20485

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

DIDÁCTICA CONSTRUCTIVISTA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL EN CONTEXTOS ECONÓMICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

R I C A R D O   M A R T Í N E Z   M A Y A

ASESOR: DR. IÑAQUI DE OLAIZOLA ARIZMENDI

NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO.   JUNIO 2005.

LUIS PABLO PADILLA ARROYO

IN MEMORIAM

Agradecimientos a las personas que me brindaron su ayuda para la realización de la presente tesis:

IÑAQUI DE OLAIZOLA
ALEJANDRO SAINZ
CRISTIAN LERICHE
ARMANDO PERALTA
GLADIS CARRANO

A Fabiola, Armando, Daniel y Mario.

A MI FAMILIA, HERMANA, TÍA, PRIMOS.

A MIS AMIGAS Y AMIGOS.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se pretende describir la importancia de los aspectos pedagógicos en el proceso educativo y en la manera como los estudiantes construyen los conceptos en contexto. En particular, se enfoca en el estudio de la forma como aprende, un alumno de economía, la función lineal aplicada a la resolución de problemas económicos.

Con este fin, se retoman algunos aspectos de teorías en psicología de la educación como, la psicogenética, la sociocultural, la cognitiva y la constructivista por un lado, y de la didáctica de las matemáticas por el otro, sirviendo como marco conceptual de la investigación.

En la primera parte se presentan los objetivos del trabajo, su justificación, las preguntas de investigación (que dan sentido y dirección al trabajo), y el estado del arte respecto a las investigaciones relativas al aprendizaje de la función lineal.

En el siguiente apartado, el marco conceptual, se revisan algunos paradigmas en psicología de la educación, como la teoría psicogenética, la sociocultural, la cognitiva y la constructivista. En este mismo apartado se estudia a la didáctica de las matemáticas como la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas y su evolución.

El marco metodológico presenta, tanto , el encuadre institucional de la tesis dentro del currículo de la facultad de economía, como, la estrategia teórico metodológica, que consiste en la operacionalización del marco conceptual a través de indicadores, para llevar a cabo la investigación en el aula.

La investigación en el aula hace referencia a la descripción del trabajo realizado en el salón de clase, y se presentan los diálogos referidos a la descripción de los hechos, con el análisis que dará respuesta a las preguntas de investigación, pasando así, a las conclusiones derivadas de éste análisis.

I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de la presente investigación es hacer una descripción y análisis de la construcción de la función lineal en contextos económicos que hacen los alumnos de la Facultad de Economía de la UNAM (CU), mediante una didáctica constructivista de las matemáticas.

2 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En la actualidad la mayor parte de la enseñanza de la matemática en la facultad de economía de la UNAM, es de manera tradicional. La investigación ayudará a los profesores a contemplar una alternativa de enseñanza de las matemáticas, y a que los estudiantes puedan construir habilidades de resolución de problemas económicos, a través del razonamiento y la creatividad.

Es una sugerencia para que los profesores reflexionen en cuanto a la forma de enseñar, así también para los alumnos, en cuanto a su manera de aprender, mediante la didáctica constructivista de las matemáticas.

3 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Qué papel juegan las representaciones algebraica y gráfica en la construcción de la función lineal?
- ¿Qué importancia tiene el contexto económico en la construcción de los elementos de la función lineal?
- ¿Cómo evoluciona el rol del alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje a través del curso?

4 REVISIÓN DE LA LITERATURA

En los cuatro siguientes artículos se pone de manifiesto, la determinación de la ecuación lineal utilizando las representaciones, algebraica, tabular y gráfica para la obtención de significados, desde ángulos diferentes. Mencionando que en la interacción con el profesor en la Zona de Desarrollo Próximo, se llega a los objetivos, en términos de contenido, señalados en un principio por el contenido curricular.

(A. Schoenfeld, 1993, citado por V. Hoyos) realizó una investigación que tuvo como objeto determinar la ecuación lineal por parte del alumno, mediante su representación, algebraica, tabular y grafica, con la intervención del maestro.

Se utilizó un ambiente computacional, con un software como medio de exploración para propiciar el descubrimiento (usado en el contexto social), como pieza de conversación para facilitar la discusión entre los alumnos, y entre los alumnos y el profesor.

El problema a resolver es: dada una ecuación lineal, hay que obtener una paralela que pasa por un punto dado. La solución del problema y las tareas relacionadas, involucran la comprensión de las relaciones entre las tres representaciones (pasar de una a otra) que implican la determinación de la ecuación lineal y su significado, como parte de las competencias deseadas para los alumnos que finalizan la secundaria y para los que han cursado los primeros años del bachillerato.

Schoenfeld, llevó a cabo la investigación con alumnos de 16 años del nivel de bachillerato. Las estructuras del conocimiento elaboradas por el alumno en forma independiente no coinciden con las convencionales. Ejemplo; mientras que desde el punto de vista convencional en la noción de intersección de una recta con ejes cartesianos ostensiblemente no había posibilidad de error, para uno de los integrantes, esto tuvo que ser aprendido, pues dependiendo de los diferentes contextos en que las rectas aparecían (trabajando con el ambiente de exploración), dicho estudiante asignaba diferentes interpretaciones a la intersección de la recta en cuestión con el eje de la y.

Schoenfeld trata de resaltar hasta dónde puede llegar un alumno con sus recursos propios y dónde empieza la participación del profesor.

De acuerdo con lo elaborado por (Newman, Griffin y Cole, 1993, citado por V. Hoyos), " ... el desencadenamiento del proceso de solución de la actividad involucrada, no depende únicamente de lo que el alumno por sí mismo es capaz de generar, sino que es fundamentalmente en la interacción con el instructor, donde el alumno puede aprender retrospectivamente, lo que significan sus respuestas en el sistema o situación, la cual ha sido concebida inicialmente por el adulto".

Un trabajo de gran importancia es el realizado por (Duval, 1998, citado por V. Hoyos), acerca de las relaciones entre las representaciones gráfica y analítica de la función lineal. El objetivo de esta investigación es mostrar los resultados de la ejecución de las actividades de reconocimiento de los vínculos entre los registros gráfico y algebraico, en estudiantes de bachillerato.

Se parte de un marco teórico semiótico para las reglas de correspondencia entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica y argumenta Duval que la razón de las dificultades de lectura y de interpretación de las representaciones gráficas cartesianas, es el desconocimiento de las reglas de correspondencia.

Para el reconocimiento de las reglas de correspondencia, Duval menciona como necesario la intervención de una vía de "interpretación global" de las propiedades de las figuras mediante la cual se asociaría una "variable visual" de la representación con una "unidad significativa" de la escritura algebraica, es decir;

> "el conjunto trazo-ejes forma una imagen que representa un "objeto" descrito por una expresión algebraica. Toda modificación de esta imagen

> que entrañe una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente, determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica" (Duval, 1988, citado por V. Hoyos).

La tarea de reconocimiento se realizó a tres grupos del primer semestre de bachillerato, a quienes se les mostró cinco gráficas de una línea recta cada una, y se les pedía que indicaran su expresión algebraica. Tres de ellas pasaban por el origen y tuvieron un porcentaje de acierto del 56 al 75%, y las que no pasaban por el origen su acierto fue del 20 y 30%. Duval hace notar que estos dos últimos ejemplos son más difíciles de conectar, ya que en vez de un solo paso (la pendiente), son de dos pasos (la pendiente y la ordenada al origen).

Este análisis desarrollado por Duval es un poco más elaborado, de un grado mayor de abstracción que el anterior, ya que dan por sentado que los alumnos saben tabular, por lo cual lo obvian, pasando de una representación algebraica a la gráfica. Esto implica que los alumnos ya poseen un conocimiento previo al respecto, o sea, que la tabulaciòn no se realiza punto por punto, sino que ya se sabe como es el objeto matemático, y se puede pasar directamente de una representación algebraica a una gráfica.

Uno de los objetivos del trabajo de (Herscovics, 1980, citado por V.Hoyos) fue elaborar una guía pedagógica para la enseñanza de la recta y de su ecuación, y la forma de abordar el estudio mediante la observación clínica de los efectos de una instrucción tendente a la construcción de significados de éstas, apoyándose en concepciones intuitivas y operacionales de las nociones geométricas.

Herscovics concibe el álgebra como un lenguaje representacional (representación nueva de las ideas aritméticas y geométricas), debiendo tener un significado sobre los conocimientos aritméticos y geométricos.

Considera el aprendizaje del álgebra como el aprendizaje de una parte del lenguaje matemático, en el que si es necesario construir estratos abstractos, éstos se construirán sobre estratos más concretos del lenguaje.

Estima que un nuevo concepto puede ser introducido, conectándolo a uno simple o a uno equivalente conocido por el estudiante, se trata de un problema de representación cuando se está en el intento de conectar un concepto nuevo a uno equivalente.

En este enfoque constructivista, considera que las transformaciones ejecutadas en la cognición permiten la construcción de significados, representando un proceso de asimilación.

Herscovics instrumenta en su experimento, alternativas didácticas para la construcción de la noción de línea recta, la llamada intuitiva, sobre el patrón de reconocimiento y ensayo, y la llamada relacional, que está basada en la relación del concepto de pendiente con el de dirección.

En el rubro empírico (con estudiantes de 15 años), interesa señalar que en el caso de una recta que no pasa por el origen, los estudiantes no llegan a derivar, de manera autónoma, la ecuación esperada. Incluso después de una hora de instrucción, los estudiantes encontraron gran dificultad en derivar estas ecuaciones por ellos mismos, como es evidenciado por sus errores y su inhabilidad para completar sus asignaciones certeras. Sin embargo, desarrollaron alguna comprensión formal pues podían ahora reconocer que líneas rectas que no cruzaban el origen tenían ecuaciones que implican una regla de dos pasos.

En cuanto al significado de una línea recta, fallaron repetidamente para poder elicitar la respuesta, aún cuando en ello habían trabajado. Inevitablemente, a la pregunta "¿qué es?" la respuesta era "cómo", o sea, describían el proceso por el cual encontraron la ecuación.

El objetivo de la investigación desarrollada por Hoyos (1998) es mostrar la interrelación entre las representaciones de la variación de un punto a lo largo de una trayectoria rectilínea (representación gráfica y algebraica), con el estado de desarrollo de la sintaxis algebraica.

Observaciones empíricas y constructos teóricos dan cuenta del camino que sigue un pensamiento algebraico fincado en los procedimientos algebraicos básicos (como la resolución algorítmica de ecuaciones) hacia el desarrollo de un pensamiento analítico que use el álgebra para describir objetos geométricos, como lo es una línea recta.

La investigación se centra en la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, en estudiantes entre 16 y 18 años.

Por otro lado, de acuerdo con observaciones empíricas y constructos teóricos, se habla de construcción de significado de las nociones y/o de los procedimientos matemáticos, en términos del significado que se genera en la vía de producción de los signos matemáticos implicados, y de sus sistemas.

Se enfoca dicha construcción mediante la producción sígnica por parte del estudiante, cuando interactúa con el profesor durante la resolución de problemas en la zona de desarrollo próximo.

Como en esta investigación, (Whitson, 1994, citado por V. Hoyos) menciona que la semiótica se presenta en el campo de la educación matemática como el estudio de las posibilidades para la actividad sígnica o semiosis. Como tal, la semiótica provee recursos conceptuales y vocabulario necesarios para dar cuenta de la cognición, la enseñanza y el aprendizaje como procesos de mediación sígnica.

Ubicados en el aprendizaje como un proceso de mediación sígnica, hemos enfocado a la semiosis para dar cuenta de la noesis o conformación de nociones o conceptos.

Considera a la "prueba matemática", como (Lakatos, mencionado por V. Hoyos), la lógica del descubrimiento matemático donde se generan los procesos de conjetura, prueba y definición en torno al trazo geométrico y la representación algebraica, que es una muestra del pensamiento algebraico analítico.

Hoyos indaga sobre la producción de las ecuaciones lineales del tipo $ax + by = c$, donde a, b y c, son diferentes de cero, a partir de una imagen gráfica dada porque le interesa indagar sobre los significados asociados al desarrollo sintáctico-algebraico.

Se parte del problema, de encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (6,2), y es tangente a la recta $2x + y = 16$ en el punto (8,0).

Se hace un seguimiento a tres estudiantes que realizan el problema: A, B, y C, B y C, pasan la ecuación de forma general a la normal, sin embargo B realiza mal el despeje y tabula, mostrando tener poco control en torno de sus ejecuciones; C despeja correctamente pero no sabe que hacer, aunque después identificó darle valores a x. A tomó una vía centrada en el reconocimiento de las operaciones a realizar indicadas por la ecuación lineal que se le dio.

A y C, en el camino de significación convencional de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, se destaca la prevalencia hacia los procedimientos algebraicos básicos, sobre el rol puramente sintáctico.

Uno de los resultados más importantes es el sentido procedimental-operativo para resolver las ecuaciones, lo cual les permitía ejercer un control sobre sus propias acciones para graficar. Los estudiantes que realizaron con éxito la graficación de la recta, sustituían el valor dado a una de las incógnitas en la ecuación del tipo ax + by = c, con a, b, y c distintos de cero, y no en la ecuación de tipo y = mx + b. Tal vez sea debido a que en la distribución de signos algebraicos, queda una sujeción de la variación a un valor fijo en cada momento, por contraposición a lo que pudiera estarse percibiendo en la cadena signica del tipo de la normal, $y =$

$ax + b$, en donde lo que se manifiesta es una identidad entre variables. En particular, en tal identidad entre variables el estudiante no parece percibir ninguna restricción para la variación o cambios numéricos de las variables x y y.

Concluyendo, se puede decir que las transformaciones del discurso entre los alumnos y el profesor, como es el caso de la resolución de problemas, ponen de manifiesto la elaboración estratificada del aprendizaje del álgebra como una parte del lenguaje matemático en el que si es necesario construir estratos abstractos, se construyen sobre estratos concretos del lenguaje, de representaciones matemáticas que dan coherencia a un sistema matemático de signos cartesianos o sistema cartesiano.

Sobre la actividad sígnica en torno de un sistema cartesiano de signos en construcción, se detectó que el tipo de código que rige en la escuela es débil, porque desarrolla significados locales.

El papel del profesor es determinante, pues es en las situaciones de resolución de problemas complejos de matemáticas que se le proponen al estudiante, que se contrastarán o refutarán las distintas posibilidades que el estudiante elige en el camino de una resolución conjunta del problema planteado, es probable que el maestro posibilite el conocimiento, y tal vez el avance hacia otro nivel de abstracción del contenido matemático en estudio.

Las reglas de correspondencia entre las diferentes representaciones, es una de las pautas para la consecución de los significados para determinar la ecuación lineal. Así también, la comparación entre las representaciones algebraica y gráfica en relación con la sintaxis algebraica, Hoyos dice "el camino que sigue el pensamiento algebraico fincado en procedimientos algebraicos básicos (como la resolución algorítmica de ecuaciones), hacia el desarrollo del pensamiento analítico que use el álgebra para describir objetos geométricos como la construcción de significados de la ecuación lineal. Lo que llama, la utilización de la semiosis en la formación de la noesis".

La comparación de las diferentes representaciones de la ecuación lineal como parte de la investigación y exploración, como forma de conceptualización, como mecanismo para su aplicación en la resolución de problemas, se utilizaron en nuestro trabajo, para describir y analizar parte del proceso de construcción del aprendizaje de la función lineal aplicada a la resolución de problemas económicos por parte de los alumnos.

II MARCO CONCEPTUAL

Las connotaciones sociales y politicas, así como la influencia de la tecnología en la educación, el desarrollo de los estudios pedagógicos mismos y el creciente interés por la educación, determinaron que muchos científicos abordaran temas educativos, lo que dio lugar a la proliferación de una multitud de ciencias que se especificaban por el genitivo "de la educación". Así, tras de la historia y la filosofia de la educación, surgen estudios y ensayos sobre la economia de la educación, psicología de la educación, sociología de la educación, antropología de la educación etc., hecho que, sin duda, es una de las razones que motivó a Briand Conant a proponer en 1960 que se sustituyera la palabra pedagogía por la de "ciencias de la educación".

Se podría decir que las ciencias de la educación se dividen en tres grandes rubros,

a) El primero conocido como Meta-Educativo, que consiste en el estudio y desarrollo de los grandes temas como medios, fines y valores de la educación. Este nivel se centra en los estudios de la filosofía e historiografia de la educación (que estudia a la historia de la educación).

b) El segundo nivel denominado Socio-Educativo, estudia al fenómeno educativo en relación con la sociedad, tocando los temas como el estado, iglesia, instituciones, empleo, familia, poder, ideología, producción, etc. Sus estudios se centran en el vínculo de la sociedad y lo económico de la educación. Las ramas que estudian el fenómeno socio-educativo son, la economía de la educación y la sociologia de la educación.

c) El tercer nivel es el Pedagógico. Su objeto de estudio es la didáctica (enseñanza-aprendizaje), currículum, y evaluación. A la pedagogía se le considera como ámbito de estudio, y como disciplina. Los estudios de corte pedagógico, tradicionalmente han sido abordados tanto por la pedagogía como por la psicología de la educación.

La didáctica estudia a la enseñanza y al aprendizaje, sin embargo existen relativamente pocos estudios sobre la enseñanza, no así en el caso del aprendizaje, donde existen dos grandes corrientes que ven con diferentes ojos el proceso de aprendizaje. Por un lado está el conductismo derivado del paradigma empirista, y por otro lado, está la corriente cognoscitivista, derivado del paradigma racionalista. El presente trabajo está emnarcado dentro de la última corriente, y de la cual se aborda la parte conceptual del aprendizaje de las teorías de Piaget, Vygotsky, Ausubel y Coll, que sirven como punto de referencia para la concepción de aprendizaje del presente trabajo.

La pedagogía y la matemática se engarzan creando una nueva disciplina, la didáctica de la matemática, la cual da explicaciones de los fenómenos que ocurren en el proceso de estudio, con el fin de poder diseñar y llevar acabo una forma diferente de enseñar y aprender matemáticas.

Las teorías del aprendizaje y la didáctica de las matemáticas, servirán como andamios sobre los cuales se analizarán cómo los alumnos de primer semestre de la Facultad de Economía de la UNAM (CU), construyen el concepto de función lineal aplicada a la resolución de problemas económicos, que será el contenido de la presente tesis.

1 TEORÍAS DE APRENDIZAJE

Si bien es cierto que dentro de la corriente constructivista de la enseñanza y aprendizaje existen muchos puntos de vista, todos parten de un principio fundamental, mediante el cual entendemos que el alumno o sujeto de conocimiento entra en un proceso de actividad en relación con el objeto de estudio.

1.1 Psicogenética, Jean Piaget

Desde una perspectiva genética, Piaget estudia las nociones y estructuras operatorias elementales, que el sujeto construye a lo largo de su desarrollo, como producto de la interacción sujeto-objeto. Su análisis se centra en la génesis de los procesos y los mecanismos involucrados en la construcción de conocimientos, en función del desarrollo individual.

Estudia el problema del conocimiento, explorando la génesis y condiciones del paso de un estado de menor conocimiento a uno de mayor conocimiento. Esto significa que el sujeto, cuando entra en relación con el objeto de estudio, parte de sus conocimientos previos o con una hipótesis, la cual se modifica en la medida en que va construyendo nuevo conocimiento, permitiendo la ampliación de sus estructuras cognitivas.

Sus trabajos se orientaron hacia la formación del conocimiento en el niño. Da una explicación psicogenética del desarrollo y la estructuración de conceptos (desde la niñez hasta la adolescencia), y establece que se trata de un proceso subyacente al entendimiento, explicación y racionalización de la experiencia.

Partiendo de la interrelación entre el sujeto con el objeto o también llamada actividad del sujeto, (la actividad es un requisito del desarrollo), se genera el desarrollo intelectual, que es un proceso de adaptación biológica y que presenta dos aspectos fundamentales, que son la acomodación y la asimilación.

La acomodación es un proceso cognitivo mediante el cual, cuando la nueva información se encuentra con las estructuras cognitivas anteriores y no se corresponde con ellas, se generan reacciones perturbadoras y gracias a un proceso equilibrador y a la reorganización de los esquemas previos la nueva información se va adecuando a la anterior. La asimilación es la integración de los conocimientos a las estructuras previas.

La interrelación entre el sujeto y el objeto permite la construcción de estructuras cognitivas por un lado y el desarrollo de sus aspectos biológicos o hereditarios por otro. En el primer caso se trata de un problema de estructuras cognoscitivas; en el segundo, de problemas del desarrollo. Ambas cuestiones, estructuras y desarrollo, son inseparables.

El constante acercamiento del sujeto con el objeto permite la formación de conocimientos en un proceso dinámico. Estos conocimientos van generando y ampliando sus estructuras cognitivas, hasta hacerlas más complejas. Estos esquemas cognitivos se originan en las estructuras biológicas más primitivas y con la misma interrelación se van desarrollando.

Piaget define al aprendizaje en términos de construcción de conocimientos y hace una clara diferenciación entre el proceso de maduración (desarrollo de estructuras hereditarias) y el aprendizaje por experiencia mediata, al que denomina aprendizaje en sentido estricto y que incluye la construcción de elementos cognitivos en una forma empírica.

El aprendizaje, en sentido amplio, no puede darse si antes no se da el aprendizaje en sentido estricto. El aprendizaje en sentido amplio es, un proceso de desarrollo del aprendizaje en sentido estricto.

No todo proceso de aprendizaje genera explicaciones claras y directas sobre las propiedades de los objetos o las relaciones entre ellos. Existen desfasamientos y perturbaciones que hacen intervenir esquemas y estructuras interiorizados, los cuales se modifican a la luz de estos encuentros perturbadores. La asimilación que implica esquemas más amplios, se acopla a las modificaciones en mecanismos llamados de equilibración. El proceso de equilibración constituye la base de la explicación piagetiana sobre el desarrollo intelectual del individuo. Este es el proceso mediante el cual se van equilibrando los procesos de asimilación y acomodación.

Esta distinción entre los diferentes tipos de aprendizaje es importante en tanto que hace intervenir un proceso estructurador (problema de generación de estructuras) en el desarrollo del individuo (problema de desarrollo).

1.2 Sociocultural, Lev S. Vygotsky

Vygotsky abre un camino para la construcción de una teoría psicológica científica (o actividad psicológica del hombre), luchando en dos frentes: por una parte, se oponía a los intentos de biologizar la psicología, criticando al conductismo y por otra, criticó a los exponentes de la psicología tradicional que hablaban de funciones psíquicas como producto de la actividad de un psiquismo autónomo, abstraído del medio.

Su visión del mundo estaba basada en la filosofía materialista-dialéctica. Su camino fue aplicar el método histórico-genético, sosteniendo que los distintos aspectos de la actividad psicológica no pueden ser entendidos como hechos dados de una vez para siempre, sino como un producto de la evolución filogenética y ontogenética, entrelazados y determinados por el desarrollo histórico-cultural del hombre.

Vygotsky entendía que la vida del hombre no sería posible si solo este dependiera de su cerebro y las manos (como los animales, que su desarrollo psicológico depende solo de la actividad puramente biológica), sin contar con los instrumentos producto de su actividad social.

La vida material del hombre depende de instrumentos, así la actividad psicológica superior depende de eslabones producto de la vida social, de los cuales el lenguaje es el más importante.

Esta mediación o dependencia crea un abismo entre el desarrollo de la actividad psicológica de los animales superiores, puramente biológica, y el del ser humano, en el cual las leyes de la evolución biológica dan paso a las leyes de la evolución histórico-social.

Vygotsky planteó que dado que el desarrollo orgánico se realiza en un medio cultural, dicho desarrollo se transforma en un proceso biológico condicionado históricamente. La psiquis es una función propia del hombre como ser material dotado de un órgano específico, el cerebro, cuyas leyes adquieren nueva forma y son modeladas por la historia de la sociedad.

Vygotsky no contrapone la mediación del instrumento o de dependencia cultural, a una psiquis individual completa por sí misma. El instrumento cultural se integra en la psiquis del sujeto, es parte fundamental de la misma, así dice que "todas las funciones psíquicas superiores son relaciones de orden social interiorizadas base de la estructura social de la personalidad".

Para el desarrollo de su teoría de la actividad psicológica se centró en los aspectos prácticos del aprendizaje, haciendo énfasis en los aspectos cognitivos y lingüísticos.

Para esto realiza el análisis de la conciencia, vinculando los procesos psicológicos y los procesos socioculturales. Esta vinculación está basada en el estudio de la interacción entre el sujeto y el objeto que se produce mediante un sistema de herramientas, señales o signos lingüísticos dentro de un marco histórico-social. El aspecto social condiciona el tipo de desarrollo individual.

En el terreno de la educación, considera que lo más importante "no es determinar qué nivel de desarrollo ha alcanzado un niño (tal como tratan de determinar los psicólogos occidentales, sobre todo Piaget, a los que criticaba por ello), sino saber qué nivel está a punto de alcanzar el sujeto" (Abad, 1987, citado por A. Sainz). Aquí el concepto de desarrollo es entendido como los cambios cualitativos (saltos dialécticos), diferentes a los cambios cuantitativo-acumulativos.

En tal sentido, el potencial de aprendizaje de los alumnos puede valorarse a través de la denominada zona de desarrollo próximo (ZDP), concepto muy importante para ubicar el papel del docente y la naturaleza interpersonal del aprendizaje. La ZDP posee un límite inferior dado por el nivel de ejecución que logra el alumno trabajando de forma independiente o sin ayuda, mientras que existe un límite superior, al que el alumno puede acceder con la ayuda de un docente capacitado. Vigotsky resalta en su obra, el papel del docente en la construcción del conocimiento por parte del alumno.

De esta manera, en la formación de un docente se requiere habilitarlo en el manejo de una serie de estrategias (de aprendizaje, de instrucción, motivacionales, de manejo de grupo etc.) flexibles y adaptables a las diferencias de sus alumnos y al contexto de su clase, de tal forma que pueda inducir (a través de ejercicios, demostraciones, pistas para pensar, retroalimentación etc.) la citada transferencia de responsabilidad hasta lograr el límite superior de ejecución que se busca". (Díaz, 2002). Esto hace referencia al tipo de conocimientos que requiere el profesor para que no solamente desarrolle situaciones didácticas, sino llevarlas a cabo. Si bien una es difícil, la otra es más.

De lo anterior se desprende su fundamento teórico al sostener la tesis de que las funciones psicológicas superiores parten de procesos generados a través de relaciones sociales, establecidas mediante la actividad mediada por los instrumentos.

Existen dos aspectos de la teoría de Vygotsky que se retomaron para el presente trabajo:

- Un aspecto fundamental es el aprendizaje dentro de un contexto histórico-social, mediante un instrumento producto del desarrollo social que es el lenguaje, el cuál forma parte de la construcción del aprendizaje. La importancia de lo anterior se podría resaltar dentro de los debates actuales del constructivismo en preguntas del tipo ¿la mente está en la cabeza o en la sociedad?.

- El otro aspecto que se retomó, fue el rol que juega el profesor como guía y promotor del aprendizaje individual del alumno y, como promotor, en su zona de desarrollo próximo.

1.3 Cognitiva, David Ausubel y Jerónimo Bruner

Con relación a la perspectiva cognitiva, sus principales representantes son los psicólogos norteamericanos David Ausubel y Jerónimo Bruner. Al igual que los precedentes teóricos, su análisis parte de la importancia de la interrelación entre el sujeto y el objeto.

El aprendizaje es concebido como un factor y producto de la construcción de conocimientos, donde la actividad cognitiva está en el centro de la actividad del sujeto, mediada por estructuras reguladoras, al principio hereditarias y posteriormente construidas con la intervención de adquisiciones previas. De esta manera, el aprendizaje provoca transformación de estructuras, que una vez modificadas permiten la realización de aprendizajes más complejos.

El proceso de desarrollo o adaptación activa del individuo, se da por medio del nivel de competencia a partir de los procesos de acomodación y asimilación de Piaget.

Sintéticamente, los principales aspectos que orientan la regulación didáctica de los procesos de enseñanza-aprendizaje son:

a) El carácter constructivo y dialéctico de todo proceso de desarrollo individual, en donde el conocimiento y comportamiento son el resultado de procesos de construcción subjetiva en los intercambios cotidianos en el medio circundante.

b) La significación que representa la actividad, desde la sensomotríz que discrimina y manipula objetos, hasta las más complejas operaciones formales.

c) El lenguaje como instrumento insustituible de las operaciones intelectuales más complejas.

d) La relevancia del conflicto cognitivo, al dudar de las anteriores construcciones o esquemas cognitivos.

e) La importancia que representa la cooperación, para el desarrollo de las estructuras cognitivas, para ello los intercambios son necesarios para superar el egocentrismo del conocimiento.

f) La necesidad de distinguir desarrollo y aprendizaje ya que no todo aprendizaje provoca desarrollo; el aprendizaje hace referencia a conocimientos particulares y en el pensamiento se desarrollan instrumentos generales del conocimiento. (Díaz, 2002).

Para que se produzca el aprendizaje significativo (AS) es necesario cumplir dos condiciones:

a) Canalizar la potencialidad significativa del material de aprendizaje en dos dimensiones;

  - Significatividad lógica; coherencia en la estructura interna del material, secuencia lógica en los procesos y consecuencia en las relaciones entre sus elementos y componentes.
  - Significatividad psicológica; contenidos comprensibles desde la estructura cognitiva del sujeto que aprende.

b) Disposición subjetiva del individuo respecto al aprendizaje, componente motivacional, emocional y actitudinal. (Díaz, 2002).

