



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ORDEN DE LOS CICLOS EN UNA GRAFICA Y SU DIGRAFICA ASOCIADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

IVONNE ATZELBI LOPEZ HERNANDEZ

DIRECTORA DE TESIS: M. en C. MARIA DE LOURDES GUERRERO ZARCO



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

2005



m. 345 952



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
 NOMBRE: Ivonne Atzelbi López Hernández
 FECHA: 27 / JUNIO / 05
 FIRMA: [Signature]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
 Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
 Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“ El orden de los ciclos en una gráfica y su digráfica asociada”
 realizado por Ivonne Atzelbi López Hernández

con número de cuenta 093552910, quien cubrió los créditos de la carrera de:
 Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director
 Propietario
 Propietario
 Propietario
 Suplente
 Suplente

M. en C. María de Lourdes Guerrero Zarco
 Dra. Hortensia Galeana Sánchez
 Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía
 Mat. Laura Pastrana Ramírez
 Mat. Mario Delgadillo Torres

[Signature]
[Signature]
 Hugo A. Rincón M.
 Laura Pastrana R.
[Signature]

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo Mojica
 CONSEJO DEPARTAMENTAL
 MATEMÁTICAS

Con mucho cariño
a mis hermanos,
porque muy pronto
tengamos un futuro
mejor.

Con mucho amor a
la chiquita Annette
porque en un futuro no
muy lejano supere esta
meta.

Agradecimientos.

A Francisco López Chimil por comprendernos y escucharnos a mis hermanos y a mí y porque no nos abandonó en momentos de crisis familiar. Gracias tío Paquín.

A Marcos y Humberto López Chimil por innumerables llamadas de atención y acertados consejos que me hicieron madurar y responsabilizarme de mis acciones.

A Ofelia López y Feliciano Solís, por brindarnos a mis hermanos y a mí, techo y sustento justo cuando más lo necesitamos.

A los López Osnaya por
hacerme reír tanto y
dejar-me buenos recuerdos.

A Leonorcita López y su
mamá Leonor Gómez por
darme la oportunidad de
aprender la importancia de
atender y escuchar a los
niños.

A mi madre Soledad
Hernández por socorrerme
en mis enfermedades y
darme el ánimo para
levantarme, por tantos
detalles que no me
merezco y porque cuando
éramos niños, a mis
hermanos y a mí nos
ponías "de puntitas" de
Radio Educación, un
grande y grato recuerdo.

A mi padre Pedro López por los libros infantiles chinos y rusos de las ferias del libro y por las visitas a los museos con sus singulares explicaciones que no tenían que ver con la realidad.

A Miguel Rivera por su fortaleza y el apoyo incondicional desde que tengo uso de razón.

A aquellos espontáneos amigos de verdad que he encontrado a lo largo de mi vida; ya sea por la ayuda brindada o por hacerme pasar momentos memorables, y que desafortunadamente no se han quedado conmigo por diversos motivos, donde quiera que se encuentren, espero estén bien y que alguna vez se acuerden de mí.

Gina, Patricia y Laureles, Juan, Manuel, Mónica y Yolanda, Adriana, Andrómeda, Nabor, Mario y Luis, Lalo y Víctor, Roxana, Juanita, Nancy, Lilia, Adrián, Aravid y Rubén y de los que no supe con certeza su nombre.

A aquellos excelentes y humanos profesores de la facultad, esos que a todos sus alumnos dan la misma oportunidad de entender.

A la gente desconocida de buen corazón que en la calle no permitieron injusticias conmigo.

Gracias a la vida por la oportunidad de caer en buenas manos, pues de lo contrario no sé que hubiera sido de mí.

Gracias a los que me discriminaron porque, aunque no estoy segura de que este trabajo caiga en sus manos, lo que no me mató me hizo más fuerte.

También agradezco:

A mi asesora la M. en C. Lourdes Guerrero porque creyó en mí y en lo que estaba desarrollando, dejando fluir mis ideas; por escuchar con detenimiento mis propuestas y apoyarlas.

A la Dra. Hortensia por su cálido recibimiento y la atención en mi trabajo.

Al Dr. Hugo por su paciencia y sus valiosas observaciones a mi trabajo.

A la Mat. Laura por sus sonrisas y explicaciones.

Al Mat. Mario por su amabilidad e interés.

Contenido

| | |
|----------------------------------|----|
| Introducción | i |
| Capítulo 1 | |
| Conceptos iniciales. | 1 |
| Capítulo 2 | |
| Matrices asociadas a gráficas. | 6 |
| Capítulo 3 | |
| Digráficas asociadas a matrices. | 25 |
| Conclusión | 75 |
| Apéndice | 78 |
| Bibliografía | 95 |

Introducción

El presente es un trabajo de exploración sobre el área de teoría de gráficas.

Se comienza con cualquier gráfica, a la cual se asocian ciertas matrices. Hecho esto, se consideran las siguientes preguntas, ¿qué operaciones entre dichas matrices están definidas? Las operaciones entre estas matrices, ¿producen una nueva *gráfica*? ¿Cuál es la relación entre la primera gráfica y ésta última?

Se termina demostrando los resultados que se obtuvieron en el desarrollo de este trabajo.

Se escribirá *gráfica* en cursiva para referirse a la digráfica que se encontró, antes de definirla formalmente.

En el capítulo 1, se definen conceptos afines a la teoría de gráficas.

En el capítulo 2, se definen las matrices que se asociarán a cualquier gráfica y después de estudiar varios ejemplos, se concluye con cuáles de estas matrices se trabajará en el capítulo siguiente.

En el capítulo 3, se define la digráfica asociada a una matriz en la primera sección; y se demuestran formalmente las observaciones que se hicieron en la sección anterior junto con otros resultados que se desprenden de éstas.

Por último, en el apéndice se aplican los resultados que se demostraron en el capítulo anterior (sección 3.2), mostrando diversos ejemplos.

Capítulo 1

Conceptos iniciales

En este primer capítulo se introducen algunas definiciones básicas de teoría de gráficas.

Definición 1.1 Una **gráfica** G , consta de un conjunto finito, no vacío, con p elementos llamados vértices de G , que denotamos con $V(G)$, y de un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de $V(G)$, llamados aristas de G , que denotamos con $E(G)$. Para abreviar escribimos $G=(V(G), E(G))$ y si no hay confusión, únicamente G . Si $e_k=\{v_i, v_j\} \in E(G)$ con v_i y $v_j \in V(G)$, decimos que: v_i y e_k inciden, v_j y e_k inciden y que v_i es adyacente a v_j , y lo abreviamos con v_i ady v_j . Si esto no ocurre decimos que v_i no es adyacente a v_j , y lo abreviamos con v_i no ady v_j .

En la figura 1.1 se muestra la gráfica G_1 , etiquetada, con 8 vértices y 11 aristas, esto es, todos los elementos de G_1 tienen nombre.

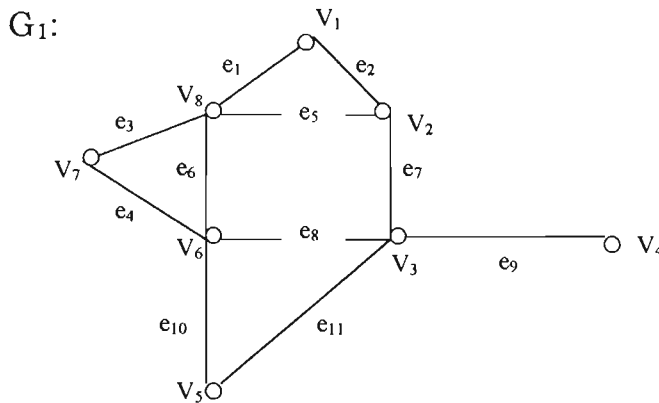


Figura 1.1

Definición 1.2 Si en una gráfica G , todo par de vértices es adyacente, decimos que G es **completa**, y la denotamos por K_p , donde p es el número de vértices de G . Los ejemplos de la figura 1.2 son gráficas completas.

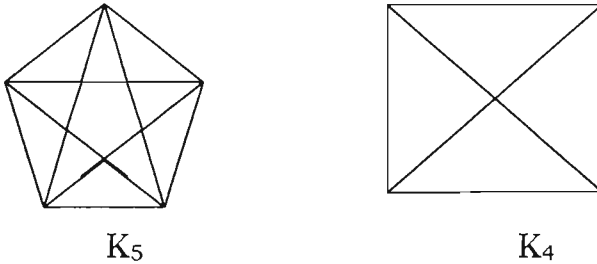


Figura 1.2

Definición 1.3 En una gráfica G , un **camino**, es una sucesión alternada de vértices y aristas de G como sigue:

$(v_i, \{v_i, v_j\}, v_j, \{v_j, v_k\}, v_k, \dots, v_m, \{v_m, v_n\}, v_n)$, y lo abreviamos con $(v_i, v_j, v_k, \dots, v_m, v_n)$, o con (e_r, e_s, \dots, e_z) , donde $e_r = e_{ij} = \{v_i, v_j\}$, $e_s = e_{jk} = \{v_j, v_k\}$, ... , $e_z = e_{mn} = \{v_m, v_n\}$, y donde r representa el nombre de la única arista que une al vértice i con el j . En la gráfica de la figura 1.1, $(v_1, v_2, v_8, v_1, v_2, v_3, v_6) = (e_2, e_5, e_1, e_2, e_7, e_8)$ es un camino.

Definición 1.4 Si en un camino $v_i = v_n$, esto es, su vértice inicial coincide con su vértice final, entonces es un **camino cerrado**, y abierto en otro caso.

Definición 1.5 Un camino cerrado con al menos tres vértices y todos sus vértices distintos a excepción del primero y el último, es un **ciclo**. La **longitud de un ciclo** es el número de aristas que contiene. Si un ciclo tiene n aristas, entonces tiene n vértices y la longitud del ciclo es igual a n . En la gráfica de la

figura 1.1, $(v_8, v_2, v_3, v_6, v_8) = (e_5, e_7, e_8, e_6)$ y $(v_3, v_6, v_5, v_3) = (e_8, e_{10}, e_{11})$ son ciclos de longitud 4 y 3 respectivamente.

Definición 1.6 En una gráfica G , una **trayectoria** es un camino que no repite vértices, (por consiguiente, tampoco sus aristas). En la gráfica de la figura 1.1, una trayectoria es $(v_8, v_7, v_6, v_5) = (e_3, e_4, e_{10})$.

Definición 1.7 Una gráfica G es **conexa**, si para todo par de vértices en G existe una trayectoria que los une, si esto no ocurre, decimos que G es **disconexa**; la gráfica de la figura 1.1 es una gráfica conexa y la gráfica de la figura 1.4 es disconexa.

Definición 1.8 Un **árbol**, es una gráfica G , conexa y sin ciclos. La gráfica G_2 de la figura 1.3 es un árbol.

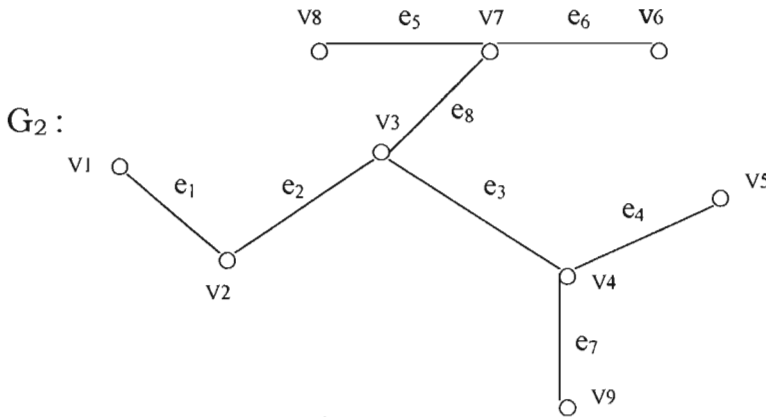


Figura 1.3

Definición 1.9 Un **conjunto de corte** en una gráfica conexa G , es el mínimo conjunto de aristas de $E(G)$ que al quitarlo, hace disconexa a G . En la gráfica G_2 de la figura 1.3, cualquier conjunto de la forma $e_k = \{v_i, v_j\} \in E(G_2)$ donde $v_i, v_j \in V(G_2)$, es un conjunto de corte de G_2 .

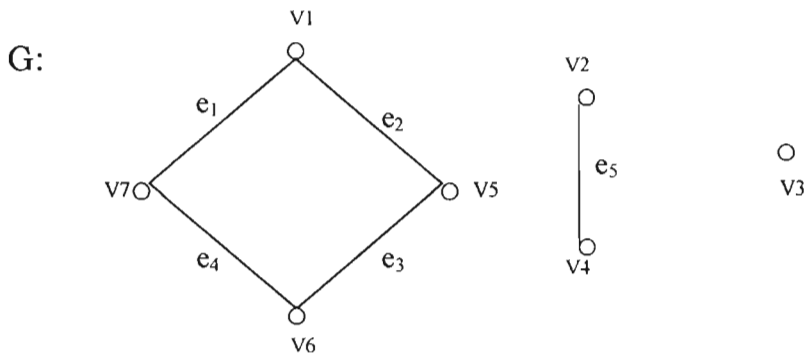


Figura 1.4

Capítulo 2

Matrices asociadas a gráficas

Se definirán cinco maneras de asociar una matriz a una gráfica cualquiera y se aplicarán estas definiciones a ejemplos concretos para averiguar bajo que condiciones es aplicable la suma y multiplicación de matrices a estas matrices asociadas.

A continuación un breve recordatorio de la suma y multiplicación de matrices.

Sean X y Y matrices sobre un campo W .

X es de **tamaño** $m \times n$, si X tiene m renglones y n columnas.

X se llama matriz **cuadrada**, si $m = n$.

Sean X y Y dos matrices de igual tamaño, digamos $m \times n$. La **suma** $X + Y$ es la matriz donde cada entrada z_{ij} es el resultado de sumar las entradas correspondientes: $z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}$.

