



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUADRILATERIZACIONES  
CONVEXAS CON POCOS  
PUNTOS STEINER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:  
MARCO ANTONIO HEREDIA VELASCO



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

m 345404



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impresa el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Heredia Velasco  
Marco Antonio  
FECHA: 15-06-2005  
FIRMA: [Firma]

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“Cuadrilaterizaciones Convexas con pocos puntos Steiner”

realizado por Heredia Velasco Marco Antonio

con número de cuenta 09620661-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	Dr. Jorge Urrutia Galicia	
Propietario	Dr. Criel Merino López	
Propietario	Dra. Maria del Pilar Valencia Saravia	
Suplente	Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo	
Suplente	Dra. Hortensia Galeana Sánchez	

*Memo Lopez Criel*

*Pilar Valencia S.*

*Martha Araujo*

*[Firma]*

Consejo Departamental de  
Matemáticas



Dr. Francisco Hernández Quiroz

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE  
MATEMÁTICAS

# Agradecimientos

Quiero agradecer al doctor Jorge Urrutia por darme la oportunidad de realizar esta tesis bajo su dirección, por permitirme trabajar a su lado en estos años, y por todo el tiempo y paciencia que me ha dedicado.

A los doctores Criel Merino, Pilar Valencia, Gabriela Araujo y Hortensia Galeana: Por revisar esta tesis y por sus valiosos comentarios para mejorarla.

A todos los profesores que han ayudado a convertirme en la persona que soy ahora, en especial a Mario Campos y a Carmen Georgina Ramírez.

A mis amigos: América, Angel, Citlali, Cuauhtémoc, Fabiola, Juan Carlos, Mario, Mauricio, Melina, Noe, Patricia, Pedro, Rafael, Sergio, Silvia, Vania, Victor y Violeta; por ser casi como hermanos para mí.

A mis abuelos: a todos mis tíos, en especial a mi tía Cecilia, a mi tío Carlos y a mi tío Victor; y a mis primos, en particular a Alejandra, Itzel y Tonatiuh: Por estar siempre conmigo.

A mi cuñado Huitzilin Yépez: Por su amistad, y por todos los comentarios y opiniones que ha compartido conmigo.

Finalmente quisiera agradecer a la DGAPA, proyecto PAPIIT IN110802, y al CONACYT, proyecto 37540-A, por el apoyo económico que me brindaron durante la elaboración de esta tesis.

A mi madre:  
Genoveva

A mi padre:  
Antonio

A mi hermana:  
Alma Rosa

# Índice General

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Historia de las cuadrilaterizaciones</b>	<b>3</b>
2.1. Preliminares . . . . .	3
2.2. Cuadrilaterizaciones . . . . .	7
2.3. Cuadrilaterizaciones convexas . . . . .	9
2.3.1. Cota inferior . . . . .	10
2.3.2. Cota superior . . . . .	10
<b>3. Cuadrilaterizaciones convexas y puntos Steiner</b>	<b>14</b>
3.1. Método . . . . .	14
3.2. Algoritmo con $n + 1$ Steiner . . . . .	16
3.2.1. Cuadrilaterizando convexamente las rebanadas . . . . .	19
3.2.2. Cota de $n + 1$ . . . . .	22
3.3. Algoritmo con $(4/5)n + (8/5)$ Steiner . . . . .	23
3.3.1. Hexágonos estrellados . . . . .	26
3.3.2. Cuadrilaterizando convexamente las rebanadas . . . . .	29
3.3.3. Cota de $(4/5)n + (8/5)$ . . . . .	37
<b>4. Conclusiones</b>	<b>39</b>
4.1. Cota superior . . . . .	39
4.2. Comparación . . . . .	39
4.3. A futuro . . . . .	40
<b>A. Steiner interiores y exteriores</b>	<b>42</b>
A.1. Reacomodando Steiner . . . . .	42
A.1.1. Arista impar y rebanada A . . . . .	44
A.1.2. Arista impar y rebanada B . . . . .	44

---

A.1.3. Arista par y rebanada E . . . . .	46
A.1.4. Arista par y rebanada F . . . . .	49
A.2. Cota de $n + 2$ . . . . .	50
<b>B. Rebanadas del algoritmo de <math>(4/5)n + (8/5)</math> Steiner</b>	<b>51</b>
B.1. Tipo I . . . . .	52
B.2. Tipo II . . . . .	57
B.3. Tipo III . . . . .	61
B.4. Tipo IV . . . . .	61
B.4.1. Tamaño 3 . . . . .	61
B.4.2. Tamaño 4 . . . . .	61
B.4.3. Tamaño 5 . . . . .	63
B.4.4. Tamaño 6 . . . . .	63
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Índice de figuras

2.1. Línea y segmento de $a$ y $b$ . . . . .	3
2.2. Un polígono simple y un polígono convexo. . . . .	4
2.3. Un polígono con hoyos. Las áreas grises no pertenecen al polígono. . . . .	5
2.4. Un conjunto de puntos $S$ y su envolvente convexa. . . . .	5
2.5. Cuadrilaterización del conjunto $S$ de la figura 2.4. . . . .	5
2.6. Cuadrilaterización convexa del conjunto $S$ de la figura 2.4. . . . .	6
2.7. Conjunto de puntos no cuadrilaterizable. . . . .	6
2.8. Cuadrilaterización de $S$ usando inserción secuencial. . . . .	8
2.9. Espiral convexa, triangulación Hamiltoniana y cuadrilaterización. . . . .	8
2.10. Conjunto de puntos con tres envolventes convexas anidadas. . . . .	9
2.11. Configuración de 12 puntos que requiere 6 puntos Steiner. . . . .	10
2.12. Método de de Berg. . . . .	11
2.13. Unión de dos cuadriláteros. . . . .	12
2.14. Cuadrilaterización convexa usando el método de los hexágonos. . . . .	13
3.1. Cuadrilaterizando convexamente un conjunto $S$ con nuestro método. . . . .	15
3.2. Rebanada $\triangleleft(c, d)$ de tamaño 6. . . . .	16
3.3. El paso $i$ si $i = 1$ . . . . .	17
3.4. El paso $i$ si $i = 3$ . . . . .	17
3.5. Todos los tipos de rebanada que podemos obtener. . . . .	18
3.6. Ambas rebanadas mandan al mismo caso. . . . .	19
3.7. Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo A. . . . .	20
3.8. Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo B. . . . .	20
3.9. Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo C. . . . .	21
3.10. Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo D. . . . .	21
3.11. Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo E. . . . .	22
3.12. Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo F. . . . .	22
3.13. Cuadrilaterizando convexamente un conjunto $S$ con $n = 7$ . . . . .	24



3.14. Ejemplos de rebanadas de Tipo I, II, III y IV. . . . .	25
3.15. Cuña del vértice $w$ . . . . .	26
3.16. Hexágono estrellado donde se puede agregar un Steiner. . . . .	28
3.17. Manera en que se denotará la aplicación del Lema 3.11. . . . .	28
3.18. Todas las posibles rebanadas de Tipo I. . . . .	30
3.19. Cuadrilaterizando el caso 3 del Tipo I. . . . .	31
3.20. Cuadrilaterizando el caso 12 del Tipo I. . . . .	31
3.21. Cuadrilaterizando el caso 16 del Tipo I. . . . .	31
3.22. Todas las posibles rebanadas de Tipo II. . . . .	32
3.23. Cuadrilaterizando el caso 1 del Tipo II. . . . .	33
3.24. Cuadrilaterizando el caso 6 del Tipo II. . . . .	33
3.25. Cuadrilaterizando el caso 9 del Tipo II. . . . .	33
3.26. Rebanada de Tipo III que se convierte en una de Tipo II. . . . .	34
3.27. Todas las posibles rebanadas de Tipo IV. . . . .	35
3.28. Cuadrilaterizando subcasos de la rebanada Tipo IV de tamaño 5. . . . .	36
3.29. Partiendo una rebanada Tipo IV de tamaño 6 en dos de tamaño 4. . . . .	37
A.1. Arista a la que se le quitan los Steiner que contiene. . . . .	43
A.2. Solución cuando tenemos número impar y acabamos con tipo A. . . . .	44
A.3. Solución cuando tenemos número impar y la tipo B es última. . . . .	45
A.4. Solución cuando tenemos número impar y la tipo B no es última. . . . .	46
A.5. Solución cuando tenemos número par y el punto de E por debajo. . . . .	47
A.6. Solución cuando tenemos número par y el punto de E por arriba. . . . .	48
A.7. Solución cuando tenemos número par y la tipo E es última. . . . .	49
A.8. Solución cuando tenemos número par y acabamos con tipo F. . . . .	49
B.1. Todas las posibles rebanadas de Tipo I. . . . .	52
B.2. Todas las posibles rebanadas de Tipo II. . . . .	57
B.3. Rebanada de Tipo III que se convierte en una de Tipo II. . . . .	61
B.4. Todas las posibles rebanadas de Tipo IV. . . . .	62
B.5. Cuadrilaterizando subcasos de la rebanada Tipo IV de tamaño 5. . . . .	63
B.6. Partiendo una rebanada Tipo IV de tamaño 6 en dos de tamaño 4. . . . .	64

# Capítulo 1

## Introducción

En matemáticas resulta frecuente que para resolver un problema dividamos a este en subproblemas, que por lo regular son más fáciles de resolver, y que en conjunto nos llevan a la solución del problema original. En el área de Algoritmos a esta práctica se le llama “divide y vencerás”.

Esos mismos problemas a veces requieren que trabajemos en dominios geométricos, y entonces también necesitamos partir dichos dominios en pequeñas piezas. Estas piezas pueden ser de todo tipo: puntos, planos, triángulos, líneas, etc.

Un ejemplo de lo anterior es el proceso de triangulación, que consiste en dividir conjuntos de puntos en triángulos. Este proceso es de gran importancia en áreas como el modelado de objetos en dos y tres dimensiones, sistemas de información geográfica, métodos de elemento finito, interpolación de datos dispersos, estadística, reconocimiento de patrones, etc., y por esto ha sido muy estudiado.

Un problema muy parecido al de las triangulaciones es el de las cuadrilaterizaciones (o cuadrangulaciones), que consisten en dividir conjuntos de puntos en cuadriláteros. A diferencia de las triangulaciones, este problema no ha sido estudiado tan ampliamente; y fue hasta hace poco que la investigación se ha incrementado. Este incremento se debió a estudios recientes en los métodos de elemento finito ([3] y [2]) y en la interpolación de datos dispersos ([13], [5] y [14]), mismos que muestran que en algunos casos es preferible trabajar con cuadriláteros que con triángulos.

Como no todo conjunto de puntos es cuadrilaterizable, muchas veces es necesario agregar algunos puntos extra a nuestro conjunto original. Estos puntos extra son llamados puntos Steiner o de Steiner.

El presente trabajo está enfocado a la cuadrilaterización de conjuntos de puntos en el plano usando pocos puntos Steiner: muy en particular a las cuadrilaterizaciones convexas, es decir, cuando todos los cuadriláteros obtenidos son convexos.

Brenner, Hurtado, Ramaswami, y Sacristán [1] crearon un algoritmo que cuadrilateriza convexamente  $n$  puntos usando a lo más  $3\lfloor n/2 \rfloor$  puntos Steiner. Esta fue la principal motivación para este trabajo, pues aquí daremos un algoritmo más sencillo que hace la misma tarea usando  $n + 1$  puntos Steiner (en el peor caso), y con la misma complejidad ( $O(n \log n)$ ). Nuestro algoritmo se puede mejorar, y en este trabajo también damos una mejora en la que se usan  $(4/5)n + (8/5)$  puntos Steiner (en el peor caso).

De esta forma, en el capítulo 2 abundaremos en los estudios de las cuadrilaterizaciones a través de la historia; en el capítulo 3 explicaremos nuestros algoritmos, y en el capítulo 4 expondremos las conclusiones obtenidas en esta investigación. También se incluyen dos apéndices para complementar el texto: el Apéndice A contiene una modificación del algoritmo de  $n + 1$  puntos Steiner, que busca eliminar los puntos Steiner exteriores; y finalmente, en el Apéndice B se muestra la solución de todos los casos que se desprenden del algoritmo de  $(4/5)n + (8/5)$  puntos Steiner.

Sólo falta mencionar que a lo largo de esta obra se usarán conceptos básicos de Geometría Computacional, Análisis de Algoritmos y Teoría de las Gráficas. Algunos de estos conceptos no serán expuestos aquí para no extender demasiado la obra. Se recomienda que ante cualquier duda se consulte bibliografía especializada, como [8] para Geometría Computacional, [7] para Análisis de Algoritmos, y [9] para Teoría de las Gráficas.

# Capítulo 2

## Historia de las cuadrilaterizaciones

En este capítulo veremos algunas definiciones básicas que se ocuparán a lo largo de este trabajo. Entre ellas definiremos formalmente las cuadrilaterizaciones y las cuadrilaterizaciones convexas.

También se hará un breve recuento de los resultados obtenidos por otras personas que han trabajado en este problema.

### 2.1. Preliminares

Trabajaremos con conjuntos de puntos en el plano. Estos conjuntos deben ser finitos y sus puntos deben tener asociadas coordenadas cartesianas.

Dados dos puntos en el plano  $a$  y  $b$ , denotaremos con  $l(a, b)$  a la línea que pasa por  $a$  y  $b$ , y con  $\overline{ab}$  al segmento de recta que une a  $a$  y  $b$  (ver figura 2.1).



Figura 2.1: Línea y segmento de  $a$  y  $b$ .

**Definición 2.1** Decimos que un conjunto de puntos está en *posición general* si no contiene tres puntos colineales.

**Definición 2.2** Un **polígono**  $P$  es una secuencia ordenada de puntos  $p_1, \dots, p_n$ ,  $n \geq 3$ , llamados *vértices* de  $P$ , junto con los segmentos de línea  $\overline{p_i p_{i+1}}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  y  $\overline{p_n p_1}$ , llamados *aristas* de  $P$ . Decimos que  $P$  es **simple** si no se intersectan cualesquiera dos aristas no consecutivas (ver figura 2.2).

Un polígono simple divide el plano en dos regiones, una no acotada llamada exterior y otra acotada llamada interior. En general, el término polígono simple denota al polígono junto con su interior.

**Definición 2.3** Un polígono simple  $P$  es **convexo** si para cualesquiera dos puntos  $a, b$  en el interior de  $P$ , también  $\overline{ab}$  está totalmente contenido en el interior de  $P$  (ver figura 2.2).

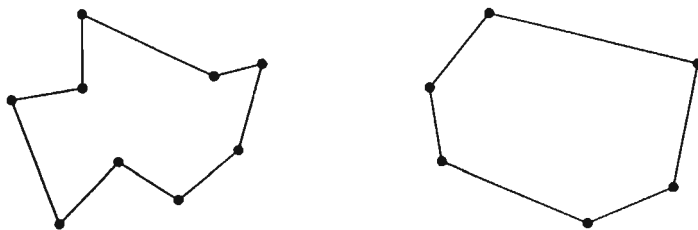


Figura 2.2: Un polígono simple y un polígono convexo.

**Definición 2.4** Dados un polígono  $P$  y un conjunto de  $m$  polígonos disjuntos  $P_1, \dots, P_m$  contenidos en el interior de  $P$ , llamamos **polígono con hoyos** al conjunto  $P - \{P_1 \cup \dots \cup P_m\}$  (ver figura 2.3).

Sea  $S$  un conjunto finito de puntos en el plano y en posición general.

**Definición 2.5** La **envolvente convexa** de  $S$ ,  $\text{conv}(S)$ , es el polígono convexo  $P$  de menor área, tal que todo punto de  $S$  es vértice de  $P$  o está en su interior (ver figura 2.4).

**Definición 2.6** Una **cuadrilaterización** de  $S$  es una partición del interior de  $\text{conv}(S)$  en cuadriláteros, éstos son obtenidos insertando segmentos de recta entre puntos de  $S$ , de manera que los segmentos sólo se cruzan en sus puntos finales y todos los cuadriláteros están vacíos (ver figura 2.5).

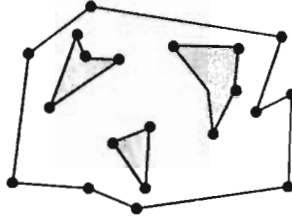


Figura 2.3: Un polígono con hoyos. Las áreas grises no pertenecen al polígono.

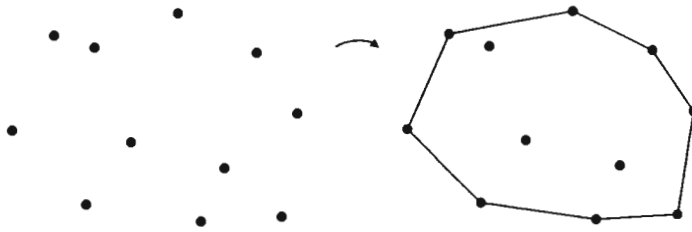


Figura 2.4: Un conjunto de puntos  $S$  y su envolvente convexa.

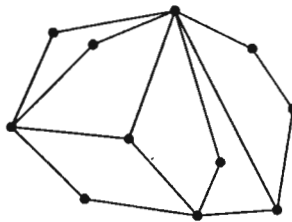


Figura 2.5: Cuadrilaterización del conjunto  $S$  de la figura 2.4.

**Definición 2.7** Una *cuadrilaterización convexa* de  $S$  es una cuadrilaterización de  $S$  donde todos los cuadriláteros son convexos (ver figura 2.6).

