UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ARITMETICA EN EL SISTEMA DE NUMERACION MAYA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

RICARDA ISABEL VELASCO SAN JUAN

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTORA DE TESIS: M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2005

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Ricarda Isabel Velasco San Juan
FECHA: 15-jun-2005
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

ARITMETICA EN EL SISTEMA DE NUMERACION MAYA

realizado por RICARDA ISABEL VELASCO SAN JUAN

con número de cuenta 08220897-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA	
Propietario	M. en C. EMMA LAM OSNAYA	Emma Lam O.
Propietario	DR. LUIS FERNANDO MAGAÑA SOLIS	
Suplente	M. en C. VIRGINIA ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule
Suplente	MAT. ADRIAN GIRARD ISLAS	Girard

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A mi familia, invaluable...

A mis amigos, irrepetibles...

A mis maestros, insustituibles...

A la Universidad, inmensa...

Por supuesto, a Elena, a Emma, a Fernando, a Virginia y a Adrián...

Gracias.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo el presentar los algoritmos para realizar la suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada en el sistema de numeración maya, tanto con números naturales, como con fracciones vigesimales en una expansión finita, dándoles a estos procesos una justificación matemática formal.

Está basado en los trabajos de George Isidoro Sánchez, 1961; así como del Ing. Héctor M. Calderón, 1966; y finalmente del Dr. Luis Fernando Magaña Solís, 1990 y 1995. Quienes, han propuesto de manera inicial los algoritmos, mejorado algunos de éstos mismos y, finalmente, pulido, justificado de forma general, y difundido estos conocimientos, respectivamente.

De este modo, aquí se da una estructuración ordenada y se presenta con detalle la justificación de dichos algoritmos, exhibiendo la validez de los mismos, así como la facilidad de su aplicación.

No se tienen pretensiones de orden histórico o arqueológico. Sin embargo, se señalan algunos datos, hechos o hipótesis de este orden acerca de las investigaciones más reconocidas sobre la cultura maya en general. También se hace hincapié en el hecho de que no hay ninguna evidencia incuestionable, reconocida por los expertos, acerca de la forma precisa en la que los mayas de la antigüedad hicieron sus cálculos matemáticos, pero se menciona que sí hay pruebas de que hacían operaciones con un alto grado de exactitud. Y es esto último lo que ha llevado a estudiosos como los citados anteriormente a la búsqueda de propuestas serias para explicar y justificar el nivel al que llegaron los mayas en el desarrollo de las matemáticas.

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN

En diversos lugares y en distintas épocas a través del tiempo, el intelecto humano ha dado muestras sorprendentes de su desarrollo. Aunque es escasa la información fidedigna con la que hasta ahora podemos contar, especialmente sobre ciertas etapas o culturas antiguas, y teniendo en cuenta que se hace una interpretación que no puede desligarse de la mentalidad actual, entre otras cosas, hay hechos que están más allá de suposiciones u opiniones, y son evidencia del alcance de la mente humana en el desarrollo del pensamiento abstracto en lo que podríamos suponer que son etapas muy tempranas de la historia del ser humano. Así; encontramos muestras de un alto grado de abstracción o dominio de técnicas determinadas, con las que el hombre de la antigüedad empezó a explicarse el mundo y el universo mismo; además de resolver los problemas de la vida cotidiana que se le presentaban, empezó a cuestionarse sobre problemas que caen en un orden puramente abstracto, y a tratar de resolver problemas que estaban más allá de lo cotidiano. Es importante resaltar que en muchos de estos casos la religión, además de la necesidad vital o la mera satisfacción del conocimiento por sí mismo, jugó un papel muy importante en el desarrollo del material intelectual que nos han heredado estos antiguos hombres.

La historia, la arqueología y la antropología, entre otras disciplinas, han descubierto lo que queda de algunas de esas grandes culturas, las que llegaron a una madurez, en diversos lugares y tiempos. Casi todas ellas han revelado aspectos muy interesantes para el hombre moderno; conforme los investigadores logran ahondar más en la interpretación de los vestigios que han llegado hasta nosotros y se va reconstruyendo algo de lo que fue una gran cultura de la antigüedad, nos asombra el desarrollo que en ciertas áreas del conocimiento humano pudieron tener muchas de las civilizaciones que hoy ya no existen.

No conocemos las condiciones que favorecieron el desarrollo intelectual de un pueblo para que haya logrado pasar de una numeración primitiva que le permitía hacer los cálculos más elementales en su vida cotidiana, o unos trazos rudimentarios para representar figuras tomadas de la realidad, a la creación de un sistema de numeración posicional con el uso del cero, como en el caso de los mayas; o bien, al desarrollo de una geometría que no nada más estudiaron, sino que organizaron y demostraron, como en el caso de los griegos.