Ahora, supongamos que $X = (x_{ij})$ y $Y = (y_{ij})$ son dos matrices, en donde, el número de columnas de X es igual al número de renglones de Y . Si X tiene tamaño $m \times p$, se escribirá $X = (x_{ij})_{m \times p}$, y si Y tiene tamaño $p \times n$, se escribirá $Y = (y_{ij})_{p \times n}$, entonces el **producto** $X * Y$ es una matriz de tamaño $m \times n$, donde cada entrada z_{ij} es el resultado de la suma siguiente:

$$z_{ij} = x_{i1} * y_{1j} + x_{i2} * y_{2j} + \dots + x_{ip} * y_{pj} = \sum_{k=1}^p x_{ik} * y_{kj}$$

Cuando X es de tamaño $m \times r$ y Y de tamaño $s \times n$, donde $r \neq s$, el producto $X * Y$ no está definido.

En lo sucesivo, se supone una gráfica G con p vértices y q aristas con $q \neq 0$. Con esta última condición, se asegura que las últimas 4 matrices de las cinco siguientes, estén bien definidas.

Definición 2.1 La **matriz de adyacencia** $A=(a_{ij})$ de una gráfica G , es la matriz en la cual $a_{ij} = 1$ si v_i es adyacente con v_j en G , con $v_i, v_j \in V(G)$, y $a_{ij} = 0$ en otro caso.

Observación 2.1.a. $A = (a_{ij})$ es simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$.

Observación 2.1.b. La diagonal $a_{ii} = 0$.

Observación 2.1.c. A es una matriz cuadrada de tamaño $p \times p$.

Definición 2.2 La **matriz de incidencia** de una gráfica G , es la matriz $B=(b_{ij})$, en la cual $b_{ij}=1$ si v_i y e_j inciden en G , $v_i \in V(G)$ y $e_j \in E(G)$, y $b_{ij}=0$ en otro caso.

Observación 2.2.a. Cada columna de $B=(b_{ij})$ tiene, a lo más, dos unidades enteras.

Observación 2.2.b. B es una matriz de tamaño $p \times q$.

Sea G una gráfica con sus ciclos etiquetados.

Definición 2.3 La **matriz de ciclos** $C= (c_{ij})$ de una gráfica G , es la matriz en la cual $c_{ij} = 1$, si el i -ésimo ciclo de G contiene a $e_j \in E(G)$, y $c_{ij} = 0$ en otro caso.

Sea G una gráfica con sus conjuntos de corte etiquetados.

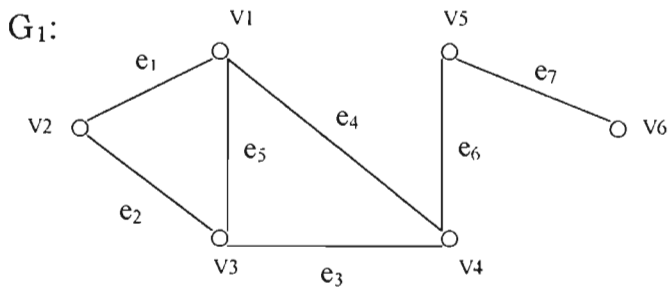
Definición 2.4 La **matriz de conjuntos de corte** $K=(k_{ij})$ de una gráfica G , es la matriz en la cual $k_{ij} = 1$ si el i -ésimo conjunto de corte de G contiene a $e_j \in E(G)$, y $k_{ij} = 0$ en otro caso.

Sea G una gráfica conexa.

Definición 2.5 Para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$, la **matriz de trayectorias** $T_{uv}=(t_{ij})$ de una gráfica G , tiene un renglón por cada trayectoria entre u y v , y una columna por cada arista en $E(G)$, en la cual, $t_{ij} = 1$ si la j -ésima arista es un miembro de la i -ésima trayectoria entre u y v en G , y $t_{ij} = 0$ en otro caso.

Enseguida, se listan algunos ejemplos concretos, aplicando las definiciones anteriores.

Ejemplo 1: Sea G_1 la siguiente gráfica conexa con $p=6$ y $q=7$.



Aplicando la definición 2.1, la matriz de adyacencia asociada a G_1 es una matriz de tamaño 6×6 que queda así:

$$A = (a_{ij})_{6 \times 6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Observemos que A es simétrica y que la diagonal principal es igual a cero.

Aplicando la definición 2.2, la matriz de incidencia asociada a G_1 es una matriz de tamaño 6×7 , como sigue:

$$B = (b_{ij})_{6 \times 7} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \left(\begin{array}{ccccccc} V_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Observemos que en B hay a lo más dos unidades por columna.

Ahora es el turno para la definición 2.3. Antes de obtener la matriz de ciclos, se etiquetan los ciclos de G_1 :

$$c_1 = (e_1, e_2, e_5)$$

$$c_2 = (e_3, e_4, e_5)$$

$$c_3 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

Luego, la matriz de ciclos asociada a G_1 es:

$$C = (C_{ij})_{3 \times 7} = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

La definición 2.4 requiere de conocer primero los conjuntos de corte de G_1 :

$$\begin{array}{ll} k_1 = \{e_1, e_4, e_5\} & k_5 = \{e_1, e_3, e_5\} \\ k_2 = \{e_2, e_3, e_5\} & k_6 = \{e_2, e_4, e_5\} \\ k_3 = \{e_1, e_2\} & k_7 = \{e_6\} \\ k_4 = \{e_3, e_4\} & k_8 = \{e_7\} \end{array}$$

Entonces, la matriz de conjuntos de corte asociada a G_1 resulta así:

$$K = (k_{ij})_{8 \times 7} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Por último, la definición 2.5 se aplica a gráficas conexas; G_1 es conexa, si se consideran los vértices $v_1, v_3 \in V(G_1)$, las trayectorias que unen a v_1 con v_3 son:

$$t_1 = (e_1, e_2)$$

$$t_2 = (e_4, e_3)$$

$$t_3 = (e_5)$$

La matriz de trayectorias asociada a G_1 es:

$$T_{v_1v_3} = (t_{ij})_{3 \times 7} = \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Del primer ejemplo conviene extraer la siguiente información:

A es de tamaño 6×6 ,

B es de tamaño 6×7 ,

C es de tamaño 3×7 ,

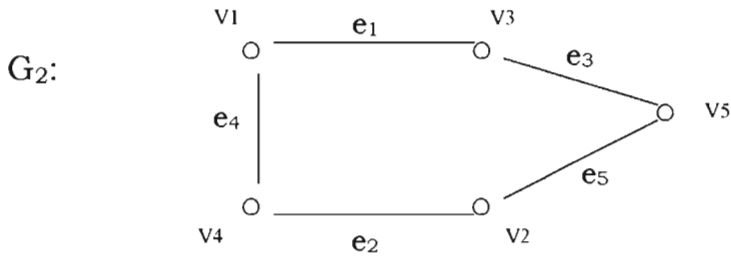
K es de tamaño 8×7 y

$T_{v_1v_3}$ es de tamaño 3×7 .

Las posibles operaciones que están definidas entre las matrices asociadas a G_1 , son la multiplicación $A \cdot B$ y la suma $C + T_{v_1v_3}$.

Este modo de proceder, que consiste en asociar las cinco matrices a una gráfica y al final saber las operaciones definidas entre ellas, se trabajará en los siguientes ejemplos de gráficas con características específicas.

Ejemplo 2: Sea G_2 un ciclo con $p=5$ y $q=5$.



La matriz de adyacencia para G_2 , según la definición 2.1 es:

$$A = (a_{ij})_{5 \times 5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de incidencia para G_2 según la definición 2.2 es:

$$B = (b_{ij})_{5 \times 5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La gráfica G_2 sólo tiene un ciclo que es ella misma. Sea $c_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, luego, la matriz de ciclos asociada a G_2 es:

$$C = (C_{ij})_{1 \times 5} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ c_1 & [1 & 1 & 1 & 1 & 1] \end{matrix}$$

Los conjuntos de corte de G_2 son:

$$\begin{aligned} k_1 &= \{e_1, e_2\} & k_6 &= \{e_1, e_4\} \\ k_2 &= \{e_2, e_3\} & k_7 &= \{e_4, e_2\} \\ k_3 &= \{e_3, e_4\} & k_8 &= \{e_2, e_5\} \\ k_4 &= \{e_4, e_5\} & k_9 &= \{e_5, e_3\} \\ k_5 &= \{e_5, e_1\} & k_{10} &= \{e_3, e_1\} \end{aligned}$$

La matriz de conjuntos de corte correspondiente a G_2 es:

$$K = (k_{ij})_{10 \times 5} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ k_1 & \left(1 & 1 & 0 & 0 & 0 \right) \\ k_2 & \left(0 & 1 & 1 & 0 & 0 \right) \\ k_3 & \left(0 & 0 & 1 & 1 & 0 \right) \\ k_4 & \left(0 & 0 & 0 & 1 & 1 \right) \\ k_5 & \left(1 & 0 & 0 & 0 & 1 \right) \\ k_6 & \left(1 & 0 & 0 & 1 & 0 \right) \\ k_7 & \left(0 & 1 & 0 & 1 & 0 \right) \\ k_8 & \left(0 & 1 & 0 & 0 & 1 \right) \\ k_9 & \left(0 & 0 & 1 & 0 & 1 \right) \\ k_{10} & \left(1 & 0 & 1 & 0 & 0 \right) \end{matrix}$$

Para la matriz de trayectorias, se toman en cuenta los vértices $v_1, v_2 \in V(G_2)$; las trayectorias que unen a v_1 con v_2 son:

$$t_1=(e_1, e_3, e_5) \text{ y } t_2=(e_4, e_2).$$

Así,

$$T_{v_1 v_2}=(t_{ij})_{2 \times 5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para el ejemplo 2, se tiene que:

A es de tamaño 5×5 ,

B es de tamaño 5×5 ,

C es de tamaño 1×5 ,

K es de tamaño 10×5 y

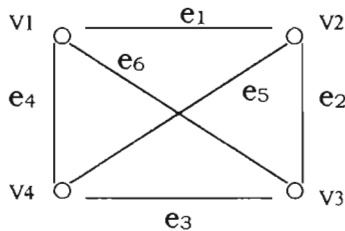
$T_{v_1 v_2}$ es de tamaño 2×5 .

Luego, sólo $A \cdot B$ y $A+B$ están definidas.

¡Otro ejemplo!

Ejemplo 3: Sea G_3 una gráfica completa con $p=4$ y $q=6$.

G_3 :



La matriz de adyacencia asociada a G_3 es:

$$A=(a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de incidencia asociada a G_3 es:

$$B=(b_{ij})_{4 \times 6} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Los ciclos de la gráfica G_3 , se muestran junto con su matriz de ciclos $C=(c_{ij})_{7 \times 6}$:

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} C_1=(e_1, e_2, e_3, e_4) \\ C_2=(e_1, e_2, e_6) \\ C_3=(e_3, e_4, e_6) \\ C_4=(e_1, e_4, e_5) \\ C_5=(e_2, e_3, e_5) \\ C_6=(e_6, e_2, e_5, e_4) \\ C_7=(e_3, e_6, e_1, e_5) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Los conjuntos de corte de G_3 y su matriz conjunto de corte $K=(k_{ij})_{6 \times 6}$, es lo que se ve enseguida:

$$\begin{array}{l}
 k_1=\{e_1, e_4, e_6\} \\
 k_2=\{e_3, e_4, e_5\} \\
 k_3=\{e_2, e_3, e_6\} \\
 k_4=\{e_1, e_2, e_5\} \\
 k_5=\{e_2, e_4, e_5, e_6\} \\
 k_6=\{e_1, e_3, e_5, e_6\}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

Sean $v_1, v_4 \in V(G_3)$, las trayectorias que unen estos vértices y la matriz de trayectorias $T_{v_1 v_4}=(t_{ij})_{5 \times 6}$ de G_3 son:

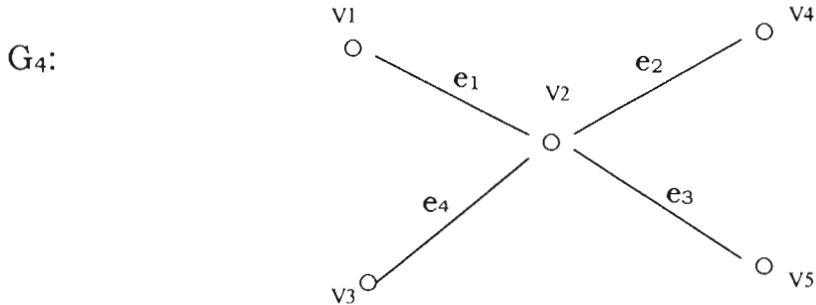
$$\begin{array}{l}
 t_1=(e_1, e_5) \\
 t_2=(e_1, e_2, e_3) \\
 t_3=(e_6, e_3) \\
 t_4=(e_4) \\
 t_5=(e_6, e_2, e_5)
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

A es de tamaño 4×4 ,
 B es de tamaño 4×6 ,
 C es de tamaño 7×6 ,
 K es de tamaño 6×6 y
 $T_{v_1 v_4}$ es de tamaño 5×6 .

Las operaciones posibles son: $A*B$, $B*K$, $C*K$, $T*K$.

¡Uno más!

Ejemplo 4: Sea G_4 un árbol con $p=5$ y $q=4$.



La matriz de adyacencia asociada a G_4 es:

$$A=(a_{ij})_{5 \times 5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de incidencia asociada a G_4 es:

$$B=(b_{ij})_{5 \times 4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La gráfica G_4 , por definición, no tiene ciclos, luego, $C=(c_{ij})$ asociada a G_4 no existe.