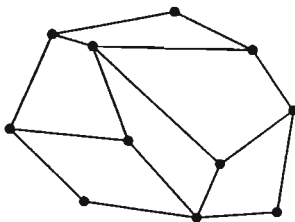


Figura 2.6: Cuadrilaterización convexa del conjunto  $S$  de la figura 2.4.

Sin embargo, no todos los conjuntos de puntos aceptan una cuadrilaterización, no importando si es convexa o no (ver figura 2.7), así que muchas veces es necesario agregar a  $S$  puntos extra para cuadrilaterizarlo. Estos puntos extra son llamados **Steiner** o **de Steiner**. A lo largo de este trabajo, los puntos Steiner se verán en las figuras como puntos blancos.

Es importante notar que, cuando agregamos puntos Steiner, el conjunto de puntos en la cuadrilaterización final puede no estar en posición general, aún así vamos a considerarla como una cuadrilaterización válida.

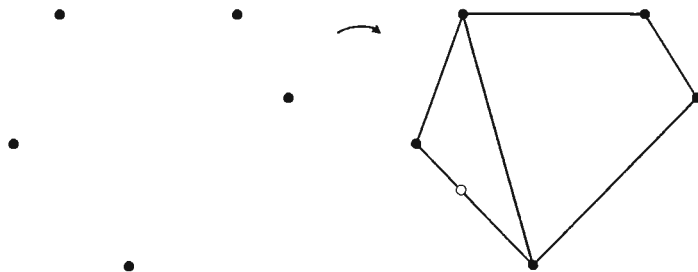


Figura 2.7: Conjunto de puntos no cuadrilaterizable y cuadrilaterización agregando un Steiner.

## 2.2. Cuadrilaterizaciones

Veamos ahora un poco de la investigación que se ha hecho acerca de las cuadrilaterizaciones.

En los problemas de iluminación y de guardias en una galería es donde encontramos los primeros trabajos con cuadrilaterizaciones, pero en ellos no se trabaja directamente con puntos en el plano, sino con polígonos. Por ejemplo Lubiw [15] mostró que el problema de decidir si un polígono con hoyos admite una cuadrilaterización es NP-completo.

Por su parte, Conn y O'Rourke [6] mostraron que, dado  $P$  un polígono simple con  $n$  vértices, podemos encontrar la cuadrilaterización de  $P$  en la que la suma de las longitudes de los segmentos que la forman es mínima en  $O(n^3 \log n)$ , ocupando  $O(n^3)$  de espacio.

Ya olvidándonos de los polígonos, Ramaswami, Ramos y Toussaint [16] fueron los primeros en dar una caracterización de los conjuntos de puntos que admiten una cuadrilaterización. Así, un conjunto  $S$  de  $n$  puntos acepta una cuadrilaterización si, y sólo si, hay una triangulación de  $S$  en cuya gráfica dual existe un emparejamiento perfecto. Por supuesto esta caracterización no es útil para construir algoritmos, porque tendríamos que revisar todas las triangulaciones del conjunto  $S$ .

Una caracterización más útil fue dada por Bose y Toussaint [4] en 1995. Ellos mostraron que  $S$  admite una cuadrilaterización si, y sólo si,  $S$  tiene un número par de **puntos extremos** (vértices de  $\text{conv}(S)$ ). También presentaron un algoritmo que cuadrilateriza  $S$  en  $O(n \log n)$ , y si  $S$  no admite una cuadrilaterización entonces lo cuadrilateriza agregando tan sólo un punto Steiner. Este algoritmo fue llamado de Inserción Secuencial, y consiste en calcular  $\text{conv}(S)$  (en tiempo  $O(n \log n)$ ), partir  $\text{conv}(S)$  en cuadriláteros (en tiempo  $O(n)$ ), y finalmente insertar cada punto interior en el cuadrilátero que lo contiene ( $O(n \log n)$  usando barrido de línea), ver figura 2.8.

El problema es que este algoritmo obtiene muchos cuadriláteros “malos”, o sea muy “flacos” o no convexos. De aquí que, en ese mismo artículo, presenten otro método que obtiene más cuadriláteros convexos y “gordos”, también en  $O(n \log n)$ . Aquí se usa la llamada **espiral convexa** de  $S$ , de la cual se puede obtener una triangulación Hamiltoniana. Entonces, siguiendo el camino de la triangulación, formamos los cuadriláteros tomando triángulos de dos en dos. Esto lo hacemos del “centro” de la espiral hacia afuera, para que el triángulo sobrante (si es que existe) quede pegado a  $\text{conv}(S)$ , así, si hay un triángulo sobrante, agregamos un Steiner a ese triángulo y acabamos (ver figura 2.9).



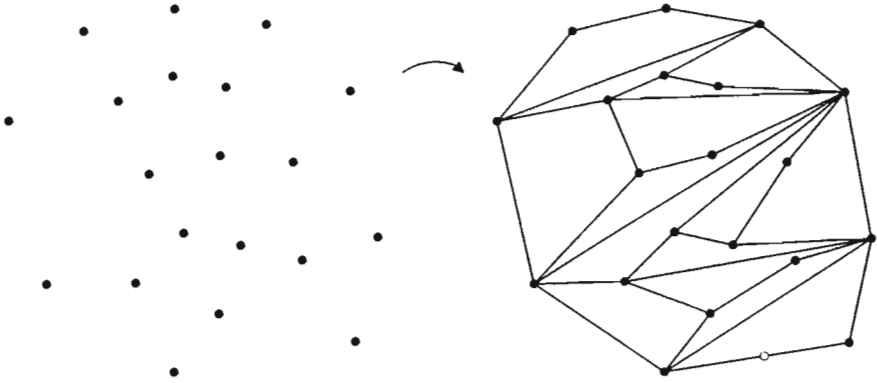


Figura 2.8: Cuadrilaterización de  $S$  usando inserción secuencial y agregando un Steiner.

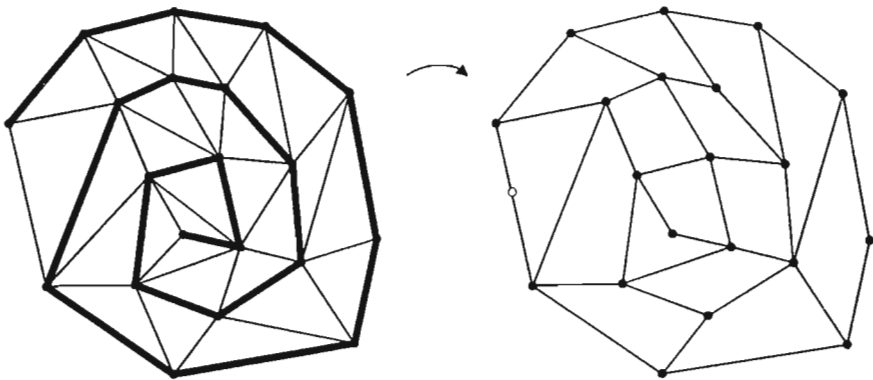


Figura 2.9: Espiral convexa, triangulación Hamiltoniana y cuadrilaterización obtenida del mismo conjunto de puntos de la figura 2.8.

Esta idea de cambiar triangulaciones a cuadrilaterizaciones suena muy tentadora, pues podríamos usar todo lo que ya sabemos de las triangulaciones en nuestro beneficio. Con esto en mente, Ramos, Ramaswami y Toussaint [16] trabajaron en cambiar cualquier triangulación a una cuadrilaterización. De este trabajo resalta el resultado de que un polígono simple con  $n$  vértices, ya triangulado, puede ser cuadrilaterizado añadiendo a lo más  $\lfloor n/3 \rfloor$  puntos Steiner.

## 2.3. Cuadrilaterizaciones convexas

De cuadrilaterizaciones en general hay poca investigación y, como es de suponerse, de las cuadrilaterizaciones convexas hay aún menos.

No existe siquiera una caracterización de los conjuntos de puntos que admiten una cuadrilaterización convexa. Lo más cercano es un algoritmo creado por Fevens, Meijer y Rappaport [11], en el cual si el conjunto  $S$  cumple una condición, entonces se puede decidir si  $S$  acepta o no una cuadrilaterización convexa. La condición es que el conjunto  $S$  tenga una cantidad constante  $h$  de **envolventes convexas anidadas** (ver figura 2.10). La cantidad de envolventes convexas anidadas es el número de veces que podemos quitar  $\text{conv}(S)$  hasta quedar con un conjunto vacío. Si este número  $h$  es constante con respecto a la cantidad de puntos, entonces el algoritmo decide, en tiempo  $O(n^{3h+1})$ , si ese conjunto es cuadrilaterizable convexamente o no.

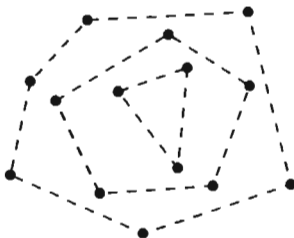


Figura 2.10: Conjunto de puntos con tres envolventes convexas anidadas.

Al medir la cantidad de puntos Steiner que se agregan para cuadrilaterizar convexamente un conjunto de puntos hay que tener en cuenta dos factores: la cota inferior y la cota superior. La cota inferior nos dice cuántos puntos

Steiner pueden a veces ser necesarios para cuadrilaterizar convexamente un conjunto de  $n$  puntos: la cota superior nos dice cuántos puntos Steiner son siempre suficientes para cuadrilaterizar convexamente cualquier conjunto de  $n$  puntos. Se busca encontrar la máxima de las cotas inferiores, la mínima de las cotas superiores e idealmente que ambas fueran iguales, pero hasta ahora no se ha podido.

### 2.3.1. Cota inferior

Para dar cotas inferiores es suficiente con mostrar una configuración de puntos y encontrar cuántos puntos Steiner son necesarios para cuadrilaterizarla convexamente. La idea es encontrar una configuración que requiera muchos puntos Steiner.

Hasta ahora la configuración que ha requerido la mayor cantidad de puntos Steiner,  $\lceil n/2 \rceil$  Steiner, es la dada por Bremner, *et al.* en [1]. Esta configuración consiste en poner  $n - 2$  puntos a lo largo de una recta horizontal, agregar un punto arriba de esa línea y otro abajo (ver figura 2.11). Esta configuración obliga a agregar más o menos un punto Steiner entre cada dos puntos en la recta, y de ahí obtenemos el término  $n/2$ . El problema con esta configuración es que nuestro conjunto original no se encuentra en posición general.

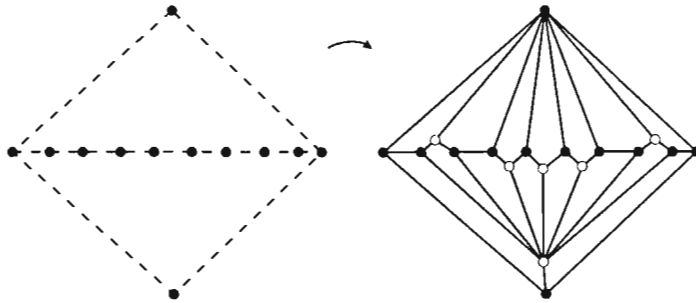


Figura 2.11: Configuración de 12 puntos que requiere 6 puntos Steiner.

### 2.3.2. Cota superior

Las cotas superiores se obtienen buscando la mínima cantidad de Steiner suficientes para cuadrilaterizar convexamente cualquier conjunto de puntos.

El algoritmo más fácil para generar una cuadrilaterización convexa, agregando Steiner, fue creado por Mark de Berg [10]. Este algoritmo primero hace una triangulación de los puntos y luego cuadrilateriza como se ve en la figura 2.12, que se explica por sí misma.

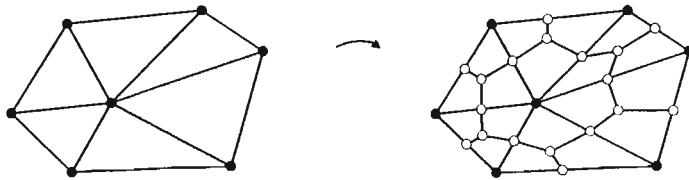


Figura 2.12: Triangulación de  $S$  y cuadrilaterización convexa usando del método de de Berg.

Everett, Lenhart, Overmars, Shermer y Urrutia [10], inspirados por el método de de Berg, mostraron que un polígono con  $n$  vértices y  $h$  hoyos puede ser descompuesto en  $8(n + 2h - 2)/3$  cuadriláteros convexas. El problema es que, aunque el método de de Berg es muy sencillo, el número de puntos Steiner usados es muy grande.

Por su parte Ramaswami, Siqueira, Sundaram, Gallier y Gee [17], crearon un algoritmo para cuadrilaterizar convexamente polígonos simples, partiendo de una triangulación cualquiera. Este algoritmo produce  $3t + 2$  cuadriláteros y agrega  $t + 2 = n$  puntos Steiner, donde  $t$  es el número de triángulos iniciales. Este número de puntos Steiner es muy bueno, salvo que no se puede usar este algoritmo en conjuntos de puntos en general, pues cuando cuadrilaterizamos polígonos simples no tenemos puntos interiores que también necesitan pertenecer a la cuadrilaterización.

Brenner, Hurtado, Ramaswami y Sacristán en [1] dieron la que hasta ahora era la mejor cota superior conocida, en lo que se refiere a cuadrilaterizar convexamente conjuntos de puntos. Para ello desarrollaron un algoritmo, al cual nos referiremos como el *método de los hexágonos*, que puede cuadrilaterizar convexamente al conjunto  $S$  en  $O(n \log n)$ , agregando a lo más  $3\lfloor n/2 \rfloor$  Steiner.

Lo que hace este método es obtener primero una triangulación Hamiltoniana de  $S$  (en  $O(n \log n)$ ). Luego, siguiendo el camino dado por la triangulación, formamos cuadriláteros tomando triángulos de dos en dos. Como

seguimos el camino de la triangulación, entonces también esa cuadrilaterización es Hamiltoniana. Ahora, usando el camino de la cuadrilaterización y tomando de dos en dos los cuadriláteros, formamos hexágonos y cuadriláteros con un punto interior (ver figura 2.13).

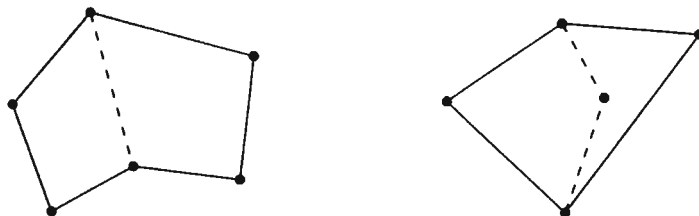


Figura 2.13: La unión de dos cuadriláteros es un hexágono o un cuadrilátero con un punto interior.

Para cuadrilaterizar estos hexágonos y cuadriláteros con un punto interior se hace un análisis exhaustivo de casos. En este análisis se encuentra que cada hexágono y cuadrilátero con punto interior puede ser cuadrilaterizado convexamente con a lo más tres Steiner interiores. Con esto, basta identificar a que caso pertenece cada hexágono (o cuadrilátero) y cuadrilaterizarlo en consecuencia. La figura 2.14 muestra cómo trabaja el algoritmo paso por paso.

Hay que notar, que de acuerdo a la paridad de  $n$  y cantidad de puntos extremos, podemos obtener un triángulo que no emparejamos en el primer paso (del cual no nos podemos deshacer), y un cuadrilátero vacío que no emparejamos en el segundo paso (que necesita 4 puntos Steiner).

La cantidad de  $3\lfloor n/2 \rfloor$  Steiner puede considerarse todavía como grande, y si a esto le sumamos la dificultad del análisis de casos y la posibilidad de obtener un triángulo no deseado, entonces este algoritmo no puede dejarnos satisfechos. Siguiendo esta idea nos pusimos a trabajar hasta encontrar una mejor solución. Este afán se concretó cuando creamos el algoritmo que se expone en el siguiente capítulo, que a nuestro parecer hace las cosas un poco mejor.