Desde esta óptica, los nuevos significados son generados en la interacción de la nueva idea o concepto potencialmente significativo, con las ideas pertinentes, ya poseídas por el sujeto en su estructura cognitiva. En este sentido, el bagaje del individuo se enriquece y modifica sucesivamente con cada nueva incorporación.

El significado psicológico de los materiales de aprendizaje deberá considerarse como idiosincrático, experiencial, histórico y subjetivo, razón por la cual, en todo proceso de planificación didáctica del aprendizaje significativo, se debe comenzar por conocer la estructura mental del individuo que ha de realizar las tareas de aprendizaje.

Esto se torna más relevante, si tomamos en cuenta que la estructura cognitiva de cada sujeto manifiesta una organización jerarquizada y lógica en la que cada concepto ocupa un lugar en función de su nivel de abstracción, generalidad y capacidad de incluir otros conceptos: los significados de ideas y proposiciones se adquieren en un proceso de inclusión correctiva en estructuras más genéricas.

El material aprendido de manera significativa es menos sensible a las interferencias a corto plazo y mucho más resistente al olvido, por cuanto no se encuentra aislado, sino asimilado a una organización jerárquica de los conocimientos referentes a la misma área temática. El aprendizaje anterior y posterior no sólo no interferirá, sino que, por el contrario, reforzará la significación e importancia del presente, siempre y cuando siga siendo válido dentro del conjunto jerárquico.

1.4 Constructivismo, César Coll

Dentro de la evolución teórica que ha experimentado la corriente cognoscitivista, para muchos estudiosos de la educación, la visión constructivista posiblemente sea la perspectiva que más se alimenta de las aportaciones de diversas corrientes psicológicas asociadas genéricamente a la psicología cognitiva: el enfoque psicogenético piagetiano, la teoría ausubeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo, la psicología sociocultural vigotskiana, etc. A pesar de que los autores de éstas se sitúan en encuadres teóricos distintos, comparten el principio de la importancia de la actividad constructiva del alumno en la realización de los aprendizajes escolares.

En términos generales, se puede conceptualizar al constructivismo como la postura que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento, como en las afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea.

En tal sentido César Coll considera que "el proceso de construcción de conocimientos depende de dos aspectos básicos":

- Conocimientos previos o representación que se tenga de la nueva información o actividad a resolver.
- Actividad externa o interna que el alumno realice.

Este autor argumenta que "estos aprendizajes no se producirán de manera satisfactoria a no ser que se suministre una ayuda específica a través de la participación del alumno en actividades intencionales, planificadas y sistemáticas, que logren propiciar en éste una actitud mental constructiva. Por ello, la finalidad última de la intervención pedagógica es desarrollar en el alumno la capacidad de realizar aprendizajes significativos por sí solo en una amplia gama de situaciones y circunstancias" (Díaz-Barriga, 2002, p.30).

Bajo este enfoque, la concepción constructivista se organiza en torno a tres postulados:

1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Él es quién construye (o más bien reconstruye) los

saberes de su grupo cultural y este puede ser un sujeto activo cuando manipula, descubre o inventa.

2. La actividad mental constructivista del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración. El alumno no tiene en todo momento que descubrir o inventar en un sentido literal todo el conocimiento escolar.

3. La función del docente es engarzar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado. La función del profesor no se limita a crear condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad constructiva, sino que debe guiarla explícita y deliberadamente.

De lo anterior podemos decir que la construcción del conocimiento escolar es, en realidad, un proceso de elaboración, en el sentido de que el alumno selecciona, organiza y transforma la información que recibe de muy diversas fuentes, estableciendo relaciones entre dicha información y sus conocimientos previos.

Construir significados nuevos implica un cambio en los esquemas de conocimiento que se poseen previamente, esto se logra introduciendo nuevos elementos o estableciendo nuevas relaciones entre dichos elementos. Así, el alumno podrá ampliar o ajustar dichos esquemas o reestructurarlos a profundidad.

A diferencia del planteamiento piagetiano que señala que los procesos de autoconstrucción del conocimiento se dan en un plano personal e interno, los constructivistas destacan la importancia de la actividad y del contexto, reconociendo que el aprendizaje escolar es en gran medida un proceso social.

De esta manera, según (Rigo Lemin, 1992, citado por Díaz-Barriga), se explica la génesis del comportamiento y el aprendizaje, lo cual puede hacerse poniendo énfasis en los mecanismos de influencia sociocultural

(Vigotsky), socioafectiva (Wallon) o fundamentalmente intelectuales y endógenos (Piaget) (Díaz-Barriga, F., 2002).

2 DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Se entiende por didáctica de las matemáticas, a la ciencia de estudio y de la ayuda para el estudio de las matemáticas. Su objetivo es describir y caracterizar los procesos de estudio o procesos didácticos de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se enfrenarán todos aquellos que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiarlas.

Se podría decir que hacer matemáticas consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar entonces con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos, para dar respuesta a las cuestiones planteadas inicialmente. Por lo tanto, gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelación matemática.

La investigación en didáctica de las matemáticas supone entender mejor los procesos didácticos y los fenómenos que estos procesos originan dentro y fuera del aula. Se puede decir que "estudio" se refiere a todas las actividades que están alrededor del aprendizaje del alumno, dentro y fuera del aula. Esto quiere decir que las actividades grupales, plenarias, presentaciones individuales, etc. dentro de clase, y las actividades como ir a las bibliotecas, a conferencias, pláticas, estudio con compañeros, círculos de estudio, investigaciones, simposium, estudio individual, etc. fuera del aula, constituyen el proceso de estudio o proceso didáctico. La enseñanza se convierte así en un medio de estudio, pero no el único, y el aprendizaje sería el objeto perseguido por el estudio. Lo didáctico es todo lo que se refiere al estudio.

Para evitar confusiones, hay que señalar que la expresión didáctica de las matemáticas también se utiliza en otros contextos con un sentido más próximo al etimológico, para referirse simplemente a la enseñanza de las matemáticas, y se habla entonces de la didáctica de la geometría, didáctica de la probabilidad, etc.

Tradicionalmente se ha intentado interpretar los hechos didácticos a partir de las peculiaridades de los métodos de enseñanza y de los puntos de vista de los docentes y de los alumnos. Sin embargo la didáctica de las matemáticas encuentra las explicaciones últimas de los fenómenos didácticos, en las leyes que rigen el proceso didáctico, o sea las cláusulas de lo que se conoce como contrato didáctico.

Un aspecto central que determina las características de los procesos de enseñanza aprendizaje es lo que G. Brousseau denomina *contrato* didáctico. El contrato didáctico asigna, implícita y explícitamente, los roles tanto del docente como del alumno en el proceso de estudio, y esta asignación va evolucionando conforme avanza este proceso. Se podrían destacar las siguientes características del contrato didáctico;

a) La dificultad por parte del docente de construir una situación en la que el alumno actúe además de cómo alumno, como un matemático, responsabilizándose de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean, para esto se plantean las siguientes preguntas; ¿Bajo que condiciones puede evolucionar el contrato didáctico en el sentido de traspasar una parte de la responsabilidad a los alumnos? ¿Qué otros fenómenos didácticos están relacionados con la rigidez de esa cláusula del contrato didáctico?

b) Lo anterior trae como consecuencia que los alumnos deleguen en el docente la responsabilidad de la validez de sus respuestas, como si no importara el que estas sean verdaderas o falsas, a esto se le denomina la "irresponsabilidad matemática" de los alumnos. ¿Por qué el contrato didáctico asigna de manera casi exclusiva al docente la responsabilidad matemática? Se trata de una cuestión muy relacionada con la forma en que se interpretan las funciones respectivas del alumno y del docente.

Esto se relaciona con la forma en que se considera al estudio del alumno en la cultura tradicional, esto es que:

a) El estudio del alumno se le considera como un medio auxiliar de la enseñanza escolar,

b) Se ignora la estructura y funciones de su trabajo matemático y

c) La actividad de estudio del alumno se le considera como una magma uniforme, relativamente independiente de la materia a estudiar.

Esto trae como consecuencias que las actividades tanto del alumno como del docente se concentren en el aula generando la dependencia comentada anteriormente entre el alumno y el docente, y un segundo punto es el que las instituciones adjudican al docente funciones desmesuradas, completamente fuera del alcance del profesor.

La forma clásica de entender la didáctica no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de "enseñar matemáticas" ni "aprender matemáticas". Estas nociones son utilizadas en un sentido transparente, o sea, como nociones construidas en otras disciplinas, y de esta manera se renuncia a la construcción de la didáctica de las matemáticas como una disciplina científica.

El nuevo paradigma de la didáctica de las matemáticas, la "didáctica fundamental" nació cuando G. Brousseau, vislumbró la necesidad para la didáctica, de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, correspondiendo históricamente con las primeras formulaciones de la teoría de las situaciones didácticas.

La inclusión como objetos propiamente didácticos de muchos objetos que funcionaban en el discurso didáctico tradicional sin ser teorizados (entre los que se encontraban, los objetos matemáticos) provocó una ampliación inesperada de la problemática didáctica. Se puso de manifiesto que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial, inaugurándose una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos: el propio conocimiento matemático. Gracias a la didáctica de las matemáticas, fue posible recorrer posteriormente en camino inverso: partir del hombre haciendo matemáticas para constatar que los didáctico es denso, no es claro en lo matemático y que todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. Al mostrarse lo matemático y lo didáctico empíricamente inseparables, la noción misma de "fenómeno didáctico" se generaliza para hacer referencia a una dimensión esencial de toda actividad matemática.

La teoría de las situaciones didácticas de G. Brousseau se propone modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos a partir de la problematización y cuestionamiento matemático enseñado, o sea, que el alumno intervenga como actor de la actividad, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, que los ponga a prueba e intercambie con otros alumnos o profesores. Por lo tanto, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento que se quiere enseñar, aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición de que el conocimiento sea construible por los alumnos.

2.1 Evolución de la problemática didáctica

Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y difícilmente de ser analizado, controlado y sometido a reglas. El aprendizaje de los alumnos dependía sólo del grado en que el docente dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista.

Esta forma, un tanto mágica de considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha ido evolucionando a medida que crecía el interés por la investigación de los hechos didácticos. Así, desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina se ha ido consolidando el punto de vista llamado "clásico" que rompiendo con la visión mágica, apoya la necesidad de analizar los procesos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, para poder incidir sobre el rendimiento de los alumnos.

En este paradigma el aprendizaje está considerado como un proceso psicocognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales del alumno-aprendiz. Además se postula que para modificar el rendimiento de los alumnos está la conducta del docente que se explica en función del pensamiento del profesor, en el cual se incluyen sus expectativas, su manera de concebir la enseñanza de las matemáticas y su interpretación del saber matemático.

Una descripción general y simplista de la didáctica de las matemáticas desde el punto de vista clásico, permite clarificar el énfasis que se ha puesto, tradicionalmente en la enseñanza y el aprendizaje. Éste punto de vista se distingue por dos características:

1) Tradicionalmente la problemática didáctica es una ampliación de la problemática espontánea del docente, es decir, que la investigación clásica en didáctica ha hecho suyos los problemas con que se enfrenta el docente, retomando, reformulando ampliando y sistematizando las cuestiones que éste se plantea, como las relacionadas a la adquisición del conocimiento por parte de los alumnos, ¿cómo hacer para que los alumnos adquieran nuevos conocimientos?. Con la persistencia de errores en el

trabajo de los alumnos, ¿qué hacer para que dejen de hacerlos?. Con la diversidad de los alumnos en el aula, ¿cómo tratarla?. Con la evaluación, ¿Cuál es la mejor manera de evaluar?

2) El saber didáctico se ha presentado como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales e importantes de otras disciplinas, por lo tanto la didáctica de las matemáticas se han considerado como una disciplina más normativa que explicativa.

Así, desde el punto de vista clásico se considera que la didáctica de las matemáticas tiene como objetivo proporcionar al docente los recursos técnicos que necesita para enseñar de la manera más satisfactoria posible.

Existen dos enfoques que distinguen al paradigma clásico:

1) El primero está centrado en el pensamiento del alumno, que gira alrededor de la noción de aprendizaje significativo cuyo objeto de estudio es el conocimiento matemático del alumno y su evolución. Ésta elección del objeto de estudio, hace que se delegue explícitamente a la psicología la fundamentación científica de las técnicas que proporciona la didáctica.

2) El segundo enfoque se centra en el docente, comparte el interés por la instrucción del alumno, pero amplía la problemática didáctica introduciendo las cuestiones relativas al docente y a su formación profesional. Éste enfoque considera que la formación del docente debe empezar por la transformación del "pensamiento docente" espontáneo en un sentido análogo a la necesidad de cambiar el pensamiento espontáneo del alumno, sus preconceptos, errores conceptuales, para posibilitar su aprendizaje. Se sigue considerando la didáctica de las matemáticas como un saber técnico, pero con fundamentos más amplios, como la psicología educativa, la sociología, la historia de

las matemáticas, la pedagogía y la epistemología de las matemáticas.

Ésta forma de entender la didáctica de las matemáticas tiene algunas limitaciones, entre las que se citarán dos; la primera, paradójicamente, y a pesar de propugnar que la didáctica debe centrarse en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la forma clásica de entender la didáctica no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de "enseñar matemáticas" ni "aprender matemáticas". Sólo las utiliza como nociones transparentes (no cuestionadas) o bien como nociones construidas en otras disciplinas. La segunda limitación, en coherencia con la interpretación del saber didáctico como un saber técnico (en el sentido de que la teoría justificativa hay que buscarla fuera de la didáctica), se renuncia a la ambición de construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Con el fin de superar éstas y otras limitaciones, la didáctica de las matemáticas se ha visto obligada a ampliar su problemática, incluyendo el conocimiento matemático entre sus objetos de estudio. Esta ampliación ha provocado una visión más amplia y más rica de "lo didáctico", así como la emergencia del proceso de estudio como objeto primario de la investigación didáctica, pasando a ser la enseñanza y el aprendizaje, objetos secundarios aunque no menos importantes.

Ésta ampliación del objeto de estudio no es específico de la didáctica de las matemáticas, sino es un mecanismo general, que tiene relación con la necesidad que se produce periódicamente en toda disciplina de introducir como objetos de estudio propios, nociones que hasta el momento habían sido utilizadas únicamente como herramientas transparentes, no cuestionadas, y que aparecían en el discurso científico sólo como útiles para describir otros objetos.

El nuevo paradigma de la didáctica de las matemáticas, la "didáctica fundamental", nació precisamente cuando G. Brousseau vislumbró por primera vez (a principios de los setentas) la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos usuales no se habían construido para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica. Históricamente, se corresponden con las primeras formulaciones de la teoría de las situaciones didácticas.

La inclusión como objetos propiamente didácticos de muchos objetos que funcionaban en el discurso didáctico tradicional sin ser teorizados (entre los que se encontraban, en particular, los objetos matemáticos) provocó una ampliación inesperada de la problemática didáctica. No sólo fue posible empezar a abordar cuestiones que antes no se podían ni siquiera plantear sino que, lo que es más importante, se puso de manifiesto que todo fenómeno didáctico (en el sentido tradicional de fenómeno relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas) tiene un componente matemático esencial, inaugurándose una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos: el propio conocimiento matemático.

Esta ampliación se materializó inicialmente en la teoría de las situaciones didácticas, generándose una transformación importante en la naturaleza de la didáctica como disciplina. Gracias a ella, fue posible recorrer posteriormente en camino inverso: partir del hombre haciendo matemáticas para constatar que lo didáctico es denso, no es claro en lo matemático y que todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. Éste es el punto de vista antropológico, inaugurado por Y. Chevallard. Al mostrarse lo matemático y lo didáctico empíricamente inseparables, la noción misma de "fenómeno didáctico" se generaliza para hacer referencia a una dimensión esencial de toda actividad matemática. Lo didáctico deja de ser exclusivo del proceso de enseñanza-aprendizaje para referirse a cualquiera de los aspectos del proceso de estudio. La didáctica de las matemáticas se convierte, en definitiva, en la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas.

El principio metodológico fundamental de la teoría de las situaciones didácticas consiste en poner en correspondencia todo saber determinado con una clase mínima de situaciones que hacen aparecer éste (principio), como el medio óptimo para solucionar estas situaciones. Esta clase de situaciones contiene el conjunto de problemas característico de un saber, y puede generarse mediante el juego de las variables cognitivas y las variables didácticas de una situación fundamental única.

Los "modelos de situación" son modelos matemáticos que permiten cierto control sobre la consistencia de la arquitectura teórica. El estudio de las variables es, a la vez teórico y experimental.

Las situaciones son el instrumento privilegiado para la descripción de la actividad didáctica, pero también un instrumento para describir y analizar las intervenciones del docente (contrato didáctico). Sirven así como medio de comunicación o intercambio entre el profesorado, y también para integrar los conocimientos sobre la enseñanza que provienen de distintos ámbitos científicos.

La teoría de las situaciones didácticas de G. Brousseau se propone modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos a partir de la problematización y cuestionamiento del conocimiento matemático enseñado. Para llevar a cabo dicha teorización, G. Brousseau parte de un modelo general del conocimiento matemático que, de forma esquemática, puede resumirse del siguiente modo:

"Saber matemáticas" no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, sino que es "ocuparse de problemas" en un sentido amplio, lo cual incluye tanto encontrar buenas preguntas como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática, exige que éste intervenga como actor de la actividad, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar con su actividad.

"Enseñar un conocimiento matemático concreto" es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad matemática en el sentido anterior. El docente debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento que se quiere enseñar aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos.

La aplicación en el salón de clase de la didáctica de las matemáticas, consistió en el diseño y la incorporación de actividades didácticas que se desarrollaron a través del curso, como tareas individuales, tareas grupales, exposiciones en parejas, presentaciones ante otros grupos, plenarias, clase abierta, presentaciones en power point, en rotafolios, e investigación de conceptos, de procedimientos y de problemas. Otra de las aplicaciones derivado de la didáctica de las matemáticas se enfocó a la incorporación explícita de las cláusulas del contrato didáctico, mediante el desarrollo de actividades que propiciaron la devolución, a los alumnos, de su responsabilidad en cuanto a su proceso de aprendizaje, de defender sus ideas con argumentos, problematizar y generar alternativas a la hora de exponer sus trabajos a otro público, que no eran sus compañeros de clase.

3 EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

Un importante artículo de Kieran (1988) nos da una visión general del desarrollo epistemológico del álgebra, que es donde se enmarca el desarrollo algebraico del concepto de función que se utilizará en el presente trabajo.

El análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y de sus reglas de transformación destaca la distinción entre el uso de letras para representar incógnitas y el uso de letras para representar cantidades dadas cuando se expresan soluciones generales y como herramienta para probar reglas que gobiernan relaciones numéricas. Destaca la pérdida de significado gradual al ir pasando de descripciones generales en el lenguaje hacia representaciones simbólicas y procedimientos.

El simbolismo algebraico facilitó el cambio de una perspectiva procedimental a una estructural en el álgebra. Algunos procesos cognitivos del aprendizaje del álgebra escolar tienen sus raíces en el desarrollo histórico del álgebra como sistema simbólico. Lo anterior se puede constatar en las etapas que siguió el desarrollo histórico del álgebra, que fueron:

- Etapa retórica, antes de Diofanto 250 a.e. que se caracteriza por una ausencia de símbolos o de signos especiales para representar incógnitas.
- Etapa lacónica, que se inicia con Diofanto, donde se trataba de lograr identidades de las letras, más que encontrar una forma de explicar lo general. Diofanto tiene una colección de 189 problemas de aritmética resueltos de manera diferente. Este simbolismo lacónico de Diofanto evoluciona hasta el S.XVII. Después de la conquista musulmana, en el S. VII, los árabes (que utilizan las matemáticas griegas) e hindúes, se encargan de difundirla por Europa, aunque utilizan métodos retóricos. Durante el Renacimiento se utilizan abreviaturas de palabras normales, "p" para más, (+, plus), "m" para el menos, (-, minsus).

- Etapa simbólica, a finales del S.XVI, el trabajo de Diofanto fue retomado por Vieta (1540-1603), usando letras para las cantidades dadas y para las incógnitas. Se inicia la expresión de soluciones generales y a formular reglas para las relaciones numéricas. El uso de simbolismos permite la eliminación de información superflua, dando pie a la generación de otros conceptos matemáticos, como el concepto de función.

El simbolismo algebraico facilita el desarrollo de esta rama de las matemáticas, así como la relación entre álgebra y geometría, y propicia las definiciones de variable dependiente e independiente que diera Euler en 1755. En 1830 Dirichlet modifica el concepto euleriano de función para definirla como una correspondencia arbitraria entre números reales. Cien años más tarde, Bourbaki generaliza el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos.

El álgebra escolar se considera como una de las ramas de las matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de la operación sobre estas estructuras. Las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas; es decir, que se trabaja en términos procedimentales en donde los valores numéricos se sustituyen por expresiones algebraicas para obtener resultados específicos. Posteriormente, las representaciones algebraicas empiezan a tratarse como objetos matemáticos sobre los cuales se ejecutan ciertas operaciones estructurales tales como combinar términos, factorizar o restar un término en ambos lados de una ecuación.

Se hace énfasis en la distinción entre los términos procedimental y estructural. Procedimental, se refiere a las operaciones aritméticas que se hacen sobre números para obtener números. Estructural se refiere a un conjunto de operaciones que se hacen, no sobre números, sino sobre expresiones algebraicas. La concepción estructural es estática, instantánea, integradora. La concepción operacional, es dinámica, secuencial y detallada.

La existencia de etapas históricas en las que conceptos como número y función han evolucionado, desde la concepción operacional hasta la estructural le han sugerido a (Sfard, 1991, mencionado por C. Kieran), la creación de un modelo de tres fases en el desarrollo conceptual, (modelo respaldado por los resultados de varias investigaciones):

- La primera fase llamada interiorización, en la que se realiza algún proceso sobre objetos matemáticos familiares.
- La segunda, llamada de condensación, donde el proceso o la operación se divide en unidades más manejables. Esta fase dura hasta que se concibe una nueva entidad únicamente en forma operacional.
- La tercera fase, llamada materialización, involucra la habilidad para reconocer algo familiar como una nueva perspectiva.

Las dos primeras son largas sucesiones de cambios cuantitativos y graduales más que cualitativos, la materialización parece ser un salto en que el proceso se convierte en un objeto, en una estructura estática.

De la misma forma que el proceso histórico puede verse como una evolución procedimiento-estructura, puede verse el álgebra escolar como una serie de ajustes proceso-objeto que los estudiantes deben hacer a fin de comprender todo el aspecto estructural del álgebra. Los estudiantes deben darse cuenta pronto de que los objetos con los que están operando son expresiones algebraicas, y no solamente números; además que las operaciones que se realizan como las de simplificación, factorización, racionalización del denominador, resolución o diferenciación de ecuaciones, etc. ya no son sumas, restas, multiplicaciones o divisiones aritméticas.

Otro ajuste que deben hacer quienes inician su estudio de álgebra, es aprender a manejar la estructura del álgebra, en particular que la representación simbólica de relaciones numéricas tiene que ver con la traducción de situaciones problemáticas a ecuaciones, o sea, a la resolución de problemas. Las ecuaciones son representaciones estructurales que requieren una perspectiva no aritmética tanto en el uso del signo (=) como en la naturaleza de las operaciones que se requieren.

Sin embargo se ha visto históricamente que las representaciones procedimentales perduraron por varios siglos. Se ha señalado que en el momento en que se desarrolló un lenguaje simbólico especializado, desapareció una cantidad considerable de significado subyacente. El álgebra retórica y lacónica era relativamente fáciles de seguir y de comprender, hasta el siglo XVI, cuando la notación comenzó a ser demasiado compleja para entenderse en palabras; el paso a un sistema simbólico eliminó los significados de los temas individuales e incluso de las operaciones que actuaban sobre ellos. El lenguaje simbólico es poderoso porque elimina muchas de las distinciones que lo vernáculo preserva, y expande en gran medida su aplicabilidad. Sin embargo (Wheeler, 1989, mencionado por C. Kieran), recalca que el lenguaje simbólico es, desde el punto de vista semántico, extremadamente débil e introduce la dificultad para el estudiante de que al servir para varios contextos, el lenguaje parece no pertenecer a ninguno.

Puntualizando algunos aspectos respecto del aprendizaje del álgebra escolar, existen dos temas importantes, el primero; la "accesibilidad" de las interpretaciones estructurales. Se puede mencionar la facilidad de producir opiniones verbales, programas de cómputo para calcular soluciones y la preferencia a la justificación numérica en las relaciones de generalización versus la mayor dificultad para utilizar ecuaciones para representar las mismas relaciones. El segundo, la comprensión de la estructura algebraica. Se tiene que la mayoría de los alumnos no adquieren un sentido real de los aspectos estructurales del álgebra, los resultados de la investigación sugiere que algunos alumnos nunca logran desarrollar la parte estructural del ciclo procedimiento-estructura.

Sin embargo, hay signos esperanzadores, algunos estudios con componentes de enseñanza, han mostrado que los alumnos pueden desarrollar aspectos estructurales de ciertos aspectos del álgebra si se les hace vivir experiencias que incluyan, por ejemplo, las propiedades de campo tanto en ambiente aritméticos como algebraicos, como una introducción a las ecuaciones que contienen expresiones algebraicas en ambos lados, la traducción de problemas de palabras en ecuaciones, la manipulación de parámetros de ecuaciones funcionales con ayuda de las gráficas, etc.

La evidencia de estos estudios, sugieren que, primero, debe hacerse un gran esfuerzo en la instrucción dada en las clases, para crear una base sólida que facilite el desarrollo de las concepciones estructurales, dejando más tiempo con las concepciones procedimentales. Las investigaciones muestran que las concepciones procedimentales, de entrada y salida son más fácilmente entendibles y que los esfuerzos para fortalecer esta parte, pueden servir para hacer la actividad algebraica más entendible y más llena de sentido.

Debe notarse, sin embargo, que la adquisición de concepciones estructurales por medio de las cuales las expresiones, las ecuaciones y las funciones se conciben como objetos, no elimina la continua necesidad de utilizar las concepciones procedimentales. Ambos juegan en papel muy importante en esta construcción. El reto en el salón de clase es, no sólo trabajar en la construcción de la conexión en el sentido aritmética hacia álgebra, sino también mantener viva la conexión álgebra hacia la aritmética, es decir, desarrollar la habilidad de ir y venir entre los dos niveles de concepción y de ver las ventajas de ser capaz de escoger una perspectiva u otra, dependiendo del problema que se tenga que resolver.

Los puntos que se tomarán en cuenta para el desarrollo del presente trabajo serán:

El desarrollo histórico del álgebra es un referente para que el profesor desarrolle actividades en el aula de clase que faciliten la construcción de los conceptos fundamentales (que en el presente caso se enfatiza en el concepto de función), evitando saltarse pasos que produzcan abismos insalvables en la construcción de su conocimiento.

Hay que tomar en cuenta el camino que siguió la construcción del álgebra, en el sentido del paso de lo procedimental a lo estructural, de la aritmética al álgebra, para que en una buena combinación de estos dos procesos (de ida y de vuelta), y aunado a un aprendizaje significativo (que en este caso será la resolución de problemas económicos), se puedan, dialécticamente generar actividades que den acceso a la concepción estructural, pero con basamentos sólidos de la realidad, de la operatividad, y de los significados algebraicos para acceder a los objetos matemáticos.

III MARCO METODOLOGÍCO

El avance en la comprensión e intervención en educación, está produciendo nuevas teorías, valores y metodologías que contribuyen a la reconstrucción de los fenómenos objeto de estudio. Existe una preocupación por la investigación educativa y, sobre todo por la forma de llevarla a cabo.

Antes de los años ochenta, el interés por la utilización de las metodologías etnográficas y diseños cualitativos fue prácticamente nulo. Es en los ochenta cuando se multiplica su interés en el ámbito educativo, sociológico y antropológico. El comienzo se centró, en el campo teórico más que en el práctico, y aún así con múltiples problemas (falta de foros de discusión, localización de información, investigaciones, etc.).

Sin embargo, uno de los mayores obstáculos para la incorporación de estas nuevas alternativas teóricas-metodológicas viene de la tradición positivista (conjunto de teorías, diseños de investigación y recursos instrumentales), la falta de reflexión epistemológica en el ámbito de las ciencias sociales, que contribuyó a la aceptación acrítica de los paradigmas y métodos de investigación que servían para el descubrimiento de leyes y regularidades en las ciencias naturales, en las que la axiomática de un campo del conocimiento se traslapa, se impone rígidamente, unidireccionalmente a las ciencias sociales. Se aprueba como incuestionable que la forma y clase de las relaciones causales que se encuentran en la naturaleza, objeto de estudio de las ciencias naturales como la química, la física, la biología, son esencialmente similares a las que rigen en el mundo de las ciencias sociales. La predicción y regularidad causal, más o menos lineal en las ciencias naturales, no es tan nítida en las ciencias sociales, en los comportamientos de los seres humanos, aunque hay muchas teorías e investigaciones que siguen intentándolo. En ciencias sociales y en educación en específico, un grupo de teorías influidas por este reduccionismo teórico-metodológico decidió y legitimó cual era el "conocimiento verdadero"; a tal conjunto de teorías se les conoce con el nombre de conductismo. Su preocupación por la búsqueda de leyes universales de la conducta humana, la atención exclusiva a los comportamientos observables y cuantificables, lo llevó a prescindir de todo aquello que no fuera en una sola dirección. El método conductista y cuantitativo supone una aceptación de los supuestos mecanicistas, estáticos y ahistóricos del paradigma positivista. Este permite pensar en el estudio del comportamiento del hombre objetivamente, mediante análisis empíricos o diseños experimentales, aislando el contexto socio-cultural en el que se produce. El aspecto educativo llega a ser el filtro de la realidad social, la realidad es tratada de la misma forma mecanicista que en el mundo natural.