Los conjuntos de corte de G_4 y su correspondiente matriz $K=(k_{ij})_{4 \times 4}$ son:

$$\begin{array}{l} k_1=\{e_1\} \\ k_2=\{e_2\} \\ k_3=\{e_3\} \\ k_4=\{e_4\} \end{array} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean $v_4, v_5 \in V(G_4)$, las trayectorias de v_4 a v_5 y la matriz de trayectorias $T_{v_4 v_5}=(t_{ij})_{1 \times 4}$ de G_4 quedan así:

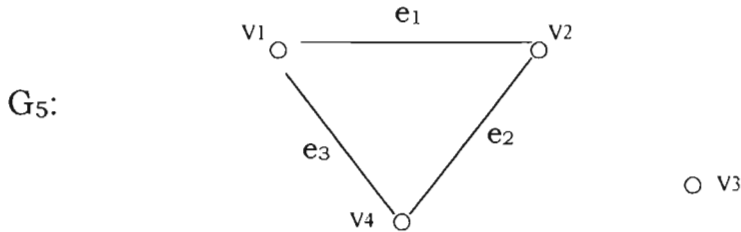
$$t_1=(e_2, e_3) \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A es de tamaño 5×5 ,
B es de tamaño 5×4 ,
K es de tamaño 4×4 y
 $T_{v_4 v_5}$ es de tamaño 1×4 .

Luego, las operaciones definidas en este ejemplo son: $A*B$, $B*K$ y $T*K$.

¡No hay quinto malo!

Ejemplo 5: Sea G_5 una gráfica desconexa con $p=4$ y $q=3$.



La matriz de adyacencia asociada a G_5 es:

$$A=(a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

La matriz de incidencia asociada a G_5 es:

$$B=(b_{ij})_{4 \times 3} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

La gráfica G_5 solo tiene un ciclo, a saber, $c_1=(e_1,e_2,e_3)$ y la matriz de ciclos asociada a G_5 es:

$$C=(C_{ij})_{1 \times 3} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 \\ c_1 & [1 & 1 & 1] \end{matrix}$$

Como los conjuntos de corte sólo están definidos para gráficas conexas, se tiene que la matriz de conjuntos de corte K asociada a G_5 no existe; lo mismo sucede con la matriz de trayectorias T_{uv} que para obtenerla se requiere de una gráfica conexas. Con esto la única operación posible para G_5 es $A*B$.

El análisis que sigue, lo podemos concluir a partir de la definición de cada una de las matrices que se manejaron aquí, pero lo precisamos como sigue:

Consideramos que los ejemplos mostrados hasta aquí, son los básicos para que podamos deducir lo siguiente: para las matrices K, C y T_{uv} , no hay un número fijo de renglones, o simplemente no existen dichas matrices, lo que produce que no siempre podamos hacer operaciones con ellas como sucede con las matrices asociadas a las gráficas G_4 y G_5 (ejemplos 4 y 5). No

es así, para las matrices A y B porque están definidas para cualquier gráfica y a diferencia de las anteriores, tienen un número fijo de renglones y de columnas. Además, notemos que $A*B$ es la operación común en todos los ejemplos; y por otro lado, la suma de matrices solo se da en casos como en los ejemplos 1 y 2; que por la primera razón dada, solo sobrevive la suma $A+B$ como en el ejemplo 2, descartando el caso restante.

Básicamente ahora sabemos, que no todas estas matrices se pueden sumar o multiplicar; sin embargo, este inconveniente desaparece si consideramos trabajar únicamente con la suma y la multiplicación de las matrices A y B .

Capítulo 3

Digráficas asociadas a matrices

En este capítulo, sección 3.1, se define la digráfica asociada a una matriz, estimando 3 casos en los que se aplicarán ejemplos. En la sección 3.2, se hace un análisis de la relación entre una gráfica y su digráfica asociada a través de una matriz; y por último, se demuestran los resultados de este análisis.

Sección 3.1

En esta sección se definen, 3 tipos de digráficas que se asociarán a la multiplicación y suma de las matrices de adyacencia e incidencia, haciendo un análisis con el número de vértices y aristas de una gráfica G .

Comencemos por definir lo siguiente:

Sea $G=(V(G),E(G))$ una gráfica con p vértices y q aristas, y sean $A=(a_{ij})_{p \times p}$ y $B=(b_{ij})_{p \times q}$, la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia de G respectivamente.

La **matriz producto** $M^*=(P_{ij})_{p \times q}$, es la matriz que resulta de multiplicar la matriz A por la matriz B , y diremos, la matriz producto asociada a G , o sólo, M^* de $G=(V(G),E(G))$, y escribiremos:

$$A \cdot B = M^*, \text{ o también, } (a_{ij})_{p \times p} * (b_{ij})_{p \times q} = (P_{ij})_{p \times q}$$

La **matriz suma** $M^+=(S_{ij})_{p \times p}$, es la matriz que resulta de sumar las matrices A y B , y diremos, la matriz suma asociada a G , o sólo, M^+ de $G=(V(G),E(G))$, y escribiremos:

$$A+B=M^+, \text{ o también, } (a_{ij})_{p \times p} + (b_{ij})_{p \times q} = (S_{ij})_{p \times p} \text{ donde } p=q.$$

Inmediatamente percibimos que nuestro análisis se puede dividir en casos:

Caso I: $p \neq q$

i) $p > q$

ii) $p < q$

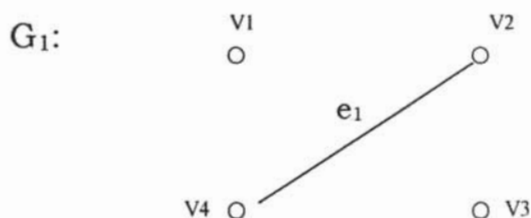
Caso II: $p = q$

Estudiaremos cada uno de ellos, utilizando ejemplos que harán práctico el desarrollo.

Caso I: $p \neq q$

i) $p > q$

Ejemplo 3.a. Supongamos G_1 con $p=4$ y $q=1$.



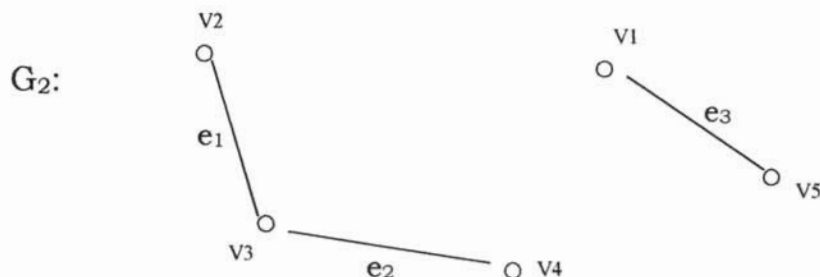
$$(a_{ij})_{4 \times 4} * (b_{ij})_{4 \times 1} = (P_{ij})_{4 \times 1}:$$

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 *
 \begin{array}{c}
 e_1 \\
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 e_1 \\
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Notamos que M^* de G_1 , es la misma matriz que B asociada a G_1 y sabemos que esta matriz ya tiene gráfica asociada, a saber, la propia G_1 .

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.b. Supongamos G_2 con $p=5$ y $q=3$.



$$(a_{ij})_{5 \times 5} * (b_{ij})_{5 \times 3} = (P_{ij})_{5 \times 3}:$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
 v_1 & \left(\begin{array}{ccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) & * & \begin{array}{ccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 \\
 v_1 & \left(\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) & = & \begin{array}{ccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 \\
 v_1 & \left(\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Digamos que queremos asignarle una *gráfica* a M^* de G_2 ; de manera informal, pongamos como vértices el conjunto de índices para los renglones de M^* y, para las aristas, diremos, si

$P_{ij} = 1$, entonces v_i es adyacente a v_j con esa dirección y si $P_{ij} \neq 1$, los vértices no son adyacentes, y la *gráfica* asociada a M^* de G_2 queda como en la figura 3.1.

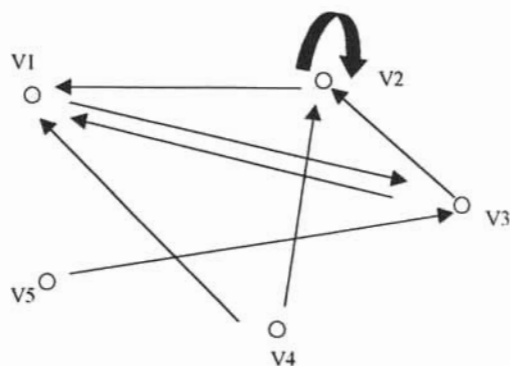


Figura 3.1

La gráfica que acabamos de encontrar, en teoría de gráficas se conoce como pseudodigráfica.

Conviene, pues, en este momento, introducir conceptos relacionados con las digráficas.

Definición 3.1.a Una **digráfica** o gráfica dirigida D es un par ordenado de conjuntos $(N(D), F(D))$, donde $N(D)$ es finito, no vacío y $F(D)$ un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de $N(D)$, a los elementos de $F(D)$ les llamamos flechas y a los de $N(D)$, nodos. No es lo mismo $\{n_i, n_j\}$ que $\{n_j, n_i\}$, ambas flechas tienen sentido contrario. La figura 3.2 es una digráfica.

Definición 3.1.b Una **subdigráfica** H de una digráfica D es una digráfica, tal que, $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Definición 3.1.c A una flecha que va de un nodo a él mismo, se le conoce como **lazo**, es decir, es una flecha de la forma $f = \{n_i, n_i\} \in F(D)$ con $n_i \in N(D)$ en D . En la figura 3.3, $\{n_3, n_3\}$ es un lazo.

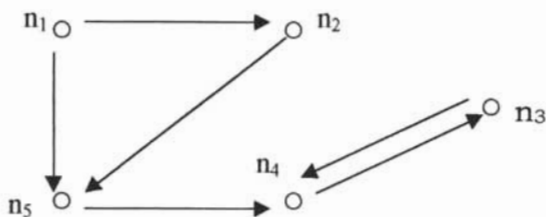


Figura 3.2

Definición 3.1.d Una **pseudodigráfica** es una digráfica en la que se permiten las repeticiones de flechas y los lazos. La figura 3.3. es una pseudodigráfica.

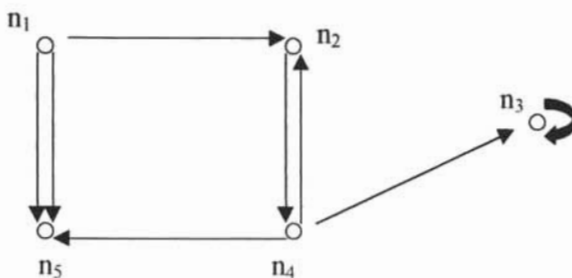


Figura 3.3

Definición 3.1.e.1 En una digráfica D , una flecha es **simétrica** si $f = \{n_i, n_j\} \in F(D)$, entonces $\{n_j, n_i\} \in F(D)$. En la digráfica de la figura 3.2, $\{n_3, n_4\}$ y $\{n_4, n_3\}$ son flechas simétricas. Una **digráfica simétrica** D es aquella que tiene todas sus flechas simétricas.

Definición 3.1.e.2 En una digráfica D , una flecha es **asimétrica** si $\{n_i, n_j\} \in F(D)$, entonces $\{n_j, n_i\} \notin F(D)$. En la digráfica de la figura 3.2, $\{n_1, n_2\}$ es una flecha asimétrica. Una **digráfica asimétrica** D es aquella que tiene todas sus flechas asimétricas.

Definición 3.1.f.1 Un **camino dirigido** en una digráfica D , es una sucesión alternada de nodos y flechas como sigue:

$(n_i, \{n_i, n_j\}, n_j, \{n_j, n_k\}, n_k, \dots, n_r, \{n_r, n_s\}, n_s) = (n_i, n_j, n_k, \dots, n_r, n_s)$. En la digráfica de la figura 3.2, $(n_1, n_2, n_5, n_4, n_3, n_4)$ es un camino dirigido.

Definición 3.1.f.2 Un **camino cerrado dirigido** es un camino dirigido donde $n_i = n_s$, esto es, el primer nodo es igual al último.

Definición 3.1.f.3 Un **ciclo dirigido** es un camino cerrado dirigido que no repite nodos, sólo el primero y el último. La **longitud de un ciclo dirigido** es el número de flechas que contiene.

Ahora es momento de definir, lo que va a significar una *gráfica* asociada a una matriz.

Sea M^* la matriz producto de $G=(V(G),E(G))$ con $p \neq q$ y $p > q$.

Definición 3.1.1 La **m^* -digráfica** D , o la digráfica D asociada a la matriz M^* , es un par ordenado de conjuntos $(N(D),F(D))$, donde $N(D)$ es un conjunto finito, no vacío, con p elementos llamados nodos de D , y $F(D)$ su conjunto de flechas descritas como sigue:

Sean $n_i, n_j \in N(D)$ y $P_{ij} \in M^*$.

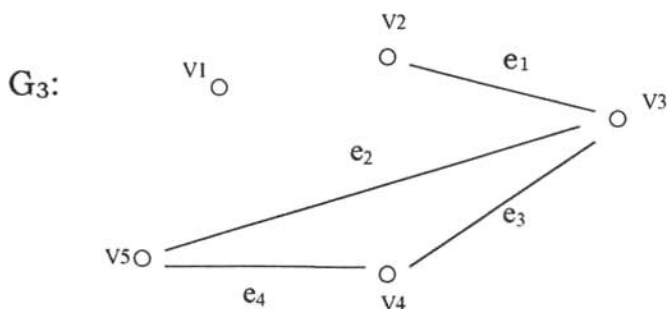
$\{n_i, n_j\} \in F(D)$ si $P_{ij} = 1$ con $i \neq j$ y

$\{n_i, n_j\} \notin F(D)$ en cualquier otro caso.

En lo que resta de este trabajo, por m^* -digráfica $D(G)$, entenderemos que es la digráfica D asociada a la gráfica G a través de M^* , y si no hay confusión sólo $D(G)$.

Ilustremos con un ejemplo.

Ejemplo 3.1.a Supongamos $G_3=(V(G_3),E(G_3))$ con $p=5$ y $q=4$.