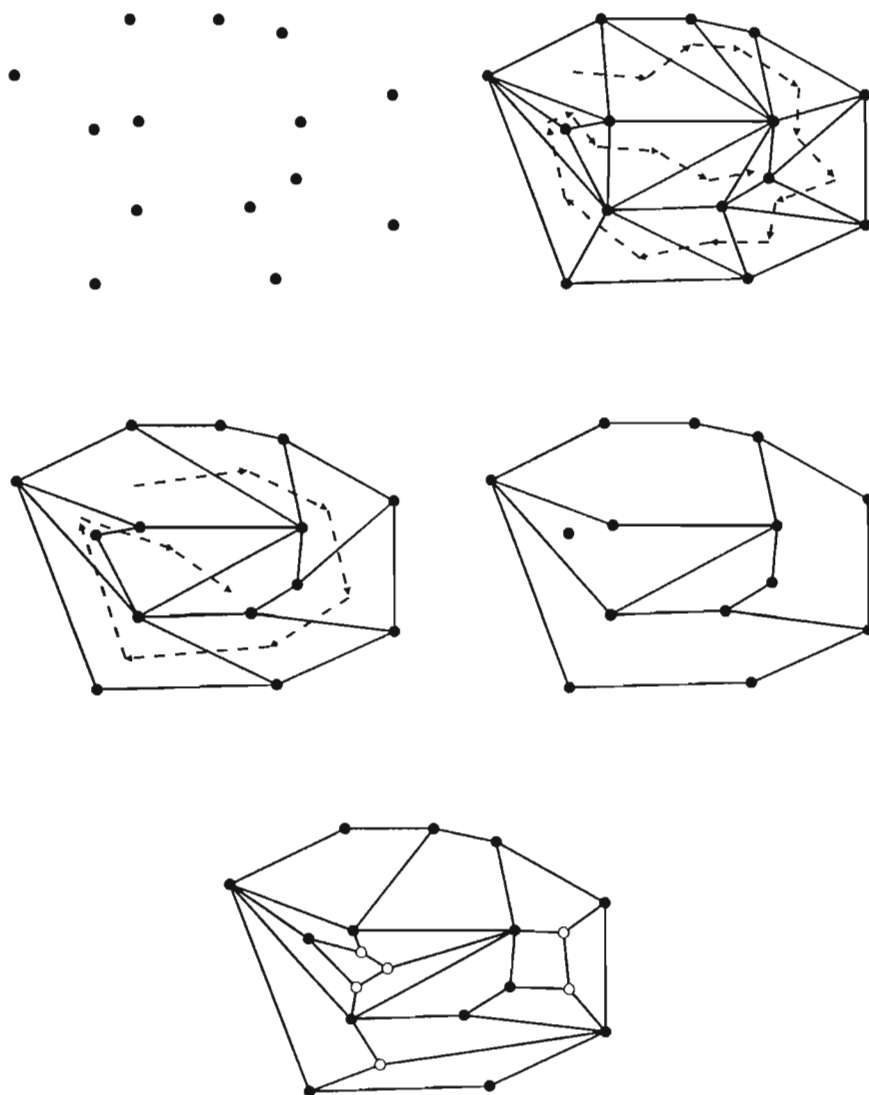


Figura 2.14: El conjunto de puntos  $S$  y su cuadrilaterización convexa usando el método de los hexágonos.

# Capítulo 3

## Cuadrilaterizaciones convexas y puntos Steiner (un enfoque diferente)

En este capítulo presentaremos un nuevo método para cuadrilaterizar convexamente conjuntos de puntos. Este método necesita menos puntos Steiner que los algoritmos del capítulo anterior, y además, no deja triángulos sobrantes como el método de los hexágonos.

### 3.1. Método

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general. De manera intuitiva nuestro método trabaja así:

1. Nombramos  $p$  al punto de  $S$  con menor coordenada  $x$  (el que está más a la izquierda).
2. Ordenamos los puntos de  $S - \{p\}$  con respecto a la pendiente de la línea que los une con  $p$ , de forma decreciente.
3. Partimos  $S$  en rebanadas de tamaño  $k$ , usando a  $p$  y el orden de  $S - \{p\}$  como referencia.
4. Cuadrilaterizamos convexamente cada rebanada usando pocos puntos Steiner.

La figura 3.1 muestra un ejemplo de este proceso.

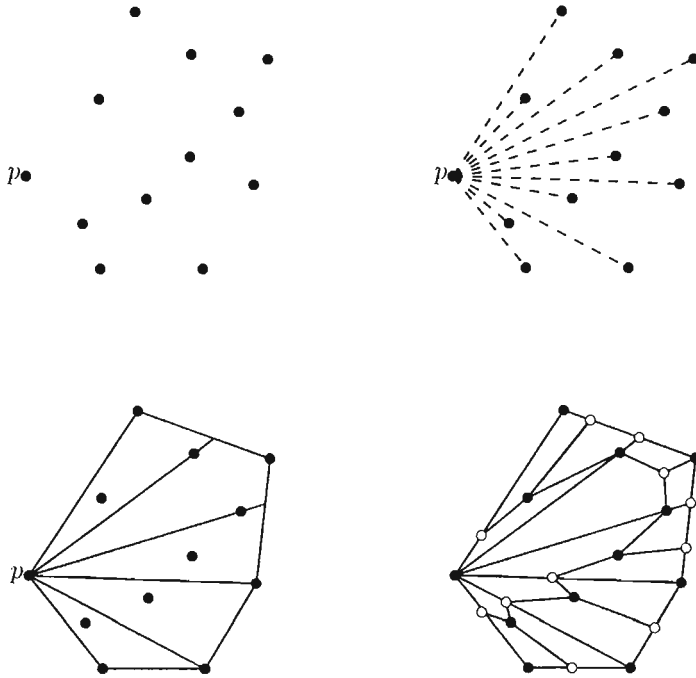


Figura 3.1: Cuadrilaterizando convexamente un conjunto  $S$  con nuestro método.

La figura 3.1 muestra cómo son las rebanadas, pero es necesario definir las formalmente.

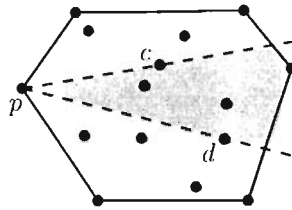
Sean  $c$  y  $d$  dos puntos de  $S - \{p\}$ , con  $c < d$  en nuestro orden.

**Definición 3.1** La **rebanada de  $c$  a  $d$** ,  $\triangleleft(c, d)$ , es el área encerrada entre  $\text{conv}(S)$ ,  $l(p, c)$  y  $l(p, d)$  (ver figura 3.2).

**Definición 3.2** La  $\triangleleft(c, d)$  es de tamaño  $k$  si contiene  $k$  puntos de  $S$  (incluyendo  $p$ ,  $c$  y  $d$ ).

De acuerdo al tamaño de las rebanadas podemos derivar muchos algoritmos de este método. Aquí presentamos dos algoritmos diferentes: uno que agrega  $n + 1$  Steiner y otra que agrega  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner.



Figura 3.2: Rebanada  $\sphericalangle(c, d)$  de tamaño 6.

### 3.2. Algoritmo con $n + 1$ Steiner

Para esta versión tomaremos rebanadas de tamaño 4, y para hacerlas usaremos el orden de  $S - \{p\}$ . Así, la última rebanada contiene también al último punto. Observa que si  $n$  es impar la última rebanada va a tener tamaño 3 en vez de 4.

Con  $n$  puntos se obtienen  $r = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$  rebanadas, con lo cual ejecutaremos  $r$  pasos para cuadrilaterizar convexamente  $S$ .

En el paso número  $i$  haremos:

- Si  $i = 1$ . Tomamos la primera rebanada  $\sphericalangle(a, b)$  de tamaño 4. Agregamos un punto de Steiner dentro del segmento  $\overline{pa}$ . Si  $b$  es vértice de  $\text{conv}(S)$  agregamos un punto dentro del segmento  $\overline{pb}$ , y si no, agregamos el punto en la intersección de  $\text{conv}(S)$  y  $l(p, b)$  (ver figura 3.3). Finalmente identificamos el tipo de rebanada y cuadrilaterizamos en consecuencia.
- Si  $i \neq 1$ . Tomamos la siguiente rebanada  $\sphericalangle(a, b)$  de tamaño 4. Si  $b$  es vértice de  $\text{conv}(S)$  agregamos un punto dentro del segmento  $\overline{pb}$ , y si no, agregamos el punto en la intersección de  $\text{conv}(S)$  y  $l(p, b)$  (ver figura 3.4). Finalmente identificamos el tipo de rebanada y cuadrilaterizamos en consecuencia.

Si la rebanada del último paso es de tamaño 3, y no 4, de todas formas hacemos lo que se indica.

Para identificar con qué tipo de rebanada estamos trabajando, primero debemos imaginar que el segmento que une la rebanada actual con la anterior tiene sus tres puntos negros, aunque alguno de ellos sea de Steiner, y luego comparar lo que queda con los casos mostrados en la figura 3.5.

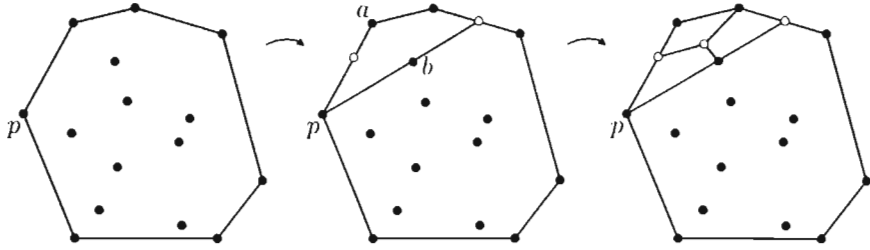


Figura 3.3: El paso  $i$  si  $i = 1$ .

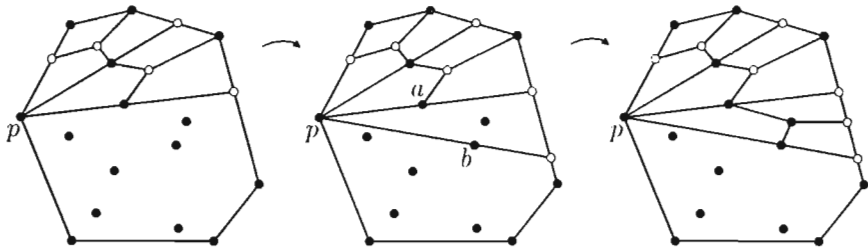


Figura 3.4: El paso  $i$  si  $i = 3$ .

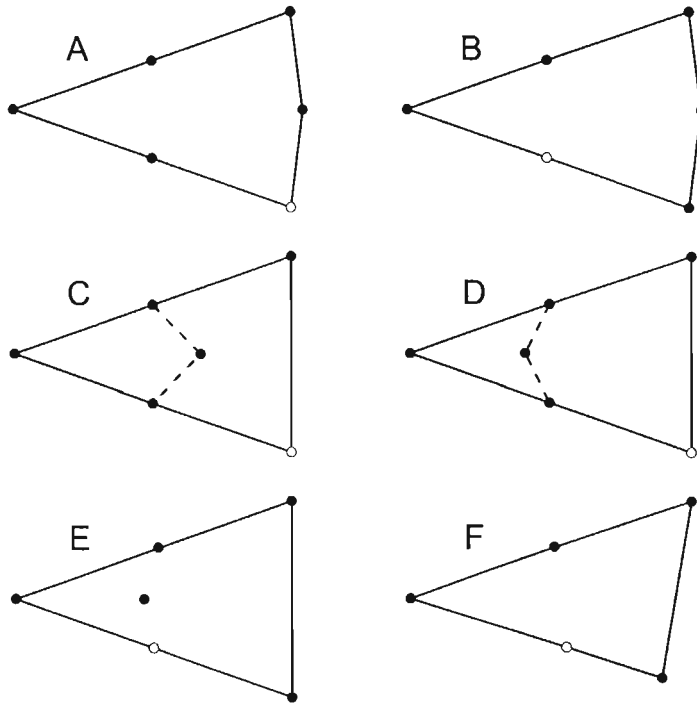


Figura 3.5: Todos los tipos de rebanada que podemos obtener.

Este proceso de imaginar que los puntos que unen una rebanada con la anterior son todos negros tiene dos razones de ser: primero para denotar que cualquier Steiner de ese segmento ya está fijo para esta rebanada y no podemos moverlo (así no modificaremos lo hecho en pasos anteriores), la otra razón es para ahorrarnos casos, ya que, no importando cuales de estos puntos sean Steiner, la rebanada se cuadrilateriza igual (ver figura 3.6).

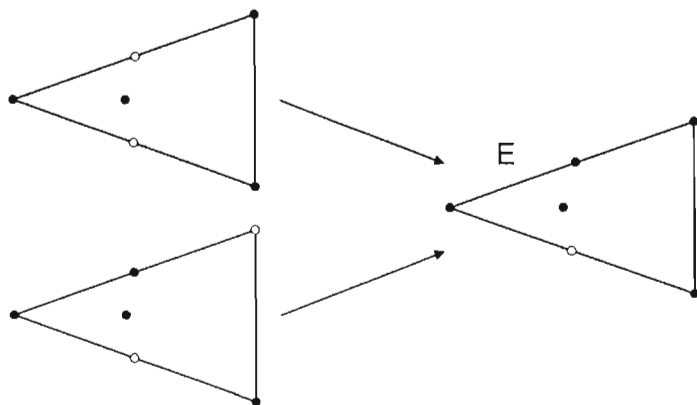


Figura 3.6: Ambas rebanadas mandan al mismo caso.

La idea principal de este Algoritmo es que, después de la primera rebanada, con cada nueva rebanada avanzamos 2 puntos de  $S$  y agregamos 2 Steiner (de ahí el término de  $n$ ).

### 3.2.1. Cuadrilaterizando convexamente las rebanadas

A continuación se muestra cómo se cuadrilateriza cada caso descrito en la figura 3.5.

#### Cuadrilaterizando la rebanada A

Para cuadrilaterizar convexamente basta con agregar un punto Steiner en el centro de la rebanada y unir como indica la figura 3.7.

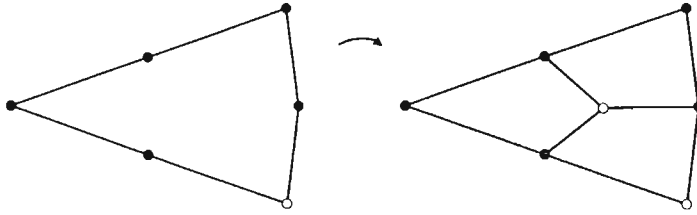


Figura 3.7: Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo A.

### Cuadrilaterizando la rebanada B

Se procede igual que con las rebanadas de tipo A (ver figura 3.8).

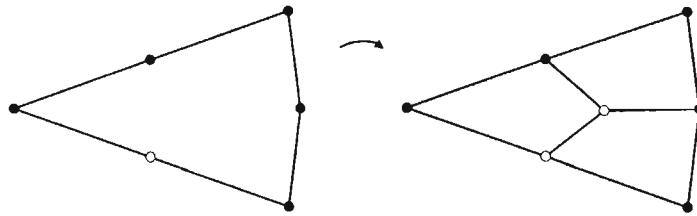


Figura 3.8: Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo B.

### Cuadrilaterizando la rebanada C

Llamemos  $o$  al punto en el interior de la rebanada. Ponemos un punto casi alineado con  $p$  y  $o$  en el segmento contenido en  $\text{conv}(S)$ , y cuadrilaterizamos como se ve en la figura 3.9.

### Cuadrilaterizando la rebanada D

Este caso difiere del C en que el punto interior no está en posición convexa visto desde  $p$ .

Primero etiquetamos los puntos como se muestra en el lado izquierdo de la figura 3.10.

Ahora cuadrilaterizamos como se muestra en la parte central de la figura 3.10, y llamamos  $a$  al punto dentro de  $\overline{pb}$ . El problema es que no la podemos

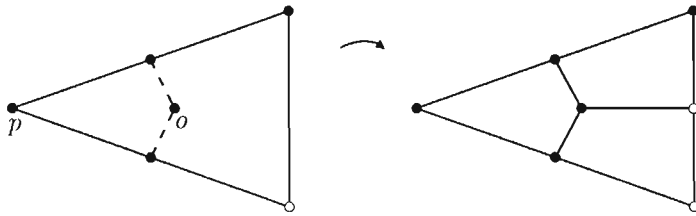


Figura 3.9: Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo C.

dejar así porque hay un cuadrilátero no convexo y la rebanada termina en un segmento con 4 puntos.

Para acomodar, bajamos  $a$  al segmento que une  $p$  y el último punto de  $S - \{p\}$ . Nos olvidamos del antiguo  $p$ , cambiamos el nombre de  $a$  por  $p$  y recorremos  $c$  sobre su línea para que quede alineado con la nueva  $p$  y  $b$ . Finalmente seguimos recorriendo  $c$  hasta que el cuadrilátero  $pocb$  quede convexo (ver figura 3.10).

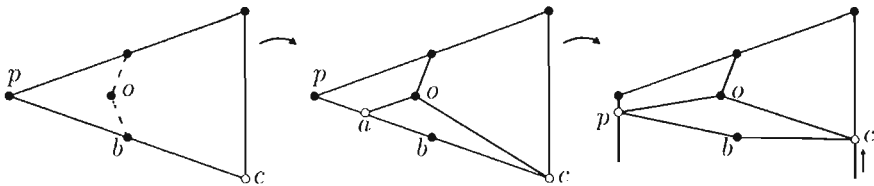


Figura 3.10: Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo D.

Hay mucho que aclarar. Primero notemos que los puntos que movemos son Steiner y al moverlos no afectamos la forma de  $S$ . Cuando bajamos  $a$  lo podemos poner tan cerca de  $p$  como deseemos, de manera que no afectemos ninguna otra rebanada. Cuando movemos  $c$ , sí afectamos la forma de la siguiente rebanada, pero muy poco, pues para desalinearse la nueva  $p$ ,  $b$  y  $c$  hace falta un movimiento muy pequeño. Para fines prácticos la siguiente rebanada puede tomar a  $p$ ,  $b$  y  $c$  como alineados.

Hay que recalcar que a partir de la siguiente rebanada hay que tomar como referencia a la nueva  $p$  y no a la vieja.

### Cuadrilaterizando la rebanada E

Aquí movemos el punto Steiner del último segmento a lo largo de ese segmento, hasta que la rebanada se parezca a las C. Luego cuadrilaterizamos igual que las C (ver figura 3.11).

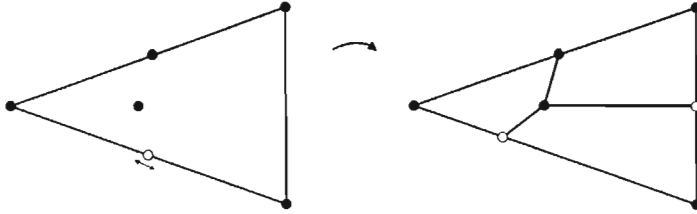


Figura 3.11: Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo E.

