Ahora se desarrolla el termino $A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)$ de la ecuación anterior, para llevar esto acabo este termino se divide en dos partes

$$\left(\underbrace{\frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\eta}{GS}}_1 - \underbrace{\frac{\alpha}{2G} \left(M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) \right)}_2 \right) \quad (1.106)$$

sustituyendo el significado de las constantes η , M y S en el segundo termino se obtiene:

$$\frac{\alpha M}{2G} \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) = \frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \right) \left(\frac{2G(1-\nu)(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-\nu_u)(1-2\nu)^2} \right) \right), \quad (1.107)$$

$$\frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) \left(1 - \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \right), \quad (1.108)$$

$$\frac{\alpha}{2G} \left(\frac{2G(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) \left(\frac{(1-\nu_u)(1-2\nu) - (\nu_u - \nu)}{(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right), \quad (1.109)$$

$$\left(\frac{(1-v)(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} \right). \quad (I.110)$$

luego determinamos el siguiente coeficiente

$$\frac{\eta}{GS} = \frac{1}{G} \left(\frac{\alpha(1-2v)}{2(1-v)} \right) \left(\frac{2G(1-v)(v_u - v)}{\alpha^2(1-v_u)(1-2v)^2} \right), \quad (I.111)$$

$$\frac{\eta}{GS} = \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right). \quad (I.112)$$

y este resultado es sustituido en la primera parte de la ecuación I.106

$$\frac{v}{(1-2v)} \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right). \quad (I.113)$$

sustituyendo el desarrollo de cada parte (I.113 y I.110) en la ecuación I.106

$$\frac{(v_u - v)v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} - \frac{(v_u - v)(1-v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} = \frac{vv_u - v^2 - v_u + v + vv_u - v^2}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2}, \quad (I.114)$$

$$\frac{2vv_u - 2v^2 - v_u + v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2}. \quad (I.115)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{-1}{-1}$ se puede llegar a

$$\frac{2vv_u - 2v^2 - v_u + v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} = \frac{-2vv_u + 2v^2 + v_u - v}{(-1)\alpha(1-v_u)(1-2v)^2} = -\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}. \quad (I.116)$$

Desarrollando el término de A_3 .

$$\left(\frac{v}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha^2 M}{2G} \right) = \left(\frac{v}{(1-2\nu)} + \frac{\alpha^2 \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right)}{2G} \right), \quad (1.117)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{(1-2\nu)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) \right) = \left(\frac{v}{(1-2\nu)} + \left(\frac{(v_u - v)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) \right), \quad (1.118)$$

$$\left(\frac{v(1-2\nu_u) + (v_u - v)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) = \left(\frac{(v-2\nu v_u) + (v_u - v)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)} \right) = \frac{(v_u - 2\nu v_u)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)} = \frac{v_u(1-2\nu_u)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)}, \quad (1.119)$$

$$\frac{v_u(1-2\nu_u)}{(1-2\nu)(1-2\nu_u)} = \frac{v_u}{(1-2\nu_u)}. \quad (1.120)$$

Sustituyendo cada el resultado de cada termino ($A_3(1.120)$ y $A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)$ (1.116)) en

la ecuación 1.105 se obtiene:

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = - \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{v_u}{(1-2\nu_u)} \right) A_3 + \varepsilon_{zz}. \quad (1.121)$$

F

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA LAS PRUEBAS UNIAXIALES

En base a las ecuaciones gobernantes del fenómeno poroelástico y con las condiciones de frontera determinar las expresiones de P , q_r , u_r , u_z , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} . Para lograr lo anterior se tiene las siguientes ecuaciones.

$$u_r = -\frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}, \quad (I.122)$$

$$u_z = z\varepsilon_{zz}, \quad (I.123)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M\alpha A_3, \quad (I.124)$$

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} M \left(1 - \frac{\alpha\eta}{GS} \right) A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (I.125)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (I.126)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} A_1 \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (I.127)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = -\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) A_3 + \varepsilon_{zz}. \quad (I.128)$$

Como se observo en las ecuaciones anteriores se tienen tres incógnitas (A_1 , A_2 y ϵ_{zz}), para lo cual se necesitan tres condiciones de frontera, las cuales son:

Condiciones de frontera

$$r=R, \quad P_i=0, \quad (II.1)$$

$$r=R, \quad P_c=0, \quad (II.2)$$

$$\int_0^R r \sigma_{zz} \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \quad (II.3)$$

Solución

Primero se determinaran las constantes, para lo cual se tomara la ecuación I.128 y se multiplicara por $2G$

$$\sigma_{zz} = -2G \left(\frac{v_u - v}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2G \left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)} \right) A_3 + 2G \epsilon_{zz}. \quad (I.129)$$

luego esta es sustituida en la condición de frontera II.3

$$\int_0^R r \left[-2G \left(\frac{v_u - v}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2G \left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)} \right) A_3 + 2G \epsilon_{zz} \right] \partial r = -\frac{F}{2\pi}, \quad (I.130)$$

$$\underbrace{-\frac{2GR}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(\frac{v_u - v}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}_3 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)} \right) A_3}_4 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \epsilon_{zz}}_5 = -\frac{F}{2\pi}. \quad (I.131)$$

multiplicando el tercer termino de la ecuación anterior por $\frac{R}{R}$ y reagrupando

$$-\frac{2GR^2}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2GR^2}{2}\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right)A_3 + \frac{2GR^2}{2}\epsilon_{zz} = -\frac{F}{2\pi}. \quad (1.132)$$

dividiendo entre $2GR^2$

$$-\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{A_3}{2}\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right) + \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{F}{2\pi R^2 2G}. \quad (1.133)$$

posteriormente se despeja ϵ_{zz}

$$\epsilon_{zz} = 2\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right) - \frac{F}{\pi R^2 2G}. \quad (1.134)$$

y considerando que

$$\delta\sigma = \frac{F}{\pi R^2}. \quad (1.135)$$

se obtiene la ecuación de ϵ_{zz} en función de las constantes A_2 y A_3

$$\epsilon_{zz} = 2\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right) - \frac{\delta\sigma}{2G}. \quad (1.136)$$

Ahora se determinara A_3 , para lo cual se utilizara la ecuación I.124 junto con la condición de frontera II.1 como se señala abajo:

$$0 = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (I.137)$$

$$A_3 = \frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\alpha}. \quad (I.138)$$

Ahora se procederá a determinar A_1 , para lo cual se utilizará la ecuación I.126 y se sustituyendo la condición de frontera II.2 se obtiene:

$$-\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\epsilon_{zz}}{2} = 0. \quad (I.139)$$

reemplazando las soluciones de A_3 (I.138) y ϵ_{zz} (I.136) en la ecuación anterior

$$-\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) \frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\alpha} - \frac{1}{2} \left[\frac{2 \left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \frac{A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\alpha} \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) - \frac{\sigma_0}{2G} \right] = 0 \quad (I.140)$$

posteriormente se agrupan términos idénticos y sustituyendo las definiciones de η y S

$$-2\left(\frac{v_u - v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (1.141)$$

$$+\left(\frac{1}{2(1-2v_u)} + \frac{v_u}{2(1-2v_u)}\right)\frac{(1-v)(1-2v_u)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}A_1 I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} = 0$$

$$-2\left(\frac{v_u - v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{(1-v)(1+v_u)}{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}A_1 I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} = 0, \quad (1.142)$$

$$-2\left(\frac{v_u - v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{(1-v)(1+v_u)}{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}A_1 I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} = 0, \quad (1.143)$$

$$\left(\frac{A_1}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)\left(\frac{(1-v)(1+v_u)}{2}I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 2(v_u - v)\frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} = 0. \quad (1.144)$$

y despejando A_1 ,

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} \frac{\alpha(1-v_u)(1-2v)}{\left(\frac{(1-v)(1+v_u)}{2}I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 2(v_u - v)\frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}\right)}, \quad (1.145)$$

$$A_1 = -\frac{\sigma_0}{2G} \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left[(1-\nu)(1+\nu_u)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 4(\nu_u-\nu)_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]} \quad (1.146)$$

si consideramos

$$D = (1-\nu)(1+\nu_u)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 4(\nu_u-\nu)_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.147)$$

el resultado de A_1 puede ser reducido hasta:

$$A_1 = -\frac{\sigma_0}{2G} \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \quad (1.148)$$

