



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“APUNTES DE LA ASIGNATURA ELEMENTOS
DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO”

TESIS
PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE INGENIERÍA
CIVIL TOPOGRÁFICA Y GEODÉSICA
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

POR
ESTÉVEZ CAYETANO JOSÉ RAÚL
PARA OBTENER EL TÍTULO
DE LICENCIADO EN
INGENIERÍA CIVIL



DIRIGIDA POR: DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO

MÉXICO, D.F.,

JUNIO DEL 2005

m. 345966



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: ESTÉVEZ CAYETANO JOSÉ RAÚL

FECHA: 27 JUNIO / 05

FIRMA: [Signature]

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
FING/DCTG/SEAC/UTIT/049/05

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Señor
JOSÉ RAÚL ESTÉVEZ CAYETANO
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

"APUNTES DE LA ASIGNATURA ELEMENTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO"

- PRÓLOGO
- INTRODUCCIÓN
- I. ESTADO DE ESFUERZO
- II. ESTADO DE DEFORMACIÓN
- III. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MÉCANICA
- IV. ELASTICIDAD LINEAL
- V. TEORÍAS DE FALLA Y RUPTURA
- APÉNDICES
- BIBLIOGRAFÍA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria a 13 de mayo de 2005
EL DIRECTOR

[Signature]
M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/AJP/crc.

[Signature]
Dr. Rigoberto Rivera C

Yo Bo.
13-JUN-05
[Signature]

[Signature]

[Signature]
14/VI/05

Yo Bs.
15/VI/05
[Signature]

[Signature]

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido mi formación profesional.

A la Facultad de Ingeniería: En especial a todos mis Profesores con respeto y dedicatoria.

Al Dr. Rigoberto Rivera; mi Asesor: Por el apoyo, esfuerzo y sinceridad que me brindó para lograr los objetivos que me propongo.

A Juana; mi Madre: Con profundo cariño y como tributo a sus incontables sacrificios para lograr uno de mis grandes anhelos.

A Irene, Dolores, Arturo y José; mis Hermanos: Que son la motivación de mi vida.

A mis Amigos, Compañeros, por hacer mis días mas agradables y a todas aquellas personas que me brindaron su cariño, amistad, comprensión, apoyo, tolerancia y conocimientos necesarios para llevar a cabo este trabajo.

Índice General

Prólogo	xi
Introducción	xiii
1 Estado de Esfuerzo	1
1.1 Teoría del estado de esfuerzo	2
1.2 Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo	3
1.3 Determinación de las ecuaciones de Cauchy	5
1.4 Esfuerzos principales	10
1.5 Elipsoide de Lamé	17
1.6 Solución gráfica de Mohr	18
1.7 Procedimiento gráfico de Mohr	24
1.8 Casos particulares de estados de esfuerzo	25
1.9 Descomposición de un estado general de esfuerzos en sus componentes volumétrica y desviadora	28
1.10 Estado de esfuerzo plano	30
1.11 Planos y ejes principales de esfuerzo	33
1.12 Esfuerzos octaédricos	37
1.13 Equilibrio de partículas en un medio continuo	39
1.14 Ecuaciones de equilibrio de momentos en partículas de un continuo	45
2 Estado de Deformación	49
2.1 Características de rotación y cambio de forma de la partícula	52
2.2 Interpretación física del tensor rotacional	54
2.3 Interpretación física del tensor deformación	57
2.4 Componentes normal y cortante del vector deformación	63
2.5 Deformaciones principales y direcciones principales de deformación	64
2.6 Significado físico del invariante lineal J_1	65
2.7 Componentes volumétrica y desviadora del tensor deformación	66
2.8 Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones	67
3 Principios Generales de la Mecánica	73
3.1 Principio de la conservación de la masa o ecuación de continuidad	74
3.2 Principio de conservación de la cantidad de movimiento	76

3.3	Principio de conservación de energía; primera ley de la termodinámica	78
3.4	Segunda ley de la termodinámica, desigualdad de Clausius-Duhem	81
4	Elasticidad Lineal	83
4.1	Planteamiento matemático para definir las relaciones constitutivas en un continuo cualquiera	83
4.2	Ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales en un marco de referencia principal	88
4.3	Ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales homogéneos e isotropos en un marco de referencia cartesiano	89
4.4	Solución de problemas elásticos haciendo uso de funciones de esfuerzo	96
4.5	Función de esfuerzos de Airy	97
4.6	Funciones de esfuerzos en coordenadas cilíndricas	105
4.7	Energía de deformación elástica para un estado uniaxial de esfuerzos	113
4.8	Energía de deformación elástica para un estado triaxial de esfuerzos	115
5	Teorías de Falla y Ruptura	119
5.1	Teoría de Rankine	119
5.2	Teoría de Coulomb-Tresca	121
5.3	Teoría de Saint Venant	124
5.4	Teoría de Nadai	125
5.5	Teoría de Von Mises Hencky (VMH)	127
A	Apéndice A: Análisis Tensorial	139
B	Apéndice B: Rotación de Ejes Coordinados	149
	Bibliografía	153

Índice de Figuras

1.1: Cuerpo deformable sometido a un sistema de cargas cualesquiera.	2
1.2: Definición de vector esfuerzo en el entorno a un punto de un cuerpo deformable.	3
1.3: Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo \bar{t}_n	4
1.4: Componentes del vector esfuerzo cortante $\bar{\tau}_n$ en un sistema de referencia cartesiano.	5
1.5: Determinación de las ecuaciones de Cauchy.	6
1.6: Equilibrio estático del tetraedro de Cauchy.	7
1.7: Vector esfuerzo asociado a un plano.	8
1.8: Esfuerzos principales.	11
1.9: Vector esfuerzo en un marco de referencia principal.	17
1.10: Elipsoide de Lamé.	18
1.11: Plano de Mohr.	19
1.12: Región de Mohr.	23
1.13: Solución gráfica de Mohr.	25
1.14: Representación gráfica de un estado de esfuerzo nulo.	26
1.15: Estado de esfuerzo uniaxial, espacio de Lamé.	26
1.16: Estado de esfuerzo uniaxial, plano de Mohr.	26
1.17: Estado de esfuerzo plano, espacio de Lamé.	27
1.18: Estado de esfuerzo plano, región de Mohr, $\sigma_3 = 0$	27
1.19: Estado de esfuerzo hidrostático.	28
1.20: Estado de esfuerzo plano, en un sistema de referencia cartesiano.	30
1.21: Derivación de los esfuerzos σ_n y τ_n para un estado de esfuerzos plano.	31
1.22: Relación geométrica entre σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} y θ	34
1.23: Representación del estado de esfuerzo para el ejemplo 2.5.	35
1.24: Solución gráfica de Mohr, ejemplo 2.5.	37
1.25: Definición de esfuerzos octaédricos.	38
1.26: Equilibrio estático de una partícula interior del continuo.	40
1.27: Fuerzas de cuerpo y de superficie en una partícula elemental de un medio continuo.	40
1.28: Viga de sección prismática sometida a flexión simple.	42
1.29: Distribución de esfuerzos cortantes en el plano $x = 0$	43
1.30: Distribución de esfuerzos normales en el plano $x = L$	44
1.31: Ecuaciones de equilibrio de una partícula de un medio continuo.	45
2.1: Definición de vector desplazamiento.	49

2.2:	Definición de vector desplazamiento relativo.	51
2.3:	Interpretación física del término $rot \bar{\delta} \times \bar{e}$	56
2.4:	Rotación pura de una barra rígida.	56
2.5:	Interpretación física del término $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$	58
2.6:	Barra cilíndrica sometida a un campo de desplazamientos.	60
2.7:	Componentes del vector desplazamiento en la sección $z = 1$	62
2.8:	Componentes normal y cortante del vector desplazamiento relativo.	64
2.9:	Cambio volumétrico de una partícula de un medio continuo.	66
3.1:	Volumen de referencia.	74
3.2:	Conservación de la cantidad de movimiento.	77
4.1:	Relaciones entre esfuerzos y deformaciones en un medio continuo elástico lineal.	83
4.2:	Interpretación física de las constantes E y ν	95
4.3:	Barra prismática sometida a un estado de esfuerzo uniaxial.	98
4.4:	Barra prismática sometida a un estado de esfuerzos biaxial.	99
4.5:	Estado de cortante puro.	99
4.6:	Barra prismática sometida a flexión pura.	102
4.7:	Volumen de esfuerzos normales en $x = 0$	103
4.8:	Ménsula sometida a una carga puntual en su extremo libre.	105
4.9:	Estado radial simple.	108
4.10:	Variación de σ_{rr} para $\theta = cte$ y r variable.	109
4.11:	Lugar geométrico del semiespacio con el mismo valor de σ_{rr}	110
4.12:	Isobaras para el estado radial simple.	111
4.13:	Roseta de deformación en un punto de un cuerpo deformable.	111
4.14:	Definición de energía de deformación elástica.	113
4.15:	Definición de módulo de Resiliencia.	115
4.16:	Energía de deformación elástica para un estado general de esfuerzos.	115
5.1:	Volumen de fluencia. Teoría de Rankine.	120
5.2:	Superficie de fluencia para el estado de esfuerzo plano. Teoría de Rankine.	121
5.3:	Superficie de fluencia para el estado de esfuerzos plano. Teoría de Coulomb-Tresca.	122
5.4:	Estado de esfuerzo plano; tensión.	123
5.5:	Estado de esfuerzo plano; compresión.	123
5.6:	Superficie de fluencia, criterio de Saint Venant.	125
5.7:	Superficie de fluencia; teoría de Nadai.	127
5.8:	Barra prismática sometida a una carga puntual en su extremo libre.	130
5.9:	Viga sometida a flexión pura.	132
5.10:	Relación M_p/M_f para diferentes secciones.	134
5.11:	Muestra cilíndrica en un molde rígido, a) alzado, b) planta.	136

A.1: Coordenadas de un punto "P" en un sistema de referencia cartesiano.	140
A.2: Sistema de referencia cartesiano.	141
B.1: Rotación de ejes coordenados.	149
B.2: a) Transformación de un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 en x'_1, x'_2 y x'_3	151

Índice de Tablas

A.1: Transformación de coordenadas.	139
B.1: Tabla de deformación de coordenadas.	151

Prólogo

La elaboración de la Tesis “Apuntes de la Asignatura Elementos de Mecánica del Medio Continuo”, se preparó arduamente al poner en forma el material preparado.

Por otra parte la presentación del material se hace en notación tensorial, como es común en muchas universidades del país, sin embargo, esto dificulta el aprendizaje de dicha asignatura, sobre todo cuando se trata de un primer curso a nivel licenciatura.

El objetivo de esta Tesis es de contar con un material que cubra el temario actual de la asignatura Elementos de Mecánica del Medio Continuo que forma parte del programa de estudios de la carrera de Ingeniero Civil que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Los Elementos de Mecánica del Medio Continuo es una asignatura básica en la carrera de Ingeniero Civil, pues la hipótesis de medio continuo que se adopta en esta mecánica permite abordar, sin ninguna distinción, problemas de sólidos, líquidos y gases.

Adoptando la hipótesis de medio continuo se establecen los conceptos de estado de esfuerzo y estado de deformación y mediante las ecuaciones constitutivas correspondientes se hace la liga entre esfuerzos y deformaciones, dando lugar a las diferentes teorías que utiliza el Ingeniero Civil en el diseño de sus obras, tal es el caso de las teorías de la elasticidad, plasticidad, viscosidad y combinaciones de éstas.

Esta Tesis, tiene como finalidad poner al alcance de los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil, de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, los primeros conceptos de esta herramienta que les servirán como base para cursos posteriores que tienen que ver con la ciencia de la ingeniería y la ingeniería aplicada.

Introducción

La mecánica del medio continuo es una rama de la física que estudia el estado de esfuerzo y deformación (o flujo) de sólidos, líquidos y gases.

Esta mecánica no toma en cuenta la estructura molecular de la materia, sólo la considera como carente de vacíos, huecos o discontinuidades. Se da por hecho que la materia se halla distribuida en forma continua en todo su volumen, llenando por completo el espacio que ocupa.

Desde un punto de vista físico un medio continuo es cualquier cuerpo deformable que se estudia macroscópicamente, en el cual cada partícula del cuerpo siempre permanece en contacto con sus vecinas.

Este concepto de medio continuo constituye el postulado fundamental de la mecánica del medio continuo, lo que permite estudiar de manera semejante el comportamiento de sólidos, líquidos y gases.

La presentación del material se hace sobre la base del análisis vectorial, sin embargo, muchas de las ecuaciones que surgen en esta mecánica se expresan también en notación indicial, con el objeto de que el alumno se familiarice con este enfoque, que es el que se emplea en la literatura técnica relacionada con esta rama de la física.

El concepto de estado de esfuerzo (estática del medio continuo) se establece en el capítulo 1, mientras que el concepto de estado de deformación (cinemática del medio continuo) se trata en el capítulo 2, para lo cual sólo fue necesario adoptar la hipótesis de medio continuo. En estos dos capítulos se demuestra que la estructura matemática para estudiar el estado de esfuerzo y el estado de deformación es enteramente similar. En el capítulo 3 se estudian las leyes generales de la mecánica, como son los principios de conservación de la masa, de la rapidez de la cantidad de movimiento, de la conservación de energía o primera ley de la termodinámica y el de aumento de entropía o desigualdad de Clausius-Duhem, los cuales son aplicables a cualquier medio continuo. Para ligar los esfuerzos con las deformaciones es necesario hablar de las propiedades del material, lo cual se hace a través de lo que se conoce como ecuaciones constitutivas de los materiales. En este primer curso sólo se aborda, en el capítulo 4, la teoría de los materiales elásticos lineales homogéneos e isotropos. La solución de ciertos problemas elásticos se hace mediante funciones de esfuerzo, por considerar que estos métodos de solución siguen siendo muy didácticos, sin embargo, no debemos olvidar que en la actualidad la solución de problemas complejos se lleva a cabo mediante herramientas numéricas muy poderosas, como es el caso de los métodos de diferencias finitas, elemento finito y otros. Finalmente en el capítulo 5, se tratan las teorías de falla y ruptura de los materiales, las cuales están íntimamente ligadas con el diseño de las obras civiles que proyecta el ingeniero.

Capítulo 1

Estado de Esfuerzo

Los tipos de fuerzas que se aceptan en el estudio de los continuos son:

a) Fuerzas de superficie, aplicadas en las fronteras del continuo por la acción de otros cuerpos que se encuentran en contacto con el medio.

La fuerza resultante de todas las fuerzas de superficie que actúan sobre un área A , de un medio continuo está dada por:

$$\int_A \bar{t}_n dA = i_k \int_A t_k dA \quad (1.1)$$

El subíndice k que aparece en la ecuación 1.1 se usa para expresar el mismo concepto en notación indicial.

donde:

\bar{t}_n : vector fuerza de superficie
 dA : elemento diferencial de área

Adoptando un sistema de referencia cartesiano la ecuación 1.1 queda como:

$$\int_A \bar{t}_n dA = \bar{i} \int_A t_x dA + \bar{j} \int_A t_y dA + \bar{k} \int_A t_z dA \quad (1.2)$$

Las unidades de t_x, t_y y t_z son $[F, L^{-2}]$

b) Fuerzas de cuerpo, provocadas por la acción de cuerpos distantes que generan campos gravitacionales, de temperatura y electromagnéticos.

La fuerza resultante de todas las fuerzas de cuerpo actuantes en un volumen finito dV , está dada por:

$$\int_V \rho \bar{f} dV = i_k \int_V \rho f_k dV \quad (1.3)$$

donde:

\bar{f} : vector fuerza de cuerpo
 dV : elemento diferencial de volumen
 ρ : densidad del medio

En notación cartesiana la ecuación 1.3 se puede escribir como:

$$\int_V \rho \bar{f} dV = \bar{i} \int_V \rho f_x dV + \bar{j} \int_V \rho f_y dV + \bar{k} \int_V \rho f_z dV \quad (1.4)$$

Las unidades de f_x , f_y y f_z son $[F, M^{-1}]$.

1.1 Teoría del estado de esfuerzo

Cuando un cuerpo deformable se somete a sollicitaciones de cualquier tipo, éste se deforma hasta cierto límite. Esto se debe a que las fuerzas cohesivas han entrado en juego, tomando un valor tal que permiten equilibrar a las fuerzas externas aplicadas.

Para describir las acciones entre todas las partículas de un continuo, imaginemos un sistema de fuerzas aplicadas a un medio continuo, tal como se ilustra en la Fig. 1.1.

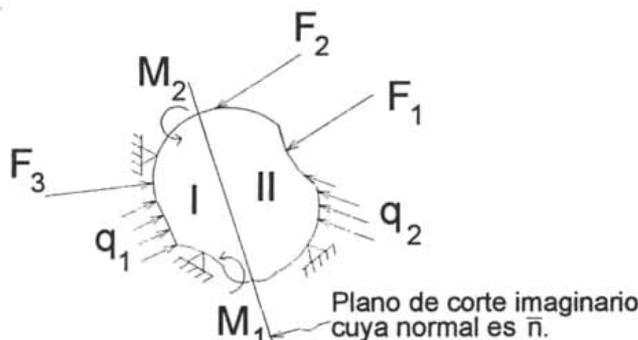


Figura 1.1: Cuerpo deformable sometido a un sistema de cargas cualesquiera.

Al hacer un corte imaginario a través de un plano cualesquiera, cuya normal está definida por el vector unitario \bar{n} , se obtienen los cuerpos I y II, mostrados en la Fig. 1.2.

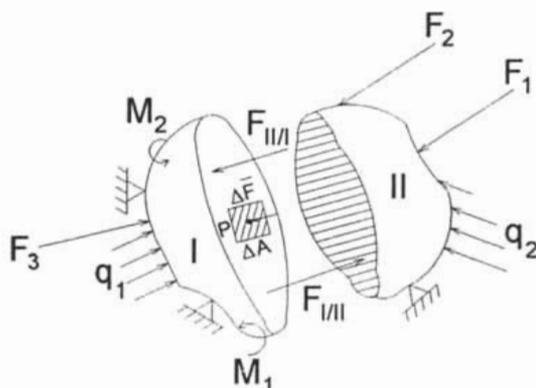


Figura 1.2: Definición de vector esfuerzo en el entorno a un punto de un cuerpo deformable.

Consideremos un punto "P" de dicha sección de corte y tomemos un entorno de área del mismo, ΔA , y sea $\Delta \bar{F}$ la parte de la acción que el cuerpo II comunica al cuerpo I, únicamente a través de ΔA .

DEFINICIÓN: El vector esfuerzo, \bar{l}_n , en un punto "P", asociado a un plano de corte cualesquiera, está dado por:

$$\bar{l}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \quad (1.5)$$

1.2 Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo

El vector esfuerzo \bar{l}_n puede descomponerse en un vector esfuerzo normal $\bar{\sigma}_n$ y en un vector esfuerzo cortante $\bar{\tau}_n$ tal como se muestra en la Fig. 1.3. De esta manera se obtiene:

$$\bar{l}_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n$$

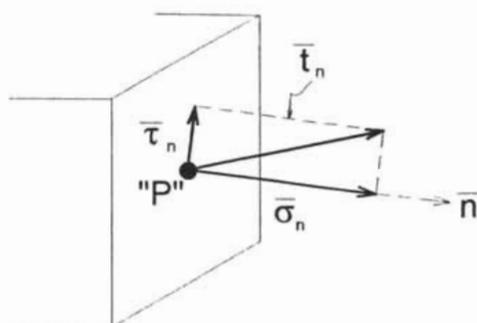


Figura 1.3: Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo \vec{l}_n .

El módulo del vector esfuerzo normal $\vec{\sigma}_n$, se puede calcular como la proyección del vector esfuerzo \vec{l}_n sobre la dirección \vec{n} .

$$|\vec{\sigma}_n| = \vec{l}_n \cdot \vec{n} \quad (1.6)$$

El vector esfuerzo cortante $\vec{\tau}_n$ se puede calcular como la diferencia vectorial:

$$\vec{\tau}_n = \vec{l}_n - \vec{\sigma}_n \quad (1.7)$$

La normal \vec{n} que define el plano donde actúa \vec{l}_n , se puede expresar en función de sus cosenos directores como:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

Siendo α , β y γ los ángulos que forman los ejes de referencia cartesianos con la dirección de dicha normal.

Llamando a:

$$\cos \alpha = n_x \quad ; \quad \cos \beta = n_y \quad y \quad \cos \gamma = n_z$$

La normal \vec{n} se puede expresar como:

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

El vector esfuerzo $\vec{\sigma}_n$ es positivo si tiene la misma dirección que \vec{n} ; siempre será normal al plano de corte.

El vector esfuerzo cortante $\vec{\tau}_n$ siempre estará alojado en el plano de corte, adoptando cualquier dirección.

En un marco de referencia cartesiano, es usual descomponer a $\vec{\tau}_n$ en dos componentes paralelas a los ejes del marco de referencia.

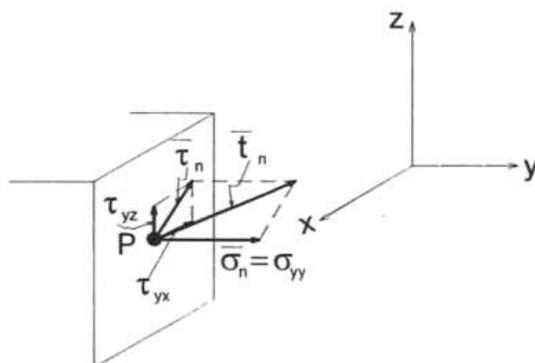


Figura 1.4: Componentes del vector esfuerzo cortante \bar{t}_n en un sistema de referencia cartesiano.

Por lo tanto el vector esfuerzo \bar{t}_n se puede expresar como:

$$\bar{t}_n = \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\tau}_{yx} + \bar{\tau}_{yz} \quad (1.8)$$

En esta ecuación, el primer subíndice indica la dirección de la normal al plano donde actúa dicho esfuerzo, mientras que el segundo indica la dirección del eje cartesiano al cual es paralelo.

En caras positivas las componentes de esfuerzos serán positivas, cuando tengan la dirección de los ejes del marco de referencia.

En caras negativas los componentes de esfuerzo serán positivos, cuando sean de dirección contraria a la de los ejes del marco de referencia. En lo que respecta $\bar{\sigma}_n$, éste será de tensión si tiene signo positivo y de compresión si tiene signo negativo.

1.3 Determinación de las ecuaciones de Cauchy

Por lo expuesto anteriormente podemos decir que para describir las acciones que se generan en un plano de corte de un continuo, será necesario describir al conjunto de vectores \bar{t}_n , asociados a todos los puntos del plano de corte.

Ya que en un punto "P" del continuo se pueden establecer una infinidad de planos de corte, se puede afirmar que en cada punto del continuo se debe establecer a la infinidad de vectores \bar{t}_n , asociados a todos los planos de corte que pasan por "P". La envolvente de todos los vectores \bar{t}_n debe ser una función continua.

Para describir a esa función Cauchy propuso el siguiente procedimiento, basado en consideraciones de equilibrio.

Consideremos un punto "P" de un medio continuo y supongamos conocido el esfuerzo en dicho punto, asociado a tres planos mutuamente ortogonales, mismos que tomaremos como coordenados. Supongamos ahora que se desea calcular el esfuerzo en "P", asociado al plano δ que pasa por él y que está definido mediante la normal \bar{n} .

Para encontrar el esfuerzo citado se procede de la siguiente manera (Fig. 1.5).

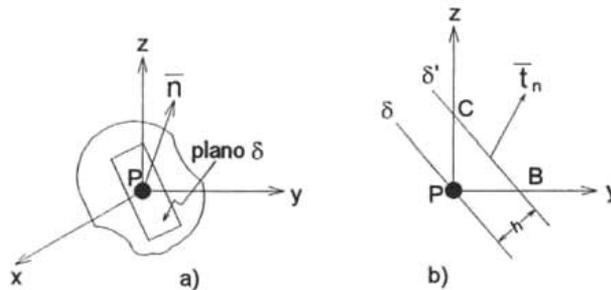


Figura 1.5: Determinación de las ecuaciones de Cauchy.

Se elige un plano δ' paralelo a δ y separado una distancia "h" del origen. En estas condiciones analicemos el equilibrio estático del tetraedro así obtenido, utilizando como esfuerzo actuante en la cara C, B del tetraedro, al medio de los realmente actuantes en dicha cara. Al tomar límite cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene:

- El esfuerzo medio \bar{t}_n , se reduce al realmente actuante en "P".
- El plano δ' coincidirá con δ .

Analicemos el equilibrio del tetraedro que se muestra en la Fig. 1.6. En este análisis no se están incluyendo fuerzas de cuerpo, causadas por efectos de campos inerciales, gravitacionales, magnéticos o eléctricos.

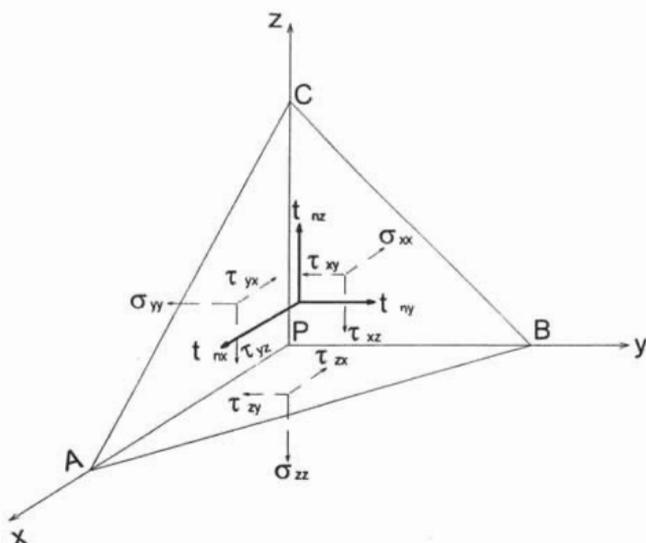


Figura 1.6: Equilibrio estático del tetraedro de Cauchy.

Definiendo:

$$A_{ABC} = A = \text{área comprendida entre } ABC.$$

$$\rho = \text{masa específica del medio; } [M, L^{-3}].$$

El área ABC , al proyectarse en cada uno de los ejes coordenados queda:

$$A_{PBC} = A \cos \alpha = An_x$$

$$A_{PAC} = A \cos \beta = An_y$$

$$A_{PAB} = A \cos \gamma = An_z$$

Estableciendo el equilibrio del tetraedro, se tiene.

Por $\sum F_x = 0$ se obtiene:

$$-\sigma_{xx}A_{PBC} - \tau_{yx}A_{PAC} - \tau_{zx}A_{PAB} + t_xA_{ABC} + f_x\rho\frac{1}{3}A_{ABC}h = 0 \quad (1.9)$$

Por lo tanto,

$$-\sigma_{xx}An_x - \tau_{yx}An_y - \tau_{zx}An_z + t_xA + f_x\rho\frac{1}{3}Ah = 0$$

Tomando límite, cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{xx}An_x - \tau_{yx}An_y - \tau_{zx}An_z + t_xA &= 0 \\
 t_x &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Análogamente se puede obtener por $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$:

$$t_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z \tag{1.11}$$

$$t_z = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \tag{1.12}$$

Estas últimas tres ecuaciones pueden ser escritas en forma matricial como sigue:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \\
 \bar{t}_n &= [T_{ij}]|\bar{n}|
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

donde:

$$T_{ij} = \text{Tensor esfuerzo de orden 2 (Apéndice A)}.$$

Físicamente los elementos del tensor esfuerzo representan los esfuerzos actuantes en tres planos mutuamente ortogonales. Matemáticamente el tensor esfuerzo es un operador que al actuar sobre \bar{n} , produce el vector \bar{t}_n .

Ejemplo 1.1. En un punto P de un medio continuo el tensor esfuerzo es:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \text{ en MPa}$$

Determine el vector esfuerzo en un plano que contiene al punto P y es paralelo a los planos a) BGE, b) BGFC, del paralelepípedo de la Fig. 1.7.

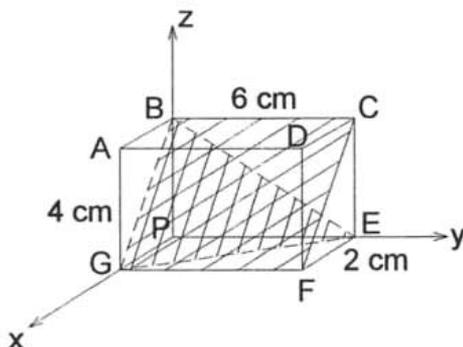


Figura 1.7: Vector esfuerzo asociado a un plano.

Dado que

$$\bar{t}_n = [T_{ij}] |\bar{n}|$$

a) Es necesario calcular la normal al plano BGE, para lo cual procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas del punto } B(0, 0, 4) & \quad ; \quad \overline{BG} = \bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{k} \\ \text{Coordenadas del punto } G(2, 0, 0) & \quad ; \quad \overline{BE} = \bar{b} = 6\bar{j} - 4\bar{k} \\ & \quad \quad \quad E(0, 6, 0) \end{aligned}$$

El producto cruz $\bar{a} \times \bar{b}$ resulta:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \bar{i}(24) - 2(-4\bar{j} - 6\bar{k}) \\ \bar{a} \times \bar{b} &= 24\bar{i} + 8\bar{j} + 12\bar{k} \\ |\bar{a} \times \bar{b}| &= \sqrt{24^2 + 8^2 + 12^2} = 28 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la normal al plano BGE es:

$$\bar{n} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{1}{28} (24\bar{i} + 8\bar{j} + 12\bar{k}) = \frac{6}{7}\bar{i} + \frac{2}{7}\bar{j} + \frac{3}{7}\bar{k}$$

Operando para calcular el vector esfuerzo normal, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{t}_n &= \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} \\ \bar{t}_n &= 11\bar{i} + 12\bar{j} + 9\bar{k} \text{ MPa} \end{aligned}$$

b) Para el plano BGFC, procedemos de manera similar.

$$\begin{aligned} \text{Punto } B(0, 0, 4) & \quad ; \quad \overline{BG} = \bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{k} \\ \text{Punto } G(2, 0, 0) & \quad ; \quad \overline{BC} = \bar{c} = 6\bar{j} \\ & \quad \quad \quad \text{Punto } C(0, 6, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{c} &= \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \bar{i}(+24) - 2(-6\bar{k}) \\ \bar{a} \times \bar{c} &= 24\bar{i} + 12\bar{k} \\ |\bar{a} \times \bar{c}| &= \sqrt{720} = 12\sqrt{5}\end{aligned}$$

La normal al plano BGFC resulta:

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\bar{a} \times \bar{c}}{|\bar{a} \times \bar{c}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\bar{i} + \bar{k}) \\ \bar{l}_n &= \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ \bar{l}_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (21\bar{i} + 14\bar{j} + 21\bar{k}) \text{ MPa}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Determinar las componentes normal y cortante del vector esfuerzo \bar{l}_n en el plano BGFC del ejercicio 1.1.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} \\ \sigma_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (21, 14, 21) \cdot (2, 0, 1) \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sigma_n &= \frac{1}{5} (42 + 21) = \frac{63}{5} \\ \sigma_n &= \frac{63}{5} \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_n &= \left[|\bar{l}_n|^2 - \sigma_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ |\bar{\tau}_n|^2 &= \frac{1}{5} \left(\overline{21}^2 + \overline{14}^2 + \overline{21}^2 \right) = 215.60 \\ \bar{\tau}_n &= [215.60 - 158.76]^{\frac{1}{2}} = 7.54 \\ \bar{\tau}_n &= 7.54 \text{ MPa}\end{aligned}$$

1.4 Esfuerzos principales

Para determinar los valores máximo y mínimo del conjunto de vectores \bar{l}_n que definen el estado de esfuerzos en el punto, es necesario encontrar el plano que pasa por el punto cuya normal coincida con la dirección del vector \bar{l}_n Fig. 1.8.

