



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRÁFICAS GEOMÉTRICAS SOBRE CONJUNTOS DE PUNTOS COLOREADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:

VICTOR MANUEL ALVAREZ AMAYA



DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA



m. 345406



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



LIBERTAD NACIONAL
AVANZA EF
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recaptional.

NOMBRE: Victor Manuel Alvarez Amaya
FECHA: 15/06/05
FIRMA: Victor Alvarez

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“Gráficas geométricas sobre conjuntos de puntos coloreados”

realizado por Alvarez Amaya Victor Manuel

con número de cuenta 09617697-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director Propietario Dr. Jorge Urrutia Galicia
Propietario M. en C. Virginia Abrin Batule
Propietario Dr. Criel Merino López
Suplente Dra. Maria del Pilar Valencia Saravia
Suplente Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

[Signature]
Virginia Abrin Batule
M. en C. Urrutia Galicia
Dra. Valencia Saravia
M. en C. Araujo Pardo

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Francisco Hernández Quiroz
MATEMÁTICAS

A mi madre.

Gracias!

A mi madre que ha confiado y me ha apoyado siempre, que este agradecimiento no es suficiente.

A Jorge Urrutia por todo lo que he aprendido de él, por todo el tiempo que me ha dedicado durante estos años y por brindarme todo el apoyo que necesité a lo largo de este trabajo.

A mis sinodales: Virginia Abrín, Gabriela Araujo, Criel Merino y Pilar Valencia por sus valiosos comentarios durante la realización de este trabajo.

A Fabiola por todo este tiempo que hemos pasado juntos.

A mis amigos de la carrera: Marco, Angel y Rafael con quienes recorrí este camino que no fue fácil.

A Arika, Carlos, Vania, Alejandra, Laura, Karla, Pablo, Daniel y América con quienes siempre puedo contar.

A todos mis tíos que siempre han confiado en mí.

Finalmente me gustaría agradecer al proyecto 37540-A del CONACYT por el apoyo económico brindado a lo largo de este trabajo.

Prefacio

Desde hace mucho tiempo, el hombre ha buscado representaciones más simples a problemas con los que se ha encontrado y de esta manera obtener una mayor cantidad de información de los mismos. Pensemos rápidamente en el famoso problema de los puentes de Königsberg.

Königsberg fue una popular y rica ciudad de la Prusia Oriental. Hoy en día su nombre es Kaliningrado y pertenece a Rusia. Está situada en las orillas y en las islas del río Pregel, que en el siglo XVIII estaba atravesado por siete puentes. Los habitantes se disponían a planear un paseo que visitara las cuatro partes de la ciudad, atravesando todos sus puentes exactamente una vez. Cuatro puentes unían las orillas opuestas con la pequeña isla de Kneiphof. Un puente comunicaba Kneiphof con otra isla y los dos restantes unían esta con tierra firme. Además, ese paseo debería concluir en el mismo punto en el que se hubiera iniciado.



Figura 1 — La ciudad de Königsberg

Leonard Euler, dió al problema una respuesta segura: *No es posible planificar un paseo que recorra todos los puentes una única vez!*

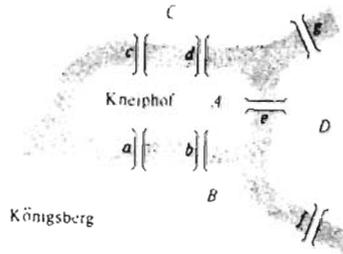


Figura 2 — Los siete puentes de Königsberg

Euler, para mayor claridad, substituyó cada uno de los trozos de tierra firme por un punto y cada puente por un trazo, dando lugar a un esquema simplificado que se representa en la figura (3). Así, la isla está representada por el punto al cual llegan cinco trazos, pues son cinco los puentes que van a ella.

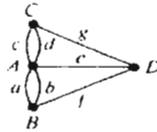


Figura 3 — Representación como gráfica de la ciudad de Königsberg

El problema se reduce a dibujar la figura, partiendo de un punto, de un trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel y sin recorrer una misma línea dos veces. Desde entonces se sabe que si tal paseo fuera posible, sería necesario que el número de aristas incidentes en cada vértice fuera par.

Al ver que con simples objetos geométricos como lo son los *puntos* y *líneas* o *curvas* se podía modelar problemas como el anterior, se comenzó a desarrollar la teoría de gráficas. La investigación que realizó Euler para resolver el problema

anterior fue presentada en 1736 en la Academia de Ciencias de San Pesterbusgo y puede considerarse como el comienzo de la teoría de gráficas.

Desde entonces han surgido una infinidad de tipos de gráficas a las que se les ha encontrado aplicación en un gran número de áreas y de esta manera, ha surgido la necesidad de diseñar algoritmos eficientes para la generación, análisis y proceso de las mismas

Los estudios algorítmicos de la mayoría de los problemas aparecieron en la literatura científica del siglo antepasado pero se ha incrementado su intensidad en las últimas tres décadas donde la computadora ya cuenta con uno de los papeles más importantes para la investigación. Desde entonces, un gran número de investigadores han sido atraídos a esta disciplina, bautizada como *Geometría Computacional* en un artículo de M.I. Shamos (1975).

En este trabajo nos concentraremos en un tipo particular de gráficas, en aquellas que se encuentran en el plano euclideo y en las cuales las aristas sean representadas unicamente por segmentos de recta, a dichas gráficas se les llama gráficas geométricas y últimamente se les ha encontrado diversas aplicaciones en comunicaciones, simulaciones de terreno, asignación de recursos e inclusive solución de ecuaciones diferenciales.

En este trabajo reunimos algunos de los resultados más importantes del área, a lo largo utilizaremos conceptos y notaciones que son consideradas estándar en la literatura. Se pueden consultar [4], [16] y [9] para saber más de teoría de gráficas, [7] para algoritmos en general y [29] y [22] para geometría computacional.

Índice general

Índice general	VI
Índice de figuras	VIII
1. Emparejamientos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Emparejamiento perfecto plano bicromático	2
1.3. Intersecciones de dos emparejamientos perfectos planos monocromáticos de peso mínimo	3
1.4. Intersecciones de k emparejamientos perfectos planos monocromáticos de peso mínimo	8
2. Árboles geométricos	13
2.1. Introducción	13
2.2. Número de intersecciones de dos árboles geométricos	14
2.2.1. Cuando \mathcal{T}_R y \mathcal{T}_A son trayectorias	15
2.3. Número de intersecciones de k árboles geométricos	18
2.3.1. Árboles geométricos de peso mínimo	21
2.3.2. Ciclos geométricos	23
3. Trayectorias alternantes	25
3.1. Introducción	25
3.2. Trayectoria alternante simple	25
3.2.1. El resultado principal	26
3.2.2. El algoritmo	27
3.3. Trayectorias alternantes con puntos en posición general	28
3.3.1. Conjuntos linealmente separables	28
3.3.2. Configuraciones en las que $\mathcal{R} = \text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$	30

3.3.3. Configuraciones no particulares	30
3.4. Conjunto de puntos con k colores	31
4. Áboles de grado acotado	36
4.1. Introducción	36
4.2. Grado acotado de \mathcal{T}	37
4.3. Puntos en posición restringida	38
4.3.1. Conjuntos linealmente separables	38
4.3.2. Conjuntos en posición convexa	39
4.3.3. Configuraciones en las que $\mathcal{R} = \text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$	41
4.4. \mathcal{T} de grado máximo a lo más tres	42
4.5. Grado fijo en \mathcal{T}	47
5. Cuadrilaterizaciones bicromáticas	49
5.1. Introducción	49
5.2. Construyendo cuadriláteros	49
Conclusiones	66
5.3. Primera construcción de la cota inferior	67
5.4. Trabajo a futuro	68
Bibliografía	69

Índice de figuras

1.	La ciudad de Königsberg	III
2.	Los siete puentes de Königsberg	IV
3.	Representación como gráfica de la ciudad de Königsberg	IV
1.1.	Partición de \mathcal{V} en conjuntos con el mismo número de puntos rojos y azules. $w \notin \mathcal{V}$	3
1.2.	La cota es justa dada la siguiente configuración	4
1.3.	5
1.4.	A la izquierda un conjunto de puntos con un emparejamiento perfecto de peso mínimo. A la derecha; cuando cambiamos v_j por un punto v'_j en el interior del segmento que conecta v_i con v_j , $(\mathcal{M} \setminus \{v_i, v_j\}) \cup \{v_i, v'_j\}$ es un emparejamiento de peso mínimo para $(\mathcal{V} \setminus \{v_j\}) \cup \{v'_j\}$	7
1.5.	Las aristas gruesas pertenecen a \mathcal{M}	7
1.6.	Un ejemplo de las aristas de $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$ creando un ciclo \mathcal{C} en \mathcal{G}	8
1.7.	Un ejemplo de puntos rojos y azules donde existe un emparejamiento sin intersecciones pero un emparejamiento perfecto tiene un número lineal de cruces.	9
1.8.	Los dos casos para la construcción del teorema (1.7). A lado izquierdo el caso en el que k es par con $\mathcal{R} = \{v_1, \dots, v_4\}$ y a lado derecho el caso en el que k es impar con $\mathcal{R} = \{p_2, p_3\}$	11
1.9.	Un ejemplo de la construcción del teorema (1.8) con 2×8 puntos.	12
2.1.	A la izquierda tenemos una gráfica geométrica y a la derecha un árbol geométrico.	13
2.2.	Árboles geométricos rojo ($\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$) y azul ($\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$) construídos de acuerdo a la demostración del teorema (2.1).	16
2.3.	Trayectoria geométrica roja ($\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$) y azul ($\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$).	17

2.4. Configuración en la que $f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ puede ser arbitrariamente grande mientras $f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ se mantiene en cero.	18
2.5. Dos conjuntos de puntos, cada uno con seis puntos tal que cualquier árbol generador geométrico del conjunto de puntos negro intersecta a cualquier árbol generador geométrico de los restantes en al menos cinco puntos.	19
2.6. A la izquierda tenemos $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ con línea punteada, i impar y $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$, j par; $s = 8$, así que se intersectan 7 veces. A la derecha tenemos $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$, i, j par; como $s = 9$, se intersectan 15 veces.	20
2.7. Una colección de cuatro conjuntos de puntos y sus árboles generadores geométricos. Los conjuntos de puntos son los vértices de los árboles, los cuales resultan ser trayectorias.	20
2.8. La gráfica de intersección de tres árboles generadores de peso mínimo.	23
2.9. \mathcal{V} tiene 3 puntos y \mathcal{V}' tiene 5. El número total de elementos en \mathcal{V}' puede ser incrementado a $(n - 3)$, $n \geq 4$. El número de intersecciones en aristas de los árboles generadores de peso mínimo de \mathcal{V} y \mathcal{V}' es $2n - 4$	23
2.10.	24
3.1. Formas de construir las trayectorias alternantes simples para \mathcal{W}	27
3.2. Las trayectorias alternantes simples para \mathcal{W} según la figura (3.1).	29
3.3. División del plano en n regiones.	31
3.4. En el lado izquierdo tenemos \mathcal{Z}_u^+ , la trayectoria zig-zag en el sentido de las manecillas del reloj; u^+ es el antípoda con respecto a \mathcal{Z}_u^+ . En el lado derecho tenemos \mathcal{Z}_u^- y u^-	33
3.5. En el lado izquierdo tenemos el caso en el que \mathcal{Z}_u^+ es también \mathcal{Z}_w^+ para alguna $w \neq u$. Denotamos esta única trayectoria \mathcal{Z}_w^+ por $\mathcal{Z}_{u^+}^+$. En el lado derecho tenemos el caso en el que \mathcal{Z}_u^+ es \mathcal{Z}_w^- para alguna $w \neq u$. Similarmente, la denotamos por $\mathcal{Z}_{u^+}^-$	34
4.1. \mathcal{T} no puede ser dibujado en \mathcal{V}	37
4.2. Realizando la secuencia de grados $(3, 3, 2, 2)$	39
4.3. Actualizando \mathcal{T} en la demostración del teorema (4.4).	40
4.4. Una partición $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ de \mathcal{V}	44
4.5. Una partición $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ de $(\mathcal{R} \setminus \{x\}) \cup \mathcal{A}$	45
4.6. Una partición $\mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4$ de \mathcal{D}_2' tal que $ \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{R} = \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{A} $ y $ \mathcal{D}_4 \cap \mathcal{R} = \mathcal{D}_4 \cap \mathcal{A} $	47

5.1. Ejemplo de una cuadrilaterización bicromática sobre $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup A$.	50
5.2. A la izquierda tenemos una configuración de puntos que no admite una cuadrilaterización. A la derecha la misma configuración cuadrilaterizada con dos puntos de Steiner u y v .	51
5.3. Etiquetamos los vértices de \mathcal{P} en sentido contrario de las manecillas del reloj por $r_1, a_1, r_2, a_2, \dots, r_k, a_k$.	51
5.4. Al interior de \mathcal{P} colocamos muy cerca de las aristas pares de puntos etiquetados por $a_{i,j}$ y $r_{i,j}$.	52
5.5. Configuración para la cual son necesarios al menos $\frac{4m}{12}$ puntos de Steiner para poder cuadrilaterizar.	53
5.6. Arriba, la región \mathbb{R}_{r_i} correspondiente a un par de puntos $r_{i,j}$. Abajo, la correspondiente a $a_{i,j}$.	53
5.7. Para la arista $a_i r_{i+1}$ se muestran las dos opciones que tiene el cuadrilátero vacío del cual es arista. Arriba se muestra si el punto de Steiner es del mismo color a r_{i+1} y abajo si es de otro color.	54
5.8. Para las aristas $a_i r_{i+1}, r_{i+1} a_{i+1}$ adyacentes en $\text{Conv}(\mathcal{V})$, se muestran las áreas \mathbb{R}_{r_i} y $\mathbb{R}_{a_{i+1}}$ en gris.	55
5.9. Si $s = t$, para completar el cuadrilátero vacío que tiene como tres vértices a r_{i+1}, a_{i+1} y s se requiere un punto de Steiner u de color rojo en $\mathbb{R}_{a_{i+1}}$.	56
5.10. Si $s = t$ son de color rojo, entonces las aristas $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ son aristas de un mismo cuadrilátero.	56
5.11. Para introducir puntos de Steiner en la menor cantidad posible, $a_{i+1,1}$ debe quedar al interior del cuadrilátero con vértices a_i, r_{i+1}, a_{i+1} y s .	57
5.12. Si el vértice que complete el cuadrilátero donde tres vértices son a_i, s y $r_{i,2}$ se encuentra fuera de \mathbb{R}_{r_i} , entonces dicho cuadrilátero es no convexo y por lo tanto, se necesita de un punto de Steiner u que cuadrilaterice a $r_{i,1}$ al interior del mismo.	57
5.13. Si el vértice u que complete el cuadrilátero donde tres vértices son a_i, s y $r_{i,2}$ se encuentra en \mathbb{R}_{r_i} , entonces es un punto de Steiner y hace al cuadrilátero convexo, con lo cual, entre u y a_i cuadrilaterizan a $r_{i,1}$ al interior del mismo.	58
5.14. Figuras para la demostración del teorema de la galería de arte de Chvátal.	59
5.15. El primer polígono estrellado se forma uniendo v con todos los puntos al interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$.	60
5.16. Triangulación y coloración de \mathcal{P}_2 con colores $\{1, 2, 3\}$.	61

5.17. En este ejemplo, la clase cromática más pequeña es la del color 2. Entonces, para cada uno de los vértices de color 2, un polígono estrellado es construido con los vértices que son adyacentes a él en la triangulación. 61

5.18. Los vértices de \mathcal{P} junto con los puntos al interior cerca del punto medio de las aristas generan un conjunto de puntos de cardinalidad $3k$. En este ejemplo $k = 4$ 62

5.19. Los k triángulos sombreados deben encontrarse necesariamente en polígonos estrellados distintos. En este ejemplo al igual que el anterior, $k = 4$ 63

5.20. En ambos casos, necesitamos un punto de Steiner para poder cuadrilaterizar. 63

5.21. Cuadrilaterización de la figura (5.20) con un punto de Steiner (mostrado en gris) en cada caso. 63

5.22. Un punto de color azul puede ser introducido a cada polígono estrellado de tal manera que desde este punto, los polígonos sigan siendo estrellados. 64

5.23. Completando la cuadrilaterización de la clase cromática de \mathcal{R} entre los elementos de $Conv(\mathcal{R})$ y los dos puntos azules restantes de $Conv(\mathcal{V})$ 65

5.24. Cuadrilaterización final que se obtiene de la partición en polígonos estrellados. Los puntos de Steiner son mostrados en gris. 65

5.25. 67

5.26. Cuadrilaterización de la malla mostrada parcialmente. 68

Capítulo 1

Emparejamientos

1.1. Introducción

Sea $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ un conjunto de puntos en el plano con $2n$ elementos. Diremos que \mathcal{V} se encuentra en posición general si no existen tres elementos del conjunto que sean colineales.

Un emparejamiento perfecto \mathcal{M} de \mathcal{V} es una partición de \mathcal{V} en n pares de vértices (llamados las aristas de \mathcal{M}) tal que cada $v_i \in \mathcal{V}$ pertenece exactamente a un par de \mathcal{M} . El peso de una arista $\{v_i, v_j\}$ de \mathcal{M} es la longitud del segmento de línea por el cual son unidos. De lo anterior se puede definir un emparejamiento de peso mínimo para \mathcal{V} como un emparejamiento perfecto tal que la suma de las longitudes de las aristas se minimice. En este capítulo los siguientes problemas serán considerados:

- Supongamos que en \mathcal{V} se tiene que n puntos son de color rojo y n puntos de color azul y queremos encontrar un emparejamiento tal que en cada arista, un extremo sea un punto de color rojo y el otro un punto de color azul y ningún par de las mismas se intersecte (a dicho emparejamiento se le llamará perfecto plano bicromático). Este problema tiene al menos 25 años de antigüedad y por lo tanto es el problema precursor de todos los de este tipo.
- Si consideramos $2k$ conjuntos de puntos, deseamos determinar el número de intersecciones de k emparejamientos perfectos de peso mínimo. Comenzaremos el estudio con el caso $k = 2$.

1.2. Emparejamiento perfecto plano bicromático

Este problema tiene una aplicación cómica. Supongamos que un grupo de n cazafantasmas se encuentran peleando contra n fantasmas. Cada cazafantasma se encuentra armado con un rifle de protones con el cual al dispararle a un fantasma, este es erradicado. Supongamos al rayo de los rifles como una recta que finaliza cuando se encuentra con un fantasma. Los cazafantasmas deciden la siguiente estrategia: Deciden seleccionar cada uno un fantasma a fin de formar n pares cazafantasma-fantasma y entonces, simultáneamente cada cazafantasma dispara contra su fantasma seleccionado. Como todos sabemos, es muy peligroso dejar que los rayos de protones se crucen, así que los cazafantasmas deben escoger a su fantasma de tal manera que los rayos jamás se crucen.

El problema anterior puede ser resuelto encontrando un emparejamiento perfecto *plano* bicromático (un cazafantasma y un fantasma). El siguiente resultado muestra que siempre es posible encontrar dicho emparejamiento así como da la idea de como es posible encontrarlo, pero antes de eso, definimos el cierre convexo de un conjunto de puntos \mathcal{V} como el polígono convexo más pequeño que contiene a \mathcal{V} el cual tiene como vértices a elementos de \mathcal{V} . Denotaremos el cierre convexo de \mathcal{V} por $Conv(\mathcal{V})$.

Teorema 1.1 ([23]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ una colección de puntos en posición general de cardinalidad $2n$, n de color rojo y n de color azul. Entonces existen n segmentos de recta tal que cualesquiera dos no se intersectan y tienen como extremos a un punto de \mathcal{R} (rojo) y un punto de \mathcal{A} (azul).*

Demostración. Por simetría procederemos por inducción sobre $|\mathcal{R}|$. Claramente el teorema es válido para $|\mathcal{R}| = 1$ así que supondremos que el teorema es válido para $|\mathcal{R}| = 1, 2, \dots, k$, y consideremos un conjunto \mathcal{V} de cardinalidad $2(k+1)$ tal que se encuentre en posición general y de tal manera que $k+1$ sean rojos y $k+1$ sean azules.

Supongamos que en $Conv(\mathcal{V})$ existen dos puntos de color diferente $r \in \mathcal{R}$ y $a \in \mathcal{A}$. Por hipótesis de inducción, el conjunto de puntos $\mathcal{V} \setminus \{r, a\}$ se encuentran conectados de la manera deseada así que añadiendo al último el segmento de recta \overline{ra} no se introduce ningún cruce y por lo tanto el teorema es válido en este caso.

Sólo queda demostrar el caso en que $Conv(\mathcal{V})$ es monocromático. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Conv(\mathcal{V})$ es de color rojo y consideremos un punto w fuera de $Conv(\mathcal{V})$ de tal manera que $\mathcal{V} \cup \{w\}$ se encuentre en posición general. Por un rotación adecuada del plano, podemos suponer que w se

encuentra en la parte inferior de $\mathcal{V} \cup \{w\}$. Ahora consideremos rayos que emanen desde w en dirección hacia arriba. Definimos una función f para un rayo l por:
 $f(l) = \{\text{el número de puntos de } \mathcal{R} \text{ que se encuentren sobre o a la izquierda de } l\} - \{\text{el número de puntos } \mathcal{A} \text{ que se encuentren sobre o a la izquierda de } l\}$.

Sean l_1 y l_2 dos rayos que pasan a través de los vértices adyacentes a w en $\text{Conv}(\mathcal{V} \cup \{w\})$ a la izquierda y a la derecha respectivamente y sea l'_2 un rayo que es obtenido de l_2 por una pequeña rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de w . Entonces $f(l_1) = 1$ y $f(l'_2) = |\mathcal{R}| - 1 - |\mathcal{A}| = -1$. Dado que el valor de f cambia ± 1 y dado que $f(l_1) > 0 > f(l'_2)$, entonces existe un rayo l_x para el cual $f(l_x) = 0$ por lo tanto el número de puntos rojos y azules sobre o a la izquierda de l_x es el mismo y también a la derecha de l_x , en ese momento podemos aplicar la hipótesis de inducción a ambos lados de l_x . Dado que ninguno de los segmentos de recta resultantes se intersectan el resultado es válido para el conjunto \mathcal{V} y por inducción, la demostración esta completa. ■

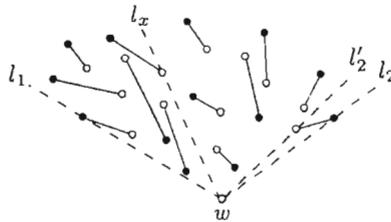


Figura 1.1 — Partición de \mathcal{V} en conjuntos con el mismo número de puntos rojos y azules. $w \notin \mathcal{V}$.

1.3. Intersecciones de dos emparejamientos perfectos planos monocromáticos de peso mínimo

En esta sección a diferencia de la sección anterior, trabajaremos con emparejamientos planos *monocromáticos*, es decir, ahora nos interesa unir a elementos del mismo color (conjunto), para esto, supondremos que dicho conjunto tiene cardinalidad par.