Utilizando la definición de A_1 y reemplazando en la ecuación 1.138 se puede deducir una expresión mas sencilla para A_3 como se muestra a continuación:

$$A_3 = \left(\frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(-\frac{\sigma_0}{2G} \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \right) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (1.149)$$

$$A_3 = -\frac{\sigma_0}{2G} \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (1.150)$$

al aplicar las soluciones de A_1 (1.148) y A_3 (1.150) en el término ϵ_{zz} (1.136), es posible reducir este termino como se muestra a continuación:

$$\varepsilon_{zz} = 2 \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) \left(-\frac{\partial \sigma}{2G} \frac{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}{D} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (1.151)$$

$$- \left(-\frac{\partial \sigma}{2G} \frac{(1 - v)(1 - 2v_u)}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)} \right) - \frac{\partial \sigma}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -2 \left(\frac{(v_u - v)}{D} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{\partial \sigma}{2G} \left(\frac{(1 - v)v_u}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) - \frac{\partial \sigma}{2G}, \quad (1.152)$$

$$\varepsilon_{zz} = -2 \left(\frac{(v_u - v)}{D} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{\partial \sigma}{2G} \left(\frac{(1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - D}{D} \right). \quad (1.153)$$

sustituyendo la definición de D

$$\varepsilon_{zz} = -2 \left(\frac{(v_u - v)}{D} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{\partial \sigma}{2G} \left(\frac{(1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1 - v)(1 + v_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}}}{D} \right). \quad (1.154)$$

para obtener finalmente obtener

$$\epsilon_{zz} = 2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\partial \sigma}{2G} \left(\frac{1 - \nu}{D} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.155)$$

Después de determinar las constantes ahora se prosigue a sustituirlas en las funciones u_r , u_z , p , q_r , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} , para encontrar las solución para el problema en especificó a resolver.

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO EN R (u_r)

Sustituyendo la definición de las constantes η , S, A1, A3 y ϵ_{zz} en u_r (1.122)

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(-\frac{\partial \sigma}{2G} \frac{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \frac{r}{2} \left(-\frac{\partial \sigma}{2G} \frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & - \frac{r}{2} \left(-2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \frac{(1 - \nu)v_u}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) - \frac{\partial \sigma}{2G} \right) \end{aligned} \quad (1.156)$$

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{\sigma_0 (v_u - \nu)}{2G} \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left(-\frac{\sigma_0 (1-\nu)(1-2\nu_u)}{2G} \frac{1}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) + \frac{r}{2} \left(2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \tag{1.157}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r}{2} \left(+ \left(\frac{\sigma_0 (1-\nu)\nu_u}{2G} \frac{1}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) - \frac{\sigma_0}{2G} \right) \\
 u_r = & -\frac{\sigma_0 (v_u - \nu)}{2G} \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left(-\frac{\sigma_0 (1-\nu)(1-2\nu_u)}{2G} \frac{1}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) + \frac{r}{2} \left(2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\
 & - \frac{r}{2} \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{(1-\nu)\nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - D}{D} \right) \tag{1.158}
 \end{aligned}$$

multiplicando el primer termino por $\frac{r}{r}$ y sustituyendo la definición de D

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{r \sigma_0 (v_u - \nu)}{2G D} \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{r}{2} \left(-\frac{\sigma_0 (1-\nu)(1-2\nu_u)}{2G D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left(2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\
 & - \frac{r \sigma_0}{2 \cdot 2G} \left[\frac{\left((1-\nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1-\nu)(1+\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)}{D} \right], \quad (1.159)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{r \sigma_0 (v_u - \nu)}{2G D} \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{r \sigma_0}{2 \cdot 2G} \left(\frac{(1-\nu)}{D} - \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r \sigma_0}{2 \cdot 2G} \left(\frac{2(v_u - \nu)}{D} - \frac{4(v_u - \nu)}{D} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.160)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{r \sigma_0 (v_u - \nu)}{2G D} \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{r \sigma_0 (1-\nu) 2\nu_u}{2 \cdot 2G D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & - \frac{r \sigma_0 2(v_u - \nu)}{2 \cdot 2G D} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.161)
 \end{aligned}$$

para obtener finalmente

$$u_r = -\frac{r\sigma_0}{D2G} \left((v_u - \nu) \left(\frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - \nu_u(1-\nu)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right). \quad (1.162)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO EN Z (u_z)

Considerando la ecuación 1.123 y sustituyendo la constante ϵ_{zz} (1.155) se obtiene:

$$u_{zz} = z \left(2 \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{(1-\nu)}{D} \right) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right), \quad (1.163)$$

$$u_{zz} = -\frac{z\sigma_0}{2GD} \left((1-\nu)I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 2(v_u - \nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right). \quad (1.164)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA LA PRESIÓN DE PORO (p)

Tomando la ecuación 1.124 y remplazando las definiciones de las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$p = \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v)(1-2v_u)}{(1-2v)(1-v_u)} \right) \left(-\frac{\sigma_o}{2G} \frac{\alpha(1-v)(1-2v)}{D} \right) I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(-\frac{\sigma_o}{2G} \frac{\alpha(1-v)(1-2v_u)}{D} \right) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \quad (1.165)$$

$$p = - \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \frac{\sigma_o}{2G} \left(\frac{\alpha(1-v)(1-2v_u)}{D} I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{\alpha(1-v)(1-2v_u)}{D} I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \quad (1.166)$$

$$p = - \left(\frac{2G(v_u - v)\alpha(1-v)(1-2v_u)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \frac{\sigma_o}{2GD} \left(I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \quad (1.167)$$

multiplicando la ecuación anterior por $\frac{2}{2}$ y tomando en cuenta la definición de η , se puede reducir la expresión de p a:

$$p = - \frac{\sigma_o (v_u - v)}{D} \frac{1}{2\eta} \left(I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \quad (1.168)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL FLUJO EN R (q_r)

Considerando la ecuación 1.125 y sustituyendo las definiciones de las constantes A_1 , M , η y S .

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v)(1-2v_u)}{(1-2v)(1-v_u)} \right) \left(-\frac{\sigma_0}{2G} \frac{\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.169)$$

multiplicando la ecuación anterior por $\frac{2}{2}$

$$q_r = k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{2(v_u - v)(1-v)}{2\alpha(1-2v)} \right) \left(\frac{\sigma_0}{D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.170)$$

retomando la definición η

$$q_r = k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{(v_u - v)\sigma_0}{2\eta D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.171)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN R (σ_r)

Considerando la ecuación I.126 y reemplazando las constantes A_1, A_3, M, η y S.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2G} = & - \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \right) \left(- \frac{\partial \phi}{2G} \frac{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \right) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & + \left(\frac{1}{2(1 - 2\nu_u)} \right) \left(- \frac{\partial \phi}{2G} \frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \quad (I.172) \\ & - \frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(\frac{\partial \phi}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\partial \phi}{2G} \left(\frac{(1 - \nu)}{D} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \end{aligned}$$

agrupando los términos similares

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2G} = & - \left(- \frac{\partial \phi}{2G} \frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{2G} \left(\frac{(1 - \nu)}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{(1 - \nu)}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \quad (I.173) \\ & - \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(\frac{\partial \phi}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned}$$

finalmente se multiplica la ecuación anterior por 2G para obtener:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_0(v_u - \nu)}{D} \left(\frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.174)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN θ ($\sigma_{\theta\theta}$)

Primero retomaremos la ecuación 1.127 y se remplaza las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = & - \left(\frac{v_u - \nu}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2\nu)} \right) \left(- \frac{\sigma_0 \alpha(1 - v_u)(1 - 2\nu)}{2G D} \right) \left(I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + \left(\frac{1}{2(1 - 2\nu_u)} \right) \left(- \frac{\sigma_0 (1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{2G D} \right) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\ & - \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\sigma_0 (1 - \nu)}{2G D} \right] I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \end{aligned} \quad (1.175)$$

agrupando términos iguales

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} &= \frac{\partial\sigma}{2G} \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial\sigma}{2G} \right) \left(\frac{(1-\nu)}{D} - \frac{(1-\nu)}{D} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ &- \frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(\frac{\partial\sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \end{aligned} \quad (1.176)$$

multiplicando por 2G la ecuación anterior se llega a la siguiente expresión final

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial\sigma(v_u - \nu)}{D} \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.177)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN Z (σ_{zz})

Si en la ecuación 1.128 se sustituyen las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones se obtiene.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}}{2G} &= - \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(- \frac{\partial\sigma}{2G} \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ &+ \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) \left(- \frac{\partial\sigma}{2G} \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{(v_u - \nu)}{D} \right) \left(\frac{\partial\sigma}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{\partial\sigma}{2G} \left(\frac{(1-\nu)}{D} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \end{aligned} \quad (1.178)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{2G} = & \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{\sigma_0}{2G} \left(- \frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{D} \right) \left(I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & + 2 \left(\frac{v_u - \nu}{D} \right) \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \quad (1.179)$$

y multiplicando la ecuación por 2G, se obtiene finalmente la siguiente expresión:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_0}{D} \left((v_u - \nu) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1-\nu)(1+\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.180)$$