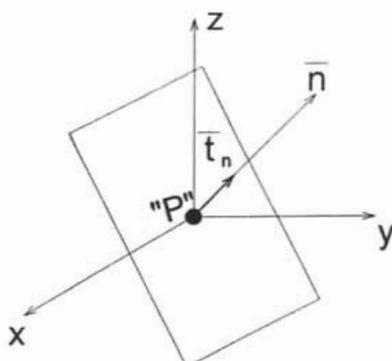


Figura 1.8: Esfuerzos principales.

Si la normal al plano coincide con la dirección del vector esfuerzo \bar{t}_n , entonces $\bar{\tau}_n=0$, por lo que:

$$\bar{t}_n = \bar{\sigma}_n = [T_{ij}] |\bar{n}|$$

Por otra parte, el vector esfuerzo normal se puede expresar como:

$$\bar{\sigma}_n = |\bar{\sigma}_n| \bar{n} = \sigma \bar{n}$$

Por lo tanto

$$\bar{\sigma}_n = \sigma n_x \bar{i} + \sigma n_y \bar{j} + \sigma n_z \bar{k} = [T_{ij}] |\bar{n}|$$

desarrollando:

$$\sigma n_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \quad (1.14)$$

$$\sigma n_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \quad (1.15)$$

$$\sigma n_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \quad (1.16)$$

En este sistema de ecuaciones las incógnitas son: σ , n_x , n_y , n_z .

Dado que se tienen tres ecuaciones y cuatro incógnitas, es necesario introducir una ecuación adicional, ella es:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (1.17)$$

Las ecuaciones 1.14, 1.15 y 1.16 se pueden representar como:

$$(\sigma_{xx} - \sigma) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0 \quad (1.18)$$

$$\tau_{xy} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma) n_y + \tau_{zy} n_z = 0 \quad (1.19)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma) n_z = 0 \quad (1.20)$$

Las ecuaciones 1.18, 1.19 y 1.20, tienen como modelo matemático:

$$[T_{ij}] \bar{n} = \sigma \bar{n} \quad (1.21)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{valor característico} \\ \bar{n} &= \text{vector característico} \end{aligned}$$

Es decir, la solución de las ecuaciones 1.18, 1.19 y 1.20 es un problema de valores y vectores característicos, por lo tanto, la expresión 1.21 puede ser escrita como:

$$[T_{ij} - \sigma I] \bar{n} = 0 \quad (1.22)$$

siendo $I =$ matriz identidad

Para que exista solución diferente a la trivial para n_x, n_y, n_z ($\bar{n} \neq 0$), es necesario que el determinante de la matriz $[T_{ij} - \sigma I]$ sea igual a cero. Esto es:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.23)$$

Donde los coeficientes de la ec. 1.23 están dados por:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \text{ invariante lineal} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix}; \text{ invariante cuadrático} \\ I_3 &= |[T_{ij}]|; \text{ invariante cúbico} \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación característica 1.23 se obtienen los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 .

Sustituyendo los valores de σ_1, σ_2 y σ_3 en las ecuaciones 1.18, 1.19 y 1.20, en forma sucesiva, y haciendo uso de la identidad fundamental $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, más dos de estas ecuaciones así obtenidas, se determinan los vectores característicos respectivos, \bar{n}_1, \bar{n}_2 , y \bar{n}_3 .

Se puede demostrar que las raíces de la ecuación cúbica son siempre reales, si el tensor T_{ij} es simétrico.

Las raíces de la ecuación cúbica reciben el nombre de esfuerzos principales, siendo σ_1 , el mayor, σ_2 , el intermedio y σ_3 el menor, por lo que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Donde los subíndices 1, 2, 3 nos indican tres ejes ortogonales que pasan por el punto, a los cuales se les pueden asociar tres planos ortogonales en los que únicamente existe esfuerzo normal.

Cuando el tensor $[T_{ij}]$ es un tensor simétrico es posible demostrar que los productos escalares $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$; $\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 = 0$; $\bar{n}_3 \cdot \bar{n}_1 = 0$, lo cual indica la ortogonalidad de las tres direcciones principales de esfuerzo.

Ya que los planos principales son ortogonales entre sí, sus normales pueden ser utilizadas como ejes principales de referencia, el tensor referido a ese marco, queda representado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.3. En un punto de un medio continuo se establece el siguiente tensor de esfuerzo.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ en } [MPa]$$

Obtener:

a) El vector esfuerzo en el plano que pasa por el punto cuya normal queda definida por:

$$\bar{n} = \left(\frac{2}{3}\right)\bar{i} + \left(-\frac{2}{3}\right)\bar{j} + \left(\frac{1}{3}\right)\bar{k}$$

b) Los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 , σ_3

c) Las direcciones de los ejes principales definidas por \bar{n}_1 , \bar{n}_2 , \bar{n}_3

d) Los productos escalares $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2$, $\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3$ y $\bar{n}_3 \cdot \bar{n}_1$

a) El vector esfuerzo se calcula como:

$$\begin{aligned} \bar{l}_n &= [T_{ij}] |\bar{n}| \\ \bar{l}_n &= \left[(4) \left(\frac{2}{3} \right) + (3) \left(-\frac{2}{3} \right) + (0) \left(\frac{1}{3} \right) \right] \bar{i} \\ &\quad + \left[(3) \left(\frac{2}{3} \right) + (-4) \left(-\frac{2}{3} \right) + (0) \left(\frac{1}{3} \right) \right] \bar{j} \\ &\quad + \left[(0) \left(\frac{2}{3} \right) + (0) \left(-\frac{2}{3} \right) + (2) \left(\frac{1}{3} \right) \right] \bar{k} \\ \bar{l}_n &= \frac{2}{3} \bar{i} + \frac{14}{3} \bar{j} + \frac{2}{3} \bar{k} \text{ MPa} \end{aligned}$$

El esfuerzo normal quedará definido por:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} \\ \sigma_n &= \frac{4}{9} - \frac{28}{9} + \frac{2}{9} \\ \sigma_n &= -\frac{22}{9} \text{ MPa} \end{aligned}$$

El esfuerzo cortante se definirá como:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n &= \bar{l}_n - \sigma_n \bar{n} \\ \bar{\tau}_n &= \frac{2}{3} \bar{i} + \frac{14}{3} \bar{j} + \frac{2}{3} \bar{k} - \left(-\frac{44}{27} \bar{i} + \frac{44}{27} \bar{j} - \frac{22}{27} \bar{k} \right) \\ \bar{\tau}_n &= \left(\frac{2}{3} + \frac{44}{27} \right) \bar{i} + \left(\frac{14}{3} - \frac{44}{27} \right) \bar{j} + \left(\frac{2}{3} + \frac{22}{27} \right) \bar{k} \\ \bar{\tau}_n &= \frac{62}{27} \bar{i} + \frac{82}{27} \bar{j} + \frac{40}{27} \bar{k} \text{ MPa} \end{aligned}$$

b) Los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 , σ_3 , se calculan resolviendo la ecuación característica.

Desarrollando:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 - \sigma & 3 & 0 \\ 3 & -4 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sigma \end{bmatrix} = 0 \\ & 4 - \sigma [(-4 - \sigma)(2 - \sigma)] - 3[(3)(2 - \sigma)] = 0 \\ & 4 - \sigma(\sigma^2 + 2\sigma - 8) - 3(6 - 3\sigma) = 0 \\ & -32 + 16\sigma + 2\sigma^2 - \sigma^3 - 18 + 9\sigma = 0 \\ & -50 + 25\sigma + 2\sigma^2 - \sigma^3 = 0 \\ & \sigma^3 - 2\sigma^2 - 25\sigma + 50 = 0 ; \text{ Ecuación característica} \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación característica, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 5 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 2 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de esfuerzos principales queda:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Dado que los invariantes del tensor esfuerzo en los sistemas de referencia cartesiano y principal son iguales, entonces dichos tensores representan el mismo estado de esfuerzos en el punto "P" del continuo.

c) Las direcciones de los ejes principales definidas por $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$, se calculan como:

Para $\sigma_1 = 5 \text{ [MPa]}$, tenemos:

$$\begin{aligned} n_{11} + 3n_{21} + 0n_{31} &= 0 \implies n_{11} = -3n_{21} \\ 3n_{11} - 9n_{21} + 0n_{31} &= 0 \\ 0n_{11} + 0n_{21} + (-3)n_{31} &= 0 \implies n_{31} = 0 \end{aligned}$$

Pero, sabemos que

$$(n_{11})^2 + (n_{21})^2 + (n_{31})^2 = 1$$

Por lo tanto, sustituyendo

$$\begin{aligned} (3n_{21})^2 + (n_{21})^2 + (0)^2 &= 1 \\ 9n_{21}^2 + n_{21}^2 &= 1 \\ 10n_{21}^2 &= 1 \\ n_{21} &= 1/\sqrt{10}, \quad n_{11} = 3/\sqrt{10}, \quad n_{31} = 0 \end{aligned}$$

Para $\sigma_2 = 2, \text{ [MPa]}$

$$\begin{aligned} 2n_{12} + 3n_{22} + 0 &= 0 \\ 3n_{12} - 6n_{22} + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo $(n_{12})^2 + (n_{22})^2 + (n_{32})^2 = 1$
sustituyendo, nos queda:

$$\begin{aligned}(n_{32})^2 &= 1 \\ \therefore n_{32} &= 1 \\ n_{12} &= 0, \quad n_{22} = 0, \quad n_{32} = 1\end{aligned}$$

Para $\sigma_3 = -5 [MPa]$, tenemos:

$$\begin{array}{rcll} 9n_{13} & + & 3n_{23} & + & 0 & = & 0 \\ 3n_{13} & + & n_{23} & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 7n_{33} & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{l} n_{23} = -3n_{13} \\ n_{33} = 0 \end{array}$$

Haciendo $(n_{13})^2 + (n_{23})^2 + (n_{33})^2 = 1$
sustituyendo:

$$\begin{aligned}(n_{13})^2 + (-3n_{13})^2 &= 1 \\ n_{13}^2 + 9n_{13}^2 &= 1 \\ 10n_{13}^2 &= 1 \\ n_{13} &= 1/\sqrt{10}, \quad n_{23} = -3/\sqrt{10}, \quad n_{33} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de cosenos directores de los ejes principales, queda:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

d) Productos escalares

$$\begin{aligned}(1) \quad \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 &= \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\bar{j} + 0\bar{k} \right) \cdot (0\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k}) = 0 \\ (2) \quad \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3 &= \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\bar{j} + 0\bar{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\bar{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\bar{j} + 0\bar{k} \right) = 0 \\ (3) \quad \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 &= (0\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\bar{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\bar{j} + 0\bar{k} \right) = 0\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que las direcciones \bar{n}_1 , \bar{n}_2 y \bar{n}_3 son ortogonales.

1.5 Elipsoide de Lamé

Se dice que dos tensores representan el mismo estado de esfuerzos en un punto cuando sus invariantes son iguales.

Cuando se seleccionan a los ejes principales como marco de referencia, en un plano cualesquiera que pase por el punto, definido por $\bar{n} = n_1\bar{i} + n_2\bar{j} + n_3\bar{k}$; las expresiones que definen a las componentes de \bar{t}_n en ese plano, paralelas a los ejes 1, 2 y 3, están dados por (Fig. 1.9).

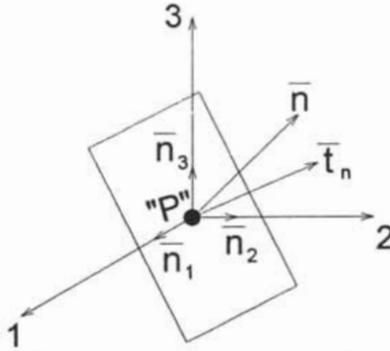


Figura 1.9: Vector esfuerzo en un marco de referencia principal.

$$\bar{t}_n \cdot \bar{n}_1 = \sigma_1 n_1 \quad (1.24)$$

$$\bar{t}_n \cdot \bar{n}_2 = \sigma_2 n_2 \quad (1.25)$$

$$\bar{t}_n \cdot \bar{n}_3 = \sigma_3 n_3 \quad (1.26)$$

Elevando al cuadrado las ecs. 1.24, 1.25 y 1.26, despejando n_1^2 , n_2^2 y n_3^2 , y sumando miembro a miembro se obtiene:

$$(\bar{t}_n \cdot \bar{n}_1)^2 = (\sigma_1 n_1)^2$$

$$(\bar{t}_n \cdot \bar{n}_2)^2 = (\sigma_2 n_2)^2$$

$$(\bar{t}_n \cdot \bar{n}_3)^2 = (\sigma_3 n_3)^2$$

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{n}_1)^2}{\sigma_1^2} = n_1^2 = \frac{t_{n1}^2}{\sigma_1^2} \quad (1.27)$$

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{n}_2)^2}{\sigma_2^2} = n_2^2 = \frac{t_{n2}^2}{\sigma_2^2} \quad (1.28)$$

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{n}_3)^2}{\sigma_3^2} = n_3^2 = \frac{t_{n3}^2}{\sigma_3^2} \quad (1.29)$$

Sumando 1.27, 1.28 y 1.29 se llega a:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = \frac{t_{n1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{t_{n2}^2}{\sigma_2^2} + \frac{t_{n3}^2}{\sigma_3^2} \quad (1.30)$$

El conjunto de vectores \bar{t}_n que describe el estado de esfuerzo en un punto, queda envuelto por un elipsoide (Lamé), tal como se muestra en la Fig. 1.10.

Por lo tanto, el máximo valor de \bar{t}_n debe ser σ_1 y el mínimo σ_3 .

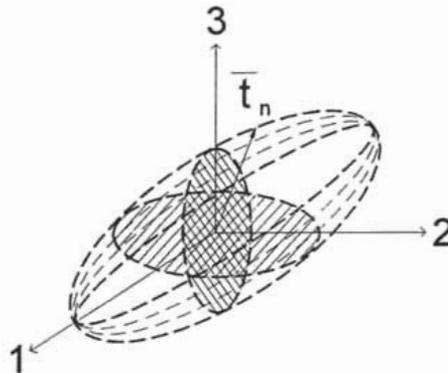


Figura 1.10: Elipsoide de Lamé.

1.6 Solución gráfica de Mohr

Puesto que conocido el tensor esfuerzo y elegido un vector \bar{n} , podemos determinar a la pareja de valores (σ_n, τ_n) , mediante:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} \quad (1.31)$$

$$\tau_n = \pm \sqrt{|\bar{t}_n|^2 - |\bar{\sigma}_n|^2} \quad (1.32)$$

Al investigador Otto Mohr se le ocurrió inventar el plano coordenado (σ_n, τ_n) , con lo cual queda establecida la correspondencia entre las normales a los planos que pasan por el punto "P" del material en estudio y el punto (σ_n, τ_n) de dicho plano (Fig. 1.11).

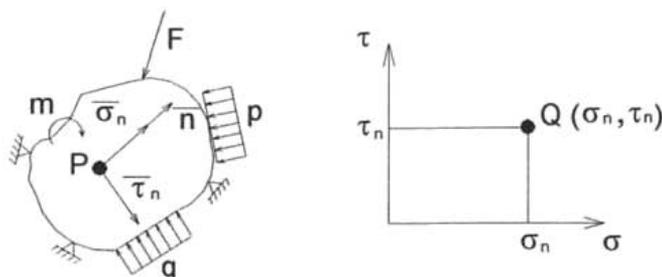


Figura 1.11: Plano de Mohr.

Sin embargo, la situación inversa no es verdadera, es decir, existen puntos del plano de Mohr, cuyas coordenadas no representan a esfuerzos actuantes en ninguno de los planos que pasan por el punto "P". Por lo tanto, se plantea la siguiente pregunta.

¿Cuál es la región del plano de Mohr, cuyos puntos representan a esfuerzos realmente actuantes en el punto "P"?

Para responder a la pregunta planteada se procede como sigue:

Sea \bar{n} la normal a un plano que pasa por un punto "P" de un continuo, cuyos cosenos directores sean n_x, n_y, n_z .

Asociado a dicho plano existirá un vector esfuerzo \bar{t}_n , tal que:

$$\bar{t}_n = [T_{ij} | \bar{n}] \quad (1.33)$$

Aceptemos además que en el punto existan las direcciones principales 1, 2 y 3, en las cuales se definan a los planos principales, con esfuerzos σ_1, σ_2 y σ_3 . Tomando como base el marco de referencia anterior, la ecuación 1.33 puede ser escrita como:

$$\bar{t}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

El vector esfuerzo resulta:

$$\begin{aligned} \bar{t}_n &= \sigma_1 n_x \bar{i} + \sigma_2 n_y \bar{j} + \sigma_3 n_z \bar{k} \\ |\bar{t}_n|^2 &= \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

El esfuerzo normal es igual a:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (1.36)$$

Haciendo uso de estas dos últimas ecuaciones, conjuntamente con:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

resolvemos el problema planteado, es decir, determinamos al vector \bar{n} que define al plano en el cual actúan σ_n y τ_n .

El sistema de ecuaciones planteado es:

$$|\bar{l}_n|^2 = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 \quad (1.37)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (1.38)$$

$$1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (1.39)$$

Las ecuaciones 1.36, 1.37 y 1.38 pueden representarse de manera matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \sigma_n^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado para n_x^2 , n_y^2 y n_z^2 , mediante el método de Kramer, se tiene:

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sigma_1^2 (\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3^2 (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Para n_x^2 , se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{vmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (\sigma_n^2 + \tau_n^2) (\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2 (\sigma_n - \sigma_3) \\ &\quad + \sigma_3^2 (\sigma_n - \sigma_2) \\ &= (\sigma_n^2 + \tau_n^2) (\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2 \sigma_n + \sigma_2^2 \sigma_3 \\ &\quad + \sigma_3^2 \sigma_n - \sigma_3^2 \sigma_2 \\ &= (\sigma_n^2 + \tau_n^2) (\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_n (\sigma_2 + \sigma_3) (\sigma_2 - \sigma_3) \\ &\quad + \sigma_2 \sigma_3 (\sigma_2 - \sigma_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_x^2 &= \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) (\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_n (\sigma_2 + \sigma_3) (\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3 (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1^2 (\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3^2 (\sigma_1 - \sigma_2)} \\ &= \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n (\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3}{\sigma_1^2 + \frac{-\sigma_2^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3^2 (\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_2 - \sigma_3)}} \end{aligned}$$

El denominador se puede simplificar como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \frac{-\sigma_2^2\sigma_1 + \sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_3^2\sigma_1 - \sigma_3^2\sigma_2}{(\sigma_2 - \sigma_3)} \\ \implies \sigma_1^2 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)(-\sigma_2\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)} = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) \\ n_x^2 = \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

De la misma manera se obtiene para n_y^2 y n_z^2 :

$$n_y^2 = \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_3\sigma_1}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (1.42)$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (1.43)$$

Procediendo por simple análisis de estas ecuaciones, podemos definir a la región buscada. Así en la ec. 1.41, observamos lo siguiente:

Dado que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

concluimos que:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) \geq 0$$

y como

$$n_x^2 \geq 0$$

concluimos que

$$(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 \geq 0$$

ecuación que puede ser escrita como

$$\sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \tau_n^2 \geq -\sigma_2\sigma_3$$

Completando el cuadrado del primer miembro

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 &\geq -\sigma_2\sigma_3 \\ &+ \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \\ &\geq \frac{\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_3}{4} \\ &\geq \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

∴

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (1.44)$$

Obsérvese que con el signo de igualdad la ecuación anterior define a un círculo de radio:

$$R_{n_x} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \text{ y centro en } C_{n_x} \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$$

De esta manera concluimos que en lo referente a “ n_x ”, la región buscada viene dada por los puntos del círculo definido y los exteriores a él.

Respecto a n_y^2 obtenemos:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (1.45)$$

Es decir, la región buscada queda definida por los puntos del círculo de radio:

$$R_{n_y} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ y centro en } C_{n_y} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right), \text{ así como los puntos interiores a él.}$$

Respecto a n_z^2 obtenemos:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (1.46)$$

Es decir, se trata de los puntos del círculo de radio:

$$R_{n_z} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ y centro en: } C_{n_z} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right), \text{ así como los puntos exteriores a él.}$$

Por lo tanto, la región buscada es la parte achurada que se muestra en la Fig. 1.12.

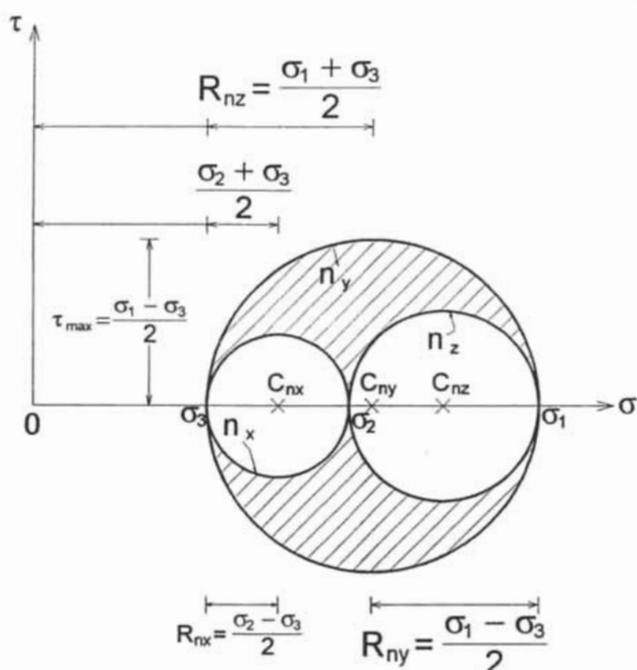


Figura 1.12: Región de Mohr.

Ejemplo 1.4. Determine los esfuerzos σ_n y τ_n asociados al plano cuyos cosenos directores están dados por $\bar{n} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. El tensor esfuerzo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Cálculo del vector esfuerzo \bar{l}_n .

$$\bar{l}_n = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 5\bar{i} + 3\bar{j} - \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{k} \text{ [MPa]}$$

Cálculo del esfuerzo normal σ_n .

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} \\ \sigma_n &= \left(5, 3, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

Cálculo del esfuerzo cortante τ_n .

$$\begin{aligned}\tau_n &= \pm \sqrt{|\bar{l}_n|^2 - |\bar{\sigma}_n|^2} \\ \tau_n &= \pm \sqrt{\left[5^2 + 3^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ \tau_n &= \pm 5.68 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

1.7 Procedimiento gráfico de Mohr

Únicamente se enunciarán los pasos a seguir para obtener los esfuerzos σ_n y τ_n asociados a un plano cuya normal es \bar{n} , estando fuera del alcance de estas notas la demostración rigurosa del procedimiento.

Para obtener los esfuerzos σ_n y τ_n mediante el procedimiento gráfico de Mohr, se siguen los siguientes pasos:

- 1) Una vez definida la región de Mohr, por σ_1 se traza una recta perpendicular al eje σ y a partir de ella, pasando por σ_1 trazamos una recta que con la primera forme un ángulo θ_1 ($\theta_1 = \angle \cos n_x$).
- 2) Por σ_3 se traza una recta perpendicular al eje σ y a partir de ella, pasando por σ_3 se traza una recta que con la primera forme un ángulo θ_3 ($\theta_3 = \angle \cos n_z$).
- 3) Haciendo centro en C_{nx} , se traza el arco de círculo que pasa por los puntos donde la recta $A - A'$ intersecta a los círculos cuyo centro es C_{ny} y C_{nz} .
- 4) Con centro en C_{nz} , se traza el arco de círculo que pasa por los puntos donde la recta $B - B'$ intersecta a los círculos cuyo centro es C_{nx} y C_{ny} .
- 5) El punto buscado viene dado por la intersección de los dos arcos de círculo anteriormente trazados; las coordenadas del punto Q representan a los esfuerzos (σ_n, τ_n) actuantes en el plano cuya normal es \bar{n} .

Solución del ejercicio 1.4, mediante el procedimiento gráfico de Mohr.

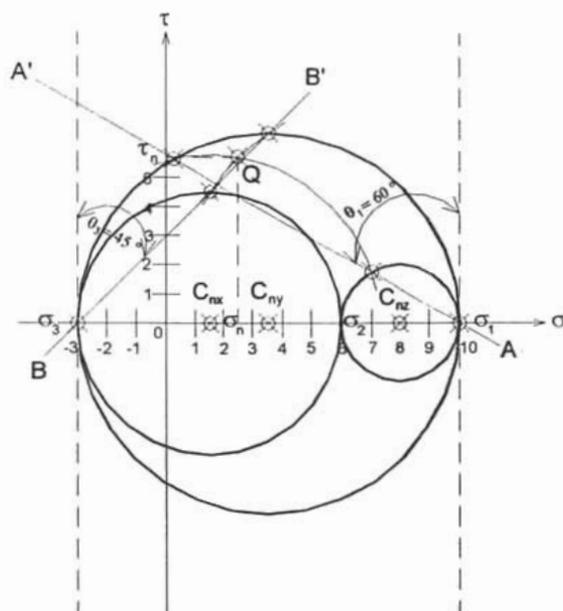


Figura 1.13: Solución gráfica de Mohr.

Los ángulos θ_1 y θ_3 se calculan como:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \angle \cos n_x \\ \theta_3 &= \angle \cos n_z\end{aligned}$$

Siguiendo la construcción geométrica indicada en la Fig. 1.13 se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = 2.5 \text{ [MPa]} \\ \tau_n = 5.7 \text{ [MPa]} \end{array} \right\} \text{ Punto "Q"}$$

1.8 Casos particulares de estados de esfuerzo

a) Estado de esfuerzo nulo; es aquel en el cual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el espacio de Lamé y de Mohr está representado por un punto, ubicado en el origen del sistema de referencia.

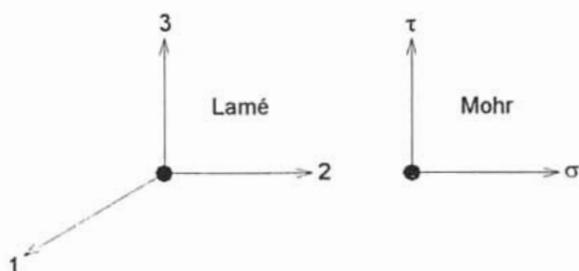


Figura 1.14: Representación gráfica de un estado de esfuerzo nulo.

b) Estado de esfuerzo uniaxial; es aquel en el cual $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

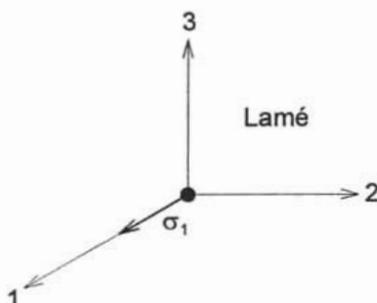


Figura 1.15: Estado de esfuerzo uniaxial, espacio de Lamé.

Todos los vectores \vec{l}_n , tienen la dirección del eje 1.

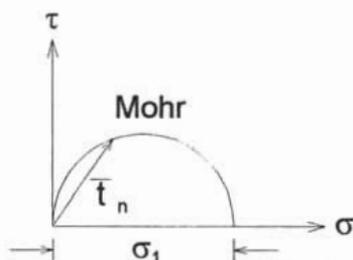


Figura 1.16: Estado de esfuerzo uniaxial, plano de Mohr.

c) Estado de esfuerzo plano; es aquel en el cual uno de los esfuerzos principales es nulo, por ejemplo, $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

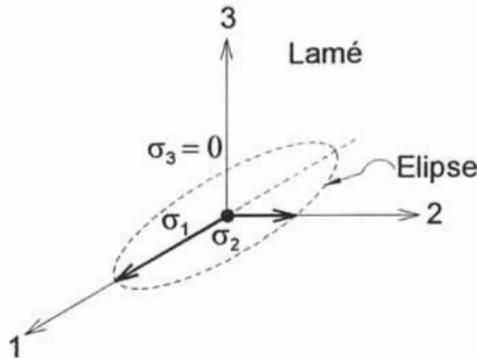


Figura 1.17: Estado de esfuerzo plano, espacio de Lamé.

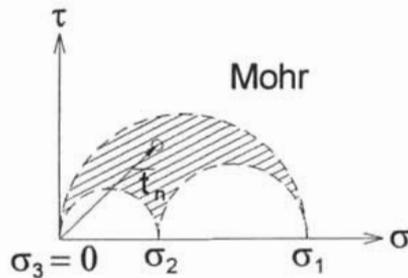


Figura 1.18: Estado de esfuerzo plano, región de Mohr, $\sigma_3 = 0$.

Cuando dos círculos pasan por el origen se trata de un esfuerzo plano (Fig. 1.18).

d) Estado general de esfuerzos; es aquel en el cual $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 \neq 0$.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

El estado general de esfuerzo en el espacio de Lamé queda definido por un elipsoide.