### Cuadrilaterizando la rebanada F

Esta es la rebanada de tamaño 3 que queda al final si la  $n$  es impar. Como tiene forma de triángulo procedemos como si fuera el método de de Berg (ver figura 3.12).

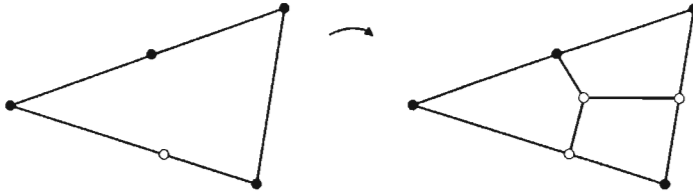


Figura 3.12: Cuadrilaterización convexa de las rebanadas tipo F.

### 3.2.2. Cota de $n + 1$

Con esta versión de nuestro método podemos demostrar lo siguiente:

**Teorema 3.3** *Se puede cuadrilaterizar convexamente  $n$  puntos en posición general agregando por mucho  $n + 1$  puntos Steiner. La complejidad de este proceso es  $O(n \log n)$ .*

**Demostración.** - Sea  $S$  el conjunto de  $n$  puntos. Ahora cuadrilateriza  $S$  con el método explicado en esta sección.

Tenemos dos casos:

i)  $S$  no tiene rebanadas de tipo F ( $n$  par).

Observando cuidadosamente nuestra partición en rebanadas vemos que en cada rebanada nueva avanzamos 2 puntos de  $S$  y agregamos 2 puntos Steiner. El único caso aparte es la primera rebanada en la que además tenemos a la primera  $p$ , al primer punto  $a$  de  $S - \{p\}$  y otro punto Steiner en  $\overline{ap}$ .

Entonces, a excepción del primer punto y la  $p$  original, agregamos 2 Steiner por cada 2 puntos, o sea  $n - 2$  Steiner, pero la primera rebanada tiene un punto Steiner extra, entonces en total agregamos  $n - 2 + 1 = n - 1$  Steiner para cuadrilaterizar convexamente nuestro conjunto.

ii)  $S$  tiene una rebanada de tipo F ( $n$  impar).

Aquí podemos pensar que a la cuadrilaterización de las demás rebanadas le agregamos lo que le falta para convertirse en la cuadrilaterización que contiene a la rebanada F. La cuadrilaterización de las otras rebanadas difiere de la cuadrilaterización con F sólo en un punto original y tres Steiner.

Usando i) vemos que el número total de Steiner es:  $(n - 1) - 1$  Steiner usados en las rebanadas anteriores más 3 que son los Steiner de diferencia, o sea  $n + 1$  Steiner.

Entonces podemos cuadrilaterizar convexamente  $S$  usando a lo más  $n + 1$  Steiner.

Como calcular  $\text{conv}(S)$  y ordenar  $S - \{p\}$  son  $O(n \log n)$ , partir en rebanadas es  $O(n)$ , e identificar la rebanada y cuadrilaterizarla nos lleva tiempo constante, entonces el algoritmo completo es  $O(n \log n)$ .  $\square$

La figura 3.13 muestra una corrida de este algoritmo paso a paso.

### 3.3. Algoritmo con $(4/5)n + (8/5)$ Steiner

En esta sección daremos otra variante de nuestro método, esta vez generando un algoritmo que necesita  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner en el peor caso.



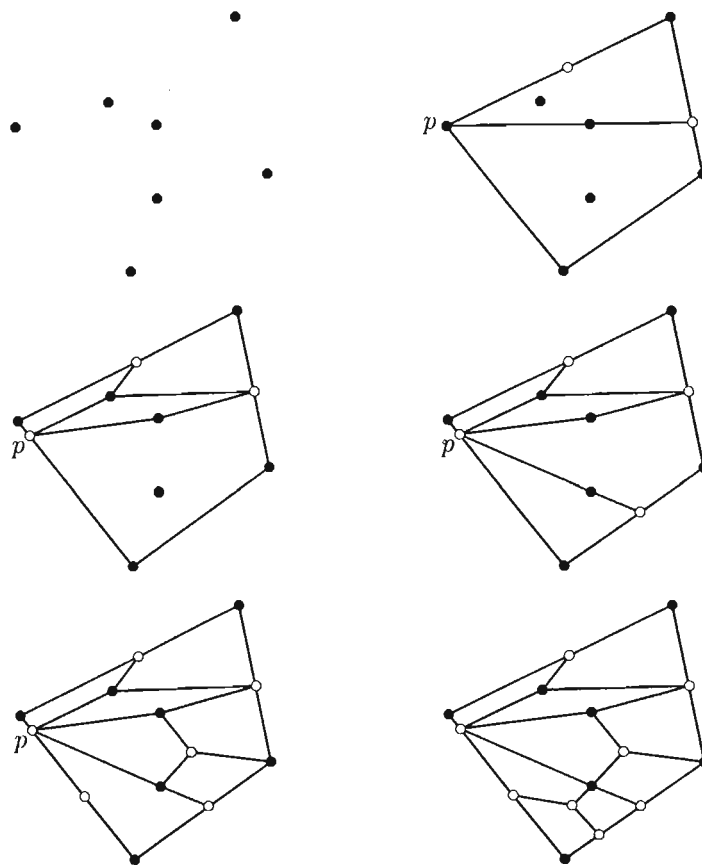


Figura 3.13: Cuadrilaterizando convexamente un conjunto  $S$  con  $n = 7$  y  $8 = n + 1$  Steiner.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general.

Básicamente haremos lo mismo que en el algoritmo anterior, pero ahora con rebanadas de tamaño 7. Con este tamaño partiremos  $S$  en  $r = \lfloor (n+2)/5 \rfloor$  rebanadas. La idea es que, después de la primera rebanada, con cada rebanada nueva avanzamos 5 puntos de  $S$  y agregamos 4 Steiner (de allí el  $(4/5)n$ ). En esta ocasión, si  $n \bmod 5 \neq 2$ , la última rebanada no será de tamaño 7 sino 3, 4, 5 ó 6.

Como aumentamos el tamaño de las rebanadas, también aumenta la variedad de rebanadas que podemos obtener. Esto nos lleva a separar las rebanadas en 4 categorías diferentes para poder manejarlas.

Sea  $\triangleleft(a, b)$  una rebanada obtenida por este algoritmo.

Tenemos que  $\triangleleft(a, b)$  es:

**Tipo I** Si  $b$  no es vértice de  $\text{conv}(S)$  y ningún punto de  $S - \{p, a, b\}$  en  $\triangleleft(a, b)$  es vértice de  $\text{conv}(S)$ .

**Tipo II** Si  $b$  no es vértice de  $\text{conv}(S)$  y algún punto de  $S - \{p, a, b\}$  en  $\triangleleft(a, b)$  es vértice de  $\text{conv}(S)$ .

**Tipo III** Si  $b$  es vértice de  $\text{conv}(S)$  y el tamaño de  $\triangleleft(a, b)$  es 7.

**Tipo IV** Si  $b$  es vértice de  $\text{conv}(S)$  y el tamaño de  $\triangleleft(a, b)$  es 3, 4, 5 ó 6.

La figura 3.14 muestra ejemplos de cada tipo de rebanada.

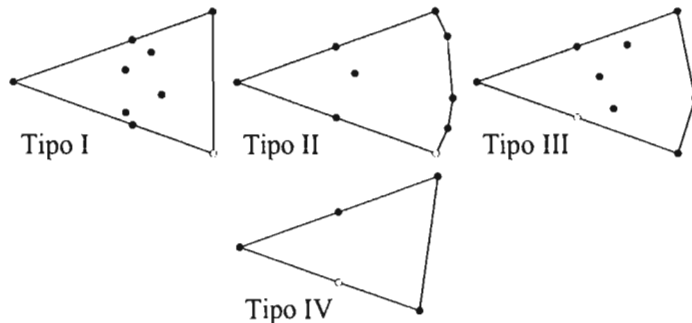


Figura 3.14: Ejemplos de rebanadas de Tipo I, II, III y IV.

Antes de mostrar cómo se cuadrilateriza convexamente cada tipo de rebanada, veremos una herramienta que nos facilitará el proceso de cuadrilaterización.

### 3.3.1. Hexágonos estrellados

El objetivo de esta sección es dar una demostración de un lema de Bremner, *et al.* [1], que liga las cuadrilaterizaciones convexas con los hexágonos estrellados, pero para hacerlo, necesitamos introducir nueva notación y dar algunos resultados importantes acerca de los polígonos. Dados dos puntos  $p$  y  $q$ , denotaremos por  $I(p, q)$  al semiplano abierto que queda del lado izquierdo de la línea orientada desde  $p$  a  $q$ , y de la misma forma definimos  $D(p, q)$  como el semiplano abierto que queda del lado derecho. A lo largo de esta sección, enumeraremos los vértices de un polígono en contra de las manecillas del reloj. Dado un vértice  $v$  de un polígono  $P$ , denotaremos su sucesor como  $v^+$  y su predecesor como  $v^-$ . También llamaremos  $\Delta(abc)$  al interior del triángulo formado por  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Si  $P$  es un polígono simple, entonces definimos lo siguiente:

**Definición 3.4** Si  $v$  es vértice de  $P$ , llamaremos **cuña de  $v$** ,  $\text{cuña}(v)$ , al siguiente conjunto:  $I(v^-, v) \cap D(v^+, v) \cap \text{interior}(P)$ . Ver figura 3.15.

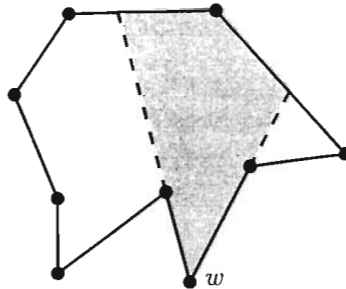


Figura 3.15: Cuña del vértice  $w$ .

**Definición 3.5** Llamaremos **núcleo de  $P$**  (*kernel* en inglés),  $\text{núcleo}(P)$ , al conjunto de puntos en  $P$  que pueden ver todo  $P$ .

**Definición 3.6**  $P$  es **estrellado** (*starshaped en inglés*) si  $\text{núcleo}(P) \neq \emptyset$ .

Dado  $H = abcdef$  un hexágono, Breinner, *et al.* [1] demostraron los siguientes resultados:

**Lema 3.7** Si  $P$  es un polígono simple, entonces se cumple que:

$$\text{interior núcleo}(P) = \bigcap_i \text{cuña}(v_{2i})$$

**Lema 3.8** Si  $\Delta(ace) \subset H$  entonces  $\text{cuña}(a) \cap \text{cuña}(c) \cap \Delta(ace) \neq \emptyset$ .

**Lema 3.9** Si  $\Delta(ace) \subset H$  entonces  $\Delta(ace) \cap \text{cuña}(a^-) \cap \text{cuña}(a^+) \neq \emptyset$ .

Por último, debemos exponer el conocido teorema de Helly [20], [12], en su variante que corresponde a regiones convexas de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 3.10** Sea  $A$  una familia finita de al menos 3 conjuntos convexas en  $\mathbb{R}^2$ . Si la intersección de cualesquiera 3 miembros de  $A$  es no vacía, entonces la intersección de todos los miembros de  $A$  es no vacía.

Con todo lo anterior, hemos reunido los elementos necesarios para demostrar el siguiente lema:

**Lema 3.11** Si  $H$  es un hexágono estrellado y  $\Delta(ace) \subset H$  entonces un punto Steiner es suficiente para cuadrilaterizar convexamente  $H$ .

**Demostración.**-  $H$  es un polígono simple, entonces del Lema 3.7 tenemos que:  $\text{interior núcleo}(P) = \text{cuña}(a) \cap \text{cuña}(c) \cap \text{cuña}(e)$ , y como  $H$  es estrellado esa intersección es no vacía. Cada par de estas cuñas intersecciona  $\Delta(ace)$ , como consecuencia del Lema 3.8. En este caso tomaremos a las cuñas extendiéndose por todo el plano y no restringidas al polígono. Como las cuñas (extendidas) y el triángulo  $\Delta(ace)$  son conjuntos convexas, entonces el teorema 3.10 puede aplicarse. Se sigue que los cuatro conjuntos se interseccionan en un conjunto no vacío, o sea,  $\Delta(ace) \cap \text{interior núcleo}(H) \neq \emptyset$ . Entonces basta agregar un punto en esta intersección para cuadrilaterizar convexamente  $H$  (ver figura 3.16).  $\square$

De aquí en adelante se denotará el uso del Lema 3.11 marcando  $\Delta(ace)$  con segmentos discontinuos y poniendo el Steiner en su interior (ver figura 3.17).

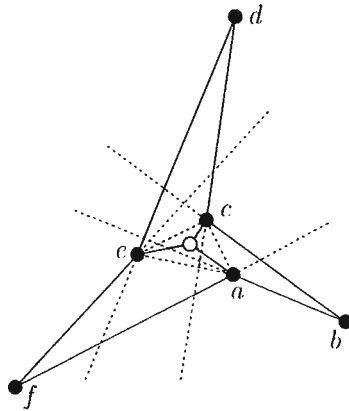


Figura 3.16: Hexágono estrellado y la parte de núcleo( $H$ ) donde se puede agregar el Steiner.

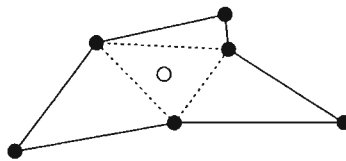


Figura 3.17: Manera en que se denotará la aplicación del Lema 3.11 en un hexágono.

### 3.3.2. Cuadrilaterizando convexamente las rebanadas

Ahora veremos cómo cuadrilaterizar cada rebanada de acuerdo a su Tipo y forma. Como son muchos casos diferentes sólo se expondrán algunos, si se desea ver la solución de todos ellos favor de referirse al Apéndice B en la página 51.

Dentro de cada Tipo hay casos y subcasos que son iguales salvo que uno es el reflejo del otro. Muchos de estos casos también tienen la misma solución pero reflejada. Para evitar redundancia, en las tablas de casos se dirá cuáles son iguales entre sí.

#### Tipo I

Aquí los casos están dados de acuerdo a la forma de la poligonal que forman los puntos dentro de  $\triangleleft(a, b)$ , con respecto a  $p$ . En los casos en que la poligonal tenga una subcadena convexa aparecen subcasos, de acuerdo a cuál elemento de esta subcadena está más alejado de  $p$ .

En la figura 3.18 se enumeran todos los casos posibles de las rebanadas Tipo I, también se muestra cuáles casos son iguales y cuáles tienen subcasos.

##### Caso 3

Este caso se resuelve como se ve en la figura 3.19.

##### Caso 12

Este caso se resuelve como se ve en la figura 3.20.

##### Caso 16

Este caso se resuelve como se ve en la figura 3.21.

#### Tipo II

Los casos de las rebanadas de Tipo II dependen de cuántos puntos de  $S - \{a, b\}$  son vértices de  $\text{conv}(S)$  y la posición de los otros puntos de  $\triangleleft(a, b)$ . Hay subcasos sólo cuando nos interesa la poligonal interior.

La figura 3.22 lista todos los casos de las rebanadas Tipo II, también dice cuáles casos son iguales y cuáles tienen subcasos.

##### Caso 1

Este caso se resuelve como se ve en la figura 3.23.

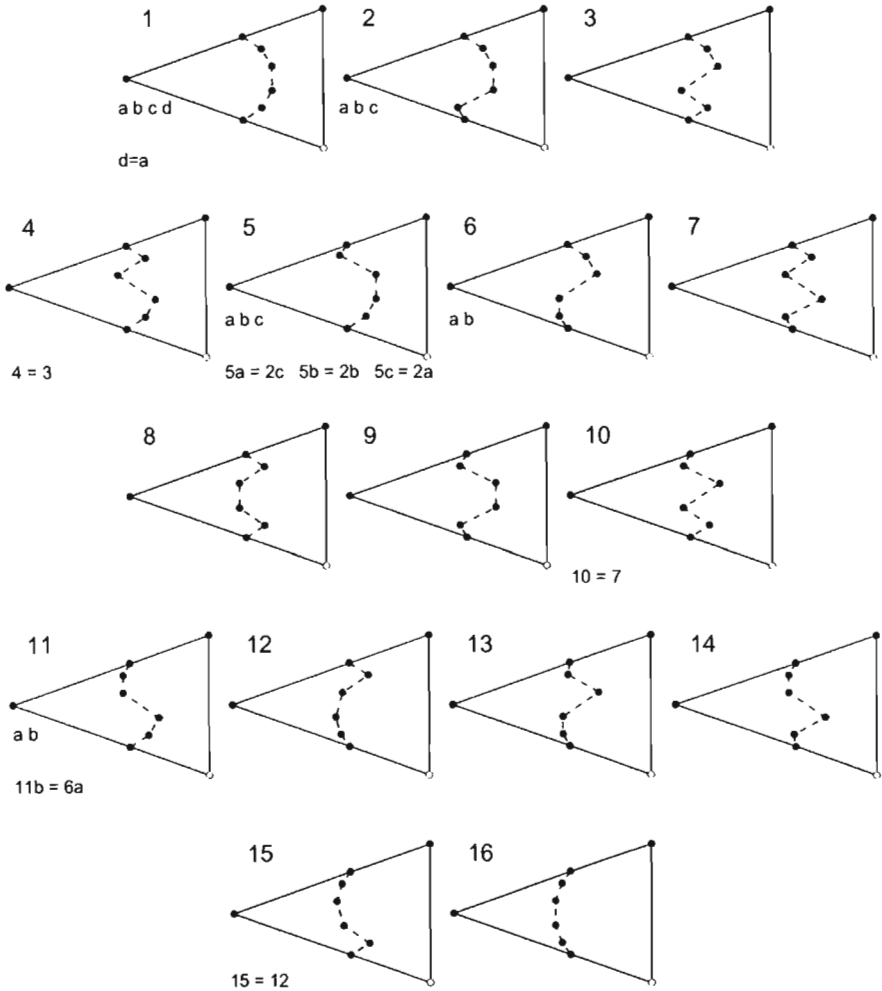


Figura 3.18: Todas las posibles rebanadas de Tipo I, las letras representan subcasos y las igualdades nos dicen cuáles se resuelven igual.