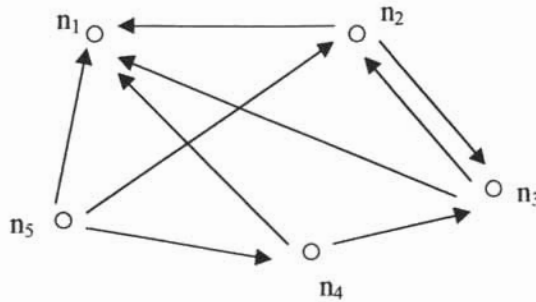
$$(a_{ij})_{5 \times 5} * (b_{ij})_{5 \times 4} = (P_{ij})_{5 \times 4} :$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\
 \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & * & \begin{array}{cccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
 \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
 \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & &
 \end{array}
 \end{array}$$

Por lo tanto, la m^* -digráfica $D(G_3)$ es:

$D(G_3)$:



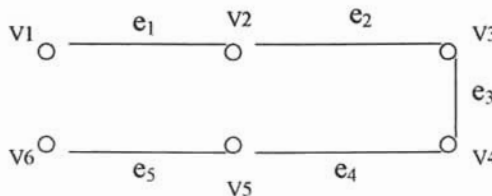
Notemos que $D(G_3)$ tiene una flecha simétrica $f=\{n_2,n_3\}$, no tiene lazos, pero sí un camino dirigido de n_5 a n_1 que pasa por todos los vértices.

Si en una digráfica D , el conjunto $N(D)$ de nodos, es un conjunto muy grande, es posible que encontremos un número de flechas simétricas muy grande, así que, para evitar una digráfica engorrosa, en vez de $\begin{matrix} \leftarrow & \rightarrow \end{matrix}$ pondremos \longleftrightarrow .

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 3.1.b. Supongamos G_4 con $p=6$ y $q=5$.

G_4 :



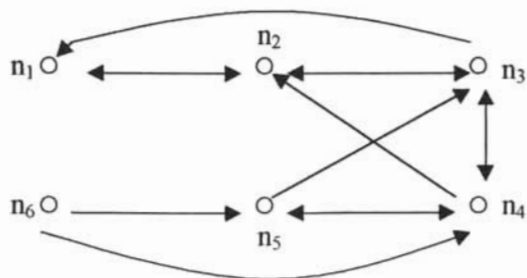
$(a_{ij})_{6 \times 6} * (b_{ij})_{6 \times 5} = (P_{ij})_{6 \times 5}$:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5 \\
 V_6
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 *
 \begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5 \\
 V_6
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 =$$

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5 \\
 V_6
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

La m^* -digráfica $D(G_4)$ es:

$D(G_4)$:



Aquí, notemos un camino dirigido de n_6 a n_1 que pasa por todos los vértices, pero con esto todavía no nos atrevemos a hacer una observación para extraer un resultado general, así que, sigamos explorando.

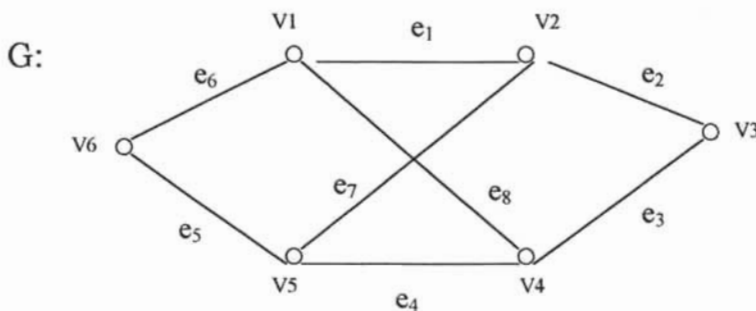
Continuemos con nuestro análisis.

Caso I: $p \neq q$

ii) $p < q$

Consideremos el siguiente ejemplo con la condición $p < q$.

Ejemplo 3.1.c. Supongamos G con $p=6$ y $q=8$.

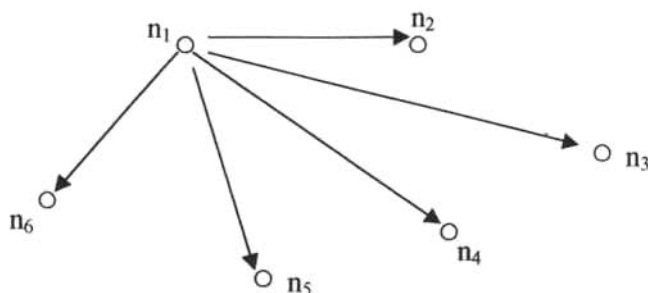


$$(\mathbf{a}_{ij})_{6 \times 6} * (\mathbf{b}_{ij})_{6 \times 8} = (\mathbf{P}_{ij})_{6 \times 8} :$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
 V_1 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & & & & & & * & V_1 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 V_2 & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & & & & & & & V_2 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 V_3 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & & & & & & & V_3 & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 V_4 & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & & & & & & & V_4 & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 V_5 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & & & & & & & V_5 & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 V_6 & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & & & & & & & V_6 & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$= \begin{array}{cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
 V_1 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 V_2 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 V_3 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 V_4 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 V_5 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 V_6 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Según la definición 3.1.1, $N(D)$ es un conjunto con seis nodos, si comenzamos con las adyacencias del nodo n_1 . La m^* -digráfica $D(G)$ empieza así:



Nos percatamos de que no podemos terminar $D(G)$, pues $P_{1,7} \in M^*$ de G , indica que, $\{n_1, n_7\} \in F(D)$ en $D(G)$ por la definición 3.1.1, pero $n_1 \in N(D)$ y $n_7 \notin N(D)$.

Si procedemos como en la definición 3.1.1 para asignar una *gráfica* a una matriz M^* de una gráfica G , pero ahora con la condición de que $p < q$, una manera natural de pensar es que, en vez de tomar el número de vértices de G como nodos de $D(G)$, tomamos el número de aristas de G como el número de nodos de $D(G)$.

Así, la *gráfica* asociada a una matriz con la nueva condición, se define como sigue:

Sea M^* la matriz producto de $G=(V(G),E(G))$ con $p \neq q$ y $p < q$.

Definición 3.1.2 La **m^* -digráfica** D , o la digráfica D asociada a la matriz M^* , es un par ordenado de conjuntos $(N(D),F(D))$ donde $N(D)$ es un conjunto finito, no vacío, con q elementos llamados nodos de D , y $F(D)$ su conjunto de flechas descritas como sigue:

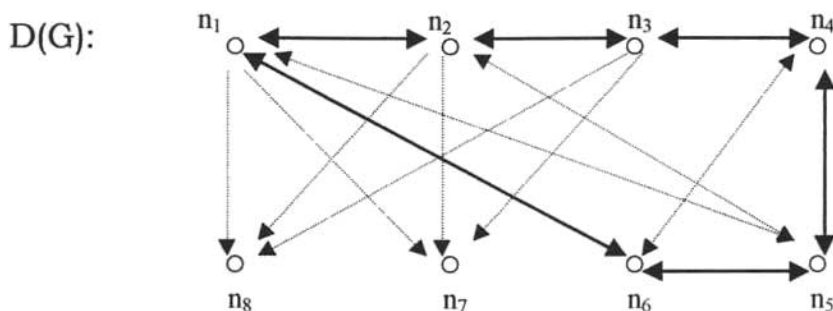
Sean $n_i, n_j \in N(D)$ y $P_{ij} \in M^*$.

$$\begin{aligned} \{n_i, n_j\} \in F(D) & \quad \text{si } P_{ij} = 1 \text{ con } i \neq j \quad \text{y} \\ \{n_i, n_j\} \notin F(D) & \quad \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

En lo que resta de nuestro trabajo, por m^* -digráfica $D(G)$, entenderemos que es la digráfica D asociada a la gráfica G a través de M^* , y si no hay confusión sólo $D(G)$.

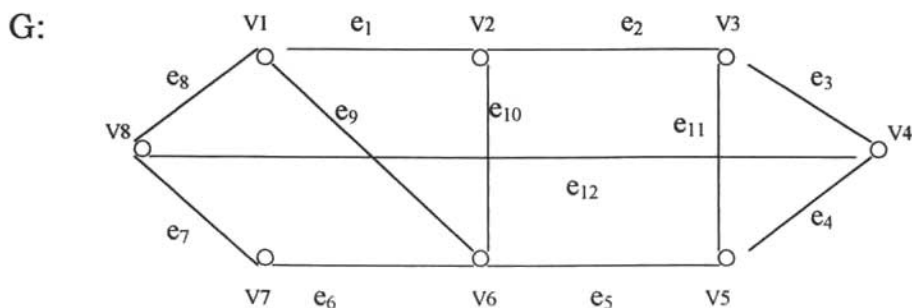
Es importante aclarar que la definición de gráfica G en el capítulo 1, permite que $E(G) = \emptyset$, aunque en el capítulo 2, se pone como condición para definir las matrices asociadas a una gráfica G que $q \neq 0$. Con esto, la m^* -digráfica $D(G)$ con $p < q$, está bien definida.

Retomando el ejemplo 3.1.c, a la matriz M^* aplicamos la definición 3.1.2 para obtener la siguiente m^* -digráfica, en donde omitimos algunas flechas, pues nos interesa mostrar lo que se ve con flechas negritas.



Observemos que G tiene un ciclo de longitud 6 y en $D(G)$ tenemos un ciclo dirigido simétrico de la misma longitud, bien podríamos pensar en la posibilidad de extraer de aquí, un resultado general. Prestemos atención al siguiente caso.

Ejemplo 3.1.d. Una gráfica G con $p=8$ y $q=12$.

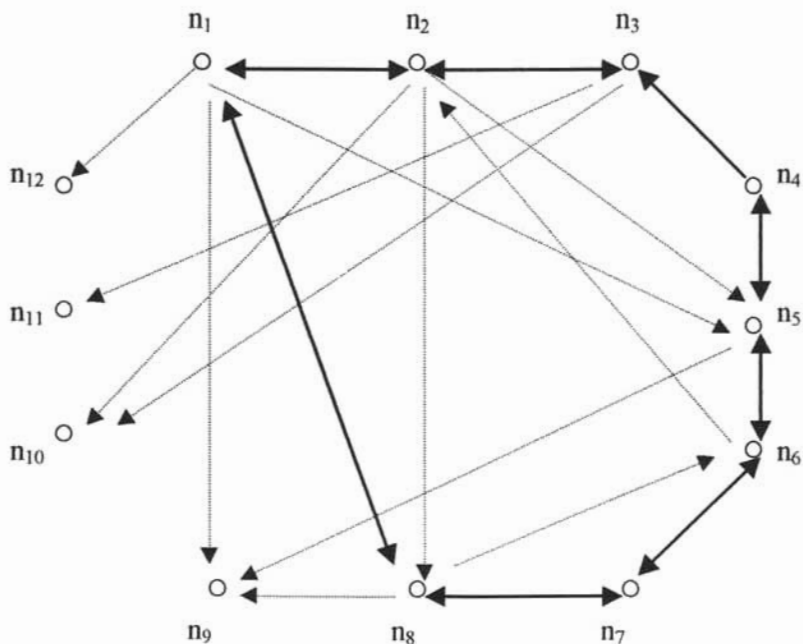


$$(a_{ij})_{8 \times 8} * (b_{ij})_{8 \times 12} = (P_{ij})_{8 \times 12} :$$

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5 \\
 V_6 \\
 V_7 \\
 V_8
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 *
 \begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5 \\
 V_6 \\
 V_7 \\
 V_8
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 =$$

| | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | e_6 | e_7 | e_8 | e_9 | e_{10} | e_{11} | e_{12} |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| V_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| V_2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| V_3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| V_4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| V_5 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| V_6 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| V_7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| V_8 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

En la siguiente m^* -digráfica $D(G)$, quitamos algunas adyacencias que no afectan el resultado que queremos mostrar, que es el que se ve con flechas negras.

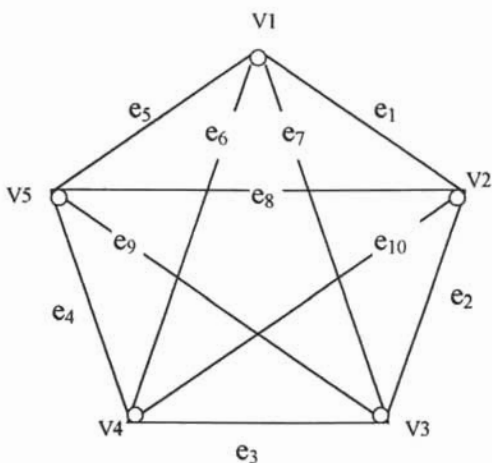


Notemos que $P_{3,4} \neq 1$, además, G tiene un ciclo de longitud 8 y $D(G)$ un ciclo asimétrico de la misma longitud. Sin dejar de lado este último hecho, continuemos explorando.

¿Qué pasa con una gráfica completa?

Ejemplo 3.2.a. Sea K_5 una gráfica completa con $p=5$ y $q=10$.

G :



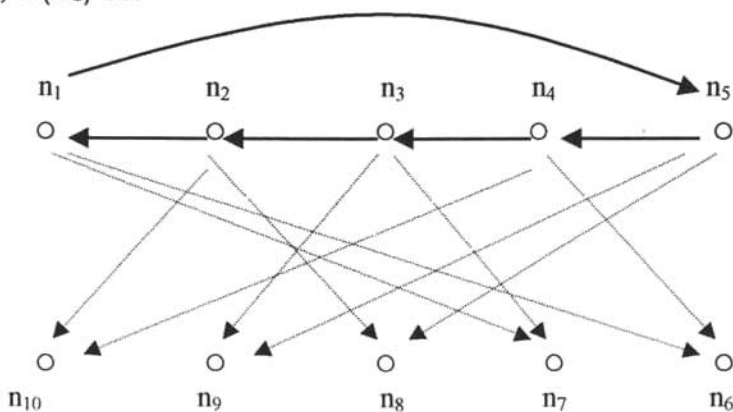
$(a_{ij})_{5 \times 5} * (b_{ij})_{5 \times 10} = (P_{ij})_{5 \times 10}$:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 *$$

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 =$$

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\
 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2
 \end{pmatrix}$$

Luego, $D(K_5)$ es:

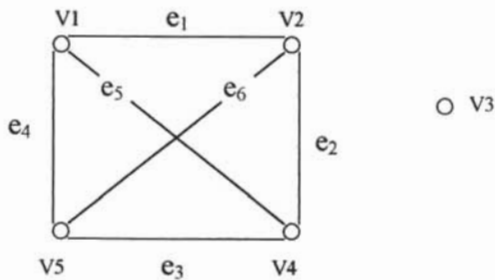


Como una primera observación, la gráfica completa K_5 del ejemplo 3.2.a, tiene la propiedad de que su matriz M^* es igual a su matriz B módulo 2, además, $D(K_5)$ contiene un ciclo asimétrico cuya longitud es igual a 5.