La representación en el plano de Mohr quedará como en el caso anterior, con la variante de que $\sigma_3 \neq 0$.

e) Estado de esfuerzos hidrostático es aquel en el cual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

El estado de esfuerzos hidrostático en el espacio de Lamé queda representado por una esfera, mientras que en el plano de Mohr es un segmento de recta sobre el eje σ .

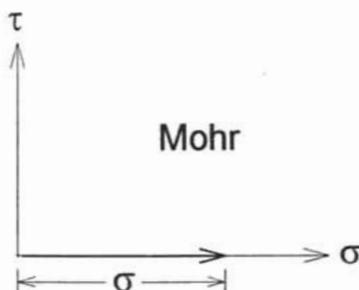


Figura 1.19: Estado de esfuerzo hidrostático.

1.9 Descomposición de un estado general de esfuerzos en sus componentes volumétrica y desviadora

Supongamos que en un punto "P" de un medio continuo se establece el siguiente tensor esfuerzo.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Sea \bar{n} la normal a un plano que pasa por un punto "P" de un medio continuo, entonces:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n &= [T_{ij}] |\bar{n}| \\ \bar{\tau}_n &= (\sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z)\bar{i} + (\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z)\bar{j} \\ &\quad + (\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z)\bar{k} \end{aligned} \quad (1.48)$$

La ecuación 1.48 puede ser escrita en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \bar{t}_n &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \frac{I_1}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \\ \bar{t}_n &= [T_o] |\bar{n}| + [T_v] |\bar{n}| \end{aligned} \quad (1.49)$$

donde:

$$\begin{aligned} T_o &= \text{componente desviadora del tensor } T_{ij}. \\ T_v &= \text{componente volumétrica del tensor } T_{ij}. \end{aligned}$$

Obsérvese en la ec. 1.49 que la componente volumétrica representa un estado de esfuerzos hidrostático, cuyos esfuerzos principales son iguales a $\frac{I_1}{3}$, es decir, el valor promedio de los esfuerzos normales que aparecen en T_{ij} .

La componente distorsional de un estado general de esfuerzos siempre presenta la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} [T_o] &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \frac{I_1}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix} \\ [T_o] &= \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma_{xx} - \frac{I_1}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma_{zz} - \frac{I_1}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{zz} - \frac{I_1}{3}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} -\left(\sigma_{xx} - \frac{I_1}{3}\right) - \left(\sigma_{zz} - \frac{I_1}{3}\right) &= -\sigma_{xx} - \sigma_{zz} + \frac{2I_1}{3} \\ &= -\sigma_{xx} - \sigma_{zz} - \sigma_{yy} + \sigma_{yy} + \frac{2I_1}{3} = \sigma_{yy} - \frac{I_1}{3} \end{aligned}$$

Lo anterior indica que la componente distorsional o desviadora de un estado general de esfuerzos resulta siempre ser igual a la suma de 5 estados de esfuerzos plano.

Algunos autores llaman a estos estados de esfuerzo plano “estados de cortante puro” en los cuales el máximo esfuerzo cortante es igual al valor de cualesquiera de los esfuerzos principales diferentes de cero.

Es común considerar que en la componente desviadora se manifiesta la acción del estado de cortante puro, mientras que en la componente volumétrica se manifiesta la acción de los esfuerzos normales promedio en el punto en estudio.

En general, en todos los estados de esfuerzo se acostumbra asociar los cambios de volumen a la componente volumétrica, mientras que los cambios de forma se asocian a la componente distorsional o desviadora.

1.10 Estado de esfuerzo plano

En la Fig. 1.20 se muestra un cuerpo deformable sometido a ciertas sollicitaciones en su plano. Si el elemento es de espesor pequeño, los esfuerzos asociados a la dirección z se pueden despreciar, esto es:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = 0$$

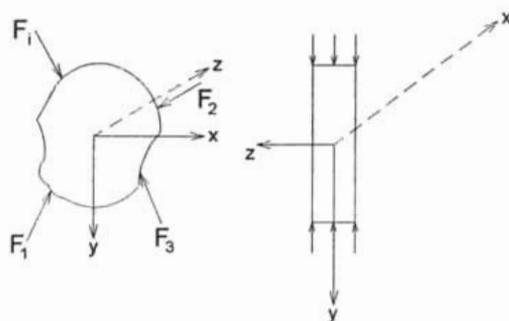


Figura 1.20: Estado de esfuerzo plano, en un sistema de referencia cartesiano.

Por lo que el tensor esfuerzo T_{ij} se reduce a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Este tensor representa un estado de esfuerzo plano.

Las componentes normal y cortante del vector esfuerzo \bar{t}_n , para un estado de esfuerzo plano se pueden deducir como sigue:

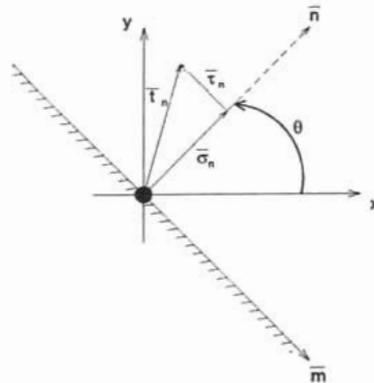


Figura 1.21: Derivación de los esfuerzos σ_n y τ_n para un estado de esfuerzos plano.

Tomando en cuenta la Fig. 1.21 los vectores unitarios \bar{n} y \bar{m} , se pueden expresar como:

$$\bar{n} = (\cos \theta) \bar{i} + (\text{sen} \theta) \bar{j} \quad (1.52)$$

$$\bar{m} = (\text{sen} \theta) \bar{i} - (\cos \theta) \bar{j} \quad (1.53)$$

En estas dos direcciones se pueden establecer las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo \bar{l}_n , como:

$$\begin{aligned} \bar{l}_n &= [T_{ij}] |\bar{n}| = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{bmatrix} \\ \bar{l}_n &= (\sigma_{xx} \cos \theta + \tau_{yx} \text{sen} \theta) \bar{i} + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_{yy} \text{sen} \theta) \bar{j} \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} \\ &= (\sigma_{xx} \cos^2 \theta + \tau_{yx} \text{sen} \theta \cos \theta) + (\tau_{xy} \text{sen} \theta \cos \theta + \sigma_{yy} \text{sen}^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Si σ_n es positivo, quiere decir que tiene la dirección de \bar{n} .

Para el esfuerzo cortante, se tiene de manera similar:

$$\bar{\tau}_n = \bar{l}_n \cdot \bar{m} = (\sigma_{xx} \text{sen} \theta \cos \theta + \tau_{yx} \text{sen}^2 \theta - \tau_{xy} \cos^2 \theta - \sigma_{yy} \text{sen} \theta \cos \theta) \quad (1.56)$$

Si τ_n es positivo, esto quiere decir que tiene la dirección de \bar{m} .

Haciendo simplificaciones, se tiene que :

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \operatorname{sen}^2 \theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (1.57)$$

$$\tau_n = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad (1.58)$$

Tomando en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (1.59)$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (1.60)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (1.61)$$

y sustituyendo estas últimas expresiones en las ecs 1.57 y 1.58, se llega a:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{xx} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ \tau_n &= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \left[\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) - \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Simplificando se tiene:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (1.62)$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1.63)$$

Derivando σ_n respecto a θ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial \theta} &= -2\tau_n \end{aligned} \quad (1.64)$$

Este resultado muestra que τ_n es una medida del cambio de σ_n con respecto, a θ , y que cuando $\tau_n = 0$, se tendrá el máximo o mínimo valor de σ_n (esfuerzos principales).

Si se acepta que los ejes de referencia coincidan con las direcciones en que $\tau_n = 0$, el tensor que representa al estado de esfuerzos en un punto del medio continuo, para $\sigma_2 = 0$, quedará definido por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Para este tensor, las ecs 1.62 y 1.63 quedan como:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta \quad (1.65)$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \text{sen} 2\theta \quad (1.66)$$

Estas últimas ecuaciones se pueden representar como sigue:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta \quad (1.67)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \text{sen} 2\theta \quad (1.68)$$

Elevando al cuadrado las ecs 1.67 y 1.68 y sumándolas, obtenemos:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1.69)$$

La ecuación 1.69 nos muestra que el conjunto de vectores \vec{l}_n asociados a planos cuyos vectores esfuerzo estén en el plano de esfuerzos deben tener sus extremos sobre la circunferencia con centro en: $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$ y radio:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right).$$

Para definir a un vector esfuerzo dado, asociado al plano cuya normal forma un ángulo θ con el eje 1, es necesario girar un ángulo 2θ , en dirección contraria a θ para definir al extremo del vector \vec{l}_n , cuyas proyecciones son σ_n y τ_n .

Esta representación permite así definir a todos los vectores \vec{l}_n en planos normales al plano de esfuerzos.

1.11 Planos y ejes principales de esfuerzo

Por definición los planos principales de esfuerzo son aquellos donde el esfuerzo cortante $\tau_n = 0$.

Por lo que tomando en cuenta la ec. 1.63, obtenemos:

$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Desarrollando se llega a :

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)} \quad (1.70)$$

Las raíces de esta última ecuación representan las direcciones de los ejes principales \bar{n}_1 y \bar{n}_3 .

Para encontrar las raíces de la ec. 1.70, hacemos uso de la Fig. 1.22.

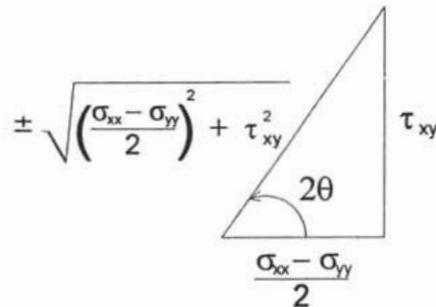


Figura 1.22: Relación geométrica entre σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} y θ .

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (1.71)$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (1.72)$$

Sustituyendo las ecs. 1.71 y 1.72 en la 1.62, obtenemos a los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 :

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.73)$$

Para el estado de esfuerzo plano, la ecuación característica se reduce a:

$$-\lambda^2 + I_1\lambda - I_2 = 0 \quad (1.74)$$

Donde:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.5. El estado de esfuerzo plano en un punto de un medio continuo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [MPa]$$

Usando los métodos analítico y gráfico del Mohr, determine:

- Los esfuerzos normal y cortante asociados al plano de corte indicado en la Fig. 1.23.
- Los esfuerzos principales.
- Las direcciones principales de esfuerzo, referidas a los ejes x, y en que se define el tensor esfuerzo.

Los elementos del tensor esfuerzo son:

$$\sigma_{xx} = 4 [MPa] \quad ; \quad \sigma_{yy} = 2 [MPa] \quad ; \quad \tau_{xy} = -1 [MPa]$$

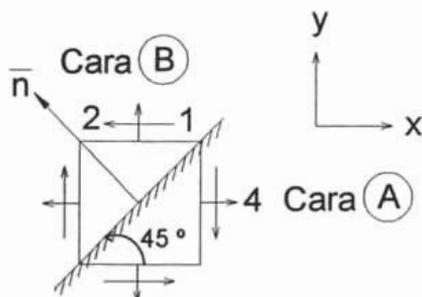


Figura 1.23: Representación del estado de esfuerzo para el ejemplo 2.5.

El ángulo θ que permite calcular los esfuerzos σ_n y τ_n , mediante las ecs. 1.62 y 1.63, vale: $\theta = 135^\circ$.

Esfuerzo normal:

$$\sigma_n = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2} \cos 270^\circ + (-1) \operatorname{sen} 270^\circ$$

$$\sigma_n = 3 + 1 = 4 [MPa]$$

Esfuerzo cortante:

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{4-2}{2} \operatorname{sen} 270^\circ - (-1) \cos 270^\circ \\ \tau_n &= -1 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

Los esfuerzos principales valen:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,3} &= \frac{4+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + (-1)^2} = 3 \pm \sqrt{2.0} \\ \sigma_1 &= 3 + \sqrt{2.0} = 4.41 \text{ [MPa]} \\ \sigma_3 &= 3 - \sqrt{2.0} = 1.60 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

Cálculo de las direcciones principales:

$$\tan 2\theta = \frac{-1}{\left(\frac{4-2}{2}\right)} = -1$$

Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -22.5^\circ \\ \theta_3 &= -112.5^\circ\end{aligned}$$

Para comprobar la dirección asociada a los esfuerzos σ_1 y σ_3 , se sustituyen las raíces obtenidas en la ec. 1.62.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2} \cos(-45^\circ) + (-1) \operatorname{sen}(-45^\circ) \\ \sigma_n &= 3 + 0.7071 + 0.7071 = 4.41 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

Por lo tanto el ángulo $\theta_1 = -22.5^\circ$ está asociado a la dirección del esfuerzo principal mayor σ_1 , obviamente el ángulo $\theta_3 = -112.5^\circ$ debe estar asociado al esfuerzo principal menor.

Para la solución gráfica de Mohr haremos uso del procedimiento conocido como método del "polo".

El polo es un punto en el círculo de Mohr el cual se puede ubicar como sigue (Fig. 1.24).

a) Se traza primeramente el círculo de Mohr a partir de los puntos conocidos A y B. Para que el signo del esfuerzo cortante τ_n sea el correcto, es necesario cambiar el signo del esfuerzo cortante τ_{xy} asociado a la cara A antes de trazar el círculo de Mohr.

- b) Por el punto A se traza un plano que sea paralelo a los esfuerzos asociados a la cara A. Donde este plano corte el círculo, estará ubicado el polo.
- c) Se hace lo mismo con el punto B para verificar la posición del polo.

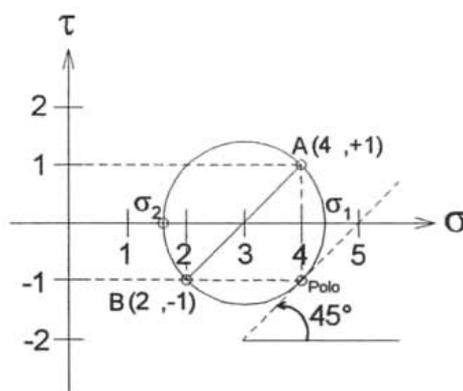


Figura 1.24: Solución gráfica de Mohr, ejemplo 2.5.

- d) Una vez conocida la ubicación del polo, y a partir de éste, bastará con trazar una recta que tenga la misma orientación del plano donde se desea calcular los esfuerzos σ_n y τ_n .
- e) El punto donde esta recta corte al círculo, determina los esfuerzos σ_n y τ_n correspondientes. En la Fig. 1.24 se muestra la aplicación del procedimiento seguido para el problema planteado. Para este caso particular el punto correspondiente al polo coincide con los esfuerzos σ_n y τ_n buscados.

1.12 Esfuerzos octaédricos

Considérese un punto en el cual exista un estado general de esfuerzos. En ese punto existen ocho planos octaédricos definidos por normales que dividen en ángulos iguales a cada uno de los octantes del espacio.

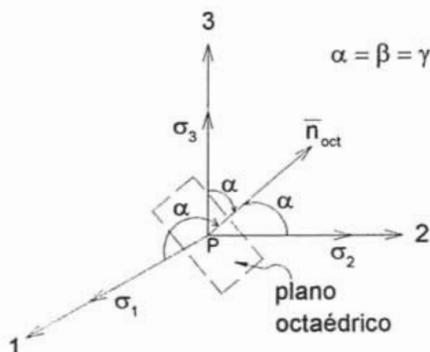


Figura 1.25: Definición de esfuerzos octaédricos.

Consideremos el plano octaédrico del primer octante, cuya normal es:

$$\bar{n}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k} \quad (1.75)$$

Asociado a este plano existirá un vector esfuerzo total octaédrico, definido por:

$$\bar{t}_{oct} = [T_{ij}]|\bar{n}_{oct}| \quad (1.76)$$

$$\bar{t}_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3\bar{k} \quad (1.77)$$

El esfuerzo normal octaédrico es igual a:

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= \bar{t}_{oct} \cdot \bar{n}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_1\bar{i} + \sigma_2\bar{j} + \sigma_3\bar{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} [\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}] \\ &= \frac{1}{3} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] \\ \sigma_{oct} &= \frac{I_1}{3} \end{aligned} \quad (1.78)$$

El esfuerzo cortante octaédrico puede calcularse como:

$$\bar{\tau}_{oct} = \bar{i}_{oct} - \bar{\sigma}_{oct} \quad (1.79)$$

$$\bar{\tau}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_1 \bar{i} + \sigma_2 \bar{j} + \sigma_3 \bar{k}] - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{I_1}{3} \bar{i} + \frac{I_1}{3} \bar{j} + \frac{I_1}{3} \bar{k} \right]$$

$$\bar{\tau}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3} \right) \bar{i} + \left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3} \right) \bar{j} + \left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3} \right) \bar{k} \right]$$

$$|\bar{\tau}_{oct}| = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3} \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3} \right)^2} \quad (1.80)$$

De los resultados obtenidos se puede observar lo siguiente:

- El esfuerzo normal octaédrico depende de la magnitud de la componente volumétrica del tensor de esfuerzos.
- El esfuerzo cortante octaédrico tiene como magnitud el valor medio cuadrático de los elementos de la diagonal principal de la componente distorsional.

1.13 Equilibrio de partículas en un medio continuo

Consideremos que en cada punto del continuo es conocido el tensor T_{ij} , dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Aceptemos que las componentes de T_{ij} son funciones continuas de (x, y, z, t) . Cuando el tensor es simétrico será necesario definir a seis funciones continuas y derivables de variación suave, para conocer el estado de esfuerzo en todos los puntos del continuo.

Para ello basta estudiar el equilibrio de partículas en el continuo, de ahí surgen las condiciones de frontera y las fuerzas de cuerpo que producen a T_{ij} .

Consideremos en primer lugar a una partícula interior del continuo.

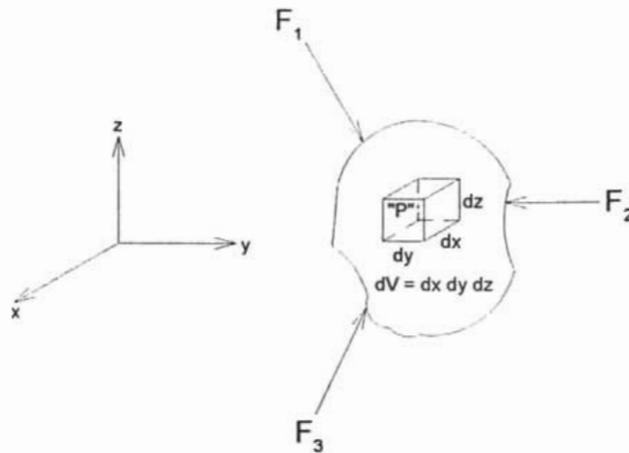


Figura 1.26: Equilibrio estático de una partícula interior del continuo.

En la partícula elemental aparecen:

- Fuerzas en las caras laterales, provocadas por la acción de partículas vecinas.
- Fuerzas de cuerpo generadas por la acción de cuerpos distantes.

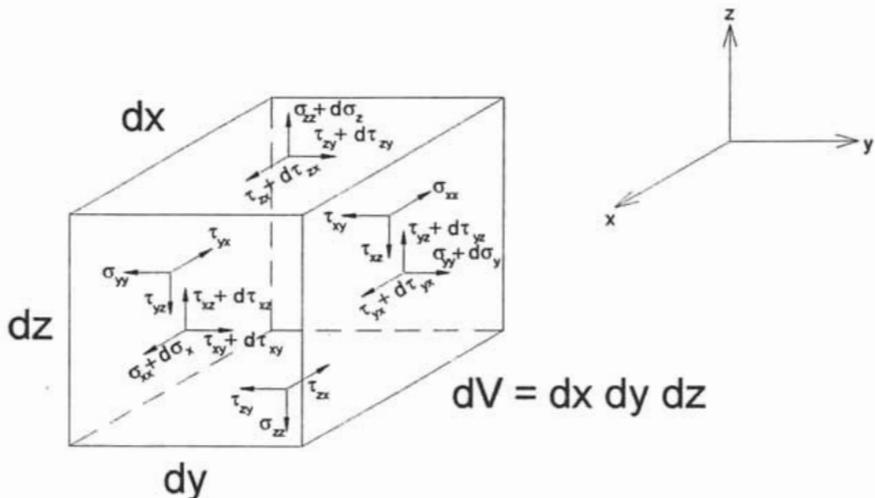


Figura 1.27: Fuerzas de cuerpo y de superficie en una partícula elemental de un medio continuo.

En el elemento diferencial, que se muestra en la Fig. 1.27 no están incluidas las fuerzas de cuerpo que pudieran existir.

Por equilibrio de fuerzas, se tiene:

Por $\sum F_x = 0$:

$$\begin{aligned}
 &(\sigma_x + d\sigma_x) dydz - (\sigma_x dydz) + (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dx dz - (\tau_{yx} dx dz) \\
 &\quad + (\tau_{zx} + d\tau_{zx}) dx dy - (\tau_{zx} dx dy) + x dx dy dz = 0 \\
 &\quad d\sigma_x dydz + d\tau_{yx} dx dz + d\tau_{zx} dx dy + x dx dy dz = 0 \\
 &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + x dx dy dz = 0 \\
 &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dV + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dV + f_x dV = 0 \tag{1.81}
 \end{aligned}$$

Si $dV \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \tag{1.82}$$

De manera similar; por $\sum F_y = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \tag{1.83}$$

Por $\sum F_z = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \tag{1.84}$$

Las ecs. 1.82, 1.83 y 1.84 pueden ser escritos en notación indicial como:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

Esta última ecuación se conoce como ecuación de Cauchy.

Ejercicio 1.6. En un medio continuo se establece un tensor de esfuerzos definido por:

$$T_{ij} = A \cdot \begin{bmatrix} 2xy & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ donde : } A, c = \text{tes.}$$

Obtenga:

- Las fuerzas de cuerpo.
- Las fuerzas en las fronteras del continuo.

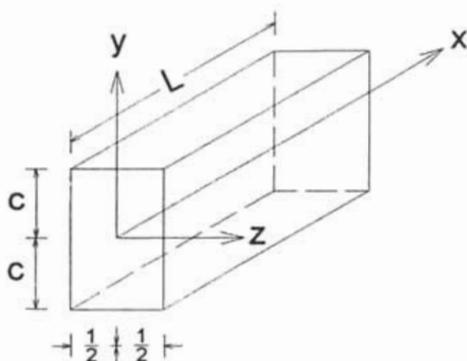


Figura 1.28: Viga de sección prismática sometida a flexión simple.

Analizando cada una de las caras del continuo, se tiene:

En el plano $y = c$; $\bar{n} = \bar{j}$

El vector esfuerzo \bar{i}_n vale:

$$\bar{i}_n = [T_{ij}] |\bar{n}| = A \cdot \begin{bmatrix} 2cx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{i}_n = 0 \Rightarrow$ Toda la cara está descargada.

En el plano $y = -c$; $\bar{n} = -\bar{j}$

$$\bar{i}_n = [T_{ij}] |\bar{n}| = A \cdot \begin{bmatrix} -2cx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{i}_n = 0 \Rightarrow$ Cara descargada.

En el plano $z = +\frac{1}{2}$; $\bar{n} = \bar{k}$

$$\bar{i}_n = [T_{ij}] |\bar{n}| = A \cdot \begin{bmatrix} 2cx & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{i}_n = 0 \Rightarrow$ Cara descargada.

En el plano $z = -\frac{1}{2}$; $\bar{n} = -\bar{k}$

$\bar{i}_n = 0 \Rightarrow$ Cara descargada.

En el plano $x = 0$; $\bar{n} = -\bar{i}$

$$\begin{aligned}\bar{l}_n &= T_{ij}(\bar{n}) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{l}_n &= A(y^2 - c^2)\bar{j} \\ \bar{\sigma}_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} = 0 = [A(y^2 - c^2)\bar{j}] \cdot [-\bar{i}] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_n &= \pm \sqrt{|\bar{l}_n|^2 - |\bar{\sigma}_n|^2} \\ \tau_n &= A(y^2 - c^2) = Ay^2 - Ac^2\end{aligned}$$

Si $y = 0$; $\tau_n = -Ac^2$

En la Fig. 1.29 se muestra la distribución de esfuerzos cortantes correspondiente.

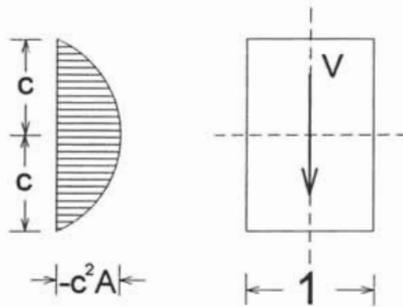


Figura 1.29: Distribución de esfuerzos cortantes en el plano $x = 0$.

Integrando el volumen de esfuerzos cortantes para un ancho unitario, se obtiene la fuerza cortante que actúa en la cara $x=0$:

$$\begin{aligned}V &= \frac{2}{3}(-c^2 A)(2c)(1) \\ V &= -\frac{4}{3}c^3 A\end{aligned}$$

De donde la constante A vale:

$$A = -\frac{3V}{4c^3}$$

En el plano $x = L$; $\bar{n} = \bar{i}$

$$\bar{l}_n = [T_{ij}] |\bar{n}| = A \cdot \begin{bmatrix} 2Ly & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A(2Ly)\bar{i} + A(c^2 - y^2)\bar{j}$$

El esfuerzo normal y el esfuerzo cortante tienen por valor:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} = 2ALy \\ \tau_n &= A(c^2 - y^2) \end{aligned}$$

La distribución de esfuerzos normales en $x = L$ se muestra en la Fig. 1.30.

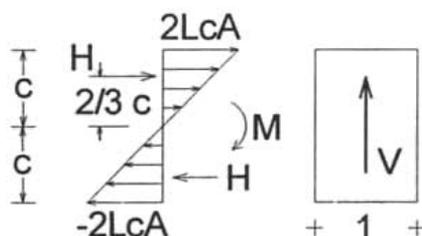


Figura 1.30: Distribución de esfuerzos normales en el plano $x = L$.

Dicha distribución genera un par interno que vale:

$$M_i = H \cdot d$$

Siendo

$$H = \frac{2LcAc}{2} = c^2LA$$

El brazo de palanca del par vale:

$$d = \frac{4}{3}c$$

Por lo tanto el momento interno resulta igual a:

$$M_i = (c^2LA) \frac{4}{3}c = \frac{4}{3}c^3AL$$

La distribución de esfuerzos cortantes produce una fuerza cortante igual a:

$$V = \frac{4}{3}c^3A$$

Esta fuerza está en equilibrio con la que se produce en $x = 0$.

El momento de inercia centroidal de la sección se puede expresar como:

$$I = \frac{2}{3}c^3, \text{ por lo que } A = \frac{M_i}{2IL}$$

Por equilibrio el momento interno que produce la distribución de esfuerzos normales en $x = L$, debe ser igual al momento que produce la distribución de esfuerzos cortantes en ambos extremos de la barra.

Dado que el esfuerzo normal que actúa en la cara $x = L$, se puede expresar como:

$\sigma_n = 2ALy$, y sustituyendo el valor de A en esta última expresión, se llega a:

$$\sigma_n = \frac{M_i}{I}y$$

Ecuación conocida en los textos de mecánica de materiales como fórmula de la escuadría.

1.14 Ecuaciones de equilibrio de momentos en partículas de un continuo

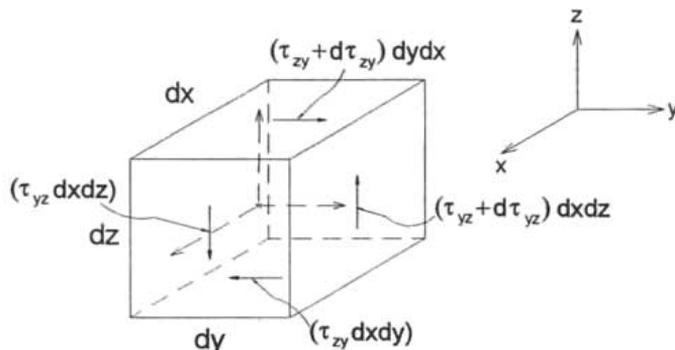


Figura 1.31: Ecuaciones de equilibrio de una partícula de un medio continuo.

En la Fig. 1.31 se muestra el estado de esfuerzo a que se encuentra sometido una partícula elemental de un medio continuo. Por facilidad únicamente se indican las fuerzas en las caras que van a producir giros alrededor del eje x .

Por $\sum M_x = 0$

$$\begin{aligned}
(\tau_{yz} + d\tau_{yz}) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - (\tau_{zy} + d\tau_{zy}) dx dy \frac{dz}{2} \\
- \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + m_x dv = 0 \\
d\tau_{yz} - d\tau_{zy} + 2m_x = 0 \\
\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz + 2m_x = 0
\end{aligned} \tag{1.85}$$

De manera análoga; por $\sum M_y = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx + 2m_y = 0 \tag{1.86}$$

Finalmente, por $\sum F_z = 0$, se llega a:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + 2m_z = 0 \tag{1.87}$$

De las ecs. 1.85, 1.86 y 1.87 se pueden definir los valores de m_x , m_y y m_z , debidos a la excentricidad de las acciones que se generan en la partícula respecto al centroide.

Para el ejemplo 1.6, la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de momentos conduce a:

$$\text{Por } \sum M_x = 0 ; 0 - 0 + 2m_x = 0 \Rightarrow m_x = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum M_y = 0 ; 0 - 0 + 2m_y = 0 \Rightarrow m_y = 0 \\
\sum M_z = 0 ; 0 - (-2y) A dy + 2m_z = 0 \\
m_z = -A y dy
\end{aligned}$$

Donde:

$$m_z = -A \int y dy = -A \frac{y^2}{2} = \frac{F}{4I} y^2$$

Este resultado muestra que existirán tendencias al giro de las partículas alrededor del eje z , dependiendo de su posición en el continuo.

La existencia de estos momentos implica que las partículas no se mueven como partículas rígidas, sino que deben presentarse distorsiones para garantizar la existencia de continuidad.

Los pares de esfuerzo se autoequilibran con los correspondientes a las partículas simétricas respecto al eje z , sin que exista la necesidad de aplicar momentos externos para equilibrarlas. Estos momentos se producen en el problema en estudio por la distribución no uniforme de esfuerzos en las caras de las partículas.

Normalmente en campos de esfuerzos no uniformes existen estos pares de esfuerzos que tratan de provocar rotaciones y distorsiones en las partículas.