Las respuestas alternativas a esta concepción de la realidad y de las ciencias sociales vienen de la teoría crítica social, que argumenta la falta de análisis y reflexión sobre las circunstancias sociales en las que se producen y obtienen los datos. Este paradigma no acepta la separación de los individuos del contexto. Un vocablo que define a esta nueva tradición es "la interpretación".

Su objetivo es indagar cómo los distintos actores humanos construyen y reconstruyen la realidad social mediante la interacción con los restantes miembros de su comunidad, interpretando los porqués y para qués de su entorno social y físico, con sus respectivos significados.

Las investigaciones etnográficas son una de las alternativas que recogen la nueva filosofía interpretativa y reconstruyen la realidad.

En el ámbito escolar la etnografía trata de describir, interpretar para comprender y luego intervenir más adecuadamente lo que pasa en el aula. Los diseños metodológicos de carácter cualitativo pueden recoger información que de otra forma no se podría obtener.

Los instrumentos tradicionales que utilizan los diseños experimentales, (tests, escalas de interacción, experimentos de laboratorio, etc), tratan de eliminar las "subjetividades" ya que no son medibles cuantitativamente. Todo lo que no sea susceptible de medición, los números se encargan de su abstracción (ideologías, diversidad, irregularidad, valores).

Los propósitos fundamentales de la investigación etnográfica en educación son básicamente dos:

a) Analizar la realidad para comprenderla mejor e intervenir de una forma más reflexiva y eficaz.

b) El mejoramiento y perfeccionamiento del profesor.

La etnografía educativa, en la medida que permite la reconstrucción de los contextos culturales, actividades y creencias de los participantes, nos facilita el "ponernos en el pellejo del otro".

La investigación educativa, como investigación aplicada, tiene como fin apoyar los procesos de reflexión y crítica para mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no debe sujetarse a los problemas teóricos, sino prácticos, donde están las actividades educativas. Plantearse en investigación educativa, problemas de carácter universal, sin tener en cuenta los contextos delimitados, nunca ha funcionado. Este reafirma la imposibilidad de "recetas técnicas" para ser aplicadas a cualquier situación.

La praxis no debe ser un comportamiento irreflexivo, debe justificarse por el grado de adecuación con algún marco conceptual, así, la investigación educativa se convierte en una de las mejores vías para acceder a los porqués que guían las acciones de las prácticas. La mejora de la calidad educativa debe entenderse teórico-práctico, hacer consciente a los profesores de las teorías que guían su práctica, para no reproducir un sistema social, cultural, económico y político, el cual se trata de transformar.

Se seleccionó el método etnográfico para la elaboración del presente trabajo, ya que se consideró el más adecuado para los fines que se persiguen.

Es el método que permitió llevar a cabo la concepción teórica-constructivista al salón de clase, e interpretar lo que sucedía en ella de la manera más natural.

Se presenta un encuadre de la investigación, en los programas de estudio de la facultad de economía.

El programa de estudios de matemáticas, está compuesto por; Introducción a los métodos cuantitativos, Matemáticas 1, Matemáticas 2, Estadística e Introducción a la econometría, con sus respectivos talleres.

El tema de la presente tesis, "Didáctica constructivista de las matemáticas en el aprendizaje de la función lineal en contextos económicos", es fruto de la experiencia como docente que desarrollo en la facultad de economía, en el primer semestre, en la materia de introducción a los métodos cuantitativos.

En el programa actual se contempla el estudio de la ecuación de la línea recta en forma general, la ecuación pendiente ordenada al origen, condiciones de paralelismo y perpendicularidad y problemas. El tiempo que se le dedica al aprendizaje de este contenido (según la carta descriptiva), es de dos de treinta y cuatro clases. Cada clase tiene una duración de dos horas, o sea, se le dedican cuatro horas en total durante el curso. (Ver apéndice 1).

Sin embargo existe una diferencia sustancial en el énfasis del programa de la facultad y el tema de la tesis; en tanto que el primero ve la ecuación de la línea recta y ejercicios (donde no está especificado si los ejercicios son de aplicación económica o matemática), en el segundo se ve la función lineal aplicada a la resolución de problemas económicos. Esto indica que, por un lado, la referencia más importante de la enseñanza es lo matemático, y por el otro, lo más importante es lo económico, que es lo que da dirección al aprendizaje del alumno, en cuanto al contenido matemático.

El grupo donde se imparte la materia de Introducción a los Métodos Cuantitativos, pertenece al sistema escolarizado, y constó de 20 a 25 alumnos, de los cuales se seleccionó a cuatro de ellos para realizar la investigación y se les identifica en este trabajo como, A1, A2, A3 y A4. Los tres primeros, fueron alumnos regulares de primer semestre, y A4 fue del octavo semestre. La selección de los integrantes se llevó a cabo por invitación.

De las 32 sesiones en las que se imparte regularmente la materia, se ocuparon 15 para realizar la investigación. Los contenidos que se utilizaron son; el examen diagnóstico, el artículo de didáctica de las matemáticas (ver bibliografía), la definición de función lineal con sus respectivos elementos, las representaciones algebraica y gráfica, los conceptos de ingreso y costo empresariales, y ocho problemas económicos sobre costos, ingresos y utilidades.

Durante las sesiones, los cuatro alumnos trabajaron dentro del aula, y las conversaciones fueron audio grabadas.

De las actividades que desarrollaron no todas se grabaron, solamente las conversaciones entre los cuatro integrantes. La clase abierta fue videograbada.

1 Indicadores

Partiendo de los conceptos que dieron rumbo a las preguntas de investigación, (que surgieron tanto de las teorías de aprendizaje como de la didáctica de las matemáticas), se diseñaron las actividades que se llevaron a cabo, y se explica como funcionan los conceptos en las actividades. De acuerdo con estas consideraciones se eligieron las actividades (o indicadores) a realizar, que se presentan a continuación;

- **Examen diagnóstico**

Éste permitió valorar y explorar los conocimientos, experiencias y habilidades previos con que contaban los alumnos, que sirvió como punto de partida.

Como dice Piaget ... la acomodación es un proceso cognitivo mediante el cual, la nueva información se va encontrando con las estructuras cognitivas anteriores, generando reacciones perturbadoras y, que gracias a un proceso equilibrador y a la organización que los esquemas previos pueden tener, (a éste proceso se le denomina adaptación biológica), la nueva información se va adecuando a la anterior.

- **Estudio del artículo**

  "Didáctica constructivista de las matemáticas: una introducción." (ver apéndice II). La lectura de este artículo tuvo como finalidad la sensibilización por parte del alumno, del nuevo rol (activo), que desempeñaría en el contrato didáctico o pedagógico durante el curso, y el rol del profesor como guía y diseñador de las situaciones didácticas, para facilitar el proceso de construcción del conocimiento.

- **Investigación de los conceptos; función, elementos de una función, costo e ingreso**

La investigación es una actividad que propicia el trabajo independiente, (rol más participativo) y en este caso, se enfoca al concepto algebraico de función, y a los conceptos económicos de costo e ingreso.

Las actividades a realizar obedecen a la concepción constructivista del aprendizaje escolar que se sustenta en la idea de que la finalidad de la educación que se imparte en las instituciones educativas, es promover los procesos de crecimiento integral del alumno, en el marco de la cultura del grupo al que pertenece. Estos aprendizajes no se producirán de manera satisfactoria a no ser que se suministre una ayuda específica mediante la participación del alumno en actividades intencionales, planificadas y sistemáticas, que logren propiciar en éste una actividad mental constructiva (Coll, 1988).

- **Actividades grupales:**

Actividades en parejas, de cuatro alumnos, de la mitad del grupo, plenarias, actividades con otros grupos, y una clase abierta. Actividades proclives a la modificación de las leyes del contrato didáctico, mediante el cambio de roles, traspasando parte de la responsabilidad del aprendizaje al alumno, y el rol del profesor como guía para facilitar la construcción del conocimiento. Las actividades diseñadas son:

° Exposiciones en parejas expuestas en rotafolios con gráficas, a otros grupos de matemáticas de la facultad y algunos maestros. Estas actividades tienen el propósito de comunicar vía sus rotafolios y lenguaje, mensajes de corte económico-matemático, que les permitirá desarrollarse como supuestos consultores económicos, frente a supuestos empresarios (otros profesores y alumnos). La responsabilidad recae en los propios alumnos, mediante la argumentación de su trabajo.

° Resolución de problemas económicos grupales. Punto fundamental para el proceso de aprendizaje, ya que irá guiando la comprensión del concepto de función lineal. Como dice Ausubel, hay que partir del tema que motiva al sujeto, en el cuál está interesado, para que el proceso de construcción se lleve a cabo, y se traduzca en un aprendizaje significativo.

Se considera que el alumno en su papel activo que manipula, descubre o inventa, es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje, mediante una interrelación entre los aspectos internos y externos.

Según (Wertsch, 1991, mencionado por A. Sainz), el objetivo de un enfoque sociocultural derivado de las ideas de Vigotsky "es explicar cómo se ubica la acción humana en ámbitos culturales, históricos e institucionales". La unidad de análisis de esta teoría es la acción humana mediada por herramientas como el lenguaje, de ahí la importancia que otorga al análisis del discurso. Desde esta postura, "son las tradiciones culturales y las prácticas sociales las que regulan, transforman y dan expresión al psiquismo humano, que se caracteriza más por la divergencia étnica o cultural, que por la unicidad de lo psicológico" (Díaz-Barriga, 2002).

- **Actividades del profesor:**

  * Diseño de las actividades mencionadas.

  * Intervenciones que canalicen la construcción individual o grupal y su desarrollo, en las sesiones. Aquí el concepto de desarrollo es entendido como los cambios cualitativos (saltos dialécticos), diferentes a los cambios cuantitativo-acumulativos. En tal sentido, el potencial de aprendizaje de los alumnos puede valorarse a través de la denominada zona de desarrollo próximo (ZDP), concepto muy importante para ubicar el papel del docente y la naturaleza interpersonal del aprendizaje. La ZDP posee un límite inferior dado por el nivel de ejecución que logra el alumno trabajando de forma independiente o sin ayuda, mientras que existe un límite superior, al que el alumno puede acceder con la ayuda de un docente capacitado. Vigotsky resalta en su obra, el papel del docente en la construcción del conocimiento por parte del alumno. "De esta manera, en la formación de un docente se requiere habilitarlo en el manejo de una serie de estrategias (de aprendizaje, de instrucción, motivacionales, de manejo de grupo etc.) flexibles y adaptables a las diferencias de sus alumnos y al contexto de su clase, de tal forma que pueda inducir (a través de ejercicios, demostraciones, pistas para pensar, retroalimentación etc.) la citada

transferencia de responsabilidad (parte del contrato didáctico), hasta lograr el límite superior de ejecución que se busca" (Díaz, 2002).

La función del docente es engarzar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado. La función del profesor no se limita a crear condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad constructiva, sino que debe guiarlas explícita y deliberadamente.

A manera de coda, podríamos comentar que es conveniente resaltar la importancia de encuadrar las actividades desarrolladas en clase, dentro de la corriente constructivista y la didáctica de las matemáticas, ya que constituyen, los anteojos a través de los cuales se analizará la presente investigación, dando sentido y dirección al trabajo desarrollado.

Obtenidas las grabaciones, se transcribieron y se analizaron los diálogos para dar respuesta a las preguntas de investigación.

IV INVESTIGACIÓN EN EL AULA

En la primera clase se realizó un examen diagnóstico, con la finalidad de explorar los conocimientos previos de los alumnos, acerca de las preguntas de investigación que dieron rumbo a la presente tesis. Las preguntas se refirieron al concepto de función lineal de dos variables, con sus respectivos elementos, (a saber; variable dependiente, variable independiente, ordenada al origen y pendiente) y, también, de las representaciones algebraica y gráfica de la función lineal, en el contexto de resolución de problemas económicos.

El examen diagnóstico lo presentaron 18 alumnos.

1 Examen diagnóstico

Las preguntas del examen diagnóstico fueron las siguientes:

1.- ¿Qué entiendes por función lineal?

Ocho no contestaron y los demás emitieron respuestas muy vagas como, es la forma de representar un problema, es una expresión matemática que podemos graficar, una sucesión de números, *mostrando una pobre conceptualización sobre función lineal.*

2.- Expresar una función lineal y graficarla.

Esta pregunta, no la contestó un número similar que la anterior, sin embargo hubo 7 alumnos que trazaron los dos ejes cartesianos con una línea recta, y solo dos expresaron algebraicamente la función lineal, así, *se podría decir que hay una noción, pobre pero la hay, de una línea recta en términos gráficos, y más pobre en la expresión algebraica, como más adelante se verá en las preguntas 5 y 6.*

3.- ¿Cuáles son los elementos de una función lineal?

Solo 5 alumnos mencionaron palabras como, incógnita, constante, ordenada al origen, variable y variable independiente. *Lo cual vuelve a mostrar la baja conceptualización en sus conocimientos previos, respecto a los elementos de la función lineal.*

4.- Un fabricante de gorras tiene un costo fijo de \$250,000 un costo unitario de \$40 y las vende a un precio de \$70. Comentar y expresar en funciones lineales económicas.

Solamente un alumno trazó una gráfica con las rectas cruzadas sin la expresión algebraica correcta. Los demás no contestaron. *Prácticamente nulo el contacto con este tipo de problemas.*

5.- Se muestran cuatro gráficas con una línea recta, señalando con número la ordenada al origen, y se les pide que le den una representación algebraica.

De 72 posibilidades solo contestaron correctamente 4.

6.- Se les presentan seis funciones algebraicas lineales para que las grafiquen.

De 108 posibilidades, 3 alumnos contestaron 15 correctas.

En las últimas dos preguntas, las respuestas casi nulas, mostraron como en la pregunta dos, una idea mayor en la graficación, que en la expresión algebraica de una gráfica.

Se podría concluir que existe una insuficiente conceptualización de función, función lineal, elementos de una función lineal, su expresión algebraica y, en una medida prácticamente nula, su aplicación a la resolución de problemas económicos, mostrando un aprendizaje que podríamos considerar sin sentido de aplicación a la resolución de problemas. Sin embargo cuando graficaron una función algebraica lineal, *representaron las coordenadas y una línea recta sin más, un 10%, lo cual nos podría sugerir, que existe una noción de lo que es una línea recta como un icono.*

> ... los estudiantes de bachillerato parecen tener, en general, algún conocimiento de los conceptos básicos de la geometría y el álgebra, sin embargo, los resultados de esta evaluación indican, como lo han mostrado otros resultados, que frecuentemente los estudiantes no son capaces de aplicar este conocimiento a situaciones de resolución de problemas y que tampoco parecen comprender muchas de las estructuras que están detrás de estos concèptos y habilidades ... resultados de la evaluación de estudiantes norteamericanos hecha por el proyecto nacional de progreso en educación ... (Brown, mencionado por Kieran, C,1988).

La siguiente actividad consistió en pedirles que estudiaran el artículo: didáctica de las matemáticas: una introducción. (Ver apéndice 2).

2 Discusión del texto "Didáctica constructivista y matemáticas: una introducción

El estudio del artículo pretende sensibilizar al estudiante acerca del método constructivista de aprendizaje en las matemáticas, el nuevo papel al que se va a enfrentar, o sea, a una participación activa en la construcción de su conocimiento, al papel del profesor como guía en el proceso de construcción del aprendizaje del alumno y, cómo se desarrollarán las situaciones didácticas en el salón de clase.

Se propone como alternativa de enseñanza el modelo piagetiano, el cual consiste en que el sujeto cognitivo y activo, al entrar en relación con el objeto de estudio o de conocimiento, contrasta la información nueva, con la que posee, dando pie a un cambio en la información inicial, propiciando un desarrollo o ampliación de sus estructuras cognitivas, o profundización en la construcción de su conocimiento. Se enfatiza que la comprensión del proceso educativo tiene como finalidad, mejorar la práctica docente.

Otro punto a destacar es el objeto de estudio de la didáctica de la matemática, que es el desarrollo de las situaciones didácticas que permiten la construcción del conocimiento matemático por parte del alumno. Trata de proporcionar al profesor un conocimiento sobre el funcionamiento del salón de clase y de las situaciones que le permiten un mayor control sobre algunas variables, con el fin de transformar su práctica cotidiana, diseñar, probar, analizar e intervenir en las situaciones didácticas del conocimiento matemático, logrando una enseñanza cualitativamente diferente donde los conceptos se construyen, no se memorizan y se pueden volver funcionales, es decir, utilizarlos en la vida cotidiana para la resolución de problemas. Se destaca el papel del profesor como guía de la construcción del conocimiento matemático del alumno.

Ya en la sesión, se les preguntó ¿cuál es el título del artículo, y de los subtemas?. En esa ocasión ningún alumno, de cerca de 23, lo respondió, y prácticamente no hablaron. Se discutió en parejas la lectura. En este contexto, los alumnos empezaron a discutir un poco más algunos conceptos, como el papel activo del estudiante, el concepto de "estudiar" los hizo referirse al papel que tenían en el pasado, que era el de memorizar, *mostrando que esta conexión con sus experiencias previas fue un pequeño detonante para entrar con un poco más de confianza al tema, ya que es un aspecto vivido, experimentado.*

Se dejó otra vez el mismo artículo de tarea.

En la sesión siguiente, hubo una plenaria dirigida por el profesor, resaltando los puntos importantes de cada subtema, y hubo una discusión más abierta y con mayor participación, no sin dejar de respirar ese ambiente de resistencia dada por la experiencia pasada. Aquí la gama de temas que se trataron fue un poco más amplio. Se hizo referencia al papel que han tenido sus profesores en el pasado, el cual decía como se va a llevar a acabo una sesión y el curso en sí, resaltando que ahora el profesor ayudará a que el proceso de reflexión individual y grupal se de más profundamente, propiciando una conciencia individual dirigida a un compromiso individual de su proceso de aprendizaje.

Para la siguiente sesión se les dejó hacer una presentación grupal del artículo en *Power Point.*

En esta sesión se trataron los conceptos anteriores pero con un poco más de participación y apertura ya que, en cada exposición se empezó a platicar de lo que cada uno había internalizado o tenía como referentes experienciales, comenzando a romper el hielo de la formalidad, en donde la mayoría comentaba que es lo que significaba el papel activo del estudiante, referido a que ellos tenían que trabajar y no estar como simples espectadores, como en el pasado, escuchando al maestro sin necesariamente poniéndole atención.

El profesor hizo una recapitulación a través de preguntas, sobre el papel activo del estudiante, el papel facilitador del proceso de aprendizaje individual por parte del profesor, como se generan las situaciones didácticas que propicien la independencia en el proceso de construcción del aprendizaje, la retroalimentación, y muy importante, la referencia de su aprendizaje a la resolución de problemas de la carrera de economía que ellos han elegido.

Para finalizar la sesión, se tocó otro punto relevante en el que la participación disminuyó, que fue el tratamiento de los conceptos de la adquisición de una seguridad individual, confianza, y autoevaluación, en la medida en que el aprendizaje va siendo más responsable, queriendo enfatizar la independencia en su forma de actuar, no solo con respecto a su aprendizaje sino también con las otras actividades que desarrollan en su vida cotidiana.

Se podría conjeturar que, si bien es cierto fueron varias sesiones dedicadas al estudio y reflexión del artículo, fue una vivencia que les hizo experimentar la posibilidad de una alternativa de aprendizaje de las matemáticas, mediante el razonamiento y la participación, sin dejar que se abatiera el recelo por tocar temas que no son "estrictamente matemáticos". Por otro lado, sirvió a que se empezara a romper el hielo de la relación tradicional entre los alumnos y el profesor.

3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1 Concepto de función, ingreso, costo y problema de los robots

Para la siguiente sesión se les pidió investigar cinco definiciones de función, reflexionarlas y un día antes de la clase redactar una definición propia, haciendo énfasis, que con sus propias palabras expresaran el fruto de la reflexión. Se les dejó también, investigar los conceptos de ingreso y costo, desde el punto de vista empresarial, incluyendo sus respectivas fórmulas. Así como el siguiente problema:

> Un fabricante quiere introducir la tecnología robótica en uno de sus procesos de producción. El proceso de producción creará un "ambiente hostil" para los trabajadores. En concreto, requieren exponerse a temperaturas muy altas y emanaciones potencialmente tóxicas. Se han identificado dos robots que parecen tener la capacidad para ejecutar las funciones del proceso de producción. Al parecer no hay importantes diferencias en la velocidad a que ambos trabajan. Un robot cuesta $180,000 y tiene costos de mantenimiento de $100 por hora de operación y, el segundo modelo cuesta $250,000 con costos de mantenimiento de $80 por hora de operación.

La instrucción fue analizar y resolver el problema.

En la sesión siguiente empezaron las actividades grupales con la discusión del concepto de función. Cabe aclarar que ninguno de los alumnos trajo una definición propia, así que comenzaron a leer algunas de las definiciones de función que tenían escritas, y dirigieron su atención a la definición de variable dependiente e independiente;

A3: Que la aplicación entre dos conjuntos que se asigna a cada miembro del primero, un miembro del segundo y se escribe Y=f(X) siendo la variable dependiente Y, y X la independiente.

A1: Las cantidades que intervienen en una cuestión matemática son constantes, cuando tienen un valor fijo y determinado y, son variables cuando toman diversos valores, por ejemplo, si un metro de tela cuesta 2 pesos, el costo de una pieza de tela dependerá del número de metros que tenga la pieza, si la pieza tiene 5 mts el costo de una pieza será de 10 pesos, si tiene 8 mts el costo será de 16, aquí, el costo de un metro que siempre es el mismo 2, es una constante y el número de metros de la pieza y el costo de la pieza que toman diversos valores son variables, ¿no? entonces de que depende en este caso, de que el costo de la pieza en número de metros es la variable dependiente ¿no?, el costo de la pieza depende del número de metros que tenga, entonces por eso es la variable dependiente.

A1 tiene muy claro los conceptos de variable dependiente e independiente, ya que los refirió a un problema concreto de la vida cotidiana, que todos entendieron.

A2: Pongamos función es una relación en donde, una relación entre una variable independiente y una variable dependiente, en la cual la variable independiente es una constante, ¿si? y la variable dependiente, depende de la cantidad o magnitud o el valor, que tome con respecto al valor de la independiente.

A1: Depende del valor que se le dé a la variable independiente.

A3: La variable dependiente depende del valor que se le asigne a la independiente, es que nos estamos confundiendo con lo de la constante y variable.

A1: O sea, que obviamente X es la variable también o sea que no es constante.

Refiriéndose al ejemplo de la pieza de tela.

A1: Donde siempre va a costar 2 pesos el metro o sea, que es una constante y, el número de metros de la pieza y el costo de la pieza que toman diversos valores, son variables, entonces ¿cómo podríamos definir función?

A3: Es una relación de dos variables en la que una de ellas es variable independiente y la otra dependiente en la que la primera es constante y ...

A2 y A3 tienen la apreciación de que la variable independiente, es una variable y una constante a la vez, dado que en el ejemplo que están manejando de los metros de tela, la unidad cuesta 2 pesos (constante) y el costo total será la multiplicación de una constante ($2) por la cantidad de metros que se compren, que es variable independiente.

Los alumnos están viendo a la variable independiente como un elemento que tiene una constante y una variable, no han discriminado que se trata de una constante y una variable, por separado, como lo comentó A1 en su primera intervención.

Aquí se entiende que las interacciones sociales son determinantes hasta cierto sentido del desarrollo del proceso cognitivo individual, ya que cada alumno las experimenta de diversa manera y, no como el constructivismo radical que las considera como un catalizador de dicho proceso. (De Olaizola, I., 2002)

Este proceso es muy importante ya que produce dentro de la negociación de significados grupal, la estimulación al desarrollo de las heurísticas individuales y grupales alternadamente, propiciando la construcción conceptual.

Empiezan a relacionar el dominio y el codominio con X y Y.

A1: Es una relación en la que cada elemento del dominio le corresponde una y sólo una imagen.

A2: En donde Y es función de X.

Entran en otra exploración manteniendo el doble significado de variable independiente, como constante y variable. A1, vuelve a tratar de poner en claro lo que ella entiende por variable y constante.

A1: Es una relación donde a cada elemento del dominio le corresponde una y solo una imagen de ahí sacamos que, una relación en la que ningún miembro del dominio tiene más de un miembro del rango asociado con el ... es una relación del dominio y del codominio en el que cada ... en el que el dominio sería la variable X y el codominio sería la variable Y.

A1: Es una relación numérica, es que no, se supone que no tiene que ser numérica siempre, o sea que puede haber una relación, no sé, que puedas poner los signos del zodiaco por decir, con x número, entonces no tiene que ser numérica, puede ser de cualquier cosa.

Está mostrando un entendimiento más profundo sobre el concepto de relación de dependencia, que al ser refutada por A3:

A3: Es que yo digo que tiene que ser una relación forzosamente numérica.

Se pierde esa reflexión por el afán de hacer una definición conjunta de función con la información que solamente tienen. Esto muestra la necesidad del alumno de que hay que contestar lo más rápido posible, como al estar frente a un problema en su educación anterior siendo la respuesta, y no la comprensión y reflexión del mismo, lo que importara.

Explorando acerca de la correspondencia entre X o variable independiente y, Y con el codominio.

Se presenta de nuevo la confusión de,

A2: También en la definición iria eso lo de, Y es función de X, le corresponden uno o varios valores determinados de la variable Y.

La confusión en la exploración es recurrente, y A1, le responde;

A1: Habías dicho que no se podía repetir,

y lo acepta A2, volviendo a parafrasear su punto de vista respecto a que a la variable independiente solamente le corresponde solo una Y.

Se ve reforzado el papel de autoridad moral que va adquiriendo A1.

Se presentó al maestro una definición grupal, leyéndola,

A1: Se lo leo si quiere, es una relación numérica de dos variables, una dependiente y otra independiente donde X es el dominio y Y el codominio. Y es función de X cuando la variable X le corresponde uno o varios valores determinados de la variable Y en donde ningún elemento del dominio se puede repetir.

Están diciendo que a cada X le puede corresponde uno o varios valores de Y, cosa que A1 había insistido que a un X le correspondería un solo valor de Y.

La reflexión del maestro fue que definieran que cuantos valores de Y le corresponden a una X. Se ponen a platicar sobre la observación cayendo en lo mismo, A1 hace una reflexión contextual:

A1: El área de un triángulo depende de los valores de su base y altura, o sea, es en una función de dos variables independientes.

Esta reflexión dio como un respiro a la argumentación, y le preguntan, A2 y A3 ¿una parábola acostada es función? A1 respondió titubeando,

A1: Que yo sepa esto no es una función, te digo por ese criterio que me quedó muy grabado, que se llama criterio de la recta vertical que dice que si haces una recta vertical y toca en más de un punto, no es una función.

Expresan otra definición de función.

Es una relación numérica de dos variables, una dependiente y otra independiente donde X es el dominio y Y, el codomonio. Y es función de X cuando la variable X le corresponde uno y solo un valor determinado de la variable Y, en donde ningún elemento del dominio se puede repetir.

A los alumnos les costó trabajo expresar o llegar a ésta definición, mostrando que el consenso al que llegaron no estuvo claro para todos, debido a que la idea de que una variable independiente es constante y variable, no se explicitó de una manera palmaria por parte de los cuatro, debido a esto se consideró que no fue buena idea empezar por una definición formal para tratar de aplicarla posteriormente a la resolución de problemas, la recomendación sería resolver problemas los cuales impliquen a las funciones y, partiendo de las propuestas que den los alumnos, guiar al del concepto formal de función. Esto se puede reforzar, con le hecho de que no trajeron una definición propia de función.

Otra observación, fue la idea de A1, que la relación no tiene que ser necesariamente numérica, la cuál se perdió por llegar solamente a la definición grupal de función, sin tomar en cuenta la posibilidad de enriquecerla con las ideas que van surgiendo en el camino.

Se concluye que en este primer acercamiento teórico de función, se mencionaron los conceptos de variable dependiente e independiente, y que se entendió "mejor" con el ejemplo de las telas que con las definiciones formales de función. Resaltando que no se refirieron al problema de los robots que se les había dejado.

3.2 Sesión grupal de la definición de costo.

Se puede decir que, de las ideas sobre costo que investigaron tienen coincidencias como:

A3: Para el productor el término costo se llamará también costo de producción, es decir, que cantidad se invertirá para producir cierto bien o servicio.

A1: El costo representa lo que hay que entregar a cambio para obtener los diversos insumos que se necesitan para su producción aquellos en que se incurren para producir una mercancía.

A2: El costo es el gasto en dinero para obtener algo.

Se mencionaron otros tipos de costo, como costo de oportunidad, costo marginal, coste medio, que realmente no se mencionaron de manera relevante en la sesión grupal.

A1: La fórmula de costo total, que es costo final, el costo fijo y costo variable entonces, realmente en el problema no sabía yo bien cual era el costo fijo y entonces puse que el costo de mantenimiento serían las 8 hr que supongo que trabaja el robot en un día, y el costo fijo lo que cuesta el robot uno $180,000.