Tampoco podemos saber muchas otras cosas que se derivan de estos cuestionamientos, el cuándo, el porqué, el cómo, o el quién; cierto es que de algunas de estas culturas tenemos la fortuna de conocer gran parte de su trabajo intelectual, no solamente porque podamos admirar aún hoy sus pirámides y templos, o porque podamos conocer sus calendarios, sino porque se conservan copias de los manuscritos en que registraron parte de sus conocimientos e ideas.

En el caso de los babilonios, los investigadores han hallado más de medio millón de tablillas de arcilla donde hacían sus anotaciones y posteriormente las cocían, lo que ha hecho que, por su conservación, sea la cultura con más material escrito que de forma directa ha llegado hasta nuestro tiempo; dichas tablillas se han desenterrado desde mediados del siglo XIX en diversas regiones de lo que fue la antigua Mesopotamia, de ellas más de 300 se relacionan al ámbito de las matemáticas. Al parecer, la escritura entre los antiguos babilonios no era un conocimiento exclusivo de una élite como en la mayoría de los pueblos, y por ello se desarrolló ampliamente. Existen tablillas que son el registro de la actividad mercantil de comerciantes comunes, así como otras con problemas propuestos y sus soluciones. De este modo, se ha podido establecer que algunas contienen series numéricas, relaciones geométricas, multiplicaciones, listas de números y sus inversos, cuadrados y cubos, y algunas relaciones numéricas en términos de exponentes, entre otras.

Todo ello, se calcula entre los años 2 500 a. C. al 1 200 a. C. Sin embargo, aunque su sistema de numeración también era posicional, en una combinación de base decimal y sexagesimal, no hay una aparición del cero como tal hasta el año 300 a. C., aproximadamente. Anteriormente a esto se dejaba un espacio en blanco y parece ser que existieron también otros símbolos cuyo uso no se llegó a generalizar, lo que no indica, para muchos estudiosos del tema, que no aplicaran el concepto del cero antes de esta fecha, aunque esto también es tema de muchas interpretaciones contradictorias para los expertos. Su escritura se denomina cuneiforme y empezó a descifrarse a mediados del siglo XX.

En el caso de los egipcios, no se han encontrado en sus textos tantas inscripciones relacionadas con las matemáticas; sin embargo, sus conocimientos quedan evidenciados en sus grandes construcciones, en la enorme influencia que ejercieron sobre otros pueblos y en algunas partes de los papiros que hasta hoy se han podido conservar, al menos en copias. Por ejemplo, el Papiro del Rhind, que se cree haber sido escrito hacia el año 1 650 a. C.; en él se hace referencia a geometría, aritmética, cálculo de pirámides y un conjunto de problemas prácticos. También estudiaron algunos problemas relacionados con la trigonometría. Ésta es para muchos investigadores contemporáneos, una civilización que no parece haber tenido como origen alguna otra cultura propiamente dicha, o al menos, influencias evidentes de otro gran pueblo anterior a él. Es también, de las grandes civilizaciones antiguas, la que más se ha extendido a través del tiempo, desde su surgimiento, florecimiento y decadencia abarca más de 3 000 años, ver [22].

La antigua cultura griega es la que, no sólo ha dejado mayor evidencia de sus logros intelectuales, sino que ha marcado toda una forma de pensar y razonar hasta nuestros días. Además de la epopeya, con Homero principalmente, y de la filosofía, el racionalismo también en las matemáticas es indiscutible; la relación de los griegos con los babilonios y los egipcios les aportó a los primeros conocimientos matemáticos y astronómicos que más tarde desarrollaron y fundamentaron, especialmente la geometría plana, la cual prácticamente agotaron. Aunque no llegaron a establecer un sistema de numeración muy desarrollado, sí hay evidencias de que diferenciaron números primos y compuestos, números amistosos, números perfectos y números racionales e irracionales, entre otros. Estudiaron las proporciones y mediante métodos geométricos resolvieron ecuaciones cuadráticas; también estudiaron las cónicas y posteriormente a Euclides, ahondaron más que los babilonios en el estudio de la trigonometría, establecieron los conceptos de axioma, definición, postulado e hipótesis. En *Los Elementos* de Euclides se resume gran parte de todos estos conocimientos, desde sus orígenes hasta aproximadamente el siglo III a. C. En astronomía, calcularon el perímetro de la tierra e inclusive afirmaron que los planetas giran alrededor del Sol.