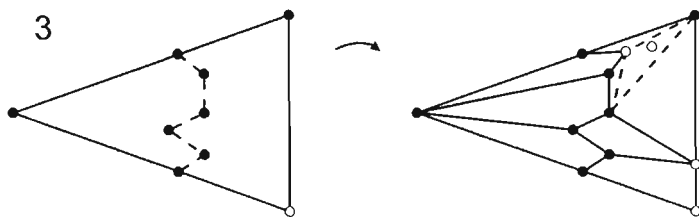


Figura 3.19: Cuadrilaterizando el caso 3 del Tipo I.

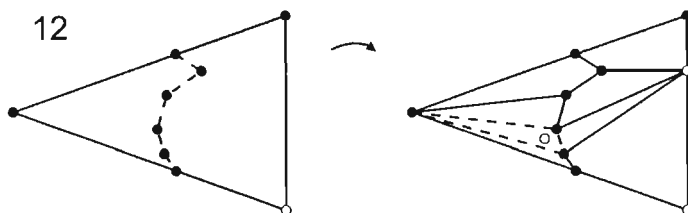


Figura 3.20: Cuadrilaterizando el caso 12 del Tipo I.

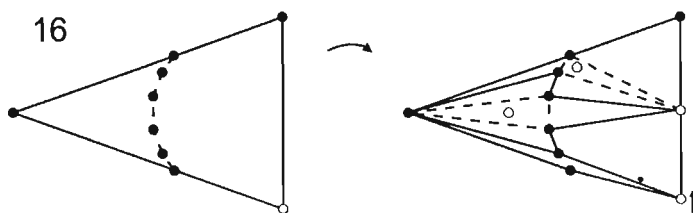


Figura 3.21: Cuadrilaterizando el caso 16 del Tipo I.



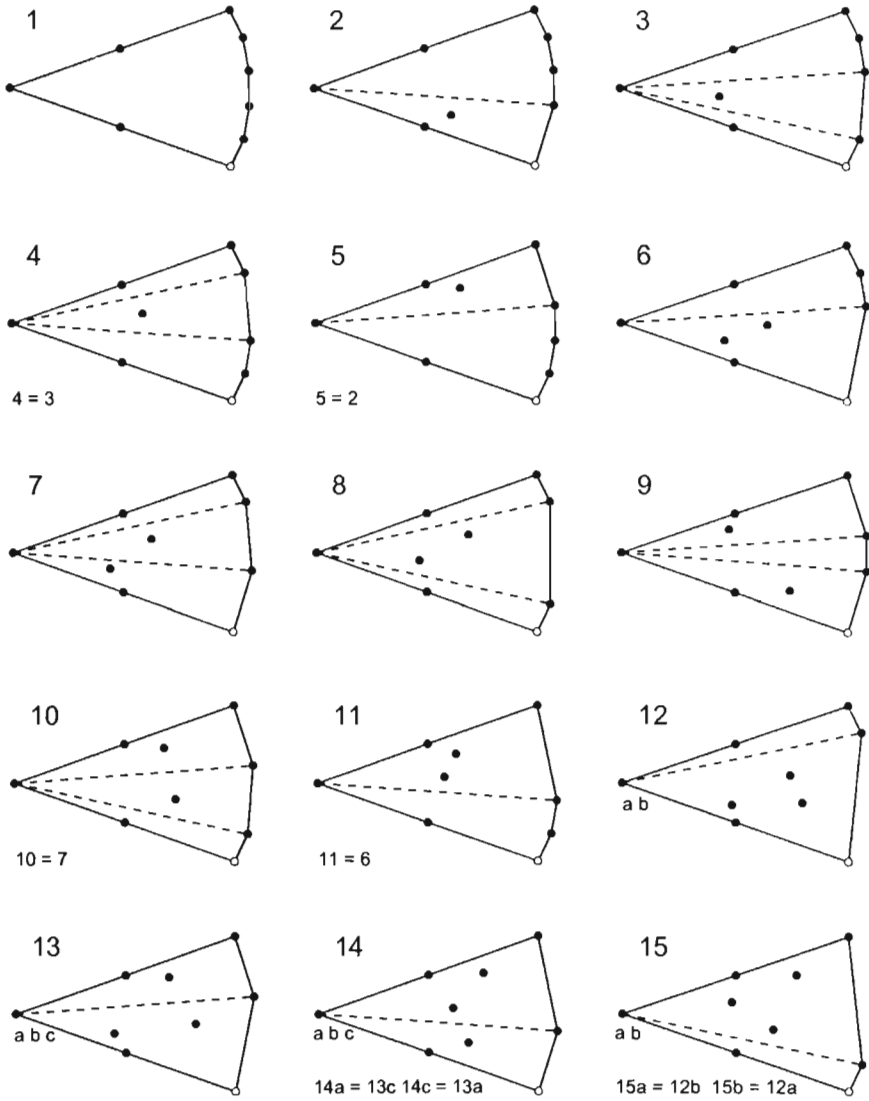


Figura 3.22: Todas las posibles rebanadas de Tipo II, las letras representan sub-casos y las igualdades nos dicen cuáles se resuelven igual.

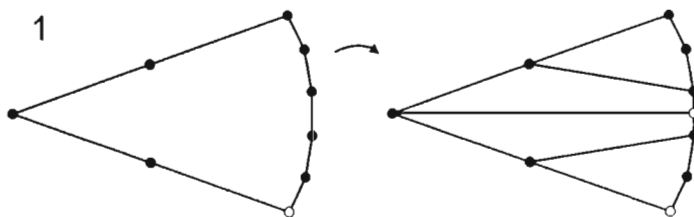


Figura 3.23: Cuadrilaterizando el caso 1 del Tipo II.

Caso 6

Este caso se resuelve como se ve en la figura 3.24.

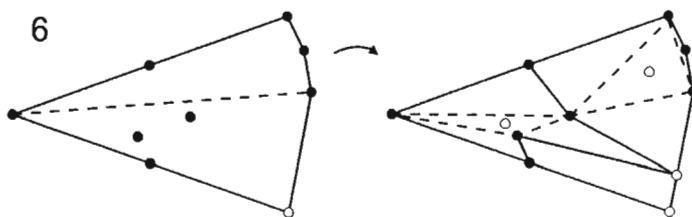


Figura 3.24: Cuadrilaterizando el caso 6 del Tipo II.

Caso 9

Este caso se resuelve como se ve en la figura 3.25.

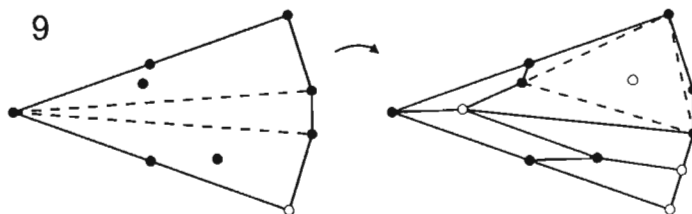


Figura 3.25: Cuadrilaterizando el caso 9 del Tipo II.

**Tipo III**

Aquí cualquier  $\triangleleft(a, b)$  puede ser transformada a una rebanada que tenga la forma de alguna de Tipo I o Tipo II, sólo moviendo el Steiner dentro de  $\overline{pb}$ . Para después cuadrilaterizarla de acuerdo a las reglas del Tipo I y II (ver figura 3.26).

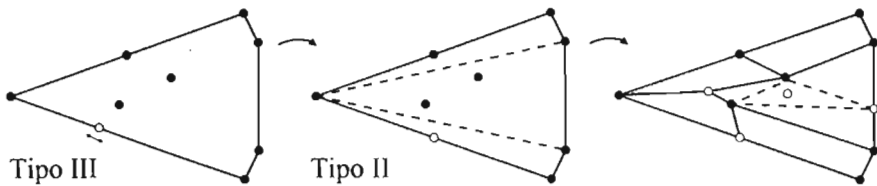


Figura 3.26: Ejemplo de una rebanada de Tipo III que se convierte en una de Tipo II y se cuadrilateriza así.

**Tipo IV**

En este conjunto están las rebanadas que no son de tamaño 7, aquellas que aparecen como última rebanada de  $S$  cuando  $n \bmod 5 \neq 2$ .

Los casos están dados dependiendo del tamaño de la rebanada (3, 4, 5 ó 6). La figura 3.27 muestra la lista de todos los casos.

**Tamaño 3**

Este caso es igual al caso F del algoritmo de  $n + 1$  Steiner y se resuelve igual agregando otros dos Steiner (ver página 22).

**Tamaño 4**

Las rebanadas de tamaño 4 son las analizadas en los casos A, B, C, D y E del algoritmo de  $n + 1$  Steiner, así que los resolvemos igual (ver página 19 hasta 22).

**Tamaño 5**

Los subcasos dependen de los puntos que son vértices de  $\text{conv}(S)$ . La figura 3.28 muestra la manera de resolver cada subcaso.

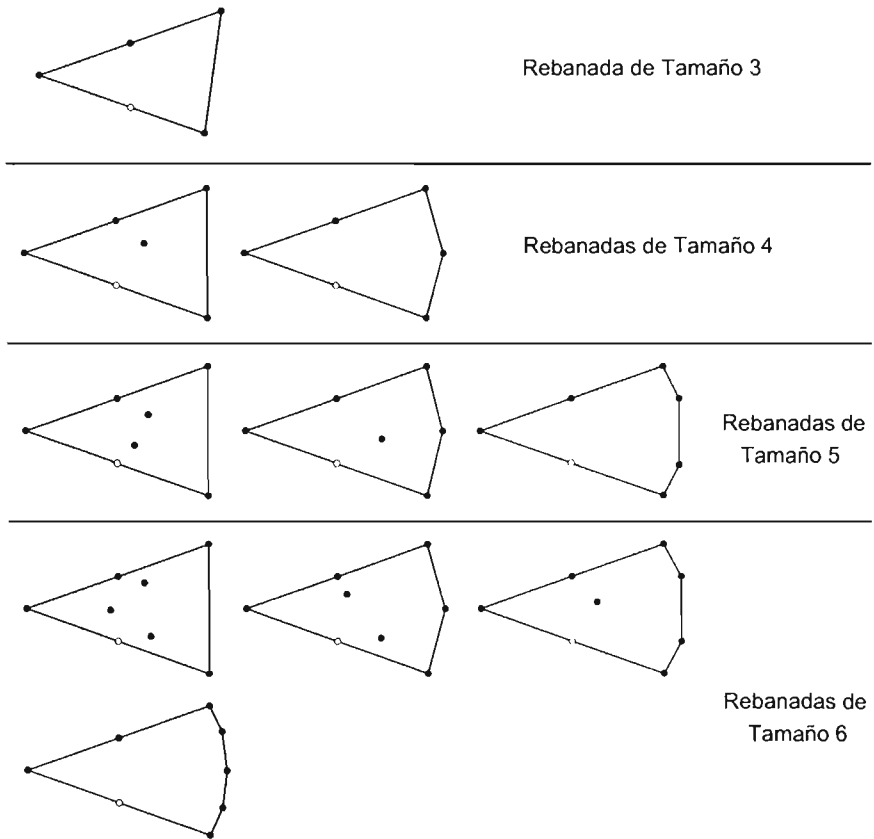


Figura 3.27: Todas las posibles rebanadas de Tipo IV.

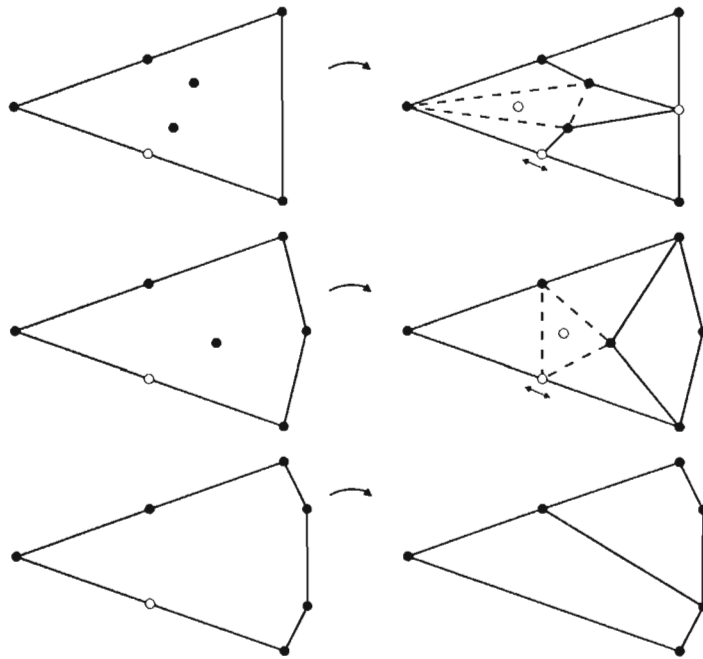


Figura 3.28: Cuadrilaterizando los subcasos de la rebanada Tipo IV de tamaño 5.

Tamaño 6

Esta rebanada se puede partir por la mitad en su tercer punto, quedando 2 rebanadas de tamaño 4 que se resuelven como ya sabemos (ver figura 3.29).

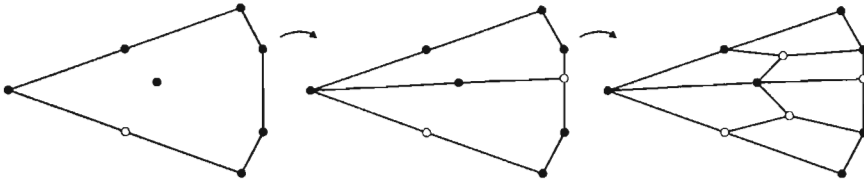


Figura 3.29: Partiendo una rebanada Tipo IV de tamaño 6 en dos de tamaño 4 y resolviendo en consecuencia.

### 3.3.3. Cota de $(4/5)n + (8/5)$

Con esta versión de nuestro método podemos demostrar lo siguiente:

**Teorema 3.12** *Se puede cuadrilaterizar convexamente  $n$  puntos en posición general agregando por mucho  $(4/5)n + (8/5)$  puntos Steiner. La complejidad de este proceso es  $O(n \log n)$ .*

**Demostración.** - Sea  $S$  el conjunto de  $n$  puntos. Ahora cuadrilateriza  $S$  con el método explicado en esta sección.

Tenemos dos casos:

- i)  $S$  no tiene rebanadas de Tipo IV ( $n \bmod 5 = 2$ ). Observando cuidadosamente nuestra partición en rebanadas vemos que en cada rebanada nueva avanzamos 5 puntos de  $S$  y agregamos 4 puntos Steiner. El único caso aparte es la primera rebanada en la que además tenemos a la primera  $p$ , al primer punto  $a$  de  $S - \{p\}$  y otro punto Steiner en  $\overline{ap}$ .

Entonces a excepción del primer punto y la  $p$  original agregamos 4 Steiner por cada 5 puntos, o sea  $(4/5)(n - 2)$  Steiner, pero la primera rebanada tiene un punto Steiner extra, entonces en total agregamos  $(4/5)(n - 2) + 1 = (4/5)n - (3/5)$  Steiner para cuadrilaterizar convexamente nuestro conjunto.

- ii)  $S$  tiene una rebanada de Tipo IV ( $n \bmod 5 \neq 2$ ) En este caso podemos pensar que ya cuadrilaterizamos todo el conjunto sin contar la última rebanada y a esa cuadrilaterización le agregamos los puntos que le faltan de la última rebanada.

Analizando las rebanadas de Tipo IV vemos que la peor relación de Steiner por cada original la tiene el caso 1, con 3 Steiner y un original. Esta rebanada es la que nos dará el peor caso de nuestro algoritmo.

Usando el argumento de i) necesitamos  $(4/5)(n - 1) - (3/5)$  Steiner para cuadrilaterizar el conjunto sin la última rebanada. Y agregando a esta cuenta los tres Steiner de la última rebanada obtenemos un total de:  $(4/5)(n - 1) - (3/5) + 3 = (4/5)n + (8/5)$  puntos.

Así que en el peor caso con este algoritmo usamos  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner. Como calcular  $\text{conv}(S)$  y ordenar  $S - \{p\}$  son  $O(n \log n)$ , partir en rebanadas es  $O(n)$ , e identificar la rebanada y cuadrilaterizarla nos lleva tiempo constante, entonces el algoritmo completo es  $O(n \log n)$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este capítulo daremos las conclusiones a las que llegamos después de este trabajo de investigación. Hablaremos de los alcances y deficiencias de nuestro método para cuadrilaterizar convexamente. Haremos comparaciones entre nuestro método y el método de los hexágonos [1]. Y, finalmente, expon-dremos conjeturas y posibles líneas de investigación acerca de las cuadrila-terizaciones convexas.