A1 relaciona su definición de costos con el problema de los robots, con el fin de darle sentido a la definición de costo, se pudo ver que le resulta comprender mejor con la aplicación, mostrando un camino a seguir, como en la definición de las variables dependiente e independiente que utilizó el ejemplo del costo de la tela. Tomando por segunda ocasión la dirección de las acciones.

A2: Si pues casi es lo mismo, yo también lo que hice fue eso como el costo total es la suma de los costos, es que no sé, mira encontré, precio uno más por el, es que este ... no se que sea un *input*, o sea como, siento que es como materia prima o algo así, encontré que bueno el precio por la cantidad que se necesita de esa materia, más el precio dos por la cantidad por los *inputs* , bueno lo que hice en el problema es parecido a lo tuyo, un determinado tiempo de horas de trabajo por mi gasto de mantenimiento fue lo que saqué como costo total, de mis dos tipos de robots.

A1: A ver deja leo, costos fijos son los costos, son aquellos que no cambian aunque cambie el volumen de la producción, el costo fijo de una empresa, es la suma de los costos de factores fijos, terrenos, edificios, maquinaria, director general, etc, el costo variable de la empresa es la suma de los costos de los factores variables como las materias primas y el trabajo.

A2: Yo lo que hice fue sumar todo el rango de horas para ver cuanto era el costo de mantenimiento de 60h y lo que hice fue sumar todo.

A1: Pero como lo sumaste, que hiciste.

A1 en su papel prominente dentro de las pláticas, trata de entender lo que hicieron sus compañeros, partiendo de las ideas que ha construido.

A2: O sea lo sustituí, yo lo hice nada más con 60 hr, lo que hice fue sumar el precio del costo, me dan 21 mil más el precio o sea 180 mil más 21 mil me da el costo de 60 hr que me da 201 mil y así con el segundo robot que me da 266, 800

A1 también corrige.

A1: Si son 60 hr serían 6 mil.

reconociendo A2 que había tenido un error al sumar

A1: Pues yo así lo hice, no se si esté bien o mal, también hice mi gráfica y pues ya se ve cómo el valor del primer robot ...

A1 ya está visualizando el problema desde la representación gráfica, siendo un paso hacia una comprensión más profunda del problema.

A1: Y del robot uno va a seguir aumentando, mientras el otro va a ir disminuyendo.

A1 percibe que antes del punto en donde los costos de los dos robots son iguales, el robot uno es menos caro y después del punto es más caro, no es que disminuya el costo del robot dos, sino que desaparece el efecto de los *costos fijos y se muestra que el costo de mantenimiento del robot uno es mayor que el costo del robot dos. Continúa A1,*

A1: El costo de mantenimiento del primer robot es más caro que el segundo.

Lo que están contrastando es, por una lado, que A2 tiene una visión no tan amplia del problema, queriendo sumar los costos "variables que el supuso como 60hr por semana" (que se convierten en constante), por 100 que cuesta la hr de mantenimiento, llegando a un costo único de $201,000 para el robot uno, y de la misma manera para el robot dos, dándole un costo de $266,800, y por el otro lado, A1 presenta sus definiciones concibiendo que son dos alternativas, con sus respectivas expresiones, con comportamientos diferentes, y susceptibles de comparación.

El Profesor les preguntó que si podían hacer un planteamiento que abarcara todas las posibilidades en vez de presentar la propuesta de los costos por día. Les mencionó que el problema está expresado en un lenguaje retórico, o sea escrito, y hay que traducirlo a un lenguaje algebraico, que es mediante las funciones.

Una crítica a esta visión del profesor, es que se puede entender como una traslación de lenguajes, siendo la modelación más que eso, es entender el problema y plantearlo según sus requerimientos. Lo importante de enfatizar es el camino a seguir, mientras que uno dice por donde ir, el otro es descubrirlo, es construirlo, de ahí que, se generen actitudes de dependencia mediante el camino a seguir (en el primer caso), o caminos de exploración que generen el desarrollo de sus heurísticas (en el segundo caso, que es el de modelar).

A1: Pero ¿quiere que integremos costo con lo de función?

Esta pregunta se la hacen al profesor para que les diga si están bien o no, mostrando su necesidad de ser dirigidos.

Profesor: No es que yo quiera.

A1: Que nosotros lo hagamos más algebraico.

Continuando con la definición de costos

A3: El costo total lo pondríamos como f de X.

Profesor: Y que significa X

A1: Las horas.

A2: f de X, sería el costo total.

Profesor: Y la constante 80

A1: El costo de mantenimiento.

Se podría comentar que el hecho de utilizar el problema de los robots (contexto económico), como punto de partida para la definición de los costos, costos fijos, costos variables y costo total, les permitió llegar a acuerdos, como el de costo fijo (la constante), que lo identificaron con el costo de cada robot, f(x) el costo total como la variable dependiente, y X como la variable independiente, y llegar a consensos, que tuvieron aplicación al planteamiento del problema económico específico.

Profesor: Ok, eso es todo lo que tienen que hacer, o sea ir haciendo coincidencias entre el problema, el concepto de costo y el concepto de función, eso es lo que tienen que traer para la próxima clase.

Dirigiendo, que tienen que hacer.

3.3 Problema de los robots

En esta sesión comenzaron exponiendo los datos fundamentales del problema, indicando un acercamiento a tal, poniendo de relieve que el Robot uno (R1) cuesta $180,000 y el costo por hora de mantenimiento es de $100 y que el Robot dos (R2) cuesta $250,000 con un costo por hora de mantenimiento de 80$.

Haciendo las siguientes reflexiones, que si bien es cierto R1 cuesta menos que R2, el costo de mantenimiento de R2 es menor que R1.

A1: Me di cuenta, creo yo que si R1 costó más barato, pero su costo de mantenimiento es más alto y R2 costo más caro pero su costo de mantenimiento es menos bajo, va a llegar un punto en que R1, este va a costar más caro, que R2.

Aquí, A1 visualizó el problema de manera tal, que llegará un momento en el que se crucen las líneas y la inclinación revierta el costo de ambos robots.

A3: Si se hace un promedio de un mes los dos robots serían equivalentes, a un empresario le conviene el más barato.

A4: Yo supuse que ambos costos es el mismo.

Lo que hicieron A3 y A4 fue reunir los costos fijos de los dos robots y los costos unitarios, tratando de hacer el problema "más sencillo", mostrando un pensamiento más aritmético.

Se empezó a explorar sobre cuantas horas se trabajaba en el día, cuantos días al mes, cual era la vida útil de cada robot, cual era su capacidad de producción.

A1: Pero no podemos suponer, ¿que tal si R1 se descompone en la primera semana?, lo único que observé en éste problema es que en algún momento independientemente el tiempo, se iban a igualar y el costo de R1 iba a ser mayor que el costo de R2, es que en el problema no te preguntan, no te da a entender que es lo que quieres saber.

Sabe que se van a igualar los costos de los dos robots, y además sabe que es independientemente del tiempo.

A3: No, no te hace ninguna pregunta.

A1: A parte yo no sé si lo hice correctamente, lo hice como yo creí que era.

A4: No tenía preguntas, no se si es lo que quiere el profesor.

Los planteamientos que no tienen preguntas explícitas, que guíen el trabajo a realizar, causan conflictos internos (desequilibrios) ya que no saben que hacer, se sienten presionados a responder por uno mismo a través de la reflexión y la búsqueda de sus propias heurísticas, y con base en ellas discutir, pero es en estas situaciones en las que el alumno debe actuar de una manera que implique más reflexión por su parte para salir avante. Aquí se muestra como empieza a cambiar su rol.

A1: Se supone que eso es lo que quería el maestro, ¿no? que nosotros además de nuestro conocimiento previo, construyéramos nuestra primera hipótesis, ahora que ya nos estamos retroalimentando, nos damos cuenta de que lleguemos a la misma conclusión.

Se apreció que la lectura y discusión del artículo "didáctica de las matemáticas" donde se explicita su nuevo rol, y su práctica, están repercutiendo en su comportamiento.

A4: Si exacto, lo que sí, el problema no te pedía nada de cálculos.

A1: No te decía que onda, o sea, yo creo que era más que nada analizarlo, ¿no? dependiendo de nuestro punto de vista, de nuestro conocimiento que ya tenemos, analizar el enunciado, y que conclusión sacábamos de ahí.

Se mostró por un lado que estaban acomodando sus ideas nuevas del nuevo "rol del alumno" a su práctica, y por otro lado, grupalmente reconocieron que no había preguntas expresas en el problema que guiara su actuar, surge así una fase interesante y muy importante de esclarecer, cual es el sentido del problema, ¿qué podría ser lo importante?, ¿de qué se trata el problema?, utilizando el fruto de su estudio personal y la confrontación grupal de sus argumentos, de los cuales se muestran algunos.

A4: Entonces cada quién puede formular un problema y desde nuestro punto de vista.

Acepta que puede haber interpretaciones diferentes del mismo problema.

A1: Pero cuál es problema que te formulaste tú.

A4: Por ejemplo, calcular, calcular el costo, no yo supe que iba a calcular.

A1: O creo que no es qué robot producía más, porque en el enunciado te estaban diciendo que los dos producían.

A3: Bueno ¿pero que costo tenían?

A4: ¿que costo iban a tener los dos?

A1: O sea el problema que me hice fue ¿cual de los dos robots es más caro?, y ¿cual más barato?, no exactamente que producen ni nada sino simplemente el costo.

A4: Exacto, el costo del robot.

A1: Del robot, cuál es más costoso, aparentemente ¿no?

A2: ¿Cuál es el más costoso a largo plazo?

Agrega otra percepción, otro elemento, el largo plazo.

A1: Y qué concluimos, concluimos lo mismo.

A4: El cálculo de costos.

A1: ¿O no sé, si concluimos lo mismo?, o ¿no?

A2: Que el costo iba a ser igual o el segundo era el que iba ...

A1: A igualar.

A2: Si se iban a igualar.

A1: Y después el primer robot iba a superar el costo, pues ahí está ya.

A3: Bueno si yo puse, es que a largo plazo el R1 iba a ser menos costoso.

A3 dio una respuesta diferente, creyendo que era igual a la de los demás.

A1: Si bueno, es lo mismo, ¿no? o sea que el primer robot iba a ser más costoso.

Aquí se muestra que en éstas últimas participaciones cada quien dice lo que percibe del mismo hecho (aunque diferente), para ponerse en el mismo canal.

Cabe resaltar el papel guía, líder, que tomó A1 en el desarrollo de la plática, para acercar que la interpretación del problema fuera más acorde.

Profesor: Pregunta ¿a ver que concluyeron?

A1: Que bueno, el problema que nos planteamos fue, bueno que construimos nosotros, porque realmente el enunciado no planteaba ningún problema, era que cual de los dos robots a largo plazo iba a ser más costoso, y concluimos que el primer robot iba a ser más costoso que el segundo robot.

Está asumiendo su nuevo rol de construcción dado que no hubo preguntas guía, y además ya tienen una interpretación del problema.

A3: Que iba haber un punto en el que los dos se iban a encontrar, pero que al fin y al cabo el R1 iba a ser más costoso con mayor mantenimiento, más costoso de mantenimiento que el segundo, porque estamos haciendo un proyecto a largo plazo, como le digo se van a cruzar los dos, los dos costos van a llegar a una igualdad, pero de ahí, éste, el segundo va a ser el que salga con mayor.

Se mostró que su interpretación está modificándose, esto es el proceso de socialización, donde se van negociando los conceptos y sus significados.

A2: Bueno estamos de acuerdo con la compañera, el problema es que cual de los dos tipos de robots iba a tener menor costo a largo plazo, pero el segundo modelo es el que iba a tener mayor rendimiento para el fabricante y con menores costos de mantenimiento que el primer modelo y esa sería nuestra conclusión.

A2 liga, mayores costos con rendimiento, va ampliando sus conexiones.

En éste punto, construyeron un sentido al problema, son dos robots, y se trata de ver cual es más costoso, sabiendo que en un momento dado se van a igualar sus costos y en el largo plazo R2 va a ser el menos caro, le están dando un sentido práctico a través de lo económico, que es su carrera o sea, el aspecto significativo. Esto muestra como lo práctico-significativo favorece la comprensión, y amplía su interpretación.

Profesor en plenaria pregunta ¿cómo lo plantearían en términos algebraicos?

Dirige la conversación.

Comienzan a ver cuales son las cifras de cada robot, así:

A1: 180,000 de $100 por hora.

A4: Y luego el segundo costaba $250,000

A1: Por $80 por hora.

A1: X sería, yo me enfoqué a esto, no al costo sino a este punto, en el que X serían las horas y, las unidades del costo ¿no? entonces fue cuando puse que f de X, cuando X tiene el valor de uno, entonces sería 100*1 y el costo sería de 100 en la primera hora, entonces así va ir la segunda 100*2 quedaría 200, así seguir, seguir ....

La propuesta de A1 está expresando que, el uso de los robots en horas, aumenta el costo, y algebraicamente la expresó que el costo sería f(X), y las horas X.

*A4 propone, que bajo el supuesto de que cada robot trabaja 8 hr por día R1 cuesta 100*8=800 y que R2 80*8=640,* entonces con eso ya podemos decir más o menos cual puede ser más caro y cual más barato.

A4 está expresando los costos de mantenimiento por robot, en términos de días, siendo ésta interpretación un caso particular, con respecto a lo que propone A1 que es más general, donde propone estudiarlos por horas. El conflicto es que si se quiere valorar cual de los robots cuesta más entre más *trabaja, la propuesta de A4 solamente se puede plantear en términos de cada 8 hr porque está planteando que en un día se trabajan 8 hr, y el de A1 puede ser en cualquier hora.*

A1: Yo creo que tu estás poniendo más otro parámetro que son las 8 hr diarias y yo no porque realmente no sé, yo simplemente estoy viendo cuántas horas ... y no importa si trabajas 3 hr al día o 2, a medida que aumentan las horas, aumenta el costo, y eso es en lo que estamos de acuerdo, es que tú ya te estás limitando.

A3: Pero si te planteas las tablas puedes localizar, yo quiero que trabaje 2 hr, entonces tu vas a tener desglosado tus 24 hr y puedes localizar fácilmente si trabaja 12, 15 ....

A3 está tratando de negociar las dos posturas, poniendo en vez de 8 por 8, se pueda poner 1, 2, 3, etc. hr, y de ésta manera pueda medirse el costo por hr de trabajo.

A4: Por eso, yo creo que ambos están bien.

Trata de conciliar

A1: O sea si pero ¿cómo harías el cálculo a ver?

Estrictamente sabe que mediante la postura de A4 solamente se ciñe a múltiples de 8, de ésta manera está confrontando a A4.

A4: Pues en lugar de que sean 8 hr le ponemos 12 hr o lo que quieras, yo creo que los dos están correctos, automáticamente llegan a lo mismo.

A4 Trata de conciliar que en vez que sean solamente 8, puedan ser 12 o lo que quieras, mostrando un asentimiento al planteamiento de A1.

A1: ¿Llegan a lo mismo?

A2: Llegan a lo mismo.

A3: El de A1 este digamos con fórmula, porque tiene un planteamiento más automático y el segundo *(el de A4)* es por medio de tabla.

Aquí empiezan la mediación grupal.

A1: Bueno ¿en que momento llegan a igualarse los dos? o sea, como harías con tu método, o sea mi método yo sé que puede ser muy tardado pero puedo calcular ya 100 por 100, ya sé que en 100 hr van a ser mil ... mil unidades ... tu no sé.

Estaba tratando de esclarecer los puntos de vista.

A4: Es que yo lo hice en función de que, yo no quería saber cual era el más barato o cual era el más caro en el largo plazo, porque yo suponia que la empresa iba contratar a los dos.

Manifestó que el punto de partida para él, no es el de los demás, que es ver cual es más caro o más barato en el largo plazo (a lo cual ya había asentido anteriormente en el planteamiento grupal), explicitando que no importaba cual era más caro porque supuso que la empresa compraría los dos robots, (porque yo suponía que la empresa iba contratar los dos) pero tampoco explicita que entiende del problema, cual es su punto de partida.

A1: Pues sí ¿pero entonces que te planteaste? bueno ahí ya tenemos o sea, se supone que nos habíamos planteado lo mismo, ¿no? ¿cual robot sale más barato? entonces que fue lo que realmente te planteaste tú?

Otra vez A1 (queriendo entender su punto de vista) plantea desde otra perspectiva su razonamiento, ¿cuál es tu punto de partida? y A4 responde.

A4: Yo dije ¿con estos datos que podemos hacer? lo que hice, fue calcular que suponiendo 8 hr de trabajo diario del robot yo calculé el costo de éstos dos, entonces dije; en un mes cuanto nos va a costar, cuantas horas, cuanto va a ser el costo total de estas horas en un mes entonces hice los cálculos, en un mes va a costar tanto, entonces le sumé al mes las horas de mantenimiento más los costos de los dos robots, dije lo que va a pagar el empresario va a ser tanto, y después dije, si los dos producen más o menos lo mismo, el costo del R1 era de 800, entonces dije, va a producir por lo menos tiene que producir el doble y dije 1,600 y en éste va a producir igual el doble, entonces dije, ¿cuál va a ser el más eficiente? ¿cuál va a costar menos?, o sea ¿cual va a producir más?.

Para responder a A1, expresó su planteamiento original, viendo los datos que tiene y suma los costos fijos de los dos robots y el costo unitario de los mismos, suponiendo que trabajan 8 hr diarias cuanto cuestan al mes, y luego supone que duplican la producción, sin decir porqué, y era lo que iba a pagar el empresario en un mes, y en ese momento se preguntó cual iba a ser más eficiente o cual iba a producir más y cual va a costar menos, que supuestamente ese era su punto de partida grupal y que posteriormente rechazó, contradiciéndose que no quería saber cual era el más caro o el más barato. A4 muestra un comportamiento errático, no ve con claridad lo que entiende del problema.

A3: Pero no están tomando en cuenta la primera inversión, solo están tomando en cuenta el mantenimiento, siento que la comparación de que el mantenimiento supere los costos de adquisición siento que no, no podría ser comparable porque a ti a lo mejor te puede costar como ahora veíamos 250,000 y es de 80 unidades pero a lo mejor y a tí como empresario estos 250,000 o no te conviene o los tienes.

A3 no alcanza a visualizar el comportamiento de un largo trabajo en hr de los robots, que A1 ya lo explicitó.

A1: Esos ya son otros parámetros, van a producir lo mismo pero el costo de mantenimiento es diferente, aquí va 180, más 80, más 80, vas a ir ahorrando con el segundo robot 20, 20, 20, hasta llegar el momento que superes el costo inicial.

Argumenta su planteamiento, tratando de que A3 comprenda su aseveración.

Profesor pregunta a los cuatro, ¿como plantearon su problema?

A3: Estábamos discutiendo el método de la compañera, de las variables y del compañero que utilizó la formulación de un problema a base de una pregunta y a base de datos específicos, entonces que se relacionan mucho pero al fin y al cabo el no utilizaba la tabla.

Se están refiriendo al planteamiento de A1 que es Y=f(X) y el planteamiento tabular.

A1: ¿Obviamente esto también se puede graficar no?

Insistió en la representación gráfica, ampliando su punto de vista.

Profesor: ¿Que utilizaron en el planteamiento de su tarea?

A1: Las variables, ¿no? o sea que los separamos en X y en f de X

Profesor: ¿Eso lo vieron en el concepto de ...?

Dirigiendo

A1: Función

Explicación profesor-alumnos en plenaria.

Esta plenaria se realizó con el profesor en el pizarrón y los alumnos a su alrededor, preguntando primero que habían entendido del problema para estar en la misma sintonía y luego dirigiendo la conversación entre los alumnos.

Mediante preguntas a los alumnos se realizó una reflexión sobre lo que hicieron, lo primero es que hay que leer y entender el problema de que se trate, ir cambiando el rol de dar una solución o una respuesta inmediata como en el pasado, por un entendimiento y comprensión del mismo, advirtiendo que es un paso crucial, y que si en este paso nos tardamos mucho o poco, no importa dada la trascendencia del mismo. Posteriormente se explicitó la necesidad de identificar las variables del problema y definirlas para concluir la dirección de la dependencia que seguirá el problema, por ejemplo en nuestro caso se expresaría como (esta es la solución preestablecida por el profesor) C=costo total, hr=horas de trabajo del robot, y la relación de dependencia, C=f(hr), costo total está en función o depende de las horas de trabajo de un robot. Posteriormente se identificó a *la función misma partiendo de la relación funcional y, de la regla como se iba a comportar la función o como iba a variar el costo total, dependiendo de las horas de trabajo del robot quedando, CT=f(hr)= 180,000 + 100hr, y CT=f(hr)= 250,000 + 80hr. Determinadas las funciones, se expresaron gráficamente, como una necesidad de visualizar lo que se había hecho algebraicamente, considerando que sería un referente muy sustancioso para la comprensión del problema. Parte de esta explicación estuvo dirigida por el profesor, con el fin de recapitular lo visto hasta ahora.*

Profesor: Hicieron la investigación sobre el concepto de función, ¿y que otra tarea hicieron? ¿Costos? ¿Alguien utilizó las fórmulas que vieron en la tarea? bueno de lo que se trataba, era de poder integrar la definición de costo y la de función con la resolución del problema de los robots. Se les dictará el problema nuevamente y lo traerán resuelto para la siguiente clase, tomando en cuenta estas consideraciones.

Rol del profesor típicamente tradicional dirigiendo

En la siguiente sesión;

A4 expresa su postura inicial respecto a sumar los costos de los robots, y sumarles los costos de mantenimiento, A1 se centra en la definición de costo y su fórmula que es igual al costo fijo más el costo variable, se explora la definición del concepto de función y su adaptación.

A4: Y luego lo resolvemos a través de los costos, se supone que debe ser una función lineal, porque es el tema que se está viendo en clase.

Ligó el contenido algebraico con el problema económico.

A1: Yo saqué que Y=100 y X=1 que es 100 por costo de mantenimiento por hora.

A4: ¿Pero que representa, o sea que es?

A1: O sea, f de X sería igual a 100X y después ví lo que era costo total y ya saqué también mi fórmula f(X)=

100X+180,000 y viendo más adelante lo que tú hiciste, saqué la pendiente, igual a 100 y 80 de los dos robots e hice después la fórmula punto pendiente y me salió igual.

Partiendo de la función de costo, identifica las pendientes de los dos casos, ligándolas al concepto económico de costo unitario por hora.

A2: ¿Ttú sacaste una fórmula para la cual todas las demás dieran el mismo resultado?

A1: Bueno no tiene que ser necesariamente que todas te den el mismo resultado, te digo que puedes poner cualquier punto del que tengas y te sale lo mismo, sale Y=100X y entiendo que el problema habla de dos modelos, un robot de 180 mil, con un costo de mantenimiento de 100u por hr y el segundo tiene un costo de 250 mil con 80u por hr, yo lo que hice ahí fue ver cuales son mis costos totales, que vienen siendo los 180 mil y los 250 mil y mis costos variables o costos fijos, entonces a partir de ahí empiezo a sustituir en mi ecuación de pendiente.

A4: 100X+180,000

A1: O sea 180,000 seguirá siendo el costo fijo, aquí varía respecto a las horas, por eso puse 100 con respecto a las horas.

A3: Yo puse 180,000 y 100*60, estos 60 equivalen a 60 minutos.

A3 está proponiendo otra base de medición de los costos, que es en minutos en lugar de horas, y que estaría correcto sí hubiera cambiado el 100 que es el costo por hora, a 1.66 que sería el costo por minuto.

Después de una serie de cuestionamientos para esclarecer la fórmula de costo que traía A3 le preguntaron qué significaba mx confundiéndose si era la pendiente o la ordenada al origen y A1 dice que m es la pendiente y A3 si entonces los costos variables son mx, A2 ¿b sería? A4 la ordenada al origen.

Lo que están haciendo es una exploración de significados y además entran al escenario los conceptos de pendiente y ordenada al origen aplicados al problema económico de los robots, que no habían surgido explícitamente en las conversaciones anteriores, proponiendo que el "otro" 80 es la pendiente del R2 (o costo unitario por hora trabajada) y que es la pendiente multiplicada por algo, respondiendo;

A3: Para mi fueron las hr

Oolvidándose del planteamiento de los minutos.

A4: Más b que es la ordenada al origen,

Prosigue la exploración, y confunden en algún momento los conceptos al momento de ligarlos con su representación algebraica, y de aquí, pasan a la representación gráfica.

A1: Para la pendiente tuve que hacer la gráfica, y para sacar el punto necesariamente teníamos que hacer la gráfica,

Refiriéndose al punto donde los costos de los dos robots se igualan, están relacionando el problema económico, su representación algebraica y la gráfica, conduciendo a que sus esquemas cognitivos se vayan ampliando mediante la construcción de las diferentes representaciones, como consecuencia del entendimiento del problema.

El entendimiento empieza a producir un poco de soltura que va retroalimentando su autoestima. Esta soltura es parte del desarrollo que va permitiendo la construcción grupal, e individual.

A4: ¿Hiciste todo el recorrido de darle valores a X?

A1: Tenemos dos puntos y se me hizo necesario hacer la tablita y esto lo hice como complemento porque de hecho esto lo hice yo aparte porque el maestro quería que lo viéramos más como lenguaje algebraico y dije voy a sacar la pendiente que es lo que estoy viendo ahora.

El actuar de A1 se ve influenciado por lo que dijo el maestro.

Se hace una diferenciación de que el costo total se refiere a dos modelos de robot, o sea que hay dos elementos de comparación en el problema que les permite un punto de referencia para analizarlos y, el tratar de expresarlos en lenguaje algebraico y gráfico les ayuda a esclarecer el problema.

Cabe resaltar que lo que están haciendo los alumnos al momento de contrastar sus ideas, genera un desequilibrio, el cual propicia una exploración cognitiva grupal e individual, que los lleva a caminos como; que en vez de horas de mantenimiento, lo presenten en minutos de mantenimiento, generando un planteamiento realmente alternativo, y otras exploraciones que en vez de horas, presentan las horas por semana, por mes o por año, etc., que no son alternativos, como los presentan. Este proceso va permitiendo el desarrollo de sus heurísticas individuales en grado diferente, dependiendo del alumno.

A2: ¿Cómo haces una diferencia entre 1 hr y 60 minutos, sería el costo por minuto?, pero si te lo está dando por hr.

Una reflexión pertinente, el expresar el costo de la hora en minutos, le da entrada a la posibilidad.

A4: Lo pondríamos sobre segundo, no se, por minuto.

A1: Yo siento que lo tendríamos que dividir, o algo así.

A3: ¿Porqué tienes que sacar el costo por minuto?

A3 propuso el planteamiento por minutos.

A3: Pero el problema te lo están planteando por hr no por minutos.

A4: A esto convertirlo en minutos.

A3: No más bien en hr.

Aquí se presenta la negociación con sus argumentos, entre los que están de acuerdo en plantearlo en hr, y plantearlo en minutos, e inclusive en *segundos. Hay que notar como van asumiendo el nuevo rol, mediante la participación y argumentación.*

A1: Creo que es una regla de tres.

A3: Sacarías un minuto

A4: O sea calculando el primer minuto, 1.6666 sería el costo por minuto y ahora multiplicado por 60.

Concretando numéricamente, u operando, que también ayuda al proceso de construcción del problema.

A3: Si ya puedes sacar el costo por una hora.

A1: Si ya estaría bien tú fórmula.

Validando.

A4: Sale lo mismo

Sin embargo aunque el planteamiento en minutos sí es una alternativa, prefieren el planteamiento en hr, por falta de seguridad.

A1: Es lo mismo pero no, no te dice 60 minutos así en unidades, sino te dice una hora, bueno yo creo que sería más fácil.

Sería más fácil. Sugiriendo el camino.

A3: Veíamos en la clase pasada que el costo total era igual al costo fijo más el costo variable que nosotros le dimos una variable como A y el X que era el número de hr, o sea el costo variable que era el costo de mantenimiento de cada robot por el número de hr que trabaja y la suma de esos dos nos daba el costo total.

Una reflexión que sintetiza en sus propias palabras lo que está construyendo referente al problema.

A1: Así sería nuestro lenguaje algebraico f de x sería nuestro costo total.

Regresan a la discusión sobre el planteamiento de las hr de los minutos y concluyen; sería conveniente en hr, por que así está en el problema, la falta de visión y de seguridad hace perder alternativas del problema. También están expresando en lenguaje algebraico su planteamiento.

Profesor: ¿Cómo pueden especificar esa relación que sería de las horas con respecto a que?

A1: O sea, las hr con respecto al costo.

Profesor: Bien, a esto se le denomina relación funcional, bueno y luego que más.

A3: Entonces sacaríamos el costo total de los dos modelos, el primero con un costo de 180 mil, y un costo de mantenimiento de 100 y el segundo con un costo de 250 mil y un costo de mantenimiento de 80.

Esta es una primera construcción grupal a la que llegaron para representar de manera algebraica el problema.

A1: O sea, que una hr es 100, dos hr son 200, que sería el costo por hr, entonces lo que podríamos hacer, es lo que tu dices, sumar los dos costos fijos y después, para el costo variable tendríamos que sumar 100 más 80, que sería 180 por los dos robots.

A4: Y luego lo multiplicamos por 8 hr por día.

La exploración los llevó a proponer que el costo de los dos robots, podrían representarse juntos, llevándolos al planteamiento inicial de A4, de hacer constante las hr a 8hr en vez de variable. Se está tratando de reducir el problema.