Es muy larga la lista de los sabios griegos, y más larga aún la lista de lo que estudiaron o descubrieron, construyendo así un gran cúmulo de conocimientos en diversos ámbitos del quehacer intelectual. Finalmente, con la invasión romana y la destrucción de la biblioteca de Alejandría y más de 300 000 manuscritos, esta impresionante cultura llegó a su fin.

Otra gran civilización que desarrolló las matemáticas de manera destacada, entre otras cosas, fue la china; se atribuyen a Confucio *Los Cinco Cánones*, que se considera el manuscrito chino más antiguo que incluye algunos elementos matemáticos. Pero el documento matemático más antiguo reconocido hasta ahora por los especialistas, y que trata de cálculos astronómicos y contiene propiedades de triángulos rectángulos, así como de aplicaciones de fracciones, está ubicado por algunos historiadores hacia el siglo XII a. C., mientras que otros lo refieren sólo algunos siglos antes de la era cristiana. En otro libro que data del siglo III a. C., se encuentran diversos problemas de agrimensura, contribuciones, cálculo de longitudes y superficies, solución de ecuaciones y propiedades de triángulos. En él se aproxima el valor de $\pi = 3$. Contiene también problemas equivalentes a resolver sistemas de ecuaciones lineales por matrices. Se utilizaron números positivos y negativos asignándoles colores: rojo a los positivos y negro a los negativos. Aunque un poco más adelante se aproximaría $\pi = 3.14159$. También se han hallado manuscritos con sumas de series y, al parecer, un equivalente del Triángulo de Pascal. La relación de chinos con indios y griegos hizo a aquellos compartir muchos de los conocimientos de estos otros pueblos.

La civilización india desarrolló también las ciencias y las matemáticas en particular; en tiempos de Pitágoras existió el conocimiento de las propiedades de los triángulos rectángulos entre los indios. Hacia el siglo VI d. C., hay referencias de raíces cuadradas y cúbicas, elementos de geometría y una aproximación de $\pi = 3.1416$, así como reglas de progresiones aritméticas, aunque muchos de sus resultados no eran correctos. Se cree que en el siglo III d. C., se empezó a desarrollar un sistema de numeración que derivaría en nuestro sistema decimal. El cero apareció hasta los primeros siglos de la era cristiana, pero para el siglo XII d. C. hay evidencias de estudios acerca de ecuaciones lineales, cuadráticas, determinadas e indeterminadas, progresiones aritméticas y geométricas, números irracionales y tríadas pitagóricas, aunque muchas con errores.

Dentro de la cultura islámica, el estudio de las ciencias se inició mucho después que en las culturas citadas anteriormente, pero gracias al contacto con los griegos surgió el interés de los árabes por las matemáticas y otras ciencias. Y es gracias a las numerosas traducciones que se hicieron del griego al árabe, que podemos conocer hoy muchos manuscritos helénicos que ya no se conservan en su idioma original. Desarrollaron principalmente el álgebra; los árabes hicieron uso de raíces positivas y negativas de una ecuación cuadrática, estudiaron ecuaciones lineales, aunque no justificaron sus resultados. Hacia el siglo X d. C., sistematizaron la trigonometría y para el siglo XI, buscaron métodos numéricos para la solución de ecuaciones.

Como se puede reconocer en la semblanza anterior, en Europa y Asia existieron culturas que en periodos que coinciden en momentos con el surgimiento, florecimiento y decadencia de la cultura maya, dieron de manera independiente gran impulso al desarrollo intelectual de la humanidad. Desafortunadamente la historia de la humanidad no avanza de manera progresiva, y por ello, así como ha habido grandes avances, ha habido también grandes retrocesos, y no solamente el paso del tiempo y los materiales perecederos nos han privado de innumerables manuscritos que guardaban para futuras generaciones el trabajo científico de muchos artífices, sino que el mismo hombre, por una u otra razón, justificada o no ante nuestros ojos, se ha encargado de destruir para siempre gran parte del acervo cultural de su propia especie.

En nuestro continente hay también una historia que guarda grandes semejanzas, así como grandes diferencias con las civilizaciones de Europa y Asia.

Una de las antiguas culturas mesoamericanas que más inquieta a nuestra moderna civilización es la cultura maya. Muchos hombres han dedicado gran parte de su vida al estudio de lo que hasta nuestros días se ha conservado del desarrollo cultural de este pueblo.

Pirámides, templos, esculturas, inscripciones, códices, estelas, cerámica, tumbas, crónicas, lenguas, restos de asentamientos humanos, entre otros, son algunos de los vestigios de los antiguos mayas que han llegado a nosotros. A través de ellos cientos de hombres, siguen tratando de descifrar el enigma, que para nuestra mentalidad, representa una cultura que tuvo los alcances que ésta logró, especialmente en ciertos aspectos del conocimiento humano, y como se verá más adelante, en las matemáticas en particular.