### 4.1. Cota superior

En [1] Bremner, *et al.* demostraron que cualquier conjunto de puntos en posición general puede ser cuadrilaterizado convexamente agregando  $3\lfloor n/2 \rfloor$  Steiner. Nuestro método da origen a dos algoritmos que bajan esa cota supe-rior a  $n + 1$  y  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner respectivamente.

El método desarrollado aquí puede seguir mejorándose (tomando rebana-das más grandes), pero no es muy conveniente hacerlo pues la cantidad de casos por analizar aumenta en potencias de 2 por cada punto extra en la rebanada. En términos prácticos y de implementación, los casi 50 casos de la cota de  $(4/5)n + (8/5)$  se pueden todavía considerar manejables.

### 4.2. Comparación

Comparemos pues nuestro método con el método de los hexágonos. Am-bos métodos son  $O(n \log n)$ , la parte que determina el  $O(n \log n)$  es calcular



$\text{conv}(S)$  y ordenar los puntos de acuerdo a su pendiente. De esta manera ambos métodos serían lineales si tuviéramos todo eso preprocesado.

En términos de sencillez el algoritmo de  $n+1$  Steiner baja de una manera muy fácil los  $3\lfloor n/2 \rfloor$  del método de los hexágonos. Un caso aparte es el del algoritmo de  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner, que aunque representa nuestra mejor cota, implica también una mayor dificultad por su número de casos.

Nuestros dos algoritmos trabajan un poco más estables en cuanto al número de puntos Steiner agregados, por ejemplo el algoritmo de  $n+1$  Steiner agrega  $n-1$  ó  $n+1$  Steiner, en cambio el método de los hexágonos puede agregar desde 0 hasta  $3\lfloor n/2 \rfloor$  Steiner según el caso.

Dos argumentos contra nuestro método son:

- Que se agregan muchos Steiner exteriores, o sea en la envolvente convexa de nuestras rebanadas y de  $S$ . Con ello los puntos de nuestras cuadrilaterizaciones no terminan en posición general.
- Tenemos muchos cuadriláteros compartiendo el mismo vértice (el punto  $p$ ), lo cual puede ser no deseable en algunas aplicaciones: por ejemplo cuando hacemos análisis de datos, como en interpolaciones, puede que esta propiedad haga que los resultados se carguen hacia algún valor que dependa de  $p$ .

En cambio, el método de los hexágonos no presenta ninguno de estos dos inconvenientes.

### 4.3. A futuro

Observando la cota inferior de  $\lfloor n/2 \rfloor$  Steiner de Brenner, et al. [1] y nuestro trabajo, conjeturamos lo siguiente:

**Conjetura 4.1** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y en posición general, y sea  $c$  una constante.  $(n/2) + c$  puntos Steiner son suficientes para cuadrilaterizar convexamente  $S$ , además  $(n/2) + c$  puntos Steiner pueden ser necesarios para cuadrilaterizar convexamente  $S$ .*

Para determinar la verdad de esta conjetura todavía hace falta mucho trabajo en el tema. A nuestro parecer, el método desarrollado en este trabajo ha alcanzado su límite, así que para futuros trabajos se necesita inventar una

---

técnica totalmente diferente. Además aquí queda muy bien lo que alguna vez me dijo mi asesor Jorge Urrutia: “Si para resolver un problema debes recurrir a una cantidad inmensa de casos, entonces no estás entendiendo realmente el problema”.

# Apéndice A

## Steiner interiores y exteriores

Como se mencionó en las conclusiones, nuestros algoritmos para cuadrilaterizar conexamente no conservan la posición general de los puntos, pues agregan muchos puntos Steiner exteriores (puntos Steiner dentro de aristas de  $\text{conv}(S)$ ).

Aquí mostraremos una modificación del algoritmo de  $n + 1$  puntos Steiner (en la página 16), que controla la cantidad y posición de los Steiner exteriores.

### A.1. Reacomodando Steiner

Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos procederemos de la misma manera que en el algoritmo de  $n + 1$  Steiner, excepto cuando en la rebanada actual se termine una arista de  $\text{conv}(S)$ . Cuando lleguemos a una de estas rebanadas contaremos el número de Steiner que lleva hasta el momento esa arista que termina. La idea es que cuadrilatericemos la rebanada actual de forma que tal arista termine con un número par de puntos Steiner.

Si una arista de  $\text{conv}(S)$  tiene un número par de puntos Steiner podemos ubicarlos en una franja sin puntos a lado de la arista (en el interior de  $\text{conv}(S)$ ). Siempre podemos acomodar esos Steiner de manera que formen un polígono convexo con los extremos de la arista, y sin que alteremos la cuadrilaterización de las rebanadas involucradas. Este polígono nuevo (al tener un número par de vértices y ser convexo) es fácil de cuadrilaterizar convexamente sin agregar puntos extra; al no modificar la cuadrilaterización de las rebanadas obtendremos una cuadrilaterización convexa con el mismo número de Steiner, en donde la arista ya no tiene puntos dentro (ver figura A.1).

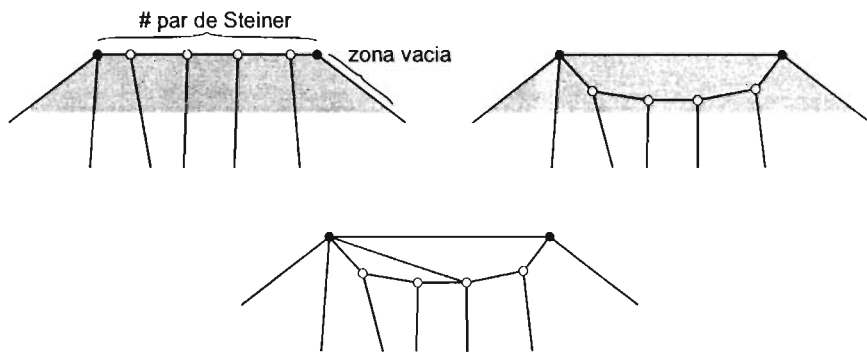


Figura A.1: Arista a la que se le quitan los Steiner que contiene.

Como trabajamos con las mismas rebanadas del algoritmo de  $n+1$  Steiner (páginas 18 – 22), sólo debemos fijarnos en aquellas en las que pueda terminar una arista de  $\text{conv}(S)$ , en este caso sólo en las rebanadas de tipo A, B, E y F.

Queremos acabar con un número par de puntos en la arista, por ello si acabamos la arista con rebanada de tipo A ó B y llevamos una cantidad par de puntos en ella no hay problema, pues estas rebanadas no cambian la paridad; de la misma manera si llevamos una cantidad impar de puntos y acabamos con rebanada tipo E ó F tampoco hay problema, pues estas rebanadas cambian la paridad.

Los casos complicados son:

- La arista lleva cantidad impar de puntos y acabamos con rebanada tipo A.
- La arista lleva cantidad impar de puntos y acabamos con rebanada tipo B.
- La arista lleva cantidad par de puntos y acabamos con rebanada tipo E.
- La arista lleva cantidad par de puntos y acabamos con rebanada tipo F.

Y los analizaremos a continuación.

### A.1.1. Arista impar y rebanada A

Este caso lo primero que debemos hacer es meter los puntos de la arista como lo haríamos si ya fueran un número par, después agregamos un Steiner en la otra arista de  $\text{conv}(S)$  que tiene la rebanada y finalmente cuadrilateralizamos lo obtenido (ver figura A.2). Aquí lo que hacemos es eliminar los Steiner de esa arista y pasar el problema de la paridad a la siguiente arista.

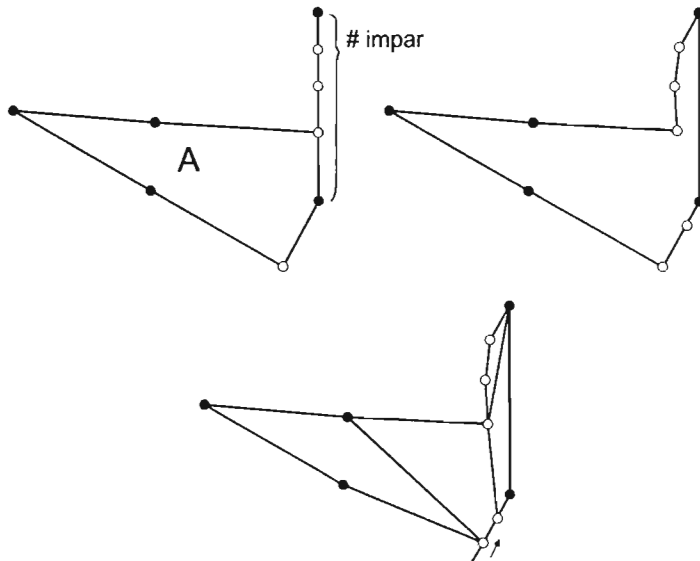


Figura A.2: Solución cuando tenemos número impar y acabamos con tipo A.

### A.1.2. Arista impar y rebanada B

Aquí tenemos que ver si la rebanada tipo B es o no la última de toda la cuadrilateralización.

Si la rebanada es la última, entonces metemos los puntos de la arista como si ya fueran un número par, quitamos el Steiner que está en la última arista, agregamos ese Steiner que quitamos a la cadena convexa de los otros Steiner y finalmente cuadrilateralizamos lo que queda como se ve en la figura A.3.

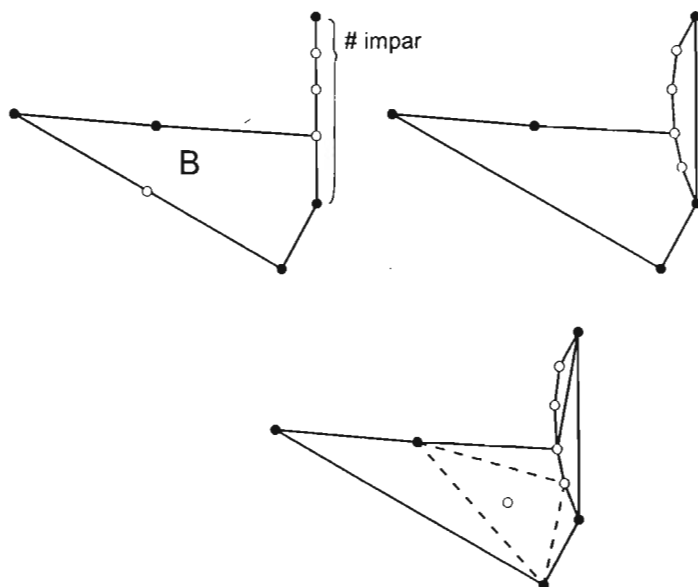


Figura A.3: Solución cuando tenemos número impar, acabamos con tipo B y es la última.

Cuando la rebanada no es la última podemos alargarla hasta el siguiente punto de  $S$ , borramos el Steiner que estaba en la última línea de la rebanada, agregamos ese Steiner que quitamos a la arista que tenía cantidad impar (quedándonos con un número par) y cuadrilaterizamos lo demás con dos Steiner (ver figura A.4). Como ampliamos la rebanada en 1 y agregamos otro Steiner entonces no afectamos la cuenta final de Steiner.

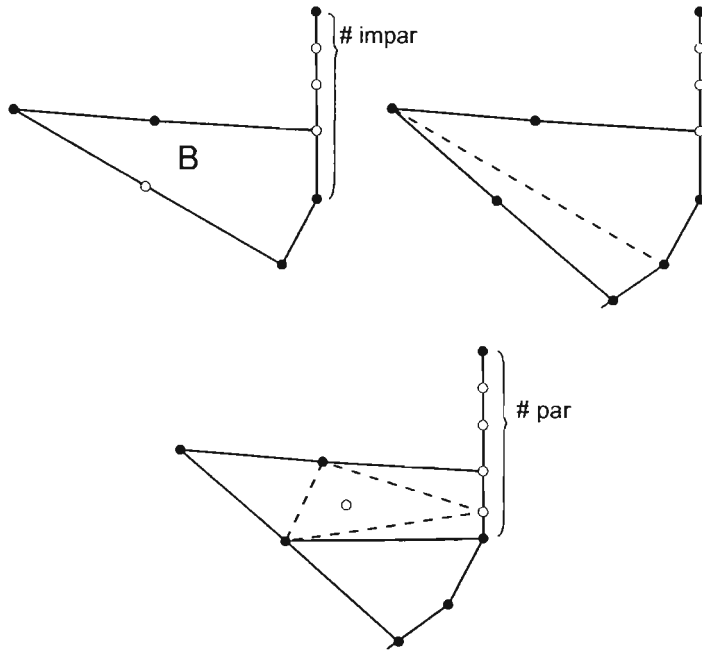


Figura A.4: Solución cuando tenemos número impar, acabamos con tipo B y no es la última.

### A.1.3. Arista par y rebanada E

Aquí se generan tres subcasos de acuerdo a la posición del punto interior de la rebanada  $\sphericalangle(a, b)$  de tipo E y si la rebanada es o no la última de todas las rebanadas de la cuadrilaterización.

Si el punto interior de la rebanada está por debajo de la línea formada por  $b$  y el punto intermedio de la recta que abre la rebanada, entonces se agrega otro punto Steiner en la línea final de la rebanada, cuadrilaterizamos bajando el punto nuevo a la última arista de  $\text{conv}(S)$  y acomodamos los Steiner para que quede todo convexo (ver figura A.5).

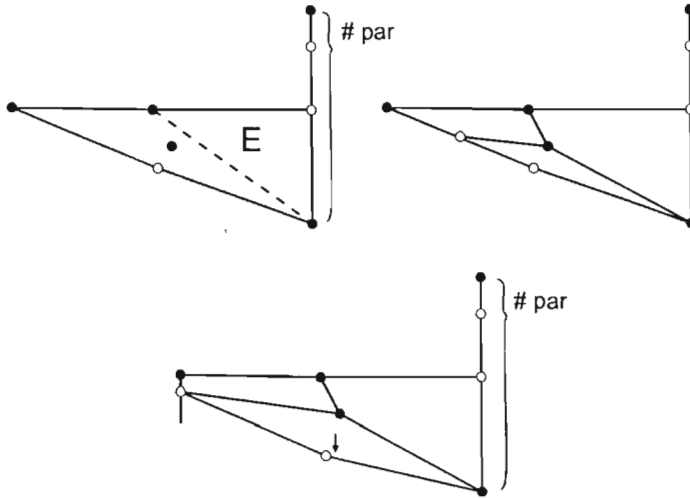


Figura A.5: Solución cuando tenemos número par, acabamos con tipo E y el punto interior por debajo de la línea.

Si el punto interior de la rebanada está por encima de la línea antes mencionada y no es la última de todas las rebanadas, entonces agrandamos la rebanada hasta el siguiente punto de  $S$ , borramos el Steiner que estaba en la línea final de la rebanada y cuadrilaterizamos con dos Steiner, como se ve en la figura A.6. Como ampliamos la rebanada en 1 y agregamos otro Steiner entonces no afectamos la cuenta final de Steiner.

El último subcaso es cuando el punto interior está por encima de la línea, y la rebanada de tipo E es la última de toda la cuadrilaterización. Aquí no podemos agrandar la rebanada, hay que borrar el Steiner de la última arista y cuadrilaterizar con tres puntos (ver la figura A.7). Como agregamos dos puntos (además del que borramos) y no agrandamos la rebanada para compensar, el conteo final de puntos Steiner se incrementa en uno.



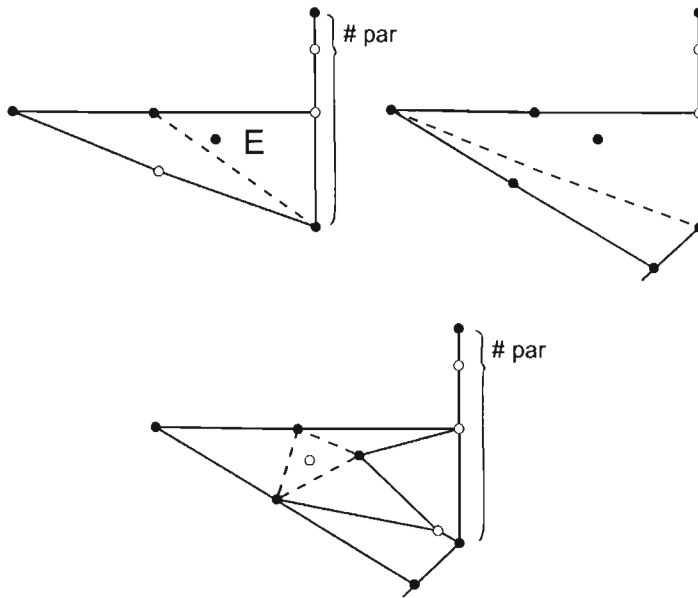


Figura A.6: Solución cuando tenemos número par, acabamos con tipo E y el punto interior por encima de la línea.