Hagamos otro ejemplo.

Ejemplo 3.2.b. Sea G una gráfica desconexa con $p=5$ y $q=6$.

G :



$$(a_{ij})_{5 \times 5} * (b_{ij})_{5 \times 6} = (P_{ij})_{5 \times 6}:$$

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 *
 \begin{matrix}
 & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 =$$

Caso II: $p = q$

Hagamos un breve razonamiento, sabemos que, si $p > q$ y $p < q$, entonces $p = q$, lo que implica, en dicho caso, que para la multiplicación como cumple ambas condiciones, podemos aplicar ambas definiciones 3.1.1 y 3.1.2 de manera indistinta; para la suma no es diferente pues tenemos el mismo número de renglones que de columnas tanto para A como para B, pero falta definirla formalmente.

Sea M^+ la matriz suma de $G=(V(G),E(G))$ con $p=q$.

Definición 3.1.3 La **m^+ -digráfica** D, o la digráfica D asociada a la matriz M^+ , es un par ordenado de conjuntos $(N(D),F(D))$ donde $N(D)$ es un conjunto finito, no vacío, con p elementos llamados nodos de D, y $F(D)$ un conjunto de flechas descritas como sigue:

Sean $n_i, n_j \in N(D)$ y $S_{ij} \in M^+$

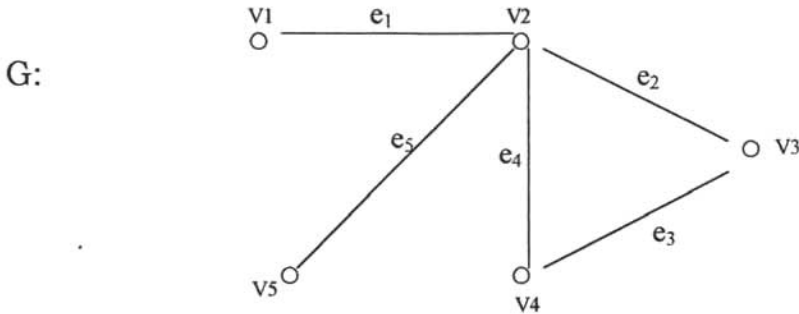
$\{n_i, n_j\} \in F(D)$ si $S_{ij} = 1$ con $i \neq j$ y

$\{n_i, n_j\} \notin F(D)$ en cualquier otro caso.

A partir de ahora, por m^+ -digráfica $D(G)$, entenderemos que es la digráfica D asociada a la gráfica G a través de M^+ .

El empleo de esta definición es análogo a las dos anteriores, solo que, esta vez, trabajaremos con matrices cuadradas.

Ejemplo 3.3.a. Supongamos una gráfica G con $p=5$ y $q=5$.



$(a_{ij})_{5 \times 5} = A:$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\
 \begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 & \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

$(b_{ij})_{5 \times 5} = B:$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\
 \begin{array}{c}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 & \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

$(P_{ij})_{p \times q} = M^*$:

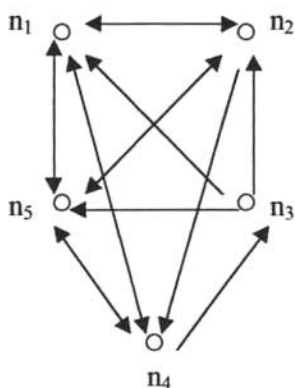
$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(S_{ij})_{p \times p} = M^+$:

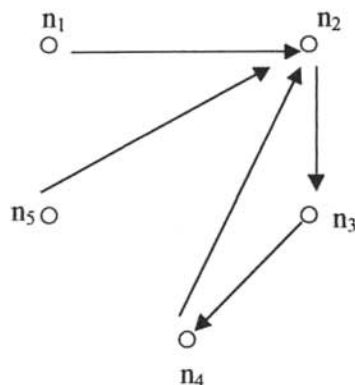
$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sus respectivas digráficas son:

m^* -digráfica $D(G)$:



m^+ -digráfica $D(G)$:

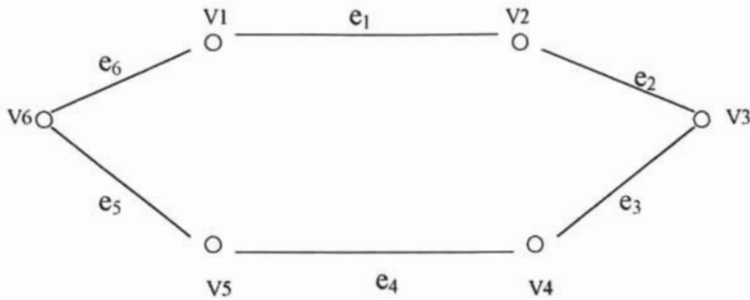


Notemos que G tiene un ciclo de longitud 3, además, en la m^* -digráfica $D(G)$ hay varios ciclos dirigidos de longitud 3 y la m^+ -digráfica $D(G)$ tiene un ciclo dirigido de longitud 3.

¿Qué pasa con un ciclo?

Ejemplo 3.3.b. Supongamos C un ciclo de longitud 6.

C:



Sus matrices de adyacencia, incidencia, producto y suma respectivamente son:

$A=(a_{ij})_{6 \times 6}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\
 v_1 & \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

$B=(b_{ij})_{6 \times 6}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
 v_1 & \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$M^* = (P_{ij})_{p \times q} :$$

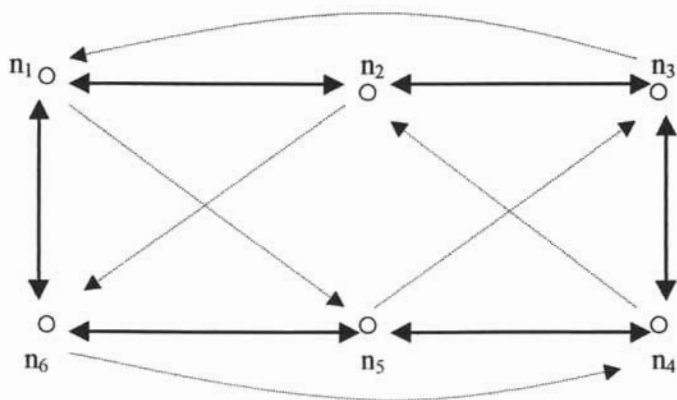
$$\begin{array}{c} e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \\ V_1 \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ V_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ V_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$M^+ = (S_{ij})_{p \times p} :$$

$$\begin{array}{c} V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6 \\ V_1 \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ V_2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ V_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

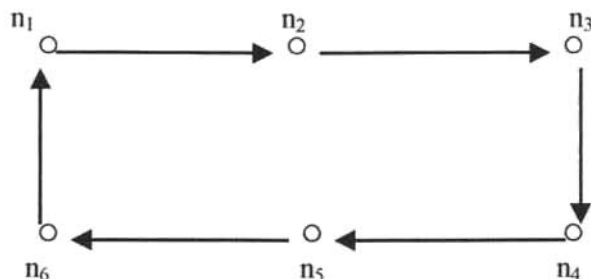
Las digráficas para la matriz producto y la matriz suma son:

m^* -digráfica $D(C)$:



Como una segunda observación, la m^* -digráfica $D(C)$ del ejemplo 3.3.b, contiene un ciclo dirigido simétrico de la misma longitud que C .

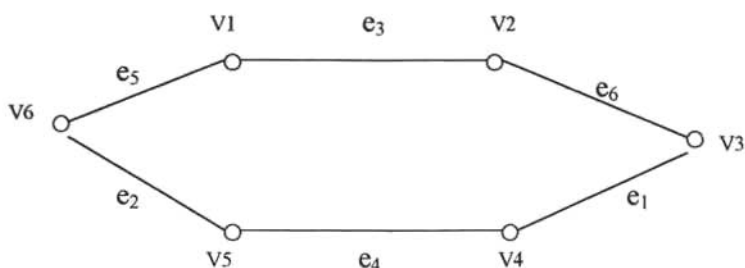
m^* -digráfica $D(C)$:



Como una tercera observación, la m^* -digráfica $D(C)$ es un ciclo dirigido asimétrico de la misma longitud que C .

Consideremos nuevamente la gráfica del ejercicio 3.3.b, ¿qué ocurre si cambiamos el orden de los nombres en los elementos de la gráfica C ? Supongamos el siguiente:

Ejemplo 3.3.c.



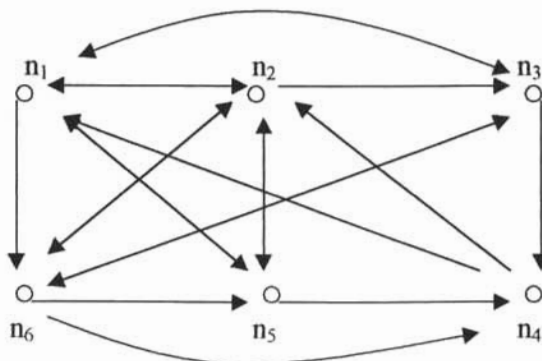
$$A=(a_{ij})_{6 \times 6}: \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B=(b_{ij})_{6 \times 6}: \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

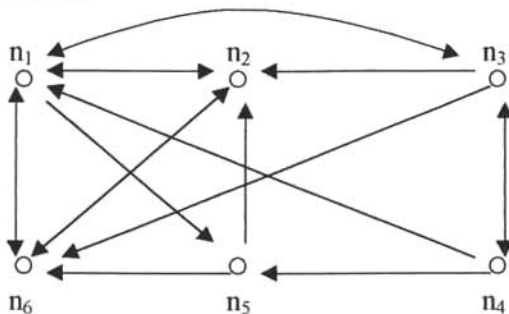
$$M^*=(P_{ij})_{p \times q}: \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M^+=(S_{ij})_{p \times p}: \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

m*-digráfica D(C):



m^+ -digráfica $D(C)$:



Podemos apreciar que el resultado del ejemplo 3.3.c no es el mismo que el que se obtuvo en el ejemplo 3.3.b. Ahora tenemos que, el orden de los nombres en un ciclo, es importante.

Sección 3.2

Se formalizarán las observaciones de la sección anterior para demostrarlas y se estudiarán las condiciones para generalizarlas en otros resultados que se desprenderán de las mismas y al mismo tiempo se obtendrá la relación entre una gráfica y su digráfica asociada a través de una matriz.

Enseguida, se define el orden en los nombres de los vértices y las aristas de un ciclo de longitud n .

Sea G una gráfica con p vértices y q aristas.

Definición 3.2.1 Un ciclo de longitud n en G , con $3 \leq n \leq p$, diremos que es un **o-ciclo** de G , o también, ciclo ordenado de longitud n , si tiene el siguiente orden:

1. Los vértices están numerados de manera consecutiva: $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j, v_{j+1} = v_i)$ con $v_k \in V(G)$ y $i \leq k \leq j$, en el sentido de las manecillas del reloj.
2. Las aristas tienen la forma $e_k = \{v_k, v_{k+1}\} \in E(G)$ con $i \leq k \leq j$ donde e_i es la primera arista y e_j la n -ésima arista del o-ciclo de longitud n .

El o-ciclo de longitud n en G , es $(v_i, e_i, v_{i+1}, e_{i+1}, v_{i+2}, e_{i+2}, \dots, v_k, e_k, \dots, v_j, e_j, v_{j+1} = v_i)$, que abreviamos con, $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, \dots, v_j, v_i)$.

En la figura 3.2.1, la gráfica (a) con $p=4$ es un o-ciclo de longitud 4: $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1)$; la gráfica (b) con $p=6$ tiene un o-ciclo de longitud 3, a saber, $(v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_3)$; y la gráfica (c) con $p=8$ tiene dos o-ciclos de longitud igual a 3 cada uno, que son: $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$ y $(v_6, e_6, v_7, e_7, v_8, e_8, v_6)$.

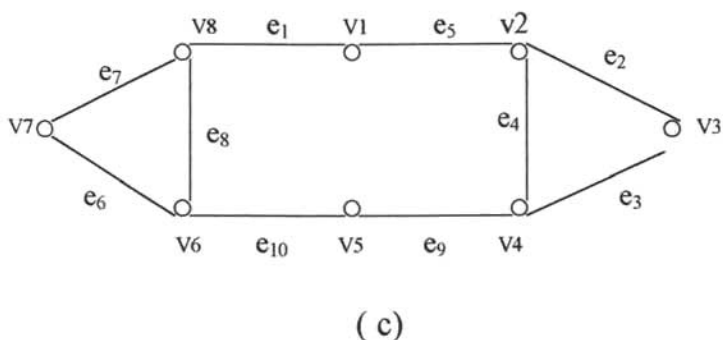
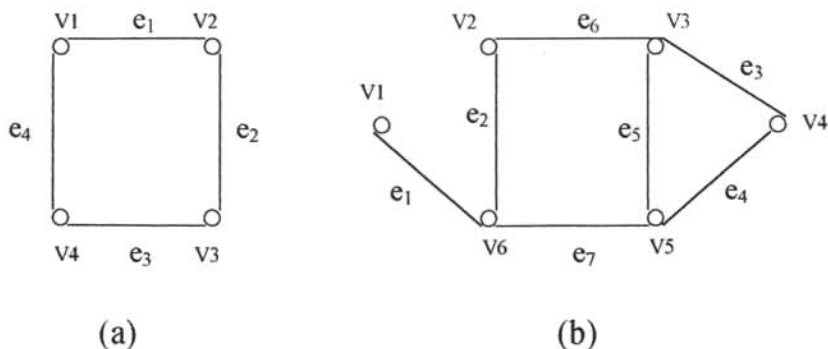


Figura 3.2.1

Sea G una gráfica con p vértices, q aristas y matriz de incidencia B .