G

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA LA PRUEBA TRIAXIAL
CON CAMISA

En base a las ecuaciones que describen el fenómeno poroelástico en un cilindro resolver cuando este es sujeto a una carga axial, una presión de confinamiento (P_c) y una presión de poro (p_i), de donde P_c y p_i son diferentes. De donde las ecuaciones que describen p , q_r , u_r , u_z , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} son las siguientes.

$$u_r = \frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}, \quad (I.181)$$

$$u_z = z\varepsilon_{zz}, \quad (I.182)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (I.183)$$

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} M \left(1 - \frac{\alpha \eta}{GS} \right) A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (I.184)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (I.185)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} A_1 \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (I.186)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = -\left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + \epsilon_{zz}. \quad (1.187)$$

En las ecuaciones anteriores se tienen tres incógnitas (A_1 , A_2 y ϵ_{zz}), para lo cual se necesitan tres condiciones de frontera, para este problema en particular son:

$$r=R, \quad P_i = p_i, \quad (11.4)$$

$$r=R, \quad P_c = P_c, \quad (11.5)$$

$$\int_0^R r \sigma_{zz} \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \quad (11.6)$$

Solución

Primero se determinará la expresión para ϵ_{zz} , lo cual se realiza tomando la ecuación 1.187 y multiplicándola por 2G

$$\sigma_{zz} = -2G \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2G \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + 2G \epsilon_{zz}. \quad (1.188)$$

sustituyendo esta ecuación en la condición de frontera 11.3 y resolviendo la integral

$$\int_0^R r \left[-2G \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2G \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + 2G \epsilon_{zz} \right] \partial r = -\frac{F}{2\pi}, \quad (1.189)$$

$$\underbrace{-\frac{2GR}{\sqrt{s}} \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}}\right)}_3 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3}_4 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \epsilon_{zz}}_5 = -\frac{F}{2\pi}. \quad (1.190)$$

multiplicando el tercer termino por $\frac{R}{R}$

$$-\frac{2GR^2}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2GR^2}{2}\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right)A_3 + \frac{2GR^2}{2}\epsilon_{zz} = -\frac{F}{2\pi}. \quad (1.191)$$

dividiéndola entre $2GR^2$

$$-\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{A_3}{2}\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right) + \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{F}{2\pi R^2 2G}. \quad (1.192)$$

posteriormente se despeja ϵ_{zz}

$$\epsilon_{zz} = 2\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right) - \frac{F}{\pi R^2 2G}. \quad (1.193)$$

considerando que

$$\delta o = \frac{F}{\pi R^2}. \quad (1.194)$$

se obtiene

$$\epsilon_{zz} = 2 \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \frac{A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3 \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) - \frac{\partial \sigma}{2G} \quad (I.195)$$

Ahora se determinará A_3 , para lo cual se utiliza la ecuación I.183 y se sustituye la condición de frontera II.4

$$p_i = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (I.196)$$

$$A_3 = \frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\alpha} - \frac{p_i}{M \alpha} \quad (I.197)$$

Posteriormente se determina A_1 , para realizar esto se utiliza la ecuación I.185 y la condición de frontera II.5

$$-\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{Pc}{2G} \quad (I.198)$$

luego se sustituye las soluciones de A_3 y ϵ_{zz} en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) \left(\frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{pi}{M\alpha}}{\alpha} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & 2 \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \frac{A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & - \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) \left(\frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{pi}{M\alpha}}{\alpha} \right) - \frac{\sigma_o}{2G} \end{aligned} \right) = -\frac{Pc}{2G} \tag{1.199}
 \end{aligned}$$

agrupando términos y sustituyendo las definiciones de η y S

$$\begin{aligned}
 & -2 \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \\
 & + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} + \frac{\nu_u}{2(1-2\nu_u)} \right) \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} A_1 I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)}, \tag{1.200} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} = -\frac{Pc}{2G}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} A_1 I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) = \\
 & \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)} \right) \tag{1.201}
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{A_1}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) = \quad (1.202)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{(2(1-2\nu_u))} \right)$$

despejando A_1

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{(2(1-2\nu_u))} \right) \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left(\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)} \quad (1.203)$$

multiplicando el lado derecho por $\frac{2}{2}$

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{(2(1-2\nu_u))} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left((1-\nu)(1+\nu_u) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)} \quad (1.204)$$

si consideramos

$$D = (1-\nu)(1+\nu_u) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.205)$$

la ecuación puede reducirse a

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D}. \quad (1.206)$$

Como ya conocemos A_1 podemos ahora determinar A_3

$$A_3 = \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (1.207)$$

$$-\frac{pi}{M\alpha}$$

$$A_3 = \frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{pi}{M\alpha} \left(\frac{(1+\nu_u)(1-\nu) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - D}{D} \right). \quad (1.208)$$

sustituyendo la expresión de D se obtiene

$$A_3 = \frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right). \quad (1.209)$$

Como ya se determino A_1 y A_3 se puede determinar ϵ_{zz}

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} = & 2 \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \\
 & - \left(\frac{2(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \right. \\
 & \left. - \frac{pi}{m\alpha D} \left(4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)} \right) \quad (1.210) \\
 & - \frac{\partial \sigma}{2G}
 \end{aligned}$$

de la ecuación anterior es claro ver que se tiene tres términos (σ_0 , π y Pc), de donde el término σ_0 se observa que si se desarrollara obtendríamos el mismo resultado que la ecuación I.155 (ver apéndice F), por lo cual el procedimiento para este término será tomado ya desarrollado y solo se mostrará el desarrollo para los demás términos, por lo cual, se manejará la siguiente simbología:

- modulo1 σ_0 : ecuación I.155
- modulo2 σ_0 : ecuación I.162
- modulo3 σ_0 : ecuación I.168
- modulo4 σ_0 : ecuación I.171
- modulo5 σ_0 : ecuación I.174
- modulo6 σ_0 : ecuación I.177
- modulo7 σ_0 : ecuación I.180

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} = \text{modulol}.\sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} & \left(2(1-\nu)v_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + \frac{pi}{M\alpha D} \left(\frac{2(1+\nu_u)(\nu_u - \nu) - 4(\nu_u - \nu)\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \quad (1.211)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} = \text{modulol}.\sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} & \left(2(1-\nu)v_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + \frac{pi2\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \quad (1.212)$$

Después de determinar las constantes ahora se prosigue a sustituirlo en u_r ,

u_z , p , q_r , ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ y ϵ_{zz} .

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO EN R (u_r)

Sustituyendo la definición de las constantes η , S, A_1 , A_3 y ϵ_{zz} en u_r (1.181)

$$\begin{aligned}
 u_r = & \frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1 + \nu_u)}{2(1 - 2\nu_u)} \right) \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left(\frac{2(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \\
 & - \frac{r}{2} \left(\text{modulol} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1 - \nu)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{pi 2\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.213)
 \end{aligned}$$

multiplicando el primer termino por $\frac{r}{r}$

$$\begin{aligned}
 u_r = & \frac{r(v_u - \nu)}{r\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left[\frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] \\
 & - \frac{r}{2} \left[\text{modulo}1 \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)\nu_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] \\
 & \left. + \frac{pi2\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \quad (1.214)
 \end{aligned}$$

agrupando

$$u_r = \text{modulo}2 \cdot \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{rPc}{2GD} \left[-2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu)(1-2\nu_u) I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\
 & \left. - (1-\nu)\nu_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \\
 & + \frac{rpi}{D} \frac{\alpha(1-2\nu)}{2G} \left[(1+\nu_u) \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} + 2(1-2\nu_u) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu_u) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \quad (1.215)
 \end{aligned}$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN Z (σ_{zz})

Si en la ecuación 1.187 se sustituyen las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones y se multiplica por $2G$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & -2G \left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+v_u)}{(2(1-2v_u))} \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + 2G \left(\frac{v_u}{(1-2v_u)} \right) \left(\frac{2(1-v)(1-2v_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \\ & + 2G \text{ mod } ulol \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \left(2(1-v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + \frac{pi 2\alpha(1-2v)(1-v_u)}{D} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \quad , \quad (1.230)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \text{ mod } ulol \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \left(\begin{aligned} & \left(2(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(1-v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & + 2(1-v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right) \quad (1.231) \\ & + \frac{pi\alpha(1-2v)}{D} \left(\begin{aligned} & - (1+v_u) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 4v_u \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + 2(1-v_u) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

quedando finalmente

$$\sigma_z = \text{modulo } 7 \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) J_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.232)$$

$$+ \frac{pi\alpha(1-2v)}{D} \left(-(1+v_u) J_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(1+v_u) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)$$