Es importante notar que emparejamientos de peso mínimo no siempre son los que menos se intersectan (ver figura (1.2)), pero en esta y en la siguiente sección veremos que son emparejamientos que se intersectan en general pocas veces.

El objetivo principal de esta sección es el de demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.2 (C. Merino, G. Salazar, J. Urrutia [24]). Sean \mathcal{M} y \mathcal{M}' dos emparejamientos perfectos de peso mínimo de dos conjuntos de puntos \mathcal{V} y \mathcal{V}' respectivamente, con $2r$ y $2s$ elementos respectivamente. Entonces las aristas de \mathcal{M} y \mathcal{M}' se intersectan a lo mas $r + s - 1$ veces. Esta cota es justa.

Que la cota sea justa se sigue del siguiente ejemplo:

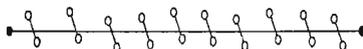


Figura 1.2 — La cota es justa dada la siguiente configuración

Antes de demostrar el teorema, será necesario probar algunos resultados preliminares.

La siguiente observación será útil. Dados dos puntos p y q , $|p - q|$ denota la longitud del segmento de línea que los conecta.

Observación 1.1. Sean v_1, v_2 y v_3 tres puntos en \mathbb{R}^2 . Supongamos que para algunos valores W y W' tenemos lo siguiente:

$$W + |v_1 - v_2| \leq W' + |v_2 - v_3|$$

Entonces si escogemos cualquier punto v'_2 en el interior del segmento que conecta a v_1 con v_2 tenemos que:

$$W + |v_1 + v'_2| < W' + |v'_2 - v_3|.$$

La observación es claramente válida cuando $|v_1 - v_2| = |v_2 - v_3|$, en este caso $|v_1 - v'_2| < |v'_2 - v_3|$. Cuando $|v_1 - v_2| = |v_2 - v_3| + c$, $c > 0$ sea v'_1 el punto en el interior de $v_1 - v_2$ tal que $|v'_1 - v_2| = |v_2 - v_3|$. Si v'_2 se encuentra en el segmento $v'_1 - v_2$ el resultado se sigue con $W'' + |v'_1 - v_2|$ y $W'' = |v_2 - v_3|$. Los casos restantes pueden ser manipulados de una manera similar. (Ver figura (1.3))

Sea \mathcal{V} un conjunto de puntos con $2n$ puntos. Dos resultados se siguen inmediatamente de la observación (1.1):

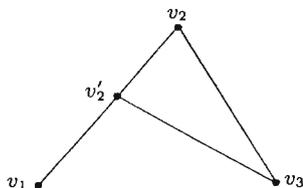


Figura 1.3 —

Lema 1.3. Sea \mathcal{M} un emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V} . Supongamos que las aristas de \mathcal{M} son $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2n-1}, v_{2n}\}$. Entonces si para $i = 1, 3, \dots, 2n - 1$ escogemos dos puntos v'_i y v'_{i+1} en $v_i - v_{i+1}$, v'_i mas cerca a v_i que a v_{i+1} , entonces:

$$|v'_1 - v'_2| + |v'_3 - v'_4| + \dots + |v'_{2n-1} - v'_{2n}| < |v'_2 - v'_3| + |v'_4 - v'_5| + \dots + |v'_{2n} - v'_1|.$$

Demostración. Dado que \mathcal{M} es un emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V} , tenemos:

$$|v_1 - v_2| + |v_3 - v_4| + \dots + |v_{2n-1} - v_{2n}| < |v_2 - v_3| + |v_4 - v_5| + \dots + |v_{2n} - v_1|.$$

Primero movemos v_2 hacia v'_2 , tomemos $W = |v_3 - v_4| + \dots + |v_{2n-1} - v_{2n}|$, $W' = |v'_4 - v'_5| + \dots + |v'_{2n} - v'_1|$ y apliquemos la observación (1.1). Repitamos este proceso hasta que cada v_i se haya movido a v'_i . De esta manera, el resultado es válido. ■

También tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.4. Sea $\{v_i, v_j\}$ una arista de un emparejamiento perfecto de peso mínimo \mathcal{M} de \mathcal{V} . Si escogemos un punto v'_j en el interior del segmento que conecta a v_i con v_j , entonces $\mathcal{M}' = (\mathcal{M} \setminus \{v_i, v_j\}) \cup \{v_i, v'_j\}$ es un emparejamiento perfecto de $\mathcal{V}' = (\mathcal{V} \setminus \{v_j\}) \cup \{v'_j\}$. (Ver figura (1.4))

Demostración. Sea $\{v_i, v_j\}$ una arista del emparejamiento perfecto de peso mínimo \mathcal{M} de \mathcal{V} . Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_i = v_1$, $v_j = v_2$. Sea v'_2 un punto interior del segmento $v_1 - v_2$ y $\mathcal{V}' = \mathcal{V} - v_2 + v'_2$, supongamos que $\mathcal{M}' = (\mathcal{M} \setminus \{v_1, v_2\}) \cup \{v_1, v'_2\}$ no es un emparejamiento de peso mínimo de \mathcal{V}' .

Sea \mathcal{M}'' un emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V}' . Claramente $\{v_1, v'_2\}$ no se encuentra en \mathcal{M}'' . Entonces en $\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ existe un ciclo C' que

contiene a $\{v_1, v'_2\}$ y tal que sus aristas alternan entre \mathcal{M}' y \mathcal{M}'' . Por inducción, podemos suponer que \mathcal{C}' cubre a todos los elementos de \mathcal{V}' .

Supongamos que cuando recorremos las aristas de \mathcal{C}' los puntos de \mathcal{V}' aparecen en orden $v_1, v'_2, v_3, \dots, v_{2n}$. Observemos que con esta etiquetación, las aristas $\{v'_2, v_3\}, \dots, \{v_{2n}, v_1\}$ pertenecen a \mathcal{M}'' . Sea \mathcal{C} el ciclo que contiene todas las aristas de \mathcal{C}' excepto $\{v_1, v'_2\}$ y $\{v'_2, v_3\}$ mas las aristas $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_2, v_3\}$. (Ver figura (1.5))

Dado que \mathcal{M} es un emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V} , tenemos que:

$$|v_1 - v_2| + |v_3 - v_4| + \dots + |v_{2n-1} - v_{2n}| < |v_2 - v_3| + |v_4 - v_5| + \dots + |v_{2n} - v_1|$$

Si $W = |v_3 - v_4| + \dots + |v_{2n-1} - v_{2n}|$ y $W' = |v_4 - v_5| + \dots + |v_{2n} - v_1|$, tenemos que:

$$W + |v_1 - v_2| < W' + |v_2 - v_3|$$

pero por la observación (1.1):

$$W + |v_1 - v'_2| < W' + |v'_2 - v_3|.$$

que es:

$$|v_1 - v'_2| + |v_3 - v_4| + \dots + |v_{2n-1} - v_{2n}| < |v'_2 - v_3| + |v_4 - v_5| + \dots + |v_{2n} - v_1|$$

lo cual contradice que \mathcal{M}'' es un emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V}' . ■

Una consecuencia obvia de este resultado es el siguiente lema.

Lema 1.5. *Sea \mathcal{M} un emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V} . Para cada arista $\{v_i, v_j\}$ de \mathcal{M} , sea v'_i y v'_j dos puntos sobre el segmento de recta cerrado que conecta v_i con v_j . Entonces, el conjunto de aristas $\{v'_i, v'_j\}$ tal que $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{M}$ forme un emparejamiento perfecto de peso mínimo de $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_{2n}\}$.*

Ahora se demostrará el siguiente resultado

Lema 1.6. *Sean \mathcal{M} y \mathcal{M}' un emparejamiento de peso mínimo para \mathcal{V} y \mathcal{V}' . Entonces la gráfica de intersección de \mathcal{M} y \mathcal{M}' no contiene ciclos.*

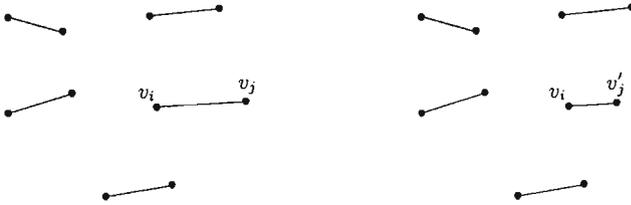


Figura 1.4 — A la izquierda un conjunto de puntos con un emparejamiento perfecto de peso mínimo. A la derecha; cuando cambiamos v_j por un punto v'_j en el interior del segmento que conecta v_i con v_j , $(\mathcal{M} \setminus \{v_i, v_j\}) \cup \{v_i, v'_j\}$ es un emparejamiento de peso mínimo para $(\mathcal{V} \setminus \{v_j\}) \cup \{v'_j\}$.

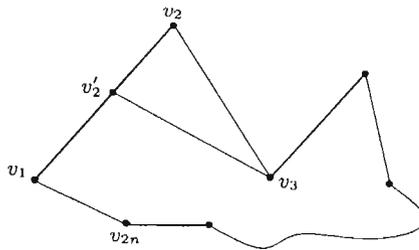


Figura 1.5 — Las aristas gruesas pertenecen a \mathcal{M} .

Demostración. Sea \mathcal{G} la gráfica de intersección de $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$, que es la gráfica cuyos vértices son las aristas de \mathcal{M} y de \mathcal{M}' , en la cual dos aristas $\{u, v\} \in \mathcal{M}$ y $\{x, y\} \in \mathcal{M}'$ son adyacentes en \mathcal{G} si los segmentos de recta $x - y$ y $u - v$ se intersecan. Claramente \mathcal{G} es una gráfica bipartita. Supongamos ahora que \mathcal{G} contiene un ciclo \mathcal{C} . Entonces existen aristas $e_1, e_3, \dots, e_{2k-1} \in \mathcal{M}$ y $e'_2, e'_4, \dots, e'_{2k} \in \mathcal{M}'$ tal que e'_i interseca a e_{i-1} y e_{i+1} , $i = 2, \dots, 2(k-1)$, y e'_{2k} interseca a e_{2k-1} y e_1 . Supongamos que los extremos de e_i son v_i, v_{i+1} , y los de e'_i son v'_i, v'_{i+1} .

Para $i = 2, 4, \dots, 2k$ sea r_{i-1} el punto de intersección de e_{i-1} con e'_i . Para $3, 5, \dots, 2k-1$ sea r_{i-1} el punto de intersección de e'_{i-1} con e_i y r_{2k} el punto de intersección de e'_{2k} con e_1 . Sea \mathcal{C}' el ciclo con vértices $\{r_{2k}, r_1, \dots, r_{2k-1}\}$. (Ver figura (1.6))

Supongamos sin pérdida de generalidad que:

$$|r_{2k}-r_1|+|r_2-r_3|+\dots+|r_{2k-2}-r_{2k-1}| > |r_1-r_2|+|r_3-r_4|+\dots+|r_{2k-1}-r_{2k}|$$

Por el lema (1.5), $\{r_{2k}, r_1\}, \{r_2, r_3\}, \dots, \{r_{2k-2}, r_{2k-1}\}$ es también un emparejamiento de peso mínimo para $\{r_1, r_2, \dots, r_{2k}\}$. Sin embargo $\{r_1, r_2\}, \{r_3, r_4\}, \dots, \{r_{2k-1}, r_{2k}\}$ es también un emparejamiento para el mismo conjunto, pero de peso menor, lo cual es una contradicción. Por lo tanto \mathcal{G} no contiene ciclos. Por el lema (1.3), el caso:

$$|r_{2k}-r_1|+|r_2-r_3|+\dots+|r_{2k-2}-r_{2k-1}| = |r_1-r_2|+|r_3-r_4|+\dots+|r_{2k-1}-r_{2k}|$$

es imposible. ■

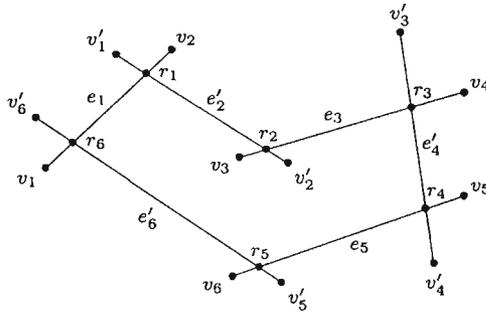


Figura 1.6 — Un ejemplo de las aristas de $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$ creando un ciclo \mathcal{C} en \mathcal{G} .

El teorema (1.2) se sigue del hecho de que las intersecciones de las aristas de \mathcal{M} y de \mathcal{M}' son las aristas de \mathcal{G} . Pero dado que \mathcal{G} no contiene ciclos y tiene $r + s$ vértices, entonces contiene a lo mas $r + s - 1$ aristas.

1.4. Intersecciones de k emparejamientos perfectos planos monocromáticos de peso mínimo

Antes de proceder con el estudio de los emparejamientos de conjuntos de puntos multicoloreadas, estudiaremos el problema de encontrar un emparejamiento

para un conjunto bicolorado con pocas intersecciones sin considerar que el emparejamiento sea de peso mínimo. Para empezar enunciaremos algunos resultados recientes de Dumitrescu y Steiger [11]. Ellos estudiaron el siguiente problema: Dados dos conjuntos disjuntos de puntos \mathcal{V} y \mathcal{V}' en el plano, encontrar emparejamientos \mathcal{M} y \mathcal{M}' para \mathcal{V} y \mathcal{V}' respectivamente, no necesariamente perfectos tal que:

1. Las aristas de \mathcal{M} y \mathcal{M}' no se interseccionen.
2. La suma de las cardinalidades de los emparejamientos se maximice.

Ellos lograron demostrar que uno siempre puede emparejar un sorprendente porcentaje de puntos, es decir, 83,33% de ellos. Su resultado mas adelante fue mejorado a 85,71% en [10]. De lo anterior uno podría suponer que siempre existe un emparejamiento perfecto para \mathcal{V} y \mathcal{V}' tal que sus aristas se interseccionen cn veces con c un constante muy pequeña. Esto desafortunadamente no es el caso. Dibujemos sobre un círculo $2n$ puntos rojos y $2n$ puntos azules tal que los colores alternen. Entonces siempre podemos emparejar $2n - 2$ puntos azules y $2n - 2$ puntos rojos (ver figura (1.7)) sin crear intersecciones. Sin embargo, si insistimos en escoger emparejamientos perfectos \mathcal{M} y \mathcal{M}' para los puntos azules y rojos, es directo demostrar que sus aristas siempre se interseccionarán al menos n veces!. Para ver eso, simplemente observemos que cualquier segmento de recta que conecta a dos puntos rojos deja un número impar de azules o un número impar de rojos en cada uno de los semiplanos determinados por el segmento de recta que los conecta.

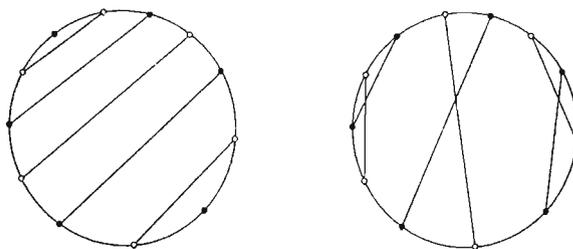


Figura 1.7 — Un ejemplo de puntos rojos y azules donde existe un emparejamiento sin intersecciones pero un emparejamiento perfecto tiene un número lineal de cruces.

Ahora se demostrará el siguiente resultado:

Teorema 1.7 (C. Merino, G. Salazar, J. Urrutia [24]). *Dados dos conjuntos de puntos \mathcal{V} y \mathcal{V}' con $2r$ y $2s$ elementos respectivamente, siempre podemos encontrar un emparejamiento perfecto para ellos tal que sus aristas se intersecten a lo mas $\min\{r, s\}$ veces. Esta cota es justa.*

Demostración. Consideremos $\text{Conv}(\mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$. Si cualesquiera dos vértices consecutivos de $\text{Conv}(\mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$ pertenecen a \mathcal{V} entonces podemos emparejarlos, removerlos de \mathcal{V} y proceder por inducción. Ahora, supongamos que los vértices de $\text{Conv}(\mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$ alternan entre puntos de \mathcal{V} y \mathcal{V}' y que el vértice mas a la izquierda de $\text{Conv}(\mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$ pertenece a \mathcal{V} . Llamemos a ese vértice v_1 y reetiquetemos los puntos restantes de $\mathcal{V} \setminus \{v_1\}$ como $\{v_2, \dots, v_{2r}\}$ tal que si $i < j$, entonces v_j se encuentra arriba del segmento de recta que conecta a v_1 con v_i . De una forma similar, etiquetemos los puntos de \mathcal{V}' como $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_{2s}\}$, ver figura (1.8). Observemos que debajo (respectivamente arriba) del segmento de recta que conecta a v_1 con v_2 (respectivamente v_1 con v_{2r}) existen exactamente un punto de \mathcal{V}' ; si hubiera al menos dos, podríamos escoger y emparejar dos de ellos tal que el segmento de recta que los conecte no interese al cierre convexo de los elementos restantes en $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$ y proceder por inducción.

Para cada $1 < i < 2r$, sea la cuña \mathcal{W}_i la región obtenida de la intersección del semiplano arriba del segmento de recta que conecta a v_1 con v_i con el semiplano debajo del segmento de recta que conecta a v_1 con v_{i+1} , ver figura (1.8). Sea k el índice tal que $v'_2 \in \mathcal{W}_k$. Si $k > 1$ es par, dividamos \mathcal{V} en dos subconjuntos $\mathcal{R} = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ y $\mathcal{S} = \{v_k, \dots, v_{2r}\}$ y \mathcal{V}' en dos subconjuntos $\mathcal{R}' = \{v'_1, v'_2\}$ y $\mathcal{S}' = \{v'_3, \dots, v'_{2s}\}$. El resultado se sigue por inducción sobre los conjuntos de puntos \mathcal{R} y \mathcal{R}' y \mathcal{S} y \mathcal{S}' . Si $k > 2$ es impar, entonces dividamos \mathcal{V} en $\mathcal{R} = \{v_2, \dots, v_{k-1}\}$, $\mathcal{S} = \{v_1, v_k, \dots, v_{2r}\}$ y \mathcal{V}' en $\mathcal{R}' = \{v'_1, v'_2\}$ y $\mathcal{S}' = \{v'_3, \dots, v'_{2s}\}$, y por inducción de nuevo, el resultado se sigue. ■

Ahora, ya podemos proceder con el estudio de los conjuntos de puntos multicoloreados.

Consideremos un conjunto de puntos \mathcal{V} con $2n = 2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_k$ puntos tal que para cada i , $1 \leq i \leq k$, $2n_i$ elementos de \mathcal{V} se encuentran coloreados con color i . Para cada i , sea \mathcal{V}_i el conjunto de elementos de \mathcal{V} con color i . Sea \mathcal{M}_i el emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{V}_i . Se demostrará el siguiente resultado:

Teorema 1.8 (C. Merino, G. Salazar, J. Urrutia [24]). *Las aristas de $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k$ se intersectan a lo mas $(k-1)n - \frac{k(k-1)}{2}$ veces. Esta cota es*

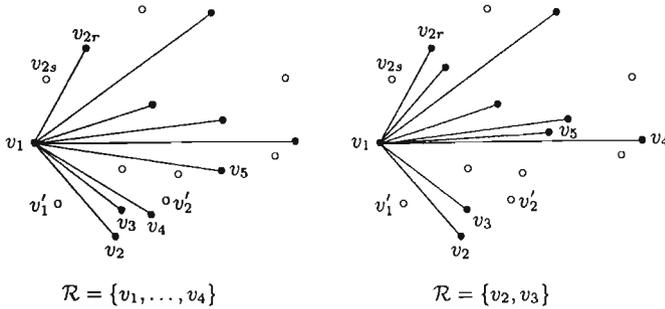


Figura 1.8 — Los dos casos para la construcción del teorema (1.7). A lado izquierdo el caso en el que k es par con $\mathcal{R} = \{v_1, \dots, v_4\}$ y a lado derecho el caso en el que k es impar con $\mathcal{R} = \{p_2, p_3\}$.

óptima.

Demostración. Por el teorema (1.2), para cada i, j las aristas de \mathcal{M}_i y \mathcal{M}_j se intersectan a lo mas $n_i + n_j - 1$ veces. Añadiendo todos los pares $1 \leq i < j \leq k$ obtenemos la cota superior. Para mostrar que la cota es justa, construyamos un conjunto de puntos \mathcal{V} como antes para el cual cada par de emparejamientos \mathcal{M}_i y \mathcal{M}_j se intersecten exactamente $n_i + n_j - 1$ veces.

Consideremos un conjunto \mathcal{R} con $2n$ puntos en un segmento de recta etiquetados por v_1, \dots, v_{2n} de izquierda a derecha, tal que la distancia entre cualquier par de ellos sea al menos 1. Es directo ver que en el emparejamiento perfecto de peso mínimo de \mathcal{R} , v_{2i-1} y v_{2i} están emparejados, $i = 1, \dots, n$. Si en lugar de un segmento de recta colocamos a los puntos de \mathcal{R} sobre un arco \mathcal{C} convexo casi plano, es decir un arco convexo contenido en un rectángulo de tamaño $\epsilon \times m$, $m > 2kn$ (ver figura (1.9)), el emparejamiento perfecto de peso mínimo para \mathcal{R} sigue siendo el mismo. Supongamos ahora que sobre la misma curva convexa colocamos $4n$ puntos etiquetados por $v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3, v'_3, v_4, \dots, v_{2n-1}, v'_{2n-1}, v_{2n}, v'_{2n}$, de nuevo, cualquier par de ellos a distancia 1, entonces el emparejamiento perfecto de peso mínimo para $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$ y $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_{2n}\}$ se intersecta exactamente $2n - 1$ veces, ver figura (1.9).

Finalmente coloquemos $n = 2kr$ puntos sobre \mathcal{C} tal que cualesquiera dos puntos consecutivos del conjunto se encuentren a distancia 1. Coloreemos de tal manera que sus colores sigan la siguiente secuencia de números:

$1, 2, 3, \dots, k, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, k, k, \dots 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, k, k, 1, 2, 3, \dots, k$

de tal manera que para cada i existan exactamente $2r$ puntos con color i . Es fácil verificar que para cada par de números $1 \leq i < j \leq k$ las aristas de los emparejamientos perfectos de peso mínimo de los conjuntos de puntos con colores i y j respectivamente se intersecten $2r - 1$ veces. ■

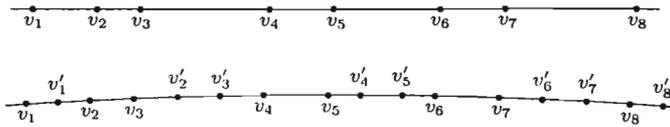


Figura 1.9 — Un ejemplo de la construcción del teorema (1.8) con 2×8 puntos.

Capítulo 2

Árboles geométricos

2.1. Introducción

Sea \mathcal{V} un conjunto de puntos en el plano en posición general. Un árbol generador geométrico sobre \mathcal{V} es una gráfica acíclica cuyo conjunto de vértices son los elementos de \mathcal{V} y cuyo conjunto de aristas son segmentos de recta. Dicho árbol es llamado *simple* si ningún par de sus aristas se intersectan salvo por sus extremos.