A1 ¿La fórmula de costo total $f(x) = 430$ mil $+ 180x$ que sería el costo total de los dos en una hr, ¿no?

Comentando los demás que se podrían variar las hr (1,2,3,...) para sacar el resultado de los dos juntos.

Aquí A1 está proponiendo a las horas como variable, postura contraria a la de A4 que quiere sustituir a las hr por 8.

Se hizo una reflexión que tiene eco en todos, acerca de que era un error haber puesto los costos de los robots juntos, porque no hay punto de comparación y hay que experimentar mucho en cuanto a cálculos para conocer el punto en donde los costos se igualan. Después de haber llegado a la diferenciación entre los costos de los dos robots, regresan a un planteamiento conjunto y luego regresan al planteamiento de los costos diferenciados, dando pista de cómo construyen grupalmente. Cabe resaltar que el planteamiento de juntar los costos de los dos robots (que era la cuarta vez que habían planteado una conclusión respecto a las funciones de costo), muestra que en el fondo no tenían la seguridad suficiente para concluir, y necesitaban en el fondo provocar otra argumentación para clarificar y estar más seguros de lo que habían construido.

> A1: Quedamos que lo que queremos ver es qué robot nos conviene más.

La exploración se dirige hacia el cálculo del costo total de cada robot, A1 tanteando si es en 100hr, cae en el hecho de que se necesitarían muchos cálculos para ver hasta cuando el R1 es más caro que el R2.

> A1: Además como que la onda del maestro no era saber exactamente por minutos, era saber cual es el más costoso.

Justificó su argumento refiriéndose a la autoridad, que lo utilizó como argumento de peso, contundente, incuestionable, pero no lo justifica con un razonamiento económico, aquí se muestra que cuando se llega al límite de los conocimientos, los razonamientos no son congruentes.

> A1: Podría ser que empiecen así que R1 siga subiendo y R2 caiga.

Haciendo referencia a la pendiente 80 (costo por hora) de R2 y no es que caiga, sino que la pendiente o costo unitario por hora del segundo robot es más baja.

Haciendo cálculos se dan cuenta que el R2 llega a ser menos caro que el R1.

Han llegado a la expresión C=f(x)= 180,000 + 100x

Aquí se explicitó que f(x) es el costo, C=f(x), que en un planteamiento anterior no estaba explicitado, mostrando como va ampliándose la construcción.

Profesor: ¿Y el planteamiento del R2?

A1: Lo estábamos buscando, porque usted nos dijo que cual robot convendría más, primero buscamos la idea y luego plantearlo en una función.

Excelente ejemplo en el que se muestra que lo significativo va ampliando las maneras de expresión formal.

A4: Pero ya ahora vimos que el R2 es más barato.

Profesor ahora, ¿Cuándo creen que los costos sean iguales para los dos robots?

A3: Si uno tiene que aumentar y otro disminuir.

No está diciendo por qué.

Exploran sobre aumentar las hr de trabajo a 12 por día, calculan quitando hr, o sea, 3,000 hr, trabajando 10hr, 300 días, etc.

A1: 3,000 hr es la diferencia, entonces ¿cuantos días trabaja el robot a 10 hr para que salga 3,000?

A3: Pero ahí llegaríamos a lo que quiere él que cuando los robots tienen el mismo costo.

A1: Pero te imaginas y si no hubiéramos dado, o sea, él le atinó pero por tanteo, como vamos a tener que andar sacando, ¿vamos a ir tanteando todos con nuestra calculadora?

A3: Ahora hay que plantear el problema.

A4: A ver las fórmulas, siguen la línea de las horas, los días, año.

A2: O sea, yo entiendo las dos fórmulas, lo que podemos hacer es igualarlas y luego sacar, despegar a X y sacar el resultado que me da 3.5 que es el que, ¿qué será?, no, no se, o sea ya está, pero no se que sea.

A4: Podemos hacer lo que tú dices y despejamos X.

A1: ¿A ver que número es este?

A2: 70

A1: ¿Cómo las igualaste?, o que, ¿cómo hiciste la igualación?, ¿qué es la igualación?

Inquiriendo para ver de qué se trata, cómo se hizo, con el fin de entenderle.

A2: Es que ya teniendo las dos.

A1: Es 250 menos los 180, son 70 mil, pues si sale menos 350.

No están haciendo el cálculo correcto.

A1: Que serían 3,500 hr, en 3,500 hr ya, serían iguales.

Llegan a este primer resultado, y platican de ello como un triunfo, esto es el fruto de la construcción grupal.

A4: Yo lo hubiera hecho así, como él lo hizo primero.

Desprendiéndose de su planteamiento original.

A1: Yo por tanteo, si estuviera en un examen lo hubiera hecho por tanteo.

Más coherente con su actuación.

A2: Yo por eso lo hice primero así, para ver ...

A1: ¿Y como se te ocurrió?

Está indagando que fue lo que hizo, que camino siguió, como lo descubrió.

A2: Bueno pues nada más lo que hice fue como ya sabíamos, el costo de cada una de las, de los robots, nada más lo que se me hizo, a que número de hr iba a ser, el costo iba a ser el mismo, nada más lo que hice fue igualar las dos ecuaciones nada más.

Su heurística fue una combinación de razonamiento (¿a que número de hr iba a ser igual el costo de los robots?) y, una experimentación (al igualar las ecuaciones).

A2: Si, nada más eso.

Fue un momento de catarsis grupal, que al llegar, causa una satisfacción interna y grupal y permite un refuerzo emotivo hacia el aprendizaje.

A4: En 350 días se van a igualar el costo de los dos robots trabajando 10hr al día 3,500hr de trabajo.

A4 todavía no tiene muy claro la relación funcional, ya que no ve directamente a las hr como la variable independiente, incluye aún las 10 hr por día.

A3: El costo sería de

A1: 300, no 5,000, no 530,000 unidades, y ahora que cual nos convenía más y nos conviene más, el segundo.

Estos cálculos los hizo algebraicamente (operacionalizando con ésta representación), llegando a la cantidad de dinero en donde los dos robots cuestan lo mismo 530,000, sin embargo fue el primer acercamiento y no explicitó su interpretación económica dejándola pasar.

Profesor: ¿No tienen alguna otra forma de expresar estos cálculos?

A1: ¿De expresar que nos conviene más?

Profesor: Si

A1: O sea, podría ser por gráfica.

Profesor: A ver.

A4: Ah pues nada más la hacemos, si como con la tablita esa que hiciste antes.

A1: Como.

A4: Pero tenemos que irnos hasta 350 días.

Hacen una exploración de cómo podrían plantearlo, si por día, semana o mes.

A1: Digo a lo que me refiero es que aquí en la gráfica también vamos a tener que sumarle esto *(los costos fijos)*, para ver en qué momento se igualan.

Hicieron su representación algebraica, su representación gráfica, llegaron a la conclusión de que en 3,500 hr el costo de los dos robots es el mismo, pero sin decir a cuanto asciende el costo total, punto que tocó A1 pero pasó por desapercibido. Se nota más seguridad, plantean sus argumentos con más recursos, o sea, están mostrando el proceso de construcción.

Profesor: Para la tarea van a desarrollar lo siguiente, partiendo de las funciones de costo, donde el primer robot costaba $180 000, con un costo fijo de $100 por hora de mantenimiento y, el segundo robot $250,000 y $80 por hora de mantenimiento, hay que hacer el planteamiento algebraico, graficarlo y hacen un análisis económico. La segunda parte es; utilizando los mismos costos fijos, van a invertir los costos por hr de mantenimiento así, el R1 va a tener ahora $80 por hora, y el R2 $100 por hora. Sacan las relaciones funcionales, las funciones, las grafican y lo analizan, contrastándolo con el problema anterior, solamente en términos económicos.

3.4 Problema de los robots con los costos unitarios invertidos

Durante la siguiente sesión, los alumnos empezaron a comentar directamente con el segundo problema de la tarea, sin haber realizado el primer ejercicio que era replantear el problema a la luz de las nuevas construcciones. Considerando según su apreciación que ya estaba agotado, ya no hay más.

A2: Yo lo hice así por las horas que va a trabajar que son 10, más el costo de mantenimiento por 350 días que es 280,000 esto lo sumamos y nos da un costo total de 460,000.

Los números a los que llegó A2 no están correctos, ya que el punto donde se igualan es, en las 3,500 hr negativas, con un costo de menos 100,000 y (lo que hizo A2 fue sustituir 3,500 con signo positivo en 180,000 + 80X = 250,000 + 100X), esto no tendría una relevancia económica. Sin embargo cabe resaltar el planteamiento que hizo en el problema pasado de igualar las funciones porque quería saber en cuantas horas se igualaban los costos de los dos robots, su heurística lo llevó a una combinación de razonamiento (¿a que número de hr va a ser igual el costo? y las obtuvo) y, una experimentación (al igualar las ecuaciones con un argumento más bien intuitivo, para ver que pasaba), caso similar al actual, ya que experimentando con la igualación, le da una interpretación sin mediar el aspecto económico (lo tomó como algoritmo), llegando al costo total en el cual los dos robots son iguales, (siendo un punto que tocó marginalmente A1 y lo dejaron pasar) o sea, está construyendo y explicitando algo nuevo en la interpretación del problema que es el costo al que se igualan los dos robots, aunque en lo numérico estuvo incorrecto CT=460,000.

A4: ¿No que se igualaba? no se igualó, ya teniendo los costos de mantenimiento al revés, o sea igualamos, 80x + 180,000 = 250,000 + 100x, ahora despejamos X, y va a salir 20X.

A2: Es menos 20X, si es menos 20X.

A4: Si –20X=250,000 + 180,000 y nos da –3,500

A4 planteó la igualación (donde debería tener – 180,000 para que su planteamiento fuera correcto), sin ninguna explicación económica, solamente en términos operativos faltándole la vinculación con el planteamiento del problema, mostrando una tendencia más operativa.

Se incorpora al grupo A1

A1: No, ¿de que hablan? no se igualan.

A2: Se ve una diferencia

A1: Entre más horas más es la diferencia.

A1 tiene razón, porque en donde se igualan (-3,500hr), no tiene significado económico. El razonamiento de A1 es desde el punto de vista económico, mientras que el de A2 es una mezcla de razonamiento e intuición y, el de A4 más algorítmico.

A1: En el segundo problema no se igualan, nunca llegan a una igualdad, ni aunque sea una hora, simplemente va aumentando y creciendo la separación entre los dos.

Los otros compañeros dudaron y preguntaron al profesor que si tenía que buscarse la igualación entre los costos (rol de validar sus pensamientos en la respuesta del profesor, no en la seguridad de sus razonamientos) el profesor respondió, que pensaran.

A1: Lo que pasa es que si lo igualas queda menos 3,500 y no puede ser que trabaje negativo, yo, la gráfica la hice desde cero horas de trabajo y, en una hr ya existe una diferencia que crece pero nunca se igualan.

A2: Conclusión, cómprate el R1

A4: Sí, exacto es más económico.

Se olvidaron de la mezcla entre 10 horas de trabajo por día, en 350 días, y tomaron finalmente las horas como variable independiente, cuando llega A1 y los refuta con base en su gráfica (la cual no habían realizado ni A2 ni A4) y en su razonamiento económico.

Profesor: Comparen las cuatro funciones de los dos problemas, o sea, C=f=(X)= 180,000 + 100X, C=f=(X)= 250,000 +80X , C=f=(X)= 180,000 + 80X, y C=f=(X)= 250,000 + 100X y, hagan una interpretación económica.

A2: Pero habiamos dicho que en el primer problema nos convenia el R2, y en el segundo problema compramos el R1.

A4: Podemos decir que en el primer problema podemos comprar los dos robots y hacerlos trabajar 10hr.

A1: A ver les leo el problema.

Un planteamiento que pretende centrar la discusión, mostrando su papel de conductora.

A4: Pero no nos dice que tenemos que hacer, en el primer problema pusimos a trabajar a los dos robots 350 días durante 10hr diarias y se alcanza la igualdad en 350 días.

Persiste la visión de incluir las 10 hr para resolver en días cuantas horas se trabaja, mostrando también un poco de desorientación, ya que no le dicen que tiene que hacer, expresando un poco más reticencia al cambio de rol.

A1: El costo fijo de R1 es menor que R2 pero, el costo de mantenimiento de R1 es mayor que R2 pusimos algunos límites imaginando que nosotros somos los que vamos a comprar los robots, como que van a trabajar 10hr todos los días, llego a la igualdad de 3,500hr.

A1 parte de la suposición que son 10 hr las que trabajan los robots como un razonamiento secundario, ya que en sus gráficas y en sus argumentos tiene claro que en la relación funcional, la variable independiente son las hr, como dice, "llego a la igualdad de 3,500 hr" vinculando los números con la interpretación referida al problema y también está resaltando la comparación del costo de los dos robots del planteamiento anterior. Hay que considerar la utilización de "imaginando" como una clave que le permite traer el problema a sus conceptos anteriores para darle una significación, y razonarlo dentro de los límites de su conocimiento.

A4: En el segundo problema, el mantenimiento y el costo fijo de R1, son más baratos que R2.

A1: De eso te das cuenta desde el principio y mediante la gráfica te das una idea más amplia, y aparte va creciendo la diferencia, uno va a seguir siendo más costoso que el otro, en el primer problema, desde un principio el costo fijo no cambia, pero el costo variable de R1 va a ser más caro, es lo que va a cambiar, nos dimos cuenta y quisimos buscar en qué momento se igualaban y se rebasaba el costo de R1, eso es lo que queríamos ver para decidir cual nos convenía, a las 3,500hr ya es más caro, no por mucho pero va a seguir creciendo.

Muestra su razonamiento enfatizando en la gráfica, permitiendo la visualización de su explicación. Este comentario permite ver de manera palmaria la relevancia del análisis gráfico.

A4: Si me equivoqué al principio R1 era más barato y a las 3,500hr se igualan y después ya R2 es más barato.

A4: Pero la pregunta es en el problema dos, así sin pensarlo, tomas el R1, es más barato el costo de mantenimiento R1 sigue siendo el más barato.

Se puede ver que la explicación de A1 y la representación gráfica influyó en el intercambio grupal, ya que, antes de que llegara, los razonamientos estaban centrados en lo operativo, en la parte negativa de las hr que no *tenía significado económico, y después de que llegó, se centraron en lo analítico-gráfico.*

A1: O sea, como empresario, el R1 cuesta 180,000 y 80 de mantenimiento y R2 te cuesta 250,000 y 100 de mantenimiento por hora ya ni pensarlo yo diría el R1.

Mostrando que, la contrastación de los dos problemas permitió que la visualización fuera más clara, tanto algebraicamente como gráficamente, como se percibe en el siguiente diálogo, que es mucho más analítico-económico.

Profesor: ¿De qué actividad económica están hablando?, ¿están hablando de costos? o sea hablar de costos a que actividad económica nos estamos refiriendo?

A2: De producción.

Profesor: Exactamente.

A3: Bueno llevamos en el primer problema que se planteó, se identificaron dos robots el primero cuesta 180,00u con un costo de mantenimiento de 100u por hr, el segundo cuesta 250,000u con un costo de mantenimiento de 80u por hr.

A4: El primer robot al principio es más barato.

A3: De acuerdo a la fórmula de costos el primer robot al principio es más barato.

A2: Después hay un punto en que los dos robots se igualan que es en 3,500 hr y después el R2 disminuye.

A1: Más bien aumenta pero no tanto como R1.

A3: Entonces es más barato conforme van pasando las hr, se igualan.

A1: Y posteriormente el costo total de R1 supera a R2 y nos convendría más comprar R2.

A1: En el segundo problema, bueno lo mismo se invirtieron los costos variables, R1 cuesta 80u y R2 100u pero ahí que vamos a poner nosotros, desde el principio nos dimos cuenta.

A4: Viendo el costo fijo y el costo variable, pues aquí sin dudar compramos R1, porque es más barato en todo.

El hecho de resolver el segundo problema con los costos de mantenimiento invertidos ayudó a comprender mejor el problema inicial, ya que contrastaron los costos fijos y los costos unitarios de mantenimiento de los dos problemas y dedujeron de manera palmaria, sus diferencias, facilitando el proceso de construcción.

Durante el proceso de cognición matemático, hubo momentos donde el contenido económico no estuvo presente dificultando la construcción, y facilitándola (que fue la mayor parte) cuando estuvo presente, como se mostró al principio en el proceso de definición del concepto de costo, que su definición fue estimulada por la utilización de los costos del problema de los robots, facilitando su formalización en la expresión algebraica

Los dos problemas que continúan, no tienen grabación fueron trabajos escritos.

3.5 Dos alternativas de producción

Una empresa tiene dos alternativas de equipo en la fabricación de ciertos productos; un equipo automatizado cuesta $200,000 y produce a un costo de $4 por unidad. Otro equipo semiautomatizado cuesta $125,000 y produce artículos a un costo de $5.25 por unidad.

Esta tarea solamente la entregaron A1, A2 y A3.

Los tres expresan la definición de sus variables y sus funciones,

A1: f(x)=costo de producción, x unidades, C=f(x)=200,000 + 4x C=(x)=125,000 + 5.25x igualándolas se tiene que en 60,000 unidades producidas se iguala el costo.

CT1=f(x)=4(60,000)+200,000 CT1=f(x)=440,000, CT2=f(x)=5.25x+125,000 CT2=5.25(60,000)+125,000 CT2=f(x)=440,000. Tabula de 1 hasta 70,000 unidades producidas. En conclusión, en primera instancia el equipo 1 era más costoso, pero después se igualaron los costos en las 60,000 unidades producidas y a las 60,001 el equipo 1 es menos costoso.

A1 sistematiza todos los pasos operativos analizándolos, lo que hace proponer planteamientos muy consistentes, la búsqueda de los productos que permiten la igualdad de los costos de los dos equipos (x=60,000), y a cuanto asciende 440,000. Posteriormente hace un análisis abarcando las posibilidades de producción, antes de llegar a la igualación, "el equipo 1 era más costoso", en la igualación "pero después se igualaron en 60,000 unidades producidas" y después de ésta "a las 60,001 el equipo 1 es menos costoso", mostrando en su construcción más seguridad y consistencia analítica, utilizando las representaciones algebraica, tabular y gráfica, con su discurso económico.

A2: x=número de productos CT=costo Ct1=200,000 + 4x Ct2=125,000 + 5.25x Teniendo un supuesto en donde los dos equipos producen la misma cantidad de artículos en determinado tiempo, me pregunto ¿Cuál sería el costo total de cada equipo? ¿Se iguala el costo de los dos?

200,000+4x=125,000+5.25x x=60,000; Ct1=200,000+4(60,000) Ct1=440,000 y Ct2=125,000+5.25(60,000) Ct2=440,000.

El costo total de los dos equipos si puede llegar a igualarse, pero hay que tener en cuenta que los dos equipos no son iguales. En el ejemplo donde se igualan tomamos como base que los dos equipos producen lo mismo, no importó si el primero lo hace más rápido que en segundo o viceversa.

El problema nos plantea que un equipo es automático lo que podría indicar que produce más en menos tiempo que el semiautomático. Pero también podría indicar que solo necesita a una persona que lo opere, mientras el semiautomático puede necesitar a más de una persona, y que producen lo mismo los dos.

Siguiendo con el supuesto en donde los dos producen lo mismo tendríamos que decidir por uno. La decisión es por el primer equipo ya su costo por unidad es menor que el segundo.

Viéndolo por el lado de si es automático porque puede que produzca más en menos tiempo que el otro. En conclusión el equipo uno es el más rentable que el segundo para la fabricación de los artículos.

Después de tabular y graficar, concluye que:

La gráfica nos muestra la tendencia de los dos equipos. El primero, pasando el punto donde se equilibran los costos totales, su costo total 1 va aumentando en menor proporción que el segundo. Esto es en el supuesto de que los 2 trabajan igual. Si el primero produjera más en menos tiempo la diferencia sería mucho mayor.

A2 mostró que su construcción va desarrollándose muy analíticamente, plantea el problema intercambiando sus argumentos con el planteamiento algebraico, llegando a conclusiones que desde el principio se planteó en sus preguntas iniciales, como ¿Cuál sería el costo total de cada equipo? ¿Se iguala el costo de los dos? Y respondiéndolas poco a poco, y cuando llega a la gráfica hace un análisis partiendo de la igualación de los costos, ¿de cual es más conveniente?, no así antes de llegar a la igualación, pero sí tabulando varios puntos, desde 0 hasta 90,000 unidades producidas. Saca una interpretación económica correcta de la productividad de los equipos con los datos de automático, semiautomático y sus costos fijos, resaltando su proceso analítico. Así también combina la representación algebraica, tabular y gráfica, con el análisis económico.

> A3: Alternativas: A; automatizado, B; semiautomatizado. CT=f(a)=4a+200,000 CT=f(a)=125,000+125,000 a=60,000 artículos de equilibrio. Los costos de equilibrio son; f(60,000)=4(60,000)+200,000=440,000;

f(60,000)=5.25(60,000)+125,000=440,000. Grafica contrastando costos (en miles) con artículos (en miles).

A3 no hace análisis, expone sus planteamientos algebraicos, muestra con precisión el planteamiento de la relación de dependencia en cada una de sus funciones, sabiendo lo que busca ya que sus planteamientos son muy exactos, va al grano, hasta mostrar las expresiones algebraicas, gráficamente, que si bien tiene la representación correcta, es lacónica, no explicita analíticamente lo que sucede.

3.6 Tres máquinas como alternativa de producción

Una compañía está estudiando la compra de un equipo que utilizará en la elaboración de un nuevo producto. Se están analizando tres máquinas, la primera tiene un precio de 100,000 pesos y, el costo variable de fabricación de cada producto se estima en $25, la segunda, cuesta $150,000 con un costo variable de $22.5 y, la máquina tres tiene un precio de $180,000 y un costo variable de $21.

Esta tarea la entregó, A1, A2, A3 y A4.

A1: Define sus variables y hace sus planteamientos algebraicos.
CT1=f(x)=25x+100,000 CT2=f(x)=22.5x+150,000
CT3=f(x)=21x+180,000

Igualación 1 y 2, y 1 y 3. x=20,000 sustituyendo en cada función CT123=600,000 No hace más.

A2: Define sus variables y sus funciones CT1=100,000+25x CT2=150,000+21x CT3=180,000+21x Igual 1 y 2, 2 y 3, 3 y 1 dando como resultado x=20,000 con la ayuda de la ecuación de costo, encontramos que a determinada cantidad de artículos producidos por las máquinas, el costo total de las tres se igualan en este caso fueron 20,000. Tabuló y graficó. *Partiendo de su gráfica,* el análisis que se puede hacer con respecto a las máquinas, para la producción de cierto artículo, es suponiendo que trabajen igual, la máquina 3 es menos costosa a determinada cantidad producida, ya que por tener el costo variable por artículo menor a las otras dos.

A2 realiza sus planteamientos concretos, siguiendo su dinámica anterior, de intercalar a sus planteamientos, sus explicaciones.

A3: CT=25p+100,000 CT=2.5p+150,000 CT=21p+180,000 p=producto fabricado *Igualando sus ecuaciones* p=20,000 punto de equilibrio. Sustituyendo CT=f(20,000)=22.5(20,000)+150,000=600,000 la máquina con mejor rendimiento es la 3(C), ya que a largo plazo su costo total (el costo de la máquina más el costo variable de producción) es la menor.

A3: Hace sus planteamientos lacónicos como en el ejercicio anterior, pero en éste hace una breve interpretación.

A4: 100,000+25x Máquina 1 100,000+25x=150+25.50x

150,000+22.5x Máquina 2 25.5x-25x=150,000-100,000

180,000+21x Máquina 3 -5x=50,000

x=100,000

f(x)=25(100,000)+100,000=2,600,000

f(x)=25(10,000)+ 100,000= 350,000

f(x)=25(1,000)+100,000= 35,000

f(x)=25.50(100,000)+150,000=2,700,000

=25.50(10,000)+150,000= 175,000

=25.50(1,000)+150,000= 17,550

f(x)=21(100,000)+180,000=2,100,000

=21(10,000)+180,000= 390,000

=21(1,000)+180,000= 39,000

Realiza una gráfica donde en la coordenada vertical pone los números 1,000 10,000 y 100,000 y el la coordenada horizontal 252.62.7

Es todo lo que entregó.

A4 muestra solamente planteamientos algebraicos, sin alguna explicación que medie su presentación. Se podría comentar que expresa claramente su proceso de construcción, que es a través de números, sin darle interpretación. Esto refuerza su actuación a través de las sesiones que anteceden, que su proceso es aún más aritmético, y sin mucho razonamiento.

3.7 Producción y venta de vasos

Un productor de vasos, tiene costos fijos por $370,000 y un costo unitario de $4.5, vendiéndolo en $8. En el presente problema se agrega el concepto económico de ingreso empresarial, que se les dejó investigar en la segunda sesión.

A1 presentó como tarea;

CF=370,000 pesos CV=4.5pesos/unidad Venta=8pesos Y=kx Y=4.5 x=1 Y=4.5x Si produce 10 unidades en 8 hr de trabajo el costo seria; CT=CF+CV CT=f(x)=4.5(10)+370,000

f(x)=370,045 CT de producción por dia de trabajo. Si cada producto cuesta 4.5 pesos y se vende en 8 pesos se obtiene una ganancia de 3.5 pesos por cada producto obteniendo en un día una ganancia de 35 pesos.

Ganancia: es el ingreso excedente que recibe el capitalista por su inversión de capital. Y=kx Y=3.5 x=1 3.5=k por 1 por lo tanto Y=3.5x

Realizó una gráfica en la cual representa dos lineas rectas crecientes, partiendo de cero, una la expresa Y=4.5x y la otra Y=3.5x siendo 3.5 ganancia por unidad. En el eje vertical le pone Y, y en el horizontal x.

A1 mencionó que en el problema hay costos, ganancia por día, ingreso, contrastando gráficamente el costo con la ganancia, siendo su análisis escrito muy parco. Se mostró que ya incorporó en su análisis el concepto de ingreso, pero todavía está en la fase de contrastación de información, en la acomodación.

A2 presentó como tarea;

CF=370,000 Cu=4.5 Costo venta=8

El costo de venta contiene el costo unitario por cada unidad producida, además de una ganancia para el productor que es de $3.5 con el cual se pretende saldar la variable de costo fijo de $370,000.

CT=370,000 +4.5x-8x sigue 370,000-3.5x X=370,000/3.5

X=105,714

El costo fijo del producto se salda cuando se vende una cantidad de productos de 105,714 unidades. 370,000-3.5(105,714) da 370,000-369,999.

La producción de vasos va a generar una buena ganancia al productor, pasando el punto donde se iguala, solo tiene que cubrir el costo fijo y lo demás es ganancia.

A2 presenta los datos del problema, haciendo un análisis del "costo de venta", $8 (si bien es cierto que no tiene claro lo que significa el ingreso, sí analiza con sus conocimientos previos la parte funcional en el problema, mostrando entender el hecho pero no el concepto formal), que se descompone en costo unitario por $4.5 y, una contribución a pagar primero el costo fijo (de $370,000) y posteriormente se convertirá en la ganancia. El planteamiento algebraico no está del todo claro, no así el razonamiento económico, lo cual dejaría ver que está en vías de la formalización, pero con bases claras en cuanto al significado económico. Como en otras ocasiones, la presentación de A2 combina las expresiones algebraicas y su *interpretación, mostrando que sus razonamientos o procesos de construcción, van desarrollándose consistentemente, explicando económicamente lo que va formalizando. Está acomodando el nuevo concepto de ingreso. No presentó gráfica, limitando su interpretación.*

A3 presentó como tarea;

CT=f(v)=4.5v+370,000 IT=f(v)=8v-370,000 4.5v+370,000=8v-370,000

V=-740,000/-3.5=211,428.57 es el producto de equilibrio. Costo-ingreso de equilibrio, CT=4.5(211,428)=1,321,428.5, IT=8(211,428)-370,000=1,321,428.5. Cuando se producen y venden más de cero y menos de 211,428 vasos, el costo es mayor que el ingreso, cuando son 211,428 el costo es igual al ingreso, y cuando son mayores a 211,428 el costo es menor que el ingreso. Grafica sus coordenadas, la vertical la denomina costo-ingreso y la horizontal productos. Muestra dos rectas, una llamada ingreso, (la cual cruza al eje del costo-ingreso en menos 370,000), y a la otra costo (partiendo de 370,000), cruzándose en el punto de coordenadas de 211,428 vasos, y un ingreso y costo de 1,321,428.5

A3 mostró una construcción muy analítica, tanto algebraica, gráfica, como económica. Sin embargo el concepto de ingreso no está claro aún dada sus representaciones. Entendiendo que al ingreso se le resta el costo, como si se tratara de la utilidad. Cabe resaltar el análisis gráfico que hace sobre la producción y venta de vasos respecto al comportamiento del ingreso y el costo, fue bastante preciso, pasando por alto la parte donde el ingreso es negativo. Aquí también como en el caso de A2, falta un poco de formalización, pero el entendimiento económico es considerable, ya que existe una variable nueva en el problema, la construcción se frena un poco mientras se va entendiendo, mostrando claramente el proceso de asimilación del concepto de ingreso.

A4 Presentó su tarea;

Costo fijo 370,000 costo unitario \$4.5 costo de venta 8 pesos

Si el producto se vende en 8 pesos. p(x)=8X costos, C(x)=4.5x+370,000

8x=4.5x+370,000; x=105,714

A4 mostró datos, siendo correcta la igualación, pero su análisis nulo.