H

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA LAS PRUEBAS TRIAXIAL CON CAMISA Y DRENADO

En base a las ecuaciones que describen el fenómeno poroelástico en un cilindro resolver cuando este es sujeto a una carga axial, una presión de confinamiento (P_c) y sin presión de poro ($p_i=0$). De donde las ecuaciones que describen p , q_r , u_r , u_z , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} son las siguientes.

$$u_r = -\frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}, \quad (1.233)$$

$$u_z = z\varepsilon_{zz}, \quad (1.234)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (1.235)$$

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} M \left(1 - \frac{\alpha \eta}{GS} \right) A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (1.236)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (1.237)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} A_1 \left[I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (1.238)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = -\left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)}\right) A_3 + \epsilon_{zz}. \quad (1.239)$$

Como se observo en las ecuaciones anteriores se tienen tres incógnitas (A_1 , A_2 y ϵ_{zz}), para lo cual se necesitan tres condiciones de frontera, las cuales son las siguientes.

$$r=R, \quad P_i=0, \quad (11.7)$$

$$r=R, \quad P_c=P_c, \quad (11.8)$$

$$\int_0^R r \sigma_{zz} \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \quad (11.9)$$

Solución

Primero multiplicamos por $2G$ la ecuación 1.239 y sustituyendo esta ecuación en la condición de frontera 11.6 como se muestra:

$$\sigma_{zz} = -2G \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2G \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)}\right) A_3 + 2G \epsilon_{zz}, \quad (1.240)$$

$$\int_0^R r \left(-2G \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2G \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)}\right) A_3 + 2G \epsilon_{zz}\right) \partial r = -\frac{F}{2\pi}, \quad (1.241)$$

$$\underbrace{-\frac{2GR}{\sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}_3 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)}\right) A_3}_4 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \epsilon_{zz}}_5 = -\frac{F}{2\pi}. \quad (1.242)$$

multiplicando el tercer termino por $\frac{R}{R}$

$$-\frac{2GR^2}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)A_1 I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2GR^2}{2}\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right)A_3 + \frac{2GR^2}{2}\epsilon_{zz} = -\frac{F}{2\pi} \quad (1.243)$$

reagrupando términos idénticos

$$-\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)\frac{A_1 I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{A_3}{2}\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right) + \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{F}{2\pi R^2 2G} \quad (1.244)$$

posteriormente se despeja ϵ_{zz}

$$\epsilon_{zz} = 2\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)\frac{A_1 I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right) - \frac{F}{\pi R^2 2G} \quad (1.245)$$

considerando que

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{F}{\pi R^2} \quad (1.246)$$

se obtiene finalmente.

$$\epsilon_{zz} = 2\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}\right)\frac{A_1 I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3\left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)}\right) - \frac{\bar{\sigma}_0}{2G} \quad (1.247)$$

Ahora se determinara la constante A_3 , para lo cual se utiliza la ecuación I.235 junto con la condición de frontera II.7 de la siguiente manera:

$$0 = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3, \quad (1.248)$$

$$A_3 = \frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\alpha}. \quad (1.249)$$

Luego se determinará la expresión para A_1 , para lo cual se utilizara la ecuación I.239 junto con la condición de frontera II.8

$$-\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-\nu_n)} \right) A_3 - \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{Pc}{2G}. \quad (1.250)$$

sustituyendo las expresiones para A_3 y ϵ_{zz} en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)}\right) \left(\frac{\left(1-\alpha\left(\frac{\eta}{GS}\right)\right) A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\alpha} \right) \\
 & \left. -\frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & 2\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) \frac{A_1 I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)}\right) \left(\frac{\left(1-\alpha\left(\frac{\eta}{GS}\right)\right) A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\alpha} \right) - \frac{\sigma_o}{2G} \right] = -\frac{Pc}{2G} \right. \end{aligned} \tag{1.251}
 \end{aligned}$$

agrupando términos idénticos y remplazando las definiciones de η y S

$$\begin{aligned}
 & -2\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \\
 & + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} + \frac{\nu_u}{2(1-2\nu_u)}\right) \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \tag{1.252} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} = -\frac{Pc}{2G}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) =, \tag{1.253} \\
 & \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G}\right)
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{A_1}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) = \quad (1.254)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right)$$

despejando A_1

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left(\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)} \quad (1.255)$$

multiplicando el lado derecho por $\frac{2}{2}$

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left((1-\nu)(1+\nu_u) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)} \quad (1.256)$$

si consideramos

$$D = (1-\nu)(1+\nu_u) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu)_1 \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.257)$$

obtenemos la siguiente expresión simplificada

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \quad (1.258)$$

Una vez que ya se determino A_1 , ahora puede terminarse A_3 como sigue:

$$A_3 = \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (1.259)$$

$$A_3 = \frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.260)$$

Conociendo A_1 como A_3 , ahora se proceso obtener una expresión reducida para ϵ_{zz} como se muestra:

$$\epsilon_{zz} = 2 \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \left(\frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) - \frac{\partial \sigma_0}{2G} \quad (1.261)$$

de la ecuación anterior es claro ver que se tiene tres términos (σ_0 , pi y Pc), de donde el termino σ_0 se observa que si se desarrollara obtendríamos el mismo resultado que la ecuación 1.155 (ver apéndice F), por lo cual el procedimiento para este termino será tomado ya desarrollo y solo se mostrará el desarrollo para los demás términos, por lo cual, se manejará la siguiente simbología:

modulo1 σ_0 : ecuación 1.155

modulo2 σ_0 : ecuación 1.162

modulo3 σ_0 : ecuación 1.168

modulo4 σ_0 : ecuación 1.171

modulo5 σ_0 : ecuación I.174

modulo6 σ_0 : ecuación I.177

modulo7 σ_0 : ecuación I.180

$$\varepsilon_{zz} = \text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \quad (1.262)$$

$$\varepsilon_{zz} = \text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right). \quad (1.263)$$

Después de determinar las constantes ahora se prosigue a sustituirlo en las ecuaciones de $u_r, u_z, p, q_r, \varepsilon_r, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$.

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO EN R (u_r)

Sustituyendo la definición de las constantes η, S, A_1, A_3 y ε_{zz} en u_r (1.233)

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \frac{r}{2} \left(\frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & - \frac{r}{2} \left(\text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.264)$$

multiplicando el primer termino por $\frac{r}{r}$

$$\begin{aligned}
 u_r = & \frac{r(v_u - v)}{r\alpha(1-v_u)(1-2v)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left(\frac{2(1-v)(1-2v_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial o}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\
 & - \frac{r}{2} \left[\text{modulo} 1 \cdot \sigma_o + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-v)v_u I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.265}$$

agrupando términos similares

$$\begin{aligned}
 u_r = & \text{modulo} 2 \cdot \sigma_o \\
 & + \frac{rPc}{2GD} \left(\begin{aligned} & -2(v_u - v) \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-v)(1-2v_u) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - (1-v)v_u I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{1.266}$$

$$\begin{aligned}
 u_r = & \text{modulo} 2 \cdot \sigma_o \\
 & + \frac{rPc}{2GD} \left(-2(v_u - v) \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-v)(1-v_u) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.267}$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO EN Z (u_z)

Para lo cual se utilizar la ecuación 1.234 y se le sustituirá la expresión de la constante ϵ_{zz} para obtener:

$$u_z = Z \text{ modulo } 1 \cdot \sigma_0 + z \left[\frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] \quad (1.268)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA LA PRESION DE PORO (P)

Tomando la ecuación 1.235 y remplazando las definiciones de las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$P = \left(\frac{2G(v_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-\nu)(1-2v_u)}{(1-2\nu)(1-v_u)} \right) * \\ * \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2\nu)}{D} \right) I_o \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \quad (1.269) \\ - \left(\frac{2G(v_u - \nu)\alpha}{\alpha^2(1-2\nu)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{2(1-\nu)(1-2v_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right)$$

reagrupando y tomando en cuenta la definición de η se obtiene

$$p = \text{modulo } 3 \cdot \sigma_0 + \frac{2Pc}{\alpha D} \frac{(v_u - \nu)(1-\nu)}{(1-2\nu)} \left(I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_o \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right), \quad (1.270)$$

$$p = \text{modulo } 3 \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \frac{(v_u - \nu)}{\eta} \left(I_o \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_o \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right), \quad (1.271)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL FLUJO EN R (q_r)

Considerando la ecuación 1.236 y sustituyendo las definiciones de las constantes A_1 , M , η y S .