Si G contiene un o -ciclo C de longitud n con $3 \leq n \leq p$, entonces la matriz de incidencia B' de C es una submatriz de B , donde B' tiene la siguiente forma:

| | e_i | e_{i+1} | e_{i+2} | • | • | • | e_{j-1} | e_j |
|-----------|-------|-----------|-----------|---|---|---|-----------|-------|
| V_i | 1 | 0 | 0 | | | | 0 | 1 |
| V_{i+1} | 1 | 1 | 0 | | | | 0 | 0 |
| V_{i+2} | 0 | 1 | 1 | | | | 0 | 0 |
| • | | | | | | | | • |
| • | | | | | | | | • |
| • | | | | | | | | • |
| V_{j-1} | 0 | 0 | 0 | | | | 1 | 0 |
| v_j | 0 | 0 | 0 | • | • | • | 1 | 1 |

Observación 3.2.1.1 La diagonal $b'_{k+1,k} = 1$
 La diagonal $b'_{k,k+1} = 0$
 La diagonal $b'_{k,k} = 1$
 con $i \leq k \leq j$, $j+1=i$.

Lo anterior se sigue de la definición de o-ciclo y de la observación 2.2.a. Por la definición 3.2.1, inciso 2, tenemos que $e_k = \{v_k, v_{k+1}\}$ y sabemos que la matriz de incidencia no repite aristas y une a lo más dos vértices.

Un caso particular de o-ciclo es el siguiente.

Sea G una gráfica con p vértices y q aristas, suponiendo que G es un o-ciclo de longitud p , quedará como en la figura 3.2.2.

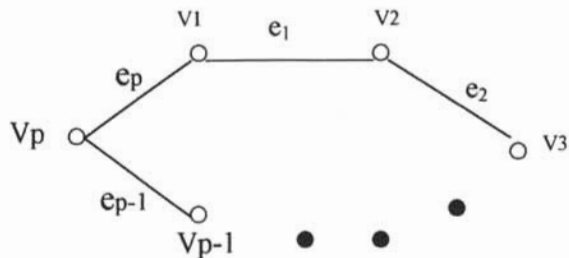


Figura 3.2.2

Con este orden, las matrices de adyacencia e incidencia de G , un o -ciclo de longitud p , tienen características particulares aparte de las que ya fueron mencionadas en las observaciones 2.1 a, b y c, y en 2.2 a y b, para cualquier gráfica.

Las matrices A de adyacencia y B de incidencia, para G , un o -ciclo de longitud p , tienen la siguiente forma respectivamente.

$A = (a_{ij})_{p \times p}$:

| | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | ● | ● | ● | V_{p-1} | V_p |
|-----------|-------|-------|-------|-------|---|---|---|-----------|-------|
| V_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | 0 | 1 |
| V_2 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | | 0 | 0 |
| V_3 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | 0 | 0 |
| V_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | 0 | 0 |
| ● | | | | | | | | | ● |
| ● | | | | | | | | | ● |
| ● | | | | | | | | | ● |
| V_{p-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 | 1 |
| V_p | 1 | 0 | 0 | 0 | ● | ● | ● | 1 | 0 |

Observación 3.2.1.a :

1. La diagonal $a_{i,i+1} = 1$ con $1 \leq i \leq p$.
2. La diagonal $a_{i+1,i} = 1$ con $1 \leq i \leq p$.
3. La diagonal $a_{i,i+2} = 0$ con $1 \leq i \leq p$.

$B=(b_{ij})_{p \times q}$:

| | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | ● | ● | ● | e_{p-1} | e_p |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|---|-----------|-------|
| V_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 | 1 |
| V_2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 | 0 |
| V_3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | 0 | 0 |
| V_4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | 0 | 0 |
| V_5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | 0 | 0 |
| ● | | | | | | | | | | ● |
| ● | | | | | | | | | | ● |
| ● | | | | | | | | | | ● |
| V_{p-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | 1 | 0 |
| V_p | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ● | ● | ● | 1 | 1 |

Observación 3.2.1.b:

1. La diagonal $b_{ii} = 1$ con $1 \leq i \leq p$.
2. La diagonal $b_{i+1,i} = 1$ con $1 \leq i \leq p$.
3. La diagonal $b_{i,i+1} = 0$ con $1 \leq i \leq p$.

Resultado 1: Sea C un o-ciclo de longitud p con $p > 3$.

La m^* -digráfica $D(C)$ contiene un ciclo dirigido simétrico de la misma longitud que C .

Demostración: Sean (a_{ij}) y (b_{ij}) las matrices de adyacencia e incidencia del o-ciclo C respectivamente y sean $P_{i,i+1} \in M^*$ y $P_{i+1,i} \in M^*$ de C con $1 \leq i \leq p$ y $p > 3$ donde $p+1 = 1$

Por demostrar que: Si $P_{i,i+1} = 1 = P_{i+1,i}$, entonces

$\{n_i, n_{i+1}\} \in F(D)$ y $\{n_{i+1}, n_i\} \in F(D)$ en la m^* -digráfica $D(C)$.

Fijémonos en el renglón i de (a_{ij}) y en la columna $i+1$ de (b_{ij}) , entonces,

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \sum_{k=1}^p a_{ik} * b_{k,i+1} \\ &= (a_{i1}) * (b_{1,i+1}) + (a_{i2}) * (b_{2,i+1}) + \dots + \\ &\quad (a_{i,i+1}) * (b_{i+1,i+1}) + (a_{i,i+2}) * (b_{i+2,i+1}) + \dots + \\ &\quad (a_{ip}) * (b_{p,i+1}) \\ &= 0+0+\dots+(1*1) + (0*1) + \dots+0 = 1, \end{aligned}$$

esto es, por las observaciones 3.2.1 a y b.

Fijémonos esta vez, en el renglón $i+1$ de (a_{ij}) y en la columna i de (b_{ij}) , entonces tenemos que,

$$P_{i+1,i} = \sum_{k=1}^p a_{i+1,k} * b_{ki}$$

$$= (a_{i+1,1}) * (b_{1i}) + (a_{i+1,2}) * (b_{2i}) + \dots +$$

$$(a_{i+1,i}) * (b_{ii}) + (a_{i+1,i+1}) * (b_{i+1,i}) + \dots + (a_{i+1,p}) * (b_{pi})$$

$$= 0 + 0 + \dots + (1*1) + (0*1) + \dots + 0 = 1,$$

por las observaciones 3.2.1 a y b.

Por lo tanto, por la definición 3.1.1, en la m^* -digráfica $D(C)$, existen p flechas simétricas. ■

Resultado 2: Sea C un o -ciclo de longitud p .

La m^+ -digráfica $D(C)$ es un ciclo dirigido asimétrico de la misma longitud de C .

Demostración: Sean (a_{ij}) y (b_{ij}) las matrices de adyacencia e incidencia de C respectivamente y sea $S_{ij} \in M^+$ de C .

Por demostrar que: $\{n_i, n_{i+1}\} \in F(D)$, o que, $\{n_{i+1}, n_i\} \in F(D)$ en la m^+ -digráfica $D(C)$.

Contamos con tres casos que son las únicas diagonales de (a_{ij}) y (b_{ij}) en las que tenemos valores. Por las observaciones 3.2.1 a y b, tenemos lo siguiente, con $1 \leq i \leq p$, $p+1=1$.

Caso 1: $S_{i,i+1} = a_{i,i+1} + b_{i,i+1} = 1 + 0 = 1.$

Caso 2: $S_{ii} = a_{ii} + b_{ii} = 0 + 1 = 1.$

Caso 3: $S_{i+1,i} = a_{i+1,i} + b_{i+1,i} = 1 + 1 = 2.$

Los casos 2 y 3 quedan descartados por la definición 3.1.3.

Por lo tanto, la m^+ -digráfica $D(C)$, tiene únicamente p flechas asimétricas. ■

Una consecuencia inmediata de estos dos resultados, es el resultado 3.

Resultado 3: Sea C un o-ciclo de longitud p con $p > 3$.

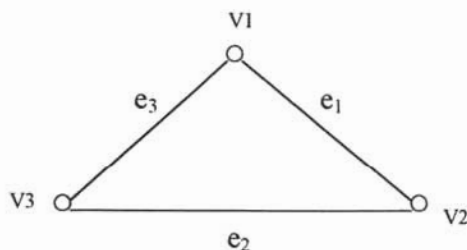
La m^+ -digráfica $D(C)$ es una subdigráfica de la m^* -digráfica $D(C)$.

Demostración: De la definición de subdigráfica y por los resultados 1 y 2. ■

¿Qué sucede en el caso $p=3$?

En particular, el o-ciclo C de longitud 3, es también una gráfica completa K_3 y aunque sus matrices de adyacencia e incidencia son las mismas que las de un o-ciclo cualquiera, no cumple con los resultados 1 y 3, pero sí con el 2:

K_3 :

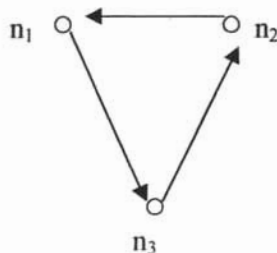


$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

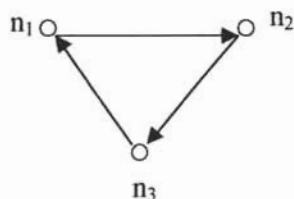
$$M^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

m^* -digráfica $D(K_3)$:



$$M^+ = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

m^+ -digráfica $D(K_3)$:



Resultado 4: Sea K_p una gráfica completa y sean A y B sus matrices de adyacencia e incidencia respectivamente. La matriz producto M^* de K_p es congruente con B módulo 2.

Demostración: Sabemos que en K_p todo par de vértices son adyacentes, luego, únicamente la diagonal $a_{ii} = 0$ en A .

Sean $P_{ij} \in M^*$ y $b_{ij} \in B$, por demostrar que si $b_{ij} = 0$, entonces $P_{ij} = 2$.

Caso 1: $b_{ij} = 0$

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \dots + \\
 &\quad a_{ii} * b_{ij} + \dots + a_{ip} * b_{pj}. \\
 &= 1*() + 1*() + \dots + (0) (0) + \dots + 1*() = 2
 \end{aligned}$$

La justificación es que solo hay dos unidades enteras por columna en B. Los paréntesis vacíos indican que ahí puede haber un 1 o un 0.

Análogamente para el siguiente caso:

Caso 2: $b_{ij} = 1$

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \dots + a_{ii} * b_{ij} + \dots + a_{ip} * b_{pj} \\
 &= (1) () + (1) () + \dots + (0) (1) + \dots + (1) () = 1
 \end{aligned}$$

Esto implica, que con solo obtener la matriz de incidencia B de K_p , podemos graficar directamente sobre B. ■

Resultado 5: Si K_p contiene n o-ciclos, entonces la m^* -dirigida $D(K_p)$ contiene n ciclos dirigidos asimétricos de la misma longitud que cada o-ciclo de K_p .

Demostración:

Sea C_j un o-ciclo de K_p de longitud k' con $1 \leq j \leq n$ y $3 \leq k' \leq p$ y sean B y B' las matrices de incidencia de K_p y C_j respectivamente.

Como C_j es un o-ciclo de longitud k' , tenemos que B' tiene a lo más k' aristas. Por la observación 3.2.1.1, sabemos que, $b_{k+1,k} = 1$ y $b_{k,k+1} = 0$. Por el resultado 4, tenemos que M^* de K_p es igual a B módulo 2 y sabemos que B' es submatriz de B , esto implica que B' es submatriz de M^* de K_p , aplicando la definición 3.1.2 a B' , obtenemos un ciclo dirigido asimétrico de la misma longitud que C_j en la m^* -digráfica $D(K_p)$ con $1 \leq j \leq n$. ■

De este último resultado, bien podríamos pensar en obtener algo parecido al resultado 3, pero existe un inconveniente que exponemos enseguida. Regresemos por un momento al ejemplo 3.2.a, por el resultado 5, el o-ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de K_5 está en la m^* -digráfica $D(K_5)$, llamémosle a este último C' . Si obtenemos la m^+ -digráfica $D(C)$, observamos que las flechas de ésta tienen dirección contraria a C' como lo muestra la figura 3.2.3. Luego, concluimos que la m^+ -digráfica $D(C)$ no es una subdigráfica de la m^* -digráfica $D(K_5)$. Para que esto suceda es preciso que definamos un nuevo orden en un ciclo.

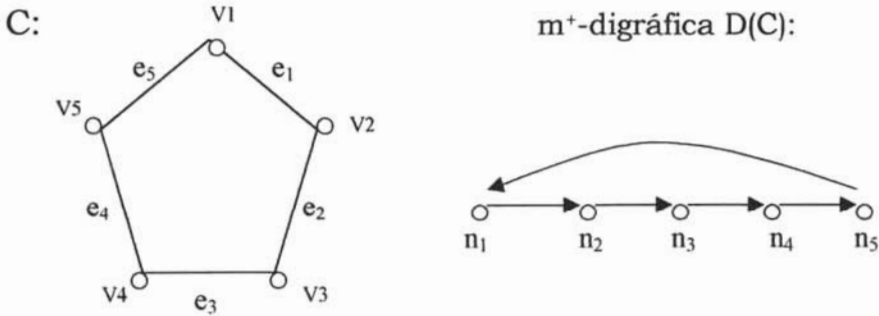


Figura 3.2.3

Definición 3.2.2 Un r -ciclo, al que denotamos con C^r , es un o -ciclo cuyas aristas están recorridas hacia la izquierda, de tal manera, que la primera arista está justo a la izquierda del primer vértice del o -ciclo. El r -ciclo se ve así:

$(v_j, e_i, v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \dots, e_k, v_k, \dots, e_j, v_j)$ y lo abreviamos con $(e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_k, \dots, e_j, e_i)$.

Con esto, una gráfica G puede tener o -ciclos y r -ciclos.