Muchas son las barreras que nos separan de esta antigua cultura, casi todas, tal vez, barreras infranqueables, que nos seguirán impidiendo su comprensión, pues es poco lo que hasta la fecha se sabe con certeza de ellos, y es por esto que existen tantas y tan fuertes controversias respecto a los vestigios que se estudian.

Por ejemplo, hasta nuestros días no ha sido posible descifrar más que una parte de la escritura maya, pues desde la llegada de los españoles y hasta la segunda mitad de siglo XX, existían muchas discrepancias en la comprensión de los jeroglíficos mayas. Podíamos encontrar diversas hipótesis de investigadores que a lo largo de la historia propusieron interpretaciones ideográficas, logográficas y fonéticas, entre otras, pero aunque con cada una de estas distintas interpretaciones hubo avances en la lectura de algunas inscripciones, no había sido posible encontrar una fórmula satisfactoria con la cual traducir los textos existentes. Fue hasta hace muy pocos años que se pudo al fin encontrar la clave de la interpretación. Hoy se sabe que la escritura maya es silábica, como el mayista soviético Yuri V. Knorosov lo había propuesto hace varias décadas. Esto ha permitido un avance paulatino en la lectura de las inscripciones mayas. Otro factor que había impedido la interpretación de los textos que sobreviven, es el desconocimiento de la lengua en que se halla escrito cada uno de ellos, pues la maya es una familia en la cual se encuentran alrededor de 30 lenguas, pero al parecer, la mayor parte de los jeroglíficos están escritos en chontal, que se cree pudo ser la lengua culta de los mayas.

Un ejemplo más es su arquitectura, que para muchos estudiosos del tema representa un lenguaje que responde a las inquietudes astronómicas de los antiguos mayas, pero para otros el enigma se centra en el grado de perfección arquitectónica de algunas de sus construcciones. Otros más se interesan en la integración de esta arquitectura al cosmos y hay quienes investigan afanosamente el uso de estas construcciones. Algunos las consideran como una evidencia de conocimientos geométricos, pues no hay otra prueba de que los mayas hayan desarrollado la geometría, etc.

Uno de los alcances más sorprendentes del desarrollo cultural de los antiguos mayas que ha llegado hasta nosotros y del que se siguen buscando explicaciones, es su calendario, que se considera el más preciso de todas las grandes civilizaciones de la antigüedad.

La precisión que alcanzaron los mayas en su calendario es verdaderamente notable y pudo ser posible gracias a observaciones minuciosas de muchas generaciones de hombres, a la anotación precisa de estas observaciones, a la construcción de observatorios, entre otras condiciones, y sobre todo, al desarrollo de un sistema de numeración y la invención del cero, (seis siglos antes que en la India), que les permitió realizar cálculos con un alto grado de exactitud.

El trabajo de esos cientos de hombres que han estudiado diversos aspectos del desarrollo cultural de los antiguos mayas nos ha revelado que lograron desarrollar un sistema de numeración que utilizó el cero en un concepto de notación posicional en base 20; también sabemos cuales eran los símbolos que utilizaban para representar números.

Estos símbolos que son: el cero, representado por una concha vacía, el uno, representado por un punto y el cinco, representado por una barra, además de la notación posicional, permiten escribir cualquier cantidad por grande o pequeña que sea.

SÍMBOLOS NUMÉRICOS EN EL SISTEMA MAYA

CERO UNO CINCO

Cabe aclarar que como representaciones numéricas el uno y el cinco solamente tienen las que se han señalado, aunque también aparecen acomodados verticalmente, sin embargo el cero puede aparecer con la representación de la concha en otros diseños, por ejemplo, una figura en forma de huevo con diversas estilizaciones en el interior. Además de los glifos numéricos mencionados, algunos números, especialmente del cero al 20, tenían muchas y muy diversas representaciones, pues estaban asociados a días y a dioses, y ellos mismos eran dioses, por esto es común encontrar inscripciones donde algunas cantidades estén escritas en formas muy distintas a las expuestas en este trabajo. Por supuesto que la diversidad de representaciones ha sido un factor más que ha dificultado la decodificación de los jeroglíficos.

Algunas variantes de los números mayas del 0 al 19, llamados *Variantes de Cabeza;* con su denominación en maya yucateco.

También es importante tener presente que la culminación del desarrollo de la matemática se dio a través de muchos años y lugares, lo que también influyó en la variación de las representaciones de los glifos.