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v)(1-2v_u)}{(1-2v)(1-v_u)} \right) * \quad (1.272)$$

$$* \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)$$

reagrupando y considerando la definición η se obtiene finalmente

$$q_r = \text{modulo } 4 \cdot \sigma_0 + k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{Pc}{D} \left(\frac{2(v_u - v)(1-v)}{\alpha(1-2v)} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (1.273)$$

$$q_r = \text{modulo } 4 \cdot \sigma_0 + k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{Pc}{D} \left(\frac{(v_u - v)}{\eta} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (1.274)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN R (σ_{rr})

Considerando la ecuación 1.237 y reemplazando las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{2G} = & - \left(\frac{(v_u - \bar{v})}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}{D} \right) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & + \left(\frac{1}{2(1 - 2v_u)} \right) \left(\frac{2(1 - v)(1 - 2v_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left[\text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.275)$$

multiplicando la ecuación anterior por $2G$ y reagrupando términos

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \text{modulo5} \cdot \sigma_0 \\ & + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - v) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \end{aligned} \quad (1.276)$$

$$\sigma_{rr} = \text{modulo5} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \left(\begin{aligned} & 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & - (1 - v)(1 + v_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right). \quad (1.277)$$

obteniendo finalmente

$$\sigma_{rr} = \text{modulo } 5. \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \left(\begin{array}{l} 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{array} \right). \quad (1.278)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN θ ($\sigma_{\theta\theta}$)

Primero retomaremos la ecuación 1.238 y reemplazando las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = & - \left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \right) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + \left(\frac{1}{2(1 - 2\nu_u)} \right) \left(\frac{2(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\text{modulo } 1. \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1 - \nu)\nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.279)$$

reagrupando termino idénticos y multiplicando por 2G

$$\sigma_{\theta\theta} = \text{modulo } 6. \sigma_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left[\begin{array}{l} 2(v_u - v) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1-v) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ - (1-v) v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{array} \right]. \quad (1.280)$$

finalmente

$$\sigma_{\theta\theta} = \text{modulo } 6. \sigma_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left[\begin{array}{l} 2(v_u - v) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ - (1-v)(1+v_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{array} \right]. \quad (1.281)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN Z (σ_{zz})

Si en la ecuación I.239 se sustituyen las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}}{2G} = & - \left(\frac{v_u - v}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}{D} \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \left(\frac{v_u}{(1 - 2v_u)} \right) \left(\frac{2(1 - v)(1 - 2v_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \quad (1.282) \\ & + \text{modulo} \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \end{aligned}$$

agrupando y multiplicando por 2G

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = \text{modulo} \sigma_0 & + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\ & + \frac{Pc}{D} \left(2(1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.283) \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \text{modulo} \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \left(2(v_u - v) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.284)$$

I

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA LAS PRUEBAS TRIAXIAL SIN CAMISA

En base a las ecuaciones que describen el fenómeno poroelástico en un cilindro resolver cuando este es sujeto a una carga axial, una presión de confinamiento (P_c) y presión de poro (π), cuando π y P_c son iguales. Las ecuaciones que describen p , q_r , u_r , u_z , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y σ_{zz} son las siguientes.

$$u_r = \frac{\eta}{GS\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{(A_3 - \varepsilon_{zz})r}{2}, \quad (1.285)$$

$$u_z = z\varepsilon_{zz}, \quad (1.286)$$

$$p = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M\alpha A_3, \quad (1.287)$$

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} M \left(1 - \frac{\alpha\eta}{GS} \right) A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (1.288)$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = -\frac{\eta}{GSr\sqrt{\frac{s}{c}}} A_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (1.289)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = -\frac{\eta}{GS} A_1 \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) A_3 - \frac{\varepsilon_{zz}}{2}, \quad (1.290)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2G} = -\left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + \epsilon_{zz}. \quad (1.291)$$

En base a las ecuaciones anteriores se puede observar que se tienen tres incógnitas (A_1 , A_2 y ϵ_{zz}), para lo cual se necesitan tres condiciones de frontera, las cuales son:

$$r=R, \quad P_i=P_c, \quad (11.10)$$

$$r=R, \quad P_c=P_c, \quad (11.11)$$

$$\int_0^R r \sigma_{zz} \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \quad (11.12)$$

Solución

Primero se toma la ecuación 1.291 y multiplicándola por 2G

$$\sigma_{zz} = -2G \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2G \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + 2G \epsilon_{zz}. \quad (1.292)$$

sustituyendo el resultado anterior en la condición de frontera 11.12 se puede obtener:

$$\int_0^R r \left(-2G \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 2G \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + 2G \epsilon_{zz} \right) \partial r = -\frac{F}{2\pi}. \quad (1.293)$$

$$\underbrace{-\frac{2GR}{\sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}\right) A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}}\right)}_3 + \underbrace{\frac{2GR^2}{2} \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)}\right) A_3 + \frac{2GR^2}{2} \epsilon_{zz}}_4 = \underbrace{-\frac{F}{2\pi}}_5. \quad (1.294)$$

multiplicando el tercer termino por $\frac{R}{R}$

$$-\frac{2GR^2}{R\sqrt{\frac{s}{c}}}\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2GR^2}{2}\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right)A_3 + \frac{2GR^2}{2}\epsilon_{zz} = -\frac{F}{2\pi}. \quad (1.295)$$

reagrupando

$$-\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{A_3}{2}\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right) + \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{F}{2\pi R^2 2G}. \quad (1.296)$$

y despejando ϵ_{zz}

$$\epsilon_{zz} = 2\left(\frac{(v_u - v)}{\alpha(1-v_u)(1-2v)}\right)\frac{A_1I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3\left(\frac{v_u}{(1-2v_u)}\right) - \frac{F}{\pi R^2 2G}. \quad (1.297)$$

considerando que

$$\sigma_o = \frac{F}{\pi R^2}. \quad (1.298)$$

se obtiene

$$\epsilon_{zz} = 2 \left(\frac{v_u - v}{\alpha(1-v_u)(1-2v)} \right) \frac{A_1 I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - A_3 \left(\frac{v_u}{(1-2v_u)} \right) - \frac{\sigma_0}{2G}. \quad (1.299)$$

Para determinar A_3 se utiliza la ecuación 1.287 y se sustituye la condición de frontera II.10

$$Pc = M \left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - M \alpha A_3. \quad (1.300)$$

y despejando A_3

$$A_3 = \frac{\left(1 - \alpha \left(\frac{\eta}{GS} \right) \right) A_1 I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\alpha} - \frac{Pc}{M\alpha}. \quad (1.301)$$

Luego se determinará A_1 , para lo cual se utiliza la ecuación 1.289 junto con la condición de frontera II.11 se obtiene:

$$-\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-v_u)} \right) A_3 - \frac{\epsilon_{zz}}{2} = -\frac{Pc}{2G}. \quad (1.302)$$

sustituyendo las soluciones para A_3 y ϵ_{zz} en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{GS} A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)}\right) \left(\frac{\left(1-\alpha\left(\frac{\eta}{GS}\right)\right) A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\alpha} - \frac{Pc}{M\alpha} \right) \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & 2\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) \frac{A_1 I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & - \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)}\right) \left(\frac{\left(1-\alpha\left(\frac{\eta}{GS}\right)\right) A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\alpha} - \frac{Pc}{M\alpha} \right) - \frac{\delta o}{2G} \end{aligned} \right) = -\frac{Pc}{2G} \quad (1.303)
 \end{aligned}$$

reagrupando términos idénticos y sustituyendo las definiciones de η , S y M

$$\begin{aligned}
 & -2\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \\
 & + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} + \frac{\nu_u}{2(1-2\nu_u)}\right) \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{Pc}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)}, \quad (1.304) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\delta o}{2G} = -\frac{Pc}{2G}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\left(\frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}\right) A_1 \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} A_1 I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \quad (1.305) \\
 & \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta o}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{Pc}{M\alpha} \frac{(1+\nu_u)}{2(1-2\nu_u)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{A_1}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left[\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] = \quad (1.306)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{Pc\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u)}{2G(\nu_u - \nu)2} \right)$$

$$\left(\frac{A_1}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left[\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] = \quad (1.307)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2((\nu_u - \nu))}{2((\nu_u - \nu))} \right) \right)$$

despejando A_1

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} - \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(\nu_u - \nu)}{2(\nu_u - \nu)} \right) \right) \frac{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left[\frac{(1-\nu)(1+\nu_u)}{2} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right]} \quad (1.308)$$

multiplicando el lado derecho por $\frac{2}{2}$

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2((V_u - V))}{2((V_u - V))} \right) \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{\left((1-\nu)(1+\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu) I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \frac{R \sqrt{\frac{s}{c}}}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} } \quad (1.309)$$

si consideramos

$$D = (1-\nu)(1+\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(\nu_u - \nu) I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \frac{R \sqrt{\frac{s}{c}}}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.310)$$

la ecuación finalmente queda reducida a:

$$A_1 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2((V_u - V))}{2((V_u - V))} \right) \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \quad (1.311)$$