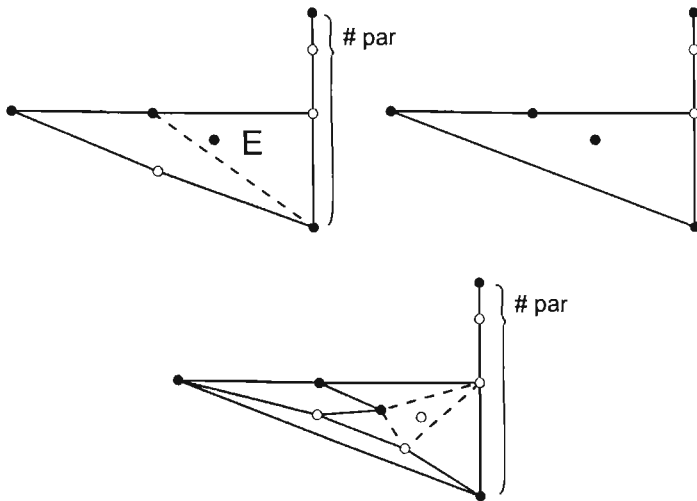


Figura A.7: Solución cuando tenemos número par, acabamos con tipo E y la rebanada es la última.

#### A.1.4. Arista par y rebanada F

Este caso se resuelve borrando el Steiner de la arista final y agregando cuatro Steiner para cuadrilateralizar, como se muestra en la figura A.8. Se puede observar que añadimos un Steiner más, comparado con el algoritmo original en el que sólo añadíamos tres.

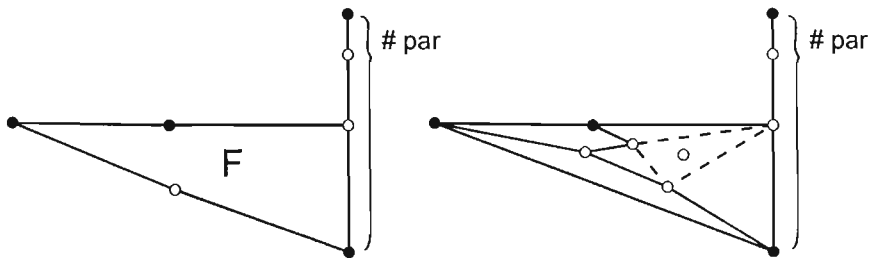


Figura A.8: Solución cuando tenemos número par y acabamos con tipo F.

## A.2. Cota de $n + 2$

En general esta modificación no altera la cota de  $n+1$  Steiner del algoritmo original, excepto cuando la última de todas las rebanadas es de tipo E ó F, en donde se agrega otro Steiner extra, así que el peor caso de este algoritmo agrega  $n + 2$  Steiner.

Una observación importante es que con este algoritmo nos podemos deshacer de todos los Steiner externos, excepto quizá los de la primera y última arista. De estos otros Steiner también podríamos deshacernos usando un método parecido, aunque hay que recordar que hay un límite, pues si el número de vértices de  $\text{conv}(S)$  es impar es forzoso agregar un Steiner exterior.

También podríamos intentar una modificación parecida para el algoritmo de  $(4/5)n + (8/5)$  puntos Steiner, pero resultaría en una mayor cantidad de casos. De cualquier manera el propósito principal de este apéndice es únicamente mostrar que si fuera necesario, sí lo podríamos hacer.

## Apéndice B

### Rebanadas del algoritmo de $(4/5)n + (8/5)$ Steiner

Aquí daremos la cuadrilaterización convexa de todas las rebanadas que se usan en el algoritmo que agrega  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner.

Estas rebanadas están divididas de acuerdo a su Tipo.

### B.1. Tipo I

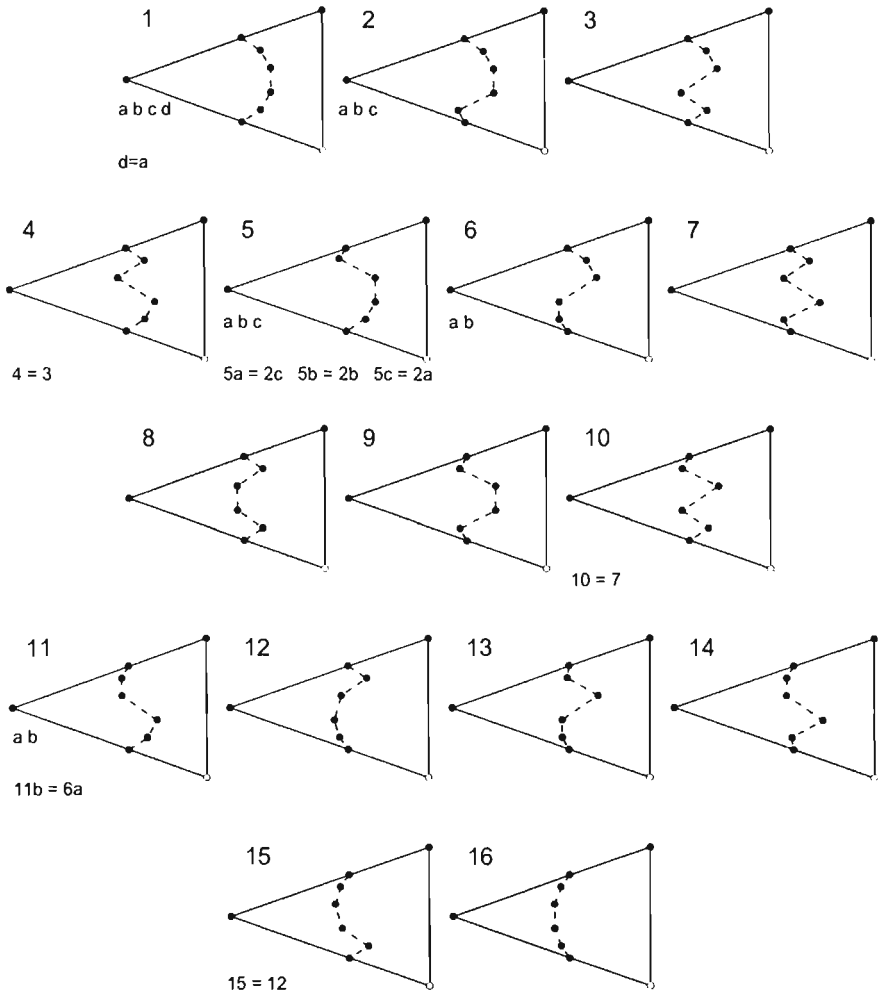
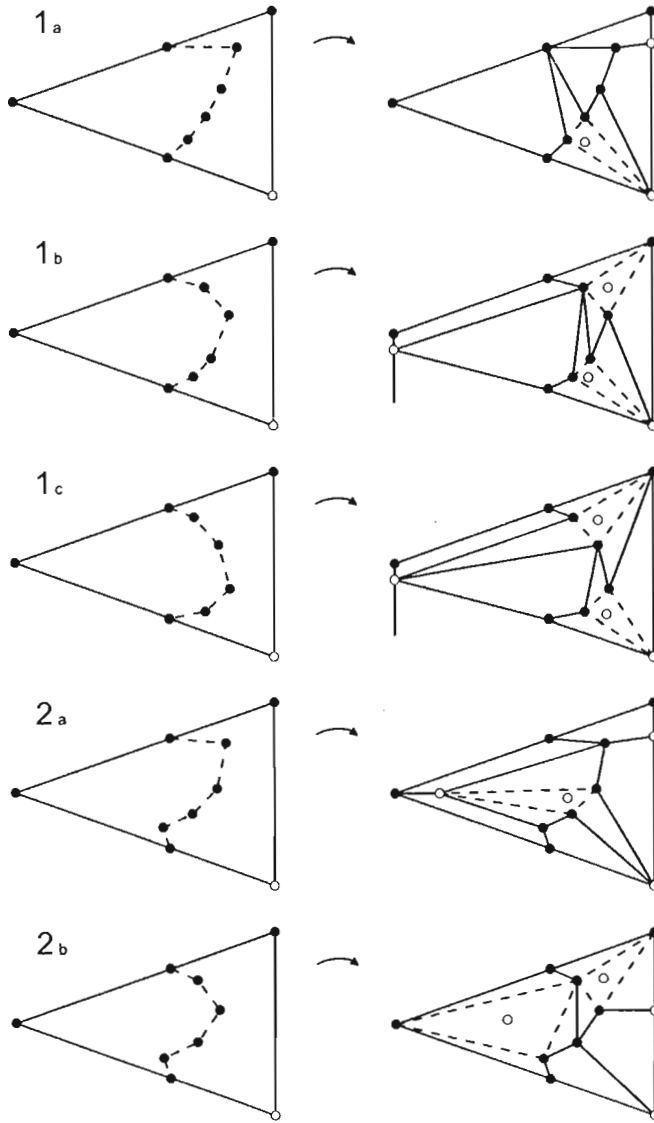
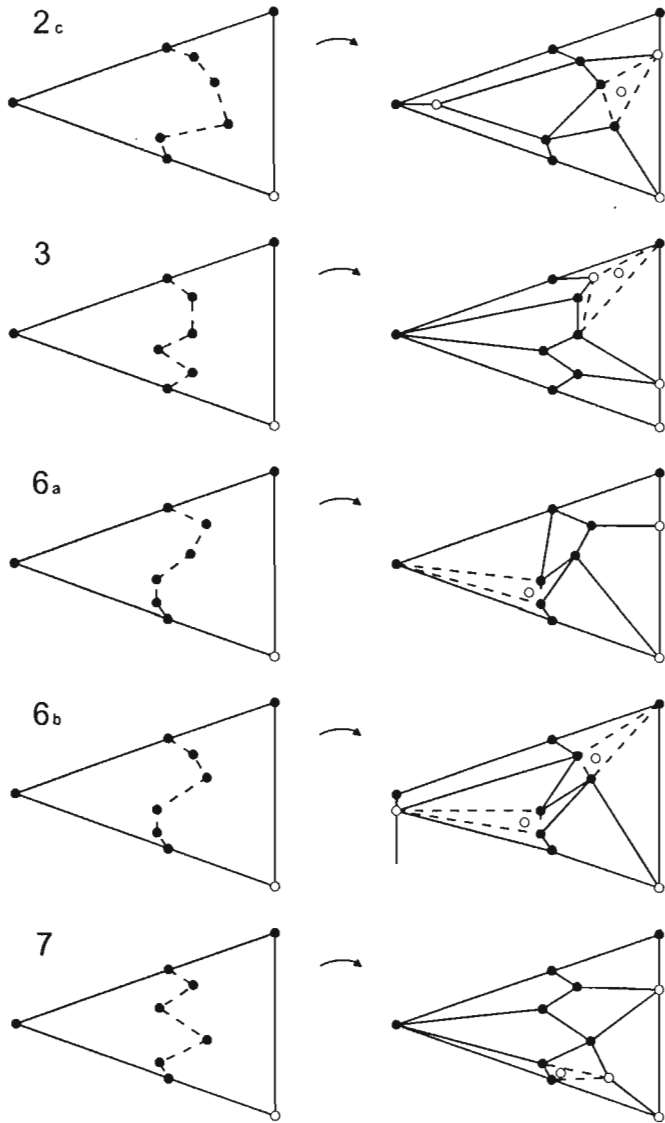
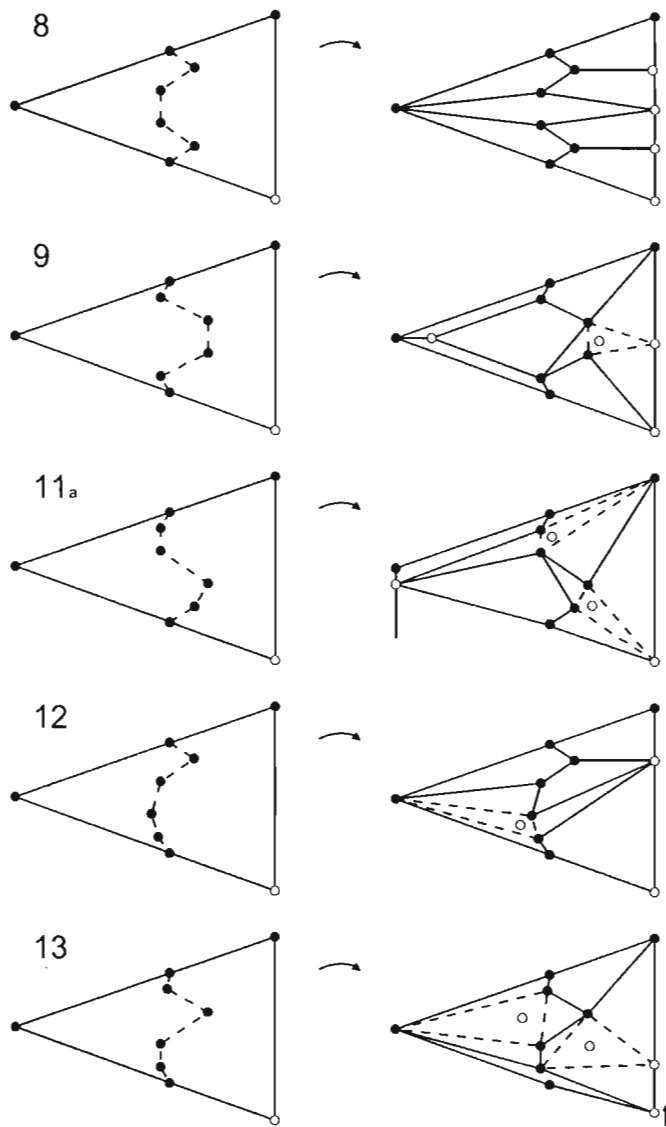


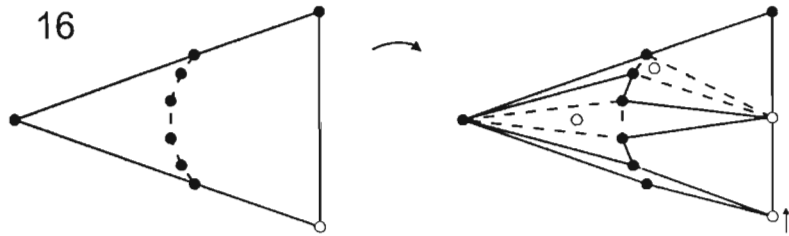
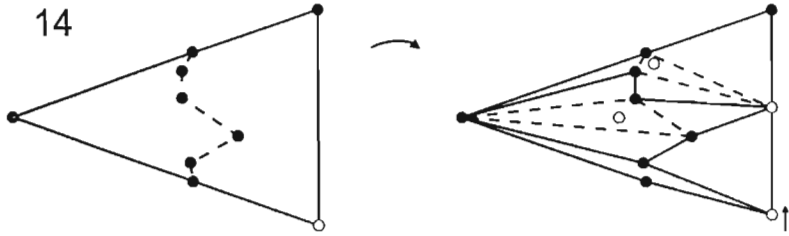
Figura B.1: Todas las posibles rebanadas de Tipo I, las letras representan subcasos y las igualdades nos dicen cuáles se resuelven igual.