En este capítulo consideraremos algunos problemas con árboles generadores geométricos simples sobre conjuntos de puntos coloreados (de aquí en adelante, nos referiremos a tales árboles por $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ donde \mathcal{X} es el conjunto sobre el cual están definidos). Los lectores interesados en gráficas geométricas en general en el plano pueden consultar el libro [28] de Pach y Agarwal y el estudio [27] de Pach.

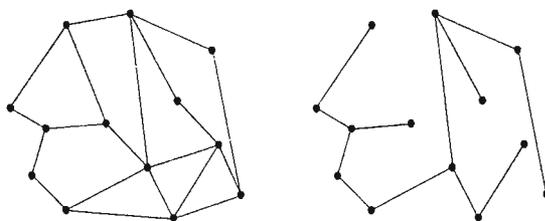


Figura 2.1 — A la izquierda tenemos una gráfica geométrica y a la derecha un árbol geométrico.

Primero consideraremos el siguiente problema. Cuando tenemos dos árboles

$(\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$) sobre una colección de puntos dada, ¿podremos determinar el número de intersecciones entre sus aristas?, ¿que sucede cuando nos limitamos a trayectorias?

Como una extensión natural del problema anterior, vale la pena preguntarse que sucede cuando \mathcal{V} esta compuesto por mas conjuntos. ¿Que sucederá si consideramos los árboles generadores de peso mínimo?

Al finalizar se enunciará un resultado similar para ciclos generadores geométricos sobre familias de puntos para la cuales $Conv(\mathcal{V}_1) \cap \dots \cap Conv(\mathcal{V}_k)$ es no vacío y se obtendrán cotas óptimas para este problema.

2.2. Número de intersecciones de dos árboles geométricos

En el siguiente teorema, $f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ denota el mínimo número de puntos de intersección de $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ y $g(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ denota el número de pares de puntos bicromáticos (posiblemente no disjuntos) consecutivos de \mathcal{V} sobre $Conv(\mathcal{V})$.

Teorema 2.1 (Tokunaga [32]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general, entonces:*

$$f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = \max \left\{ \frac{1}{2}g(\mathcal{R}, \mathcal{A}) - 1, 0 \right\}.$$

Notemos que como caso particular del teorema (2.1), se tiene que

$$f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow g(\mathcal{R}, \mathcal{A}) \leq 2,$$

y aún este caso especial no parece trivial.

Demostración. Supongamos que $Conv(\mathcal{V})$ no es monocromático y un $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ arbitrario es dado. Entonces los puntos de \mathcal{R} en $Conv(\mathcal{V})$ estan divididos en $\frac{1}{2}g(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ partes, las cuales pertenecen a regiones distintas de $Conv(\mathcal{V})$ particionado por $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Así, necesitamos al menos $(\frac{1}{2}g(\mathcal{R}, \mathcal{A}))$ aristas para cruzar y juntar todas las partes, lo cual implica $f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A}) \geq \frac{1}{2}g(\mathcal{R}, \mathcal{A}) - 1$.

Ahora, es suficiente mostrar que existe un par de árboles monocromáticos los cuales se intersectan en $\max\{\frac{1}{2}g(\mathcal{R}, \mathcal{A}) - 1, 0\}$ puntos. Usaremos inducción sobre $|\mathcal{V}|$. Sí $|\mathcal{V}| = 2$, no tenemos nada que probar. Así que supondremos que $|\mathcal{V}| \geq 3$, lo cual implica inmediatamente que $|Conv(\mathcal{V})| \geq 3$. Para dos puntos

distintos x, y en el plano, denotamos por \overline{xy} al segmento de línea que conecta a x con y y sean $\mathcal{H}^+(x, y), \mathcal{H}^-(x, y)$ los dos medios-planos cerrados acotados por la línea que pasa a través de x y de y . Existen dos casos a ser considerados.

1. Existe $r \in \mathcal{R} \cap \text{Conv}(\mathcal{V})$ y $a \in \mathcal{A} \cap \text{Conv}(\mathcal{A})$ tal que $\overline{ra} \notin \text{Conv}(\mathcal{V})$.
 Sea $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cap \mathcal{H}^+(r, a)$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \cap \mathcal{H}^-(r, a)$, y $\mathcal{R}_i = \mathcal{R} \cap \mathcal{V}_i$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_i$, para $i = 1, 2$. Por la suposición de este caso, podemos aplicar la hipótesis de inducción a $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$. Es decir, para $i = 1, 2$, obtenemos un $\mathcal{T}_{\mathcal{R}_i}$ y un $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_i}$ con $(\frac{1}{2}g(\mathcal{R}_i, \mathcal{A}_i) - 1)$ puntos de intersección. Dado que $g(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = g(\mathcal{R}_1, \mathcal{A}_1) + g(\mathcal{R}_2, \mathcal{A}_2) - 2$, obtenemos un $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y un $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ con la propiedad deseada, uniendo esos árboles en r y a . (Ver figura (2.2)(a))
2. $\text{Conv}(\mathcal{V})$ es monocromático.
 Supondremos sin pérdida de generalidad que $\text{Conv}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{R}$ y que $\mathcal{R} \cap \text{Conv}(\mathcal{V}) = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, $k \geq 3$. Supondremos también que el interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ es no vacío así que debe existir $a \in \mathcal{A} \cap (\mathcal{V} \setminus \text{Conv}(\mathcal{V}))$. Ordenemos cada r_i , $1 \leq i \leq k$ en sentido contrario a las manecillas del reloj de acuerdo a su pendiente alrededor de a . Formemos k triángulos donde los vértices de $\Delta_i = \{a, r_i, r_{i+1}\}$ (aquí, los índices son tomados modulo k) y sean $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ k conjuntos de puntos tal que $\mathcal{V}_i = \mathcal{V} \cap \Delta_i$ y $\mathcal{R}_i = \mathcal{R} \cap \mathcal{V}_i$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_i$. Notemos que en cada triángulo $g(\mathcal{R}_i, \mathcal{A}_i) = 2$ así que aplicando hipótesis de inducción en cada \mathcal{V}_i obtenemos para cada $i = 1, \dots, k$ un $\mathcal{T}_{\mathcal{R}_i}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_i}$ con la propiedad de ser disjuntos y podemos obtener $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ uniendo cada $\mathcal{T}_{\mathcal{R}_i}$ con $\mathcal{T}_{\mathcal{R}_{i+1}}$ en r_{i+1} (excepto cuando $i = k$). Notemos que debe existir una única trayectoria de r_k a r_1 en $\mathcal{T}_{\mathcal{R}_k}$, quitando cualquier arista de esta trayectoria r_k y r_1 quedan en distintas componentes de $\mathcal{T}_{\mathcal{R}_k}$ y esto asegura que $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ no contenga ciclos. De manera similar, podemos obtener $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ uniendo cada $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_i}$ en a . Por construcción, $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ son disjuntos y esto completa la demostración. (Ver figura (2.2)(b))

■

2.2.1. Cuando $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ son trayectorias

Cuando nos limitamos a trayectorias en el teorema (2.1), no podemos determinar el valor exacto del mínimo número de puntos de intersección. Pero el siguiente teorema da la mejor cota posible en terminos de $|\mathcal{R}|$ y $|\mathcal{A}|$. $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ es denotado por $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ si es una trayectoria.

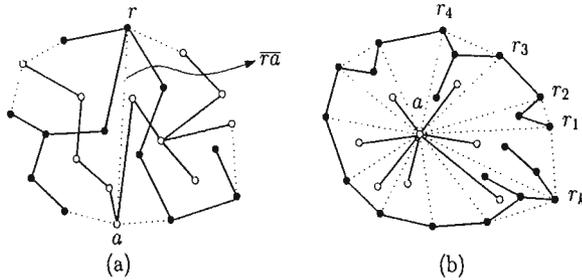


Figura 2.2 — Árboles geométricos rojo ($\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$) y azul ($\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$) construidos de acuerdo a la demostración del teorema (2.1).

Teorema 2.2 (Tokunaga [32]). *Sea \mathcal{V} como antes. Entonces existe $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ tal que cada arista de una de ellas intersecta a la otra en a lo mas un punto.*

En el siguiente corolario, $f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ denota el mínimo número de puntos de intersección de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

Corolario 2.3. *Sea \mathcal{V} como antes. Entonces:*

$$f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A}) \leq \min\{|\mathcal{R}|, |\mathcal{A}|\} - 1.$$

Usando el teorema (2.1), se sigue que la igualdad se mantiene en el corolario (2.3) cuando los puntos de $\mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ son los vértices de un polígono convexo y no hay dos vértices consecutivos que tengan el mismo color.

Para demostrar el teorema (2.2), modificaremos ligeramente el enunciado como sigue, para que un argumento inductivo funcione.

Teorema 2.4 (Tokunaga [32]). *Supongamos que $\text{Conv}(\mathcal{V})$ no es monocromático, es decir, existen $r \in \mathcal{R}$ y $a \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{ra} \subset \text{Conv}(\mathcal{V})$. Entonces existe un par de trayectorias ($\mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$) tal que tienen a r, a como sus vértices finales y cada arista de una de ellas intersecta a la otra a lo mas una vez.*

Notemos que incluso si $\text{Conv}(\mathcal{V})$ es monocromático, la conclusión del teorema (2.2) puede ser fácilmente deducida cambiando el color de un punto de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ y aplicando el teorema (2.4). Así este último es esencialmente más fuerte que el primero.

Demostración. Usaremos de nuevo inducción sobre $|\mathcal{V}|$. Como en la demostración del teorema (2.1), supondremos $|\text{Conv}(\mathcal{V})| \geq 3$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que en $\text{Conv}(\mathcal{V})$, r aparece después de a en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sea x el punto de $\text{Conv}(\mathcal{V} \setminus \{r\})$ el cual aparece después de a en sentido contrario a las manecillas del reloj en $\text{Conv}(\mathcal{V} \setminus \{r\})$. Si $x \in \mathcal{R}$, entonces es suficiente aplicar la hipótesis de inducción a $\mathcal{V} \setminus \{r\}$ y conectar r con x . Así que supondremos que $x \in \mathcal{A}$. Análogamente, supondremos que el punto de $\text{Conv}(\mathcal{V} \setminus \{a\})$ el cual aparece después de r en el sentido de las manecillas del reloj en $\text{Conv}(\mathcal{V} \setminus \{a\})$, digamos, y , está coloreado rojo. Dado que x y y no son monocromáticos, existe $r' \in \mathcal{R}$ y $a' \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{r'a'}$, exceptuando posiblemente a r' y a' , se encuentre en $\text{Conv}(\mathcal{V} \setminus \{r\} \setminus \{a\}) \setminus \text{Conv}(\mathcal{V})$ entre x y y ($r' = x$ y $a' = y$ ambos son posible). Ahora aplicamos la hipótesis de inducción a $\mathcal{V} \setminus \{r\} \setminus \{a\}$. Entonces podemos añadir $\overline{rr'}$ y $\overline{aa'}$ como aristas con a lo mas un intersección mas. Esto completa la demostración. ■

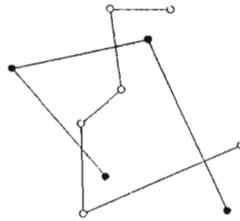


Figura 2.3 — Trayectoria geométrica roja ($\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$) y azul ($\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$).

Para concluir esta sección, notemos que existen configuraciones de \mathcal{R} y de \mathcal{A} para las cuales $f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A}) < f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$, así que $f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ no es determinado por $\text{Conv}(\mathcal{V})$ solamente. En particular, podemos hacer el valor de $f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ arbitrariamente alto mientras que $f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ se mantiene en cero. Para ver estas configuraciones, consideremos $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_m, r'_1, \dots, r'_m\}$ y $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ y construyamos la siguiente configuración (todos los índices son tomados modulo m):

1. Consideremos r_1, \dots, r_m como los vértices de un m -ágono convexo tal que r_{i+1} aparezca después de r_i en sentido de las manecillas del reloj.

2. Pongamos cada a_i en el interior del m -ágono (cerca del punto medio del segmento de recta que conecta a r_i con r_{i+1}) de tal manera que el segmento de recta que conecta a a_i con a_{i+1} separe a r_{i+1} del resto de los puntos de \mathcal{V} .

3. Pongamos cada r'_i en el interior del $\Delta r_i a_i a_{i-1}$ (cerca del punto medio del segmento de recta que conecta a a_i con a_{i+1}) de tal manera que las rectas que pasen a través de r'_i, a_i y r'_i, a_{i-1} separen r_i del resto de los puntos de \mathcal{V} y de tal manera que el segmento de recta que conecta a r_i con r'_i no contenga ningún otro punto de \mathcal{V} . (Ver figura (2.4))

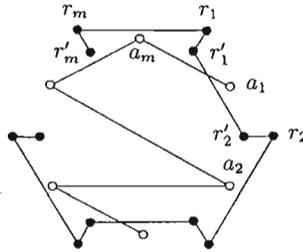


Figura 2.4 — Configuración en la que $f_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ puede ser arbitrariamente grande mientras $f_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ se mantiene en cero.

Entonces, es claro que, cuando damos un par de trayectorias $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, cada r'_i debe ser incidente a una arista de cruce de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ mientras que no sea un vértice final de la trayectoria. Por lo tanto, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ tiene al menos $\frac{m}{2} - 1$ cruces.

2.3. Número de intersecciones de k árboles geométricos

Dados dos conjuntos de puntos \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 por el teorema (2.1) no siempre es posible encontrar árboles generadores geométricos para los cuales sus aristas no se intersecan. De hecho, si tenemos $2s$ puntos los cuales son los vértices de un polígono convexo tal que alternen entre puntos de \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 , entonces es fácil de

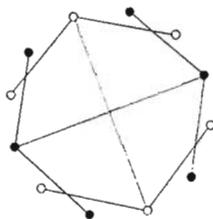


Figura 2.5 — Dos conjuntos de puntos, cada uno con seis puntos tal que cualquier árbol generador geométrico del conjunto de puntos negro intersecta a cualquier árbol generador geométrico de los restantes en al menos cinco puntos.

verificar que cualquier árbol generador geométrico para \mathcal{V}_1 interseque cualquier árbol generador geométrico para \mathcal{V}_2 al menos $s - 1$ veces. (Ver figura (2.5))

De aquí, se tiene la siguiente observación:

Observación 2.1. Existen conjuntos de puntos $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ con $|\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k| = sk$ tal que sus aristas se intersectan al menos $\frac{k(k-1)}{2}(s-1)$ veces.

Si consideramos un problema similar para tres o más conjuntos de puntos el problema se vuelve mucho más difícil, aun para puntos en posición convexa. Sea \mathcal{V} un conjunto de $n = ks$ puntos en posición convexa etiquetados por v_1, \dots, v_{sk} . Dividamos \mathcal{V} en k subconjuntos $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ tal que el elemento v_{i+rk} pertenezca a \mathcal{V}_i , $r = 0, \dots, (s-1)$. Para cada \mathcal{V}_i , encontrar un árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$, $1 \leq i \leq k$, tal que sus aristas tengan el menor número posible de intersecciones es muy difícil. Ahora, se mostrará un conjunto de árboles $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_1}, \dots, \mathcal{T}_{\mathcal{V}_k}$ tal que sus aristas se intersecten a lo más $(\frac{3}{2}k^2 - k)(s-1) - \frac{k(k-2)}{4}$ veces si k es par; de otra forma, se intersectan $(\frac{3}{4}(k-1)^2 + \frac{k-1}{2})(s-1) - \frac{(k-1)^2}{4}$ veces, es decir, el número de veces que sus aristas se intersectan es a lo más $\frac{3}{2}$ veces más que la solución óptima.

Para i par, Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ el árbol que contiene las aristas que conecta a v_{i+ak} con v_{i+bk} , $a+b = s+1$ o $a+b = s+2$, $1 \leq a, b \leq s$. Para i impar, $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ es el árbol que contiene a las aristas que conecta v_{i+ak} con v_{i+bk} , $a+b = s$ o $a+b = s+1$, $1 \leq a, b \leq s$. Notemos que dos árboles $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$ se intersectan $s-1$ veces si i y j tienen diferente paridad; de otra forma, se intersectan $2(s-1) - 1 = 2s - 3$ veces (ver figura (2.6)). Por lo tanto, esos árboles se intersectan exactamente $(\frac{3}{4}k^2 - k)(s-1) - \frac{k(k-2)}{4}$ si k es par y $(\frac{3}{4}(k-1)^2 + \frac{k-1}{2})(s-1) - \frac{(k-1)^2}{4}$ veces si k es impar. Mas aún, se cree, que esta configuración es de hecho, cercana a la

solución óptima para conjuntos de puntos en posición convexa.

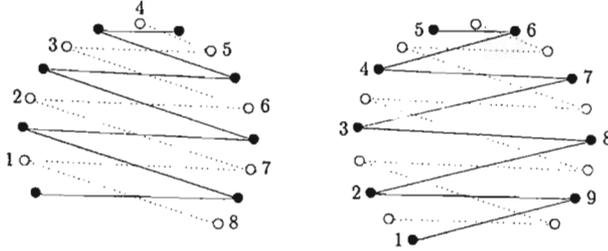


Figura 2.6 — A la izquierda tenemos T_{V_i} con línea punteada, i impar y T_{V_j} , j par; $s = 8$, así que se intersectan 7 veces. A la derecha tenemos T_{V_i} y T_{V_j} , i, j par; como $s = 9$, se intersectan 15 veces.

Ahora, se comenzará con el estudio para conjuntos de puntos en posición general. Supongamos sin pérdida de generalidad que los puntos en $V_1 \cup \dots \cup V_k$ tienen diferente coordenada x y $|V_i| \geq 2$, $i = 1, \dots, k$. Supongamos que para cada i los elementos de V_i están etiquetados por $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,r_i}$ tal que si $r < s$ entonces la coordenada x de $v_{i,r}$ es más pequeña que la coordenada x de $v_{i,s}$. Sea T_{V_i} la trayectoria sobre el conjunto de vértices V_i en la cual $v_{i,j}$ está conectado a $v_{i,j+1}$ por una arista denotada por $e_{i,j}$, $j = 1, \dots, r_i - 1$. (Ver figura (2.7))

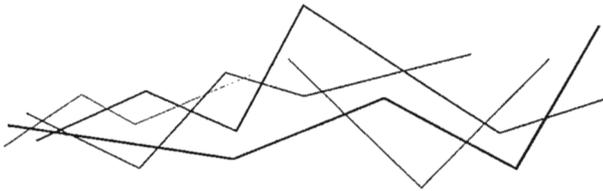


Figura 2.7 — Una colección de cuatro conjuntos de puntos y sus árboles generadores geométricos. Los conjuntos de puntos son los vértices de los árboles, los cuales resultan ser trayectorias.

Lema 2.5. *Las aristas de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$ se intersectan a lo mas $r_i + r_j - 3$ veces.*

Demostración. El resultado es claramente cierto si $r_i + r_j \leq 4$, o alguno de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ o $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$ tenga exactamente una arista. Supongamos ahora que la coordenada x de $v_{i,2}$ es mas pequeña que la de $v_{j,2}$. Entonces la arista $e_{i,1}$ de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ que conecta a $v_{i,1}$ con $v_{i,2}$ intersecta a lo mas una arista de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$, a saber, la arista $e_{j,1}$ que conecta a $v_{j,1}$ con $v_{j,2}$. Borremos $v_{i,1}$ de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$, y por inducción, es resultado es válido. ■

De una forma similar, se puede demostrar:

Lema 2.6. *Las aristas de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_1}, \dots, \mathcal{T}_{\mathcal{V}_k}$ se intersectan a lo mas $(k-1)(n-k) + \frac{k(k-1)}{2}$ veces, donde $|\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k| = n$.*

Demostración. El resultado es válido si $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_1}, \dots, \mathcal{T}_{\mathcal{V}_k}$ tienen en conjunto a lo mas k aristas, de hecho, en este caso si todos ellos se interectan entre sí, el número total de intersecciones es $\frac{k(k-1)}{2}$. Supongamos que los árboles contienen mas de k aristas y sea $e_{i,1}$ una arista para la cual la coordenada x de $v_{i,2}$ es mas pequeña que la coordenada x de $v_{j,2}$, $i \neq j$, $i \leq j \leq k$. Entonces la arista $e_{i,1}$ que conecta a $v_{i,1}$ con $v_{i,2}$ intersecta a lo mas $k-1$ aristas, es decir, en cada $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_j}$, $e_{i,1}$ intersecta a lo mas la arista $e_{j,1}$ que conecta a $v_{j,1}$ con $v_{j,2}$, $j \neq i$. Borrando esta arista y $v_{i,1}$ de \mathcal{V}_i y procediendo por inducción sobre $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_i \setminus \{v_{i,1}\}, \dots, \mathcal{V}_k$ el resultado es válido. ■

Observemos que la cota determinada en el lema (2.6) esta dentro de un factor de dos de la observacion (2.1). El siguiente teorema se sigue directamente de la observación (2.1) y el lema (2.6).

Teorema 2.7 (M. Kano, C. Merino, J. Urrutia [21]). *Sean $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ una colección disjunta de puntos en el plano. Entonces podemos encontrar para cada \mathcal{V}_i un árbol generador geométrico $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ tal que el número total de intersecciones entre sus aristas sea a lo mas $(k-1)(n-k) + \frac{k(k-1)}{2}$, donde $|\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k| = n$. Esta cota es justa dentro de un factor de dos de la solución óptima.*

2.3.1. Árboles geométricos de peso mínimo

El árbol generador euclideano de peso mínimo de un conjunto de puntos \mathcal{V}_n es una árbol cuyo conjunto de vértices es \mathcal{V}_n y tal que la suma de las longitudes de sus aristas se minimiza. En lo siguiente, se demostrará que si $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ son conjuntos disjuntos de puntos y $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ son sus correspondientes árboles

generadores de peso mínimo entonces el número total de intersecciones entre sus aristas es a lo mas $9(k-1)(n-k)$ donde $|\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k| = n$. La demostración se basa en la siguiente observación que es fácil de demostrar. Sean \mathcal{T}_i y \mathcal{T}_j dos árboles generadores de peso mínimo de \mathcal{V}_i y \mathcal{V}_j respectivamente. Sea e cualquier arista de \mathcal{T}_i . Entonces existe alguna constante c tal que e interseca a lo mas c aristas de \mathcal{T}_j cuyas longitudes son mayores que la longitud de e . De lo anterior se sigue que las aristas de \mathcal{T}_i y \mathcal{T}_j se intersecan un número lineal de veces. De hecho, se puede demostrar que c es a lo mas 9, sin embargo la demostración es larga, tediosa y nada intuitiva. Por lo tanto no se demostrará el siguiente lema, la demostración puede ser obtenida comunicandose con los autores de [21].