Ahora que se conoce A_1 se procede a determinar A_3 como se muestra a continuación:

$$A_3 = \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2((V_u - V))}{2((V_u - V))} \right) \right) * \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{Pc}{M\alpha} \quad (1.312)$$

$$A_3 = \frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{Pc}{2G} \frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} * \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2((V_u - V))}{((V_u - V))} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{Pc \alpha^2 (1-2\nu_u)(1-2\nu)}{\alpha 2G((V_u - V))} \quad (1.313)$$

$$A_3 = \frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{Pc}{2G(V_u - V)D} \left(\begin{array}{l} (1-\nu)(1-2\nu_u)\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ -\alpha(1-2\nu_u)(1-2\nu)D \end{array} \right) \quad (1.314)$$

Sustituyendo la definición D y desarrollando el término de Pc se obtiene

$$(1-\nu)(1-2\nu_u)\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2(V_u - V)(1-\nu)(1-2\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \alpha(1-2\nu_u)(1-2\nu)(1-\nu)(1+\nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \alpha(1-2\nu_u)(1-2\nu)4(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \quad (1.315)$$

$$2(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u) \left(- (1-\nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1-2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.316)$$

sustituyendo el termino de Pc en A₃, se obtiene finalmente.

$$\begin{aligned}
 A_3 = & -\frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{Pc2(1-2\nu_u)}{2GD} \left[-(1-\nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1-2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right].
 \end{aligned} \tag{1.317}$$

Como ya se conoce A_1 como A_3 , ahora se procede a obtener una expresión reducida para ϵ_{zz} como se muestra:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{zz} = & 2 \left(\frac{(\nu_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V)}{2(V_u - V)} \right) \right) * \\
 & \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \\
 & - \left[-\frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{Pc2(1-2\nu_u)}{2GD} \left[-(1-\nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1-2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right] \right] \left(\frac{\nu_u}{(1-2\nu_u)} \right) \\
 & - \frac{\partial \sigma}{2G}
 \end{aligned} \tag{1.318}$$

de la ecuación anterior es claro ver que se tiene tres términos (σ_0 , π y Pc), de donde el término σ_0 se observa que si se desarrollara obtendríamos el mismo resultado que la ecuación 1.155 (ver apéndice F). En adelante el procedimiento para el término σ_0 será tomado ya desarrollo y solo se mostrará el desarrollo para los demás términos, para lo cual, se maneja la siguiente simbología:

modulo1 σ_0 : ecuación 1.155

modulo2 σ_0 : ecuación I.162

modulo3 σ_0 : ecuación I.168

modulo4 σ_0 : ecuación I.171

modulo5 σ_0 : ecuación I.174

modulo6 σ_0 : ecuación I.177

modulo7 σ_0 : ecuación I.180

$$\varepsilon_{zz} = \text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(\begin{aligned} & \left(((\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V))) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + (1-\nu) \nu_u I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 2\alpha(1-2\nu) \nu_u \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right), \quad (I.319)$$

$$\varepsilon_{zz} = \text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(\begin{aligned} & (1-\nu) \nu_u I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + ((\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2\alpha(1-2\nu) \nu_u - 2(V_u - V))) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right), \quad (I.320)$$

$$\varepsilon_{zz} = \text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(\begin{aligned} & (1-\nu) \nu_u I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right). \quad (I.321)$$

Después de determinar las constantes ahora se prosigue a sustituirlo en las ecuaciones de u_r , u_z , p , q_r , ϵ_r , $\epsilon_{\theta\theta}$, ϵ_{zz} .

DETERMINACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO EN R (u_r)

Sustituyendo la definición de las constantes η , S, A1, A3 y ϵ_{zz} en u_r (1.285)

$$\begin{aligned}
 u_r = & \frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u) - 2(V_u - V)}{2(V_u - V)} \right) \right) * \\
 & * \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & + \frac{r}{2} \left[-\frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(\frac{\partial \sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{Pc2(1 - 2\nu_u)}{2GD} \right. \\
 & \left. \begin{matrix} - (1 - \nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ + 2\alpha(1 - 2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{matrix} \right] \\
 & - \frac{r}{2} \left[\text{modulo } 1 \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2G} \frac{2}{D} \begin{matrix} (1 - \nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ + (\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{matrix} \right] \quad (1.322)
 \end{aligned}$$

multiplicando el primer termino por $\frac{r}{r}$

$$\begin{aligned}
 u_r = & \frac{r(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u) - 2(V_u - V)}{2(V_u - V)} \right) \right) * \\
 & * \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\
 & + \frac{r}{2} \left[-\frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{Pc 2(1 - 2\nu_u)}{2GD} \left(-(1 - \nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1 - 2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] \\
 & - \frac{r}{2} \left[\text{modulo} 1 \cdot \sigma_0 \right. \\
 & \left. + \frac{Pc}{2GD} \frac{2}{D} \left((1 - \nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right]. \tag{1.323}
 \end{aligned}$$

agrupando términos idénticos

$$\begin{aligned}
 u_r = & \text{modulo} 2 \cdot \sigma_0 \\
 & \left(\frac{(\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u) - 2(V_u - V))}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right. \\
 & + \frac{rPc}{2GD} \left. + (1 - 2\nu_u) \left(-(1 - \nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1 - 2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right. \\
 & \left. - (1 - \nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \tag{1.324}
 \end{aligned}$$

$$u_r = \text{modulo}2 \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{rPc}{2GD} \left(\begin{aligned} & (\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V))_1 \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} + (1-\nu)(-(1-2\nu_u) - \nu_u) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\ & + (\alpha(1-2\nu)(2(1-2\nu_u) - (1-\nu_u)) + 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right) \quad (1.325)$$

$$u_r = \text{modulo}2 \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{Pcr}{2GD} \left(\begin{aligned} & (\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V))_1 \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu)(1-\nu_u) I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\ & + (\alpha(1-2\nu)(1-3\nu_u) + 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right) \quad (1.326)$$

DETERMINACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO EN Z (u_z)

Para lo cual se utilizar la ecuación 1.286 y se le sustituirá la expresión de la constante ϵ_{zz} para obtener:

$$u_{zz} = Z \text{ modulo}1 \cdot \sigma_0$$

$$+ z \left(\frac{Pc}{2G} \frac{2}{D} \left((1-\nu)\nu_u I_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + (\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \quad (1.327)$$

DESARROLLO PARA LA PRESIÓN DE PORO (P)

Tomando la ecuación 1.287 y remplazando las definiciones de las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$\begin{aligned}
 p = & \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v)(1-2v_u)}{(1-2v)(1-v_u)} \right) * \\
 & * \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2v)(1+v_u) - 2(V_u - V)}{2(V_u - V)} \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} \right) I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & - \left(\frac{2G(v_u - v)\alpha}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) * \\
 & * \left(-\frac{(1-v)(1-2v_u)}{D} \left(\frac{\partial \sigma}{2G} \right) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{Pc2(1-2v_u)}{2GD} \left(-(1-v) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1-2v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{1.328}$$

reagrupando términos se tiene finalmente:

$$\begin{aligned}
 p = & \text{modulo3} \cdot \partial \sigma \\
 & + \left(\frac{Pc}{D\alpha(1-2v)} \right) \left(\begin{aligned} & \left(\alpha(1-2v)(1+v_u)(1-v) - 2(V_u - V)(1-v) \right) I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + 2(v_u - v)(1-v) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - v)\alpha(1-2v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{1.329}$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL FLUJO EN R (q_r)

Considerando la ecuación 1.288 y sustituyendo las definiciones de las constantes A_1 , M , η y S .