La matriz de incidencia B'' de un r -ciclo es la misma que la de un o -ciclo pero recorriendo los renglones como sigue:

| | e_i | e_{i+1} | e_{i+2} | e_{i+3} | ... | e_{j-1} | e_j |
|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|-------|
| V_i | 1 | 1 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 |
| V_{i+1} | 0 | 1 | 1 | 0 | ... | 0 | 0 |
| V_{i+2} | 0 | 0 | 1 | 1 | ... | 0 | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| V_{j-2} | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 1 | 0 |
| V_{j-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 1 | 1 |
| v_j | 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 1 |

Observación 3.2.2.1 La diagonal $b''_{k,k+1} = 1$

Con $i \leq k \leq j$, $j+1 = 1$

Resultado 6: La m^+ -digráfica $D(C_j)$ es una subdigráfica de la m^* -digráfica $D(K_p)$ con $1 \leq j \leq n$, si C_j es un r -ciclo de K_p y C_j su correspondiente o -ciclo con $1 \leq j \leq n$.

Demostración:

Sea C_j de longitud k'' en K_p con $1 \leq j \leq n$, $3 \leq k'' \leq p$ y sean B'' y B las matrices de incidencia de C_j y K_p respectivamente.

Por el resultado 2, si C_j es de longitud k'' , entonces la m^+ -digráfica $D(C_j)$ es de longitud k'' , además, este resultado nos indica que debemos demostrar que $\{n_k, n_{k+1}\} \in F(D)$ en la m^* -digráfica $D(K_p)$.

Por la observación 3.2.2.1, sabemos que, $b''_{k,k+1}=1$, como B'' es submatriz de B , tenemos $b_{k,k+1}=1$ y por el resultado 4, $B=M^*$ de K_p módulo 2, luego, $P_{k,k+1}=1$. Como C_{r_j} es de longitud k'' , tenemos que B'' tiene a lo más k'' aristas. Luego, por la definición 3.1.2 en la m^* -digráfica $D(K_p)$ existe un ciclo dirigido de longitud a lo más k'' flechas, tal que, cada flecha tiene la dirección $\{n_k, n_{k+1}\}$.

Por lo tanto, la m^+ -digráfica $D(C_j)$ es una subdigráfica de la m^* -digráfica $D(K_p)$ con $1 \leq j \leq n$. ■

Un resultado que es consecuencia de todos los anteriores, es el siguiente.

Resultado 7: Sea G una gráfica con p vértices y q aristas. Si G contiene w o-ciclos, entonces la m^* -digráfica $D(G)$ contiene w ciclos dirigidos asimétricos de la misma longitud que cada o-ciclo de G .

Demostración:

Sea C_u un o-ciclo de G de longitud n con $1 \leq u \leq w$ y $3 \leq n \leq p$, donde w es el número de o-ciclos de G . Sean A y B las matrices de adyacencia e incidencia de G y B' la matriz de incidencia del o-ciclo C_u .

Sea $C_u = (v_i, e_i, v_{i+1}, e_{i+1}, \dots, v_k, e_k, \dots, v_j, e_j, v_i)$ con n aristas.

$$A =$$

| | v_1 | v_2 | ... | v_i | v_{i+1} | ... | v_k | v_{k+1} | ... | v_j | v_{j+1} | ... | v_{p-1} | v_p | | |
|-----------|----------|-------|-----|----------|-----------|----------|-------|-----------|-----|-------|-----------|----------|-----------|-------|---|---|
| v_1 | A_{11} | | | A_{12} | | | | | | | A_{13} | | | | | |
| v_2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_i | A_{21} | | | 0 | 1 | A_{22} | | | | | A_{23} | | | | | |
| v_{i+1} | | | | 1 | 0 | | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_k | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 1 |
| v_{k+1} | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_j | A_{31} | | | A_{32} | | | | | | | 0 | A_{33} | | | | |
| v_{j+1} | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_{p-1} | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_p | A_{31} | | | A_{32} | | | | | | | A_{33} | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_{p-1} | | | | | | | | | | | | | | | | |
| v_p | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 3.2.4

Dividiendo A y B en bloques, de tal forma, que exista un bloque por cada o -ciclo C_u , tanto en A como en B , y que, esté definido el producto por bloques de A por B , obtenemos las matrices de las figuras 3.2.4 y 3.2.5.

$$B = \begin{array}{c|cccccccccccc} & e_1 & e_2 & \dots & e_i & e_{i+1} & \dots & e_k & \dots & e_j & e_{j+1} & \dots & e_q \\ \hline V_1 & & & & & & & & & & & & \\ V_2 & & & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & & \\ V_i & & & & 1 & 0 & & & & & & & \\ V_{i+1} & & & & 1 & 1 & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & & \\ V_k & & & & & & & & & & & & \\ V_{k+1} & & & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & & \\ V_j & & & & & & & & & & & & \\ V_{j+1} & & & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & & \\ V_{p-1} & & & & & & & & & & & & \\ V_p & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Figura 3.2.5

Fijémonos en los bloques de A y de B donde estén los elementos del o -ciclo C_u para hacer las siguientes operaciones en las que la clave, es encontrar las dos unidades de cada columna de B' .

Caso 1:

$$\begin{aligned}
 P_{k+1,k} &= \sum_{h=i}^j a_{k+1,h} * b_{h,k} \quad \text{con } i \leq k \leq j \\
 &= (a_{k+1,i}) * (b_{i,k}) + (a_{k+1,i+1}) * (b_{i+1,k}) + \dots \\
 &\quad + (a_{k+1,k}) * (b_{k,k}) + (a_{k+1,k+1}) * (b_{k+1,k}) + \dots \\
 &\quad + (a_{k+1,j}) * (b_{j,k}) \\
 &= a_{k+1,k} * (1) + (0) * (1) = 1
 \end{aligned}$$

Estos valores los obtenemos de la observación 3.2.1.1, además, por la definición 3.2.1 de o-ciclo, tenemos que $e_k = \{v_k, v_{k+1}\}$, esto significa que v_k es adyacente con v_{k+1} en G , entonces $a_{k,k+1} = 1$ y porque A es simétrica, $a_{k+1,k} = 1$.

Caso 2:

$$\begin{aligned}
 P_{k,k+1} &= \sum_{h=i}^j a_{k,h} * b_{h,k+1} \quad \text{con } i \leq k \leq j \\
 &= (a_{k,i}) * (b_{i,k+1}) + (a_{k,i+1}) * (b_{i+1,k+1}) + \dots \\
 &\quad + (a_{k,k}) * (b_{k,k+1}) + (a_{k,k+1}) * (b_{k+1,k+1}) + \\
 &\quad + (a_{k,k+2}) * (b_{k+2,k+1}) + \dots + (a_{k,j}) * (b_{j,k+1}). \\
 &= () * (0) + () * (0) + \dots \\
 &\quad + (0) * (0) + (1) * (1) + \\
 &\quad + (a_{k,k+2}) * (1) + \dots + () * (0).
 \end{aligned}$$

Subcaso 2.1: Si $a_{k,k+2}=0$, entonces $P_{k,k+1}=1$.

Por lo tanto, en la m^* -digráfica $D(G)$ existe un ciclo C'_u dirigido simétrico y como B' tiene a lo más n aristas, entonces C'_u tiene a lo más n flechas.

Subcaso 2.2: Si $a_{k,k+2}=1$, entonces $P_{k,k+1}=2$.

Por lo tanto, en la m^* -digráfica $D(G)$ existe un ciclo C'_u dirigido asimétrico y como B' tiene n aristas, entonces C'_u tiene n flechas.■

Por lo tanto, la longitud de cualquier o -ciclo en G , la hereda su respectiva $D(G)$ a través de M^* .

Conclusión

El proceso de este trabajo, exigió atender diversos detalles, en el instante en que se definieron algunos conceptos propios del mismo, como los casos siguientes: la m^* -digráfica y la m^+ -digráfica tuvieron modificaciones en su notación, pues se trataba de encontrar la más entendible; en el caso del ciclo ordenado, hubo que redefinirlo, ya que, la definición original no era suficiente para demostrar el resultado 5, pues se había restringido esta definición, pensando solo en el caso particular en que G fuera un ciclo, así que, se necesitaba una definición más general y no sólo eso, había que cambiar la definición de camino en una gráfica a algo igualmente más general. El r -ciclo, fue más sencillo de definir, pues ésta depende de la definición de o -ciclo.

Por otro lado, en el momento en que se recurrió a una definición informal para encontrar una *gráfica* asociada a una matriz M^* , se presentó el hecho de que dicha *gráfica* es conocida como pseudodigráfica (para algunos autores es la definición de una digráfica. Ver 2 y 6 de la bibliografía pp.85 y 97 respectivamente), aquí se hizo necesario recurrir a las herramientas disponibles, y la teoría conocida en los cursos de licenciatura, trabaja con digráficas, tal y como se ha planteado aquí.

También, es claro que la m^* -digráfica $D(G)$ no es la única manera de asociar una *gráfica* a una matriz M^* , sin embargo, esta fue la que dio resultados; por ejemplo e informalmente: Sea G una gráfica y sea M^* su matriz producto, los vértices de la *gráfica* H asociada a G , serán los vértices de G y sus adyacencias serán flechas como sigue:

$$\begin{aligned} \{n_i, n_j\} \in F(H) & \quad \text{si } P_{ij} = 2 \quad \text{y} \\ \{n_i, n_j\} \notin F(H) & \quad \text{si } P_{ij} \neq 2 \end{aligned}$$

Si en M^* de G , no existe $P_{ij} = 2$, en la *gráfica* H no existe ninguna adyacencia entre sus vértices, si en cambio, se considera una gráfica completa, si se consigue una *gráfica* H , no tan simple como el caso anterior. Luego, esta definición informal

dejaría sin estudio muchas matrices M^* de gráficas distintas a cualquier K_p .

Finalmente, como otro hecho, si G es un o-ciclo de longitud 4 o 5, entonces $D(G)$ a través de M^* es una gráfica completa dirigida con 4 o 5 nodos respectivamente como se muestra en el apéndice con los ejemplos A.3.1 y A.3.2.

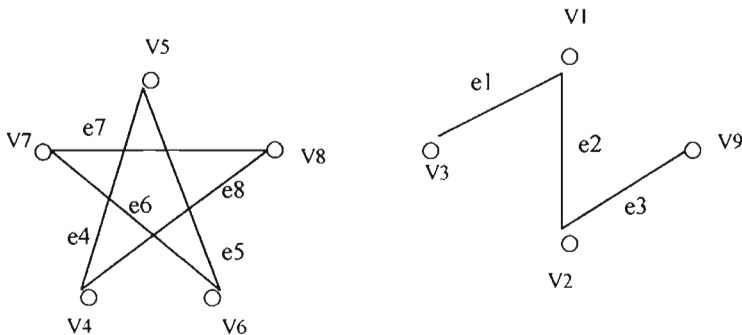
Apéndice

El apéndice está dividido en tres secciones: sección A.1 que contiene un ejemplo de una gráfica con $p > q$, sección A.2 que contiene ejemplos de gráficas con $p < q$ y la sección A.3 que contiene ejemplos de gráficas con $p = q$.

Sección A.1

Una gráfica G disconexa con $p=9$, $q=8$ y un o-ciclo: $(v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_4)$.

G:



La matriz de adyacencia $A=(a_{ij})_{9 \times 9}$:

| | V ₁ | V ₂ | V ₃ | V ₄ | V ₅ | V ₆ | V ₇ | V ₈ | V ₉ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| V ₁ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₂ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V ₃ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₄ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| V ₅ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V ₆ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V ₇ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| V ₈ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V ₉ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

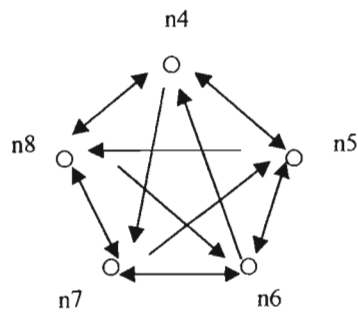
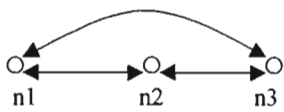
La matriz de incidencia $B=(b_{ij})_{9 \times 8}$:

| | e ₁ | e ₂ | e ₃ | e ₄ | e ₅ | e ₆ | e ₇ | e ₈ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| V ₁ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₂ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₃ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₄ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V ₅ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V ₆ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| V ₇ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| V ₈ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| V ₉ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$M^* =$$

| | e ₁ | e ₂ | e ₃ | e ₄ | e ₅ | e ₆ | e ₇ | e ₈ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| V ₁ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₂ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₃ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₄ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| V ₅ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| V ₆ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| V ₇ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| V ₈ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| V ₉ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

m*-digráfica D(G):

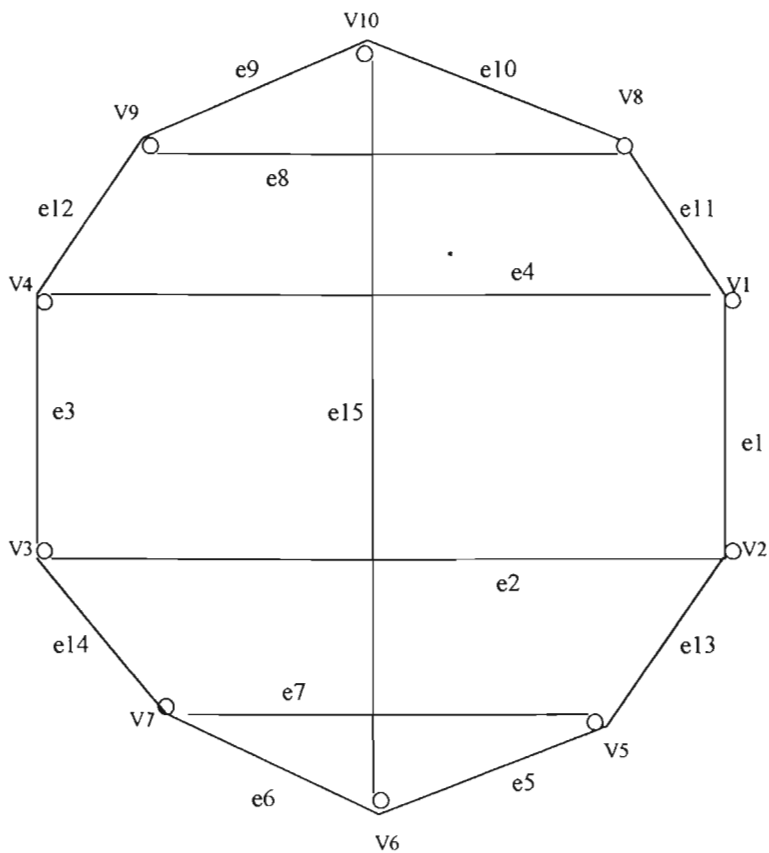


○
n9

Sección A.2

Ejemplo A.2.1. Una gráfica G conexa con $p=10$, $q=15$ y con 3 o-ciclos: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$, (v_5, v_6, v_7, v_5) y (v_8, v_9, v_{10}, v_8) .