El diálogo grupal se centró directamente sobre el punto de equilibrio. A3 y A4 se ubican en la igualación de las ecuaciones de ingreso y costo, a pesar que cada uno tiene una cierta discrepancia en su planteamiento y concepción sobre el ingreso.

> A3 Y= 8v – 370,000
>
> A4: Y=8v 370,000/8=46,250 y se tiene como punto de equilibrio 46,250.

No comprendiendo del todo lo que significa el punto de equilibrio, no hay una vinculación entre los números y la interpretación económica, solamente operando.

> A3: Se le resta 370,000 al ingreso, así para ver en cada producto qué ganancia vas a tener ¿no?, por lo tanto se tiene como punto de equilibrio 211,428.

Suma dos veces 370,000, ya que su planteamiento es 4.5v+370,000=8v-370,000 *dando como resultado 740,000 dividiéndola entre la diferencia de 8 – 4.5 = 3.5, obteniendo el punto de equilibrio en 211,428. Tiene la confusión entre el concepto de ingreso y de utilidad. Proceso de acomodación.*

Por otro lado A1 lo construyó a partir de la "ganancia por vaso".

> A1: No utilizamos ingreso para nada, solo vimos cual era la ganancia por vaso que era de 3.5, 8 menos 4.5 y ya empezamos a ver en qué momento la ganancia se iguala al costo fijo, 370,000 entre 3.5 dando como resultado 105,714 vasos.

Sí utilizó el ingreso, ya que hace la diferencia de 8-4.5 que es el precio (ingreso) menos el costo unitario, pero no ha advertido aún el ingreso como una formalización en función. Tiene el concepto económico pero no el formal.

> A2: Se iguala al costo fijo, o sea en que momento se salda en costo fijo, y después es cuando realmente ya estás ganando.

Saca el punto de equilibrio dividiendo el costo fijo, entre la diferencia de precio y el costo unitario. Su proceso de construcción se va adelantando.

> A3: Que es lo mismo que igualar el costo y el ingreso y va a salir el punto de equilibrio.

Saca la producción y venta de vasos de equilibrio igualando el costo con el ingreso (el cual lo toma como ingreso menos costo 8x-370,000), otra manera de interpretar el mismo hecho (el punto de equilibrio), con cierta variación.

Contrastan sus diferentes cantidades de vasos que permiten el equilibrio entre el ingreso y el costo, A4 tiene dos valores, 46,250 y 82,222 y, 105,714 (en la tarea), A3, 211,428 con un costo igual al ingreso de 1,321,428. La exploración los lleva a la necesidad de explicitar que entiende cada uno sobre el concepto de ingreso, y lleva a cuestionar a A3 ¿porqué en su ingreso (Y=8x – 370,000) se le restan los 370,000?, respondiendo yo, yo he de estar mal de hecho sí.

De esta manera se le cuestiona a A4 sobre su fórmula de ingreso, respondiendo, (con una fórmula que muestra en ese momento), bueno, no ingreso, sino otra cantidad Q, salió Q=I/P, el ingreso (I), y p el precio, es que aquí yo ya me quedé creo que aquí también estoy mal en la forma de representar 370,000 entre 8 =46,250 como la cantidad de vasos de equilibrio, A1 le da una explicación sobre el precio al que está vendiendo y dependiendo del número de vasos que se vendan hay un ingreso, parafraseando A4 con un ejemplo numérico, y se queda callado asintiendo con la interpretación sobre el ingreso de Y=8x y no la suya de Q=I/p (que *vendría siendo lo mismo, y no la pudo defender por falta de argumentos). Se destaca cómo el cuestionamiento grupal hace que los alumnos defiendan (o no) sus posturas con argumentos, que los hace reflexionar y de esta manera cambiar, o sea que la expansión de las estructuras cognitivas van acompañadas de rompimientos o desequilibrio de las mismas.*

> A2: El punto de equilibrio es cuando el Y=C, o sea, 8x=370,000 + 4.5x y q=105,714 el costo fijo es lo que había que pagar para empezar a obtener ganancias.

Llegando al punto de equilibrio en 105,714 vasos, pero haciendo la interpretación de que es cuando se paga totalmente el costo fijo, postura que ya había explicitado correctamente en su tarea.

Se pasa a la explicación de la gráfica, mostrando claramente que el eje horizontal representa a los vasos producidos y vendidos, y el eje vertical a los ingresos y costos. Que el punto de equilibrio se encuentra el los 105,714 vasos vendidos, que permite igualar los costos con los ingresos en $845,714.

A3: El costo fijo es la ordenada al origen en $370,000, y en el ingreso es de 0, porque no va a ver producto, y ya después se unen esos puntos en el punto de equilibrio.

A2: Después de producir más de 105,714 productos el ingreso va a ser mayor al costo

Profesor: ¿Que estamos pagando, si la venta de vasos es menor de 105,714 vasos?

A3: El costo de producir cada producto, ¿no?

A2: El costo fijo y el costo variable por producir 105,714 vasos.

A2 respondió puntualmente ya que lo había razonado anteriormente en su tarea.

La exploración se enriquece cuando existen diferencias, que al analizarlas, permiten la negociación de significados, y la visión del problema.

A1: Bueno, ¿qué es lo que tendríamos que buscar?, ¿a qué queremos llegar?

Centrando la plática.

A4: ¿A partir de cuándo es la ganancia? y ¿a partir de cuándo es la pérdida? hay que buscar la ganancia y la pérdida.

A3: Se trata de saber cuánto cuesta producir vasos y cuánto se va adquirir de ganancia, ¿no?

Se ve palmariamente el cambio en la actitud ante la construcción de su aprendizaje, preguntándose ahora entre ellos mismos, lo que antes le preguntaban al maestro.

Los ejemplos de negociación de la fórmula de ingreso, (hay que insistir en que este concepto es nuevo), o la manera en que se llegó al punto de equilibrio, llevaron a recomponer los conceptos con los cuales iniciaron la sesión, son muestra de una doble actividad, la negociación grupal y la reconstrucción individual. Como parte del proceso anterior se incluye el arribo al punto de equilibrio mediante las dos variables económicas, a saber, los vasos producidos y vendidos por una, y la igualación de los costos e ingresos por la otra.

Fruto de la misma negociación, permite la representación gráfica de las funciones mostrando el punto de equilibrio, analizando el trayecto de las mismas antes y después de éste. Lo anterior muestra que la construcción va progresando, permitiendo que la visión del problema que en el principio no les permitió explicarlo en palabras, sea más nutrida, (la representación algebraica, la representación gráfica, la explicación económica), y por lo tanto su comprensión.

Cabe resaltar que alcanzaron a visualizar solamente como parte del planteamiento del problema, los conceptos de ingreso y costo con sus respectivas expresiones algebraicas, pero no así, respecto al concepto de utilidad, que si bien es cierto que lo mencionaron, no alcanzaron a construir la participación al nivel de los conceptos de ingreso y costo.

Cabe resaltar los procesos de asimilación y acomodación, o sea, cómo cada alumno enfrentó la concepción del concepto de ingreso y lo utilizó en la resolución del problema.

3.8 Tres alternativas de facturación

Un grupo numeroso de treinta médicos, trabajan de tiempo completo. En la actualidad, los empleados preparan manualmente las facturas de los pacientes, costándoles $1.25 cada una. Debido al enorme volumen de facturación, el gerente administrativo piensa que ha llegado el momento de hacer la transición de una facturación manual a la computarizada. La primera opción es alquilar una computadora con sus respectivos programas, pagando una cuota fija anual de $3,000 y $0.95 por factura. La segunda opción es contratar una empresa de servicios computacionales que se encargue de toda la facturación, siendo su costo anual de $15,000 y de $0.65 por factura.

A1: Yo si la hice pero, pero si, si saqué la tercera opción costo total 1, igual a costo total 2, y después el costo total 1 igual al costo total 3, y el costo total 2 igual al costo total 3, entonces empezamos con esto, ¿quien lo va a empezar?, yo incluí a la opción manual.

A3: Lo que pasa es que aquí yo lo tengo como 2 y 3.

A2: Yo en mi opinión nada más debíamos tomar el costo 1 y el costo 2, y tirar la línea sobre eso aquí ya tenemos nuestro punto de equilibrio, pero a mi me dijo en mi tarea que me hacía falta algo.

A4: Si de todos modos para qué manual.

Están visualizando solamente las dos opciones.

A2: Si pero mira, bueno yo en mi tarea crei que cualquiera de los dos equipos en este punto era mejor que el, cómo se llama, que el manual, pero no, el maestro me dijo que estaba yo, que me hacia falta, que me faltaba algo y estaba yo viendo que la linea de, de forma manual es más barata antes de ese punto que cualquiera de esos dos.

Poco a poco empiezan a darle forma a la interpretación del problema. Se está visualizando la posibilidad de incluir la opción manual, mediante la explicación económica de A2.

A1: O sea, que sigue siendo más barato.

Refuerza su propuesta de incluir la opción manual.

Los alumnos se centraron en el punto donde se igualan las opciones alternativas sin tomar en cuenta la manual, exploraron intercambiando opiniones, concluyendo no tomar en cuenta dicha opción, finalmente, no la visualizaron como parte del problema. Solamente graficaron las dos opciones comentando cuál convenía más. Podría pensarse que el hecho de haber trabajado con el punto de equilibrio anteriormente, pretendieran buscar un algoritmo que les permitiera la resolución sumaria del problema, como si fuera lo importante, regresando a sus comportamientos anteriores.

A1: Bueno, yo no, no por ejemplo hice la relación de eso que dijo el maestro .. que a mayor inversión tecnológica, el costo unitario baja y la productividad aumenta .. ni lo pensé, pero bueno ya como que te das cuenta de que hay que analizar todavía mucho más el problema para darte cuenta de que si hay más tecnología.

A1 trata de continuar con el intercambio de ideas, reflexionando sobre la tecnología, que es una reflexión sobre su comportamiento y las observaciones del profesor.

En la resolución de éste problema, no se profundizó mucho en forma grupal, aunque A1 trató de alargar la plática.

3.9 Cuatro alternativas de producción de líneas de código

Una empresa tiene una computadora que utiliza para varios fines. Uno de los principales costos de la computadora es el desarrollo de software (escribir los programas de computadora). El vicepresidente de sistemas de información desea evaluar si es menos costoso tener a su propio personal de programación o hacer que los programas los prepare una compañía dedicada a esta actividad. Estima que los costos de la escritura de programas en la empresa serán de $1.25 por línea de código, además, los costos anuales indirectos del apoyo a los programadores ascienden a $15,000. El software preparado fuera de la empresa cuesta, en promedio, 2u por línea de código.

Como los parámetros (constantes) utilizados en los modelos matemáticos son a menudo estimaciones, los resultados reales pueden diferir de los proyectados mediante el análisis matemático. Los analistas suelen efectuar un análisis de sensibilidad para tener en cuenta algunas de las incertidumbres que puede haber.

El objetivo es valorar cuánto podría variar una solución si existen cambios en los parámetros del modelo. Suponer que los costos del desarrollo del software por empresas externas podrían variar en un más menos 15%, respecto a la estimación de $2 por línea de código.

Se empezó la sesión leyendo el problema, lo cuál hizo cada quién, así mediante un poco de exploración centraron el problema en las dos posibilidades que tenía la empresa para producir las líneas de código.

A4: También el problema que se plantea es evaluar si es menos costoso tener a su propio personal de programación, o que los programas los prepare una compañía dedicada a esa actividad.

A2: 1.25 de línea de código y 15,000 es como ayuda, bueno sería el sueldo de los programadores, ese es una, y la otra es que contratando la empresa externa les cobran.

A3: Una empresa está evaluando qué es menos costoso, contratar un equipo de programadores para que ellos instalen las líneas de código o que una empresa externa los programe.

No es instalar, es programar las líneas de código. Probablemente no está entendiendo plenamente la actividad a la que se dedica la empresa, se acerca poco a poco al problema.

A1: La empresa se dedica al desarrollo de software y lo que el problema, lo que quiere es que desea evaluar si es menos costoso tener a su propio personal de programación o hacer que los programas los prepare una compañía dedicada a esa actividad.

En éste intercambio de ideas, resalta el empiezo con la interpretación de lo que cada uno entendía del problema, es una postura más analítica, a diferencia de los primeros, en los que empezaban discutiendo las cifras.

A3: La relación era costo total igual a CT=f(p) y p lo manejé por programas, no por líneas de código.

A2: Bueno yo lo que hice fue primero identificar las variables, mis primeras variables son el costo por unidad, bueno por código de, por línea de código, C=f(L)=1.25L + 15,000 C=2L C=2.3L C=1.7L

A1: Pero yo puse L como línea de código.

Están definiendo las variables que van a intervenir en el problema, con sus expresiones algebraicas.

A3: Todos igualan con el 1

Al pasar a la gráfica todos coincidieron con la misma, igualaron la opción con el personal propio, con cada una de las opciones de fuera.

Líneas de código	Costo total
L=14,285	CT=32,857
L=20,000	CT=40,000

L=33,333 CT=56,666.

A1: Todos igualan con el 1, además aquí en la gráfica ya puedes ver primero el que era más costoso inicialmente termina siendo el menos costoso, ¿no?, entonces ahí es donde te das cuenta que el más conveniente sería el primero.

La gráfica ayuda a su argumentación.

A2: Todos se igualan con el costo 1, yo puedo decir según a mi recta que el costo 1 que es el que está dentro de la empresa, va a ser mucho más barato a largo plazo que las demás opciones, o sea no importa si fluctúa entre 15% más o menos.

Muestran más análisis, principiando con el intercambio de las visiones personales y posteriormente formalizaron las funciones e hicieron la gráfica, centrándose en la opción que iba a ser la más barata, con mayor producción de líneas de código.

A1: Que al inicio es más costoso adquirir a nuestro propio equipo de programación, a largo plazo es la opción que nos cuesta menos.

A3: Es que también depende del número de líneas, ¿no? porque que tal si en nuestro programa no es muy extenso, nos convendría contratar nuestro propio personal.

Está visualizando la otra posibilidad, cuando la producción de líneas de código es menor a 33,333 y la opción más barata es C=f(L)=1.7L

A4: Pues sí, yo también digo que aunque al principio es más costoso el producirlo nosotros mismos, en el largo plazo es más barato que las otras, que contratar a una empresa.

Profesor: Si las líneas van de más de cero a menos de 33,333 líneas de código, ¿cuál conviene más?

A1: La empresa privada o sea, la opción de, CT=f(l)=1.7l

Profesor: Si son igual a 33,333

A2: Pues es igual, costo 1 y el 4

Se va advirtiendo, la internalización del lenguaje algebraico, durante la resolución del problema, las exploraciones ya no son tan pletóricas, se van centrando en el problema como guía, resolviéndolo entre ellos mismos, o sea, ya no recurren tanto a preguntarle al profesor, se hacen las preguntas a ellos mismos, se sigue reforzando se rol activo e independiente, lo siguen desarrollando. Algo notorio, es que el problema lo comenzaron con el análisis de éste, que sirvió como columna vertebral para la formalización de variables, estructuración de las funciones, la graficación y su interpretación económica.

3.10 Un equipo quiere agregar un partido de fútbol a la temporada

Un equipo de fútbol americano colegial agregó un partido más al programa de partidos de la temporada. El otro equipo aceptó jugarlo por un pago garantizado de $100,000 más el 25% de la taquilla. Suponga que el precio del boleto es de $12.

> A4: En primer lugar era un ejercicio de costo e ingreso costo y de utilidad, primero calculé la utilidad total al precio de $12, sustitui el valor de b por la cantidad de boletos y me dio, 11,111 me dieron 133,333 es la utilidad total, no estamos descontando aquí los costos fijos que son igual a 100,000 ni el pago al otro equipo, es únicamente la utilidad total que va a recibir el equipo.

A4 empezó explicando que es un ejercicio de costo, ingreso costo y de utilidad, posteriormente hace una explicación no muy clara de los datos que obtuvo, por ejemplo, "sustitui el valor de b por la cantidad de boletos (que es lo mismo) y me dio 11,111 me dieron 133,333 es la utilidad total, no estamos descontando aquí los costos fijos ..." si bien los números son los del punto de equilibrio, la explicación está totalmente disociada. Probablemente copió la tarea, dada la explicación inconexa.

> A1: De donde sacaste tu utilidad.

> A4: Bueno el ingreso utilidad es de 12.

A1: Pero es que nosotros utilidad no lo tenemos como ingreso.

A4: Pero es lo mismo, utilidad e ingreso.

Se enfrascan en una discusión sobre la aclaración de que son distintos los conceptos de utilidad e ingreso, mientras A4 los considera como iguales.

A1, A2 y A3 coincidieron con el planteamiento de que el punto de equilibrio es b=$11,111 C=Y=$133,333 y A4 tiene solamente los datos iguales pero la interpretación es distinta, diciendo que 133,333 es la utilidad ingreso total sin descontar los costos fijos.

A1: El costo fijo que son de 100,000 el costo está en función de los boletos, C=F(b)=100,000 + 3b y la función ingreso Y=(b)=12b y la utilidad la obtenemos ingreso total menos costo total, luego con la gráfica lo podemos ver.

A1 Redondeó el problema en sus expresiones algebraica y gráfica.

A2: Si la cantidad de boletos es mayor a 0 pero menor a 11,111 vamos a tener una pérdida, cuando el número de boletos es 11,111 nuestros costos e ingresos se igualan, pero cuando nuestros boletos es mayor a 11,111 nuestro ingreso empieza a superar a nuestro costo, una utilidad neta para el equipo que está organizando el partido de fútbol.

Está analizando el punto de equilibrio, antes y después, respecto al costo, al ingreso y a la utilidad, gráficamente.

A1: Lo que yo hice fue variar mi costo fijo y el costo unitario, generando un punto de equilibrio con menos boletos vendidos, baja porque le voy a pagar menos a mi equipo, entonces voy a obtener más rápido utilidad y más rápido ingreso.

Señalando en la gráfica la alternativa que realizó, mostrando la representación de la función de utilidad.

A2: Yo tengo otra propuesta, yo aumenté el precio en un caso y en otro lo disminuí, en el primero cuando aumento el precio el punto de equilibrio se alcanza con menos boletos vendidos,

> y en el segundo caso disminuyo el precio y aumento el costo fijo, se desplaza el punto de equilibrio hacia la derecha, o sea que se necesitan vender más boletos para alcanzarlo.

A2 como de costumbre explicitando lo que hace con base en los argumentos económicos.

En esta sesión los comentarios sobre el problema fueron más directos. El hecho que A4 haya tenido los conceptos diferentes sirvió para hacer una reflexión sobre los ingresos, los costos y la utilidad, con sus representaciones algebraica y gráfica, además un análisis cuando los costos son mayores al ingreso, cuando son iguales y cuando el costo es menor que el ingreso, ligándolos con el concepto de utilidad, y finalmente manejando propuestas, o sea, problematizando el problema.

Aquí ya se capta un desenvolvimiento mayor de los alumnos para expresar verbalmente sus reflexiones con más seguridad, y haber empezado el problema intercambiando lo que cada quién construyó individualmente, sin tanto preámbulo. A4 dejó de participar al principio de la discusión.

Hay que señalar que a esta sesión no se presentó A4.

Se comenzó la sesión comentando partes que se habían tocado en la pasada.

> A1: La variable independiente es el número de boletos comprados.

> A3: El punto de equilibrio me sale igual a 11,111 boletos, e indica que después de ese, comienza a percibir utilidades, su costo va a ser menor y su ingreso mayor.

> A1: Si no se venden boletos vamos a tener una pérdida de 100,000u, y tiene que haber una entrada mayor a 11,111 o sea un equipo pequeño como el necaxa o algo así, donde entran pues como 8,000 o 10,000 pues no le convendría, o sea por eso digo que se tienen que checar varios factores, la fórmula de costo total de forma pendiente ordenada al origen igual a C=3X + 100,000, para el ingreso Y=12X, y la utilidad

U=9X – 100,000, y con base en estas fórmulas puedes sacar cualquier punto, ¿no? y este fue el método que utilizamos para sacarlo como función.

Exploraron un poco acerca de las condiciones alrededor del partido, cuando obtienen utilidades, si no van los espectadores, si es buen juego, si se puede llenar el estadio, etc.

A2: El análisis dominio rango que sacamos es que cuando se venden entre 0 y menos de 11,111 boletos, nuestro costo es mayor que el ingreso y por lo tanto la utilidad es negativa, o sea tenemos pérdidas, cuando nuestro número de boletos son igual a 11,111 boletos el costo y el ingreso se igualan, aquí pues no existe ninguna utilidad ni ninguna pérdida y cuando el número de boletos es mayor a 11,111 boletos el ingreso empieza a ser mayor al costo total y empieza a haber utilidad, nada más sería el análisis dominio rango.

A2 habló ya de tres conceptos separados, ingreso costo y utilidad, fruto de una concepción más clara.

Se presentaron siete propuestas con sus respectivas gráficas, comentando lo siguiente;

A1: Para obtener mayores ganancias le bajo el costo fijo, o sea, en vez de darle 100,000, le doy 50,000 pero creo que puedo ganar más con el boletaje, o bajarle el porcentaje, subirle el costo fijo a 200,000 pero le das el 10% de la taquilla, podría ser que obtendríamos mayor utilidad.

A2: Yo creo que ganaríamos más si le rebajáramos el porcentaje que se le paga por boleto y no tanto rebajarle el costo fijo

A1: La reducción del porcentaje nos aumentaría la utilidad.

A3: Simplemente negociar el porcentaje.

A1: Hay que tomar en cuenta que la asistencia no es segura.

A2: Hay que generar alternativas como llevar a los dos equipos a otro lugar donde tengan más demanda.

A1: Son distintos factores los que tenemos que ver.

La parte exploratoria se utilizó para encontrar algún punto de vista nuevo sobre el problema, o sea, ya aprehendido querían ver nuevas posibilidades, problematizar el problema. Contrastando con el tipo de exploración que hacían al principio del curso, que era una exploración para darle sentido al problema. Cabe aclarar que las exploraciones van adquiriendo distinto significado, dependiendo de cómo se va entendiendo el problema. Ésta exploración fue más elaborada, dado que ya tenían más conocimientos.

4 ACTIVIDADES RESPECTO A LA FUNCIÓN LINEAL

A lo largo del curso se realizaron varias actividades que tenían como objetivo, reforzar el concepto de función y sus respectivos elementos. La primera actividad fue;

4.1 Definición de función lineal

En el primer caso, se hicieron varios ejercicios sobre la definición de la función lineal, reportando las respuestas de una actividad casi al final del curso.

A1: Matemáticamente es una relación de dependencia en que cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del contradominio o rango, es decir, que a cada valor de X le corresponde uno y solo un valor de Y, económicamente, es la manera en que se expresa el comportamiento de un concepto económico como es la utilidad, el costo el ingreso etc.

A2: Matemáticamente, es una relación de dependencia entre variables, una independiente y otra dependiente, la dependiente está determinada por la independiente, económicamente f(L)= 80L esta es una función de ingreso, la cual está dependiendo de la cantidad de libros vendidos, por el precio, D=f(p)=-8p + 200 es una función de demanda, depende del precio ya que el productor al aumentar una unidad de precio a su producto, los consumidores dejan de consumir 8 unidades del producto

A3: Matemáticamente, función es una relación donde hay una variable dependiente y una variable independiente X, Y=f(X); Y será rango, X dominio, económicamente, CT=15L + 300,000 el costo total estará en función de libros producidos, en donde CT= variable dependiente, L= variable independiente el rango serán los valores que tome CT (Y) y el dominio serán los valores de L, (X).

A4: Es una relación de uno a uno de un conjunto X a un conjunto Y.

Se compararán estas definiciones de función, con las del examen diagnóstico;

A1: No hizo el examen diagnóstico.

A2: Una función lineal es una forma de resolver un problema.

A3: No la hizo.

A3 no la definió, pero mencionó sus elementos correctamente, Y=f(x)=mx+b, Y=f(x)=5x+30, f(x)=y= variable dependiente, 5 ó m=pendiente, x=variable independiente, 30;b=ordenada al origen. Graficando las expresiones algebraicas que se dejaron correctamente, y asimismo representó algebraicamente las gráficas que se pusieron.

A4: Una función es aquella que se relaciona una sola vez con un subconjunto. Es decir la relación es uno a uno.

Se pudo ver que sí hubo cambios, de las definiciones previas, a las construcciones finales, no explicitadas solamente aquí, sino a lo largo del trabajo realizado. Se podría considerar que A1, A2 y A3, pasaron de una baja conceptualización (a excepción de A3, que se puede decir que tenía un mayor conocimiento), a una que posteriormente pudieron definir con un referente matemático-económico.

A4 que tuvo una definición aparentemente más compleja ("una función es aquella que se relaciona una sola vez con un subconjunto. Es decir la relación es uno a uno"), la realizó con las mismas palabras, sin modificación alguna, "Una función es aquella que se relaciona una sola vez con un subconjunto. Es decir la relación es uno a uno". Se podría inferir que obedece más a una definición memorística, que a una definición procesada razonada y construida.

4.2 Representaciones algebraica y gráfica de varias funciones económicas, haciendo énfasis en los elementos de la función.

En el segundo caso, uno de los ejercicios contundentes, que muestran el avance de la construcción, fue una plenaria en la cual de tarea se les dejo traer algunas de las funciones que se habían realizado a través del curso. En el pizarrón se pusieron, por un lado, las expresiones algebraicas y, por el otro, los elementos matemáticos de la función, (variable dependiente, pendiente, variable independiente y ordenada al origen), de ahí se fueron colocando los elementos económicos de cada función con su referente matemático, mostrando la metamorfosis de cada elemento, dependiendo del contenido de la función económica fue una actividad de generalización, por medio de la cual se produjo un reforzamiento en la construcción del tema, además de emotiva, por el efecto de ver la función lineal en las representaciones algebraica y gráfica, con expresiones distintas según el problema económico que se trataba. Ejemplificando:

FUNCIONES	**PENDIENTE**	**ORDENADA AL ORIGEN**
C=f(hr)=180,000+100hr	Costo unitario por hr.	Costo del Robot 1
C=f(hr)=250,000+80hr	Costo unitario	Costo del Robot 2

	por hr.	
C=f(L)=300,000+65L	Costo unitario del libro.	Costo de la máquina
Y=f(L)=80L	Precio del libro	No hay
U=f(L)=15L-300,000	Contribución al Costo fijo y utilidad	Costo de la máquina
Q=f(p)=-8p+200	La baja en la cantidad demandada si sube en una unidad el precio	La cant. demandada si el p=0 (mercado posible).
Q=f(p)=-50+10p	La cantidad en que subiría la oferta si sube el precio una u.	No tiene sentido ec.
V=f(t)=75,000-150t	Depreciación anual	Valor inicial del artículo que se compró.

También se definieron cada una de las variables con su respectiva relación de dependencia.

4.3 Traslación de la representación algebraica a la gráfica

La tercera actividad a la cual se le dio seguimiento, originada en el examen diagnóstico, fue la traslación de la representación algebraica a la gráfica, y viceversa, en el examen de salida, hicieron el mismo que de entrada, con los resultados esperados contundentes.

5 COMENTARIOS FINALES DE LOS PARTICIPANTES

Se van a presentar los comentarios finales de los participantes, A1, A2, y A3, ya que A4 no terminó el curso.

> A1: Lo que me pareció positivo del curso fue que aprendes a darle una interpretación económica a los problemas matemáticos, es decir, que ya no los aprendes con una forma abstracta, sino que le das un significado económico. Lo negativo ... en general, el curso me pareció muy bueno pero me parece importante que el profesor regrese las tareas, para darnos cuenta de los errores que tenemos. Como alternativas, sería muy interesante que alguna vez fuéramos a una empresa para hacer los problemas más reales.

> A2: Lo positivo sobre el curso es que la forma de dar la clase es muy interesante y lo que se ve en ello se puede aplicar a otras clases. Esta forma de estudio te hace pensar y te hace aplicarte un poco más. Me gustó mucho la clase. Lo negativo podrá ser que por el mismo sistema de aprendizaje muchos compañeros desertaron de la clase, por lo mismo no hubo una retroalimentación mucho mayor. Bueno pero de lo que se perdieron. La clase es muy interesante, y muy buena, te hace aprender mucho, siga así.

> A3: El método empleado permite al alumno abundar en el conocimiento, ampliando el horizonte, es decir, permite al mismo alumno, con ayuda del profesor, resolver las dudas que se originan paulatinamente, fomentando el autoconstructivismo. El curso me ayudó bastante a resolver dudas en general, ya que no me había planteado el significado de ciertos elementos (en el caso de las funciones), entendiendo a un nivel mayor y desde su profundidad el planteamiento y significado de lo que vimos en clase.

6 RESUMEN

6.1 Examen diagnóstico

El examen diagnóstico, como expresión de los conocimientos previos, estuvo referido a los temas que se tocaron durante el curso y que fueron la función lineal, sus elementos y la resolución de problemas económicos. Éste mostró una insuficiente conceptualización por parte de los alumnos acerca de los temas mencionados y, prácticamente una aplicación nula en la resolución de problemas. Conjeturamos que para la mayoría de los estudiantes la línea recta es, preponderantemente, un icono, es decir, un dibujo (una línea junto con los trazos del sistema de coordenadas cartesianas) pero que no lo interpretan a partir de las relaciones implícitas en él. Se concluye a partir de lo anterior, que se empezó el curso con conocimientos del tema muy difusos.