$$q_r = -k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v)(1-2v_u)}{(1-2v)(1-v_u)} \right) * \left(\left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2v)(1+v_u) - 2((V_u - V))}{2((V_u - V))} \right) \right) \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \quad (1.330)$$

agrupando términos

$$q_r = \text{modulo4} \cdot \sigma_0 - k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{(1-v)Pc}{\alpha(1-2v)D} \right) (\alpha(1-2v)(1+v_u) - 2((V_u - V))) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \quad (1.331)$$

multiplicando el termino de Pc por $\frac{2}{2}$ y retomando la definición de η , se llega:

$$q_r = \text{modulo4} \cdot \sigma_0 - k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{Pc}{2\eta D} \right) (\alpha(1-2v)(1+v_u) - 2((V_u - V))) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \quad (1.332)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN R (σ_{rr})

Considerando la ecuación 1.289 y reemplazando las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{2G} = & - \left(\frac{v_u - v}{\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)} \right) * \\ & * \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1 - 2v)(1 + v_u) - 2((V_u - V))}{2((V_u - V))} \right) \right) \frac{2\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}{D} \right) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \\ & + \left(\frac{1}{2(1 - 2v_u)} \right) \left(-\frac{(1 - v)(1 - 2v_u)}{D} \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{Pc 2(1 - 2v_u)}{2GD} \left(-(1 - v) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1 - 2v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\text{modulol} \cdot \sigma_0 \right) \left(\frac{Pc}{2G} \frac{2}{D} \left((1 - v)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1 - 2v)(1 - v_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.333)$$

reagrupando términos idénticos y multiplicándolo por 2G

$$\sigma_{\sigma} = \text{modulo5} \cdot \sigma_0$$

$$\frac{Pc}{D} \left[\begin{array}{l} -(\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} - (1-\nu)I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - (1-\nu)\nu_u I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\ + 2\alpha(1-2\nu) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - (\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{array} \right], \quad (1.334)$$

$$\sigma_{\sigma} = \text{modulo5} \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left[\begin{array}{l} -(\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \\ - (1-\nu)(1+V_u)I_o\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + (\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) + 2(V_u - V)) \frac{I_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{array} \right]. \quad (1.335)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN θ ($\sigma_{\theta\theta}$)

Primero retomaremos la ecuación 1.290 y se reemplaza las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2G} = & \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V)}{2(V_u - V)} \right) \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \right) * \\ & * \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) \left(-\frac{(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{Pc 2(1-2\nu_u)}{2GD} \left(-(1-\nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1-2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{modulol} \cdot \sigma_0}{2G D} \left((1-\nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \quad . \quad (1.336) \end{aligned}$$

multiplicando por 2G y agrupando términos idénticos, se obtiene finalmente:

$$\sigma_{\theta\theta} = \text{modulo6} \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left[\begin{aligned} & -(\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V)) \left(I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1-\nu)I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1-\nu)\nu_u I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + 2\alpha(1-2\nu) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} - (\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right], \quad (1.337)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \text{modulo6} \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left[\begin{aligned} & -(\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 2(V_u - V)) \left(I_0 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & - (1-\nu)(1+V_u)I_0 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) + 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right]. \quad (1.338)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN Z (σ_{zz})

Si en la ecuación I.291 se sustituyen las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}}{2G} = & \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \right) * \\ & * \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} + \frac{Pc}{2G} \left(\frac{\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u) - 2((V_u - V))}{2((V_u - V))} \right) \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \right) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \left(\frac{\nu_u}{(1 - 2\nu_u)} \right) \left[-\frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(\frac{\sigma_0}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{Pc2(1 - 2\nu_u)}{2GD} \left(-(1 - \nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2\alpha(1 - 2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] \\ & + \text{modulo1} \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2G} \frac{2}{D} \left((1 - \nu)\nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right). \end{aligned} \quad (I.339)$$

agrupando término y multiplicando por 2G se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \text{modulo7} \cdot \sigma \\ & \left(\begin{aligned} & (-\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u) + 2(V_u - V)) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1 - \nu)2\nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(1 - \nu)\nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & + \frac{Pc}{D} \left(\begin{aligned} & + 2\alpha2\nu_u(1 - 2\nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} + 2(\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u) - 2(V_u - V)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right), \end{aligned} \quad (I.340)$$

$$\sigma_{..} = \text{modulo } 7 \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{Pc}{D} \left((-\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) + 2(\nu_u - \nu)) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + (2\alpha(1-2\nu)(1+\nu_u) - 4(\nu_u - \nu)) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right). \quad (1.341)$$

Nomenclatura

A	Área (pulg ² , m ²)
ΔL	Cambio de longitud (m, pulg)
$\Delta \phi$	Cambio de porosidad (adimensional)
ΔV_f	Cambio del volumen del fluido del poro (mm ³ , mililitros)
ΔV_f^1	Cambio del volumen del fluido del poro por compresibilidad (mm ³ , mililitros)
ΔV_f^2	Cambio del volumen del fluido del poro por pérdida de fluido (mm ³ , mililitros)
ΔV_p	Cambio de volumen del poro (mm ³ , mililitros)
ΔV_s	Cambio del volumen del sólido (mm ³ , mililitros)
ΔV	Cambio del volumen total (mm ³ , mililitros)
W	Carga (newton/m ²)
α	Coefficiente de Biot (adimensional)
Pr	Carga de compresión (Newton)
c	Coefficiente de difusividad (m ² /s)
η	Coefficiente de esfuerzo poroelástico (adimensional)
B	Coefficiente de Skempton (adimensional)
S	Constante de almacenamiento (m ² /Newton, 1 /pascal)
D	Diámetro del espécimen (metro)
δ	Delta de Kronecker (adimensional)
ϵ, e	Deformación (adimensional)
ϵ_x	Deformación en x (adimensional)
ϵ_y	Deformación en y (adimensional)
ϵ_z	Deformación en z (adimensional)
ϵ_v	Deformación volumétrica (adimensional)
ϵ_r	Deformación radial (adimensional)
$\epsilon_{\theta\theta}$	Deformación tangencial (adimensional)
ϵ_{zz}	Deformación axial (adimensional)
ϵ_{hor}	Deformación horizontal (adimensional)
ϵ_{ver}	Deformación vertical (adimensional)

γ	Deformación de corte (adimensional)
γ_{xy}	Deformación de corte en xy (adimensional)
γ_{zy}	Deformación de corte en zy (adimensional)
γ_{zx}	Deformación de corte en zx (adimensional)
$\gamma_{z\theta}$	Deformación de corte en z θ (adimensional)
$\gamma_{\theta x}$	Deformación de corte en θ x (adimensional)
u	Desplazamiento (metros)
u_r	Desplazamiento radial (metros)
u_z	Desplazamiento axial (metros)
z	Desplazamiento en z (metros, pulgadas)
σ_p	Esfuerzo hidrostático (Newton/ m ² , pascal)
σ_x	Esfuerzo en el eje x (Newton/ m ² , pascal)
σ_y	Esfuerzo en el eje y (Newton/ m ² , pascal)
σ_z	Esfuerzo en el eje z (Newton/ m ² , pascal)
σ_{rr}	Esfuerzo radial (Newton/ m ² , pascal)
$\sigma_{\theta\theta}$	Esfuerzo tangencial (Newton/ m ² , pascal)
σ_{zz}	Esfuerzo axial (Newton/ m ² , pascal)
$\sigma_{\theta r}$	Esfuerzo de corte en θ y r (Newton/ m ² , pascal)
$\sigma_{\theta z}$	Esfuerzo de corte en θ y z (Newton/ m ² , pascal)
σ	Esfuerzo (Newton/ m ² , pascal)
σ_o	Esfuerzo aplicada axialmente (Newton/ m ² , pascal)
τ	Esfuerzo de corte (Newton/ m ² , pascal)
σ	Esfuerzo (Newton/ m ² , Pascal)
T	Espesor de la muestra (metro)
q	Flujo (m/s)
q_r	Flujo radial (m/s)
q_z	Flujo axial (m/s)
F	Fuerza (Newton)
f_i	Fuerza de cuerpo por unidad de volumen del material (Newton/m ³)
Rc	Fuerza de compresión bajo una presión de confinamiento (Newton)
I_0	Función de Bessel de orden cero