Así, mediante las ecuaciones de equilibrio se pueden identificar las características del vector fuerza de cuerpo \bar{f} y del vector momento \bar{m} , dados por:

$$\begin{aligned}\bar{f} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \bar{m} &= m_x\bar{i} + m_y\bar{j} + m_z\bar{k}\end{aligned}$$

Capítulo 2

Estado de Deformación

Consideremos una partícula elemental de un medio continuo descargado, y llamemos a este estado del cuerpo la configuración inicial ($t=0$) o no deformada. Cada una de las partículas que forman el medio continuo en esta configuración reciben el nombre de partículas materiales, cuya posición se establecerá en el sistema de referencia cartesiano x_1, x_2, x_3 .

Al someter al cuerpo deformable a un sistema de cargas se generan estados de esfuerzo los que a su vez provocarán estados de deformación. La forma que adopta el medio para un tiempo t cualquiera se conoce como configuración deformada y corresponde a la imagen que proporciona una fotografía del cuerpo para el tiempo especificado. Cada una de las partículas que forman el cuerpo en esta configuración reciben el nombre de partículas espaciales, cuya posición se establecerá en el sistema cartesiano x'_1, x'_2, x'_3 .

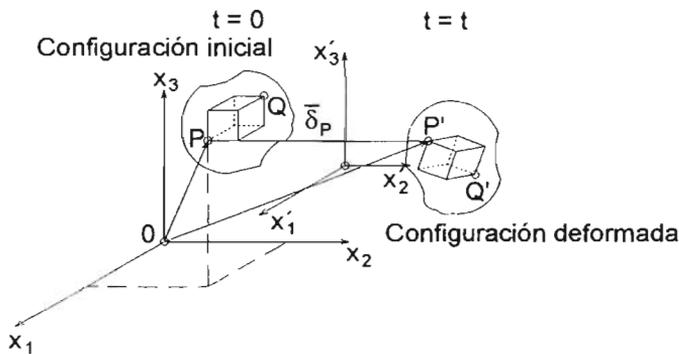


Figura 2.1: Definición de vector desplazamiento.

Para describir la cinemática del continuo se supondrá por comodidad que los sistemas de referencia x_1, x_2, x_3 y x'_1, x'_2, x'_3 , están superpuestos (Fig. 2.1).

La posición de cada partícula del medio en la configuración inicial se puede definir mediante un vector de posición \overline{OP} cuyas componentes son:

$$(\overline{OP}) = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k} \quad (2.1)$$

Al transcurrir el tiempo de $t = 0$ a $t = t$, el vector de posición del punto que define a la partícula quedará definido por el vector de posición:

$$(\overline{OP'}) = x'_1\bar{i} + x'_2\bar{j} + x'_3\bar{k} \quad (2.2)$$

De la Fig. 2.1 se puede establecer que :

$$\overline{OP'} = \overline{OP} + \bar{\delta}_p \quad (2.3)$$

Siendo $\bar{\delta}_p$ el vector desplazamiento del punto P , el cual puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_p &= (x'_1\bar{i} + x'_2\bar{j} + x'_3\bar{k}) - (x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}) \\ \bar{\delta}_p &= (x'_1 - x)\bar{i} + (x'_2 - x_2)\bar{j} + (x'_3 - x_3)\bar{k} \end{aligned}$$

Llamando a las componentes del vector desplazamiento:

$$x'_1 - x = u \quad (2.4)$$

$$x'_2 - y = v \quad (2.5)$$

$$x'_3 - z = w \quad (2.6)$$

Tomando en cuenta estas últimas ecuaciones, el vector desplazamiento se puede escribir como:

$$\bar{\delta}_p = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k} \quad (2.7)$$

Evidentemente las componentes del vector desplazamiento u , v y w , dependen de la posición del punto en el continuo y del tiempo transcurrido de $t = 0$ a $t = t$.

Si el vector desplazamiento está asociado con cualesquier partícula en la configuración no deformada, entonces sus componentes se pueden escribir (notación indicial) como:

$$\delta_i(x_1, x_2, x_3) = x'_i(x_1, x_2, x_3) - x_i \quad (2.8)$$

En el caso de que el vector desplazamiento esté asociado con cualquier partícula en la configuración deformada, se tiene:

$$\delta_i(x'_1, x'_2, x'_3) = x'_i - x_i(x'_1, x'_2, x'_3) \quad (2.9)$$

Así, las ecs. 2.8 y 2.9, continuas y derivables, permitirán describir el campo vectorial de desplazamientos de todos los puntos de un continuo en cualquier instante.

El lugar geométrico de los extremos de vectores desplazamiento $\bar{\delta}$ respecto a la posición original describirá la trayectoria de cada punto material del continuo.

El conocimiento de las trayectorias contribuye a describir la cinemática de las partículas de un medio continuo, pero además se debe describir el movimiento relativo de la partícula respecto a la trayectoria para conocer la cinemática completa de las partículas.

Para ello se analizará una partícula elemental del continuo, tal como se muestra en la Fig. 2.2, donde por facilidad de exposición se adoptará un sistema de referencia cartesiano x, y, z .

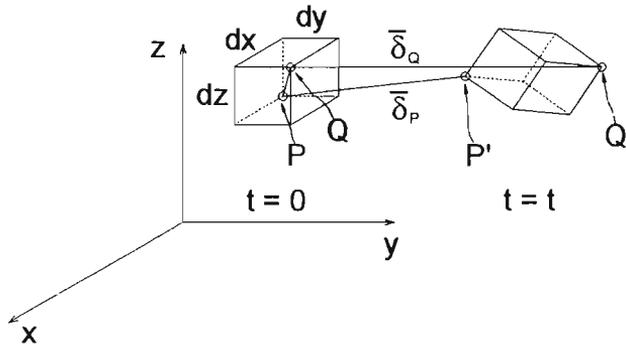


Figura 2.2: Definición de vector desplazamiento relativo.

Supongamos una partícula material del medio ($t = 0$) y fijemos dos puntos de dicha partícula, por ejemplo P y Q , separados una distancia diferencial. La posición de dichos puntos está dada por las coordenadas:

$$P(x, y, z); \quad Q(x + dx, y + dy, z + dz)$$

Al transcurrir el tiempo, la posición de la partícula en la configuración deformada estará dada por las coordenadas de los puntos P' y Q' , esto es:

$$P'(x + u, y + v, z + w)$$

$$Q'(x + dx + u + du, y + dy + v + dv, z + dz + w + dw)$$

Así, la nueva posición de la partícula quedará definida una vez que se establezca el campo de desplazamientos $\bar{\delta}$, mediante funciones continuas y derivables.

2.1 Características de rotación y cambio de forma de la partícula

Con referencia a la Fig. 2.2, llamaremos al vector $\Delta\bar{\delta}$ la diferencia vectorial siguiente:

$$\Delta\bar{\delta} = \bar{\delta}_Q - \bar{\delta}_P \quad (2.10)$$

El vector $\Delta\bar{\delta}$ mide la rotación y el cambio de forma de la partícula y representa el movimiento relativo del punto Q respecto al punto P.

Evaluando la ec.2.10, el movimiento relativo de la partícula quedará descrito por:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\delta} &= (u + du)\bar{i} + (v + dv)\bar{j} + (w + dw)\bar{k} - (u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}) \\ \Delta\bar{\delta} &= du\bar{i} + dv\bar{j} + dw\bar{k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desarrollando la ec. 2.11, se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\delta} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \bar{j} \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \bar{k} \end{aligned} \quad (2.12)$$

La ec. 2.12 se puede escribir de manera matricial como:

$$\Delta\bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

De la Fig. 2.2 se puede observar que el vector que une los puntos P y Q resulta igual a:

$$\overline{PQ} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \quad (2.14)$$

Dividiendo la ec. 2.13 entre el módulo de \overline{PQ} , se obtiene:

$$\frac{\Delta\bar{\delta}}{|\overline{PQ}|} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{|\overline{PQ}|} \\ \frac{dy}{|\overline{PQ}|} \\ \frac{dz}{|\overline{PQ}|} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Obsérvese en esta última ecuación que los elementos del vector columna representan los cosenos directores del vector que va de P a Q , el cual se puede escribir como:

$$\bar{e} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k} \quad (2.16)$$

Llamando a $\frac{\Delta\bar{\delta}}{|\overline{PQ}|}$ el vector deformación total, $\bar{\varepsilon}$, la ecuación 2.15 se puede escribir como:

$$\bar{\varepsilon} = [\bar{E}_{ij}] |\bar{e}| \quad (2.17)$$

Siendo

$$\bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

\bar{E}_{ij} recibe el nombre de tensor deformación total.

Este tensor se puede expresar como la suma de dos matrices, esto es:

$$\bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La primera matriz se conoce como tensor deformación, E_{ij} , mientras que la segunda recibe el nombre de tensor rotacional, Ω_{ij} .

Así el tensor deformación total se puede expresar como la suma de dos tensores, esto es:

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij} + \Omega_{ij} \quad (2.20)$$

2.2 Interpretación física del tensor rotacional

Definiendo a los términos del tensor rotacional, Ω_{ij} , como:

$$\begin{aligned} \Omega_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); & \Omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \Omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); & \Omega_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \Omega_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right); & \Omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Obsérvese que los elementos del tensor rotacional guardan la siguiente relación:

$$\Omega_{yx} = -\Omega_{xy}; \quad \Omega_{zx} = -\Omega_{xz}; \quad \Omega_{zy} = -\Omega_{yz}$$

Por lo que dicho tensor se puede representar como:

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{yx} & \Omega_{zx} \\ -\Omega_{yx} & 0 & \Omega_{zy} \\ -\Omega_{zx} & -\Omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Para identificar los términos del tensor rotacional Ω_{ij} , recordemos la definición de rotacional de un campo vectorial.

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{e} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bar{k} \\ \text{rot} \bar{e} &= 2 [\Omega_{yz} \bar{i} + \Omega_{zx} \bar{j} + \Omega_{xy} \bar{k}] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Calculando el producto vectorial $\frac{1}{2} \text{rot} \bar{e} \times \bar{e}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{rot} \bar{e} \times \bar{e} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\Omega_{zy} & \Omega_{zx} & \Omega_{xy} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} \\ &= \{ \Omega_{zx} \cos \gamma - \Omega_{xy} \cos \beta \} \bar{i} - \{ -\Omega_{zy} \cos \gamma - \Omega_{xy} \cos \alpha \} \bar{j} \\ &\quad + \{ -\Omega_{zy} \cos \beta - \Omega_{zx} \cos \alpha \} \bar{k} \\ \frac{1}{2} \text{rot} \bar{e} \times \bar{e} &= \{ \Omega_{zx} \cos \gamma + \Omega_{xy} \cos \beta \} \bar{i} + \{ \Omega_{zy} \cos \gamma + \Omega_{xy} \cos \alpha \} \bar{j} \\ &\quad + \{ \Omega_{yz} \cos \beta + \Omega_{xz} \cos \alpha \} \bar{k} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por otra parte, el tensor rotacional aplicado a la dirección definida por el vector \bar{e} , resulta igual a:

$$\begin{aligned} [\Omega_{ij}] |\bar{e}| &= \{ (\Omega_{yx}) \cos \beta + (\Omega_{zx}) \cos \gamma \} \bar{i} + \{ (\Omega_{xy}) \cos \alpha + (\Omega_{zy}) \cos \gamma \} \bar{j} \\ &\quad + \{ (\Omega_{xz}) \cos \alpha + (\Omega_{yz}) \cos \beta \} \bar{k} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Obsérvese que la ecs. 2.23 y 2.24 resultan ser iguales, por lo que:

$$[\Omega_{ij}] |\bar{e}| = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{e} \times \bar{e} \quad (2.25)$$

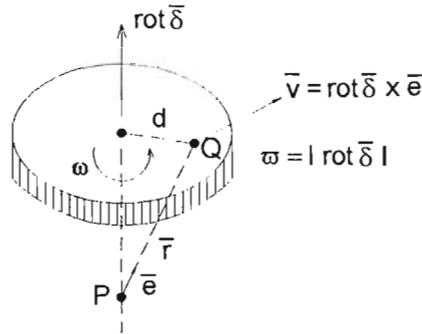


Figura 2.3: Interpretación física del término $\text{rot } \bar{\delta} \times \bar{e}$.

La interpretación física de $\frac{1}{2} \text{rot } \bar{\delta} \times \bar{e}$ se muestra en la Fig. 2.3, donde se puede observar que dicho término representa al conjunto de vectores \bar{v} generados por una rotación alrededor del eje $\text{rot } \bar{\delta}$, con un giro ω de magnitud $|\frac{1}{2} \text{rot } \bar{\delta}|$. El conjunto de vectores \bar{v} tienen magnitudes proporcionales a su distancia d al vector $\text{rot } \bar{\delta}$.

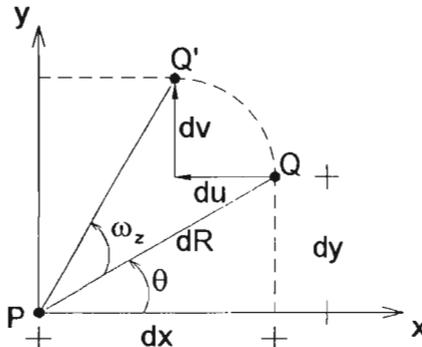


Figura 2.4: Rotación pura de una barra rígida.

Para aclarar el significado físico del tensor rotacional, consideremos una barra rígida sometida a un giro ω_z , tal como se muestra en la Fig.2.4. Consideremos que en los extremos de la barra se localizan los puntos P y Q , separados una distancia diferencial.

El vector desplazamiento relativo del punto Q respecto al punto P , es :

$$\Delta \bar{\delta} = d u \bar{i} + d v \bar{j} \quad (2.26)$$

El desplazamiento du se puede calcular como:

$$\begin{aligned} du &= dR \cos(\omega_z + \theta) - dR \cos \theta \\ &= dR(\cos \omega_z \cos \theta - \text{sen} \omega_z \text{sen} \theta) - dR \cos \theta \\ \frac{du}{dR} &= (\cos \omega_z - 1) \cos \theta - \text{sen} \omega_z \text{sen} \theta \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} dv &= dR \text{sen}(\omega_z + \theta) - dR \text{sen} \theta \\ &= dR(\text{sen} \omega_z \cos \theta + \cos \omega_z \text{sen} \theta) - dR \text{sen} \theta \\ \frac{dv}{dR} &= \text{sen} \omega_z \cos \theta + (\cos \omega_z - 1) \text{sen} \theta \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las ecs. 2.27 y 2.28 se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dR} \\ \frac{dv}{dR} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_z - 1 & -\text{sen} \omega_z \\ \text{sen} \omega_z & \cos \omega_z - 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Si ω_z es pequeño, entonces $\text{sen} \omega_z = \omega_z$ y $\cos \omega_z = 1$, por lo que la ec. 2.29 se reduce a:

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dR} \\ \frac{dv}{dR} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

Obsérvese que esta última ecuación puede ser representada como:

$\bar{\epsilon} = [\Omega_{ij}] |\bar{e}|$, con $E_{ij} = 0$, por lo tanto $\Omega_{yx} = -\omega_z$ y $\Omega_{xy} = \omega_z$. Así los términos del tensor rotacional Ω_{ij} representan los giros del elemento alrededor del eje z .

2.3 Interpretación física del tensor deformación

El tensor deformación quedó definido por:

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

A continuación se da la interpretación física de cada uno de los elementos del tensor deformación.

El término $\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{\Delta u}{\Delta x}$; Δu representa el desplazamiento del elemento dx en la dirección x , mientras que Δx es la dimensión original del elemento. Así $\frac{\partial u}{\partial x}$ representa la deformación normal o longitudinal unitaria en la dirección x , y en lo que sigue la designaremos como ε_{xx} . El primer subíndice representa la dirección del desplazamiento del punto Q a Q' , en tanto que el segundo representa la dirección de los puntos P a Q , dada por el vector unitario \bar{e} .

De manera similar designaremos a los términos $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$ y $\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{zz}$, los cuales representan las deformaciones normales o longitudinales unitarias en las direcciones y y z , respectivamente. Los valores de ε serán positivos cuando los lados de la partícula aumentan de longitud, en caso contrario serán negativos.

En lo que respecta al término $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, la interpretación física se hará con referencia a la Fig. 2.5. Considérese un elemento diferencial cuya configuración no deformada está definida por los vértices O , P , Q , y R , fijo en O . Una vez que el elemento ha sido deformado, los vértices en la configuración deformada son P' , Q' , R' .

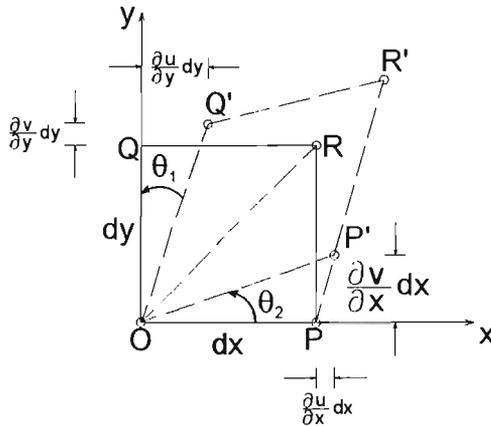


Figura 2.5: Interpretación física del término $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.

Con base en esta figura, se tiene:

$$\tan \theta_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.32)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.33)$$

Por otra parte si el ángulo θ es pequeño, entonces:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \approx \theta_1 + \theta_2 \quad (2.34)$$

En lo que sigue designaremos al término $\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = \gamma_{yx}$, vemos que éste representa el cambio angular entre los lados dx y dy y se conoce como deformación angular o deformación cortante.

Analizando las características de deformación en los planos xz y yz , se puede establecer por analogía:

$$\gamma_{zx} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$$\gamma_{zy} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\}$$

siendo γ_{zx} y γ_{zy} los cambios angulares entre los lados dx y dz y los lados dy y dz , respectivamente. Los valores de las deformaciones angulares γ , serán positivos cuando decrece el ángulo que forman los lados correspondientes, en caso contrario serán negativos.

De esta manera el tensor deformación puede ser representado como:

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Así, en el tensor E_{ij} aparecen:

a) En su diagonal principal, las deformaciones longitudinales unitarias en tres direcciones ortogonales.

b) Simétricamente a la diagonal principal aparecen la mitad de las deformaciones angulares entre tres lados originalmente ortogonales.

Ejemplo 2.1

En el continuo representado en la Fig. 2.6, se establece el siguiente vector desplazamiento:

$$\bar{\delta} = (-\theta yz)\bar{i} + (\theta xz)\bar{j}$$

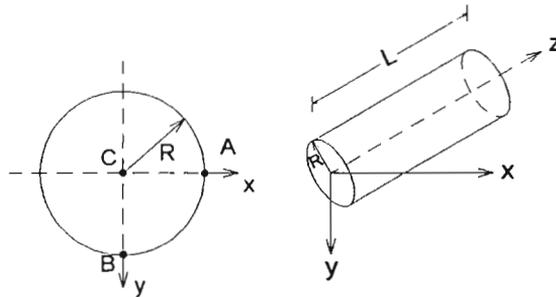


Figura 2.6: Barra cilíndrica sometida a un campo de desplazamientos.

Las componentes del vector desplazamiento son:

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz; \quad w = 0; \quad \theta = cte$$

Los elementos del tensor deformación se calculan como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & ; & & \frac{\partial v}{\partial x} &= \theta z \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\theta z & ; & & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\theta y & ; & & \frac{\partial v}{\partial z} &= \theta x \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 & ; & & \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 & ; & & \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \text{rot} \bar{\delta} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \bar{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 \text{rot} \bar{\delta} &= \bar{i} (0 - \theta x) - \bar{j} (0 + \theta y) + \bar{k} (\theta z + \theta z) \\
 \text{rot} \bar{\delta} &= \bar{i} (-\theta x) - \bar{j} (\theta y) + \bar{k} (2\theta z)
 \end{aligned}$$

Además:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\theta y}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\theta x}{2} \\ -\frac{\theta y}{2} & \frac{\theta x}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

a) Cinemática de la partícula C (origen).

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Se tiene: $\bar{\delta} = 0$, $E_{ij} = 0$, $\text{rot} \bar{\delta} = 0$.

De lo anterior se concluye que:

No hay traslación, ni rotación ni cambio de forma.

Analizando la cinemática de la partícula A, en $z = 0$.

En este caso $u = 0$; $v = 0$; $w = 0 \implies \bar{\delta} = 0$.

$\text{rot} \bar{\delta} = -R\theta \bar{i} \implies$ la partícula gira alrededor del eje x en dirección negativa.

El tensor deformación vale:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta R \\ 0 & \theta R & 0 \end{bmatrix} \implies \text{hay cambio de forma}$$

b) Manejando el mismo tensor, describa el movimiento de las partículas A, B, C en las caras $z = 0$ y $z = L$.

b.1) Establezca claramente la rotación de cada una de esas partículas.

b.2) Defina los cambios de forma y dimensiones en las partículas propuestas.

En $z = 0$, se tiene:

$$\bar{\delta} = (-\theta y z) \bar{i} + (\theta x z) \bar{j}$$

Por lo tanto, $\bar{\delta} = 0$. Este resultado implica que las partículas no experimentan desplazamientos paralelos a ningún eje.

Para el rotacional se tiene:

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{\delta} &= (-\theta x)\bar{i} + (-\theta y)\bar{j} + (2\theta z)\bar{k} \\ \text{rot}\bar{\delta} &= (-\theta x)\bar{i} - (\theta y)\bar{j} \end{aligned}$$

El tensor deformación vale:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\theta$$

Si se compara el vector rotacional con el vector de posición de cada punto, descrito por:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

Se puede ver que ambos vectores tienen las mismas líneas de acción pero difieren en dirección en 180° . Además, las magnitudes de los vectores $\text{rot}\bar{\delta}$ son proporcionales en θ , a la magnitud de los vectores de posición.

Lo anterior indica que todos los vectores $\text{rot}\bar{\delta}$ coinciden en el origen. Por lo tanto,

$$[\text{rot}\bar{\delta}]_{\text{origen}} = 0 \quad \implies \quad \text{no hay giro}$$

Analizando la sección $z = 1$, se tiene:

$$\bar{\delta} = (-\theta y)\bar{i} + (\theta x)\bar{j}$$

Ya que $w = 0$, la sección permanece plana, y sólo se presentan desplazamientos en el plano de la sección.

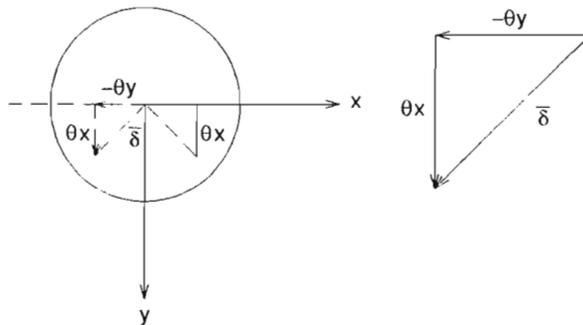


Figura 2.7: Componentes del vector desplazamiento en la sección $z = 1$.

Dado que

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \quad \text{y} \quad \bar{\delta} = (-\theta y)\bar{i} + (\theta x)\bar{j}$$

Los desplazamientos son proporcionales a la magnitud del vector de posición \bar{r} y ortogonales a él, por lo que podemos escribir.

$$|\bar{\delta}| = \theta |\bar{r}|$$

En consecuencia, la sección $z = 1$ permanece plana y gira rígidamente alrededor del eje z , un ángulo θ .

El ángulo θ mide el giro respecto a z , de una sección distante $z = 1$, de la sección que no se mueve.

Además,

$$[rot\bar{\delta}]_{z=1} = (-\theta x)\bar{i} - (\theta y)\bar{j} + (2\theta)\bar{k}$$

Este vector es igual al de la sección $z = 0$, más un vector $2\theta\bar{k}$, que implica una rotación rígida alrededor de $z = 0$.

Además de estos movimientos rígidos de las partículas, se cumple que

$$[E_{ij}]_{z=1} = [E_{ij}]_{z=0}$$

Finalmente, en $z = L$

$$[\bar{\delta}]_{z=L} = [\bar{\delta}_{z=1}] L$$

La sección permanece plana, girando un ángulo θL respecto al eje z .

$$[rot\bar{\delta}]_{z=L} = [rot\bar{\delta}]_{z=0} + (2\theta L)\bar{k}$$

Así, las rotaciones de las partículas son similares a las de $z = 0$, pero son una rotación rígida alrededor de z , con magnitud igual a θL .

Por lo tanto, $\bar{\delta} = (-\theta y z)\bar{i} + (\theta x z)\bar{j}$, describe la torsión de una barra cilíndrica cuando las secciones permanecen planas y la sección $z = L$ gira un ángulo θL respecto a la primera sección.

2.4 Componentes normal y cortante del vector deformación

Previamente se estableció que el vector desplazamiento relativo de un punto Q respecto a un punto P, se puede expresar como la diferencia vectorial $\Delta\bar{\delta} = \bar{\delta}_Q - \bar{\delta}_P$. En la Fig. 2.8 se muestra gráficamente dicho vector. Se puede observar en dicha figura que si P y Q son dos puntos en la configuración no deformada del cuerpo, cuya dirección está dada por el vector unitario \bar{e} , entonces $\Delta\bar{\delta}$ es el vector que va del punto Q al punto Q', ubicado este último en la configuración deformada del cuerpo. De esta manera, y con referencia a la Fig. 2.8 se puede establecer la siguiente suma vectorial:

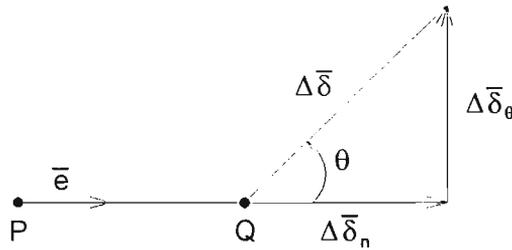


Figura 2.8: Componentes normal y cortante del vector desplazamiento relativo.

$$\Delta\bar{\delta} = \Delta\bar{\delta}_n + \Delta\bar{\delta}_\theta \quad (2.36)$$

Dividiendo esta última ecuación entre el módulo del vector \overline{PQ} , se obtiene:

$$\frac{\Delta\bar{\delta}}{|\overline{PQ}|} = \frac{\Delta\bar{\delta}_n}{|\overline{PQ}|} + \frac{\Delta\bar{\delta}_\theta}{|\overline{PQ}|} \quad (2.37)$$

La ec. 2.37 se puede escribir como:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_n + \bar{\epsilon}_\theta \quad (2.38)$$

siendo $\bar{\epsilon}_n$ el vector deformación normal o longitudinal y $\bar{\epsilon}_\theta$ el vector deformación cortante o desviador. Obsérvese que la ec. 2.38 tiene la misma forma que la establecida para el vector esfuerzo \bar{l}_n .

Dado que el vector deformación $\bar{\epsilon}$ tiene la misma estructura matemática que el vector esfuerzo \bar{l}_n , todo lo establecido con anterioridad en el estudio del estado de esfuerzo será válido para el estado de deformación.

2.5 Deformaciones principales y direcciones principales de deformación

Para determinar las direcciones principales de deformación se hace un planteamiento análogo al realizado para el caso del estado de esfuerzos.

Las magnitudes de las deformaciones principales quedan definidas por la ecuación característica siguiente:

$$\epsilon^3 - J_1\epsilon^2 + J_2\epsilon - J_3 = 0 \quad (2.39)$$

donde:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \text{ Invariante lineal}$$

$$J_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2;$$

Invariante cuadrático

$$J_3 = |[E_{ij}]|; \text{ Invariante cúbico}$$

Por lo tanto el tensor deformación principal se puede expresar como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, y ε_3 las deformaciones principales mayor, intermedia y menor, respectivamente.

Por analogía se puede llegar a establecer un elipsoide de Lamé que describe el conjunto de vectores $\bar{\varepsilon}_n$.

Esto último implica la existencia de direcciones principales de deformación, 1, 2, 3; en dichas direcciones sólo se generan cambios de dimensiones lineales pero no angulares.

Las direcciones principales de deformación se calculan con el modelo matemático de valores y vectores característicos, de manera similar a lo que se hizo para el estado de esfuerzo.

Diremos que dos estados de deformación son iguales si sus invariantes correspondientes son iguales.

2.6 Significado físico del invariante lineal J_1

Considérese un elemento de volumen de un medio continuo sometido a un estado de esfuerzos tal que sus dimensiones se reducen pero el cuerpo mantiene su forma (Fig.2.9). Por facilidad de presentación, supondremos que las dimensiones originales del elemento son unitarias.

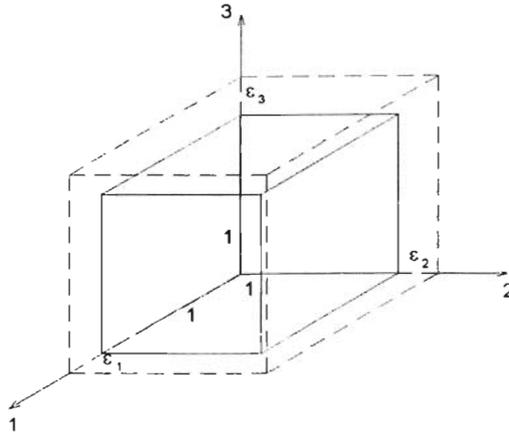


Figura 2.9: Cambio volumétrico de una partícula de un medio continuo.

El cambio de volumen ΔV que experimenta el cuerpo resulta igual a:

$$\Delta V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - (1)(1)(1)$$

Desarrollando:

$$\Delta V = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) + (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)$$

Teniendo presente la definición de invariantes de deformación, resulta que:

$$V = J_1 + J_2 + J_3 \quad (2.41)$$

La suma de los tres invariantes mide el cambio de volumen de una partícula unitaria. Dado que en muchos problemas de ingeniería las deformaciones longitudinales son menores de 1%, se acepta que:

$$\Delta V \approx J_1 \quad (2.42)$$

2.7 Componentes volumétrica y desviadora del tensor deformación

Supongamos que en un punto de un medio continuo se conoce el tensor deformación, E_{ij} , en un marco de referencia principal. Este tensor, al igual que en el caso del tensor esfuerzo, puede ser descompuesto en su partes volumétrica y distorsional o desviadora. Así,

$$E_{ij} = E_v + E_o \quad (2.43)$$

donde:

$$E_v = \frac{J_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$E_o = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \frac{J_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{J_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{J_1}{3} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

E_v mide el cambio de volumen de las partículas unitarias del cuerpo deformable, mientras que E_o mide la distorsión de las partículas unitarias.