## B.2. Tipo II

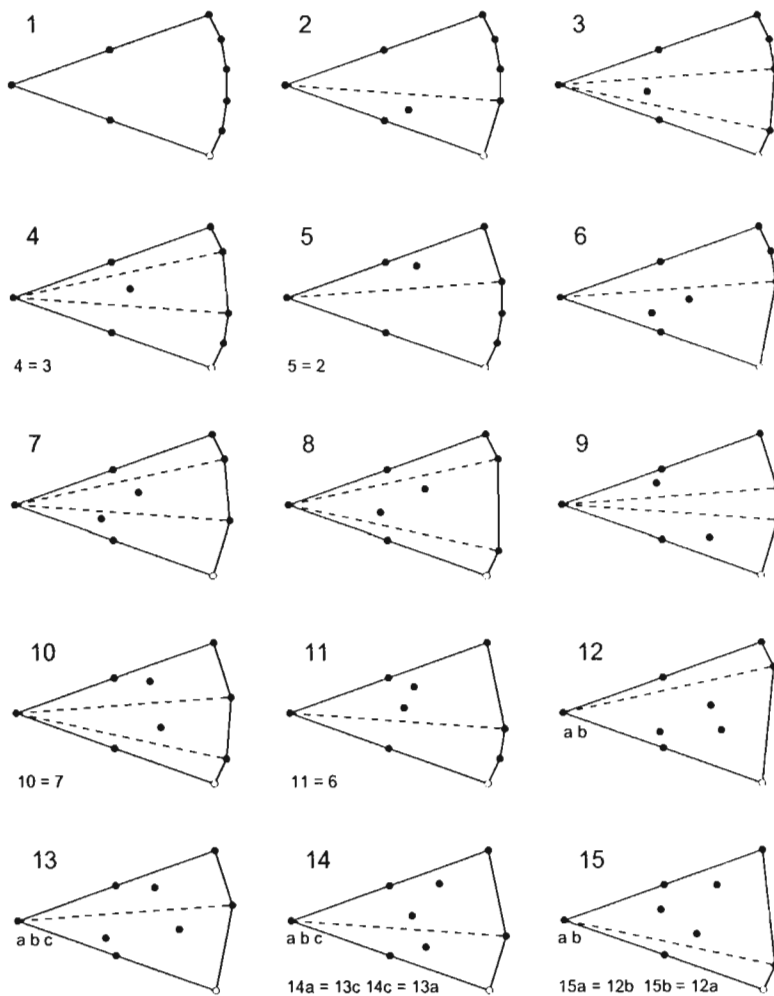
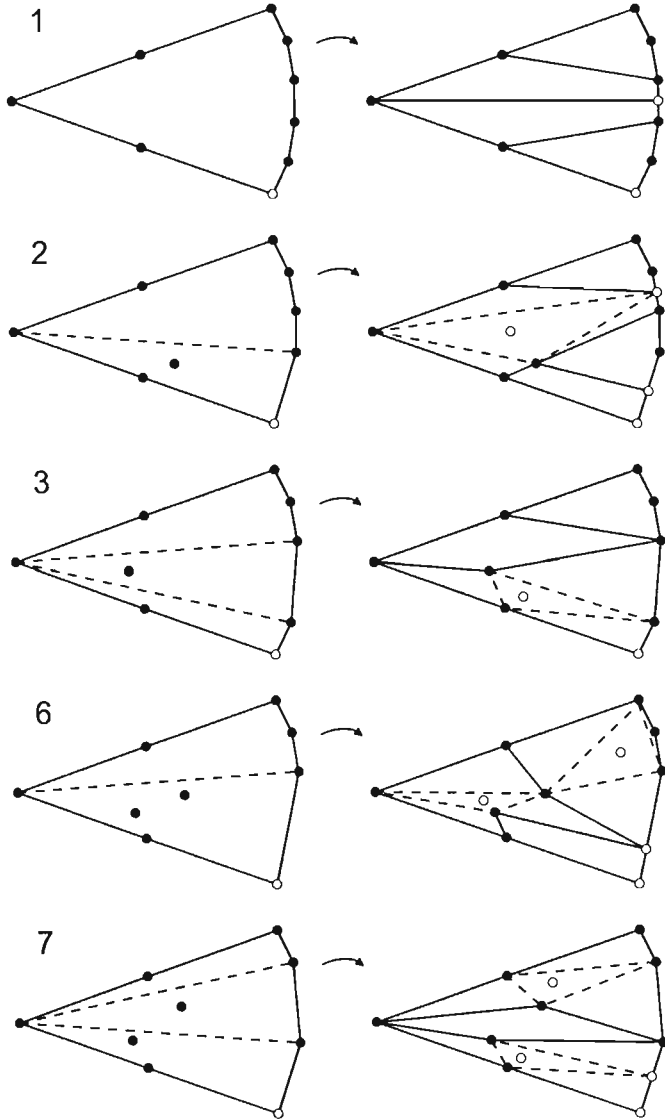
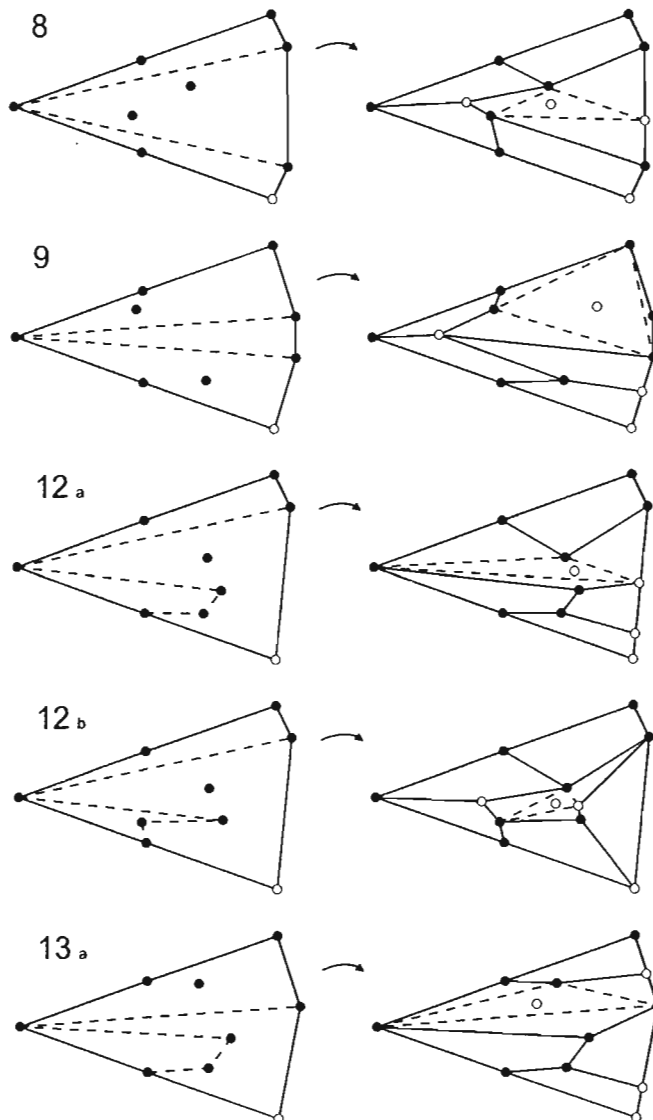
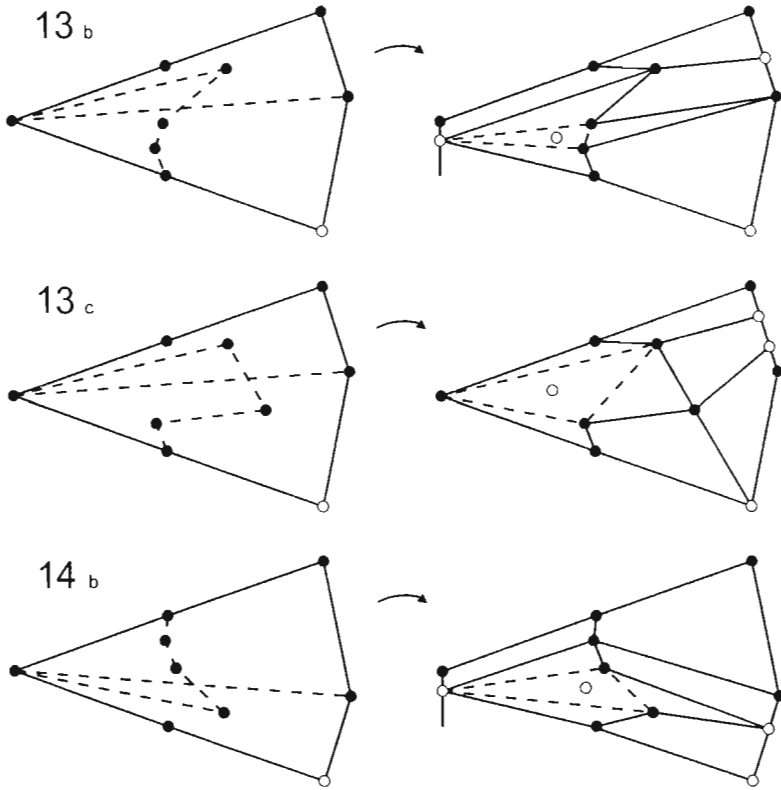


Figura B.2: Todas las posibles rebanadas de Tipo II, las letras representan subcasos y las igualdades nos dicen cuáles se resuelven igual.





ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



## B.3. Tipo III

Aquí cualquier  $\triangleleft(a, b)$  puede ser transformada a una rebanada que tenga la forma de alguna de Tipo I o Tipo II, sólo moviendo el Steiner dentro de  $\overline{pb}$ . Para después cuadrilaterizarla de acuerdo a las reglas del Tipo I y II (ver figura B.3).

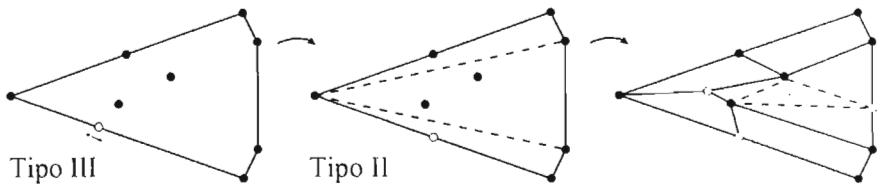


Figura B.3: Ejemplo de una rebanada de Tipo III que se convierte en una de Tipo II y se cuadrilateriza así.

## B.4. Tipo IV

En este conjunto están las rebanadas que no son de tamaño 7, aquellas que aparecen como última rebanada de  $S$  cuando  $n \bmod 5 \neq 2$ .

Los casos están dados dependiendo del tamaño de la rebanada (3, 4, 5 o 6). La figura B.4 muestra la lista de todos los casos.

### B.4.1. Tamaño 3

Este caso es igual al caso F del algoritmo de  $n + 1$  Steiner y se resuelve igual agregando otros dos Steiner (ver página 22).

### B.4.2. Tamaño 4

Las rebanadas de tamaño 4 son las analizadas en los casos A, B, C, D y E del algoritmo de  $n + 1$  Steiner, así que los resolvemos igual (ver página 19 hasta 22).

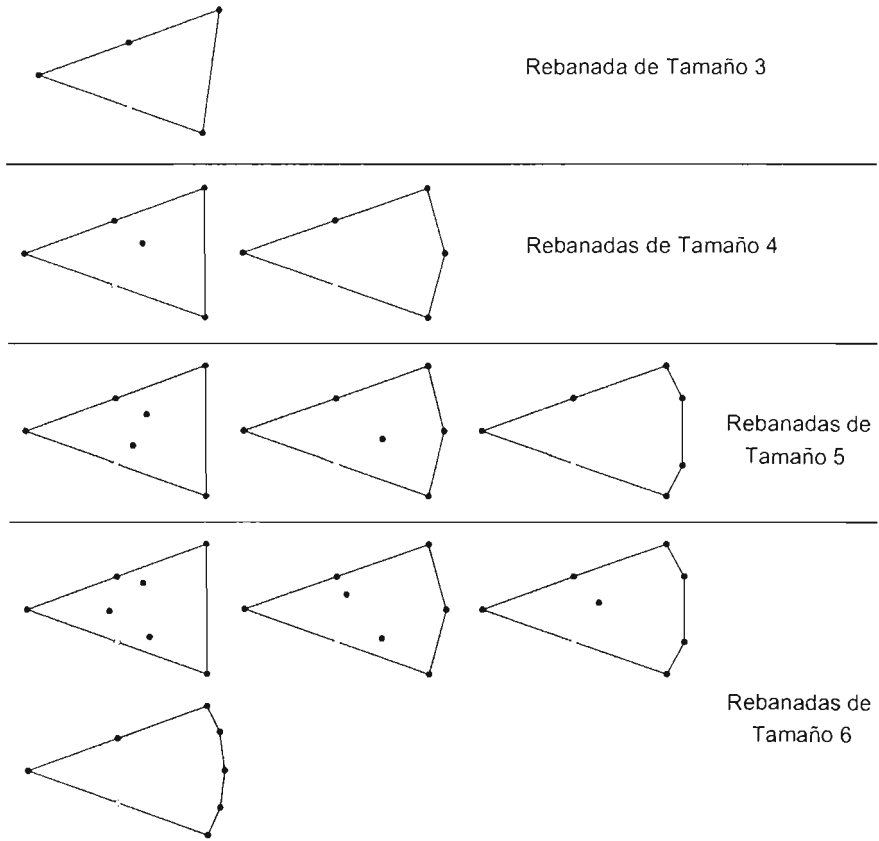


Figura B.4: Todas las posibles rebanadas de Tipo IV.

### B.4.3. Tamaño 5

Los subcasos dependen de los puntos que son vértices de  $\text{conv}(S)$ . La figura B.5 muestra la manera de resolver cada subcaso.

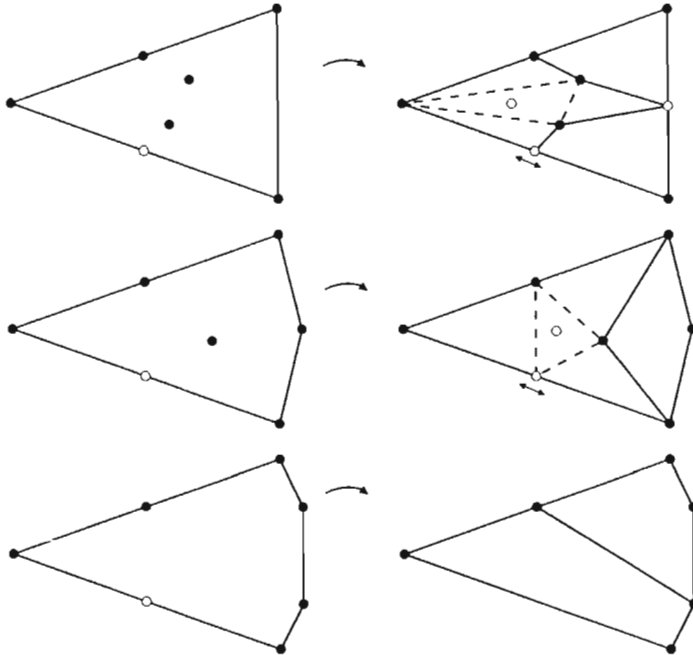


Figura B.5: Cuadrilaterizando los subcasos de la rebanada Tipo IV de tamaño 5.

### B.4.4. Tamaño 6

Esta rebanada se puede partir por la mitad en su tercer punto, quedando 2 rebanadas de tamaño 4 que se resuelven como ya sabemos (ver figura B.6).



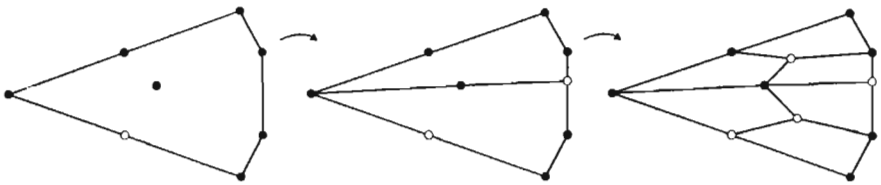


Figura B.6: Partiendo una rebanada Tipo IV de tamaño 6 en dos de tamaño 4 y resolviendo en consecuencia.

# Bibliografía

- [1] D. Breinmer, F. Hurtado, S. Ramaswami, y V. Sacristán. *Small Convex Quadrangulations of Point Sets*. Algorithmica, Volumen 38. Número 2, 2003, pag. 317 – 339.
- [2] D. J. Allman. *A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26. 1988, pag. 717 – 730.
- [3] S. Benzley, E. Perry, K. Merkle, B. Clark, y K. Sjaardema. *A comparison of all-hexahedral and all-tetrahedral finite element meshes for elastic and ecto-plastic analysis*. 4th International Meshing Roundtable, 1995, pag. 179 – 191.
- [4] P. Bose y G. Toussaint. *No Quadrangulation is Extremely Odd*. Technical report #95-03, Dept. of Computer Science, University of British Columbia, 1995.
- [5] C. K. Chui, y M. J. Lai. *Filing polygonal holes using  $C^1$  cubic triangular spline patches*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 17, 2000. pag. 297 – 307.
- [6] H. E. Conn, y J. O'Rourke. *Minimum weight quadrilaterization in  $O(n^3 \log n)$  time*. Proc. of the 28th allerton Conference on Communication Control and Computing, 1990, pag 788 – 797.
- [7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, y R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, McGraw-Hill, 1990.
- [8] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, y O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, segunda edición, 2000.

- [9] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, segunda edición, 2000.
- [10] H. Everett, W. Lenhart, M. Overmars, T. Shermer, y J. Urrutia. *Strictly convex quadrilateralizations of polygons*. Proc. of the 4th Canadian Conference on Computational Geometry. 1992. pag. 77 – 83.
- [11] T. Fevens, H. Meijer, y D. Rappaport. *Minimum Weight Convex Quadrangulation of a Constrained Point Set*. Discrete Applied Mathematics. Vol. 109, No. 1-2, 2001, pag. 95 – 107.
- [12] E. Helly. *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.. Vol. 32. 1923. pag. 175 – 176.
- [13] M. J. Lai. *Convex preserving scattered data interpolation using bivariate  $C^1$  cubic splines*. Journal of Comput. Applied Math., Vol. 119. 2000. pag. 249 – 258.
- [14] M. J. Lai, y L. L. Schumaker. *Scattered data interpolation using  $C^2$  supersplines of degree six*. SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 34(3), 1997, pag. 905 – 921.
- [15] A. Lubiw. *Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals*. Proc. Symposium on Computational Geometry, 1995, pag. 97 – 106.
- [16] S. Ramaswami, P. Ramos, y G. Toussaint. *Converting triangulations to quadrangulations*. Computational Geometry: Theory and Applications. Vol. 9, 1998, pag. 257 – 276 (hecho en 1995).
- [17] S. Ramaswami, M. Siqueira, T. Sundam, J. Gallier, y J. Gee. *Constrained quadrilateral meshes of bounded size*. Preprint, aparecerá en International Journal of Computational Geometry and Applications.
- [18] G. Toussaint. *Quadrangulations of Planar Sets*. Proc. of 4th International Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS'95), Agosto 16-18, 1995, pag. 218 – 227.
- [19] J. Urrutia. *Some Open Problems*. LATIN 2002, Cancún, México Abril 3-6. Lecture Notes in Computer Science 2286 (2002), pag. 4 – 11.
- [20] R. Wenger. *Helly type theorems and geometric transversals*. Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press, capítulo 4, 1997.

*“Sueña el rico en su riqueza,  
que más cuidados le ofrece;  
sueña el pobre que padece  
su miseria y su pobreza;  
sueña el que a medrar empieza,  
sueña el que afana y pretende,  
sueña el que agravia y ofende,  
y en el mundo, en conclusión,  
todos sueñan lo que son,  
aunque ninguno lo entiende.*

*Yo sueño que estoy aquí  
destas prisiones cargado,  
y soñe que en otro estado  
más lisonjero me vi.  
¿Qué es la vida? Un frenesí  
¿Qué es la vida? Una ilusión,  
una sombra, una ficción,  
y el mayor bien es pequeño:  
que toda la vida es sueño,  
y los sueños, sueños son.”*

Pedro Calderón de la Barca. “La vida es sueño” (Act. II, esc. xix).