Lema 2.8. *Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 árboles generadores de peso mínimo de dos conjuntos de puntos \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 y sea e cualquier arista de \mathcal{T}_1 . Entonces e interseca a lo mas 9 aristas de \mathcal{T}_2 cuyas longitudes son mayor o igual a la longitud de e .*

Ahora ya se puede demostrar lo siguiente:

Teorema 2.9 (M. Kano, C. Merino, J. Urrutia [21]). *Sean $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ los árboles generadores de peso mínimo respectivos de k conjuntos disjuntos de puntos $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ tal que $|\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k| = n$. Entonces las aristas de $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ se intersecan a lo mas $9(k-1)(n-k)$*

Demostración. Primero observemos que $|\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k| = n$, $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ tienen exactamente $(n-k)$ aristas. Construyamos la gráfica de intersección \mathcal{G} del conjunto de aristas de $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$, que es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todas las aristas de $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$, en la cual, dos vértices son adyacentes si se intersecan. Orientemos las aristas de la gráfica de la siguiente manera: Si dos aristas $e_i \in \mathcal{T}_i$ y $e_j \in \mathcal{T}_j$ se intersecan y e_i es mas grande que e_j orientemos la arista en \mathcal{G} que los conecta de e_i a e_j , ver la figura (2.8).

Por el lema (2.8) cada arista en \mathcal{T}_i interseca a lo mas 9 aristas en cada \mathcal{T}_j , $i \neq j$ de la misma longitud o mas grande que ella misma. De esa manera el grado exterior de cada vértice de \mathcal{G} es a lo mas $9(k-1)$. Por lo tanto es resultado es válido. ■

Observemos que para el caso cuando tenemos dos conjuntos de puntos \mathcal{V} y \mathcal{V}' tal que $|\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'| = n$, el resultado anterior implica que las aristas de sus árboles generadores de peso mínimo se intersecan a lo mas $9(n-2)$ veces. Esta cota esta lejos de lo óptimo. De hecho no se ha podido construir ejemplos es los cuales los árboles generadores de peso mínimo de \mathcal{V} y \mathcal{V}' se intersecan mas de $2n-4$ veces. Un ejemplo es construido de la siguiente manera: \mathcal{V} consiste de 3

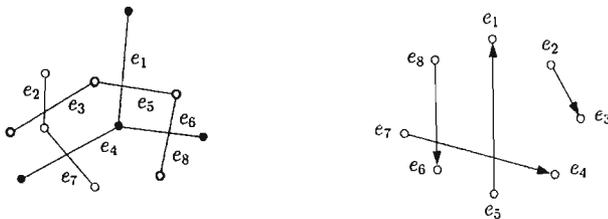


Figura 2.8 — La gráfica de intersección de tres árboles generadores de peso mínimo.

puntos r, s, t tal que r y s son equidistantes de t y el ángulo $\angle rts$ es un poco mayor a $\frac{\pi}{3}$. Los puntos de \mathcal{V}' se encuentran en un zig-zag poligonal tal que cada segundo segmento es paralelo y el ángulo entre dos segmentos consecutivos es $\frac{\pi}{2}$ tal como muestra la figura (2.9).

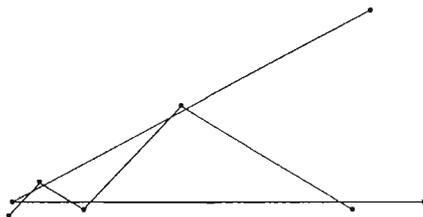


Figura 2.9 — \mathcal{V} tiene 3 puntos y \mathcal{V}' tiene 5. El número total de elementos en \mathcal{V}' puede ser incrementado a $(n - 3)$, $n \geq 4$. El número de intersecciones en aristas de los árboles generadores de peso mínimo de \mathcal{V} y \mathcal{V}' es $2n - 4$.

2.3.2. Ciclos geométricos

Ahora estudiaremos el problema de encontrar un ciclo geométrico para cada \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq k$ los cuales se intersecan poco. Para demostrar esto, es clara la suposición de que $\text{Conv}(\mathcal{V}_1) \cap \dots \cap \text{Conv}(\mathcal{V}_k) \neq \emptyset$.

Teorema 2.10 (M. Kano, C. Merino, J. Urrutia [21]). Sean $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ k conjuntos disjuntos de puntos tal que $\text{Conv}(\mathcal{V}_1) \cap \dots \cap \text{Conv}(\mathcal{V}_k) \neq \emptyset$. Entonces para cada \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq k$ podemos encontrar un ciclo geométrico C_i el cual cubre

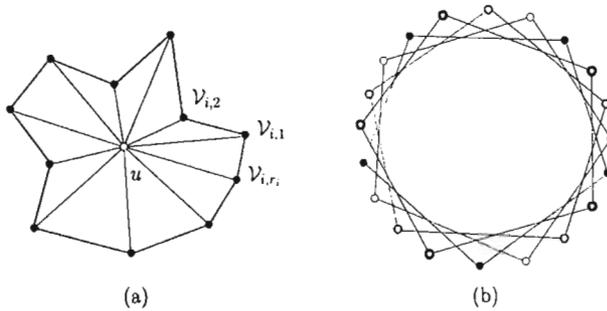


Figura 2.10 —

todos los vértices de \mathcal{V}_i y tal que las aristas de todos los ciclos C_1, \dots, C_k se intersecten a lo mas $(k-1)n$ veces. Esta cota es óptima.

Demostración. Sea u un punto en el interior de $\text{Conv}(\mathcal{V}_1) \cap \dots \cap \text{Conv}(\mathcal{V}_k)$. Para cada \mathcal{V}_i definase un ciclo C_i^u de la siguiente manera: Ordenemos los elementos de \mathcal{V}_i alrededor de u en sentido contrario de las manecillas del reloj de acuerdo a su pendiente y etiquetemoslos como $v_{i,1}, \dots, v_{i,r_i}$. (Ver figura (2.10)(a))

Una modificación directa al argumento de conteo del lema (2.6) muestra que las aristas de C_1, \dots, C_k se intersecta a lo mas $(k-1)n$ veces. Para mostrar que la cota es justa, consideremos $n = kr$, y seleccionemos kr puntos en un círculo unitario etiquetados por v_1, \dots, v_{kr} , y sea $\mathcal{V}_i = \{v_{i+ks} | k = 0, \dots, (r-1)\}$. Es fácil verificar que los ciclos C_i (únicos) que cubren los vértices de cada \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq k$ se intersectan $(k-1)(kr) = (k-1)n$ veces, ver figura (2.10)(b). ■

Capítulo 3

Trayectorias alternantes

3.1. Introducción

Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k$, k conjuntos de puntos en el plano. Una trayectoria alternante \mathcal{P} sobre \mathcal{V} es una trayectoria cuyos vértices son elementos de \mathcal{V} tal que elementos consecutivos de \mathcal{P} están unidos por un segmento de recta y pertenecen a diferentes elementos de $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$. Se dice que \mathcal{P} es simple, si ningún par de sus aristas se intersectan salvo por sus extremos.

En este capítulo consideraremos algunos problemas como los siguientes:

- Supongamos que $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ es de cardinalidad $2n$ con n puntos de color rojo (\mathcal{R}) y n puntos de color azul (\mathcal{A}), ¿bajo que condiciones podremos encontrar una trayectoria alternante simple \mathcal{P} que tenga a todos los elementos de \mathcal{V} como sus vértices? ¿cómo dibujamos tal trayectoria?.
- ¿Podremos decir algo sobre la longitud de la trayectoria alternante simple más larga sobre \mathcal{V} ?

En las siguientes secciones estos problemas son estudiados.

3.2. Trayectoria alternante simple

Antes de dar condiciones bajo las cuales tal trayectoria alternante existe, daremos algunas definiciones.

Definición 3.1. Una palabra $S = s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ es una secuencia de $2n$ elementos tal que n de ellos son a 's y n son r 's.

Definición 3.2. Una palabra circular $\mathcal{W} = s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ es una palabra en la cual s_{2n-1} es seguido de s_0, \dots , etc.

Definición 3.3. Una subpalabra $\mathcal{W}(i, k)$ de una palabra circular \mathcal{W} es la subsecuencia $s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+2k-1}$ de \mathcal{W} con $2k$ elementos empezando en el elemento s_i .

Definición 3.4. Una palabra válida \mathcal{W} es una palabra que puede ser construída usando las siguientes reglas:

1. \emptyset es una palabra válida.
2. Sí \mathcal{W} es una palabra válida, entonces $ra\mathcal{W}$, $a\mathcal{W}r$, $r\mathcal{W}a$ y $\mathcal{W}ar$ son palabras válidas.

Informalmente hablando, un palabra es construída añadiendo alternadamente una a y luego una r al conjunto vacío o al final de ella.

Por ejemplo, las palabras válidas con dos letras son ar y ra ; con cuatro letras tenemos $aarr$, $rraa$, $arar$, $rara$ y $raar$. Sin embargo, $arra$ no es una palabra válida.

Una palabra circular es una palabra circular válida si existe i tal que $s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+2n-1}$ es una palabra válida.

No todas las palabras circulares son válidas. El lector puede verificar fácilmente que $\mathcal{W} = aaaarraaaaarrrrrr$ no es una palabra circular válida.

3.2.1. El resultado principal

Sea $\mathcal{V} = v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}$ el conjunto de vértices de un polígono convexo tal que la mitad de ellos son azules (a) y la otra mitad son rojos (r). Sea $\mathcal{W} = s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ la palabra circular obtenida de \mathcal{V} como sigue:

$$s_i = a \text{ si } v_i \text{ es azul, de otra forma } s_i = r.$$

Teorema 3.1 (J. Akiyama, J.Urrutia [3]). *Existe una trayectoria alternante simple sobre $\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{W}$ es una palabra circular válida.*

Antes de demostrar el teorema (3.1) necesitamos los siguientes lemas.

Lema 3.2. *Sea $\pi = v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(2n-1)}$ para \mathcal{V} . Entonces los vértices cubiertos por cualquier subtrayectoria inicial $v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(k)}$ de π cubre un subconjunto de \mathcal{V} de la forma $v_{i+1}, \dots, v_{i+k-1}$.*

Demostración. La demostración viene inmediatamente de la definición. (Ver figura (3.2)). ■

Lema 3.3. *La subpalabra $\mathcal{W}(2k)$ inducida en W por el segmento inicial $v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(2k)}$ de π es una palabra válida.*

Demostración. Se sigue del lema (3.2) y de la observación de que cada vez, dos elementos son añadidos a cualquier subtrayectoria inicial de π , la primera es una a y la segunda es una τ , así, se extiende una palabra válida de \mathcal{W} de acuerdo a las reglas (1) y (2). ■

El teorema (3.1) se sigue inmediatamente.

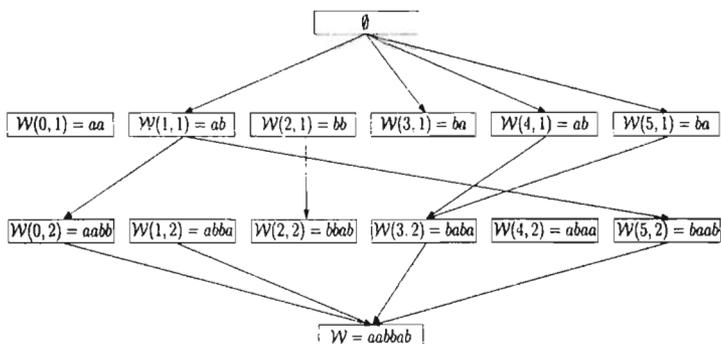


Figura 3.1 — Formas de construir las trayectorias alternantes simples para \mathcal{W} .

3.2.2. El algoritmo

Ahora presentaremos un algoritmo de $O(n^2)$ para determinar si una palabra circular $\mathcal{W} = s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ es una palabra circular válida.

Transformaremos el problema de decidir si una palabra circular \mathcal{W} es una palabra válida en un problema de trayectorias en una gráfica dirigida. El método usado nos permitirá no solo determinar si una palabra es válida o no, también nos dirá todas las maneras diferentes en las cuales una palabra \mathcal{W} puede ser construída. Esto, en su momento, nos dirá cuantas trayectorias alternantes existen sobre \mathcal{V} .

1. Método:

Dada \mathcal{W} , construir la digráfica \mathcal{G} con las palabras $\mathcal{W}(i, k)$ de \mathcal{W} como vértices mas la palabra vacía y la palabra completa \mathcal{W} como fuente y sumidero respectivamente.

Una arista en \mathcal{G} es dirigida de $\mathcal{W}(i, k)$ a $\mathcal{W}(j, k + 1)$ si $\mathcal{W}(i, k)$ puede ser extendida a $\mathcal{W}(j, k + 1)$ de acuerdo a las reglas (1) y (2). (Ver figura (3.1))

2. Observaciones:

El grado exterior de los vértices de \mathcal{G} (exceptuando a \mathcal{W}) es a lo mas 4. Así, $|\mathcal{E}(\mathcal{G})|$ es $O(n^2)$.

Una palabra es válida si existe una trayectoria desde \emptyset a \mathcal{W} en \mathcal{G} . Esto puede ser realizado en $O(n^2)$.

3. Ejemplo:

$$\mathcal{W} = aarrar$$

$$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$$

3.3. Trayectorias alternantes con puntos en posición general

Es natural restringir la geometría de un problema en orden de obtener resultados positivos. Consideremos dos configuraciones particulares: (ya que la tercera es la posición convexa y fué discutida en la sección anterior).

- Cuando \mathcal{R} y \mathcal{A} son linealmente separables.
- Cuando los elementos de \mathcal{R} define un polígono convexo que contiene a todos los elementos de \mathcal{A} .

3.3.1. Conjuntos linealmente separables

Definición 3.5. Diremos que en \mathcal{V} los conjuntos \mathcal{R} y \mathcal{A} son linealmente separables si existe un segmento de recta que separe $Conv(\mathcal{R})$ de $Conv(\mathcal{A})$.

Con la definición anterior se procederá a demostrar el siguiente resultado.

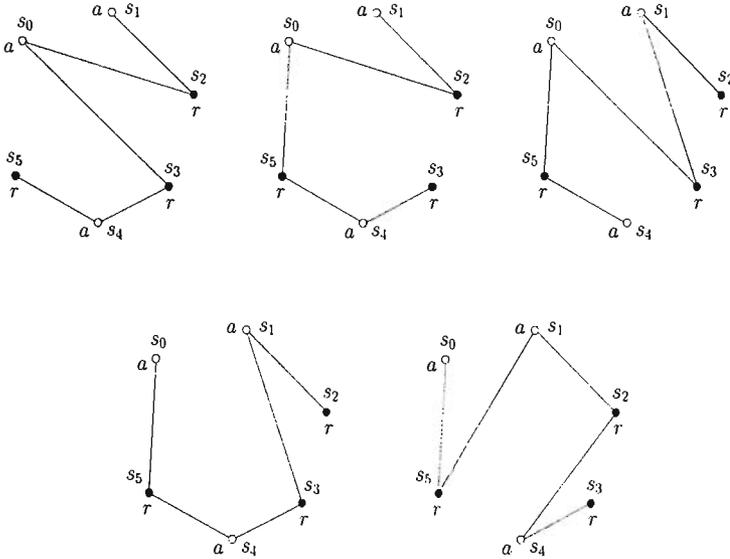


Figura 3.2 — Las trayectorias alternantes simples para \mathcal{W} según la figura (3.1).

Teorema 3.4 (M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos [2]). *Si en $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ con $||\mathcal{R}| - |\mathcal{A}|| \leq 1$, \mathcal{R} y \mathcal{A} son linealmente separables, entonces \mathcal{V} admite una trayectoria alternante.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que \mathcal{R} y \mathcal{A} están separados por una línea horizontal y sea $r_1 \in \mathcal{R}$ y $a_1 \in \mathcal{A}$ tales que $\overline{r_1 a_1}$ es la arista más a la izquierda de $\text{Conv}(\mathcal{V})$. El punto inicial de la trayectoria será r_1 si $|\mathcal{A}| = |\mathcal{R}| - 1$, a_1 si $|\mathcal{A}| = |\mathcal{R}| + 1$ y cualquiera de los dos si $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}|$. Supongamos que empezamos por r_1 y hagamos $\mathcal{C} = \{r_1\}$ (\mathcal{C} es una lista ordenada que corresponde a la trayectoria alternante tal como es construída). Es importante, no incluir a r_1 y a a_1 , porque entonces no se puede garantizar que la trayectoria pueda continuar. En cada paso, verificamos la arista izquierda $\overline{r a}$ de $\mathcal{V} \setminus \mathcal{C}$, y añadimos r a \mathcal{C} si el último punto de \mathcal{C} es elemento de \mathcal{A} o añadimos a si el último punto de \mathcal{C} esta en \mathcal{R} . De esta manera, obtenemos una trayectoria alternante simple. Dado que \mathcal{C} es disjunto de $\mathcal{V} \setminus \mathcal{C}$ y por lo tanto todas las aristas añadidas durante el algoritmo también. ■

Ahora, mostraremos una configuración particular más.

3.3.2. Configuraciones en las que $\mathcal{R} = \text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$

La configuración puede ser descrita de la siguiente manera: los elementos de \mathcal{R} son los vértices de un polígono que contiene a los elementos de \mathcal{A} .

Corolario 3.5. *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos, tal que $\mathcal{R} = \text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ y $||\mathcal{R}| - |\mathcal{A}|| \leq 1$. Entonces existe una trayectoria alternante simple sobre \mathcal{V} .*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$, entonces $|\mathcal{A}| = |\mathcal{R}|$ o $|\mathcal{A}| = |\mathcal{R}| + 1$, entonces utilizando el teorema (4.6) de la página 41 se obtiene un árbol de grado máximo dos, es decir, una trayectoria alternante simple. ■

Como hemos visto hasta ahora, solo en las dos configuraciones particulares anteriores es posible encontrar una trayectoria alternante simple \mathcal{P} que tenga a todos los elementos de \mathcal{V} como sus vértices, como veremos enseguida, en configuraciones no particulares hablar de la misma es más complicado debido a que la geometría no se encuentra restringida.

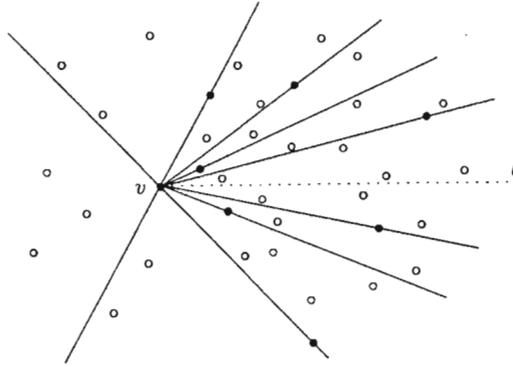
3.3.3. Configuraciones no particulares

Apartir del algoritmo dado en el teorema (3.4), se pueden deducir fácilmente los dos siguientes resultados:

Lema 3.6. *Si $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}| = n$ comenzando en cualquier punto de $\text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ existe una trayectoria alternante simple de longitud mayor o igual a n .*

Demostración. Basta observar que desde un punto v perteneciente a $\text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$, podemos trazar una recta dividiendo la colección de puntos en dos partes iguales, y por lo tanto tenemos al menos dos conjuntos de cardinalidad $\frac{n}{2}$ separables por una recta. ■

Lema 3.7. *Si $|\mathcal{R}| = n$ y $|\mathcal{A}| \geq n^2 - 2n + 1$, existe una trayectoria alternante incluyendo todos los puntos de \mathcal{R} .*

Figura 3.3 — División del plano en n regiones.

Demostración. Sea v un vértice cualquiera de $\text{Conv}(\mathcal{R})$. Al unir v con segmentos de rectas a los demás puntos de \mathcal{R} obtenemos $(n - 1)$ regiones con sólo una de ellas no convexa. Dividamos esa región en otras dos (que serán semiplanos no disjuntos) prolongando los segmentos de rectas que la limitan (ver figura (3.3)). Tenemos n regiones y alguna de ellas debe contener al menos $\left\lceil \frac{(n^2 - 2n + 1)}{n} \right\rceil \geq (n - 1)$ puntos. Si esa región es uno de los semiplanos, el algoritmo del teorema (3.4) da la solución. Si esa región está comprendida entre dos segmentos de recta, i puntos de \mathcal{R} a la izquierda y $(n - i - 1)$ a la derecha, podemos trazar otro segmento de recta l partiendo de v que divide a los puntos azules de esa región en al menos i a la izquierda, y al menos $(n - i - 1)$ a la derecha. La aplicación de nuevo del algoritmo del teorema (3.4) en esos dos nuevos semiplanos definidos por l , comenzando en v , dará la trayectoria buscada. ■

3.4. Conjunto de puntos con k colores

Sean $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$, $k > 1$, una colección de conjuntos de puntos disjuntos no vacíos tal que los puntos en $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k$ están en posición convexa y $|\mathcal{V}| = n$. Consideraremos que los puntos \mathcal{V}_i tienen color c_i y que $c(u)$ es el color del punto $u \in \mathcal{V}$. Suponemos que $|\mathcal{V}_i| \geq 2$.

Una trayectoria alternante \mathcal{Z} de \mathcal{V} será llamada *trayectoria zig-zag* si existe una línea l que intersecte todas las aristas de \mathcal{Z} . Si $|\mathcal{V}_1| = \dots = |\mathcal{V}_k|$, \mathcal{V}

será llamado un *conjunto de puntos k -balanceado*.

Supongamos que los elementos de \mathcal{V} están etiquetados con enteros $0, \dots, n-1$ tal que elementos consecutivos en $\text{Conv}(\mathcal{V})$ reciban enteros consecutivos (asumiendo que $(n-1)$ y 0 son consecutivos). Construimos la trayectoria zig-zag \mathcal{Z} como sigue:

- El primer vértice de \mathcal{Z} es 0 .
- Sea i_1 el entero mas chico tal que $c(i_1) \neq c(0)$. El segundo vértice de \mathcal{Z} es i_1 .
- Sea j_1 el entero mas grande tal que $c(j_1) \neq c(i_1)$. El punto j_1 es el tercer vértice de \mathcal{Z} .
- Supongamos que los primeros $2k+1$ (respectivamente $2k+2$) vértices de \mathcal{Z} , $0, i_1, j_1, \dots, i_k, j_k$ fueron escogidos. Entonces el siguiente vértice de \mathcal{Z} corresponde al entero mas chico i_{k+1} si es que existe, tal que $c(i_{k+1}) \neq c(j_k)$ y $i_k < i_{k+1} < j_k$ (respectivamente, la mayor j_{k+1} , si es que existe, tal que $c(i_{k+1}) \neq c(j_{k+1})$ y $i_{k+1} < j_{k+1} < j_k$).

Ahora, para un elemento dado $u \in \mathcal{V}$, definimos dos trayectorias zig-zag. La primera (\mathcal{Z}_u^+) es obtenida por el procedimiento mencionado arriba cuando renombramos a los elementos de \mathcal{V} en sentido de las manecillas del reloj con los enteros $0, 1, \dots, (n-1)$ empezando desde u . La segunda (\mathcal{Z}_u^-) es obtenida de la misma manera solo que renombrando en el sentido contrario a las manecillas de reloj empezando en u . (Ver figura (3.4))

Consideramos que dos trayectorias alternantes son las mismas si tiene el mismo conjunto de segmentos.