G:



$$A =$$

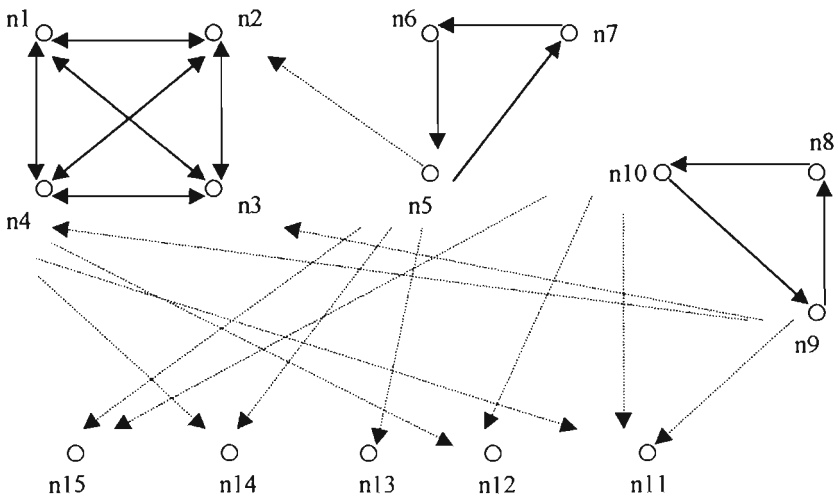
| | V ₁ | V ₂ | V ₃ | V ₄ | V ₅ | V ₆ | V ₇ | V ₈ | V ₉ | V ₁₀ |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| V ₁ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V ₂ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₃ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V ₄ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| V ₅ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V ₆ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| V ₇ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₈ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| V ₉ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| V ₁₀ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

$$B =$$

| | e ₁ | e ₂ | e ₃ | e ₄ | e ₅ | e ₆ | e ₇ | e ₈ | e ₉ | e ₁₀ | e ₁₁ | e ₁₂ | e ₁₃ | e ₁₄ | e ₁₅ |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| V ₁ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₂ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V ₃ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| V ₄ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V ₅ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V ₆ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V ₇ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| V ₈ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V ₉ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V ₁₀ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

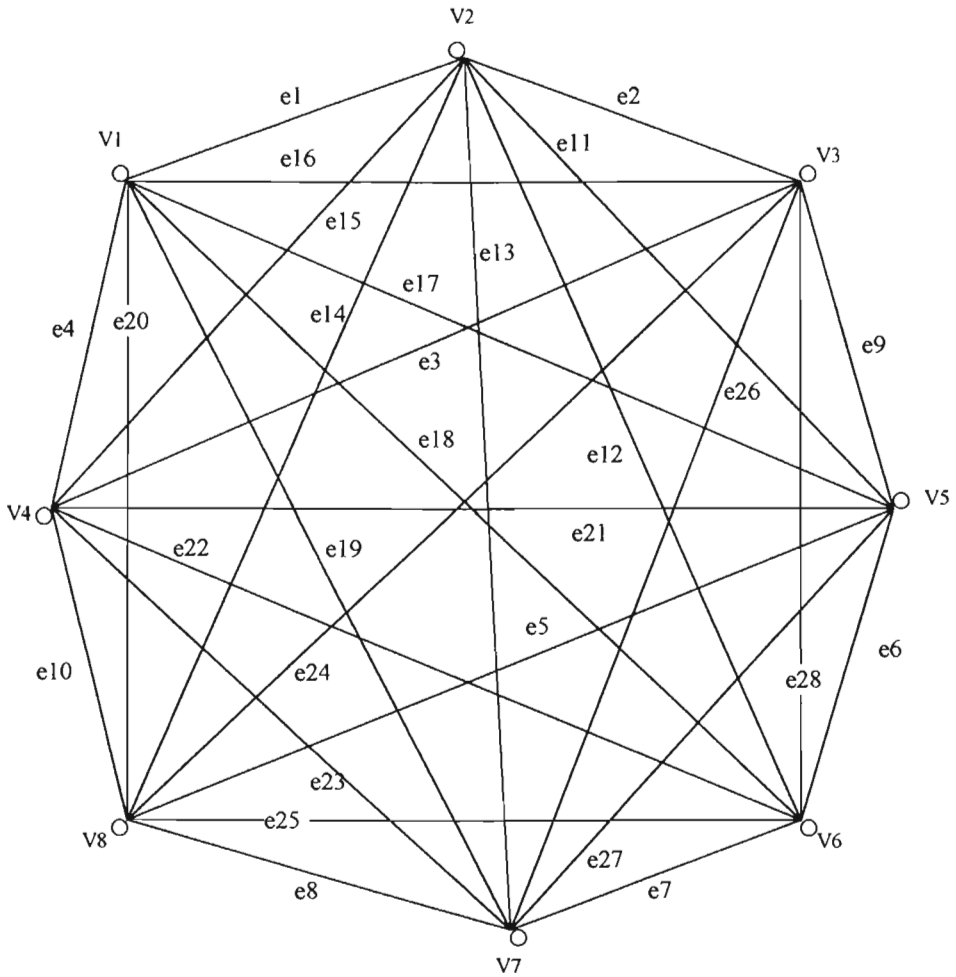
$$M^* = \begin{array}{c|cccccccccccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ \hline V_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline V_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline V_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline V_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline V_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline V_7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline V_8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline V_9 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline V_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

m^* -digráfica $D(G)^1$:



1. Se quitaron algunas aristas que dificultaban la claridad del resultado a mostrar.

Ejemplo A.2.2. Una gráfica completa con $p=8$ y $q=28$; un o-ciclo: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ y un r-ciclo: $(e_5, e_6, e_7, e_8, e_5)$.



$$B = \begin{array}{c|cccccccc|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ \hline V_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline V_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline V_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline V_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline V_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

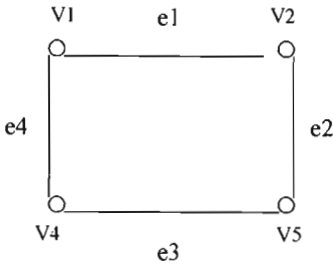
Continuación de la matriz B:

| | e_{15} | e_{16} | e_{17} | e_{18} | e_{19} | e_{20} | e_{21} | e_{22} | e_{23} | e_{24} | e_{25} | e_{26} | e_{27} | e_{28} |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| V_1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V_2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V_3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| V_4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V_5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| V_6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| V_7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| V_8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Sección A.3.

Ejemplo A.3.1 Un o-ciclo de longitud 4: (v_1, v_2, v_3, v_4)

G:



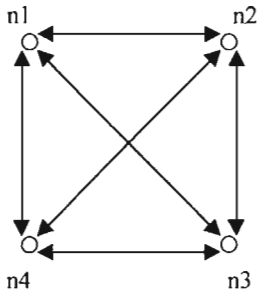
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

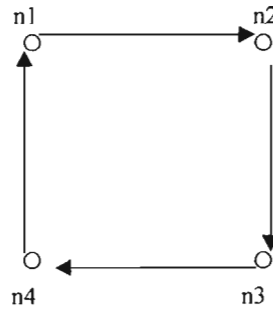
$$M^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

m^* -digráfica $D(G)$:

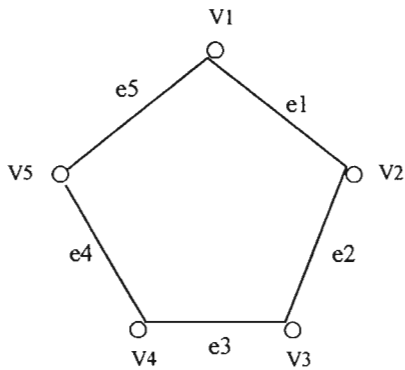


m^+ -digráfica $D(G)$:



Ejemplo A.3.2 Un o-ciclo de longitud 5: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

G:



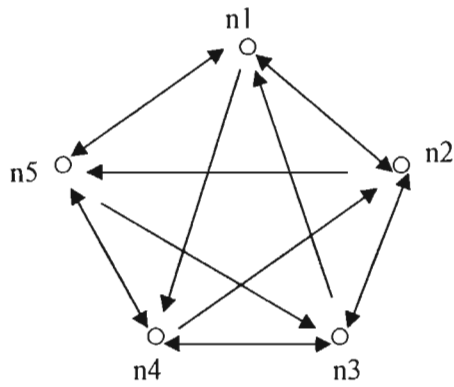
$$A = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

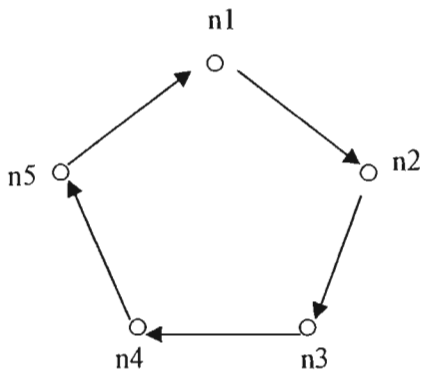
$$M^* = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$M^+ = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

m^* -digráfica $D(G)$:

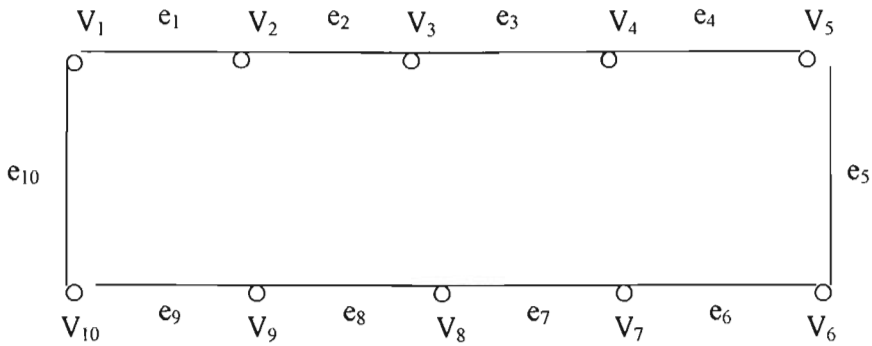


m^+ -digráfica $D(G)$:



Ejemplo A.3.3 Un o-ciclo de longitud 10:
 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10})$.

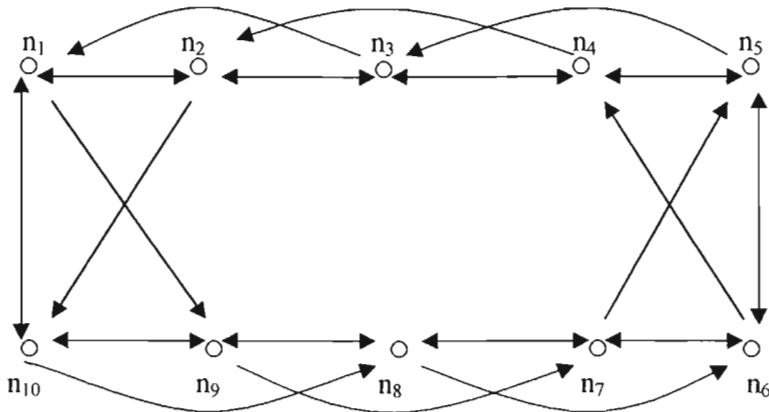
G:



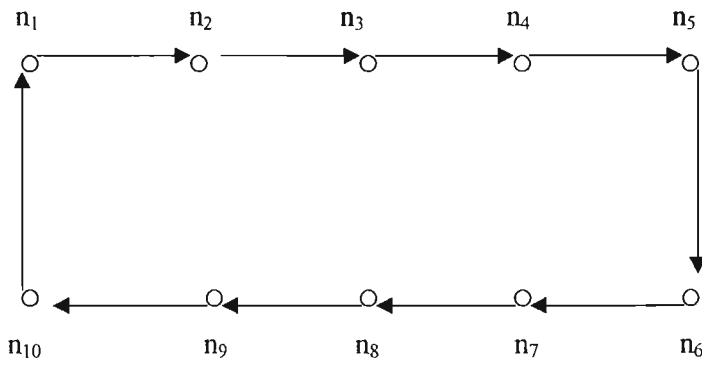
$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M^+ = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 & V_9 & V_{10} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

m^* -digráfica $D(G)$:



m^+ -digráfica $D(G)$:



Bibliografía

1. L.R. Foulds. Graph Theory Applications. Springer-Verlag. 1992.
2. Joan M. Aldous and Robin J. Wilson. Graphs and Applications. An Introductory Approach. Springer. 2001.
3. María del Carmen Curcó Cobos. “Una introducción a la teoría de gráficas”. Vínculos matemáticos #108. 1991.
4. Serge Lang. Algebra Lineal. Addison-Wesley Iberoamericana. 1986.
5. Howard Eves. Elementary Matrix Theory. Dover Publications, Inc. New York. 1980.
6. K. Thulasiraman and M.N.S. Swamy. Graphs: Theory and Algorithms. John Wiley & Sons, Inc. 1992.
7. Frank Harary. Graph Theory. Addison-Wesley. Publishing Company. 1972.
8. Mehdi Behzad, Gary Chartrand, Linda Lesniak-Foster. Graphs and Digraphs. Prindle, Weber & Schmidt. International Series. 1979.

9. Gary Chartrand, Ortrud R. Oellerman. Applied and Algorithmic Graph Theory. Mc. Graw Hill, Inc. 1993.
10. J.A. Bondy and U.S.R. Murty. Graph Theory with Applications. North-Holland. 1976.