Respecto a la discusión del artículo que se estudió, se podría comentar que predispuso al alumnado a una experiencia diferente (en los momentos de intercambiar partes del artículo referido a sus experiencias), en cuanto al aprendizaje de las matemáticas. Fue una actividad que empezó a romper la relación formal del contrato didáctico tradicional y posibilitó el comienzo de la transferencia de la responsabilidad de su aprendizaje, por lo menos, en cuanto a que el funcionamiento en el aula (los papeles del profesor y los estudiantes y lo que significa aprender) fue problematizado.

6.2 Concepto de función

En la actividad de definir el concepto de función, se mostró claramente, que empezar con definiciones matemáticas formales no fue buena idea, ya que se trata de una actividad matemática (el definir) muy alejada de sus conocimientos y sus prácticas previas en el aula.

Por el contrario, en el ejemplo de las telas, cuando la discusión se llevó al contexto cotidiano, a lo conocido para todos, y de ahí partieron para engarzar los conceptos teóricos con su realidad, dándoles un sentido personal (asimilación), lo cuál no implica que lo hayan asimilado en el momento en que llegaron a una definición formal, fue solamente un acercamiento. Es una muestra del proceso de construcción.

Otra observación a destacar, fue el proceso de exploración que se estimuló en las actividades grupales, ya que propició la negociación o resignificación de los conceptos de variable dependiente e independiente.

6.3 Concepto de costo

Para la definición de los costos, primero hicieron un intercambio de las definiciones que cada uno trajo, y mediante la dirección de A1 coincidieron que los costos estarían definidos por la fórmula de costos totales que serían iguales a la suma de los costos fijos más los costos variables. Al igual que en la definición del concepto de función (referida al costo de la tela), los conceptos de costos fueron referidos al problema de los robots para darle sentido a su discusión, resaltando la conexión con algo que para ellos está asimilado en sus estructuras cognitivas. De esa forma llegaron a ciertos acuerdos en el significado de los costos. Se dejó ver claramente el entendimiento del problema por parte de A1 (mediante la correlación de los costos y su representación gráfica), se le dio cabida a la construcción de los conceptos de costos mediante los diálogos, y se llegó a una primera aproximación grupal de la representación algebraica de los costos totales como F=(x), y las horas como x.

6.4 Problema de los robots

Al comienzo del problema se sintieron muy desorientados ya que no existieron preguntas explícitas que les dijeran qué es lo que tenían que hacer, lo que significó un claro desequilibrio en relación con lo que hacían cuando resolvían problemas en su pasado. Sin embargo, el hecho de haber trabajado el concepto de costos, utilizando el problema de los robots para definirlo, les hacía tener una conexión. Esto permitió, a la vez, desarrollar otras formas de enfrentar los problemas mediante el desarrollo de sus heurísticas individuales, y grupales.

En este grupo hay que hacer hincapié en la participación de A1 que fungió en muchas ocasiones como papel sustituto de profesor o como guía, centrando las discusiones y preguntando cuando no entendía las propuestas de los otros compañeros, como parte de su método de construcción.

La mayor parte de la construcción del problema de los robots, se centró en entenderlo y darle sentido, lo que propició una exploración profusa cuando trataban de dar significado a los conceptos y al problema en sí. Las exploraciones en este sentido los llevaron por caminos y propuestas que, por momentos se perdían y por momentos pudieron ser alternativas del planteamiento del problema, pero sin embargo, no las lograron visualizar, ya que no tenían los suficientes conocimientos previos. En otras ocasiones se perdían y hasta que se daban cuenta, regresaban.

En la medida en que fueron asimilando y acomodando sus conceptos, determinaban las diferentes partes de las cuales estaba constituido el problema; por ejemplo, cuando centraron el problema en los costos, cuando visualizaron que se trataba de dos alternativas, ¿cuándo iba a ser más costoso un robot que el otro en el largo plazo? ¿Cuántas horas se necesitaban para igualar los costos de los dos robots? Cuando se planteó la necesidad de visualizar el problema gráficamente, etc. y, posteriormente empezaron a formalizar el problema en términos algebraicos, por ejemplo f(x)=costo total, x=las horas y llegaron a las expresiones de las funciones de costos de los robots,

$$CT1(x)=180{,}000 + 100x \quad \text{y} \quad CT2=f(x)=250{,}000 + 80x$$

y su respectiva representación gráfica. Esto permitió reforzar la visión, que partiendo de un conocimiento previo bien construido y significativo, se puede acceder a la formalización. Esto se puede contrastar con la definición del concepto formal de función, en la cual ningún alumno realizó una definición propia, ya que no tenían los suficientes conocimientos previos o referencias experienciales en el sentido formal, pero al momento de utilizar un ejemplo de la vida diaria, "el costo de la tela", se pudieron caracterizar los conceptos de variable dependiente e independiente, que si bien no todos lo entendieron completamente, si fue un acercamiento que permitió una cierta asimilación.

Hay que resaltar el momento en el que encontraron algebraicamente (partiendo de la propuesta de A2) el punto donde los costos de los robots se igualaron; fue un momento catártico, dada la satisfacción y emoción que produjo en los cuatro integrantes y mostró cómo, en los diferentes pasos de su construcción, fueron encontrando pequeños estímulos que impulsaron la reconstrucción de su seguridad y autoestima.

La explicación del problema se lo plantearon en seis ocasiones, mostrando que lo que habían construido en un momento anterior no estaba del todo claro para todos, y eso los impulsaba a seguir explorando, suponiendo, cambiando puntos de vista, e ir construyendo.

6.5 Problema de los robots con costos unitarios invertidos

En este problema se manifiesta de manera palmaria, la influencia de la representación gráfica en la construcción y entendimiento del problema. En un principio, el diálogo lo realizaron solamente A2 y A4, y se centró en aspectos meramente operativos y algebraicos, sin referencias al significado económico. Mostrando que no tenían completamente acomodado ese conocimiento, pero que ya lo habían concluido en el problema pasado en seis ocasiones.

Fue hasta el momento en que se incorporó A1, cuando se enfocaron en el razonamiento económico, y mediante la contrastación de los elementos de los dos problemas, lograron profundizar. Aunado a lo anterior, la gráfica que mostró A1 dio paso a la visualización de los argumentos que estaban en juego y disipó cualquier interpretación errónea, lo que permitió conjuntar las interpretaciones sobre los problemas. Finalmente se señaló cómo el entendimiento del problema fue posibilitando la ampliación en las representaciones, que en este caso fue de la algebraica a la gráfica.

6.6 Dos alternativas de producción

El presente problema presentó el desarrollo del proceso de construcción, ya que los tres alumnos que reportaron su tarea mostraron una mayor facilidad del planteamiento algebraico y gráfico, explicitando las relaciones entre una y otra representación. Se pudo ver también la influencia del entendimiento de los problemas anteriores de costos, lo que va facilitando el proceso de construcción, y de representación, así como de un pequeño análisis. Se evidencia así, que las tareas son otra representación de cómo van sistematizando su conocimiento, como van asimilando sus ideas y conceptos, y como van acomodando mediante la resolución de los problemas económicos.

6.7 Tres máquinas como alternativas de producción

En el siguiente problema se presentó la misma tendencia en el proceso de construcción, lo analítico va tomando más espacio, se refuerzan los planteamientos con la representaciones algebraica y gráfica, llegando al análisis. En el caso de A3 muestra un pequeño análisis, el cual no había expresado anteriormente.

6.8 Producción y venta de vasos

Es notorio el cambio en la actitud ante la construcción de su conocimiento ya que se preguntan ahora entre ellos mismos el sentido del problema, ("¿Qué tenemos que buscar? ¿Cuanto cuesta producir vasos, y cuando hay ganancias? ¿Cuándo es la ganancia o la pérdida?"), lo que antes le preguntaban al maestro, cambiando las leyes del contrato didáctico que son los roles.

Los ejemplos de negociación de la fórmula de ingreso, (hay que insistir en que este concepto es nuevo), o la manera en que se llegó al punto de equilibrio, llevaron a recomponer los conceptos con los cuales iniciaron la sesión; esto se dio a través de una doble actividad, la negociación grupal y la reconstrucción individual mediante sus respectivos procesos de asimilación y acomodación, que consistieron en una exploración sobre el cuestionamiento del mismo concepto, ya que cada uno lo entendía de manera diferente y cómo se incorporó en la resolución del problema. Como parte del proceso anterior se incluye el arribo al punto de equilibrio mediante las dos variables económicas, a saber, los vasos producidos y vendidos por una, y la igualación con los costos e ingresos por la otra.

Fruto de la misma negociación, generaron la representación gráfica de las funciones y ubicaron el punto de equilibrio, analizando el trayecto de las mismas antes y después de este punto. Lo anterior señala que la construcción va progresando, permitiendo que la visión del problema que en el principio no les permitió explicarlo en palabras, sea más nutrida, (la representación algebraica, la representación gráfica, la explicación económica), y por lo tanto su comprensión. En este problema fue la primera ocasión en la que se mencionó, matemáticamente, un elemento de la función, "A3 el costo fijo es la ordenada al origen $370,000".

La interpretación elícita del problema se ciñó solamente al planteamiento de las funciones de ingreso y costo, sin contemplar la utilidad como una parte sustancial del proceso, y por lo tanto se tiene que expresar en una función y realizar las comparaciones pertinentes.

6.9 Tres alternativas de facturación

En este problema se siguió la misma tendencia al intercambio de opiniones, desechando una alternativa de facturación habiendo aún argumentos económicos que la sustentaran, y profundizando en la construcción de su aprendizaje. Partieron su análisis de las conclusiones a las que habían llegado de manera particular, ya no partieron del planteamiento del problema, como anteriormente, mostrando otro estado del conocimiento más amplio, donde sus estructuras cognitivas se van ampliando.

6.10 Líneas de código

Algo notorio, es que el problema lo comenzaron con el análisis de éste, que sirvió como columna vertebral para la formalización de variables, estructuración de las funciones, la graficación y su interpretación económica. Anteriormente empezaban la resolución de los problemas con el análisis de las cifras, y sus exploraciones más profusas, buscando la reconceptualización y el sentido del problema. Ahora la exploración se centró en el análisis del problema mismo, o sea, en los límites de significación económica. Se van centrando en el problema como guía, resolviéndolo entre ellos mismos, o sea, ya no recurren tanto a preguntarle al profesor, se hacen las preguntas a ellos mismos, se sigue reforzando el papel activo e independiente. Intercambian sus puntos de vista, ya influenciados por sus conocimientos previos que son varios problemas de costos, los cuales han permitido la ampliación de sus estructuras cognitivas.

6.11 Un equipo quiere agregar un partido de fútbol a la temporada

En esta sesión los comentarios sobre el problema fueron más directos. El hecho que A4 haya tenido los conceptos diferentes de los de sus compañeros, sirvió para hacer una reflexión sobre los ingresos, los costos y la utilidad, con sus representaciones algebraica y gráfica, además un análisis acerca de cuándo los costos son mayores al ingreso, cuándo son iguales y, cuándo los costos son menores que el ingreso, ligándolos con el concepto de utilidad y, finalmente manejando propuestas, o sea, *problematizando el problema.*

La parte exploratoria se utilizó para encontrar algún punto de vista nuevo sobre el problema, o sea, querían ver nuevas posibilidades. Contrastando con el tipo de exploración que hacían al principio del curso, que era una exploración basada en las cifras, en la reconceptualización y, en darle sentido al problema, fue evolucionando al análisis y finalmente a las alternativas del mismo.

Cabe aclarar que las exploraciones van adquiriendo distinto significado dependiendo de como se va entendiendo el problema. Ésta exploración fue más elaborada, dado que ya tenían más conocimientos previos. La transformación del pensamiento operativo, va evolucionando, presentándose análisis de las situaciones matemáticas-económicas y propuestas o sea, problematizando los problemas.

V RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Se responderán las dos primeras preguntas de investigación al mismo tiempo, ya que las representaciones algebraica y gráfica, están inmersas en problemas económicos, entendiéndolas como las caras de la misma moneda.

1.- ¿Que papel juegan las representaciones algebraica y gráfica en la construcción de la función lineal?

2.- ¿Qué papel juega el contexto económico en la construcción de los elementos de la función lineal?

En las diversas discusiones que se llevaron a cabo a lo largo de esta experiencia educativa con el fin de propiciar el aprendizaje de la función lineal, se mostró palmariamente, que los estudiantes hicieron exploraciones en el momento en que no se entendía algo, (conceptos, sentido del problema, representaciones, análisis o alternativas del problema, incluyendo búsquedas infructuosas que, al momento que las

La parte exploratoria se utilizó para encontrar algún punto de vista nuevo sobre el problema, o sea, querían ver nuevas posibilidades. Contrastando con el tipo de exploración que hacían al principio del curso, que era una exploración basada en las cifras, en la reconceptualización y, en darle sentido al problema, fue evolucionando al análisis y finalmente a las alternativas del mismo.

Cabe aclarar que las exploraciones van adquiriendo distinto significado dependiendo de como se va entendiendo el problema. Ésta exploración fue más elaborada, dado que ya tenían más conocimientos previos. La transformación del pensamiento operativo, va evolucionando, presentándose análisis de las situaciones matemáticas-económicas y propuestas o sea, problematizando los problemas.

V RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Se responderán las dos primeras preguntas de investigación al mismo tiempo, ya que las representaciones algebraica y gráfica, están inmersas en problemas económicos, entendiéndolas como las caras de la misma moneda.

1.- ¿Que papel juegan las representaciones algebraica y gráfica en la construcción de la función lineal?

2.- ¿Qué papel juega el contexto económico en la construcción de los elementos de la función lineal?

En las diversas discusiones que se llevaron a cabo a lo largo de esta experiencia educativa con el fin de propiciar el aprendizaje de la función lineal, se mostró palmariamente, que los estudiantes hicieron exploraciones en el momento en que no se entendía algo, (conceptos, sentido del problema, representaciones, análisis o alternativas del problema, incluyendo búsquedas infructuosas que, al momento que las reconocían, regresaban, alternativas perdidas por falta de conocimientos previos, etc.). Esto quiere decir, que la comprensión de los conceptos económicos y los problemas, facilitaron la formalización de la función lineal, sus diferentes representaciones y alternativas a los problemas (problematizar los problemas).

De esta manera hubo una metamorfosis que se llevó a cabo en los contenidos de las exploraciones, a través del desarrollo de la investigación. En la primera etapa de resolución de problemas, las exploraciones estaban centradas, dirigidas a la definición de conceptos (económicos y algebraicos), su representación en ecuaciones y el sentido del problema. Posteriormente, fueron evolucionando a la expresión de la función y su operacionalización (donde hubo momentos catárticos, como cuando llegaron al punto de igualación de los costos de los robots, mediante la igualdad de ecuaciones, generando motivación en la construcción de su proceso), para luego dar paso a la representación gráfica que fue un factor de acomodación cardinal, ya que la visualización favoreció un análisis (tanto económico como formal de la función lineal), más amplio, profundo y asequible al grupo, permitiendo mutar a un análisis de significación económica (incorporando los conceptos de dominio-rango), siendo su última faceta, la generación de algunas propuestas a los problemas, promoviendo sus heurísticas centradas en su creatividad .

La actividad en que se definió el concepto de función, puso de manifiesto, que no tenían los conocimientos previos para realizarla mediante definiciones formales. Sin embargo el momento en que se utilizó el ejemplo del costo de la tela, permitió tener un referente en la experiencia de cada alumno y acercarse a los conceptos de variable dependiente y variable independiente.

De esta manera, se volvió a realizar una actividad donde tenían que definir el concepto de función al último de la investigación, y A1, A2 y A3 relacionándolo con la experiencia de la resolución de los problemas económicos, o sea que su definición estuvo mezclada con algún problema económico, resaltando la importancia del aprendizaje significativo o contexto económico, en su construcción. Se considera que el proceso de formalización algebraica fue paulatino. En un primer momento, el acercamiento fue mediante la relación de dependencia (en el ejemplo de las telas), entre la variable dependiente e independiente, visualizándola posteriormente en las coordenadas (gráfica), pero sin hacer explícito la altura e inclinación, aunque ya tenían los antecedentes experienciales en los problemas.

La representación gráfica fungió como una herramienta eficaz, que permitió reforzar la construcción y el entendimiento de la función lineal, y de su representación algebraica (cabe señalar que primero se accedió a la expresión algebraica y posteriormente a la gráfica). La comprensión gráfica, permitió dar paso a una interpretación más profunda del problema y, a generar alternativas (parte creativa). La pendiente y la ordenada al origen, se hicieron explícitas en la actividad de generalización (para la cual se les dejó investigar los elementos de la función lineal), donde relacionaron los conceptos formales con los económicos, permitiendo que todo el trabajo de razonamiento económico, algebraico y gráfico concomitantemente, se engarzaran, con los conceptos de pendiente y ordenada al origen, como se evidenció en los ejercicios de salida, sobre la gráfica de expresiones algebraicas y viceversa. La parte económica fue lo que le dio sentido en cada alumno, a los elementos de la función.

Se podría concluir que la construcción de significados y resolución de problemas económicos, permitió la formalización en las representaciones algebraica y gráfica de la función lineal y sus elementos, pero al mismo tiempo, el acceso a estas representaciones propició el paso a su propia construcción, transitando de lo operativo a lo analítico-creativo. Recordando los trabajos precedentes sobre la construcción de la ecuación de la línea recta (de dos incógnitas), de Schoenfeld, Duval, Herchovicks y

V. Hoyos, se podría resaltar el papel de los signos (semiótica), en la generación de conceptos (noesis), y sus respectivas relaciones, mediante las representaciones algebraica y gráfica.

3.- ¿Cómo evoluciona el papel del alumno a través del curso?

La mayoría de los alumnos tuvieron un impacto positivo con la lectura de la "didáctica constructivista", la cual, los sensibilizó para un cambio en sus procesos de aprendizaje.

En un principio los alumnos se preguntaban y, preguntaban al profesor, el porqué no tenían preguntas los problemas y por lo tanto no sabían que hacer. Tal situación les causaba angustia, incertidumbre, ya que se sentían perdidos y tenían que responder de alguna manera. En algunos momentos se acordaban de algunas ideas sobre el artículo como "nosotros tenemos que construir nuestras hipótesis", pero seguían tratando de entender los conceptos, los problemas, de encontrar sentidos, efectuando un cambio en su manera de intervenir respecto a su educación pasada, era un cambio acerca del contrato didáctico, donde el rol, o responsabilidad del proceso de aprendizaje se les regresaba a los alumnos mediante las actividades, propiciándoles el trabajo individual y grupal que permitió la reflexión, el análisis y, la verbalización (como medio de construcción, y desarrollo) de los conceptos y problemas a los que se enfrentaban.

Este contrato fue evolucionando, de tal manera que llegó el momento en que los alumnos, en vez de preguntarle al profesor qué hacer, se preguntaban a ellos mismos, de qué se trataba el problema, aclaraban sus diferencias conceptuales, realizaban sus análisis, mostrando un cambio de actitud hacia su proceso de aprendizaje, empezando a romper el lazo de dependencia, en el cual toda actuación está validada por el profesor.

Esta actuación propició que sus puntos de vista fueran razonados y argumentados, de tal forma que pudieran llegar a acuerdos. Este proceso de argumentación produjo una reconstrucción de su seguridad hacia el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que sabían que para defender hay que proponer.

La elaboración de las tareas como parte del proceso de construcción, y las argumentaciones grupales, ofrecieron una muestra de los procesos de acomodación y asimilación, mediante el cual sus conocimientos previos se veían enfrentados con la información nueva, produciéndose un choque, que en la medida en que usaban sus heurísticas, los conocimientos anteriores se iban modificando, así también, las llamadas estructuras cognitivas.

Un ejemplo claro, fue el concepto de función, en el cual al principio tenían algunos conceptos dispersos, los cuales mediante las actividades (el problema de las telas), fueron dándoles una reconceptualización, en las variables dependiente e independiente, y su relación de dependencia, que poco a poco, se fue modificando con la resolución de problemas, expresando el avance en las clases donde se generalizaron los conceptos de ordenada al origen y pendiente, y sus representaciones algebraica y gráfica, en relación a sus connotaciones económicas.

Experimentaron una manera diferente de construir su aprendizaje, en el cual se mostraron cambios significativos frente a su proceso de aprendizaje, (a su responsabilidad de cómo encararlo) que si bien es cierto, se reforzará poco en sus próximos cursos, se les deja en un proceso que puede ser germinal, y potenciar su desarrollo integral, uno de los propósitos del constructivismo.

VISIÓN CRÍTICA DEL PROCESO

Hay que abordar los temas matemáticos, teniendo en consideración los conocimientos previos con que cuentan los alumnos y su área de interés, para evitar caer en el tratamiento memorístico. No hacerlo, fomenta y refuerza un patrón de conducta en el alumno de rechazo hacia lo que no le interesa, y de obediencia para realizar las cosas. Lo anterior sucedió con la tarea en donde se dejó investigar la definición de concepto de función, y traer una definición propia. La recomendación partió de A1, con el ejemplo del costo de las telas, ejemplo que todos lo pudieron reconocer en su experiencia, facilitando la construcción del concepto. Hay que propiciar ejercicios en los cuales puedan conectar los temas a estudiar con sus experiencias, o conocimientos previos.

El profesor debe dejar que los alumnos propongan planteamientos, soluciones, y no dirigir el curso de sus razonamientos, conducta que obedece a la educación tradicional. Tanto los alumnos como los maestros, tenderán a este tipo de conductas, dado que es el patrón donde fuimos educados, generando vínculos de dependencia expresados mediante el contrato didáctico. Enseñar los pasos que tienen que seguir para modelar su realidad, propicia no proponer los propios y seguir ajenos.

El vínculo de dependencia, genera el patrón de conducta de no investigar, no pensar en los problemas, no ir hacia ellos, situaciones que no permiten que se desarrolle la creatividad. La intervención del profesor debe ir dirigida en la creación de las situaciones didácticas que permitan generar el desarrollo de las heurísticas de los alumnos, y situaciones donde puedan construir nuevos conocimientos. Esto se pudo evidenciar en algunos diálogos donde el profesor propuso el camino a seguir, por ejemplo, cuando habían trabajado en concepto de función, el concepto de costos, y el primer acercamiento al problema de los robots, donde preguntó, ¿que es lo que hemos visto?, entonces hay que relacionar estos temas.

Para que la dependencia entre profesor, alumno y aula, se vaya transformando, para que la responsabilidad del aprendizaje regrese al actor mismo, hay que diseñar situaciones en las cuales los alumnos se puedan acercar al mercado de trabajo del economista, de tal manera que su aprendizaje lo encuentren tanto en la universidad y en la realidad, y no solamente en una de ellas. Algunas recomendaciones al respecto podrían ser el análisis de notas periodísticas, investigar problemas económicos de actualidad, propiciar círculos de estudio, todas estas actividades, tendrían que surgir de la conciencia generada en los alumnos.

Hay que revisar las tareas como un testimonio donde plasman sus apreciaciones, la sistematización de sus pensamientos, el nivel de conocimientos y su interrelación, mostrando parte del proceso que van desarrollando a través de su construcción.

POR DONDE SU PUEDE CONTINUAR

Se propondrán algunas líneas de investigación a realizar, bajo la concepción de Cesar Coll, que dice que toda investigación educativa debe abarcar sus aspectos fundamentales, a saber, currículum, didáctica (enseñanza-aprendizaje) y, evaluación.

Una línea de investigación que sería conveniente, es la influencia del aprendizaje anterior, en la resolución y modelaje de problemas, ya que al querer llegar a un resultado solamente, se pierde la dimensión de los recursos con que uno cuenta, y puede tener a la mano.

Otro tema interesante a indagar puede ser cómo se produce el proceso de acomodación y asimilación en un contexto. Este hecho nos puede dar pistas para propiciar el diseño tanto de materiales y de situaciones didácticas específicas, que propicien deliberadamente la construcción e independencia.

Otro tema aconsejable de estudio es el rol (y su transformación) del profesor en un proceso de aprendizaje por parte del alumno, ya que podría dar luz del comportamiento que promueve un tipo de aprendizaje. De esta investigación se podrían formular recomendaciones para una actuación más conciente de la pedagogía que utiliza el profesor en su salón de clases, posibilitando la visualización de sus posibles consecuencias.

Que tipo de actitudes y valores se generan en el conductismo y en el constructivismo, reflejándose en la conducta cotidiana.

CONCLUSIONES

El contexto económico y la resolución de problemas permiten la posibilidad de la construcción de la función lineal, sus elementos y sus representaciones algebraica y gráfica. Éstas son un medio poderoso, mediante el cual permiten generar las relaciones conceptuales necesarias para la construcción formal de la función lineal.

Se logra avanzar de un proceso operativo, donde los números al parecer es lo representativo, a un pensamiento que está basado en lo operativo, y se despliega en analítico y creativo.

La experiencia por la cual pasan los alumnos, les permite hacer una reflexión sobre su proceso de aprendizaje y una manera de ver de ver la vida.

Es muy importante como profesor tener una concepción sobre la enseñanza y el aprendizaje, para ser conscientes de las repercusiones que tiene nuestro estilo de dar clases en la formación de un alumno en última instancia, o sea, que tipo de alumno estamos educando y con que capacidades y habilidades reales va a salir de nuestras aulas.

El método constructivista nos da la posibilidad real, de ir modificando a los actores del fenómeno educativo hacia una responsabilidad compartida, donde los roles generen independencia y formación integral para el educando.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Kluwer Academic Publishers, London.

Budnick, Frank, S. (1987). Matemáticas aplicadas para la administración, economía y ciencias sociales. Ed. McGraw-Hill.

Bustamente, H. (2004). Principios constructivistas aplicados a la educación a distancia. UNAM.

Campos, Miguel Ángel y Gaspar, Sara. Num. 43-44. (1989). Los conceptos de educación y aprendizaje en la teoría Piagetiana y algunas implicaciones. México.

Coll, César. (1997). Qué es el constructivismo. Ed. Magisterio del río de la plata. Argentina.

De Olaizola Arizmendi, Iñaqui. (2003). Procesos de aculturaciòn en una enseñanza basada en la resolución de problemas en la escuela secundaria. Tesis Doctoral. CINVESTAV.

Díaz-Barriga Arceo, Frida y Hernández Rojas, Gerardo. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo (una interpretación constructivista). (pp. 23-62). Editorial Mc Graw Hill.

Gardner, Howard. (1988), La Nueva Ciencia de la Mente. (Historia de la Revolución Cognitiva. (pp. 20-62). Editorial Basics Books, Inc. Publishers, New York.

Goetz, J.P., LeCompte, M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. (pp. 11-21). Ed. Morata. Madrid.

Haeussler, E., Richard, S. Jr., (1992). Matemáticas para administración y economía. (pp. 33-52, 121-171). Ed. Grupo editorial iberoamericana. México.

Hernández, Hernández, Julieta M. (2004). Programa de actualización docente para profesores de licenciatura. Curso de introducción a la didáctica universitaria. UNAM.

Hernández Rojas, Gerardo. (2004). Paradigmas en psicología de la educación. Editorial Paidos. México.

Hernández, Saavedra, C. (1999). Elementos pedagógicos de la enseñanza de la matemática. UNAM.

Hoyos Aguilar, Verónica. (1998). Revisitando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: Observaciones empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad. Revista en investigaciones en matemática educativa 11. UPN.

Kieran, Carolin. (1977). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. Universidad de Québec en Montreal.

Molina, M., Molina, J. (2002). Diseño instruccional para la educación a distancia. Revista Universidades. UDUAL. UNAM.

NCTM (2000) Principles and standards for school mathematics. Reston VA; NCTM.

Vygotsky, Lev, (1994). Pensamiento y Lenguaje, pags. 7-19. Editorial Ediciones 5°. Sol, S.A. de C.V.

Sainz, Z. Alejandro. (2002). El aprendizaje. Pags. 11-28

APÉNDICE 1

La materia de introducción a los métodos cuantitativos tiene el siguiente contenido Antecedentes:

- Lógica
  - Introducción a la lógica matemática
    - · Proposiciones y conectivos
    - · Agrupamiento y paréntesis
  - Inferencia lógica
    - · Las reglas de inferencia, modus ponens, modus tollens
    - · Deducción proposicional
- Introducción a la teoría de conjuntos
  - Conjunto, elemento, pertenencia
  - Conjunto universal
  - Subconjuntos, subconjunto propio, conjunto vacío.
  - Diagramas de Venn
  - Leyes de Morgan

Unidad 1. Elementos de geometría analítica

- Plano cartesiano
- Pendiente de un segmento y distancia entre dos puntos
- Estudio de algunas ecuaciones;
  - La recta
    - · Ecuación general de la recta
    - · Ecuación pendiente ordenada al origen
    - · Condiciones de paralelismo y perpendicularidad
    - · Ejercicios y problemas
  - La circunferencia
  - La parábola
    - · Ecuación general
    - · Parábola con eje vertical

· Parámetros y propiedades

· Ejercicios y problemas

- La hipérbola
    · Ecuación general

    · Hipérbola equilátera

    · Parámetros y propiedades

    · Ejercicios y problemas

Unidad 2. Introducción a la matemática financiera

- Sucesiones
    - Definición y notación
    - Suma de un número finito de términos consecutivos de una sucesión
    - Sucesiones aritméticas
        · Definición

        · Fórmula del n-èsimo término

    - Sucesiones geométricas
        · Definición

        · Fórmula del n-èsimo término

        · Ejemplos y ejercicios

    - La sucesión aritmética y el interés simple
        · Definiciones

        · Fórmulas

    - La sucesión geométrica y el interés compuesto
        · Definición

        · Fórmulas

        · Ejercicios y problemas

Unidad 3. Estadística Básica

- Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión
- Números índice

- Índices simples
- Índices compuestos
- Índices de precios, cantidad y valor
- Ejercicios y problemas

APÉNDICE 2

D E B A T E

Didáctica constructivista y matemáticas: una introducción

David Block y Alcibiades Papacostas

Introducción

Hoy en dia es por todos reconocido que la enseñanza de las matemáticas en la escuela básica presenta serios problemas. Que el reconocimiento venga hasta ahora no significa que se trate de algo nuevo, sino que ante una cultura moderna nos encontramos multitud de exigencias de conocimientos matemáticos que van más allá de la escuela. En efecto, la sociedad de hoy requiere un manejo funcional de las matemáticas y esto es lo que la escuela tradicional no puede aportar.