Observación 3.1. \mathcal{Z}_u^+ y \mathcal{Z}_u^- son trayectorias diferentes.

La trayectoria zig-zag \mathcal{Z}_u^+ tiene dos extremos, u mismo y un único punto $v = u^+$ diferente a u , al cual le llamaremos antípoda de u con respecto a \mathcal{Z}_u^+ . Durante el procedimiento de definir \mathcal{Z}_u^+ , u^+ recibe una etiqueta i y su (único) vecino v en \mathcal{Z}_u^+ una etiqueta j . Si $i < j$, $\mathcal{Z}_u^+ = \mathcal{Z}_{u^+}^+$. Si $i > j$, entonces $\mathcal{Z}_u^+ = \mathcal{Z}_{u^+}^-$. Denotamos esta única trayectoria zig-zag por $\mathcal{Z}_{u^+}^\pm$. Definimos análogamente $\mathcal{Z}_{u^-}^\pm$. (Ver figura (3.5))

Observación 3.2. $\mathcal{Z}_{u^+}^\pm$ ($\mathcal{Z}_{u^-}^\pm$ respectivamente) es el mismo que \mathcal{Z}_w^+ o \mathcal{Z}_w^- pero no ambos, para algún único $w \in \mathcal{V}$ diferente a u .

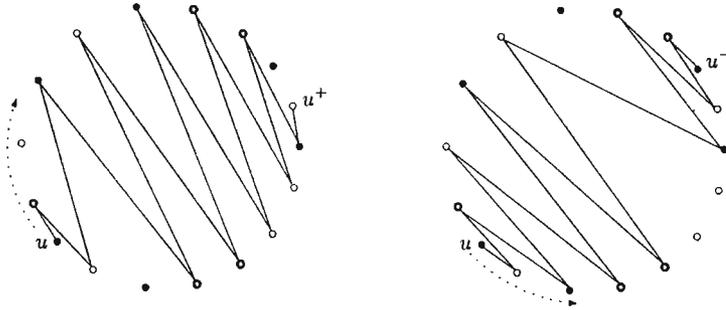


Figura 3.4 — En el lado izquierdo tenemos \mathcal{Z}_u^+ , la trayectoria zig-zag en el sentido de las manecillas del reloj; u^+ es el antípoda con respecto a \mathcal{Z}_u^+ . En el lado derecho tenemos \mathcal{Z}_u^- y u^- .

Consideremos el conjunto $\overline{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Z}_u^+, \mathcal{Z}_u^- | u \in \mathcal{V}\}$ de trayectorias zig-zag. Tenemos los siguientes lemas.

Lema 3.8. *La cardinalidad de $\overline{\mathcal{Z}}$ es igual a $|\mathcal{V}|$.*

Demostración. Construimos la gráfica \mathcal{G} sobre $\overline{\mathcal{Z}} \cup \mathcal{V}$ añadiendo todas las aristas $\{u, \mathcal{Z}_u^+\}$ y $\{u, \mathcal{Z}_u^-\} \forall u \in \mathcal{V}$. De esta forma, \mathcal{G} es una gráfica bipartita. Por la observación (3.1), el grado de cualquier $u \in \mathcal{V}$ es dos y por la observación (3.2), el grado de cualquier $\mathcal{Z} \in \overline{\mathcal{Z}}$ es también dos. Así que \mathcal{G} es bipartita 2-regular y, por el teorema del matrimonio [4], $|\mathcal{V}| = |\overline{\mathcal{Z}}|$. ■

Lema 3.9. *Para cualquier segmento \overline{uv} dado con extremos u y v de diferente color, existen exactamente dos elementos de $\overline{\mathcal{Z}}$ que usen \overline{uv} .*

Demostración. Sean u y v puntos de \mathcal{V} con diferentes colores. El segmento \overline{uv} separa \mathcal{V} en dos conjuntos de puntos \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 en posición convexa tal que $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{u, v\}$

En \mathcal{V}_1 , u y v se encuentran de forma consecutiva. Supongamos sin pérdida de generalidad que en \mathcal{V}_1 , v esta seguido de u es sentido de las manecillas del reloj. Sea $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_u^+$ en \mathcal{V}_1 y $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_v^+$ en \mathcal{V}_2 . El segmento \overline{uv} es el único que es compartido por \mathcal{Z}_1 y \mathcal{Z}_2 . Consideremos $\mathcal{Z}_{u^+}^\pm$ en \mathcal{V}_1 tal como fue construido anteriormente. Por la observación (3.2), podemos suponer sin pérdida de generalidad

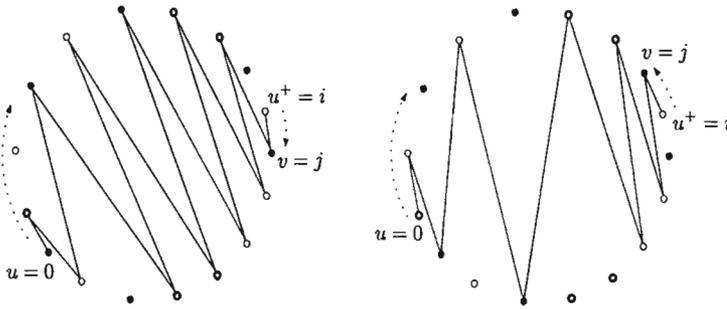


Figura 3.5 — En el lado izquierdo tenemos el caso en el que \mathcal{Z}_u^+ es también \mathcal{Z}_w^+ para alguna $w \neq u$. Denotamos esta única trayectoria \mathcal{Z}_w^+ por $\mathcal{Z}_{u^+}^\pm$. En el lado derecho tenemos el caso en el que \mathcal{Z}_u^+ es \mathcal{Z}_w^- para alguna $w \neq u$. Similarmente, la denotamos por $\mathcal{Z}_{u^-}^\pm$.

que $\mathcal{Z}_{u^+}^\pm = \mathcal{Z}_w^+$ para algún único $w \in \mathcal{V}_1$. Claramente, \mathcal{Z}_u^+ en \mathcal{V} es precisamente la trayectoria zig-zag que consiste de los segmentos de $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$.

De una forma similar, $\mathcal{Z}'_1 = \mathcal{Z}_v^-$ en \mathcal{V}_1 y $\mathcal{Z}'_2 = \mathcal{Z}_u^-$ en \mathcal{V} definen una única trayectoria zig-zag de la forma de \mathcal{Z}_w^+ , o \mathcal{Z}_w^- , en \mathcal{V} que consiste de los segmentos de $\mathcal{Z}'_1 \cup \mathcal{Z}'_2$. Como al menos uno de \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 no es vacío, tenemos que $\mathcal{Z}_1 \neq \mathcal{Z}'_1$ o $\mathcal{Z}_2 \neq \mathcal{Z}'_2$. Así las dos trayectorias definidas arriba son diferentes.

Finalmente, supongamos que existe $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{w''}^+$, tal que \overline{wv} pertenece a \mathcal{Z} . Supongamos sin pérdida de generalidad que $w'' \in \mathcal{V}_1$ y que u esta antes que v cuando atravesamos \mathcal{V} en sentido de las manecillas del reloj empezando desde w'' .

Tenemos dos casos. Si v está antes en \mathcal{Z} cuando comenzamos desde w'' , entonces $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$, donde $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_u^+$ en \mathcal{V} y $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_v^+$ en \mathcal{V}_2 . Si no, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'_1 \cup \mathcal{Z}'_2$, donde $\mathcal{Z}'_1 = \mathcal{Z}_v^-$ en \mathcal{V}_1 y $\mathcal{Z}'_2 = \mathcal{Z}_u^-$ en \mathcal{V}_2 . En ambos casos, \mathcal{Z} ya estaba construida. El caso cuando $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{w''}^-$ es similar.

Concluimos que para cada segmento \overline{wv} con extremos u y v coloreados diferente, existen exactamente dos elementos de $\overline{\mathcal{Z}}$ que los usan. ■

Ahora, calcularemos $\sum_{\mathcal{Z} \in \overline{\mathcal{Z}}} l(\mathcal{Z})$, donde $l(\mathcal{Z})$ es la longitud (número de segmentos) de \mathcal{Z} .

Proposición 3.10. *Sea $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$, k conjuntos de puntos tal que los puntos en $\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k$ están en posición convexa. Entoces existe un conjunto $\overline{\mathcal{Z}}$ de*

trayectoria zig-zag tal que:

$$\sum_{z \in \bar{\mathcal{Z}}} l(z) = 2 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} n_i n_j,$$

donde $n_i = |\mathcal{V}_i|$.

Demostración. Construimos $\bar{\mathcal{Z}}$ como antes. El resultado se sigue del lema (3.9) ya que cualquier segmento que une dos puntos de diferentes conjunto \mathcal{V}_i y \mathcal{V}_j esta en exactamente dos elementos de $\bar{\mathcal{Z}}$. ■

Teorema 3.11 (Merino, Salazar, Urrutia [25]). Sea $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$, k conjuntos de puntos tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k$ están en posición convexa y $|\mathcal{V}_1| \geq |\mathcal{V}_2| \geq \dots \geq |\mathcal{V}_k|$. Entonces existe una trayectoria alternante de longitud al menos $|\mathcal{V}| - |\mathcal{V}_1|$.

Demostración. Sea $n_i = |\mathcal{V}_i|$, $1 \leq i \leq k$, y sea $\bar{\mathcal{Z}}$ el conjunto de trayectoria zig-zag en \mathcal{V} construido como antes. De la proposición (3.10) y el lema (3.8) la longitud promedio de los elementos de $\bar{\mathcal{Z}}$ es:

$$\frac{1}{|\bar{\mathcal{Z}}|} \sum_{z \in \bar{\mathcal{Z}}} l(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} 2n_i n_j = \frac{1}{n} (n^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2) \geq n - n_1.$$

Por el principio básico del método probabilístico, ver [26], existe un elemento de $\bar{\mathcal{Z}}$ de longitud al menos $n - n_1$. ■

Corolario 3.12. Sea \mathcal{V} un conjunto de puntos k – balanceado con ks puntos. Entonces existe una trayectoria alternante de longitud $(k - 1)s$.

Demostración. Se sigue directamente del teorema (3.11). ■

Capítulo 4

Áboles de grado acotado

4.1. Introducción

Dado un árbol \mathcal{T} de n vértices y un conjunto \mathcal{V} de n puntos en el plano en posición general, se sabe que \mathcal{T} puede ser dibujado en \mathcal{V} con segmentos de recta como aristas y tal que no tenga cruces. El problema se complica si \mathcal{T} tiene un vértice particular (denominado raíz) y queremos que algún punto de \mathcal{V} tenga la misma propiedad. Una solución al problema anterior fue encontrada en [18] y un resultado similar de [31] es que, dado un conjunto de puntos $\mathcal{V} = \{p_1, \dots, p_n\}$ y una secuencia $d = (d_1, \dots, d_n)$ de enteros positivos con $\sum d_i = 2(n-1)$, existe algún árbol que puede ser dibujado en \mathcal{V} tal que el grado de p_i sea d_i . Algoritmos óptimos para resolver los anteriores problemas fueron encontrados en [5].

Definimos un árbol geométrico bicromático \mathcal{T} sobre $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ como un árbol geométrico (ver capítulo (3)) tal que cada arista de \mathcal{T} conecte un punto de \mathcal{R} con uno de \mathcal{A} . En general, si $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k$, $k \geq 3$, \mathcal{T} es denominado un árbol geométrico multicromático.

Un árbol tiene una única bipartición y es claro que una condición necesaria para la existencia de un árbol con las propiedades anteriores en \mathcal{V} es que las cardinalidades de las biparticiones de \mathcal{T} y \mathcal{V} sean las mismas. Sin embargo, existen ejemplos de que la anterior no es una condición suficiente. (ver figura (4.1))

Por otro lado, dada la bipartición natural de \mathcal{V} , siempre es posible dibujar algún árbol con respecto a esa bipartición: tomemos cualquier punto rojo y conectemos con todos los puntos azules, entonces los puntos rojos sobrantes los conectamos con los puntos azules que sean convenientes para no crear cruces.

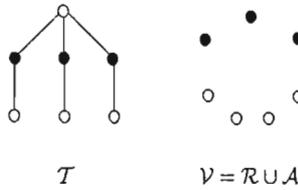


Figura 4.1 — \mathcal{T} no puede ser dibujado en \mathcal{V}

Sin embargo, esta simple solución produce árboles con un grado muy alto.

En este capítulo consideraremos los siguientes problemas que relacionan un árbol geométrico bicromático \mathcal{T} , \mathcal{V} y su bipartición natural:

1. Si $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$, cuál es el grado máximo más pequeño con el que podemos dibujar \mathcal{T} .
2. Dada una secuencia $d = (d_1, \dots, d_{|\mathcal{R}|})$ de enteros positivos, que condición tenemos sobre d para poder dibujar a \mathcal{T} tal que el grado de $p_i \in \mathcal{R}$ sea d_i .

4.2. Grado acotado de \mathcal{T}

En esta sección presentamos dos resultados que se mantienen para cualquier bipartición en posición general.

Lema 4.1. *Dados cualesquiera par de árboles geométricos \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 separados por un segmento de línea, existe una arista e entre \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 tal que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \{e\}$ es también un árbol geométrico.*

Demostración. Sea p el vértice de \mathcal{T}_1 más cercano al segmento de línea que separa \mathcal{T}_1 de \mathcal{T}_2 . Si consideramos a \mathcal{T}_2 como una colección de segmentos, entonces p tiene que ver completamente uno de los segmentos en \mathcal{T}_2 , por lo tanto puede ser conectado a uno de los extremos, a saber, el que tenga color diferente. ■

Teorema 4.2 (M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos [2]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general con $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$, entonces podemos encontrar en \mathcal{V} un árbol geométrico \mathcal{T} tal que su grado máximo sea $O(\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{R}|} + \log |\mathcal{R}|)$.*

Demostración. Usaremos el teorema *Ham-Sandwich*, que sostiene que dos conjuntos \mathcal{R} y \mathcal{A} pueden ser simultáneamente divididos por la mitad por un segmento de línea. Supongamos por simplicidad que $|\mathcal{R}| = 2^k$ y que $|\mathcal{A}| = \alpha 2^k, \alpha \geq 1$. Aplicando repetidamente el teorema, llegamos después de k pasos a una partición del plano en polígonos convexos donde cada uno de ellos contiene exactamente un punto rojo y α puntos azules. Conectando cada punto rojo a sus correspondientes puntos azules obtenemos $|\mathcal{R}|$ árboles geométricos bicromáticos de grado α .

Usando el lema (4.1), podemos mezclar estos $|\mathcal{R}|$ árboles en un único árbol, en orden opuesto al que fueron construidos, preservando la característica de que sea bicromático. Finalmente, después de k pasos de los anteriores, cada vez reduciendo el número de árboles en la mitad. Es claro que en cada paso, el grado máximo crece en a lo más uno. Dado que inicialmente $\Delta = \alpha$, al final $\Delta \leq \alpha + k = \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{R}|} + \log |\mathcal{R}|$. Los casos donde $|\mathcal{R}|$ no es una potencia de dos o $\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{R}|}$ no es un entero son tratados similarmente. ■

4.3. Puntos en posición restringida

Al igual que en el capítulo (3), en esta sección nos restringiremos a configuraciones muy particulares como las siguientes:

4.3.1. Conjuntos linealmente separables

Teorema 4.3 (M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos [2]). *Si en $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ con $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$, \mathcal{R} y \mathcal{A} son linealmente separables, entonces se puede dibujar \mathcal{T} tal que su grado máximo sea a lo más $1 + \left\lceil \frac{(|\mathcal{A}|-1)}{|\mathcal{R}|} \right\rceil$.*

Demostración. Sea $\bar{d} = 1 + \left\lceil \frac{(|\mathcal{A}|-1)}{|\mathcal{R}|} \right\rceil$. La idea es encontrar \mathcal{T} en el cuál los grados en \mathcal{R} sean igual a \bar{d} o a $\bar{d} - 1$ y al mismo tiempo, ser capaces de acotar los grados en \mathcal{A} .

Primero, supongamos que $\bar{d} > 2$, esto es que $(|\mathcal{A}| - 1) > |\mathcal{R}|$. De otra forma, dado que asumimos que $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{R}|$, el teorema (3.4) de la página 29 implica la existencia de \mathcal{T} con grado máximo igual a dos y por lo tanto el teorema es válido. Ahora, encontremos una secuencia $(d_1, \dots, d_{|\mathcal{R}|})$ de enteros positivos tal que $\sum d_i = |\mathcal{R}| + |\mathcal{A}| - 1$ y $d_i = \bar{d}$ o $d_i = \bar{d} - 1$. Ahora continuemos de la

siguiente manera. Encontramos un punto $p_1 \in \mathcal{R}$ tal que exista un segmento de recta que separe p_1 y d_1 puntos q_1, \dots, q_{d_1} de \mathcal{A} de los restantes puntos, donde los q_j están ordenados en forma circular con respecto a p_1 . Esto es siempre posible tomando líneas horizontales como en la demostración del teorema (3.4) de la página 29. Conectemos p_1 a los q_1, \dots, q_{d_1} , borremos todos estos puntos excepto q_{d_1} de la colección y encontremos un nuevo punto $p_2 \in \mathcal{R}$ que pueda ser separado junto con otros d_2 puntos de \mathcal{A} . Si repetimos este proceso, al final obtenemos un único punto $p_{|\mathcal{R}|} \in \mathcal{R}$ y $d_{|\mathcal{R}|}$ puntos de \mathcal{A} (ver figura (4.2)). El hecho de que $d_i > 1$ para cada i , implica que el grado de los puntos en \mathcal{A} sea igual a uno o dos. ■

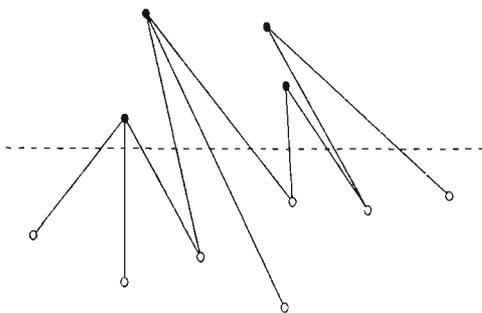


Figura 4.2 — Realizando la secuencia de grados $(3, 3, 2, 2)$.

4.3.2. Conjuntos en posición convexa

Teorema 4.4 (M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos [2]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición convexa con $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$. Entonces \mathcal{T} puede ser dibujado con grado máximo a lo más $\left\lceil \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{R}|} \right\rceil + 2$.*

Demostración. Supongamos por simplicidad que $|\mathcal{R}| = 2^k$ y que $|\mathcal{A}| = \alpha 2^k$. Usando el "Ham-Sandwich" como en el teorema (4.2) obtenemos $|\mathcal{R}|$ conjuntos convexos disjuntos con un punto rojo y α azules. El paso clave en este caso es que podemos controlar los grados en la unión.

Hagamos inicialmente \mathcal{T} igual a cualquiera de estas $|\mathcal{R}|$ estrellas. Para cada arista e de $\text{Conv}(\mathcal{T})$ que no sea una arista de $\text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$, consideremos los árboles $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_j$ que sean visibles desde e y que se encuentren en el espacio que contiene a \mathcal{T} y ordenemoslos en sentido de las manecillas del reloj (lo anterior tiene sentido dado que el conjunto se encuentra en posición convexa).

Después, seleccionemos uno de los vértices de e y construyamos una trayectoria alternante que conecta a \mathcal{T} y los árboles $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_j$ (ver figura (4.3)). Dado que el conjunto se encuentra en posición convexa podemos construir esta trayectoria de tal forma que el grado de los vértices aumente en a lo más dos. Hagamos \mathcal{T} igual al árbol obtenido con la construcción anterior e iteremos con el mismo proceso hasta que \mathcal{T} sea un árbol generador.

Para verificar que la condición del grado es satisfecha, observemos que las nuevas aristas de $\text{Conv}(\mathcal{T})$ que no están en $\text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ están determinadas por dos vértices que pertenecen a uno de los árboles en $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_j$. Dado que solo un vértice de cada árbol es usado cuando construimos la trayectoria, podemos garantizar que siempre tenemos un vértice libre con el cuál iterar el proceso. Por lo tanto, los puntos de \mathcal{R} tienen grado a lo más $\alpha + 2 = \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{R}|} + 2$, y los puntos de \mathcal{A} tienen grado a lo más tres. Observemos finalmente que $3 \leq \left\lceil \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{R}|} \right\rceil + 2$. ■

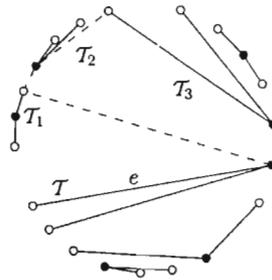


Figura 4.3 — Actualizando \mathcal{T} en la demostración del teorema (4.4).

4.3.3. Configuraciones en las que $\mathcal{R} = \text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$

Necesitaremos el siguiente resultado de [15].

Lema 4.5. *Sea \mathcal{V} un conjunto de puntos en posición general y supongamos que $\text{Conv}(\mathcal{V})$ tiene r elementos (a saber p_1, p_2, \dots, p_r) y que existen n puntos interiores. Sea $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, donde n_i , $1 \leq i \leq r$ es un entero positivo, Entonces $\text{Conv}(\mathcal{V})$ puede ser particionado en r polígonos convexos $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_r$ tal que \mathcal{Q}_i contenga n_i puntos y $\overline{p_i p_{i+1}}$ sea una arista de \mathcal{Q}_i .*

Demostración. **Resumen de la demostración de A. García y J. Tejel.** Por inducción sobre r . Si $r = 3$, por un argumento de continuidad y debido a la posición general de los puntos, es fácil demostrar que existe un punto $q \notin \mathcal{V}$ dentro del $\Delta p_1 p_2 p_3$ tal que los triángulos $p_1 p_2 q$, $p_2 p_3 q$ y $p_3 p_1 q$ contienen n_1 , n_2 y n_3 puntos respectivamente.

El paso inductivo empieza considerando una diagonal arbitraria, digamos $p_1 p_j$, con $1 < j < r$. Supongamos sin pérdida de generalidad que el polígono $p_1 p_2 \dots p_j$ contiene $n_1 + \dots + n_{j-1}$, o más puntos. Aplicando la hipótesis de inducción a este polígono y sea $p_1 q_1 \dots q_i p_j$ el polígono obtenido en la descomposición anterior correspondiente a la diagonal $p_1 p_j$. Si este polígono contiene n_j o más puntos, conectando p_{j+1} con un punto q' en la cadena poligonal $p_1 q_1 \dots q_i p_j$, el polígono es dividido en dos partes satisfaciendo la hipótesis de inducción. De otra forma es el mismo polígono $p_1 p_{j+1} \dots p_r$ el que satisface tal condición. ■

Teorema 4.6 (M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos [2]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ en el cual $\mathcal{R} = \text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ y con $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$. Entonces \mathcal{V} admite un árbol \mathcal{T} con grado máximo a lo más $1 + \left\lceil \frac{(|\mathcal{A}|-1)}{|\mathcal{R}|} \right\rceil$.*

Demostración. Si $|\mathcal{A}| = |\mathcal{R}| \alpha + 1$ podemos utilizar el lema (4.5) para descomponer el cierre convexo de $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_r\}$ en r polígonos convexos $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_r$, tal que \mathcal{Q}_j contenga α puntos de \mathcal{A} para $j \neq 1$, \mathcal{Q}_1 contiene $\alpha + 1$ puntos de \mathcal{A} y $\overline{p_i p_{i+1}}$ es una arista de \mathcal{Q}_i (todos los índices son tomados módulo r).