I_1	Función de Bessel de primer orden
K_0	Función de Bessel Modificada de orden cero
q	Gasto (mm^3/seg , $\text{mililitros}/\text{seg}$)
L	Longitud (m, pulg)
L	Longitud característica (Metro, pulgadas)
M	Modulo de Biot (Newton/ m^2 , pascal)
G	Modulo de corte (Newton/ m^2 , pascal)
λ	Modulo de Lamé (Newton/ m^2 , pascal)
ν	Modulo de Poissón (adimensional)
ν_u	Modulo de Poissón drenado (adimensional)
E	Modulo de Young (Newton/ m^2 , pascal)
E_v	Modulo de Young drenado (Newton/ m^2 , pascal)
K	Modulo volumétrico o del material (Newton/ m^2 , pascal)
K_{fr}	Modulo volumétrico del armazón sólido (Newton/ m^2 , pascal)
K_f	Modulo volumétrico del fluido (Newton/ m^2 , pascal)
K_p	Modulo volumétrico del poro (Newton/ m^2 , pascal)
K_s	Modulo volumétrico del sólido (Newton/ m^2 , pascal)
K_v	Módulo volumétrico no drenado (Newton/ m^2 , pascal)
κ	Permeabilidad intrínseca (Darcy/ Centipoises)
K	Permeabilidad (Darcy)
π	Pi (adimensional)
ϕ	Porosidad (adimensional)
P	Presión (Newton/ m^2 , pascal)
P_c	Presión de confinamiento (Newton/ m^2 , pascal)
P_i, P_p	Presión de poro (Newton/ m^2 , pascal)
p_i	Presión de poro en las paredes del núcleo (Newton/ m^2 , pascal)
P_s	Presión en el sólido (Newton/ m^2 , pascal)
r	Radio (metro, pulgadas)
R	Radio del núcleo (metro, pulgada)
T_o	Resistencia a la tensión(Newton/ m^2 , Pascal)
t	Tiempo (segundo)
s	Tiempo en el espacio de Laplace (1/segundo)
t_r	Tiempo de drene (segundo)

ξ	Variación de los fluidos contenidos en los poros (adimensional)
V_p	Volumen del poro (mm^3 , mililitros)
V_s	Volumen del sólido (mm^3 , mililitros)
V	Volumen total (mm^3 , mililitros)
μ	Viscosidad dinámica (Centipoises)
γ	Velocidad de fluido inyectado (metro/seg)
ν_1	Velocidad de carga para asegurar el drene (Newton/ segundo)
ξ	Variación del fluido en el espacio de Laplace (m^3/seg , mililitros/seg)
ϕ	Variable (adimensional)

$$u_r = \text{modulo} 2 \cdot \sigma_0$$

$$+ \frac{rPc}{2GD} \left(-2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - \nu)(1 - \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.216)$$

$$+ \frac{rpi \alpha(1 - 2\nu)}{D \quad 2G} \left((1 + \nu_u) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} + (1 - 3\nu_u) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO EN Z (u_z)

Utilizando la ecuación 1.182 y sustituyendo la constante ϵ_{zz} se puede obtener:

$$u_z = z \left(\begin{array}{l} \text{modulo} 1 \cdot \sigma_0 \\ + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1 - \nu)\nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ + \frac{pi2\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{array} \right) \quad (1.217)$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA LA PRESIÓN (P)

Tomando la ecuación 1.183 y reemplazando las definiciones de las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$P = \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\frac{(1-v)(1-2v_u)}{(1-2v)(1-v_u)} \right) \left(\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{2G} \right. \\ -\frac{Pc}{2G} \\ \left. + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1+v_u)}{(2(1-2v_u))} \right) \frac{2\alpha(1-v_u)(1-2v)}{D} I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \end{array} \right) \quad (1.218)$$

$$- \left(\frac{2G(v_u - v)\alpha}{\alpha^2(1-2v)(1-2v_u)} \right) \left(\begin{array}{l} \frac{2(1-v)(1-2v_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial v}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \end{array} \right)$$

agrupando términos

$$p = \text{modulo } 3 \cdot \sigma_0 + \frac{2Pc(v_u - v)(1-v)}{\alpha D(1-2v)} \left(I_o \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) + \frac{pi}{D} \left((1-v)(1+v_u) I_o \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \left(4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \quad (1.219)$$

y tomando en cuenta la definición de η

$$\begin{aligned}
 p = & \text{modulo}3 \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{D} \frac{(v_u - v)}{\eta} \left(I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) \\
 & + \frac{pi}{D} \left((1 - v)(1 + v_u) I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \left(4(v_u - v) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) .
 \end{aligned} \tag{1.220}$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL FLUJO EN R (q_r)

Considerando la ecuación 1.184 y sustituyendo las definiciones de las constantes A_1 , M , η y S .

$$\begin{aligned}
 q_r = & -k \sqrt{\frac{s}{c}} \left(\frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1 - 2v)(1 - 2v_u)} \right) \left(\frac{(1 - v)(1 - 2v_u)}{(1 - 2v)(1 - v_u)} \right) * \\
 & * \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} + \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1 + v_u)}{(2(1 - 2v_u))} \right) \frac{2\alpha(1 - v_u)(1 - 2v)}{D} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) ,
 \end{aligned} \tag{1.221}$$

$$\begin{aligned}
 q_r = & \text{modulo}4 \cdot \sigma_0 \\
 & + k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{Pc}{D} \left(\frac{2(v_u - v)(1 - v)}{\alpha(1 - 2v)} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{pi}{D} (1 + v_u)(1 - v) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) .
 \end{aligned} \tag{1.222}$$

retomando la definición de η se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}
 q_r = & \text{modulo}4 \cdot \sigma_0 \\
 & + k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{Pc}{D} \left(\frac{(v_u - v)}{\eta} \right) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - k \sqrt{\frac{s}{c}} \frac{pi}{D} (1 + v_u)(1 - v) I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) .
 \end{aligned} \tag{1.223}$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN R (σ_r)

Considerando la ecuación 1.185 y reemplazando las constantes A_1 , A_3 , M , η y S .

$$\frac{\sigma_r}{2G} = - \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)} \right) \left(\left(\frac{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G}}{+ \frac{pi}{M\alpha} \frac{(1 + \nu_u)}{(2(1 - 2\nu_u))}} \right) \frac{2\alpha(1 - \nu_u)(1 - 2\nu)}{D} \right) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} + \left(\frac{1}{2(1 - 2\nu_u)} \right) \left(\frac{2(1 - \nu)(1 - 2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\text{modulol} \cdot \sigma_o + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1 - \nu)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) + \frac{pi 2\alpha(1 - 2\nu)(1 - \nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \quad (1.224)$$

multiplicando la ecuación anterior por 2G y reagrupando términos similar

$$\sigma_r = \text{modulo } 5 \cdot \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Pc}{D} \left(2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - \nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - (1 - \nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \quad (1.225) \\
 & + \frac{pi\alpha(1 - 2\nu)}{D} \left(- (1 + \nu_u) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} + 2 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - \nu_u) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_r = \text{modulo } 5 \cdot \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Pc}{D} \left(2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(\nu_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right), \quad (1.226) \\
 & + \frac{pi\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u)}{D} \left(\frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right)
 \end{aligned}$$

DESARROLLO DE LA EXPRESIÓN PARA EL ESFUERZO EN θ ($\sigma_{\theta\theta}$)

Primero retomaremos la ecuación 1.186 y reemplazando las constantes A_1 , A_3 , M , η y S por sus definiciones y multiplicándola por $2G$.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & -2G \left(\frac{(v_u - \nu)}{\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)} \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) \frac{2\alpha(1-\nu_u)(1-2\nu)}{D} \right) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \\ & + 2G \left(\frac{1}{2(1-2\nu_u)} \right) \left(\frac{2(1-\nu)(1-2\nu_u)}{D} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{Pc}{2G} \right) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{pi}{M\alpha D} \left(4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} 2G \left(\text{mod } ulol \cdot \sigma_0 + \frac{Pc}{2GD} \left(2(1-\nu)v_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - 4(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right) \\ & \left. + \frac{pi 2\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)}{2GD} \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \end{aligned} \quad (1.227)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \text{modulo } 6 \cdot \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Pc}{D} \left(\begin{aligned} & 2(v_u - \nu) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1 - \nu) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - (1 - \nu) \nu_u I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right) \\
 & + \frac{pi\alpha(1 - 2\nu)}{D} \left(\begin{aligned} & - (1 + \nu_u) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) + 2 \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - (1 - \nu_u) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right). \quad (1.228)
 \end{aligned}$$

y finalmente se obtiene a la siguiente expresión.

$$\sigma_{\theta\theta} = \text{modulo } 6 \cdot \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Pc}{D} \left(\begin{aligned} & 2(v_u - \nu) \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) - (1 - \nu)(1 + \nu_u) I_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + 2(v_u - \nu) \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} \end{aligned} \right). \quad (1.229) \\
 & + \frac{pi\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u)}{D} \left(\begin{aligned} & \frac{I_1 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{R \sqrt{\frac{s}{c}}} - \left(I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{I_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r \sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$