Por el tipo de vestigios numéricos que en la actualidad se conservan para su estudio, que consta principalmente de inscripciones en piedra y algunos códices, solamente se pueden observar números asociados a fechas, a registros de hechos en el tiempo miles de años hacia adelante y hacia atrás a partir del momento en que se hicieron tales anotaciones, así como a ciclos celestes, principalmente, pero la obtención de esas cantidades, el cómo se hicieron los cálculos para su conocimiento, no hay manera de saberlo.

Este trabajo consta de la descripción de los pasos para la aplicación de los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación, la división y la raíz cuadrada, con números naturales y racionales en forma de expansión vigesimal finita, así como de una justificación matemática de ellos. Y se basa de forma directa en los trabajos de 1990 y 1995 del Dr. Luis Fernando Magaña Solís del Instituto de Física, de la UNAM, quien junto con las M. en C. Emma Lam Osanya y Elena de Oteyza de Oteyza, de la Facultad de Ciencias de la UNAM, difunden actualmente el trabajo del Ing. Héctor M. Calderón, mostrando las virtudes didácticas de esta metodología. Calderón basó su trabajo en los fundamentos que estableció George Isidro Sánchez en 1961 y los mejoró para su aplicación.

Sánchez refiere en su libro, ver [18], que basándose en los estudios de Morley, ver [15], y habiendo ahondado en los estudios de la cultura maya con éste último directamente, él, Sánchez, inició la búsqueda de la forma de realizar las operaciones básicas en el sistema de numeración maya usando varitas, piedras y botones. Sin ser matemático ni ingeniero, desarrolló interesantes propuestas para la suma, la resta, la multiplicación y la división. Los algoritmos para la suma y la resta aquí presentados no difieren de los que él plantea, sin embargo, propone una multiplicación mediante la repetición de números, o figuras, que no es propiamente la que aquí se desarrolla. No creyendo posible que en el sistema maya la multiplicación sea como en el sistema decimal, que requiere necesariamente de la memorización de las tablas de multiplicar del uno al nueve, pues ello implicaría la memorización de tablas del uno al diecinueve en dicho sistema, Sánchez ideó el algoritmo de repetición de cantidades o figuras que retomó Calderón y es el que aquí se presenta.

Calderón continúo mejorando los algoritmos de Sánchez y es él quien propone el uso del tablero, que aquí llamamos arreglos rectangulares o cuadrados, dando con esto otro importante paso en la propuesta de métodos cada vez más prácticos y simples.

De este modo, aquí se continúa un trabajo que parece haberse iniciado con los estudios de Sánchez a principios del siglo XX en los Estados Unidos, quien, en 1.956, con sus propios recursos, editó sus aportaciones en un interesante libro muy poco conocido y referido, al que actualmente es difícil acceder, y aprovecho para agradecer al Dr. Magaña la facilidad que me dio de poder tener una copia de él, que de otro modo no hubiera podido conseguir.

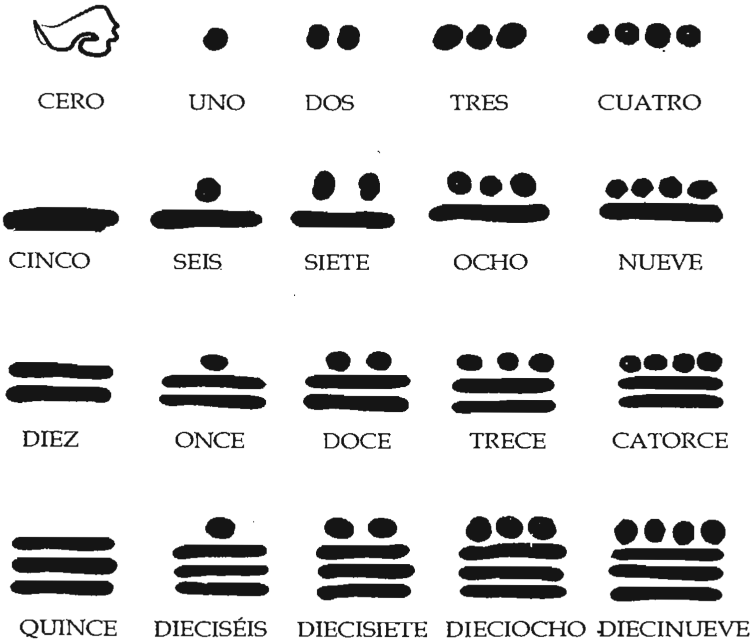
Queda abierta la cuestión de que los antiguos mayas hayan realizado bajo estos procedimientos sus cálculos numéricos; pero se muestran los alcances de su sistema de numeración.