2.8 Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones

Supongamos que de alguna manera se establecen las dos ecuaciones diferenciales siguientes, siendo la variable desconocida la componente del vector desplazamiento $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= x + 3y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

El análisis de estas dos ecuaciones nos lleva a que no pueden ser resueltas debido a que son inconsistentes. El cálculo de la derivada $\frac{\partial u}{\partial x \partial y}$ en ambas ecuaciones pone en evidencia dicha inconsistencia. La derivada de la primera ecuación da 3 mientras que la segunda da $2x$.

Si las ecs. 2.46 se expresan como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Entonces, para que estas ecuaciones puedan ser integradas se debe de cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (2.48)$$

La ec. 2.48 representa la condición de integrabilidad de Riemann o ecuación de compatibilidad.

Por lo expuesto, es claro que los elementos del tensor deformación deben guardar cierta relación entre sí para asegurar la existencia de continuidad del campo de desplazamientos $\bar{\delta}$ correspondiente.

Para establecer las ecuaciones de compatibilidad recordemos la definición de cada uno de los elementos del tensor deformación E_{ij} .

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.50)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.51)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.52)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.53)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.54)$$

Para relacionar a los componentes de deformación hagamos las siguientes operaciones.

Derivando la ec. (2.49) respecto a y^2 , se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad (2.55)$$

Haciendo lo mismo con la ec. (2.50) pero ahora respecto a x^2 , se llega a:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (2.56)$$

Derivando la ec. (2.51) respecto a x e y .

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial x} \quad (2.57)$$

Si u y v son funciones continuas

$$\boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}} \quad (2.58)$$

Análogamente, si u y w son funciones continuas,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}} \quad (2.59)$$

Finalmente si v y w son funciones continuas,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}} \quad (2.60)$$

Estas tres últimas ecuaciones forman el primer grupo de ecuaciones de compatibilidad.

Ahora, estableceremos las relaciones entre los valores de las deformaciones angulares γ que permitan definir explícitamente a las deformaciones longitudinales ε .

Derivando la ec. (2.52) respecto a z ,

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (2.61)$$

La ec. (2.53) respecto a y ,

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.62)$$

Finalmente, la ec. (2.54) respecto a x ,

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.63)$$

Multiplicando la ec. (2.63) por (-1) y sumando miembro a miembro con las ecs. (2.61) y (2.62), se llega a:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \quad (2.64)$$

Derivando esta última ecuación respecto a x se obtiene:

$$2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)} \quad (2.65)$$

De manera similar se puede obtener:

$$\boxed{2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)} \quad (2.66)$$

$$\boxed{2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)} \quad (2.67)$$

Las ecs. (2.65), (2.66) y (2.67) forman el segundo grupo de ecuaciones de compatibilidad. Si estas 6 ecuaciones son satisfechas se dirá que los elementos de E_{ij} son compatibles.

Cesaro (1905) demostró que las 6 ecuaciones previas garantizan que se satisfagan las condiciones de Riemann para establecer las condiciones de integrabilidad que permiten la aceptación de la existencia del campo $\bar{\delta} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$, a partir de un tensor E_{ij} compatible.

Ejemplo 2.2

Compruebe que el campo de desplazamientos $\bar{\delta} = (-\theta yz)\bar{i} + (\theta xz)\bar{j}$, siendo θ una constante, define un tensor esfuerzo compatible.

Los elementos del tensor esfuerzo son:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando los dos grupos de ecuaciones de compatibilidad, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad \text{ec.2.58}$$

$$0 = 0 + 0$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \quad \text{ec.2.59}$$

$$0 = 0 + 0$$

Por lo tanto se satisface el primer grupo de ecuaciones.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \quad \text{ec.2.60} \\ 0 &= 0 + 0\end{aligned}$$

Para el segundo grupo de ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad \text{ec.2.65} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x} (-2 - 2 + 0) = 0\end{aligned}$$

Para las otras dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad \text{ec.2.66} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} (2 + 2 + 0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad \text{ec.2.67} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial z} (2 - 2 - 0) = 0\end{aligned}$$

Se satisface el segundo grupo de ecuaciones, por lo que en consecuencia E_{ij} es compatible y existe.

Capítulo 3

Principios Generales de la Mecánica

Estos principios constituyen las leyes fundamentales que rigen el comportamiento mecánico de los medios continuos, siendo expresados muchas de las veces como leyes de conservación de ciertas cantidades físicas. Tal es el caso del principio de la conservación de la masa o ecuación de continuidad, el de la conservación de la cantidad de movimiento, el de la conservación de la energía (primera ley de la termodinámica) y el de aumento de entropía (segunda ley de la termodinámica).

En algunos fenómenos mecánicos es frecuente ignorar algunos de estos principios por considerar que sus efectos son despreciables, lo que permite una formulación matemática del fenómeno más simple.

Las leyes de conservación mencionadas pueden ser aplicadas a un cierto volumen de materia teniendo como frontera una superficie cerrada de forma cualquiera. En el desarrollo del modelo de comportamiento es usual encontrar que ciertas cantidades físicas aparecen como integrales de superficie y otras como integrales de volumen. La transformación de una integral de volumen a una de superficie y viceversa es una operación matemática requerida en esta formulación. Esta transformación matemática es conocida como el teorema de Green o de la divergencia, el cual establece que para una función espacial $f(x, y, z)$, continua y derivable, con primeras derivadas parciales también continuas, se cumple que:

$$\int_A f n_i dA = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int \operatorname{div} \bar{f} dV \quad (3.1)$$

siendo n_i los cosenos directores de la normal a una superficie cerrada A , frontera de un volumen V , en el entorno a un punto definido por dA .

3.1 Principio de la conservación de la masa o ecuación de continuidad

Este principio establece que en el interior de un “volumen de control”, entendido éste como un elemento diferencial asociado a un sistema de referencia fijo en el espacio, la masa no se crea ni se destruye. De esta manera la existencia de cambios de masa en tal volumen de control tendrán que estar asociados a un flujo de masa a través de la superficie de control.

Con referencia a la Fig.3.1, y suponiendo que la densidad, ρ , del medio llena todo el volumen, V , la masa total, M , ocupada por dicho volumen en un tiempo t , resulta:

$$M = \int_V \rho dV \quad (3.2)$$

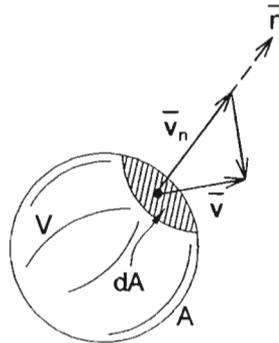


Figura 3.1: Volumen de referencia.

Dado que la densidad del medio es una función de posición y del tiempo, ésta se puede expresar como:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

Por lo tanto, la rapidez de variación de la masa total respecto al tiempo, en el volumen V , está dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.4)$$

Considerando que dentro del volumen V , la masa no se crea ni se destruye, entonces la ec. 3.4, es equivalente a la rapidez de variación del flujo de masa hacia el interior del área A .

Por otra parte, el flujo de masa hacia el exterior del área dA en el entorno del punto “P”, es $\rho v_n dA$, siendo v_n la componente normal del vector velocidad \bar{v} . Así, la rapidez de variación del flujo de masa total es:

$$\int_A (-\rho v_n) dA = - \int_A \rho(\bar{v} \cdot \bar{n}) dA \quad (3.5)$$

En esta ecuación el signo menos obedece a que al entrar flujo el vector velocidad va en sentido contrario de la dirección de la normal \bar{n} a la superficie, y puede ser expresada, de acuerdo con el teorema de Green, como

$$\int_A (-\rho v_n) dA = - \int_V \text{div}(\rho \bar{v}) dV \quad (3.6)$$

Dado que la ecs. 3.4 y 3.6 representan el mismo fenómeno, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= - \int_V \text{div}(\rho \bar{v}) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

Reordenando esta última ecuación se tiene:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) \right] dV = 0 \quad (3.8)$$

La ec. 3.8 se debe de satisfacer para cualquier volumen V , por lo que el integrando necesariamente tendrá que ser nulo, esto es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (3.9)$$

La ec. 3.9 se puede representar en notación indicial como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.10)$$

Desarrollando cada uno de los términos de la ec. 3.10, se tiene:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

Por otra parte:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (3.12)$$

Sustituyendo las ecs. 3.11 y 3.12 en la ec. 3.10, se obtiene:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.13)$$

La ec. 3.13 se puede escribir en un sistema de referencia cartesiano como:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Despejando la $\operatorname{div} \bar{v}$ de esta última ecuación se tiene:

$$\operatorname{div} \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (3.15)$$

De la ec. 3.15 se puede observar que si el medio es incompresible la $\operatorname{div} \bar{v} = 0$. Así en un sistema de referencia cartesiano se tiene que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

Esta ecuación diferencial representa el principio de conservación de la masa y se conoce también como ecuación de continuidad.

3.2 Principio de conservación de la cantidad de movimiento

La rapidez de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas es igual al vector fuerza resultante de todas las fuerzas externas, actuando sobre el conjunto de partículas, siempre y cuando sea la tercera ley de Newton (acción y reacción) quien gobierne las fuerzas internas en el sistema.

En relación con la Fig.3.2, dicho principio queda expresado como:

$$\int_A \bar{t}_n dA + \int_V \rho \bar{f} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} dV \quad (3.17)$$

La ec. 3.17 se puede expresar en notación indicial como:

$$\int_A t_i dA + \int_V \rho f_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \quad (3.18)$$

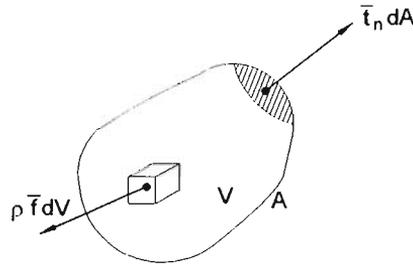


Figura 3.2: Conservación de la cantidad de movimiento.

Obsérvese que el término del lado derecho de la ec. 3.18 se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (3.19)$$

Por otra parte, en el estudio del estado de esfuerzo se estableció que:

$$t_i = T_{ij} n_j \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ec. 3.20 en la 3.18 y aplicando el teorema de Green se obtiene:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV$$

Reordenando términos, se llega a:

$$\int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right] dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (3.21)$$

Finalmente, el principio de conservación de la cantidad de movimiento conduce a:

$$\int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right] dV = 0 \quad (3.22)$$

Dado que la ec. 3.22 se debe cumplir para todo volumen V , entonces el integrando debe ser igual a cero, esto es:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \frac{dv_i}{dt} = 0 \quad (3.23)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación del balance de la cantidad de movimiento o ecuación de Cauchy.

En el caso de equilibrio estático la aceleración $\frac{d\bar{v}}{dt} = 0$, por lo que la ec. 3.23 se reduce a:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad (3.24)$$

La ec. 3.24 representa un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales donde las incógnitas son los nueve elementos del tensor esfuerzo, que por simetría del mismo, bastará con conocer seis elementos de dicho tensor. Es obvio que el problema es estáticamente indeterminado, por lo que será necesario incluir ecuaciones adicionales, por ejemplo, aquellas que relacionen los esfuerzos con las deformaciones de un material en particular. Dichas relaciones reciben el nombre de ecuaciones constitutivas, las cuales se estudiarán en el capítulo 4, para el caso de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos.

3.3 Principio de conservación de energía; primera ley de la termodinámica

El principio de conservación de energía es una consecuencia de la primera ley de la termodinámica, él establece que la energía no se crea ni se destruye sólo se transforma.

Esta ecuación de energía involucra una incógnita adicional, la energía interna, por lo que su utilidad radica en poder relacionar dicha energía interna con alguna variable de estado.

En la mecánica de los medios continuos un sistema termodinámico se define como una porción de materia continua, donde no existe intercambio de materia con cuerpos vecinos, lo que se ha dado en llamar un sistema cerrado. Las superficies frontera del sistema se mueven en general con el flujo de materia.

La rapidez de variación del trabajo realizado por las fuerzas de superficie y de cuerpo sobre un sistema termodinámico, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_A \bar{t}_n \cdot \bar{v} dA + \int_V \rho \bar{f} \cdot \bar{v} dV = \int_A t_i v_i dA \\ &+ \int_V \rho f_i v_i dV \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sustituyendo en la integral de superficie el valor de $t_i = T_{ij} n_j$, y aplicando el teorema de Green, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_A T_{ij} n_j v_i dA &= \int_V \frac{\partial T_{ji} v_i}{\partial x_j} dV \\ &= \int_V \left[v_i \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) \right] dV\end{aligned}\quad (3.26)$$

Sustituyendo la ec. 3.26 en la 3.25, se llega a:

$$\dot{W} = \int_V \left[v_i \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (3.27)$$

Obsérvese que el término entre paréntesis, por la ecuación de movimiento, resulta igual a:

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (3.28)$$

De esta manera la rapidez de variación del trabajo, \dot{W} , es igual a:

$$\dot{W} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int T_{ij} v_{i,j} dV \quad (3.29)$$

Por otra parte:

$$v_{i,j} = D_{ij} + W_{ij} \quad (3.30)$$

siendo D_{ij} el tensor rapidez de deformación y W_{ij} el tensor vorticidad. Este último es un tensor antisimétrico, esto es, $W_{ij} = -W_{ji}$

El producto tensorial que aparece en la segunda integral de la ec. 3.29 es:

$$T_{ji}(D_{ij} + W_{ij}) = T_{ji}D_{ij} + T_{ij}W_{ij} \quad (3.31)$$

En la ec. 3.31 el término $T_{ji}W_{ij}$ es igual a cero, por lo que:

$$T_{ji}v_{i,j} = T_{ij}D_{ij} \quad (3.32)$$

De esta manera la ec. 3.29 queda como:

$$\dot{W} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int T_{ij} D_{ij} dV \quad (3.33)$$

La primera integral de esta última ecuación representa la energía cinética del sistema en tanto que la segunda representa la rapidez de variación de la energía interna total, por lo tanto:

$$\dot{W} = \dot{K} + \dot{U} \quad (3.34)$$

El principio de la conservación de la energía establece que la variación de la energía cinética más la energía interna por unidad de tiempo es igual a la suma de la variación del trabajo más cualquier otra energía suministrada o extraída por unidad de tiempo en el sistema termomecánico.

Definiendo al vector q como flujo de calor por unidad de área y tiempo en el fenómeno de conducción calorífica y a r la constante de radiación de calor por unidad de masa y tiempo, entonces la rapidez de aumento de la cantidad de calor en el medio se puede expresar como:

$$\dot{Q} = - \int_A \bar{q} \cdot \bar{n} dA + \int_V \rho r dV \quad (3.35)$$

Para un medio continuo termomecánico es costumbre expresar la variación de la energía interna total por unidad de tiempo como una función de la energía específica interna u por unidad de tiempo, por lo que \dot{U} , queda como:

$$\dot{U} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \dot{u} dV \quad (3.36)$$

Aplicando el principio de la conservación de la energía, se tiene:

$$\dot{K} + \dot{U} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (3.37)$$

Sustituyendo las ecs. 3.33, 3.35 y 3.36 en 3.37, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \rho u \right) dV &= \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int T_{ij} D_{ij} dV \\ &\quad - \int_A \bar{q} \cdot \bar{n} dA + \int_V \rho r dV \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tomando en cuenta el teorema de Green, el integrando $\bar{q} \cdot \bar{n} dA$, se puede expresar como:

$$\int_A q_j n_j dA = \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV \quad (3.39)$$

De esta manera la ec. 3.38 queda como:

$$\int_V \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho \frac{du}{dt} - T_{ij} D_{ij} + \rho r \right) dV = 0 \quad (3.40)$$

Para un volumen arbitrario V dentro del medio continuo, el integrando de la ec. 3.40 debe ser nulo, por lo que:

$$\rho \frac{du}{dt} = T_{ij} D_{ij} + \rho r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (3.41)$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación de la conservación de la energía o primera ley de la termodinámica.

3.4 Segunda ley de la termodinámica, desigualdad de Clausius-Duhem

Esta ley establece que la variación con respecto al tiempo de la entropía total, s , en un medio continuo de volumen V , siempre es mayor que la suma del flujo de entropía que entra a través de la superficie del medio, A , más la entropía creada interiormente a causa del propio cuerpo. Esta ley se puede expresar desde un punto de vista matemático en forma integral como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_A \frac{q}{\theta} dA \quad (3.42)$$

siendo θ una función de estado denominada la temperatura absoluta.

En la ec. 3.42 el signo “=” corresponde a procesos reversibles, el signo “>” a procesos irreversibles y el signo “<” indica que el proceso es no factible.

Capítulo 4

Elasticidad Lineal

Es la parte de la mecánica de los medios continuos que estudia el comportamiento de sólidos cuyas propiedades del material son independientes del tiempo.

Para establecer la relación entre las fuerzas que actúan en un continuo y los desplazamientos que provocan, es necesario relacionar:

$$\begin{array}{c} \text{Fuerzas} \rightarrow T_{ij} \longleftrightarrow E_{ij} \rightarrow \text{Desplazamientos} \\ \downarrow \\ \text{Relaciones constitutivas} \end{array}$$

4.1 Planteamiento matemático para definir las relaciones constitutivas en un continuo cualquiera

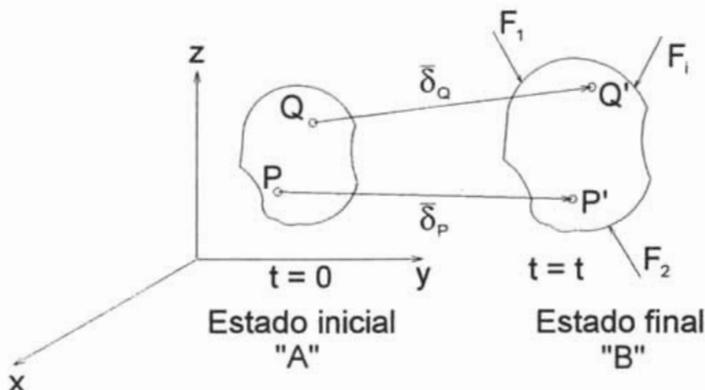


Figura 4.1: Relaciones entre esfuerzos y deformaciones en un medio continuo elástico lineal.

Considérese que el estado de esfuerzos y deformaciones de un medio continuo, corresponde al estado A o inicial, dado por:

$$[E_{ij}]_A = 0 \quad ; \quad [T_{ij}]_A = 0$$

Una vez que el medio continuo se somete a un sistema de cargas se generan en el mismo un estado de esfuerzos y deformaciones, que corresponden al estado B o final, dado por:

$$[E_{ij}]_B \neq 0 \quad ; \quad [T_{ij}]_B \neq 0$$

Al aplicar las fuerzas $\{F_i\}$ se establece un campo de desplazamientos $\bar{\delta} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$. Este campo genera en cada punto del continuo a un tensor $[E_{ij}]_B$. Además, las fuerzas $\{F_i\}$ generan en el continuo el tensor esfuerzo $[T_{ij}]_B$.

Para estudiar la dinámica del continuo, el volumen estará ocupado por un material con relaciones constitutivas bien definidas, de manera que se pueden relacionar los tensores E_{ij} y T_{ij} .

Sabemos que:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad ; \quad [E_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ya que físicamente existe relación entre E_{ij} y T_{ij} , se puede escribir

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \phi_1 (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \sigma_{yy} &= \phi_2 (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \sigma_{zz} &= \phi_3 (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \tau_{xy} &= \psi_1 (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \tau_{xz} &= \psi_2 (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \tau_{yz} &= \psi_3 (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Todas las funciones ϕ y ψ deben ser funciones continuas.

Las funciones anteriores definen a las relaciones constitutivas de los medios continuos.

Las relaciones constitutivas que se seleccionan en la mecánica del medio continuo son relaciones probadas experimentalmente, que permiten describir de manera razonable el comportamiento real de los materiales.

Se considera que el tiempo transcurrido entre el estado A y el estado B es una cantidad pequeña, por lo que sería posible establecer, siguiendo las ideas de continuidad que:

$$\begin{aligned}
[\sigma_{xx}]_B &= [\sigma_{xx}]_A + d\sigma_{xx} \\
[\sigma_{yy}]_B &= [\sigma_{yy}]_A + d\sigma_{yy} \\
[\sigma_{yy}]_B &= [\sigma_{yy}]_A + d\sigma_{yy} \\
[\tau_{xy}]_B &= [\tau_{xy}]_A + d\tau_{xy} \\
[\tau_{xz}]_B &= [\tau_{xz}]_A + d\tau_{xz} \\
[\tau_{yz}]_B &= [\tau_{yz}]_A + d\tau_{yz}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Desarrollando las diferenciales totales de las ecs. 4.2 se tiene:

$$\begin{aligned}
[\sigma_{xx}]_B &= [\sigma_{xx}]_A + \frac{\partial\phi_1}{\partial\varepsilon_{xx}}d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\phi_1}{\partial\varepsilon_{yy}}d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial\phi_1}{\partial\varepsilon_{zz}}d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} \\
&\quad + \frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma_{xz}}d\gamma_{xz} + \frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma_{yz}}d\gamma_{yz} \\
[\sigma_{yy}]_B &= [\sigma_{xx}]_A + \frac{\partial\phi_2}{\partial\varepsilon_{xx}}d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\phi_2}{\partial\varepsilon_{yy}}d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial\phi_2}{\partial\varepsilon_{zz}}d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} \\
&\quad + \frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma_{xz}}d\gamma_{xz} + \frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma_{yz}}d\gamma_{yz} \\
[\sigma_{zz}]_B &= [\sigma_{xx}]_A + \frac{\partial\phi_3}{\partial\varepsilon_{xx}}d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\phi_3}{\partial\varepsilon_{yy}}d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial\phi_3}{\partial\varepsilon_{zz}}d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\phi_3}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} \\
&\quad + \frac{\partial\phi_3}{\partial\gamma_{xz}}d\gamma_{xz} + \frac{\partial\phi_3}{\partial\gamma_{yz}}d\gamma_{yz} \\
[\tau_{xy}]_B &= [\tau_{xy}]_A + \frac{\partial\psi_1}{\partial\varepsilon_{xx}}d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\varepsilon_{yy}}d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\varepsilon_{zz}}d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} \\
&\quad + \frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma_{xz}}d\gamma_{xz} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma_{yz}}d\gamma_{yz} \\
[\tau_{xz}]_B &= [\tau_{xz}]_A + \frac{\partial\psi_2}{\partial\varepsilon_{xx}}d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\varepsilon_{yy}}d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\varepsilon_{zz}}d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} \\
&\quad + \frac{\partial\psi_2}{\partial\gamma_{xz}}d\gamma_{xz} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\gamma_{yz}}d\gamma_{yz} \\
[\tau_{yz}]_B &= [\tau_{yz}]_A + \frac{\partial\psi_3}{\partial\varepsilon_{xx}}d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial\psi_3}{\partial\varepsilon_{yy}}d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial\psi_3}{\partial\varepsilon_{zz}}d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial\psi_3}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} \\
&\quad + \frac{\partial\psi_3}{\partial\gamma_{xz}}d\gamma_{xz} + \frac{\partial\psi_3}{\partial\gamma_{yz}}d\gamma_{yz}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{xx}]_B &= [\sigma_{xx}]_A + C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{21}\varepsilon_{yy} + C_{31}\varepsilon_{zz} + C_{41}\gamma_{xy} \\
 &\quad + C_{51}\gamma_{xz} + C_{61}\gamma_{zy} \\
 [\sigma_{yy}]_B &= [\sigma_{yy}]_A + C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{32}\varepsilon_{zz} + C_{42}\gamma_{xy} \\
 &\quad + C_{52}\gamma_{xz} + C_{62}\gamma_{yz} \\
 [\sigma_{zz}]_B &= [\sigma_{zz}]_A + C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{43}\gamma_{xy} \\
 &\quad + C_{53}\gamma_{xz} + C_{63}\gamma_{yz} \\
 [\tau_{yz}]_B &= [\tau_{yz}]_A + C_{14}\varepsilon_{xx} + C_{24}\varepsilon_{yy} + C_{34}\varepsilon_{zz} + C_{44}\gamma_{xy} \\
 &\quad + C_{54}\gamma_{xz} + C_{64}\gamma_{yz} \\
 [\tau_{yx}]_B &= [\tau_{yx}]_A + C_{15}\varepsilon_{xx} + C_{25}\varepsilon_{yy} + C_{35}\varepsilon_{zz} + C_{45}\gamma_{xy} \\
 &\quad + C_{45}\gamma_{xz} + C_{65}\gamma_{yz} \\
 [\tau_{xy}]_B &= [\tau_{xy}]_A + C_{16}\varepsilon_{xx} + C_{26}\varepsilon_{yy} + C_{36}\varepsilon_{zz} + C_{46}\gamma_{xy} \\
 &\quad + C_{56}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Donde los coeficientes C_{ij} representan operadores diferenciales respecto al tiempo.

Obsérvese que en las expresiones planteadas aparecen 36 operadores diferenciales C_{ij} .

El desarrollo anterior indica que para definir a $[T_{ij}]_B$ es necesario conocer los tensores $[T_{ij}]_A$, $[E_{ij}]_B$ y los 36 operadores diferenciales C_{ij} .

Estas relaciones indican que es posible seguir la siguiente secuencia:

$$\bar{\delta} \longrightarrow [E_{ij}]_B \longrightarrow \text{Relaciones constitutivas} \longrightarrow [T_{jk}]_B \longrightarrow \{F_i\}$$

Por lo tanto para relacionar a los desplazamientos que se generan en el continuo, es necesario conocer a 36 operadores diferenciales respecto al tiempo, lo que conduce a definir a las fuerzas $\{F_i\}$ que provocaron la aparición de $\bar{\delta}$.

Para definir a esos 36 operadores es necesario analizar pruebas experimentales en diversos materiales y observar las características de su respuesta, ésta deberá compararse con formulaciones teóricas que permitan predecir dicha respuesta con suficiente aproximación.

En Ingeniería es común establecer ciertas hipótesis que permitan simplificar las formulaciones matemáticas.

Las hipótesis comunes son:

1° El material que ocupa el continuo es homogéneo (sólo existirán 6 relaciones).

2° El material es isótropo.

3° Las direcciones principales de esfuerzos coinciden con las direcciones principales de deformación.

Tomando en cuenta las hipótesis anteriores, supongamos que en un punto del medio continuo se conocen los tensores esfuerzo y deformación en un sistema de referencia principal:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad [E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Para este caso particular las relaciones constitutivas se reducen a:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}\varepsilon_2 + C_{31}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{32}\varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Obsérvese que la tercera hipótesis reduce a nueve el número de operadores diferenciales necesarios.

Cambiando los ejes 2 y 3 por 3' y 2', al aplicar las ecuaciones constitutivas anteriores, se tendrá:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}\varepsilon'_3 + C_{31}\varepsilon'_2 \quad (4.5)$$

Debido a la indiferencia respecto al marco de referencia, se debe tener que:

$$C_{21} = C_{31} \quad (4.6)$$

Por lo anterior, la ecuación 4.5 queda como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_1 &= (C_{11} - C_{21})\varepsilon_1 + C_{21}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

llamando a

$$C_{11} - C_{21} = 2G \quad C_{21} = \lambda \quad (4.8)$$

y tomando en cuenta que $J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, entonces la ec. 4.8 queda como:

$$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda J_1 \quad (4.9)$$

siendo λ y G dos constantes elásticas conocidas como constantes de Lamé, y representan a operadores diferenciales respecto al tiempo. Para σ_2 y σ_3 se tiene:

$$\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda J_1 \quad (4.10)$$

$$\sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda J_1 \quad (4.11)$$

Por las hipótesis planteadas las ecs. 4.9 a 4.11, se pueden generalizar como:

$$\sigma_n = 2G\varepsilon_n + \lambda J_1 \quad (4.12)$$

De esta manera el problema de la dinámica de continuos homogéneos, isotrópicos y con coincidencia de direcciones principales de esfuerzos y deformaciones, se reduce a la búsqueda de dos operadores diferenciales λ y G en lugar de 36.

4.2 Ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales en un marco de referencia principal

Considérese que en un punto de un medio continuo se establece el tensor deformación:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

El tensor esfuerzo correspondiente, tomando en cuenta la ec. 4.13, resulta igual a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda J_1 + 2G\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda J_1 + 2G\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda J_1 + 2G\varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Estas expresiones pueden ser ligeramente transformadas, descomponiendo los tensores esfuerzo y deformación en sus componentes volumétrica y desviadora, esto es:

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{J_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \frac{J_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{J_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{J_1}{3} \end{bmatrix}$$

Ahora las componentes del tensor T_{ij} son:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2G(\varepsilon_1 - \frac{J_1}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & 2G(\varepsilon_2 - \frac{J_1}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 2G(\varepsilon_3 - \frac{J_1}{3}) \end{bmatrix}$$

Analizando las componentes de ambos tensores, y haciendo $(3\lambda + 2G) = 3K$, se concluye que:

$$[T_v] = 3K [E_v] \quad (4.15)$$

$$[T_o] = 2G [E_o] \quad (4.16)$$

Las ecs. 4.15 y 4.16 muestran una relación simple entre las componentes volumétrica y desviadora de los tensores T_{ij} y E_{ij} , a través de las constantes K y G que reciben el nombre de módulo volumétrico y módulo de rigidez al cortante, respectivamente.

4.3 Ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos en un marco de referencia cartesiano

Supongamos que en un punto del continuo se establecen los tensores E_{ij} y T_{ij} en un marco de referencia cartesiano, esto es:

$$E_{jk} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad T_{jk} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Tratemos de encontrar la forma que adquieren las relaciones constitutivas para relacionar a esos tensores.

Para ello calculemos σ_n y ε_n , con el objeto de aplicar la relación constitutiva previamente derivada para materiales isótropos, ec. 4.12.