Sea s_j el punto en $\mathcal{Q}_j \cap \mathcal{A}$ más cercano a p_j y unamos cada punto rojo p_j a sus correspondientes α puntos azules en \mathcal{Q}_{j-1} , con la excepción de s_1 . Ahora, mezclemos estos r árboles conectando s_j a p_j para cada $j = 1, \dots, r$. De esta manera obtenemos un árbol \mathcal{T} con grado máximo igual a $(1 + \alpha)$. Finalmente, si $\frac{|\mathcal{A}|-1}{|\mathcal{R}|}$ no es un entero, entonces obtenemos un árbol con grado máximo a lo más $1 + \left\lceil \frac{(|\mathcal{A}|-1)}{|\mathcal{R}|} \right\rceil$. ■

4.4. \mathcal{T} de grado máximo a lo más tres

En esta sección se mejora el resultado obtenido en el teorema (4.2) por [2]

Teorema 4.7 (A. Kaneko [19]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general, tal que $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}|$. Entonces \mathcal{T} puede ser dibujado de tal manera que el grado máximo sea a lo más tres.*

Antes de demostrar el teorema anterior, es importante hacer notar que M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy y P. Ramos en el teorema (4.2) demostraron algo más fuerte que es que si tomamos $\lceil \frac{A}{R} \rceil = k$, y $\mathcal{R} = \{p_1, p_2, \dots, p_{|\mathcal{R}|}\}$, y reemplazando cada punto p_i de \mathcal{R} por un conjunto de puntos \mathcal{V}_i , donde \mathcal{V}_i esta contenido en un círculo con centro en el punto p_i , $k - 1 \leq |\mathcal{V}_i| \leq k$ y $|\bigcup_{i=1}^{|\mathcal{R}|} \mathcal{V}_i| = |\mathcal{A}|$. Aplicando el teorema (4.7) con $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{R}|} \mathcal{V}_i$ y contrayendo cada P_i al punto p_i , establecemos el siguiente teorema, que mejora al teorema (4.2).

Teorema 4.8 (A. Kaneko [19]). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general tal que $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|$, $\lceil \frac{A}{R} \rceil = k$ entonces \mathcal{T} puede ser dibujado tal que su grado máximo sea a lo más $3k$.*

En orden de probar el teorema (4.7), necesitaremos lo siguiente.

Sea $y \in \text{Conv}(\mathcal{V})$ y sea x un punto exterior a $\text{Conv}(\mathcal{V})$, entonces decimos que y es visto por x si el segmento de línea \overline{xy} que los conecta intersecta a $\text{Conv}(\mathcal{V})$ unicamente en y .

Lema 4.9. *Sean \mathcal{R}' y \mathcal{A}' dos conjuntos disjuntos de puntos en el plano con $2 \leq |\mathcal{R}'| \leq |\mathcal{A}'|$ y sea w un punto en el plano que no se encuentre contenido en $\text{Conv}(\mathcal{V})$ tal que $\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}' \cup \{w\}$ se encuentra en posición convexa. Si los dos vértices v_1 y v_2 de $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}' \cup \{w\})$ adyacentes a w estan contenido en \mathcal{R}' , entonces podemos particionar $\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}'$ en dos subconjuntos no vacíos \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 los cuales satisfacen las siguientes cinco condiciones:*

1. $v_1 \in \mathcal{D}_1$ y $v_2 \in \mathcal{D}_2$,
2. $|\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{R}'| = |\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{A}'|$,
3. $\text{Conv}(\mathcal{D}_1 \cup \{w\})$ y $\text{Conv}(\mathcal{D}_2 \cup \{w\})$ se intersectan unicamente en w ,
4. el vértice (distinto a v_1) de $\text{Conv}(\mathcal{D}_1 \cup \{w\})$ adyacente a w pertenece a \mathcal{A}' y

5. el vértice (distinto a v_2) de $\text{Conv}(\mathcal{D}_2 \cup \{w\})$ adyacente a w pertenece a \mathcal{A}' . (Ver figura (4.4))

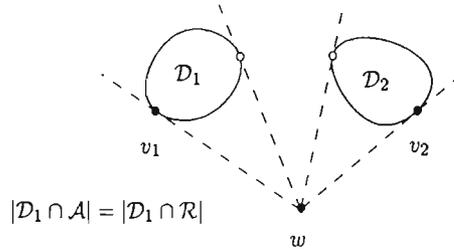
Demostración. Demostraremos el lema por inducción sobre $|\mathcal{R}'|$. Si $|\mathcal{R}'| = 2$ entonces el lema claramente es cierto así que supondremos que $|\mathcal{R}'| \geq 3$. Por una rotación adecuada del plano, podemos suponer que w se encuentra en la parte inferior de $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}' \cup \{w\})$. Más aún, demostraremos el lema con la propiedad adicional de que \mathcal{D}_1 se encuentra a la izquierda de \mathcal{D}_2 . Ahora consideraremos algunos rayos que emanen desde w y en dirección hacia arriba, en esta demostración entenderemos por rayo lo que la intuición nos dice. Definimos una función f para algún rayo r por:

$$f(r) = \{\text{el número de puntos de } \mathcal{R}' \text{ que se encuentren sobre o a la izquierda de } r\} - \{\text{el número de puntos de } \mathcal{A}' \text{ que se encuentren sobre o a la izquierda de } r\}.$$

Sean r_1 y r_2 dos rayos que pasan a través de los vértices adyacentes a w en $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}' \cup \{w\})$ a la izquierda y a la derecha respectivamente y sea r'_2 un rayo que es obtenido de r_2 por una pequeña rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de w . Entonces $f(r_1) = 1$ y $f(r'_2) = |\mathcal{R}'| - 1 - |\mathcal{A}'| \leq 1$. Dado que el valor de f cambia ± 1 y dado que $f(r_1) > 0 > f(r'_2)$, entonces existe un rayo r_a tal que $f(r_a) = 0$ y r_a pase a través de un punto de \mathcal{A}' . Ahora, rotamos r_a en sentido de las manecillas del reloj alrededor de w hasta encontrar un nuevo punto b de $\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}'$, y denotemos a ese rayo con r_b . Si r_b pasa a través de un punto de \mathcal{A}' , entonces sea \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 el conjunto de puntos de $\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}'$ que se encuentran sobre o a la izquierda de r_a y los puntos que se encuentran sobre o a la izquierda de r_b respectivamente. Entonces $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ es la partición deseada.

Si r_b pasa a través de un punto de \mathcal{R}' , entonces sea \mathcal{R}'_1 y \mathcal{A}'_1 los subconjuntos de \mathcal{R}' y \mathcal{A}' respectivamente, cuyos puntos se encuentren sobre o a la derecha de r_b . Entonces \mathcal{R}'_1 y \mathcal{A}'_1 y w satisfacen las hipótesis del lema y por lo tanto por la hipótesis inductiva, existe una partición $\mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4$ de $\mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{A}'_1$ que satisface las condiciones de este lema junto con la condición de que \mathcal{D}_3 se encuentre a la izquierda de \mathcal{D}_4 . Consecuentemente, podemos obtener la partición deseada $(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3) \cup \mathcal{D}_4$ de $\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}'$. ■

Ahora, para demostrar el teorema (4.7), enunciaremos un teorema aún más fuerte.

Figura 4.4 — Una partición $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ de \mathcal{V}

Teorema 4.10 (A. Kaneko [19]). *Sea \mathcal{V} como antes tal que $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}|$. Sea x y y dos vértices distintos de $\text{Conv}(\mathcal{V})$. Entonces \mathcal{T} puede ser dibujado de tal manera que su grado máximo sea a lo más tres, $d_{\mathcal{T}}(x) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}}(y) \leq 2$.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre $|\mathcal{R}| (= |\mathcal{A}|)$. Por simetría, supondremos que $x \in \mathcal{R}$. Sean a_1 y a_2 vértices distintos de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ adyacentes a x .

Consideraremos dos casos dependiendo de si a_i pertenecen al conjunto \mathcal{A} o no.

1. $a_1 \in \mathcal{A}$ o $a_2 \in \mathcal{A}$.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $a_1 \in \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \setminus \{x\}$ y $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - a_1$ y consideremos $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}')$. Si existen dos vértices consecutivos z_1 y z_2 en $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}')$ tal que son vistos por a_1 y x , entonces supondremos que $z_1 \neq y$. El caso donde $a_1 = y$ es mucho más fácil de manipular que donde y se encuentra en $\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}'$. Así, supondremos que y se encuentra en $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}')$. Dado que a_1 y x pertenecen a diferentes conjuntos, supondremos que $z_1 \in \mathcal{A}$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}')$, con y y z_1 siendo los dos vértices particulares de grado a lo más dos, obtenemos un árbol \mathcal{T}' tal que su grado máximo es a lo más tres, $d_{\mathcal{T}'}(y) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}'}(z_1) \leq 2$. Por lo tanto obtenemos el árbol deseado $\mathcal{T}' \cup a_1x \cup xz_1$.

Así que supondremos que existe un solo vértice $z \in \text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}')$ al cuál a_1 y x pueden ver. Notemos que z esta completamente en el interior de $\text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ (es decir, z no es un vértice de $\text{Conv}(\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$). Esto implica que $z \neq y$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\text{Conv}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{A}')$, con y y

z siendo los dos vértices particulares de grado a lo más dos, obtenemos un árbol \mathcal{T}' tal que su grado máximo es a lo más 3, $d_{\mathcal{T}'}(y) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}'}(z) \leq 2$. Por lo tanto obtenemos el árbol deseado $\mathcal{T}' \cup a_1x \cup xz$.

2. $a_1 \in \mathcal{R}$ y $a_2 \in \mathcal{R}$ (ver figura (4.5)).

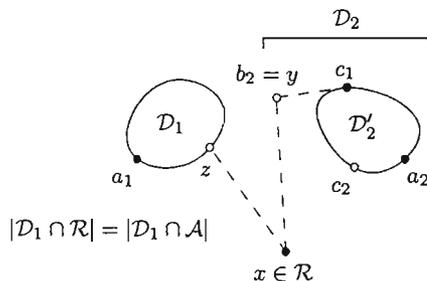


Figura 4.5 — Una partición $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ de $(\mathcal{R} \setminus \{x\}) \cup \mathcal{A}$.

Consideremos los conjuntos $\mathcal{R} \setminus \{x\}$ y \mathcal{A} . Aplicando el lema (4.4) a estos conjuntos $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \setminus \{x\}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ y $w = x$, podemos particionar $\mathcal{R} \setminus \{x\} \cup \mathcal{A}$ en dos conjuntos no vacíos \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 tal que:

- a) $a_1 \in \mathcal{D}_1$ y $a_2 \in \mathcal{D}_2$,
- b) $|\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{A}|$,
- c) $\text{Conv}(\mathcal{D}_1 \cup \{x\})$ y $\text{Conv}(\mathcal{D}_2 \cup \{x\})$ se intersectan únicamente en x ,
- d) el vértice b_1 (diferente a a_1) de $\text{Conv}(\mathcal{D}_1 \cup \{x\})$ adyacente a x pertenece a \mathcal{A} y
- e) el vértice b_2 (diferente a a_2) de $\text{Conv}(\mathcal{D}_2 \cup \{x\})$ adyacente a x pertenece a \mathcal{A} .

Sea $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}_2 - \{b_2\}$. Entonces $|\mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{A}|$. Por simetría, supondremos que $y \in \mathcal{D}_1 \cup \{b_2\}$. Por un argumento similar al del caso (1), podemos manejar el caso donde y se encuentre en \mathcal{D}_1 . Así que por brevedad, supondremos que $b_2 = y$. Es claro que existe al menos un vértice z de $\text{Conv}(\mathcal{D}_1)$ que es visto por b_2 y x sobre $\text{Conv}(\mathcal{D}_1)$. Dado que $b_2 = y$, tenemos que $z \neq y$. Dado que $b_2 \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{R}$ pertenecen a conjuntos diferentes, supondremos que $z \in \mathcal{A}$. Sea z' cualquier vértice de $\text{Conv}(\mathcal{D}_1)$

distinto a z . Aplicando la hipótesis de inducción a $\text{Conv}(\mathcal{D}_1)$, con z y z' siendo los vértices particulares de grado a lo más dos, obtenemos un árbol \mathcal{T}_1 tal que su grado máximo sea a lo más tres, $d_{\mathcal{T}_1}(z) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}_1}(z') \leq 2$.

Ahora sean $c_1, c_2 \in \text{Conv}(\mathcal{D}_2)$ dos vértices adyacentes a b_2 . Es claro que alguno de ellos es visto por x , digamos, c_2 .

Consideraremos dos subcasos, dependiendo de si c_1 pertenecen a \mathcal{R} o no.

a) $c_1 \in \mathcal{R}$ o $c_2 \in \mathcal{R}$.

Por simetría, supongamos que $c_1 \in \mathcal{R}$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\text{Conv}(\mathcal{D}'_2)$, con c_1 y c_2 siendo los dos vértices particulares con grado a lo más dos, obtenemos un árbol \mathcal{T}_2 de grado a lo más tres, $d_{\mathcal{T}_2}(c_1) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}_2}(c_2) \leq 2$. Por lo tanto, tenemos el árbol deseado $\mathcal{T}_1 \cup zx \cup xb_2 \cup b_2c_1 \cup \mathcal{T}_2$.

b) $c_1 \in \mathcal{A}$ y $c_2 \in \mathcal{A}$ (ver figura (4.6)).

Aplicando el lema (4.4) con $\mathcal{R}' = \mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{R}$ y $w = b_2$, podemos particionar \mathcal{D}'_2 en dos conjuntos no vacíos \mathcal{D}_3 y \mathcal{D}_4 tal que:

- 1) $c_1 \in \mathcal{D}_3$ y $c_2 \in \mathcal{D}_4$,
- 2) $|\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{A}|$,
- 3) $\text{Conv}(\mathcal{D}_3 \cup \{b_2\})$ y $\text{Conv}(\mathcal{D}_4 \cup \{b_2\})$ se intersectan únicamente en b_2 ,
- 4) el vértice d_1 (diferente a c_1) de $\text{Conv}(\mathcal{D}_3 \cup \{b_2\})$ adyacente a b_2 pertenece a \mathcal{R} y
- 5) el vértice d_2 (diferente a c_2) de $\text{Conv}(\mathcal{D}_4 \cup \{b_2\})$ adyacente a b_2 pertenece a \mathcal{R} .

Dado que c_1 y d_1 son vértices de $\text{Conv}(\mathcal{D}_3)$, se sigue que por hipótesis de inducción que existe un árbol \mathcal{T}_3 tal que su grado máximo sea a lo más tres, $d_{\mathcal{T}_3}(c_1) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}_3}(d_1) \leq 2$. Dado que $|\mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{A}|$, se sigue por el inciso (2) pasado que $|\mathcal{D}_4 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}_4 \cap \mathcal{A}|$. También, dado que c_2 y d_2 son vértices de $\text{Conv}(\mathcal{D}_4)$, se sigue que por hipótesis de inducción existe un árbol \mathcal{T}_4 tal que su grado máximo es a lo más tres, $d_{\mathcal{T}_4}(c_2) \leq 2$ y $d_{\mathcal{T}_4}(d_2) \leq 2$. Dado que c_2 es visto por x en $\text{Conv}(\mathcal{D}_4)$, tenemos el árbol deseado $\mathcal{T}_1 \cup zx \cup xc_2 \cup \mathcal{T}_4 \cup b_2d_2 \cup b_2d_1 \cup \mathcal{T}_3$ y por lo tanto, la demostración del teorema (4.10) esta completa.

■

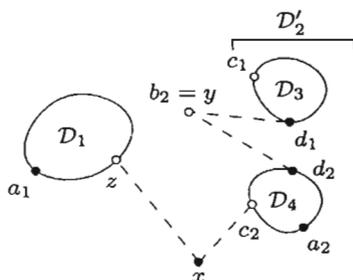


Figura 4.6 — Una partición $\mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4$ de \mathcal{D}'_2 tal que $|\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{A}|$ y $|\mathcal{D}_4 \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{D}_4 \cap \mathcal{A}|$.

4.5. Grado fijo en \mathcal{T}

Teorema 4.11 (M. Abellanas, J. García, G. Hernández, M. Noy, P. Ramos [2]). *Sea P como antes, con $\mathcal{R} = \{p_1, \dots, p_r\}$ y una secuencia $(d_1, \dots, d_{|\mathcal{R}|})$ de enteros positivos con $\sum d_i = |\mathcal{R}| + |\mathcal{A}| - 1$, entonces se puede dibujar \mathcal{T} tal que el grado de p_i sea igual a d_i .*

Demostración. Por inducción sobre $|\mathcal{R}| + |\mathcal{A}|$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $d_1 = \max d_i$ y sea l una recta orientada a través de p_1 y que no contenga ningún otro punto de \mathcal{R} o \mathcal{A} . Sean \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- los medios-planos abiertos derecho e izquierdo respectivamente en los cuales l divide el plano. Sean $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{H}^+$ y $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cap \mathcal{H}^+$ y también $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap \mathcal{H}^-$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \cap \mathcal{H}^-$. Finalmente, definamos dos funciones (que dependan de l) f^+ y f^- de la siguiente manera:

$$f^+ = \sum_{p_i \in \mathcal{H}^+} d_i - |\mathcal{R}_1| - |\mathcal{A}_1|,$$

$$f^- = \sum_{p_i \in \mathcal{H}^-} d_i - |\mathcal{R}_2| - |\mathcal{A}_2|,$$

y observemos que $f^+ + f^- = -d_1$.

En este momento, aseguramos que existe alguna posición de l en la cuál $-d_1 < f^+ < 0$. Para probar lo anterior, supongamos que inicialmente $f^+ \geq 0$ y consideremos los cambios en f^+ a la vez que l se mueve alrededor de p_1 .

Si un punto rojo p_i entra en \mathcal{H}^+ , entonces f^+ se incrementa en $d_i - 1$;

Si un punto rojo sale de \mathcal{H}^+ , entonces f^+ decrece en $d_i - 1$;

Si un punto azul entra en \mathcal{H}^+ , entonces f^+ se incrementa por 1;

Si un punto azul sale de \mathcal{H}^+ , entonces f^+ decrece en 1.

En cualquier caso, el cambio en valor absoluto es a lo más $d_i - 1 \leq d_1 - 1$. Dado que después de girar 180 grados, los valores de f^+ y de f^- se intercambian, y dado que $f^+ = -d_1 - f^-$, se sigue que $f^+ \leq -d_1$. Todo esto implica que para algún valor intermedio tenemos $-d_1 < f^+ < 0$. Si ahora asumimos que inicialmente $f^+ \leq -d_1$ y procedemos de la misma manera, la aseveración anterior es correcta.

Ahora por inducción podemos dibujar un árbol con respecto a $\mathcal{R}_1 \cup \{p_1\}$ y \mathcal{A}_1 en el cuál p_1 tenga grado $-f^+$ y $p_i \in \mathcal{R}_1$ tenga grado d_i . Análogamente, obtenemos un árbol en \mathcal{H}^- en el cuál p_1 tenga grado $-f^-$ y la unión de ambos árboles es el resultado esperado. ■

Capítulo 5

Cuadrilaterizaciones bicromáticas

5.1. Introducción

Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$, $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}| \geq 0$, un conjunto de puntos en el plano en posición general tal que cada punto tiene un color, rojo si pertenece a \mathcal{R} y azul si pertenece a \mathcal{A} . Una cuadrilaterización de \mathcal{V} es un conjunto de polígonos $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m\}$ tal que todos son cuadriláteros, tienen como conjunto de vértices a \mathcal{V} , todas las aristas de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ se encuentran en la cuadrilaterización y la unión de todos los cuadriláteros induce una subdivisión conexa del plano. Se dice que una cuadrilaterización es bicromática si cada arista de la misma es entre un punto de \mathcal{R} y uno de \mathcal{A} . (Ver figura (5.1))

Dado que en general, en determinados conjuntos de puntos una cuadrilaterización no siempre existe, en la siguiente sección nos concentraremos en los primeros estudios de cuadrilaterizaciones bicromáticas, considerando puntos extra que serán introducidos a \mathcal{V} para poder asegurar la existencia de la misma (a tales puntos se les llama de *Steiner*) y mostraremos una configuración de puntos para la cual hacen falta al menos $\frac{4m}{12}$ puntos de Steiner para poder cuadrilaterizar; donde $|\mathcal{V}| = m$.

5.2. Construyendo cuadriláteros

En últimas fechas se le han encontrado diferentes aplicaciones a las cuadrilaterizaciones tales como en el método de elemento finito [17] y simulación de superficies en cartografía [14]. Un problema geométrico fundamental en aplicaciones como las mencionadas arriba es la generación de mallas a partir del

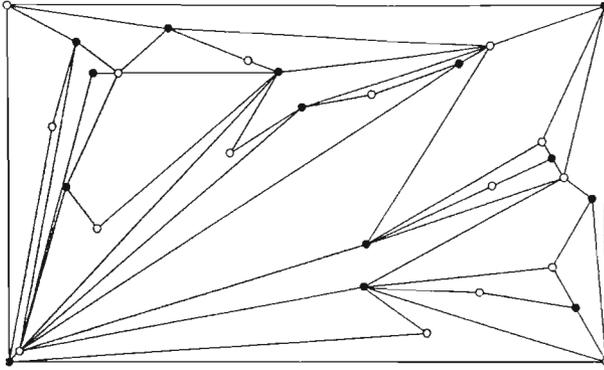


Figura 5.1 — Ejemplo de una cuadrilaterización bicromática sobre $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$.

conjunto de datos dado. Por muchas décadas la malla favorita usada ha sido la triangular conocida comúnmente por triangulación de un conjunto de datos. Como resultado, las triangulaciones de conjuntos de datos han sido estudiadas a profundidad y mucho se sabe al respecto. Sin embargo en algunas ocasiones es preferible que la malla sea una cuadrilaterización y no una triangulación. Desafortunadamente no mucho se sabe con respecto a las cuadrilaterizaciones y mucho menos de las bicromáticas, además de que una buena cuadrilaterización es más difícil de generar que una buena triangulación. De hecho, si se desea que las aristas de los cuadriláteros sean únicamente entre elementos del conjunto de datos (es decir, ningún punto de Steiner es permitido) entonces no cualquier conjunto de puntos admite una cuadrilaterización, para más información al respecto consultar Carmen Cortés *et al.* en [8]. (Ver figura (5.2))

En general, es difícil determinar el número de puntos de Steiner para el cual podemos asegurar siempre una cuadrilaterización, sin embargo, el siguiente teorema trata de dar una buena cota en terminos de la cardinalidad de $|\mathcal{V}|$.