Finalmente señalo que aunque haya existido la noción de cero en el sistema de numeración babilonio, no hay evidencias contundentes de ello como en el caso de los mayas, lo que haría a estos últimos, la primera cultura en la historia de la humanidad que llega a esta abstracción, dándole además un nombre concreto, una representación simbólica y la utilización en su sistema numérico, así como en la vida cotidiana y ceremonial religiosa como se verá en el apéndice.

SISTEMA DE NUMERACIÓN

En el sistema de numeración maya se pueden representar los números naturales con los tres símbolos antes mencionados, los primeros veinte números en este sistema de numeración, a los que llamaremos unidades son:

UNIDADES MAYAS

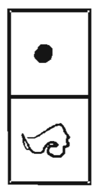


Cabría pensar que la representación del **20** es con cuatro barras

Pero aunque se entiende, no es así, al menos dentro de la manera formal de escribir cantidades superiores a 19. Aquí entra el concepto posicional y de base **20** del sistema maya de numeración, es decir, primero agrupamos por veintenas y después por potencias en base **20**.

Así, este número se considerará como una veintena con cero unidades, es decir que tenemos hasta aquí la primera veintena, y en vez de representar dicho número con cuatro barras, los mayas aplicaron el concepto posicional de numeración, y de manera igual a lo que hacemos en el sistema decimal, al agotarse las unidades, en nuestro caso las 10 que hay del 0 al 9, tomamos otra posición y combinamos los símbolos existentes para formar números de mayor valor. De manera que ahora un número vale de acuerdo a lo que expresa y al lugar donde se encuentra.

La representación del veinte, entendido en veintenas, es decir, en base **20**, es:



= 20

Una veintena con cero unidades.

En el sistema decimal tomamos las nuevas posiciones hacia la izquierda y en el sistema maya las tomamos hacia arriba; aunque en este sistema también se podría entender la representación de una cantidad como la aglutinación de muchos puntos y barras, la manera formal de escribir un número es con valores estrictamente menores que **20** en cada casilla o nivel.

Como se ve, es semejante al sistema decimal, pues en cada una de las posiciones de nuestro sistema, que van de derecha a izquierda, unidades, decenas, centenas, etc., no hay números mayores que **9** y cada valor está multiplicado por su correspondiente potencia de **10**; en el sistema maya las posiciones van de abajo hacia arriba, unidades, veintenas, etc., no hay números mayores que **19** y cada valor está multiplicado por su correspondiente potencia de **20**.

En el sistema maya, con dos lugares o casillas podemos representar **19** veintenas con **19** unidades, **19(20) + 19 = 399** como máximo.

 = 399

Pues es el número donde saturamos los valores en ambas casillas, que equivaldría a tener en el sistema decimal al **99**; para escribir la cantidad siguiente lo que debemos hacer es tomar una posición más empezándola a llenar con uno y en las casillas anteriores tendremos ceros, como en el caso de **100**.

Así, en el sistema maya, continuamos recorriendo las posiciones de abajo hacia arriba incrementando un lugar al saturar los valores de los niveles anteriores.

Y visto de manera formal tenemos potencias de 20 de cero en adelante, es decir

la cantidad del primer nivel, que corresponde a las unidades se multiplica por $20^0 = 1$
la cantidad del segundo nivel, que corresponde a las veintenas se multiplica por $20^1 = 20$
la cantidad del tercer nivel se multiplica por $20^2 = 400$
la cantidad del cuarto nivel se multiplica por $20^3 = 8000$

.
.
.

la cantidad del nivel $\mathbf{m + 1}$ (el último) se multiplica por 20^m.

con $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$

De este modo un número $\mathbf{A} \in \mathbb{N}$, en el sistema maya tendrá $\mathbf{m + 1}$ niveles, posiciones o entradas, y el valor en cada una de estas posiciones dadas es ahora un valor relativo, que es el producto de las unidades que aparecen en dicha casilla (un número entre cero y diecinueve) multiplicado por su correspondiente potencia de veinte, habiendo en total $\mathbf{m + 1}$ niveles y siendo m el mayor valor de los exponentes de la base 20 que aparecen en la formación del número en cuestión.

De esta manera el valor total de un número **A** en el sistema maya será la suma de los valores relativos de los niveles, componentes o entradas que forman dicha cantidad.

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{N}$, en el sistema maya, donde además $\mathbf{A} \geq 20$, entonces el número **A** estará formado por más de una casilla y puede visualizarse de dos formas, la común, que es en la que lo vamos a encontrar escrito generalmente, y la forma desarrollada, que es la que nos ayudará a interpretar su valor en el sistema decimal.