Por definición:

$$\bar{\varepsilon}_n = [T_{ij}] |\bar{n}|$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}\bar{l}_n &= (\sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma) \bar{i} \\ &\quad + (\tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma) \bar{j} \\ &\quad + (\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_{zz} \cos \gamma) \bar{k}\end{aligned}\quad (4.17)$$

El esfuerzo normal se calcula como:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \beta + \sigma_{zz} \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha\end{aligned}\quad (4.18)$$

De manera análoga se puede establecer para la deformación normal ε_n :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy} \cos^2 \beta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \gamma_{zx} \cos \gamma \cos \alpha\end{aligned}\quad (4.19)$$

Aplicando la ec. 4.12, se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_n \\ \sigma_n &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \beta + \sigma_{zz} \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \\ &= \lambda J_1 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \\ &\quad + 2G (\varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy} \cos^2 \beta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \gamma_{zx} \cos \gamma \cos \alpha)\end{aligned}$$

Para que exista igualdad se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{zz} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (4.20)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isotrópos.

Las ecs. 4.20 se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Estas ecuaciones toman la forma:

$$[\sigma] = [C] [\epsilon] \quad (4.22)$$

siendo:

$$\begin{cases} [\sigma] : \text{matriz de esfuerzos} \\ [\epsilon] : \text{matriz de deformaciones} \\ [C] : \text{matriz de constantes elásticas del medio} \end{cases}$$

Las ecs. 4.21 pueden ser escritas en notación indicial como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.23)$$

Para expresar las deformaciones en función de los esfuerzos, es necesario invertir la matriz de constantes elásticas y operar matricialmente, esto es:

$$[\epsilon] = [C]^{-1} [\sigma] \quad (4.24)$$

En lugar de buscar invertir la matriz de constantes elásticas se seguirá el siguiente procedimiento.

Las tres primeras expresiones de las relaciones constitutivas, ec. 4.20 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2G) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2G) \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} + (\lambda + 2G) \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Resolviendo el sistema para ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{zz} , empleando el método de Cramer, se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (\lambda + 2G) & \lambda & \lambda \\ \lambda & (\lambda + 2G) & \lambda \\ \lambda & \lambda & (\lambda + 2G) \end{vmatrix} = \lambda + 2G \begin{vmatrix} (\lambda + 2G) & \lambda \\ \lambda & (\lambda + 2G) \end{vmatrix} \\ &\quad + (-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & (\lambda + 2G) \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & (\lambda + 2G) \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ \Delta &= (\lambda + 2G) [(\lambda + 2G)^2 - \lambda^2] - \lambda [\lambda (\lambda + 2G) - \lambda^2] \\ &\quad + \lambda [\lambda^2 - \lambda (\lambda + 2G)] \\ \Delta &= (\lambda + 2G) (4G\lambda + 4G^2) - \lambda^3 - 2\lambda^2 G + \lambda^3 + \lambda^3 - \lambda^3 - 2\lambda^2 G \\ \Delta &= 4G\lambda^2 + 4G^2\lambda + 8G^2\lambda + 8G^3 - \lambda^3 - 2\lambda^2 G + \lambda^3 + \lambda^3 - \lambda^3 - 2\lambda^2 G \\ \Delta &= 12G^2\lambda + 8G^3 = 4G^2 [3\lambda + 2G] \end{aligned} \quad (4.26)$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \lambda & \lambda \\ \sigma_{yy} & (\lambda + 2G) & \lambda \\ \sigma_{zz} & \lambda & (\lambda + 2G) \end{vmatrix} \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\Delta} [\sigma_{xx} \{(\lambda + 2G)(\lambda + 2G) - \lambda^2\} - \lambda \{\sigma_{yy}(\lambda + 2G) - \lambda\sigma_{zz}\} \\ &\quad + \lambda \{(\sigma_{yy}\lambda) - (\lambda + 2G)(\sigma_{zz})\}] \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\Delta} [\sigma_{xx} (4\lambda G + 4G^2) - \sigma_{yy}\lambda^2 - 2\sigma_{yy}\lambda G + \lambda^2\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\lambda^2 \\ &\quad - \sigma_{zz}\lambda^2 - 2\sigma_{zz}\lambda G] \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{\Delta} [\sigma_{xx} (4G)(\lambda + G) - 2\lambda G(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{(4G)(\lambda + G)}{4G^2 [3\lambda + 2G]} \left[\sigma_{xx} - \frac{2\lambda G}{(4G)(\lambda + G)} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \end{aligned}$$

Haciendo:

$$\frac{1}{E} = \frac{(4G)(\lambda + G)}{4G^2 [3\lambda + 2G]} \quad ; \quad \nu = \frac{2\lambda G}{(4G)(\lambda + G)}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{E} = \frac{(\lambda + G)}{G[3\lambda + 2G]} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (4.28)$$

De manera similar, para ε_{yy} y ε_{zz}

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (4.30)$$

Las ecs 4.28, 4.29 y 4.30 son las leyes generalizadas de Hooke para relacionar deformaciones unitarias con esfuerzos normales.

Para establecer la relación entre los esfuerzos cortantes τ y las deformaciones angulares γ , basta recurrir a lo anteriormente establecido.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.31)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\mu} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (4.32)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{\mu} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (4.33)$$

En notación indicial, las ecuaciones 4.28 a 4.33, quedan representadas como:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij} \quad (4.34)$$

Ejemplo 4.1. Defina explícitamente a los valores de λ y G en términos de E y ν .

De las expresiones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz}

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{E} \\ \Delta &= [1(1-\nu^2) + \nu(-\nu-\nu^2) - \nu(\nu^2+\nu)] \frac{1}{E^3} \\ &= [1-\nu^2-\nu^2-\nu^3-\nu^3-\nu^2] \frac{1}{E^3} \\ \Delta &= \frac{1}{E^3} [1-3\nu^2-2\nu^3] = [(1+\nu)(1+\nu)(1-2\nu)] \frac{1}{E^3} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & -\nu & -\nu \\ \varepsilon_{yy} & 1 & -\nu \\ \varepsilon_{zz} & -\nu & 1 \end{vmatrix} = [\varepsilon_{xx}(1-\nu^2) + \nu(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}) \\ &\quad -\nu(-\nu\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})] \frac{1}{E^2} \\ \Delta_x &= [\varepsilon_{xx}(1-\nu^2) + \nu\varepsilon_{yy} + \nu^2\varepsilon_{zz} + \nu^2\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}] \frac{1}{E^2} \\ &= [\varepsilon_{xx}(1-\nu^2) + \varepsilon_{yy}(\nu+\nu^2) + \varepsilon_{zz}(\nu+\nu^2)] \frac{1}{E^2} \\ \Delta_x &= [\varepsilon_{xx}(1-\nu^2) + (\nu+\nu^2)(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \frac{1}{E^2} \\ \\ \sigma_{xx} &= \frac{E\varepsilon_{xx}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\nu E(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= \frac{E\varepsilon_{xx} - E\varepsilon_{xx}\nu + \nu E\varepsilon_{yy} + \nu E\varepsilon_{zz} + E\varepsilon_{xx}\nu - E\varepsilon_{xx}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \sigma_{xx} &= \frac{E\varepsilon_{xx} + \nu E(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - 2E\varepsilon_{xx}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= \frac{E\varepsilon_{xx}(1-2\nu) + \nu E(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \sigma_{xx} &= \frac{E\varepsilon_{xx}}{(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} J_1 \\ \sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{xx} \end{aligned}$$

donde:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Para σ_{yy} y σ_{zz} se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{zz}\end{aligned}$$

Apliquemos las ecuaciones 4.28 a 4.33 para buscar el significado físico de E y ν , Fig. 4.2.

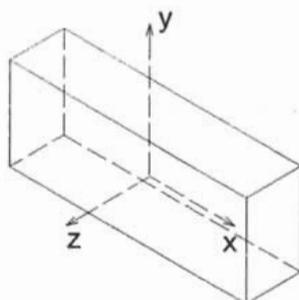


Figura 4.2: Interpretación física de las constantes E y ν .

En el continuo se establece el tensor:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El tensor de deformaciones unitarias quedará definido por:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Aplicando las relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} ; \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} ; \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ E_{ij} &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dado que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

y haciendo $\varepsilon_{xx} = x \implies y = Ex$; siendo la pendiente $m = E$; $\sigma_{xx} = y$
 La constante E representa la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación de una barra prismática sometida a tensión uniaxial, y recibe el nombre de módulo de Young.

El módulo E sólo puede ser aplicable cuando se defina la línea recta en el diagrama esfuerzo-deformación y éste sea independiente del tiempo.

En caso contrario diremos que el material es inelástico y esto implica que las relaciones constitutivas del continuo deben implicar operadores diferenciales respecto al tiempo.

Analicemos ahora la interpretación física de ν .

Del tensor E_{ij} se tiene que:

$$\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{-\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}}{\frac{\sigma_{xx}}{E}} = -\nu \quad ; \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$$

ν resulta ser la relación entre las deformaciones unitarias transversales y la longitudinal, en valor absoluto y recibe el nombre de relación de Poisson.

Si $\varepsilon_{xx} = x$; $\varepsilon_{yy} = y$; $y = -\nu x$

ν resulta ser constante sólo cuando la relación entre ε_{xx} y ε_{yy} es una constante.

4.4 Solución de problemas elásticos haciendo uso de funciones de esfuerzo

Las relaciones constitutivas de los materiales elásticos, lineales homogéneos e isótropos se pueden expresar como:

$$T_v = 3KE_v \qquad T_o = 2GE_o \qquad (4.35)$$

donde K y G son cantidades constantes independientes del tiempo.

Estas relaciones también pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{xx} & ; & \quad \tau_{xy} = \gamma_{xy}G \\ \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{yy} & ; & \quad \tau_{yz} = \gamma_{yz}G \\ \sigma_{zz} &= \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{zz} & ; & \quad \tau_{zx} = \gamma_{zx}G \end{aligned} \qquad (4.36)$$

De manera recíproca también se puede dar la siguiente forma a las relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Las relaciones anteriores, en cualquiera de sus formas, se pueden utilizar para solucionar problemas elásticos empleando funciones de Airy.

4.5 Función de esfuerzos de Airy

Airy propuso el empleo de una función $\phi = \phi(x, y)$, continua y derivable, que permite definir a los elementos de un tensor T_{ij} en el que no existan fuerzas de cuerpo.

Mediante el uso de la Mecánica del Medio Continuo logra definir las condiciones que debe satisfacer ϕ , para cumplir los requisitos de continuidad y equilibrio. La secuencia a seguir es:

Estática \rightarrow Dinámica \rightarrow Cinemática

$\phi \rightarrow T_{ij}$ R. C E_{ij}

Para un estado de esfuerzo plano los elementos del tensor esfuerzo se pueden calcular como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & 0 \\ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{4.38}$$

Veamos que sucede desde el punto de vista de equilibrio al aceptar esta definición:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 ; \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + 0 + f_x &= 0
 \end{aligned}$$

$\therefore f_x = 0$

$$\sum F_y = 0 ; \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + 0 + f_y = 0$$

$$\therefore f_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

$$\therefore f_z = 0$$

En consecuencia, al aceptar la definición de Airy, el equilibrio de medios continuos sin fuerzas de campo, es automáticamente satisfecho. Así, si $\phi(x, y)$ es continua y derivable, el equilibrio en el medio se cumple.

Ejemplo 4.2.

a) Sea $\phi = Ax^2$

Por definición de función de Airy:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

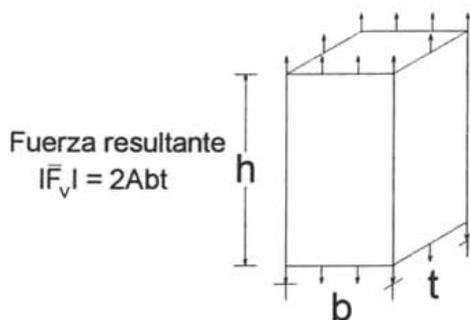


Figura 4.3: Barra prismática sometida a un estado de esfuerzo uniaxial.

Por lo tanto la función $\phi = Ax^2$ resuelve el problema de una barra sometida a fuerzas colineales de magnitud $2Abt$.

b) Sea la función $\phi = By^2$; esta función representa la solución de un continuo sometido a dos fuerzas horizontales colineales, de magnitud:

$$|\bar{F}_H| = 2Bht$$

c) Sea la función $\phi = Ax^2 + By^2$; esta función resuelve el problema de una barra prismática sometida a un estado de esfuerzos biaxial.

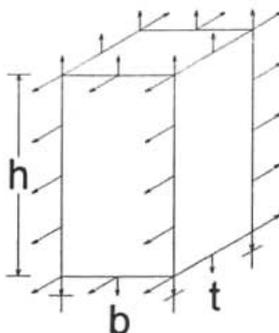


Figura 4.4: Barra prismática sometida a un estado de esfuerzos biaxial.

d) Sea la función $\phi = Cxy$; esta función resuelve el estado de cortante puro.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -C & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

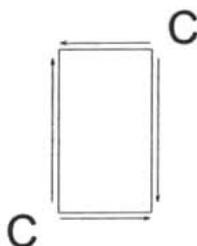


Figura 4.5: Estado de cortante puro.

Para buscar los desplazamientos generados en el continuo por un conjunto de fuerzas definidas por $\phi = \phi(x, y)$, apliquemos el procedimiento descrito por la mecánica de medios continuos.

$$\phi = \phi(x, y) \quad \longrightarrow \quad T_{ij} \quad \longleftrightarrow \quad E_{ij}$$

↓
Relaciones constitutivas

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] & -\frac{\partial^2 \phi}{2G \partial x \partial y} & 0 \\ -\frac{\partial^2 \phi}{2G \partial x \partial y} & \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 \phi \right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} [-\nu \nabla^2 \phi] \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Para afirmar la existencia del campo de desplazamientos $\bar{\delta}$, debe comprobarse la compatibilidad de E_{ij} . La primera ecuación del primer grupo de compatibilidad es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \phi \right\} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 \phi \right\} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x \partial y} \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right] - \nu \frac{\nabla^2 \nabla^2 \phi}{E} &= -\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{2(1 + \nu)}{E} \\ (1 + \nu) \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right] - \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \\ &= -2(1 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned}$$

De aquí puede escribirse:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right] - \nu \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right] \\ &= -2(1 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2\nu \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &= -2\nu \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &= 0 \end{aligned}$$

Esta última expresión puede escribirse como:

$$\boxed{\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0} \quad (4.40)$$

La 1ª ecuación del primer grupo de ecuaciones de compatibilidad se satisface si ϕ es una función biarmónica.

Verifiquemos ahora la segunda ecuación del primer grupo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ 0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-\frac{\nu}{E} \nabla^2 \phi \right] &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \phi &= 0 \\ -\frac{\nu}{E} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Esta última ecuación se satisface si $\nu = 0$ o bien

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ es una función armónica cuando $\nu \neq 0$, también se satisface la ecuación.

La tercera ecuación del primer grupo es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\frac{\nu}{E} \nabla^2 \phi \right] &= 0 \\ \boxed{-\frac{\nu}{E} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0} & \end{aligned} \quad (4.42)$$

La ec. 4.42 es válida si $\nu = 0$, o bien verificando que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ es una función armónica cuando $\nu \neq 0$.

1ª ecuación del 2º grupo:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]$$

$$0 = 0$$

2ª ecuación del 2º grupo:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]$$

$$0 = 0$$

3ª ecuación del 2º grupo:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 ; \quad \frac{2 \partial^2}{\partial x \partial y} \left[-\frac{\nu}{E} \nabla^2 \phi \right] = 0$$

$$\boxed{-\frac{\nu}{E} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) = 0} \quad (4.43)$$

La ec. 4.43 es válida si $\nu = 0$ o bien si $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ es una función armónica.

En consecuencia, en medios elásticos en equilibrio, existe solución cuando es posible definir a una función de Airy $\phi = \phi(x, y)$ con los siguientes requisitos:

- Si $\nu = 0$; ϕ debe ser una función biarmónica.
- Si $\nu \neq 0$; ϕ debe tener derivadas segundas armónicas, es decir T_{ij} debe tener a sus elementos armónicos.

Ejemplo 4.3. Sea $\phi = -Cy^3$ una función continua, cuyo grado permite afirmar que $\nabla^4 \phi = 0$ y $\nabla^2 T_{ij} = 0$.

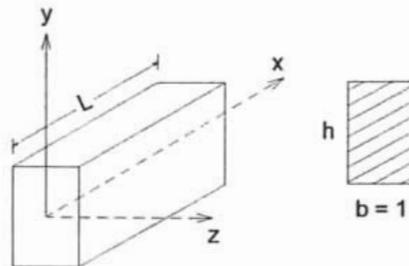


Figura 4.6: Barra prismática sometida a flexión pura.

Por lo tanto, la función propuesta es solución de algún problema elástico lineal, el cual se identifica en lo que sigue:

Aplicando la definición de Airy se obtiene.

$$\sigma_{xx} = -6Cy; \quad \sigma_{yy} = 0; \quad \tau_{xy} = 0$$

Los elementos del tensor T_{ij} resultan:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -6Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se analizarán cada una de las caras de la barra, para conocer si existe un estado de esfuerzos.

En $x = 0$; $n = -\vec{i}$

$$\begin{aligned} [T_{ij}] &= \begin{bmatrix} -6Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vec{l}_n &= [T_{ij}] |\vec{n}| = 6Cy\vec{i} \\ \sigma_n &= \vec{l}_n \cdot \vec{n} = -6Cy; \quad \bar{\sigma}_n = 6Cy\vec{i} \\ \bar{\tau}_{\vec{n}} &= \vec{l}_n - \bar{\sigma}_n = 6Cy\vec{i} - 6Cy\vec{i} = 0 \end{aligned}$$

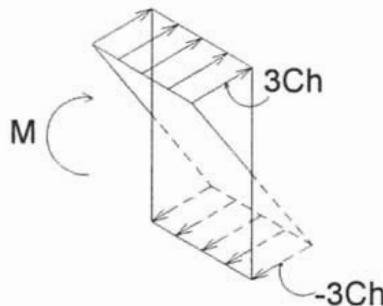


Figura 4.7: Volumen de esfuerzos normales en $x = 0$.

El volumen de esfuerzos que se muestra en la Fig. 4.7, resulta ser un par M alrededor del eje z .

En la cara $x = L$; $\vec{n} = \vec{i}$

$$\begin{aligned}
 [T_{ij}] &= \begin{bmatrix} -6Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{l}_n &= [T_{ij}] |\bar{n}| = -6Cy\bar{i} \\
 \bar{\sigma}_n &= \bar{l}_n \cdot \bar{n} = (-6Cy)\bar{i} \cdot \bar{i} = -6Cy\bar{i} \\
 \bar{\sigma}_n &= |\bar{\sigma}_n| \bar{n} = -6Cy\bar{i} \\
 \bar{\tau}_n &= \bar{l}_n - \bar{\sigma}_n = -6Cy\bar{i} - (-6Cy\bar{i}) \\
 \bar{\tau}_n &= 0
 \end{aligned}$$

El volumen de esfuerzos mostrado en la Fig. 4.7, es equivalente a un par $-M$ en la cara $x = L$.

En la cara $y = \frac{h}{2}$; $\bar{n} = \bar{j}$

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} -3Ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{l}_n = [T_{ij}] |\bar{n}| = 0 \implies$ la cara se encuentra descargada.

En la cara $y = -\frac{h}{2}$; $\bar{n} = -\bar{j}$;

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} +3Ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{l}_n = [T_{ij}] |\bar{n}| = 0 \implies$ la cara se encuentra descargada

La función de esfuerzos propuesta resuelve el problema de una barra prismática sometida a flexión para cualquier material elástico.

Dado que $C = \frac{M}{6I_z}$, entonces

$$\bar{l}_n = \left(\frac{M}{I_z} y \right) \bar{i}$$

Esta última ecuación se conoce como fórmula de la escuadría, la cual es de suma importancia en mecánica de materiales.

Ejemplo 4.4. Sea la función $\phi = \frac{3F}{4c}xy - \frac{F}{4c^3}xy^3 = \frac{3F}{4c} \left\{ xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right\}$, una función continua y derivable.

La función ϕ representa la solución de una ménsula sin fuerzas de cuerpo, sometida a una carga en su extremo libre.

Ya que el tensor no tiene términos armónicos, la solución no es aplicable a medios continuos con $\nu \neq 0$.

Obviamente $\nabla^4 \phi = 0$; es decir, resuelve el problema en medios elásticos en los cuales $\nu = 0$.

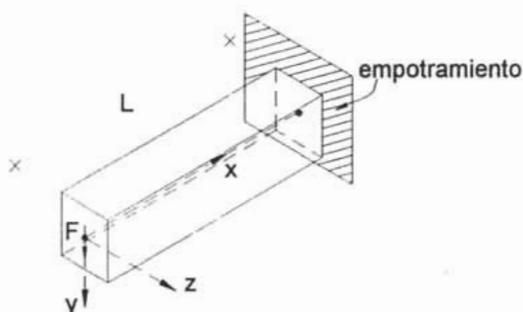


Figura 4.8: Ménsula sometida a una carga puntual en su extremo libre.

Queda como ejercicio al lector demostrar lo antes dicho.

4.6 Funciones de esfuerzos en coordenadas cilíndricas

El tensor esfuerzo en coordenadas cilíndricas resulta igual a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

En coordenadas cilíndricas las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar como:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + f_{\theta} = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + f_z = 0 \quad (4.46)$$

Siendo f_r , f_{θ} y f_z , las componentes del vector fuerza de cuerpo en coordenadas cilíndricas.

En coordenadas polares el tensor esfuerzo se reduce a

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las ecuaciones de equilibrio que debe satisfacer la función de Airy para un estado de esfuerzo plano y fuerzas de cuerpo nulas son:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.48)$$

La función de Airy en términos de coordenadas polares resulta:

$$\phi = \phi(r, \theta)$$

Haciendo el cambio de variables se puede establecer que:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (4.49)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (4.50)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (4.51)$$

Para comprobar la compatibilidad de deformaciones bastará establecer la definición de ∇^2 en coordenadas cilíndricas.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma_{yy} + \sigma_{xx} = I_1 = \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}$$

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi$$

Siendo

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.52)$$

Con esta definición se puede checar la armonía y la biarmonía en problemas específicos.

Ejemplo 4.5. Sea la función

$$\phi = -\frac{P}{\pi} (r\theta \operatorname{sen}\theta)$$

continua y derivable donde P es una constante.

Cálculo de los elementos del tensor esfuerzo.

$$\begin{aligned}
 T_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{P}{\pi} \theta \operatorname{sen} \theta = -\frac{P}{\pi} \theta \operatorname{sen} \theta \\
 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\frac{P}{\pi} r \operatorname{sen} \theta - \frac{P}{\pi} r \theta \cos \theta \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} &= -\frac{P}{\pi} r \cos \theta - \frac{Pr}{\pi} (\theta \operatorname{sen} \theta (-1) + \cos \theta) \\
 &= \frac{Pr}{\pi} [\theta \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta] \\
 \frac{\partial}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \\
 \sigma_{rr} &= -\frac{P}{\pi r} \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{P}{\pi r} [\theta \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta] = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 0 ; \tau_{r\theta} = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto los elementos del tensor esfuerzo son:

$$T_{r\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2P}{\pi r}$$

En cualquier medio este tensor genera un campo de esfuerzos en el cual $f_x = f_y = f_z = 0$.

Ya que únicamente existe un sólo término σ_{rr} , calculemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{rr} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \sigma_{rr} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{2P}{\pi r^2} \cos \theta \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} &= \frac{2P}{\pi r} \sin \theta \\ \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} &= -\frac{4P}{\pi r^3} \cos \theta \\ \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} &= \frac{2P}{\pi r} \cos \theta \\ \nabla^2 \sigma_{rr} &= \left(-\frac{4P}{\pi r^3} \cos \theta + \frac{2P}{\pi r^3} \cos \theta + \frac{2P}{\pi r^3} \cos \theta \right) \\ \nabla^2 \sigma_{rr} &= 0 \quad ; \quad \nabla^2 T_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el tensor propuesto es armónico; resuelve problemas elásticos para cualquier medio con $\nu \neq 0$.

La función propuesta representa al estado radial simple.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

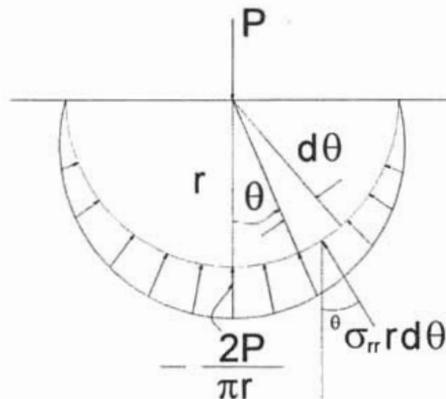


Figura 4.9: Estado radial simple.

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta$$

La fuerza que actúa sobre un elemento $dA = rd\theta$ es $\sigma_{rr}rd\theta$ y su componente vertical es $(\sigma_{rr}rd\theta) \cos \theta$. La resultante de tales componentes queda:

$$\begin{aligned} \sum F_v &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{rr} \cos \theta r d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ \sum F_v &= -\frac{4P}{\pi} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -P \end{aligned}$$

La función propuesta $\phi = -\frac{P}{\pi}(r\theta \text{sen}\theta)$ genera el estado radial simple que aplicado a un semiespacio elástico conduce a la solución de Flamant.

Variación de σ_{rr} con θ constante y r variable.

$$[\sigma_{rr}]_{\theta=0} = y ; [\sigma_{rr}]_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi r}$$

Haciendo $-\frac{2P}{\pi} = c$; $r = x$

$\Rightarrow y = \frac{c}{x}$; la variación de esta última función se muestra en la Fig.4.10.

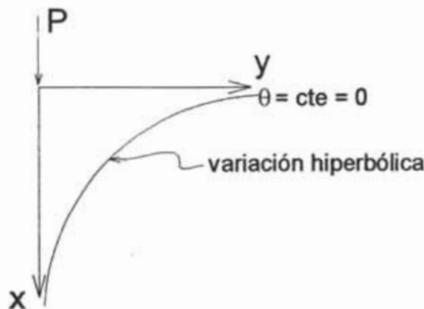


Figura 4.10: Variación de σ_{rr} para $\theta = \text{cte}$ y r variable.

La Fig.4.10 muestra que todos los puntos del semiespacio excepto los de la frontera superior, contribuyen a soportar la carga P .

Ahora definiremos el lugar geométrico de los puntos del semiespacio con el mismo valor del esfuerzo principal.

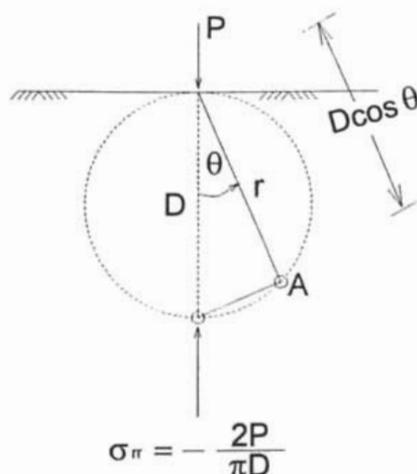


Figura 4.11: Lugar geométrico del semiespacio con el mismo valor de σ_{rr} .

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r}$$

En relación con la Fig.4.11 el punto A que se encuentra sobre la circunferencia tiene como radio vector:

$$r = D \cos \theta$$

Por lo tanto el esfuerzo radial vale:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta = -\frac{2P \cos \theta}{\pi D \cos \theta} = -\frac{2P}{\pi D}$$

En consecuencia, ya que A se encuentra sobre la circunferencia, se debe tener el mismo esfuerzo radial $\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi D}$ en todos los puntos de la circunferencia, exceptuando al punto de tangencia de la circunferencia con la frontera superior.

Se llama isobara a la circunferencia de diámetro D , correspondiente al esfuerzo $\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi D}$.

En la Fig. 4.12 se muestra la construcción de isobaras para diferentes valores de σ_{rr} .

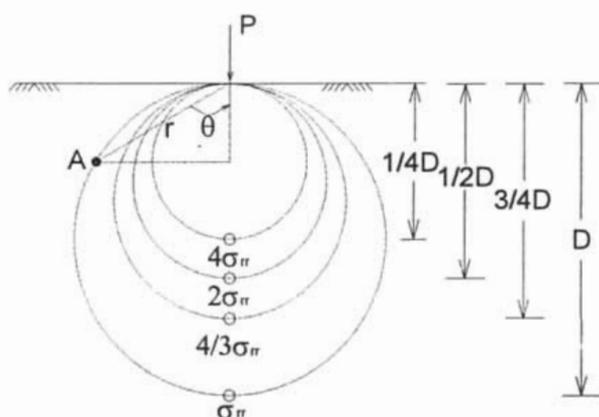


Figura 4.12: Isobaras para el estado radial simple.

Ejemplo 4.6. Una roseta de deformación formada por tres “strain gages” (SG), con el arreglo que se muestra en la Fig.4.13 se coloca en un punto de un medio continuo, obteniéndose las mediciones que se reportan a continuación.

$$\varepsilon_{\bar{e}_1} = 3 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{\bar{e}_2} = 1.5 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{\bar{e}_3} = 5 \times 10^{-4}$$

a) Determinéense los elementos del tensor deformación ε_{xx} , ε_{yy} y γ_{xy} .

Si los parámetros elásticos del medio continuo son: $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ y $\nu = 0.2$.

b) Calcúlense los elementos del tensor esfuerzo σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy} .

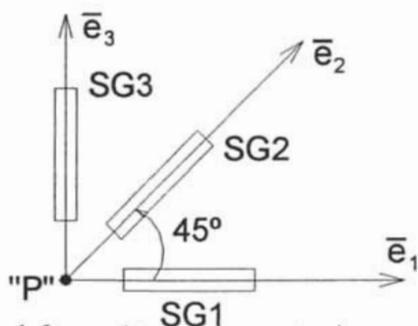


Figura 4.13: Roseta de deformación en un punto de un cuerpo deformable.