Teorema 5.1 (V. Alvarez, T. Sakai y J. Urrutia). *Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general, tal que $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}|$ y $|\mathcal{V}| = 2n = m > 0$. Entonces en \mathcal{V} siempre es posible cudrilaterizar con a lo más $\lceil \frac{5m}{12} + \frac{7}{2} \rceil$ puntos de Steiner y existen configuraciones para las cuales $\frac{4m}{12}$ puntos de Steiner son necesarios.*

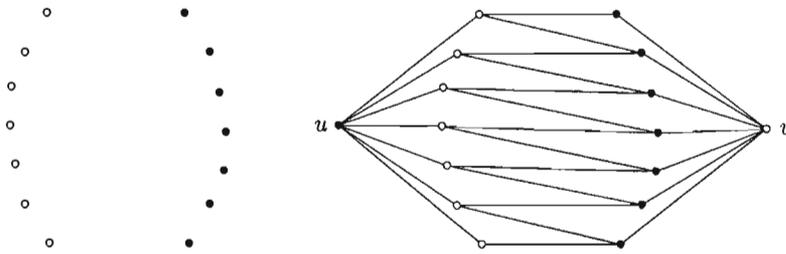


Figura 5.2 — A la izquierda tenemos una configuración de puntos que no admite una cuadrilaterización. A la derecha la misma configuración cuadrilaterizada con dos puntos de Steiner u y v .

Comenzaremos mostrando una configuración para la cual $\frac{4m}{12}$ puntos de Steiner son necesarios.

Consideremos un polígono convexo \mathcal{P} con $2k$ lados, $k \geq 2$ y donde los vértices alternan entre elementos de $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que los vértices aparecen en sentido contrario a las manecillas del reloj con etiquetas $r_1, a_1, r_2, a_2, \dots, r_k, a_k$. (Ver figura (5.3))

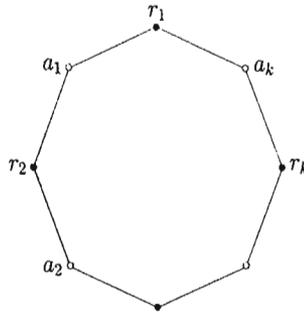


Figura 5.3 — Etiquetamos los vértices de \mathcal{P} en sentido contrario de las manecillas del reloj por $r_1, a_1, r_2, a_2, \dots, r_k, a_k$.

A partir de aquí todos los subíndices se encontrarán en $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq 2$ y serán tomados módulo k .

Para cada punto r_i (a_i), tracemos un segmento de recta que intersecte las

aristas $r_i a_i$ ($a_i r_{i+1}$) y $a_i r_{i+1}$ ($r_{i+1} a_{i+1}$) muy cerca de r_i (a_i) y de tal manera que la intersección dos a dos de estos segmentos se encuentra fuera y muy cercano a $\text{Conv}(\mathcal{V})$.

Finalmente, para el segmento de recta cuyas arista de intersección sean $r_i a_i$ ($a_i r_{i+1}$) y $a_i r_{i+1}$ ($r_{i+1} a_{i+1}$) coloquemos dos puntos de \mathcal{A} (\mathcal{R}) sobre la misma, muy cercanos el uno del otro y a la arista $r_i a_i$ ($a_i r_{i+1}$). Denotaremos a los puntos de cada uno de estos pares en sentido contrario a las manecillas del reloj por $a_{i,j}$ ($r_{i,j}$), diciendo que es el punto j del par i . (Ver figura (5.4) y la configuración completa en la figura (5.5))

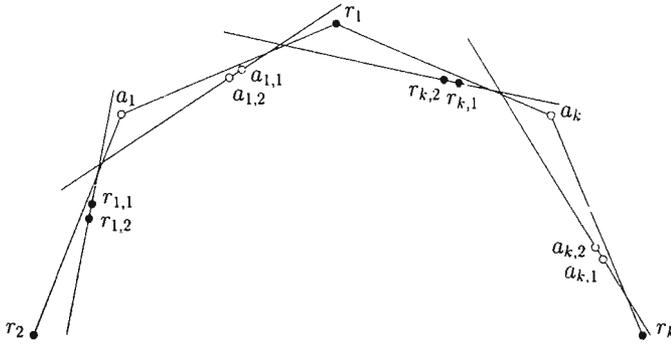


Figura 5.4 — Al interior de \mathcal{P} colocamos muy cerca de las aristas pares de puntos etiquetados por $a_{i,j}$ y $r_{i,j}$.

Antes de comenzar con la demostración, necesitaremos la siguiente definición.

Definimos la región \mathbb{R}_{r_i} (\mathbb{R}_{a_i}) para un par de puntos $r_{i,j}$ ($a_{i,j}$) como la región determinada por las intersecciones de las aristas $r_i a_i$, $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ ($a_{i-1} r_i$, $r_i a_i$ y $a_i r_{i+1}$) con el segmento de recta sobre el cual se encuentra el par $r_{i,j}$ ($a_{i,j}$) y el segmento de recta sobre el cual se encuentran r_{i+1} , $r_{i,2}$ (a_i , $a_{i,2}$), además de la intersección de estos dos últimos segmentos. La región es mostrada arriba (abajo) en la figura (5.6).

Ahora, ya podemos comenzar con la demostración de la cota inferior.

Demostración (Cota inferior). Notemos que en cualquier cuadrilaterización de la configuración anterior, cada arista de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ es arista de un único cuadrilátero vacío y también que para cada una de estas aristas existe un par de puntos $r_{i,j}$ ($a_{i,j}$) (con región \mathbb{R}_{r_i} (\mathbb{R}_{a_i})) elementos de \mathcal{V} al interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$. Debido a

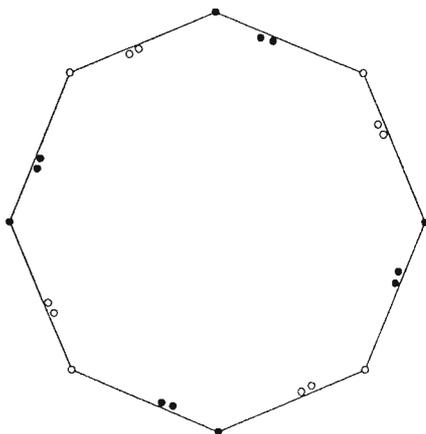


Figura 5.5 — Configuración para la cual son necesarios al menos $\frac{4m}{12}$ puntos de Steiner para poder cuadrilaterar.

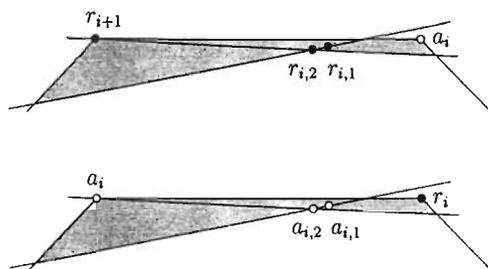


Figura 5.6 — Arriba, la región \mathbb{R}_{r_i} correspondiente a un par de puntos $r_{i,j}$. Abajo, la correspondiente a $a_{i,j}$.

lo anterior, el cuadrilátero vacío en cual se encuentra cada arista $a_i r_{i+1}$ ($r_{i+1} a_{i+1}$) de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ tiene al menos un vértice de Steiner en \mathbb{R}_{r_i} ($\mathbb{R}_{a_{i+1}}$). Ver figura (5.7)

Si todos estos puntos de Steiner fueran distintos ya habríamos terminado dado que tenemos al menos un punto de Steiner por arista, el número de aristas en $\text{Conv}(\mathcal{V})$ es $2k$ y el total de puntos en esta configuración es $m = 6k$, por lo tanto tendríamos al menos $2k = \frac{m}{3} = \frac{4m}{12}$ puntos de Steiner. Así que queda

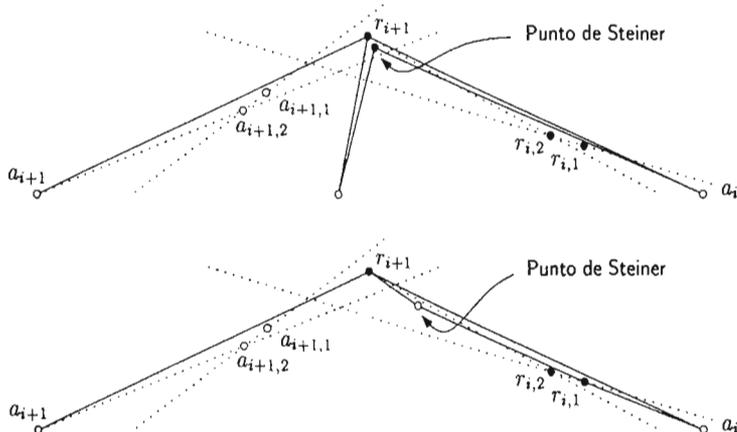


Figura 5.7 — Para la arista $a_i r_{i+1}$ se muestran las dos opciones que tiene el cuadrilátero vacío del cual es arista. Arriba se muestra si el punto de Steiner es del mismo color a r_{i+1} y abajo si es de otro color.

mostrar que es lo que sucede si no todos estos puntos de Steiner son distintos.

Debido a que los puntos de Steiner se encuentran en las regiones \mathbb{R}_{x_i} , $x \in \{r, a\}$, puntos de Steiner en regiones que no se intersectan son distintos, por lo tanto, nos concentraremos únicamente en regiones que se intersecten, esto es, en aristas adyacentes de $\text{Conv}(\mathcal{V})$.

Sin pérdida de generalidad, consideremos a las aristas $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ adyacentes en $\text{Conv}(\mathcal{V})$ en sentido contrario a las manecillas del reloj. Estas aristas, tienen al interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ a los pares de puntos $r_{i,j}$ y $a_{i+1,j}$ respectivamente y a las regiones \mathbb{R}_{r_i} y $\mathbb{R}_{a_{i+1}}$ respectivamente. (Ver figura (5.8))

Mostraremos que para estas dos aristas, existen al menos dos puntos de Steiner distintos.

Sean s y t dos vértices de Steiner de los cuadriláteros con aristas $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ respectivamente. Identifiquemos los siguientes casos:

- s y t tienen distinto color.

En este caso, debido al color, tienen que ser forzosamente puntos de Steiner distintos.

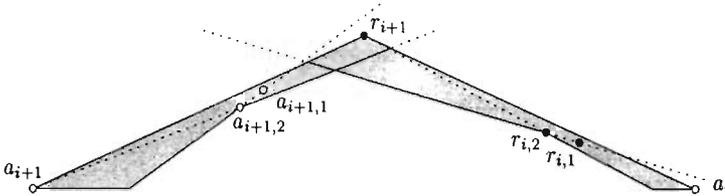


Figura 5.8 — Para las aristas $a_i r_{i+1}, r_{i+1} a_{i+1}$ adyacentes en $\text{Conv}(\mathcal{V})$, se muestran las áreas \mathbb{R}_{r_i} y $\mathbb{R}_{a_{i+1}}$ en gris.

- s y t son azules.

En este caso, podría suceder que en efecto s sea igual a t , sin pérdida de generalidad consideremos únicamente a s , (ver imagen (5.9) arriba). Este punto es adyacente a r_{i+1} y debido a que esta es una arista bicromática de la cuadrilaterización y no es elemento de $\text{Conv}(\mathcal{V})$, es arista también de dos cuadriláteros (a saber, los cuadriláteros que tienen como aristas a $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ respectivamente). Consideremos el cuadrilátero para el cual $r_{i+1} a_{i+1}$, $r_{i+1} s$ son aristas. Para este cuadrilátero, nos hace falta un cuarto vértice de color rojo (el que completa el cuadrilátero dejándolo vacío), pero notemos que ningún punto de color rojo de \mathcal{V} lo hace, por lo tanto, es necesario otro punto de Steiner u de color rojo en $\mathbb{R}_{a_{i+1}}$ que lo completa y lo deja vacío. (Ver figura (5.9) abajo)

- s y t son rojos.

En este caso, al igual que el pasado, puede suceder que s y t sean el mismo, de nuevo, consideremos únicamente a s .

Para que lo anterior suceda, las aristas $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ tiene que encontrarse en el mismo cuadrilátero (ver figura (5.10))

Notemos que una configuración exactamente como la de la figura (5.10) obliga a tener una configuración como la original y por lo tanto a meter puntos de Steiner que no son necesarios. Por lo tanto, tiene que suceder que un punto del par $r_{i,j}$ o $a_{i+1,j}$ debe quedar al interior de dicho cuadrilátero pero de hecho, no ambos, ya que esto obligaría a introducir otro punto de Steiner distinto a s y por lo tanto ya habríamos terminado.

Como caso particular al anterior, notemos que tampoco puede quedar algún

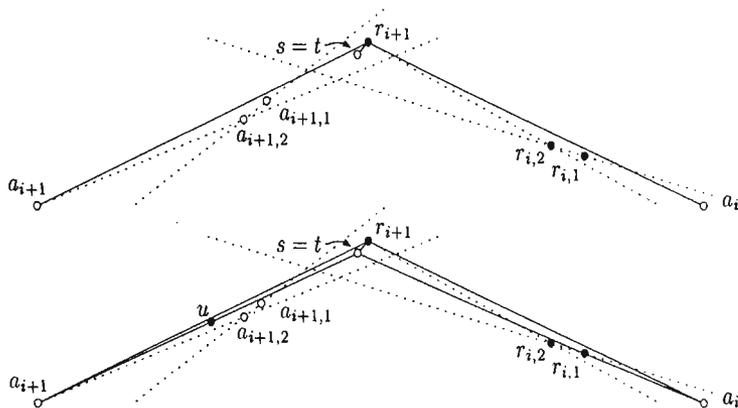


Figura 5.9 — Si $s = t$, para completar el cuadrilátero vacío que tiene como tres vértices a r_{i+1} , a_{i+1} y s se requiere un punto de Steiner u de color rojo en $\mathbb{R}_{a_{i+1}}$.

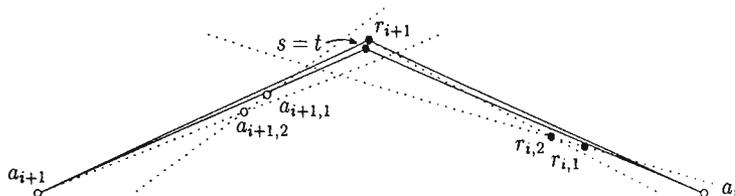


Figura 5.10 — Si $s = t$ son de color rojo, entonces las aristas $a_i r_{i+1}$ y $r_{i+1} a_{i+1}$ son aristas de un mismo cuadrilátero.

punto del par $r_{i,j}$ debido a que los vértices que ven todo el interior del cuadrilátero son r_{i+1} y s que son rojos y para cuadriláterizar el interior requeriríamos otro punto de Steiner distinto a s .

Después de lo anterior, la única opción que nos queda es que $a_{i+1,1}$ quede al interior del cuadrilátero. (Ver figura (5.11))

Ahora, localmente, la arista $a_{i+1}s$ junto con el par de puntos $r_{i,j}$ son una configuración parecida a la original. La arista $a_{i+1}s$ debe encontrarse en otro cuadrilátero vacío distinto al que tiene vértices a_i , r_{i+1} , $a_{i+1,1}$ y s . Este

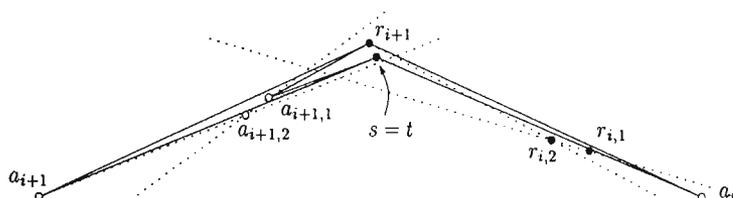


Figura 5.11 — Para introducir puntos de Steiner en la menor cantidad posible, $a_{i+1,1}$ debe quedar al interior del cuadrilátero con vértices a_i, r_{i+1}, a_{i+1} y s .

cuadrilátero, introducirá puntos de Steiner de uno u otro color dependiendo como se encuentre y de nuevo, localmente, quedará una arista e y el par de puntos $r_{i,j}$. Este proceso terminará en el momento en el que la arista e junto con algún punto del par $r_{i,j}$ se encuentren en el mismo cuadrilátero, por lo tanto, tenemos los siguientes casos:

- Si e y el punto $r_{i,2}$ son arista y vértice respectivamente del mismo cuadrilátero.

Notemos que $r_{i,1}$ queda al interior. El cuarto vértice es azul y si el cuadrilátero es no convexo, se requerirá de un punto de Steiner u azul para cuadrilaterizar a $r_{i,1}$ al interior, ver figura (5.12).

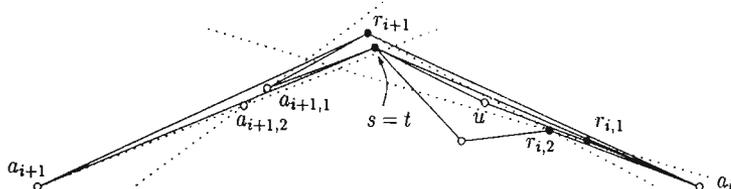


Figura 5.12 — Si el vértice que complete el cuadrilátero donde tres vértices son a_i, s y $r_{i,2}$ se encuentra fuera de \mathbb{R}_{r_i} , entonces dicho cuadrilátero es no convexo y por lo tanto, se necesita de un punto de Steiner u que cuadrilaterice a $r_{i,1}$ al interior del mismo.

Si el cuadrilátero es convexo, entonces el cuarto vértice u de Steiner se encuentra en \mathbb{R}_{r_i} y entre este y a_i cuadrilaterizan a $r_{i,1}$, ver figura (5.13).

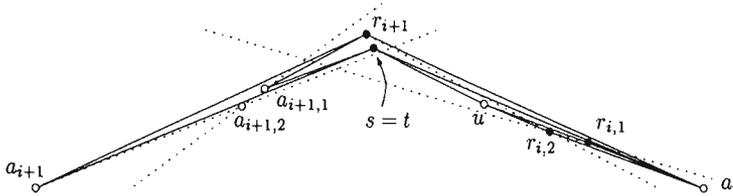


Figura 5.13 — Si el vértice u que complete el cuadrilátero donde tres vértices son a_i , s y $r_{i,2}$ se encuentra en \mathbb{R}_{r_i} , entonces es un punto de Steiner y hace al cuadrilátero convexo, con lo cual, entre u y a_i se cuadrilateriza a $r_{i,1}$ al interior del mismo.

- Si e y el punto $r_{i,1}$ son arista y vértice respectivamente del mismo cuadrilátero.

En este caso, por argumentos similares a los del inciso anterior, si el cuadrilátero contiene a $r_{i,2}$ se necesitará un punto de Steiner u para cuadrilaterizarlo al interior y si esta vacío el cuarto vértice u de nuevo se encuentra en \mathbb{R}_{r_i} y es de Steiner.

Debido a que en todos los casos anteriores $s \neq u$, tenemos al menos dos puntos de Steiner distintos para dos aristas adyacentes en $\text{Conv}(\mathcal{V})$.

Como una última observación, notemos que consideramos regiones que se intersectan en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, a la izquierda), pero para cada región, existen dos regiones que la intersectan, una a la izquierda y otra a la derecha. Por argumentos similares a los anteriores es fácil verificar que en la región de la derecha se necesita introducir un punto de Steiner distinto a s y a u , por lo tanto, de este caso ya no nos ocuparemos.

Por lo tanto, necesitamos al menos $2k = \frac{m}{3} = \frac{4m}{12}$ puntos de Steiner para cuadrilaterizar la configuración de la figura (5.5).

■

Con la cota inferior demostrada, continuaremos con la demostración de la cota superior, pero antes, necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 5.2 (Chvátal [13]). $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ lámparas en posiciones fijas son siempre suficientes y ocasionalmente necesarias para iluminar una galería de arte de forma poligonal con n vértices.

Demostración. Consideremos un polígono simple y arbitrario \mathcal{P} con n vértices. Obtenemos una triangulación \mathcal{T} de \mathcal{P} añadiendo $n-3$ diagonales internas. (Ver figura (5.14) a la izquierda)

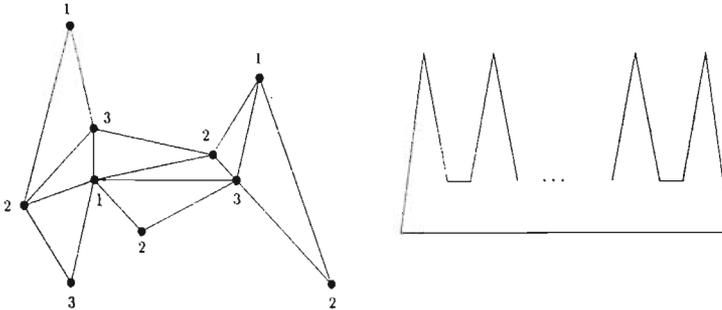


Figura 5.14 — Figuras para la demostración del teorema de la galería de arte de Chvátal.

Es fácil ver que podemos colorear los vértices de \mathcal{P} usando tres colores $\{1, 2, 3\}$ de tal manera que cualesquiera dos vértices adyacentes por una arista de \mathcal{P} o de \mathcal{T} reciban colores diferentes. Esta coloración particiona el conjunto de vértices de \mathcal{P} en tres clases cromáticas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$. Dado que los vértices de cada triángulo de \mathcal{T} reciben colores distintos, cada clase cromática ilumina \mathcal{P} . Coloquemos una lámpara en cada vértice de la clase cromática más pequeña y el resultado se sigue.

Para ver que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ lámparas son ocasionalmente necesarias, consideremos el polígono con $n = 3m$ vértices presentado en la figura (5.14) a la derecha. Es fácil ver que para iluminar este polígono necesitamos al menos m vértices. ■

Diremos que un polígono \mathcal{P} es estrellado, si existe un punto p al interior del mismo, tal que todos los puntos en la frontera son visibles desde p .

Lema 5.3. *Sea \mathcal{V} una colección de puntos en posición general donde $|\mathcal{V}| = n$. Entonces \mathcal{V} puede ser particionado en $\lfloor \frac{(n-1)}{3} \rfloor + 1$ polígonos estrellados, para $n = 3k$ la cota es justa.*

Demostración. Sea $v \in \text{Conv}(\mathcal{V})$ y por una rotación adecuada del plano, podemos suponer que v se encuentra en la parte inferior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$. Consideremos

los dos puntos $x, y \in \mathcal{V}$ adyacentes a v en $\text{Conv}(\mathcal{V})$. Podemos construir un primer polígono estrellado \mathcal{P}_1 de la siguiente manera.