En el siguiente esquema vemos la representación de **A** en estas dos formas, recordando que haremos uso de la forma desarrollada de **A** en el proceso de las justificaciones formales de los algoritmos correspondientes, de otro modo se hará uso de la forma común de **A.**

Forma común de A

	a_m
	. .
A =	a_2
	a_0
	a_0

Forma desarrollada de A

	$a_m(20^m)$
	. .
A =	$a_2(400)$
	$a_1(20)$
	$a_0(1)$

Con $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i < 20$; $\mathbf{i = 0, \ldots, m+1}$

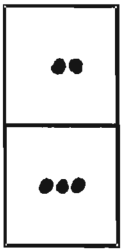
Así, los números en cada casilla toman un valor relativo respecto a la posición que ocupan dentro de la cantidad total y al sumarse todos estos valores relativos tenemos el valor completo del número, es decir

$$\mathbf{A = a_m(20^m) + a_{m-1}(20^{m-1}) + \ldots + a_3(8\ 000) + a_2(400) + a_1(20) + a_0(1)}$$

En los ejemplos siguientes podemos ver esto y se aclara que aparece cada valor en maya y en decimal.

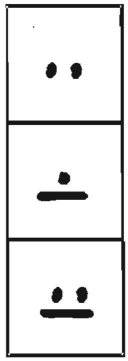
EJEMPLOS

A



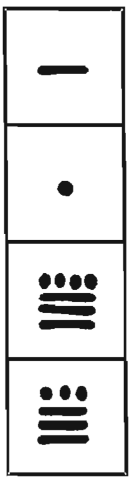
= 43

B



= 927

C



= 40,798

De este modo podemos transformar cualquier número del sistema maya al sistema decimal.

A continuación veremos cada uno de los algoritmos para las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada, primero con números naturales y posteriormente con números racionales en una expansión vigesimal finita, equivalente a la decimal de nuestro sistema, es decir, con una expansión numérica que estará multiplicada por potencias negativas de la base 20, pero no utilizaremos un punto para separar enteros de fracciones, pues éste puede confundirse con el uno maya, por eso utilizaremos un asterisco (⋆) en su lugar; a estos números los llamaremos vigesimales.

El asterisco separará las potencias positivas de las negativas, y así como tuvimos

$20^0 = 1$
$20^1 = 20$
$20^2 = 400$
.
.

multiplicando los valores de los correspondientes niveles para exponentes positivos de 20, ahora tendremos

$20^{-1} = 0.05$
$20^{-2} = 0.0025$
$20^{-3} = 0.000125$
.
.

multiplicando los valores de los correspondientes niveles con exponentes negativos de 20.

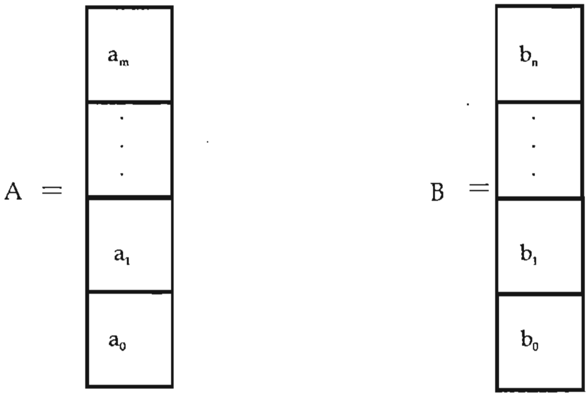
Es importante aclarar que como parte de la aplicación de los algoritmos aquí desarrollados van a aparecer dentro de los procesos algunos números que no estén escritos en la manera formal que se señaló anteriormente, por ejemplo, puede aparecer el cinco como un conjunto de cinco puntos, o cantidades mayores que veinte escritas como la aglutinación de barras y puntos en una misma casilla o nivel, pero los números iniciales para las operaciones y los resultados finales aparecerán siempre escritos siguiendo la descripción anteriormente hecha. También se resalta la gran utilidad que tiene la descomposición de la barra en cinco puntos o la del veinte en cuatro barras, hecho que hará más simples algunos procedimientos o más claros otros, como en el caso de la obtención de la raíz cuadrada, que, como se verá, la aplicación del proceso nos remite al concepto geométrico de esta operación, haciéndolo muy simple y geométricamente evidente.