La deformación longitudinal asociada a una dirección cualesquiera, está dada por:

$$\varepsilon_\ell = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

Aplicando esta ecuación a las diferentes direcciones en que fueron colocadas los strain gages, se tiene:

Para $\varepsilon_{\bar{e}_1} = 3 \times 10^{-4}$

$$\begin{aligned} 3 \times 10^{-4} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(0^\circ) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \operatorname{sen}(0^\circ) \\ \implies \varepsilon_{xx} &= 3 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Para $\varepsilon_{\bar{e}_2} = 1.5 \times 10^{-4}$

$$\begin{aligned} 1.5 \times 10^{-4} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(90^\circ) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \operatorname{sen}(90^\circ) \\ 1.5 \times 10^{-4} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} + \gamma_{xy} &= 0 \implies \varepsilon_{yy} = -\gamma_{xy} \end{aligned}$$

Para $\varepsilon_{\bar{e}_3} = 5 \times 10^{-4}$

$$\begin{aligned} 5 \times 10^{-4} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ 5 \times 10^{-4} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(180^\circ) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \operatorname{sen}(180^\circ) \\ 5 \times 10^{-4} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \\ \implies \varepsilon_{yy} &= 5 \times 10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xy} = -5 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Por lo tanto el tensor deformación vale:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^{-4} & -2.5 \times 10^{-4} \\ -2.5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Para calcular los elementos del tensor esfuerzo, haremos uso de las ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos, esto es,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda J_1 \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda J_1 \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned}$$

Cálculo de las constantes elásticas,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^6}{2(1+0.2)} = 0.875 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0.2 \times 2.1 \times 10^6}{(1+0.2)(1-2 \times 0.2)} = 0.583 \times 10^5 \text{ MPa}$$

El primer invariante del tensor deformación resulta,

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 8 \times 10^{-4}$$

Por lo tanto los esfuerzos normales valen

$$\sigma_{xx} = 2 \times 0.875 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-4} + 0.583 \times 10^5 \times 8 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_{xx} = 52.50 + 46.64 = 99.14 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 2 \times 0.875 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-4} + 0.583 \times 10^5 \times 8 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_{yy} = 87.5 + 46.64 = 134.14 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0.875 \times 10^5 \times (-5 \times 10^{-4}) = -43.75 \text{ MPa}$$

Finalmente, el tensor esfuerzo vale:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 99.14 & -43.75 \\ -43.75 & 134.14 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

4.7 Energía de deformación elástica para un estado uniaxial de esfuerzos

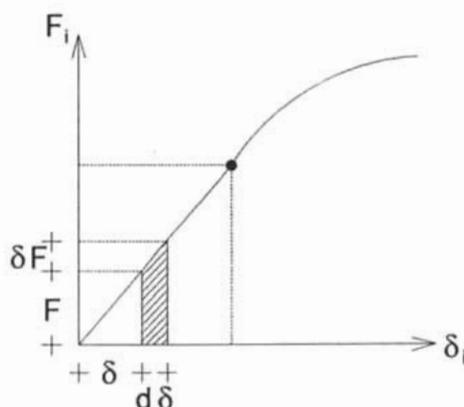


Figura 4.14: Definición de energía de deformación elástica.

Supongamos que la curva esfuerzo-deformación para un material elástico lineal, sometido a un estado de esfuerzos uniaxial es como se muestra en la Fig. 4.14.

La energía que un cuerpo absorbe como resultado de su deformación bajo cierta carga se llama energía de deformación.

Esta se puede expresar como:

$$W = \int_0^{\delta} F d\delta \quad (4.53)$$

La energía de deformación por unidad de volumen o densidad de energía U , se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{V} \int_0^{\delta} F d\delta \quad (4.54)$$

Para una partícula elemental de un medio continuo de volumen $dV = dx dy dz$ y asumiendo que la fuerza se aplica en la dirección x , se tiene:

$$U = \int_0^{\delta_x} \frac{F_x d\delta_x}{dx dy dz} = \int_0^{\epsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx}$$

Integrando se obtiene:

$$U = \frac{\sigma_{xx} \epsilon_{xx}}{2} = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} \quad (4.55)$$

El área bajo la parte lineal de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon$ es una medida de la capacidad del material para almacenar energía elástica. Esta medida se llama módulo de Resiliencia (R) y se puede calcular como:

$$R = \int_0^{\epsilon_{LE}} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} \sigma_{LE} \epsilon_{LE} = \frac{\sigma_{LE}^2}{2E} \quad (4.56)$$

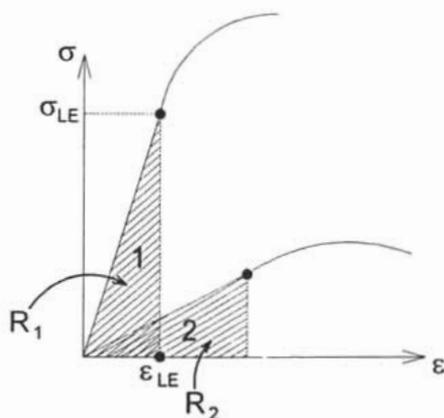


Figura 4.15: Definição de módulo de Resiliencia.

siendo ε_{LE} y σ_{LE} la deformación longitudinal y el esfuerzo normal en el límite elástico, respectivamente.

4.8 Energía de deformación elástica para un estado triaxial de esfuerzos

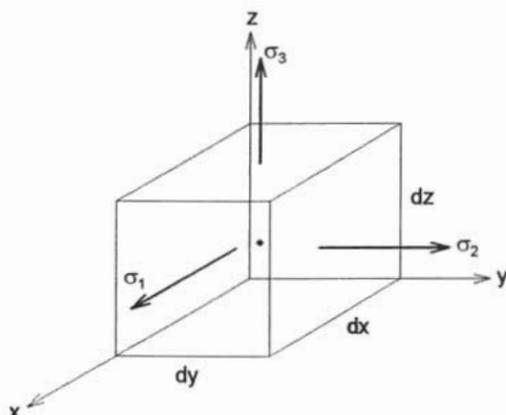


Figura 4.16: Energía de deformación elástica para un estado general de esfuerzos.

Para un estado triaxial de esfuerzos el trabajo total realizado por los esfuerzos σ_1 , σ_2 y σ_3 será la suma de los trabajos efectuados por cada uno de ellos de manera independiente. Fig. 4.16.

Por lo tanto el trabajo realizado por σ_1 se calcula como:

$$dW = \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 dydz)}_{\text{Fuerza media}} \cdot \underbrace{(\varepsilon_1 dx)}_{\text{distancia}} = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 dV \quad (4.57)$$

De esta forma la densidad de energía resulta:

$$\frac{dW}{dV} = U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 \quad (4.58)$$

Repetiendo el razonamiento para las demás caras de la partícula elemental, se concluye que la densidad de energía de deformación elástica U almacenada en el material, debido a un estado de esfuerzos σ_1 , σ_2 y σ_3 , es

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) \quad (4.59)$$

tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{aligned}$$

Sustituyendo estas últimas ecuaciones en la ec. 4.59, se obtiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E} [\sigma_1(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ &\quad + \sigma_3(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))] \\ U &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \\ U &= \frac{1}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1 + \nu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \\ U &= \frac{1}{2E} [I_1^2 - 2(1 + \nu)I_2] \quad ; \quad \text{Dado que} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ U &= \frac{1}{2} \left[\frac{I_1^2}{E} - \frac{I_2}{G} \right] \quad (4.60) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad de energía se puede descomponer, como:

$$U = U_V + U_O \quad (4.61)$$

Siendo U_V la densidad de energía volumétrica y U_O la densidad de energía desviadora o distorsional.

Asumiendo que existe la siguiente relación:

$$\begin{aligned} U_V &\longleftrightarrow T_V \text{ parte isotrópica (dilatación o compresión)} \\ U_O &\longleftrightarrow T_O \text{ parte distorsional} \end{aligned}$$

La energía de deformación volumétrica se puede calcular como:

$$\begin{aligned} U_V &= \frac{\sigma_V}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) ; \sigma_V = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \sigma_V &= K\varepsilon_V ; K = \frac{E}{3(1-2\nu)} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ U_V &= \frac{\sigma_V}{2} \varepsilon_V = \frac{\sigma_V^2}{2K} = \frac{I_1^2}{18K} \\ U_V &= \frac{I_1^2}{18K} = \frac{I_1^2}{18} \frac{3(1-2\nu)}{E} \\ U_V &= \frac{(1-2\nu)}{6E} I_1^2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

La energía de deformación desviadora se puede calcular como:

$$\begin{aligned} U_O &= U - U_V \\ U_O &= \frac{1}{2} \left(\frac{I_1^2}{E} - \frac{I_2}{G} \right) - \frac{(1-2\nu)}{6E} I_1^2 \end{aligned}$$

Desarrollando esta última ecuación se obtiene:

$$U_O = \frac{1}{12G} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \quad (4.63)$$

Las densidades de energía volumétrica y desviadora están relacionadas con los esfuerzos normal y cortante octaédricos mediante las siguientes expresiones, respectivamente:

$$\sigma_{oct}^2 = 2KU_V \quad (4.64)$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{4}{3}GU_O \quad (4.65)$$

Capítulo 5

Teorías de Falla y Ruptura

Aceptemos que en una prueba de tensión el material deja de ser elástico cuando se alcanza el esfuerzo límite S_f en la probeta.

Si se aplican esfuerzos superiores a S_f , el material puede fluir o se rompe, por lo que S_f representaría el límite de aplicabilidad de la teoría elástica para el estado de esfuerzos unidimensionales que se presenta en la probeta. Este límite puede ser establecido mediante pruebas de laboratorio.

Para un medio continuo sometido a un estado de esfuerzos principales, la función que define la región donde el material tiene un comportamiento elástico, se puede expresar como

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (5.1)$$

En los párrafos siguientes se describirán algunas teorías de falla y ruptura comúnmente utilizadas para establecer bajo qué condiciones se alcanza la falla o ruptura de un material sometido a ciertas sollicitaciones. Cabe señalar que la mayoría de estas teorías tiene su aplicación principal en el comportamiento de metales.

5.1 Teoría de Rankine

Esta teoría establece que en un material sometido a un estado de esfuerzos principales se genera fluencia cuando cualesquiera de los esfuerzos principales alcanza el valor límite S_f , en una probeta representativa del mismo material sometida a una prueba de tensión. Matemáticamente estas condiciones quedan representadas por:

$$|\sigma_1| = |S_f| \quad (5.2)$$

$$|\sigma_2| = |S_f| \quad (5.3)$$

$$|\sigma_3| = |S_f| \quad (5.4)$$

De manera gráfica, las condiciones anteriores se pueden representar en un sistema de referencia donde los ejes representen a los esfuerzos σ_1 , σ_2 y σ_3 .

De esta manera el límite de aplicabilidad de la teoría elástica queda definido por seis superficies planas que conforman a un cubo de lado $2S_f$ (Fig. 5.1).

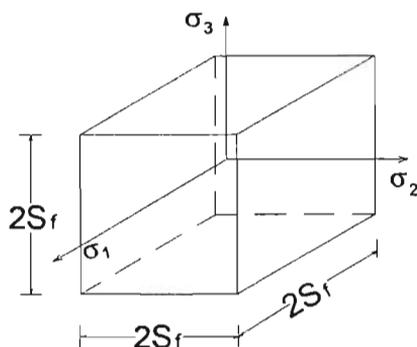


Figura 5.1: Volumen de fluencia. Teoría de Rankine.

Si un punto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, que representa a un estado tridimensional de esfuerzos, se ubica en el sistema de referencia establecido, se tendrá una condición de fluencia si P se encuentra fuera del cubo o en las caras.

Si P se localiza dentro del cubo, el material tiene un comportamiento elástico.

Para un estado de esfuerzo plano, con $\sigma_3 = 0$, se obtendrá la curva límite que se muestra en la Fig. 5.2, delimitada por las siguientes ecuaciones.

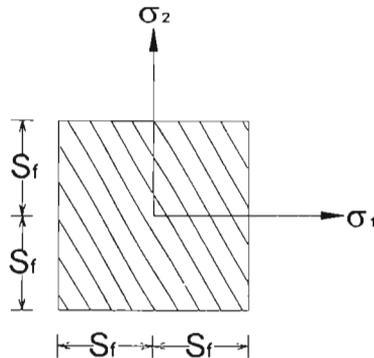


Figura 5.2: Superficie de fluencia para el estado de esfuerzo plano. Teoría de Rankine.

$$\sigma_1 = \pm S_f; \quad \sigma_2 = \pm S_f \quad (5.5)$$

Un punto en este plano representaría a un estado de esfuerzo plano. Si el punto está dentro del cuadrado, el material tiene un comportamiento elástico, mientras que si está fuera o en los bordes del cuadrado, el material habrá dejado de ser elástico.

La teoría de Rankine es aplicable sobre todo a materiales frágiles.

5.2 Teoría de Coulomb-Tresca

El material deja de ser elástico cuando el esfuerzo cortante máximo generado por un estado de esfuerzos principales, en un punto cualesquiera del cuerpo, iguala al esfuerzo cortante máximo que se engendra en una probeta sometida a tensión.

Para un estado tridimensional de esfuerzos el esfuerzo cortante máximo queda definido por:

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = \left| \frac{S_f}{2} \right| \quad (5.6)$$

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| = \left| \frac{S_f}{2} \right| \quad (5.7)$$

$$\left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| = \left| \frac{S_f}{2} \right| \quad (5.8)$$

Si cualquiera de las condiciones anteriores es satisfecha, se tendría la condición límite para que el medio deje de ser elástico.

Para un estado de esfuerzos plano; $\sigma_3 = 0$, las condiciones matemáticas que indican iniciación de fluencia serían:

De la ec. (5.6)

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |S_f| \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = +S_f; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = -S_f \quad (5.9)$$

De la ec. (5.7)

$$|\sigma_1| = |S_f| \Rightarrow \sigma_1 = +S_f; \quad \sigma_1 = -S_f \quad (5.10)$$

De la ec. (5.8)

$$|\sigma_2| = |S_f| \Rightarrow \sigma_2 = +S_f; \quad \sigma_2 = -S_f \quad (5.11)$$

Representando estas condiciones gráficamente en el plano σ_1, σ_2 , se obtendrían seis líneas rectas límites, que definen la superficie de fluencia (Fig. 5.3).

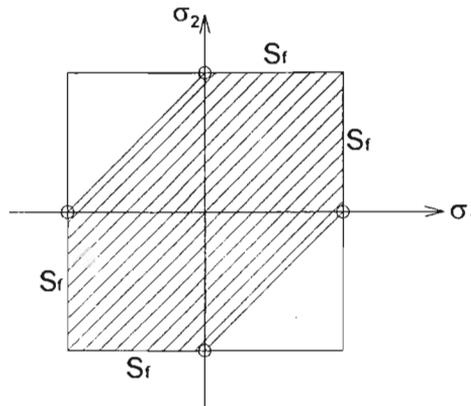


Figura 5.3: Superficie de fluencia para el estado de esfuerzos plano. Teoría de Coulomb-Tresca.

De acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo, si se agregan esfuerzos hidrostáticos de tensión o de compresión, no es posible predecir ningún cambio en la respuesta del material. La suma de estos esfuerzos simplemente desplaza el círculo de Mohr a lo largo del eje σ y $\tau_{máx}$ permanece constante.

Cuando los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son del mismo signo, se tienen dos condiciones para alcanzar la fluencia del material:

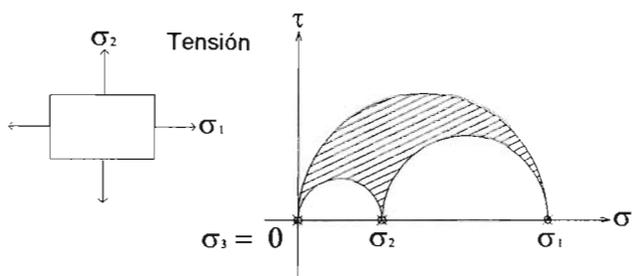


Figura 5.4: Estado de esfuerzo plano; tensión.

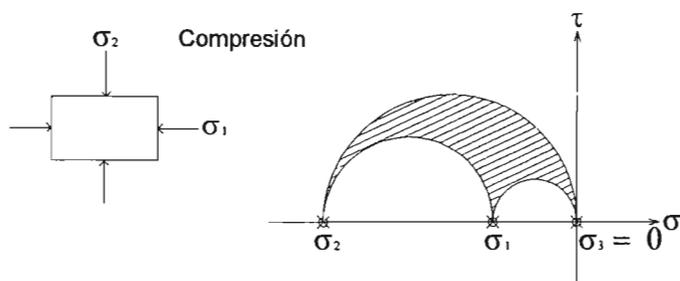


Figura 5.5: Estado de esfuerzo plano; compresión.

Para el estado de esfuerzos de compresión que se muestra en la Fig. 5.4, se debe cumplir que:

$$|\sigma_1| > |\sigma_2| \implies |\sigma_1| \leq S_f \quad (5.12)$$

Para el estado de esfuerzos de tensión, Fig. 5.5, se tiene:

$$|\sigma_2| > |\sigma_1| \implies |\sigma_2| \leq S_f \quad (5.13)$$

Por lo tanto podemos concluir que cuando los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son del mismo signo, las teorías de Rankine y Coulomb-Tresca coinciden.

Si σ_1 y σ_2 son de signo contrario, se tiene que:

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \left| \frac{S_f}{2} \right| \implies (\sigma_1 - \sigma_2) \leq \pm S_f \quad (5.14)$$

Por lo tanto, cuando σ_1 y σ_2 son de signo contrario las teorías de Rankine y Coulomb-Tresca difieren.

5.3 Teoría de Saint Venant

El material deja de ser elástico cuando una de las deformaciones principales, ε_1 , ε_2 , ó ε_3 alcanza el valor de la deformación principal, ε_f , que se genera en una probeta sometida a tensión.

Para un estado uniaxial de esfuerzos, dicha deformación se puede expresar como:

$$\varepsilon_f = \frac{S_f}{E} \quad (5.15)$$

Para un estado de esfuerzos tridimensional, las deformaciones principales quedan definidas por:

$$|\varepsilon_1| = \left| \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \right| = |\varepsilon_f| \quad (5.16)$$

$$|\varepsilon_2| = \left| \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \right| = |\varepsilon_f| \quad (5.17)$$

$$|\varepsilon_3| = \left| \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \right| = |\varepsilon_f| \quad (5.18)$$

Para un estado de esfuerzo plano, con $\sigma_3 = 0$, las condiciones de fluencia resultarían ser:

De la ec. (5.16)

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \nu\sigma_2| = |S_f| &\implies \sigma_1 - \nu\sigma_2 = S_f \\ \sigma_1 - \nu\sigma_2 = -S_f & \end{aligned} \quad (5.19)$$

De la ec. (5.17)

$$\begin{aligned} |\sigma_2 - \nu\sigma_1| = |S_f| &\implies \sigma_2 - \nu\sigma_1 = S_f \\ \sigma_2 - \nu\sigma_1 = -S_f & \end{aligned} \quad (5.20)$$

De la ec. (5.18)

$$\begin{aligned} |-\nu(\sigma_1 + \sigma_2)| = |S_f| &\implies \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = S_f \\ \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -S_f & \end{aligned} \quad (5.21)$$

Reordenando términos, las ecuaciones de las seis rectas límites resultan ser:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\nu} - \frac{S_f}{\nu} ; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\nu} + \frac{S_f}{\nu} \quad (5.22)$$

$$\sigma_2 = \nu\sigma_1 + S_f ; \quad \sigma_2 = \nu\sigma_1 - S_f \quad (5.23)$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1 + \frac{S_f}{\nu} ; \quad \sigma_2 = -\sigma_1 - \frac{S_f}{\nu} \quad (5.24)$$

La región que definen estas ecuaciones se muestra en la Fig. 5.6, en la que se puede observar que la teoría de Saint Venant permite alcanzar niveles de esfuerzos mayores que los que definen la teorías de Rankine y Tresca, antes de alcanzar la falla.

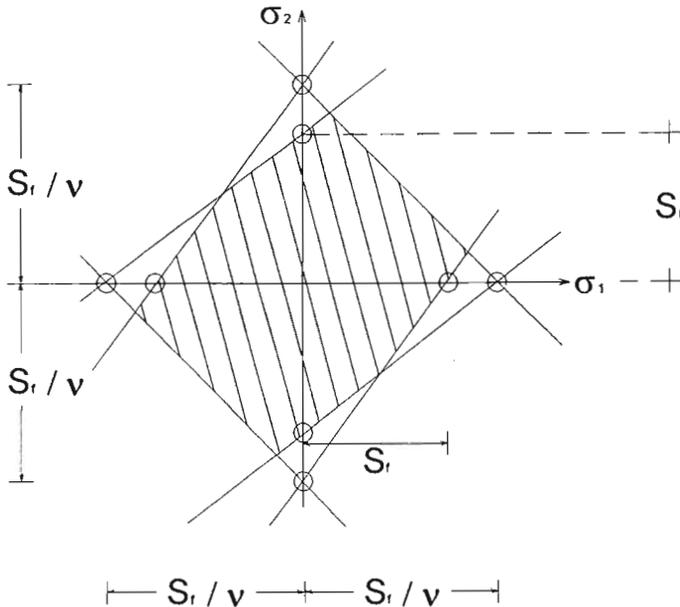


Figura 5.6: Superficie de fluencia, criterio de Saint Venant.

5.4 Teoría de Nadai

Esta teoría es aplicable principalmente a materiales dúctiles, y establece que se inicia la fluencia en una partícula de un medio continuo cuando se aplica a ésta una energía de deformación igual a la energía de deformación que se genera en una partícula de una probeta sometida a tensión.

La energía de deformación elástica por unidad de volumen, o densidad de energía, para un estado uniaxial de esfuerzos, tal como se definió en el capítulo 4, resulta igual a:

$$U = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2}$$

Esta ecuación representa el área bajo la curva esfuerzo-deformación.

De acuerdo con esta teoría la probeta dejará de ser elástica cuando:

$$U_{prob} = \frac{S_f \varepsilon_f}{2} = \frac{S_f S_f}{2E} = \frac{S_f^2}{2E} \quad (5.25)$$

Para un estado tridimensional de esfuerzos, la densidad de energía puede expresarse como:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (5.26)$$

Por lo tanto, la fluencia se presentará cuando:

$$\frac{S_f^2}{2E} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (5.27)$$

Por lo tanto la condición de fluencia queda representada como:

$$S_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (5.28)$$

Para un estado de esfuerzo plano, con $\sigma_3 = 0$, la condición de fluencia queda definida por:

$$S_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 \quad (5.29)$$

La representación geométrica de la región que define la ec. 5.29 se muestra en la Fig. 5.7.

Para $\nu = 0.5$

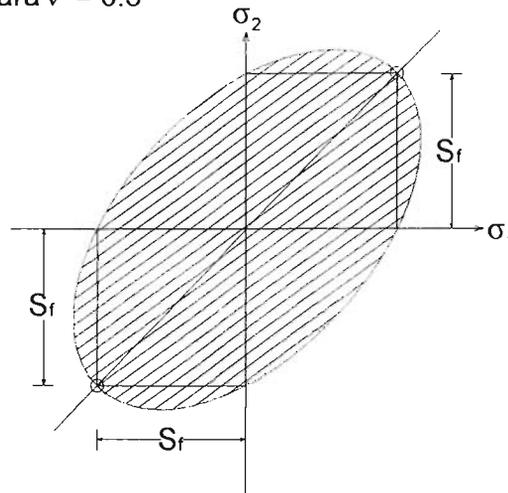


Figura 5.7: Superficie de fluencia; teoría de Nadai.

5.5 Teoría de Von Mises Hencky (VMH)

Se alcanza la fluencia en una partícula de un medio continuo cuando la energía de deformación distorsional en un estado de esfuerzos cualesquiera, igual a la energía de deformación distorsional en una probeta sometida a tensión.

$$U_0 = [U_0]_{prob}$$

Para evaluar U_0 empleamos la siguiente relación:

$$U_{total} = U_{vol} + U_0$$

De donde:

$$U_0 = U_{total} - U_{vol}$$

La energía de deformación total se puede expresar como, ec. (4.60).

$$U_{total} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

El esfuerzo volumétrico y la deformación volumétrica son iguales a:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad ; \quad \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

De esta manera la energía de deformación volumétrica resulta igual a:

$$U_{vol} = \left(\frac{\sigma_v \varepsilon_v}{2} \right)$$

Dado que:

$$\sigma_v = K \varepsilon_v = \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_v$$

Despejando ε_v .

$$\varepsilon_v = \frac{3}{E} \sigma_v (1-2\nu)$$

Sustituyendo esta última expresión en U_{vol} , se tiene:

$$U_{vol} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_v^2$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} U_{vol} &= \frac{3(1-2\nu)}{2E} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} \\ U_{vol} &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

Dado que:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

La energía de deformación volumétrica queda como:

$$U_{vol} = \frac{1-2\nu}{6E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \} \quad (5.30)$$

La energía de deformación distorsional resulta:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \} \\ - \frac{1-2\nu}{6E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

Desarrollando se tiene:

$$U_0 = \frac{1+\nu}{3E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \} \quad (5.31)$$

En una probeta sometida a tensión: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$U_{prob} = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_1^2 \quad (5.32)$$

Se alcanza la falla del material cuando: $U_{prob} = U_0$, por lo tanto:

$$\frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2 = \frac{1+\nu}{3E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

De donde resulta

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = s_f^2 \quad (5.33)$$

Condición de fluencia de Hencky, que coincide con Nadai si $\nu = \frac{1}{2}$.

Para el estado de esfuerzos plano.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = s_f^2 \quad (5.34)$$

Esta teoría resulta ser un caso particular de la de Nadai.

Experimentalmente se ha demostrado que la teoría de VMH, es la teoría que más se apega a los valores experimentales si σ_1 y σ_2 son positivos o si alguno de los dos es positivo.

Si ambos esfuerzos principales son negativos, VMH, dá resultados conservadores.

Esta teoría es aplicable sobre todo a metales.

La teoría de VMH presenta la siguiente ventaja de tipo matemático.

Para un estado de esfuerzos principales se tiene que:

$$I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5.35)$$

$$I_2 = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (5.36)$$

Elevando la ec. 5.35 al cuadrado

$$I_1^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3) \quad (5.37)$$

Multiplicando la ec. 5.36 por 3.

$$-3I_2 = -3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_3 \quad (5.38)$$

Sumando las ecs. 5.37 y 5.38 se tiene:

$$I_1^2 - 3I_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$$

lo cual indica que existe fluencia en un material si

$$I_1^2 - 3I_2 = \sigma_f^2 \quad (5.39)$$

Esta última expresión puede ser aplicada para cualquier sistema de referencia.

Ejemplo 5.1. El tensor esfuerzo en el medio continuo que se muestra en la Fig. 5.8, está dado por:

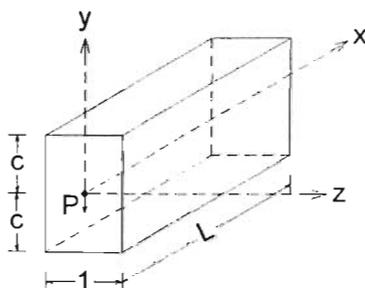


Figura 5.8: Barra prismática sometida a una carga puntual en su extremo libre.

$$T_{ij} = \frac{3P}{4c^3} \begin{bmatrix} 2xy & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La teoría del medio continuo será aplicable si $I_1^2 - 3I_2 < s_f^2$, en todos los puntos del medio.

Si en algún punto $I_1^2 - 3I_2 = s_f^2$, se establecería el límite del tensor T_{ij} hasta donde sería aplicable la mecánica del medio continuo.

Si en algunas regiones $I_1^2 - 3I_2 > s_f^2$, la teoría de la mecánica del medio continuo no será aplicable.

Si P se aplica al medio, se busca de definir la región del medio continuo en el cual sea aplicable la teoría elástica.

Llamando:

$$k = \frac{3P}{4c^3}$$

Entonces las invariantes valen:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2xyk \\ I_2 &= -(c^2 - y^2)^2 k^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2 en la ec. (5.39) existirá fluencia cuando:

$$4x^2y^2k^2 + 3k^2(c^4 - 2c^2y^2 + y^4) = s_f^2$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} 4x^2y^2k^2 + 3k^2c^4 - 6k^2c^2y^2 + 3k^2y^4 &= s_f^2 \\ 4x^2y^2 + 3(c^4 - 2c^2y^2 + y^4) &= \frac{s_f^2}{k^2} \end{aligned}$$

Esta última ecuación representa la condición de fluencia de VMH.

La elasticidad sería aplicable mientras no se plastifique algún punto. Los puntos más esforzados son $a(L, -c)$ y $b(L, +c)$.

Se iniciará la fluencia en el medio en el instante en que las coordenadas de los puntos a y b satisfagan la condición de VMH.

Sustituyendo las coordenadas de los puntos en la condición de fluencia, se tiene:

$$4L^2c^2 + 3(c^4 - 2c^4 + c^4) = \frac{\sigma_f^2}{k^2}$$

$$4L^2c^2 = \frac{\sigma_f^2}{k^2} \quad \therefore \quad k^2 = \frac{\sigma_f^2}{4L^2c^2}$$

$$\frac{9P^2}{16c^6} = \frac{\sigma_f^2}{4L^2c^2} \quad P^2 = \frac{16c^4\sigma_f^2}{36L^2} = \frac{4c^4\sigma_f^2}{9L^2}$$

$$P = \pm \frac{2c^2\sigma_f}{3L}$$

Si la fuerza P del extremo, está comprendida entre los límites.

$$-\frac{2c^2\sigma_f}{3L} < P < \frac{2c^2\sigma_f}{3L}$$

El medio es elástico.

Si $|P| \geq \frac{2c^2\sigma_f}{3L}$; el material deja de ser elástico.

Casos límites de aplicación de la mecánica del medio continuo.

a) Pieza prismática sometida a flexión simple.

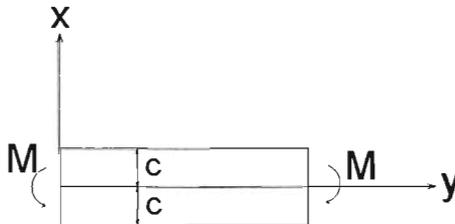


Figura 5.9: Viga sometida a flexión pura.

El tensor esfuerzo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_z}{I_z} x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

existirá plastificación si $I_1^2 - 3I_2 > s_f^2$

$$\left(\frac{M_z}{I_z} x \right)^2 = s_f^2 ; \quad \left(\frac{M_z x}{I_z} \right) = s_f$$

$$x = \frac{I_z}{M_z} s_f$$

Las rectas límites pasan por el borde del medio si $c = \frac{I_z s_f}{M_f}$

$$M_f = s_f \frac{I_z}{c} \quad - s_f \frac{I_z}{c} < M_z < s_f \frac{I_z}{c}$$

Si

$|M_f| < s_f \frac{I_z}{c}$; todo el medio es elástico.