La última afirmación debe su existencia en parte a la epistemología genética, la cual ha puesto en evidencia que las nociones que el niño adquiere pasan por un complejo proceso de construcción y, por lo tanto, no pueden ser transmitidas.

A partir de lo anterior hemos visto generalizarse la idea de la necesidad de construcción del conocimiento matemático como la forma adecuada para la enseñanza. Basta abrir el libro del maestro de cualquier grado para encontrar en varias ocasiones esta sugerencia.

Diseñar situaciones de construcción del conocimiento no es una tarea fácil, y menos lo es llevarla a cabo. Una construcción implica un sujeto activo en su relación con el objeto de conocimiento, y esto no se logra, como la mayoria de los libros de texto nos lo hacen creer, al llevar al niño de la mano por una secuencia de etapas (de lo concreto a lo abstracto), por muy bien diseñada que ésta parezca.

El propósito del presente trabajo es introducir al lector a la didáctica constructivista de las matemáticas desde sus fundamentos para medir sus posibilidades como medio de mejorar significativamente la enseñanza de las matemáticas y, aplicada a otras áreas de conocimiento, elevar el nivel académico de nuestros educandos.

Por la brevedad del articulo se manejarán en forma esquemática y sobresimplificada varios de los procesos que intervienen. El lector interesado podrá remitirse a la bibliografía.

Fundamentos de la didáctica constructivista

Los hallazgos de la epistemología genética han puesto en evidencia que las nociones que el niño adquiere pasan por un complejo proceso de construcción: desde la primera vez que el niño se acerca a algún objeto, lo mira a partir de determinados conocimientos previos que tiene sobre los objetos. Podemos decir que el niño tiene sus hipótesis acerca de cómo es, cómo funciona o para qué sirve ese objeto. Su acción sobre el objeto se verá orientada por estas hipótesis, pero es en esa misma acción que sus hipótesis pueden ser confirmadas o contradichas; la aparición de estas contradicciones entre lo que el niño supone y lo que observa al actuar darán lugar a un replanteamiento de las hipótesis originales. En este proceso, presentado en forma por demás simplificada, estriba la evolución del conocimiento en el niño.

Esta explicación del proceso de adquisición del conocimiento ha tenido un impacto inobjetable en las intenciones manifiestas de cuantos nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas: que el conocimiento matemático pueda ser aprehendido por simple transmisión de información, es decir, con la forma tradicional de enseñanza, es hoy muy cuestionable. Así aparece el propósito de que el niño construya su conocimiento matemático a partir de su experiencia propia, de la reflexión sobre la organización de su misma actividad.

Sin embargo, este propósito es sólo el inicio; el paso siguiente consiste en la creación de los medios concretos que permitirán alcanzar ese objetivo. Sobre esto se ha avanzado muy poco. Cada vez con mayor frecuencia vemos aparecer el deseo o la ilusión de lograr la participación del alumno en la construcción de su conocimiento yuxtapuesto a clases o programas que no ofrecen los medios necesarios para ello y que, bajo nombres o modalidades aparentemente novedosas, reproducen prácticas educativas muy arraigadas que más bien obstaculizan este fin.

Un primer problema que consideramos debe ser abordado es el de la relación entre la psicología genética y la enseñanza de las matemáticas: hemos dicho ya que a la primera debemos una nueva concepción acerca del proceso de adquisición del conocimiento, y éste es fundamental. Sin embargo, la psicología genética no nos dice cómo podrían los niños aprender los contenidos matemáticos específicos que aparecen en los programas: la suma de números naturales, las fracciones, la resolución de ecuaciones de primer grado, etcétera. Si bien en estos conocimientos subyacen operaciones lógicas que el sujeto adquiere a lo largo de su desarrollo, interactuando con su medio y sin intervenciones didácticas específicas, estos conocimientos no son productos necesarios del desarrollo cognitivo. En palabras del mismo Jean Piaget:

> Las estructuras operatorias de la inteligencia, aun siendo de naturaleza lógico-matemática, no son conscientes en tanto que estructuras en la mente de los niños: son estructuras de acciones o de operaciones que dirigen, por supuesto, el razonamiento del niño, pero no constitu-

yen un objeto de reflexión para él. La enseñanza de las matemáticas, por el contrario, invita a los sujetos a una reflexión consciente sobre las estructuras.[1]

Por lo tanto, si asumimos la concepción del aprendizaje de las matemáticas antes descrita, tenemos una compleja tarea por delante: crear los medios didácticos concretos que la hagan po ,ble.

A continuación esbozaremos aspectos muy generales de los trabajos teóricos de varios investigadores en didáctica de las matemáticas que parten de los presupuestos epistemológicos antes descritos.[2]

Didáctica constructivista

Entre los representantes más importantes de la didáctica constructivista de las matemáticas están Guy Brousseau y sus colaboradores. Para Brousseau, la didáctica de las matemáticas ha de constituirse como una ciencia independiente de la psicología, de las matemáticas y de la misma pedagogía.[3]

El objeto de estudio de esta didáctica de las matemáticas, en general, serían las situaciones didácticas que permitan la construcción del conocimiento matemático. Su objetivo último, un tanto ambicioso, es llegar a conocer tan a fondo lo que sucede en el aula escolar que, ante una situación didáctica determinada, se pueda garantizar su reproductibilidad y eficiencia bajo controles bien precisos. Para esto se trabaja en la construcción de un modelo que considere todas las posibles interacciones, tanto implícitas como explícitas, que pueden darse en un salón de clase y que intervengan en forma importante en el proceso. En última instancia, y esto es lo que nos interesa como profesores, se trata de proporcionar al maestro un conocimiento sobre el funcionamiento del salón de clase y de las situaciones didácticas que le permitan tener un mayor control sobre algunas de las múltiples variables que intervienen en el proceso.

Nuestro objetivo es mucho más terrenal: creemos, y de hecho esto ha sido ya probado en México, que el conocimiento de esta didáctica permite, al maestro que lo desee, iniciar una transformación de su práctica cotidiana que lo lleve hacia la posibilidad de diseñar y probar situaciones de construcción del conocimiento. El artículo de Hugo Balbuena en este mismo número habla por sí solo.

La situación didáctica

Cuando queremos que el alumno adquiera un conocimiento matemático determinado lo que solemos hacer es preguntarnos cuál es la manera más clara y sencilla de presentarle este conocimiento. Para ello, lo descomponemos en conocimientos parciales, presentamos luego los más elementales, siguiendo la clásica secuencia: de lo sencillo a lo complejo y de lo gene-

[1] Citado por Jan Brun en Brun, 1980.

[2] Nos referimos fundamentalmente a los trabajos en didáctica de las matemáticas que se han desarrollado en el IREM de Burdeos, Francia, bajo la dirección de Guy Brousseau y en el Laboratorio de Psicomatemáticas del DIE-CINVESTAV, donde se llevan a cabo trabajos de didáctica en la misma dirección desde hace ocho años. En particular, en el DIE se cuenta con una experiencia de seis años de trabajo en el aula, al llevar a dos grupos de primaria, de primero a sexto grados.

[3] Ver Guy Brousseau, 1978.

ral a lo particular. Así, por ejemplo, cuando queremos enseñar el sistema decimal de numeración (SDN) enseñamos primero los números del 1 al 9; después, a hacer agrupamientos de a 2, de a 5 y de a 10, la decena, múltiplos de la decena, etcétera.

Este socorrido método didáctico se presenta con muchas variantes: el mayor o menor apoyo en imágenes o en material concreto, la introducción o no de sistemas de numeración previos al decimal como, por ejemplo, los sistemas posicionales de bases no decimales. Aunque estas diferencias pueden ser importantes (en el sentido que tienen para el aprendizaje), todas ellas tienen en común el hecho de estar dando, o presentando, a los niños un conocimiento (descompuesto en secuencias de *pequeños conocimientos)* para que ellos lo comprendan y lo apliquen posteriormente. Podríamos decir que se les lleva de la mano por todos los pasitos que se creen necesarios para adquirir dicho conocimiento. Obsérvese que esto puede suceder aun en el caso de que la secuencia de aprendizaje concuerde con el orden en que se construye, desde el punto de vista cognitivo, un conocimiento: aquello que se ha logrado saber acerca del proceso por el que atraviesa un sujeto (niño o adulto) al construir conocimiento se convierte, en el aula o en los manuales de didáctica, en pasos impuestos... dictados por el adulto (ésta es una de las *aplicaciones* más comunes y desafortunadas de la epistemología genética a la didáctica).

La intención de que el niño participe en la construcción de su conocimiento exige una transformación de raíz de esa metodología en virtud de que se trata ahora de no proporcionar el conocimiento, sino de producir las condiciones para que él lo cons-

truya, es decir, situaciones que lleven a una génesis escolar del conocimiento.

En esta perspectiva, para un contenido matemático específico, la primera pregunta que nos hacemos es: ¿para qué puede servir este conocimiento?, ¿qué preguntas le dan sentido?, o ¿qué problemas permite resolver?

Muchas veces nos encontraremos con la necesidad de conocer más profundamente su estatuto matemático: su o sus posibles definiciones, su relación con otros contenidos, sus propiedades, etcétera. También nos sería muy útil conocer, por un lado, su origen, su historia, las condiciones que lo hicieron evolucionar y, por otro, el tipo de hipótesis, de razonamientos y de estrategias que los niños a quienes nos dirigimos están en condiciones de realizar.

No se trata, por supuesto, de hacer recorrer al niño el camino que siguió un conocimiento determinado en la historia, ¡le llevaría miles de años! Sin embargo, tener toda esta información sobre nuestro concepto nos permitiría tener más posibilidades en el diseño de situaciones didácticas. En particular, nos interesará conocer tanto los obstáculos que se presentaron en la evolución histórica de un conocimiento como los que se presentan en el niño.

Esto nos da una idea de la compleja tarea que se nos presenta: se trata de producir una génesis escolar de conocimientos que generalmente son el resultado de una lenta evolución que data desde los tiempos antiguos que podemos conocer y que poco sabemos de las condiciones que los hicieron evolucionar, o al contrario, que los mantuvieron estancados por siglos.

Estar conscientes de ésta y otras dificultades nos hará, a veces, ser más prudentes. Tal vez no siempre lograremos crear las condiciones para que los niños realicen una absoluta reconstrucción de un conocimiento. Muchas veces lograremos solamente, y eso sería un paso importante, que se aproximen a él, que se enfrenten a los problemas que justifican su existencia y que le dan sentido.

En el caso de nuestro ejemplo de SDN, las preguntas anteriores nos llevan, entre muchas otras, a respuestas como las siguientes: el SDN es un medio que permite representar de una manera sencilla el conjunto de números naturales. Facilita enormemente el trabajo con números. Es por tanto muy probable que uno de los problemas que propiciaron su evolución haya sido la necesidad de hacer cálculos. Por lo tanto, los problemas que engendran un sistema de numeración están en absoluta relación con los que engendran el mismo concepto de número. Nos preguntamos entonces: ¿qué problemas nos permiten resolver los números? Esta pregunta nos da vértigo. Tomemos uno de los más elementales (y fundamentales): contar una colección de objetos (cuidado, contar por contar no es problema). Necesitamos ir más lejos, concebir una situación en la que contar sea necesario. Por ejemplo, en un extremo del salón de clase se coloca un conjunto de vasos y en el otro extremo una bolsa de cucharitas. Si la consigna es llevar una cucharita para cada vaso tenemos un problema en que se necesita contar. Cuando el número de vasos es pequeño, el modelo perceptual bastará para tener éxito en la tarea. Bien, con esto nos aseguramos que se ha entendido la situación. Al aumentar el número de vasos el modelo perceptual deja de funcionar y este fracaso, repetido un cierto número de veces en una situación participativa por equipos (por ejemplo) hará necesario un cambio de estrategia. Tal vez... dibujar cada vaso y llevarse el papel. Este dibujo, desde el momento que cumple con su función de cuantificar correctamente una cantidad, es un rudimentario sistema de numeración.[4] Notemos de paso que en este ejemplo está implícita la correspondencia biunívoca, pero ¡ésta no es enseñada!, es un recurso que los niños construyen por sí solos.

Con este ejemplo no agotamos ni remotamente las condiciones que se necesitan para generar en clase nuestro sistema de numeración, es solamente el inicio. Queremos tan sólo ilustrar lo que implica el comprometerse con esta vía didáctica.

Así, ante un contenido específico, necesitamos diseñar problemas accesibles a los niños del grupo de edad de que se trate, que puedan ser resueltos en un primer momento movilizando algún recurso con que ya cuenten, pero que posteriormente ese recurso

[4] Ver El-Bouazzaoui, 1982.

resultará insuficiente para resolver el problema y será necesario construir otro, precisamente el que se desea.[5]

Otra característica de estos problemas es la de posibilitar un verdadero *diálogo* entre los niños y la situación. Es decir, el problema debe generar los mecanismos de retroalimentación necesarios para que el niño pueda saber, en un momento dado, si va bien o se regresa. En efecto, desde el punto de vista funcional del conocimiento, la generación de un instrumento inadecuado no podrá producir el efecto que se desea, y su modificación o abandono será visto como parte de un proceso natural de construcción. En consecuencia, no será el profesor el que dictamine lo acertado o no de una estrategia movilizada por el niño.

Por ahora no daremos más detalles sobre el diseño de situaciones de construcción del conocimiento. Preferimos ahondar un poco en la forma en que, bajo esta perspectiva constructivista, son concebidos el conocimiento y su adquisición.

En esta perspectiva, el conocimiento aparece como un instrumento que le permitió al niño resolver un problema en el cual sus recursos anteriores resultaron insuficientes. El sentido de este conocimiento está dado por el o los problemas que le permitieron resolver. Decimos que el conocimiento aparece en su carácter funcional (esto es, lo hacemos funcionar como medio de resolución de problemas específicos). Sólo posteriormente el niño toma conciencia de que está en posesión de un nuevo conocimiento. Éste recibe su nombre, adopta la presentación convencional, deviene en un conocimiento *cultural*, como solemos encontrarlo en los libros.

Podemos decir entonces que, a lc largo del proceso, el conocimientc nace en su forma funcional (como herramienta) y después cobra su form: cultural.[6] Exactamente al revés d como suele suceder en la enseñanz tradicional, en la que primero se pre senta el conocimiento acabado, de: vinculado de todo contexto, y de: pués lo *funcionalizamos* en los ejerc cios de aplicación. En este último c: so, el niño no sabe para qué le sir lo que le enseñan hasta que lo aplic en los ejercicios al final de la lecció El sentido que para él tenga deterr nado conocimiento vendrá, por tanto, después de adquirirlo.

Aquí surge una denuncia ante presentación tradicional del cono miento como algo totalmente fu de contexto, con sentido por sí m mo. Esta presentación axiomáti deductiva tiene sus orígenes en geometría de Euclides y obedece toda una tradición iniciada por D cartes, y tiene su valor, pero el mε

[5] Ver la tesis doctoral de Grecia Gálvez (Gálvez, 1985).

[6] Ver Régine Douady, sin fecha.

tro de primaria tiene que proceder siempre en el sentido inverso si desea darle al conocimiento un sentido con mayor contenido de significación para los niños.

Otra característica fundamental que se desprende de la concepción constructivista es el valor de los conocimientos intermedios o provisionales que se construyen en clase. Es evidente que si para el aprendizaje de un cierto contenido iniciamos con el planteamiento de un problema, los niños no generarán en el primer momento el instrumento en su forma más perfeccionada; crearán instrumentos precarios, alejados de los convencionales. Esto es algo a lo que estamos poco acostumbrados. En clase se dicen y se escriben las cosas como son, es decir, como vienen en los libros, como todo mundo las conoce, excluyendo por supuesto a los niños. Necesitamos aprender a valorar estas producciones intermedias, a concebir inclusive sus errores como uno de los motores didácticos más eficaces para generar la evolución de sus concepciones.

Para resumir, las características de las secuencias de problemas que se diseñan en la perspectiva constructivista son: *1)* El problema inicial es significativo para los alumnos, pueden abordarlo movilizando sus conocimientos previos (modelo de base). *2)* Una vez que los alumnos han entendido lo que se plantea en el problema inicial (y posiblemente lo han resuelto) éste se hace más complejo, haciendo aparecer el obstáculo que desfavorece o impide que el alumno practique con éxito su estrategia inicial y propiciando la búsqueda y práctica de una nueva estrategia (que puede ser una modificación de la anterior o una completamente distinta). Este obstáculo puede consistir, por ejemplo, en un aumento brusco de las magnitudes en juego (como en el ejemplo de SDN) o en la introducción de restricciones, o en un cambio de material, etcétera. *3)* Las estrategias sucesivas que se construyen, si las situaciones diseñadas son adecuadas, deben aproximarse progresivamente al conocimiento que se pretende que los niños construyan. *4)* En todo momento la situación por sí misma debe proveer la retroalimentación necesaria para que el sujeto estime por sí solo si sus acciones lo aproximan o no al resultado buscado, si está equivocado o progresa.

En nuestro ejemplo de SDN, estas características están presentes. Invitamos al lector a revisar el texto con el propósito de identificarlas.

Análisis de una situación didáctica

Una vez que tenemos cierta familiaridad con el tipo de problemas que se plantea para favorecer la construcción del conocimiento matemático, procederemos a hacer un análisis de las situaciones didácticas en las que se realiza este proceso, con el objeto de conocerlas más a fondo y así facilitar un poco su diseño, su puesta en práctica y su análisis. Para ello resumiremos algunos aspectos centrales de los trabajos de Guy Brousseau acerca de la teoría de las situaciones didácticas.*

En general, en toda situación didáctica, en un salón de clase, intervienen cuatro sujetos protagonistas: el maestro, los alumnos, el conocimiento que se va a enseñar y el medio. El

* Ver Guy Brousseau, 1972.

maestro interviene con la voluntad de enseñar y como representante del sistema educativo introduce en el aula, sin necesariamente negarse como sujeto particular con voluntad propia, todo lo instituido: las normas escolares, los programas escolares, etcétera.

Los alumnos participan con la voluntad de aprender como grupo de edad con intereses y saberes previos comunes. Cada alumno participa como sujeto particular, único.

El conocimiento que se va a enseñar interviene al reconocerlo como una habilidad, un dato, un instrumento o un concepto, etcétera. La forma más adecuada de enseñarlo será en función de su tipo.

El medio ambiente tiene dos componentes: El medio exterior da contexto a la escuela y al aula, según sea su situación geográfica, histórica, social y cultural. Definitivamente cada contexto dará una significación particular al saber enseñado y a la misma escuela; habrá, por ejemplo, contextos donde la significación institucional sea más afín al medio exterior que otros. El medio interior está constituido por todo lo que hay en el salón de clase: las sillas, las mesas, los escritorios, el pizarrón, los materiales didácticos, retroproyectores y eventualmente la computadora.[8]

El hecho de que el profesor pueda estar consciente de todas las particularidades del contexto en que se encuentra le permite diseñar situaciones con mayores probabilidades de éxito. En efecto, considerar estas particularidades permite insertarse en la realidad de los educandos, compartir sig-

nificados, etcétera, y al mismo tiempo enseñar. Esto en verdad le puede imprimir a su práctica docente una nueva y poderosa fuerza, fuerza indispensable cuando hablamos de cambios que puedan beneficiar a todos.

Una vez que se ha considerado el contexto donde se enseña, sin dejarlo de lado, pasamos a analizar el proceso en el sistema didáctico *restringido*, es decir, aquel que incluye las relaciones entre los alumnos, el maestro, el saber enseñado y el medio interior. Para el profesor, aquí se encuentran muchos de sus problemas cotidianos: en el aula.

Brousseau[9] distingue cuatro fases fundamentales en las relaciones que se establecen en las situaciones didácticas a lo largo de la adquisición de un conocimiento.

La primera fase se denomina de *acción*. Corresponde al momento en el cual, una vez comprendida la consigna o problema, el alumno actúa en busca de un resultado (solo o en colaboración con otros alumnos). Si el

[8] En este año se introducirán microcomputadoras en el tercer grado de secundaria en tres distintas modalidades; una de ellas es para el uso en el aula como herramienta auxiliar.

[9] Ver Guy Brousseau, 1972.

alumno no cuenta ya con una estrategia inicial segura, puede verse inmerso en una dialéctica de ensayo y error que le ofrece mucha información. Puede, a partir de cierto momento, *construir* una nueva estrategia. En esta estrategia subyacen nociones, relaciones y propiedades que son utilizadas y de las que el alumno no está necesariamente consciente, aun cuando su acción sea exitosa. El alumno habrá construido por lo tanto un instrumento en el que subyace un modelo implícito. La explicitación de este modelo constituye otro tipo de trabajo, al que se le hace corresponder la siguiente fase.

En general, esta primera fase se organiza de forma tal que se pueda generar una comunicación intensa entre los niños: una partición del grupo en 6 u 8 equipos es ideal.

En la fase de *formulación* se diseñan situaciones en las que los modelos implícitos tengan que ser explicitados. Se intenta que este trabajo de explicitación tenga un sentido para el alumno, y que en las situaciones diseñadas para ello el alumno reciba una retroalimentación a sus explicitaciones. Por ello se considera absolutamente insuficiente que sea el profesor quien *interrogue* al alumno acerca de lo que está pensando. Esto coloca al alumno en la situación de adivinar qué es lo que su profesor espera, desvirtuándose así el verdadero trabajo de explicitación.

Uno de los recursos que se utilizan es la organización de confrontaciones entre los niños en las que ellos tengan, por alguna razón, interés en comunicar algo a sus compañeros, por ejemplo, la estrategia que han descubierto y que permitiría resolver el problema, o simplemente que les permita intercambiar información y experiencias.

Las situaciones de comunicación a través de mensajes escritos constituyen otro recurso en muchos casos idóneo para generar formulaciones, e incluso para la creación de un lenguaje. En estas situaciones, un alumno o grupo de alumnos deben enviar un mensaje a otro para que realicen cierta tarea. Por ejemplo, volviendo al ejemplo del SDN, un grupo de alumnos tiene los vasos y su tarea es elaborar un mensaje que le permitirá a otro grupo mandar la cantidad exacta de cucharitas, una para cada vaso. Notemos que la formulación tiene un sentido para el alumno (forma parte del problema) y proporciona la retroalimentación que ha de permitir el avance de la formulación. Es, por lo tanto, la dialéctica que se da entre emisores y receptores lo que lleva progresivamente, como una condición natural de la comunicación misma, a la formulación buscada, a la explicitación de sus modelos. En efecto, para que exista una comunicación exitosa, el mensaje transmitido debe ser bien interpretado y observar una sintaxis y una semántica reglamentadas por los protagonistas mismos.

En el caso particular de las matemáticas, en donde quisiéramos que los mensajes producidos adopten notación matemática, se puede exigir, en determinados momentos, ciertas condiciones al mensaje (las mismas que hacen que se institucionalice una cierta notación y no otra) como son: que sea escrito y no contenga dibujos ni colores, que no sea ambiguo ni contenga redundancia y que sea breve, lo más pequeño posible. Los mensajes adoptarán bajo un proceso de este tipo calidad casi matemática. En nuestro ejemplo del SDN, probablemente el hecho de impedir dibujos podría llevar al uso de un sistema unario no posicional de numeración.

Siguiendo con nuestro ejemplo, si aumentamos la cantidad de vasos lo suficiente para que su sistema unario resulte engorroso e inseguro, se podria generar, en una nueva fase de acción, una estrategia de agrupaciones que, seguida por una correcta fase de formulación, podria llevarnos al uso de un sistema no posicional de numeración de cierta base.

En la siguiente fase, de *validación*, se trata de recuperar desde una actitud crítica y reflexiva el proceso de formulación: en esta etapa se *demuestra* que el modelo explicitado es correcto, se explicitan y se prueban propiedades y generalidades que posiblemente fueron movilizadas en las fases anteriores. Evidentemente, es fundamental que quienes exijan estas pruebas y quienes las hagan sean los mismos alumnos. El nivel en que se den estas pruebas dependerá de las situaciones, del camino que se haya recorrido y de la edad de los niños.

En la organización de esta fase cabe movilizar el deseo de los niños o equipos de trabajo por demostrar que sus instrumentos construidos funcionan, o encontrar la falla en otros distintos al suyo. Ha de sorprender al maestro cómo los niños defienden sus ideas. En nuestro ejemplo, una vez que se hayan empezado a usar las agrupaciones, se podria pedir que los niños que las utilizan demuestren a los otros su funcionamiento y sus ventajas, o, al revés, que los que no las utilicen encuentren sus fallas.

La última fase es la de *institucionalización*. En esta fase, el maestro juega un papel protagonista. De lo que se trata, entre otras cosas, es de hacer que los niños identifiquen el instrumento construido como un conocimiento con cierto nombre y nomenclatura convencionales. La institucionalización cierra un ciclo en el proceso de construcción que consiste en una *traducción* a lo convencional. Otra vez, se trata no de una imposición, sino de una traducción con sentido: el de la comunicación.

En nuestro ejemplo del SDN, se identificaria el instrumento con un sistema no posicional de numeración de cierta base (o bases, en caso de que se hayan dado varias). Sería también el momento oportuno para introducir un poco de historia. ¡Los ninos estarán fascinados al oir que los mayas contaban como lo hacen ellos!

En resumen, las situaciones didácticas en las que se realiza el proceso de construcción de un conocimiento han sido diferenciadas en cuatro tipos que corresponden a momentos cualitativamente distintos del proceso. Cabe señalar que la sucesión de estas cuatro fases no es de ninguna manera rigurosa, ni es siempre posible distinguir con toda nitidez unas de otras.

Conclusiones

Hemos descrito en forma por demás concisa y superficial algunos aspectos de la didáctica constructivista. Es nuestro sentir que falta mucho por discutir y profundizar, y para ello sería conveniente presentar otros ejemplos.[10] Creemos que las bases están sentadas y que se podrá presentar y discutir satisfactoriamente... para el próximo número.

Retomando lo dicho en la introducción, es conveniente insistir en que e uso de una didáctica como ésta pued contribuir de manera significativa a mejoramiento de la enseñanza de la matemáticas. En efecto, al pasar po

[10] Ver, por ejemplo, Saiz y Block, 1984.

experiencias de construcción del conocimiento como las descritas pensamos que se logra una enseñanza cualitativamente diferente: los conceptos realmente se aprehenden, no se memorizan, y esto permite *funcionalizarlos*, es decir, utilizarlos en nuestra vida cotidiana.

Además, creemos que este tipo de didáctica es generalizable, con ciertas previsiones, a otras áreas del conocimiento. En particular, es aplicable a conocimientos que puedan o deban *funcionalizarse*, es decir, conocimientos que no sean ni datos ni habilidades. Para estos tipos de conocimiento, se reconoce que los métodos indicados son, respectivamente, la memorización y el adiestramiento conductista.

Por último, creemos que esta didáctica lleva, en forma implícita, una carga de *curriculum oculto* muy benéfico para nuestros alumnos. En efecto, el hecho de que el aula viva un cambio en el sentido de las relaciones maestro-alumno, alumno-alumno, alumno-conocimiento, etcétera, tal como se propone, puede ayudar a exaltar ciertas manifestaciones de creatividad, iniciativa, seguridad, confianza y autovaloración que hoy son más bien reprimidas en el salón de clase.

Bibliografía

Artigue, Michèlle, "Modélisation et reproductibilité dans l'enseignement des mathématiques", en *Cahier de Didactique des Mathématiques*, núm. 5, Paris, sin fecha.*

Brousseau, Guy, *Mathématique pour l'enseignement elementaire*, IREM, Bordeaux, 1970.

———, "Les obstacles epistémologiques et les problèmes mathématiques", en *Proceeding of the CIAEM*.*

———, "Processes de mathématisation", en *Cahier de l'IREM de Bordeaux*, núm. 13, 1972.*

———, "L'étude des processus d'apprentisage en situations scolaires", en *Cahier de l'IREM de Bordeaux*, núm. 18, 1978.

Brun, Jan, "Pedagogía de las matemáticas y psicología: análisis de algunas relaciones", en *Infancia y Aprendizaje*, núm. 9, 1980.

Douady, Régine, "A propos de la didactique des mathématiques à l'heure actuelle", en *Cahier de Didactique des Mathématiques*, núm. 6, Paris.*

El-Bouazzaoui, Habida, *Etudes de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*, IREM, Bordeaux, 1982.

Gálvez, Grecia, Tesis doctoral del DIE del CINVESTAV del IPN, 1985.

Saiz, Irma, y Block, David, "El *geoplano*: un recurso didáctico para explorar el mundo de la geometría elemental", en *DIE-CINVESTAV*, núm. 2, marzo de 1984.

* Estos artículos están disponibles en español en el DIE-CINVESTAV.