Si unimos a todos los puntos al interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ con segmentos de recta a v y consideramos también a x e y , todos los puntos adyacentes a v se encuentran ordenados de x a y dada la pendiente de los segmentos de recta que los conectan con v , digamos que aparecen de izquierda a derecha como $x, v_1, \dots, v_k, y, k \geq 1$. Dado este orden, \mathcal{P}_1 tiene como vértices en sentido de las manecillas del reloj a v, x, v_1, \dots, v_k, y y donde todos estos vértices son visibles desde un punto muy cercano a v . (Ver figura (5.15))

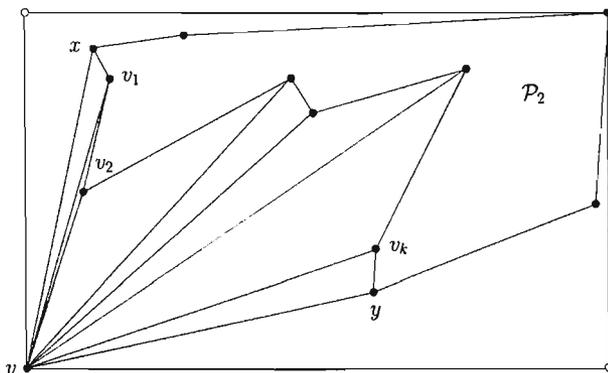


Figura 5.15 — El primer polígono estrellado se forma uniendo v con todos los puntos al interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$.

Si consideramos a \mathcal{P}_1 , existe otro polígono \mathcal{P}_2 no necesariamente estrellado cuyo conjunto de vértices son los vértices de $\text{Conv}(\mathcal{V}) \setminus \{v\} \cup \{x, v_1, \dots, v_k, y\}$. Desde luego, \mathcal{P}_2 no contiene ningún vértice al interior y el caso que nos interesa claramente es aquel en el que este es no estrellado.

Con el teorema (5.2) y dado que \mathcal{P}_2 tiene $(n - 1)$ vértices, este puede ser iluminado con a lo más $\lfloor \frac{(n-1)}{3} \rfloor$ lámparas colocadas en vértices de \mathcal{P}_2 . Todos estos vértices forman la clase cromática más pequeña de una tres coloración de una triangulación de \mathcal{P}_2 , ver figura (5.16). Por lo tanto, si consideramos a cada uno de estos vértices junto con todos los vértices a los que son adyacentes en dicha triangulación, ver figura (5.17), cada uno de estos induce un polígono estrellado que junto con \mathcal{P}_1 se tiene un total de $\lfloor \frac{(n-1)}{3} \rfloor + 1$ polígonos estrellados.

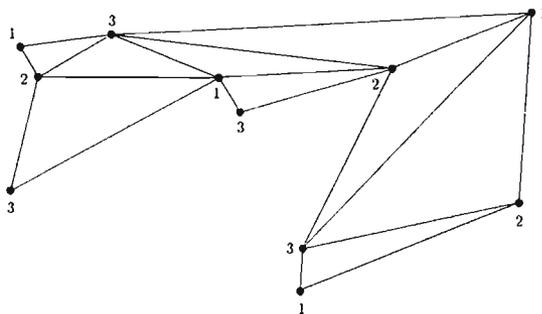


Figura 5.16 — Triangulación y coloración de \mathcal{P}_2 con colores $\{1, 2, 3\}$.

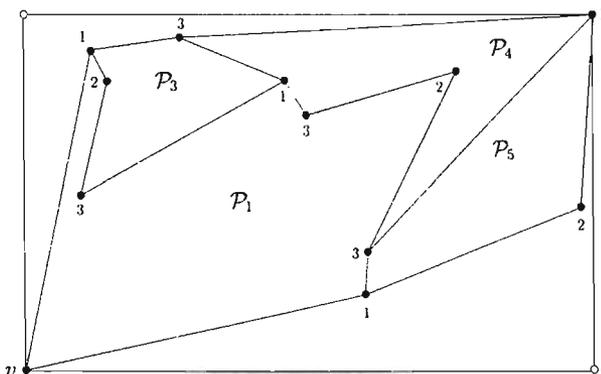


Figura 5.17 — En este ejemplo, la clase cromática más pequeña es la del color 2. Entonces, para cada uno de los vértices de color 2, un polígono estrellado es construido con los vértices que son adyacentes a él en la triangulación.

Para demostrar que la cota es justa, consideremos la siguiente configuración. Supongamos que tenemos un polígono convexo \mathcal{P} con un número par de lados y etiquetados en sentido de las manecillas del reloj por l_1, l_2, \dots, l_{2k} . Coloquemos un vértice muy cercano al punto medio de una arista al interior de \mathcal{P} y repitamos este proceso una arista sí y una arista no. Esto genera un conjunto de puntos \mathcal{V} de cardinalidad $3k$ (Ver figura (5.18))

Para cada lado en el cual se introdujo un vértice al interior de \mathcal{P} , consideremos

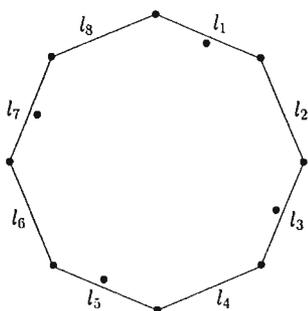


Figura 5.18 — Los vértices de \mathcal{P} junto con los puntos al interior cerca del punto medio de las aristas generan un conjunto de puntos de cardinalidad $3k$. En este ejemplo $k = 4$.

a dicho vértice junto con los vértices del lado correspondiente y definamos un triángulo (ver figura (5.19)). Existen k triángulos de los anteriores y es claro que cualquier polígono estrellado que contenga a uno no puede contener ningún otro mostrando así que en la configuración mostrada, la cota es justa.

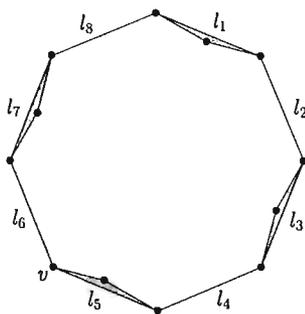


Figura 5.19 — Los k triángulos sombreados deben encontrarse necesariamente en polígonos estrellados distintos. En este ejemplo al igual que el anterior, $k = 4$.



Por último, necesitaremos de la siguiente observación:

Observación 5.1. En cualquier cuadrilátero bicromático, dos puntos del mismo color pueden ser colocados de tal manera que un punto de Steiner sea necesario para poder cuadrilaterizar. (Ver figuras (5.20) y (5.21))

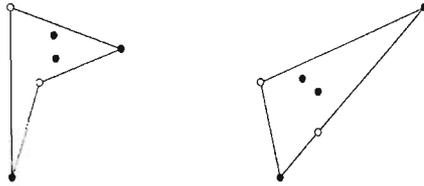


Figura 5.20 — En ambos casos, necesitamos un punto de Steiner para poder cuadrilaterizar.

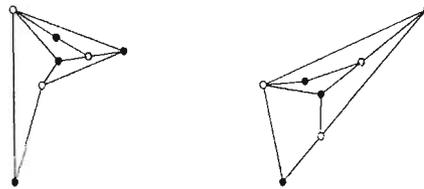


Figura 5.21 — Cuadrilaterización de la figura (5.20) con un punto de Steiner (mostrado en gris) en cada caso.

Con los resultados anteriores, ya podemos continuar con la demostración.

Demostración (Cota superior). Supongamos que \mathcal{V} se encuentra encerrado en un cuadrilátero en el cual los vértices alternan entre rojo y azul. La suposición anterior no es tan arbitraria debido a que si $\text{Conv}(\mathcal{V})$ no fuera un cuadrilátero, podríamos utilizar cuatro puntos de Steiner para asegurarlo lo cual nos incrementaría el total de puntos de Steiner en una constante muy pequeña.

De momento solo consideremos una clase cromática, sin pérdida de generalidad sea \mathcal{R} , por el lema (5.3), \mathcal{R} puede ser particionado en $k = \lfloor \frac{(n-1)}{3} \rfloor + 1$ polígonos estrellados. Colocaremos un punto de Steiner a_i de color azul al interior del polígono estrellado \mathcal{P}_i , $1 \leq i \leq k$, de tal manera que desde este punto se vean todos los puntos en la frontera de \mathcal{P}_i . Dado que consideramos únicamente

una clase cromática, podemos conectar cada punto del polígono \mathcal{P}_i a a_i , ver figura (5.22).

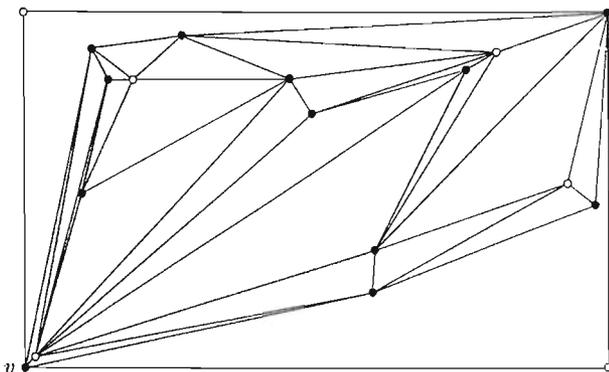


Figura 5.22 — Un punto de color azul puede ser introducido a cada polígono estrellado de tal manera que desde este punto, los polígonos sigan siendo estrellados.

La cuadrilaterización de toda la clase cromática de \mathcal{R} se completa borrando las aristas en \mathcal{P}_i cuyos extremos sean elementos de \mathcal{R} y conectando los dos puntos de \mathcal{A} restantes de $\text{Conv}(\mathcal{V})$ a los elementos de $\text{Conv}(\mathcal{R})$ sin introducir algún cruce. (Ver figura (5.23))

Aún restan los puntos de \mathcal{A} al interior de $\text{Conv}(\mathcal{V})$, pero notemos que en los cuadriláteros que hemos construido hasta el momento, los vértices que ven todo el interior son elementos de \mathcal{R} , por la observación (5.1) el peor caso es entonces cuando existen dos puntos exactamente al interior de los cuadriláteros, lo cual para completar la cuadrilaterización sobre \mathcal{V} nos obliga a utilizar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ puntos de Steiner, lo que nos deja un total de $\lfloor \frac{(n-1)}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 5 = \lceil \frac{5m}{12} + \frac{7}{2} \rceil \approx \lceil \frac{5m}{12} \rceil$ puntos de Steiner considerando los primeros cuatro puntos de Steiner que sirven para encerrar a \mathcal{V} en un cuadrilátero, por lo tanto, el resultado es válido. Ver figura (5.24) para la cuadrilaterización final. ■

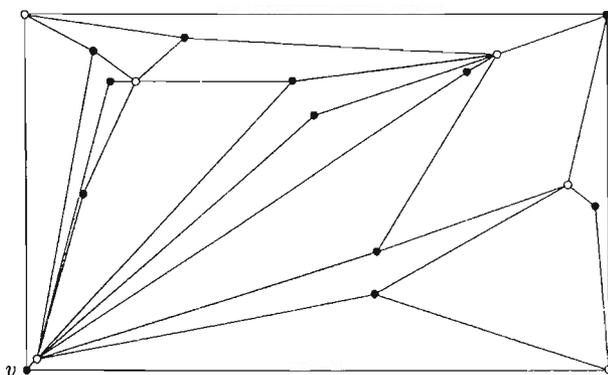


Figura 5.23 — Completando la cuadrilaterización de la clase cromática de \mathcal{R} entre los elementos de $Conv(\mathcal{R})$ y los dos puntos azules restantes de $Conv(\mathcal{V})$.

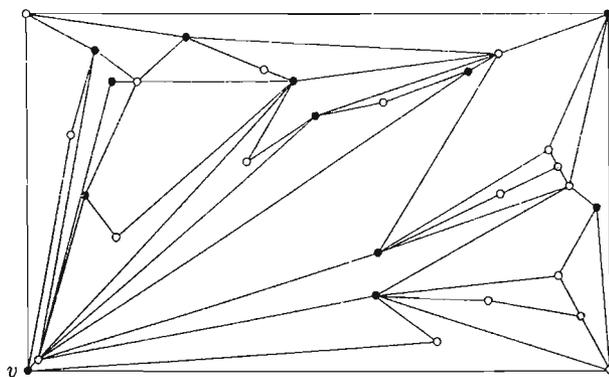


Figura 5.24 — Cuadrilaterización final que se obtiene de la partición en polígonos estrellados. Los puntos de Steiner son mostrados en gris.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos reunido algunos de los resultados más importantes sobre gráficas geométricas en conjuntos de puntos coloreados. Este trabajo fue impulsado por el gran interés que se ha suscitado ultimamente entre los investigadores al respecto del tema y porque cada vez son más las aplicaciones que se les encuentra a este tipo particular de gráficas.

Los resultados fueron presentados en los capítulos del uno al cuatro, comenzando con gráficas geométricas disconexas como lo son los emparejamientos y continuando con las gráficas geométricas uno conexas como los árboles y las trayectorias y dos conexas como lo son los ciclos.

Nuestra aportación al área viene en el capítulo cinco donde tratamos con otro tipo de gráficas dos conexas como lo son las cuadrilaterizaciones, las cuales ultimamente se han comenzado a estudiar y a las cuales también se les ha encontrado aplicaciones no solo en el área de geometría computacional.

Como ya dijimos, recientemente Carmen Cortés *et al.* en [8] definieron condiciones necesarias para la existencia de cuadrilaterizaciones bicromáticas. Nosotros nos concentramos en el problema de diseñar un algoritmo que pudiera cuadrilaterizar bicromáticamente cualquier conjunto de puntos bicoloreado con la ayuda de puntos de Steiner, donde claramente, lo que se desea es introducir la menor cantidad de estos para así mantener en lo mayor posible al conjunto original. Nuestro algoritmo resuelve la tarea anterior introduciendo aproximadamente $\lceil \frac{5m}{12} \rceil$ puntos de Steiner donde $m = 2n$ puntos y con una complejidad de $O(n \lg n)$; también mostramos un ejemplo para el cual $\frac{4m}{12}$ puntos de Steiner son necesarios lo cual sienta una cota tanto superior como inferior para dicho problema. Cabe señalar que la configuración mostrada para la cota inferior no fue la primera que estudiamos. En un principio estudiamos la siguiente configuración:

5.3. Primera construcción de la cota inferior

Supongamos que tenemos una malla de $m \times m$ vértices. Siempre podemos perturbar la misma a modo de seguir trabajando con posición general pero por simplicidad, trabajaremos con una malla de coordenadas enteras.

Coloquemos $m^2 - 2$ puntos azules (\mathcal{A}) sobre los vértices de la malla salvo por dos vértices opuestos en las esquinas de la malla. Coloquemos algunos puntos de \mathcal{R} al interior del cuadrilátero en alguna esquina de la malla y los restantes en el cuadrilátero opuesto. (Ver figura (5.25))

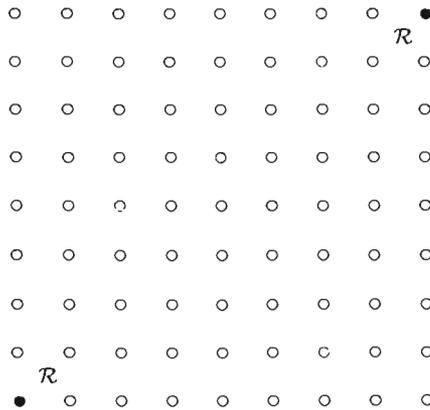


Figura 5.25 —

Ahora, si quisieramos cuadrilaterizar la configuración mostrada en la figura (5.25), para los puntos de \mathcal{A} nos hace falta al menos un punto de Steiner por renglón o por columna lo cuál nos determina automáticamente $\sqrt{|\mathcal{A}|}$ puntos de Steiner. Ver figura (5.26).

Desde luego que una vez cuadrilaterizados los puntos de \mathcal{A} , aún restan los puntos de \mathcal{R} , pero dado que estamos interesados en determinar cotas inferiores, estos últimos ya no son de nuestro interes.

Creemos que para poder cuadrilaterizar bicromáticamente la configuración anterior, $\Omega(\sqrt{n})$ puntos de Steiner son necesarios.

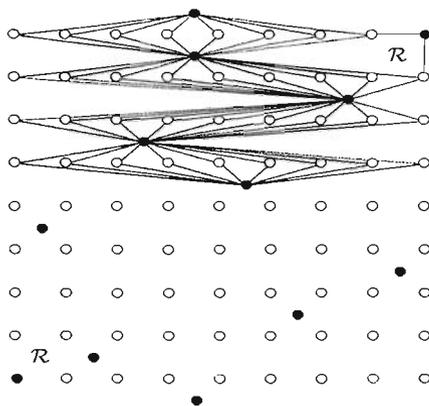


Figura 5.26 — Cuadrilaterización de la malla mostrada parcialmente.

5.4. Trabajo a futuro

Queda aún la pregunta más importante, ¿Que tanto más podemos ajustar las cotas tanto inferior como superior?. Creemos que se puede mejorar aún la cota superior aunque esto ya no suena una tarea fácil después de mostrar que ese problema puede ser reducido a la partición en polígonos estrellados y para el cual se mostro que la cota era justa. Pero la cotas ya se encuentran relativamente cerca (separadas por $\frac{1}{12}$) y de momento nos ha dejado satisfechos aunque seguiremos trabajando esperando que en poco tiempo podamos acercarlas un poco más.

También algo que suena plausible es que determinar el menor número de puntos de Steiner que cada configuración necesita es NP-completo, por lo tanto concluimos este capítulo y también este trabajo con las siguientes conjeturas:

Conjetura 1. En el ejemplo de la figura (5.25), $\Omega(\sqrt{n})$ puntos de Steiner son necesarios para poder cuadrilaterizar bicromáticamente.

Conjetura 2. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general, tal que $|\mathcal{R}| = |\mathcal{A}|$ y $|\mathcal{V}| = 2n = m \geq 0$. Entonces $\frac{m}{3}$ puntos de Steiner son suficientes y necesarios para poder cuadrilaterizar bicromáticamente.

Conjetura 3. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R} \cup \mathcal{A}$ un conjunto de puntos en posición general, tal que $|\mathcal{R}| \geq |\mathcal{A}|$ y $|\mathcal{V}| = n \geq 0$. Determinar el mínimo número de puntos de Steiner que son necesarios para poder cuadrilaterizar bicromáticamente es NP-completo.

Bibliografía

- [1] M. Abellanas, A. García, F. Hurtado, and J. Tejel. Caminos alternantes. *Proc. X Encuentros de Geometría Computacional.*, pages 7–12, 2003.
- [2] M. Abellanas, J. Garcia, G. Hernández, M. Noy, and P. Ramos. Bipartite embeddings of trees in the plane. *Discrete Applied Mathematics.*, 93:141–148, 1999.
- [3] J. Akiyama and J. Urrutia. Simple alternating path problem. *Discrete Mathematics.*, 84:101–103, 1990.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph theory with applications. *Macmillan Press.*, 1997.
- [5] P. Bose, M. McAllister, and J. Snoeyink. Optimal algorithms to embed trees in the plane. *Lectures notes in computer science*, 1027:64–75, 1995.
- [6] D. Bremner, F. Hurtado, S. Ramaswami, and V. Sacristán. Small convex quadrangulations of points sets. *Algorithmica*, 38:317–339, 2003.
- [7] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 2nd edition, 2001.
- [8] C. Cortés, A. Márquez, A.Ñakamoto, and J. Valenzuela. Quadrangulations and 2-colorations. *21th European Workshop on Computational Geometry*, 2005.
- [9] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer Verlag, 2000.
- [10] A. Dumitrescu and R. Kaye. Matching colored points in the plane, some new results. *Computational Geometry, Theory and Applications*, pages 69–85, 2001.

-
- [11] A. Dumitrescu and W. Steiger. On a matching problem on the plane. *Discrete Mathematics.*, pages 183–195, 2003.
- [12] H. Everett, W. Lenhart, M. Overmars, and J. Urrutia. Strictly convex quadrilateralizations of polygons. *Proc. of the Fourth Canadian Conference in Computational Geometry*, pages 77–83, 1992.
- [13] S. Fisk. A short proof of chvátal’s watchman theorem. *J. Combin. Theory Ser. B* 24:374, 1978.
- [14] L. De Floriani, B. Falcidieno, and C. Pienovi. Delaunay-based representation of surfaces defined over arbitrarily shaped domains. *Computational Vision, Graphics and Image Processing*, pages 32:127–140, 1985.
- [15] A. García and J. Tejel. Dividiendo una nube de puntos en regiones convexas. *Proc. VI encuentros de geometría computacional.*, pages 169–174, 1995.
- [16] Alan Gibbons. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [17] K. Ho-Le. Finite element mesh generation methods: A review and classification. *Computer Aided Design*, pages 20:27–38, 1988.
- [18] Y. Ikebe, A. Tamura M. Perles, and S. Tokunaga. The rooted tree embedding problem into points in the plane. *Discrete and Computational Geometry.*, 11:51–63, 1994.
- [19] A. Kaneko. On the maximum degree of bipartite embeddings of tree in the plane. *Japan conference on discrete and computational geometry (JCDCG).*, 1763:166–171, 1998.
- [20] A. Kaneko, M. Kano, and K. Yoshimoto. Alternating hamiltonian cycles with minimum number of crossing in the plane. *International journal of computational geometry and applications.*, pages 73–78, 2000.
- [21] M. Kano, C. Merino, and J. Urrutia. On plane spanning trees and cycles of multicolored point sets with few intersections. *Information Processing Letters.*, 93:301–306, 2005.
- [22] Marc Van Kreveld, Mark Overmars, Otfried Schwarzkopf, and Mark De Berg. *Computational geometry*. 2000.

-
- [23] L. C. Larson. Problem-solving through problems. *Springer-Verlag, New York.*, pages 200–201, 1983.
- [24] C. Merino, G. Salazar, and J. Urrutia. On the intersection number of matchings and minimum weight perfect matchings of multicored point sets. *Presented at the Joint meeting of the AMS and the Real Soc. Española de Matemáticas, Sevilla, Spain, 2003.*, 2003.
- [25] C. Merino, G. Salazar, and J. Urrutia. On the length of longest alternating paths for multicolored point sets in convex position. *Japan conference on discrete and computational geometry (JCDCG).*, 2003.
- [26] R. Motwani and P. Raghavan. Randomized algorithms. *Cambridge University Press.*, 1995.
- [27] J. Pach. Geometric graph theory. *Surveys in Combinatorics, London Math. Soc. Lecture Note Series.*, 267:167–200, 1999.
- [28] J. Pach and P.K. Agarwal. *Combinatorial Geometry.*, pages 223–242, 1995.
- [29] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry : An Introduction.* Springer Verlag, 1993.
- [30] K. Suzuki. On the number of intersections of three monocromatic trees in the plane. *Discrete and Computational Geometry.*, 2866 of LNCS, Springer, 2003:261–272, 2002.
- [31] A. Tamura and Y. Tamura. Degree constrained tree embedding into points in the plane. *Information Processing Letters.*, 44:211–214, 1992.
- [32] S. Tokunaga. Intersection number of two connected geometric graphs. *Information Processing Letters.*, 59:331–333, 1996.
- [33] S. Tokunaga. On a straight-line embedding problem of graphs. *Discrete Mathematics.*, 150:371–378, 1996.