$|M_f| > s_f \frac{I_z}{c}$; el medio deja de ser elástico y sólo una porción próxima al eje y permanecerá elástica.

Esta distribución de esfuerzos aparecerá cuando la sección se ha plastificado completamente, y será engendrada por un momento plástico total M_p , tal que:

$$M_p > M_f$$

Por estática se puede afirmar que el M_p es la resultante de la distribución de esfuerzos en la sección transversal completamente plastificada.

$$M_p = Fc$$

$$M_p = s_f b c^2$$

Por otra parte

$$M_f = \frac{1}{12} \frac{b(2c)^3}{c} s_f$$

$$M_f = \frac{2}{3} bc^2 s_f \quad \Rightarrow \quad M_f = \frac{2}{3} M_p$$

Si el material que forma la pieza tiene el diagrama supuesto, se puede incrementar el momento que provoca la 1ª fluencia en un 50 % para alcanzar el momento que provoca fluencia en toda la sección transversal.

$$M_p = \frac{3}{2} M_f$$

La relación que existe entre el momento de la fluencia y el momento de plastificación total, M_p/M_f , depende de la forma de la sección transversal y puede oscilar entre 1 y 2.5.

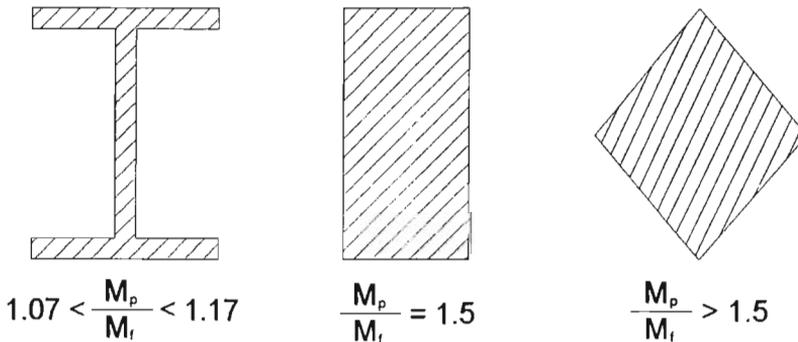


Figura 5.10: Relación M_p/M_f para diferentes secciones.

Ejemplo 5.2. Para el estado de esfuerzo:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{siendo } \sigma \text{ y } \tau \text{ constantes}$$

Determine el esfuerzo de fluencia empleando los criterios de Coulomb-Tresca y Von Mises Hencky.

Los esfuerzos principales se obtienen resolviendo la ecuación característica, resultando:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma + \tau \\ \sigma_2 &= \sigma \\ \sigma_3 &= \sigma - \tau\end{aligned}$$

Así el tensor esfuerzo queda como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} (\sigma + \tau) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma - \tau) \end{bmatrix}$$

Condición de fluencia de VMH.

$$I_1^2 - 3I_2 = s_f^2$$

Los invariantes del tensor esfuerzo son:

$$I_1 = 3\sigma$$

$$I_2 = \left| \begin{pmatrix} \sigma + \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma - \tau \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \sigma - \tau & 0 \\ 0 & \sigma + \tau \end{pmatrix} \right|$$

$$I_2 = (\sigma + \tau)\sigma + \sigma(\sigma - \tau) + (\sigma - \tau)(\sigma + \tau)$$

$$I_2 = \sigma^2 + \tau\sigma + \sigma^2 - \tau\sigma + \sigma^2 + \tau\sigma - \tau\sigma - \tau^2$$

$$I_2 = 3\sigma^2 - \tau^2$$

Por lo que aplicando la condición de fluencia de VMH, se tiene:

$$\begin{aligned}(3\sigma)^2 - 3(3\sigma^2 - \tau^2) &= s_f^2 \\ 9\sigma^2 - 9\sigma^2 + 3\tau^2 &= s_f^2 \\ s_f^2 = 3\tau^2 &\implies s_f = \pm\sqrt{3}\tau \\ & s_f = \pm 1.73\tau\end{aligned}$$

Aplicando el criterio de Coulomb-Tresca:

$$\begin{aligned}\tau_{m\acute{a}x} &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} = \frac{s_f}{2} \\ \frac{(\sigma + \tau) - (\sigma - \tau)}{2} &= \frac{\sigma_f}{2} \\ \implies \sigma_f &= 2\tau\end{aligned}$$

Obsérvese que este último criterio permite un mayor esfuerzo de fluencia comparado con la teoría de VMH.

Ejemplo 5.3. Una muestra cilíndrica de un material deformable está confinado por un molde rígido que no le permite deformarse lateralmente, bajo una presión constante “ p ”. Aplicando el criterio de VMH diga si el material alcanza la condición de fluencia.

Para establecer el estado de esfuerzos y deformaciones suponga que el cuerpo deformable es elástico lineal, homogéneo e isótropo. Suponga además que no se produce esfuerzos cortantes en el contacto molde-muestra.

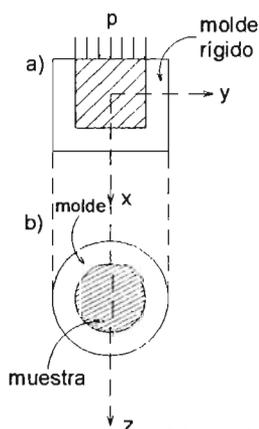


Figura 5.11: Muestra cilíndrica en un molde rígido, a) alzado, b) planta.

Datos:

$$\begin{aligned}
 E &= 2.1 \times 10^8 \text{ kPa} \\
 \nu &= 0.2 \\
 S_f &= 4000 \times 10^2 \text{ kPa} \\
 p &= 1000 \times 10^2 \text{ kPa}
 \end{aligned}$$

Solución:

Las ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isotrópicos son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda J_1 \\
 \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda J_1 \\
 \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda J_1
 \end{aligned}$$

Cálculo de las constantes elásticas.

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1 \times 10^8}{2(1+0.2)} = 0.875 \times 10^8 \text{ kPa} \\
 \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0.2 \times 2.1 \times 10^8}{(1+0.2)(1-2 \times 0.2)} = 0.583 \times 10^8 \text{ kPa}
 \end{aligned}$$

De los datos del problema se pueden establecer las siguientes condiciones.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -p & ; & \varepsilon_{xx} \neq 0 \\
 \sigma_{yy} &\neq 0 & ; & \varepsilon_{yy} = 0 \\
 \sigma_{zz} &\neq 0 & ; & \varepsilon_{zz} = 0
 \end{aligned}$$

Para σ_{yy} se tiene:

$$\sigma_{yy} = \lambda J_1$$

Para σ_{zz} se tiene:

$$\sigma_{zz} = \lambda J_1 \implies \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$$

Para σ_{xx} se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -1000 = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ -1000 \times 10^2 &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(2G + \lambda) \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{-1000 \times 10^2}{(2G + \lambda)} = \frac{-1000 \times 10^2}{(2 \times 0.875 \times 10^8 + 0.583 \times 10^8)} \\ \varepsilon_{xx} &= -0.428 \times 10^{-3} = J_1 \\ \sigma_{yy} &= 0.583 \times 10^8 \times -0.428 \times 10^{-3} = -249.5 \times 10^2 \text{ kPa} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = -249.5 \times 10^2 \text{ kPa}\end{aligned}$$

Por lo tanto el tensor esfuerzo resulta igual a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & -249.5 & 0 \\ 0 & 0 & -249.5 \end{bmatrix} \times 10^2 \text{ kPa}$$

Aplicando el criterio de VMH, se tiene:

$$S_f^2 = I_1^2 - 3I_2$$

Cálculo del primer invariante I_1 .

$$\begin{aligned}I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -1000 \times 10^2 - 249.5 \times 10^2 - 249.5 \times 10^2 \\ &= -1499.0 \times 10^2 \text{ kPa} \\ I_2 &= \{(-1000 \times -249.5) + (-249.5 \times -249.5) + (-249.5 \times -1000)\} \times 10^4 \\ I_2 &= 561250 \times 10^4 \\ S_f^2 &= 1499.0^2 - 3 \times 561250 \times 10^4 = 563251 \times 10^4 \\ S_f &= 750.5 \times 10^4 \text{ kPa} \text{ (esfuerzo de fluencia calculado)}\end{aligned}$$

Dado que $750.5 \times 10^4 \text{ kPa} < 4000 \times 10^4 \text{ kPa}$ no se presenta fluencia en el material.

Apéndice A

Análisis Tensorial

El análisis tensorial se centra en el estudio de entes abstractos llamados tensores, cuyas propiedades son independientes de los sistemas de referencia empleados para determinarlos.

Un tensor está representado en un sistema de referencia particular mediante un conjunto de funciones llamadas componentes.

El que un conjunto de funciones represente a un tensor depende de la ley de transformación de estas funciones de un sistema coordinado a otro.

Los tensores se clasifican por su orden y el número de componentes en un sistema de referencia cartesiano es 3^N , siendo N el orden del tensor. En la tabla A.1 se reportan algunos tensores, su representación en notación indicial y el número de componentes.

Tabla A.1: Transformación de coordenadas.

Orden N	Nombre del tensor	Símbolo	No. de componentes
0	escalar	a	1
1	vector	b_i	3
2	diádica	T_{ij}	9
3	triádica	E_{ijk}	27
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

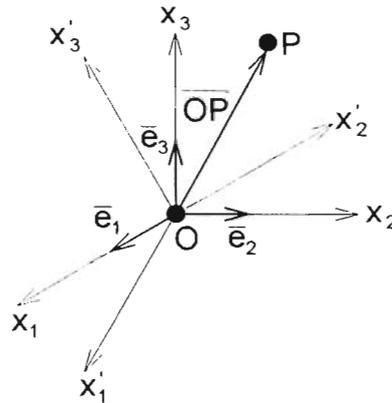


Figura A.1: Coordenadas de un punto "P" en un sistema de referencia cartesiano.

La ubicación del punto "P" en el sistema de referencia x_1, x_2, x_3 , está dada por el vector $\overline{OP} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, siendo \bar{e}_1, \bar{e}_2 y \bar{e}_3 los vectores base asociados al sistema de referencia x_1, x_2, x_3 . La ubicación de dicho punto en el sistema de referencia x'_1, x'_2, x'_3 , es $\overline{OP'} = x'_1\bar{e}'_1 + x'_2\bar{e}'_2 + x'_3\bar{e}'_3$ (Fig. A.1).

Un conjunto de ecuaciones

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

describe una transformación de las variables x_1, x_2, x_3 a las variables x'_1, x'_2, x'_3 .

De la misma forma se puede plantear la transformación inversa como:

$$x_i = g_i(x'_1, x'_2, x'_3)$$

Con el objeto de asegurar que la transformación inversa existe y es uno a uno, en una región R , se debe cumplir que:

- Las funciones f_i tienen valor único en el punto "P", son continuas así como sus primeras derivadas.
- El determinante del Jacobiano no se anula en ningún punto de la región R , esto es,

$$J = \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si se cumple lo establecido en a) y b), se dice que la transformación es admisible. Si el Jacobiano es positivo en cualquier punto de la región R , se dice que la transformación es propia, en caso contrario se dice que la transformación es impropia.

En el estudio de los medios continuos que se abordará en estas notas se acepta que las transformaciones son admisibles y propias.

Consideremos un sistema de referencia cartesiano x_1, x_2, x_3 y los vectores base asociados a cada eje \bar{e}_1, \bar{e}_2 y \bar{e}_3 , tal como se muestra en la figura A.2.

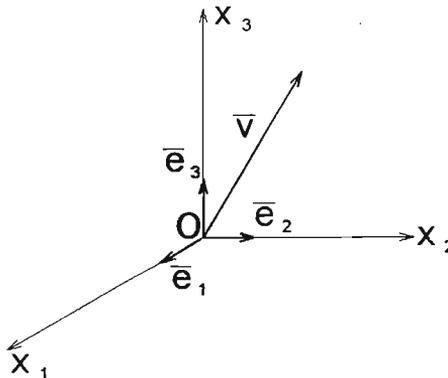


Figura A.2: Sistema de referencia cartesiano.

Debido a que los vectores base son mutuamente ortogonales y tienen un módulo unitario, se dice que forman una base ortonormal.

Cualquier vector \bar{v} , puede ser expresado en esta base como:

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i\bar{e}_i \quad (\text{A.1})$$

siendo v_1, v_2 y v_3 los componentes del vector \bar{v} .

Notación suma

Siempre que en una ecuación una letra aparezca como subíndice o superíndice repetido, se entenderá que se debe sumar sobre esta letra. Así si se está en un espacio de n dimensiones, se sumará de 1 a n . Los índices repetidos son mudos (o falsos), ya que el resultado final es independiente de la letra usada. De esta manera la ec. A.1 se puede expresar como:

$$\bar{v} = v_i\bar{e}_i = v_j\bar{e}_j \quad (\text{A.2})$$

Ejemplo (a.1): sin importar por el momento el significado de las siguientes ecuaciones, representarlas en forma expandida, con variación de los subíndices de 1 a 3.

a) $u_i v_i w_j \bar{e}_j$ b) $T_{ij} v_i \bar{e}_j$ c) $T_{ii} v_j \bar{e}_j$

Solución:

a) Desarrollando primero el subíndice i y luego el j

$$u_i v_i w_j \bar{e}_j = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) (w_1 \bar{e}_1 + w_2 \bar{e}_2 + w_3 \bar{e}_3)$$

b)

$$\begin{aligned} T_{ij} v_i \bar{e}_j &= T_{1j} v_1 \bar{e}_j + T_{2j} v_2 \bar{e}_j + T_{3j} v_3 \bar{e}_j \\ &= T_{11} v_1 \bar{e}_1 + T_{12} v_1 \bar{e}_2 + T_{13} v_1 \bar{e}_3 + T_{21} v_2 \bar{e}_1 \\ &\quad + T_{22} v_2 \bar{e}_2 + T_{23} v_2 \bar{e}_3 + T_{31} v_3 \bar{e}_1 + T_{32} v_3 \bar{e}_2 \\ &\quad + T_{33} v_3 \bar{e}_3 \\ &= (T_{11} v_1 + T_{21} v_2 + T_{31} v_3) \bar{e}_1 + (T_{12} v_1 + T_{22} v_2 + T_{32} v_3) \bar{e}_2 \\ &\quad + (T_{13} v_1 + T_{23} v_2 + T_{33} v_3) \bar{e}_3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} T_{ii} v_j \bar{e}_j &= (T_{11} + T_{22} + T_{33}) v_j \bar{e}_j \\ &= (T_{11} + T_{22} + T_{33}) (v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3) \end{aligned}$$

Definiciones:

1) Suma de vectores en notación indicial.

$$\bar{w} = \bar{u} + \bar{v} \quad w_i \bar{e}_i = (u_i + v_i) \bar{e}_i \quad (\text{A.3})$$

2) Multiplicación de un vector por un escalar.

$$\lambda \bar{v} = \lambda v_i \bar{e}_i \quad (\text{A.4})$$

Delta de Kronecker

Este símbolo se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

De acuerdo con la convención suma:

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

Este símbolo nos permitirá expresar el producto punto de dos vectores como:
Sean \bar{u} y \bar{v} , dos vectores cualesquiera cuyas componentes son:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2 + u_3\bar{e}_3 = u_i\bar{e}_i \\ \bar{v} &= v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3 = v_j\bar{e}_j\end{aligned}$$

Por definición de producto punto, tenemos:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \cos \theta \quad (\text{A.6})$$

Siendo θ el ángulo que forman los dos vectores con origen común.

Así si $\theta = 90^\circ$, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, lo cual significa que los vectores son ortogonales.

En notación indicial la ec. A.6 se puede representar como:

$$\begin{aligned}\bar{u} \cdot \bar{v} &= (u_i\bar{e}_i) \cdot (v_j\bar{e}_j) = u_i v_j \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\end{aligned}$$

Por la definición del símbolo delta de Kronecker.

$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$, por lo tanto

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_j \delta_{ij} \quad (\text{A.7})$$

Símbolo de permutación

Este símbolo se define como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{permutación par: } 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 \\ -1 & \text{permutación impar: } 1, 3, 2; 3, 2, 1; 1, 3, 2 \\ 0 & \text{aparece al menos un índice repetido} \end{cases}$$

El símbolo de permutación tiene las siguientes propiedades

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$$

Definición:

El producto cruz de dos vectores $\bar{u} \times \bar{v}$, es igual a:

$$\bar{u} \times \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \text{sen} \theta \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}\bar{u} \times \bar{v} &= \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= \bar{e}_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) - \bar{e}_2 (u_1 v_3 - u_3 v_1) + \bar{e}_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \bar{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \bar{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \bar{e}_3\end{aligned}$$

En notación indicial se tiene:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_i \bar{e}_i) \times (v_j \bar{e}_j) = u_i v_j \bar{e}_i \times \bar{e}_j$$

Obsérvese que:

$$\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \varepsilon_{ijk} \bar{e}_k \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto:

$$\bar{u} \times \bar{v} = u_i v_j \varepsilon_{ijk} \bar{e}_k = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \bar{e}_k \quad (\text{A.10})$$

Producto tensorial de dos vectores (diada)

Sean $\bar{u} = u_i \bar{e}_i$; $\bar{v} = v_j \bar{e}_j$

$$\bar{u} \bar{v} = u_i \bar{e}_i v_j \bar{e}_j = u_i v_j \bar{e}_i \bar{e}_j$$

Desarrollando esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{u} \bar{v} &= u_1 v_j \bar{e}_1 \bar{e}_j + u_2 v_j \bar{e}_2 \bar{e}_j + u_3 v_j \bar{e}_3 \bar{e}_j \\ &= u_1 v_1 \bar{e}_1 \bar{e}_1 + u_1 v_2 \bar{e}_1 \bar{e}_2 + u_1 v_3 \bar{e}_1 \bar{e}_3 \\ &\quad + u_2 v_1 \bar{e}_2 \bar{e}_1 + u_2 v_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2 + u_2 v_3 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \\ &\quad + u_3 v_1 \bar{e}_3 \bar{e}_1 + u_3 v_2 \bar{e}_3 \bar{e}_2 + u_3 v_3 \bar{e}_3 \bar{e}_3 \end{aligned}$$

La suma de estos nueve términos se conoce como la forma “nonion” de la diada $\bar{u} \bar{v}$.

Frecuentemente se utiliza para el producto tensorial de dos vectores la notación siguiente:

$$\bar{u} \otimes \bar{v} = u_i \bar{e}_i \otimes v_j \bar{e}_j = u_i v_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

La suma de diadas, expresada por:

$$\bar{u}_1 \bar{v}_1 + \bar{u}_2 \bar{v}_2 + \dots + \bar{u}_N \bar{v}_N$$

se conoce como diádica.

Productos vector-diada

- 1) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \bar{w}) = u_i \bar{e}_i \cdot (v_j \bar{e}_j w_k \bar{e}_k) = u_i v_j w_k \bar{e}_k$
- 2) $(\bar{u} \bar{v}) \cdot \bar{w} = (u_i \bar{e}_i v_j \bar{e}_j) \cdot w_k \bar{e}_k = u_i v_j w_j \bar{e}_i$
- 3) $\bar{u} \times (\bar{v} \bar{w}) = (u_i \bar{e}_i \times v_j \bar{e}_j) w_k \bar{e}_k = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k \bar{e}_i \bar{e}_k$
- 4) $(\bar{u} \bar{v}) \times \bar{w} = u_i \bar{e}_i (v_j \bar{e}_j \times w_k \bar{e}_k) = \varepsilon_{j k q} u_i v_j w_k \bar{e}_i \bar{e}_q$

Producto diada-diada

$$\begin{aligned} (\bar{u} \bar{v}) \cdot (\bar{w} \bar{k}) &= u_i \bar{e}_i (v_j \bar{e}_j \cdot w_k \bar{e}_k) s_q \bar{e}_q \\ &= u_i v_j w_j s_q \bar{e}_i \bar{e}_q \end{aligned}$$

Producto vector-tensor

$$\begin{aligned}
 a) \quad \bar{v} \cdot T &= v_i \bar{e}_i \cdot T_{jk} \bar{e}_j \bar{e}_k = v_i T_{jk} \delta_{ij} \bar{e}_k = v_i T_{ik} \bar{e}_k \\
 b) \quad T \cdot \bar{v} &= T_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot v_k \bar{e}_k = T_{ij} \bar{e}_i \delta_{jk} v_k = T_{ij} v_j \bar{e}_i \\
 c) \quad &\text{Producto tensor - tensor} \\
 T \cdot S &= T_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot S_{pq} \bar{e}_p \bar{e}_q = T_{ij} S_{jq} \bar{e}_i \bar{e}_q
 \end{aligned}$$

Suma de tensores

Los tensores cartesianos del mismo orden se pueden sumar o restar componente a componente.

$$A_{ijk} \dots + B_{ijk} = T_{ijk}$$

Multiplicación de cada componente de un tensor por un escalar

$$\begin{aligned}
 b_i &= \lambda a_i \\
 B_{ij} &= \lambda A_{ij}
 \end{aligned}$$

Producto externo de tensores

El producto externo de dos tensores de un orden arbitrario es un tensor cuyas componentes se forman multiplicando cada componente de uno de los tensores por todos los componentes del otro. Esta operación da como resultado un tensor cuyo orden es la suma de los ordenes factores.

$$\begin{aligned}
 a_i b_j &= T_{ij} \quad ; \quad D_{ij} T_{km} = \phi_{ijkm} \\
 v_i F_{jk} &= \alpha_{ijk} \quad ; \quad \varepsilon_{ijk} v_m = \psi_{ijkm}
 \end{aligned}$$

Contracción de tensores

La contracción de un tensor respecto a dos índices libres es la operación que consiste en asignar a ambos índices una misma letra como subíndices, cambiando de esta manera estos índices por pseudoíndices.

La contracción produce un tensor que tiene un orden dos veces menor que el original.

Contracción de $T_{ij} \rightarrow T_{ii}$

$$\begin{aligned}
 a_i v_j &\longrightarrow u_{ii} \\
 E_{ij} a_k &\longrightarrow E_{ij} a_j = b_i \\
 E_{ij} a_i &= c_j \\
 E_{ii} a_k &= d_k
 \end{aligned}$$

Contracción de $E_{ij}F_{km}$

$$\begin{aligned} E_{ii}F_{km} &= G_{km} \\ E_{ij}F_{im} &= H_{jm} \\ E_{ij}F_{jm} &= R_{im} \end{aligned}$$

Producto interno

El producto interno de dos tensores es el resultado de una contracción, que da lugar a un índice por cada tensor, realizando después el producto externo de los dos tensores.

Producto externo	→	Contracción	→	Producto interno
$a_i b_j$	→	$i = j$	→	$a_i b_i$
$a_i E_{jk}$	→	$j = i$	→	$a_i E_{ik} = f_k$
$E_{ij} F_{km}$	→	$k = j$	→	$E_{ij} F_{jm} = G_{im}$
$E_{ij} E_{km}$	→	$k = j$	→	$E_{ij} E_{jm} = B_{im}$

La derivada parcial de un campo tensorial respecto a una variable t se simboliza como $\frac{\partial}{\partial t}$ y sigue las mismas reglas del cálculo convencional.

Así, la derivada parcial respecto a la coordenada x_q , se indica como $\frac{\partial}{\partial x_q}$, que de manera compacta se puede expresar como ∂_q . La derivada parcial segunda $\frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_m}$, se expresa de manera compacta como ∂_{qm} .

Frecuentemente la derivada parcial respecto a la variable x_i se representa en notación indicial haciendo uso de la coma, esto es:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \phi_{,i} & ; & \quad b) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} \\ c) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= v_{i,j} & ; & \quad d) \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk} \\ e) \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} &= T_{ij,k} & ; & \quad f) \quad \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km} \end{aligned}$$

Algunos operadores usados en el cálculo vectorial se representan en notación indicial como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Nabla}; \quad \bar{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{e}_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{e}_i = \partial_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

Gradiente de un campo escalar:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\bar{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\bar{e}_3 \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\bar{e}_i = \phi_{,i}\bar{e}_i\end{aligned}$$

Divergencia de un campo vectorial

$$\begin{aligned}\text{Sea } \bar{v} &= v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3 \\ \text{div } \bar{v} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}\end{aligned}$$

Rotacional de un campo vectorial \bar{v} .

$$\begin{aligned}\text{rot } \bar{v} &= \bar{\nabla} \times \bar{v} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{e}_i \right) \times (v_j \bar{e}_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \bar{e}_i \times \bar{e}_j \\ &= v_{j,i} \bar{e}_i \times \bar{e}_j = v_{j,i} \varepsilon_{kij} \bar{e}_k\end{aligned}$$

Apéndice B

Rotación de Ejes Coordinados

Las componentes del vector \bar{v} en el sistema de referencia x_1, x_2 , se pueden expresar como

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 = v_j\bar{e}_j$$

Si el sistema de referencia original se gira un ángulo θ respecto al eje x_1 , el nuevo sistema de referencia sera x'_1, x'_2 . Ahora el vector \bar{v} se puede expresar en este nuevo sistema de referencia como

$$\bar{v} = v'_1\bar{e}'_1 + v'_2\bar{e}'_2 = v'_i\bar{e}'_i$$

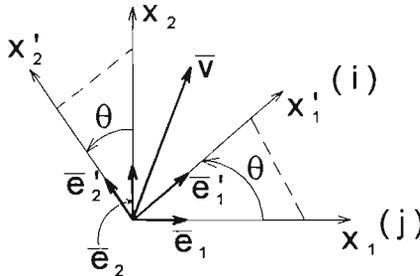


Figura B.1: Rotación de ejes coordenados.

Primeramente se buscará la transformación de coordenadas

$$x'_i = f_i(x_1, x_2)$$

Los vectores base correspondientes al sistema de referencia x'_1, x'_2 , se pueden expresar como:

$$\bar{e}'_1 = \cos\theta\bar{e}_1 + \text{sen}\theta\bar{e}_2 \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{e}'_2 = -\text{sen}\theta\bar{e}_1 + \cos\theta\bar{e}_2 \quad (\text{B.2})$$

$$\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 = a_{1j}\bar{e}_j$$

$$\bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 = a_{2j}\bar{e}_j$$

$$\bar{e}'_i = a_{ij}\bar{e}_j \quad (\text{B.3})$$

El vector \bar{v} puede ser expresado en las coordenadas sin primas como:

$$\bar{v} = v_j\bar{e}_j \quad (\text{B.4})$$

y en el sistema con primas como:

$$\bar{v} = v'_i\bar{e}'_i \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo la ec. B.3 en la ec. B.5 se obtiene:

$$\bar{v} = v'_i a_{ij}\bar{e}_j \quad (\text{B.6})$$

Comparando la ec. B.4 con la ec. B.6 se obtiene

$$v_j = v'_i a_{ij} \quad (\text{B.7})$$

Ahora se busca la transformación inversa $x_i = g_i(x'_1, x'_2)$

Los vectores base \bar{e}_1 y \bar{e}_2 se pueden expresar como:

$$\bar{e}_1 = \cos\theta\bar{e}'_1 - \text{sen}\theta\bar{e}'_2$$

$$\bar{e}_2 = \text{sen}\theta\bar{e}'_1 + \cos\theta\bar{e}'_2$$

$$\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}'_1 + a_{21}\bar{e}'_2 = a_{i1}\bar{e}'_i$$

$$\bar{e}_2 = a_{12}\bar{e}'_1 + a_{22}\bar{e}'_2 = a_{i2}\bar{e}'_i$$

Generalizando se tiene:

$$\bar{e}_j = a_{ij}^T\bar{e}'_i \quad (\text{B.8})$$

El vector \bar{v} puede ser expresado en el sistema coordenado con primas como:

$$\bar{v} = v'_i\bar{e}'_i \quad (\text{B.9})$$

y en el sistema coordenado sin primas como:

$$\bar{v} = v_j\bar{e}_j \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo la ec. B.8 en la ec. B.10 se tiene:

$$\bar{v} = v_j a_{ij}^T \bar{e}'_i \quad (\text{B.11})$$

Comparando la ec. B.9 con la ec. B.11 se obtiene:

$$v'_i = v_j a_{ij}^T \quad (\text{B.12})$$

Las ecs. B.7 y B.12 representan la ley de transformación para un tensor de orden (1).

Esta ley se puede generalizar para un tensor de orden 2, siendo su ley de transformación

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (\text{B.13})$$

El término a_{jl} representa la matriz de cosenos directores entre los ejes coordenados x'_i y x_j , dada por $[a_{ij}] = \cos(x'_i, x_j)$, tal como se muestra en la Fig. B.2.

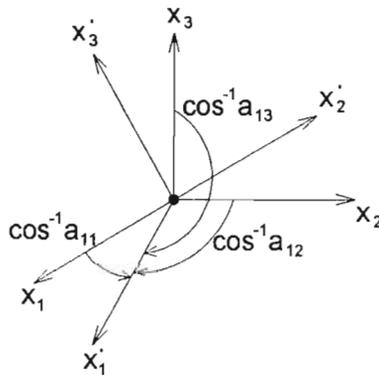


Figura B.2: a) Transformación de un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 en x'_1, x'_2 y x'_3 .

Tabla B.1: Tabla de deformación de coordenadas.

		\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}_3
		x_1	x_2	x_3
\bar{e}'_1	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
\bar{e}'_2	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
\bar{e}'_3	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Bibliografía

Eringen, A.C., 1967, Mechanics of Continua, First Edition, John Wiley and Sons.

Fung, Y.C., (1965), Foundations of Solid Mechanics, Printice-Hall.

Func, Y.C., 1994, A first Course in Continuum Mechanics, Third Edition, Prentice-Hall.

Germain, P., y Muller, P., 1980, Introduction á la mécanique des milieux continus, Masson.

Levy, E., 1980, Elementos de Mecánica del Medio Continuo, primera edición, Ed. Limusa.

Malvern, L.E., 1997, Introduction to the Mechanics of Continuous Medium, Prentice-Hall.

Mase, G.E., 1978, Mecánica del Medio Continuo, Series Schaum.

Mase, G.T, Mase, G. T., and Mase, G.E., 1999, Continuum Mechanics for Engineering, Second Edition, CRC Press.

Rodríguez C.N., (1981), Apuntes de la clase de Mecánica del Medio Continuo, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.