Para finalizar esta parte cabe aclarar que debemos tener presente que, según creen algunos estudiosos de la cultura maya, los cálculos numéricos se hacía con objetos físicos como trozos de varas para el cinco, piedrecillas para el uno y conchas vacías para el cero, sobre superficies planas como el suelo, una piedra llana, una mesa, etc., y por ello el uso de términos como el de "juntar" o "quitar" es factible al describir las operaciones en los capítulos posteriores.

SUMA

El algoritmo para la suma aquí detallado, lo presenta Sánchez brevemente sin mayor justificación matemática. La justificación matemática la da Magaña.

Sean **A, B** $\in \mathbb{N}$, dos números mayas y sean **m, n** $\in \mathbb{N}$, los valores de los niveles superiores de **A** y **B** respectivamente.



Con $a_i < 20$, para todo $i = 0, \ldots, m$ y con $b_j < 20$, para todo $j = 0, \ldots, n$

La suma **A + B** se obtendrá en dos pasos, como primera parte, la suma parcial por niveles de los valores correspondientes de ambas cantidades, **A** y **B**.

Supongamos que **m = n**, completando con cero donde haga falta, así, los niveles de **A** y **B** coinciden y se hace la suma juntando los valores de ambas cantidades de los correspondientes niveles o entradas.

Así, tendremos

$$A + B = \begin{array}{|c|}\hline a_m + b_m \\ \hline \vdots \\ \hline a_1 + b_1 \\ \hline a_0 + b_0 \\ \hline\end{array}$$

Como segunda parte verificaremos que $a_i + b_i < 20$, para todo $i = 0, \dots, m$, haciendo esto ordenadamente desde el nivel inferior, cero, hasta el superior, **m+1**, llamando c_i a estos resultados.

Si $a_i + b_i < 20$, definimos

$a_i + b_i = c_i$

Si $a_i + b_i \geq 20$, haremos grupos de 20, es decir, dividiremos esta cantidad entre 20, obteniendo

$a_i + b_i = q_i\,(20) + r_i$, donde q_i es el cociente de la división y r_i el residuo, además de que siempre $0 \leq q_i < 20$ y $r_i < 20$.

Analizando el renglón i de **A +B**, que está multiplicado por 20^i y el resultado anterior tenemos

$(a_i + b_i)\,20^i = [q^i\,(20) + r^i\,]\,20^i = (q_i)\,20^{i+1} + (r_i)\,20^i$

De donde podemos concluir que $q_i(20^{i+1})$ debe estar en el nivel **i+1**, y una vez que pasamos q_i al nivel inmediato superior, en el nivel i quedará solamente r_i.

Así en el nivel **i+1** tendremos

$a_{i+1} + b_{i+1} + q_i$

Este valor también debe ser analizado procediendo como en el caso anterior; y así se continua hasta terminar de revisar todos los niveles de **A + B**, de modo que al llegar al nivel **m+1** puede ocurrir que

$a_m + b_m + q_{m-1} < 20$, y en este caso

$a_m + b_m + q_{m-1} = c_m$, que será el valor en el nivel superior, de lo contrario, es decir, si

$a_m + b_m + q_{m-1} \geq 20$, haremos lo anteriormente descrito y habrá un último cociente que pasa al nivel siguiente, teniendo así $m+2$ niveles en total. En estas desigualdades puede ser que $q_{m-1}=0$.

Si todos los renglones o niveles de $A + B$ se han revisado bajo este criterio, designaremos como c_k, con $k = 0, \ldots, m+2$ a lo más, a los valores obtenidos a partir de cada nivel de $A + B$, donde $c_k < 20$, para todo $k = 0, \ldots, m+2$ a lo más.

Entonces $A + B = C$, con $C \in \mathbb{N}$, un número maya.

En otras palabras y de forma práctica, por cada veintena que aparezca en cualquiera de los niveles de $A+B$ subiremos un punto al nivel inmediato, que es lo mismo que hacemos al aplicar el algoritmo común de suma en el sistema decimal, el "acarreo", de este modo C tendrá valores necesariamente menores que 20 en cada nivel.

Si $m > n$, hacemos $b_i = 0$, para $i = n+1, \ldots, m$, y al hacer coincidir los niveles sumamos como en el caso anterior.

Si $m < n$, hacemos $a_i = 0$, para $i = m+1, \ldots, n$, y procedemos de igual modo pero con n como nivel superior.

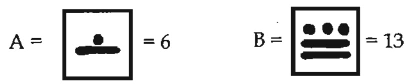
La justificación del procedimiento de la suma se puede ver considerando cada una de las cantidades a sumar en su forma desarrollada, es decir, multiplicadas por su correspondiente potencia de base 20 y de este modo la suma por niveles es válida al aplicar las leyes de los exponentes. Para fines prácticos consideremos que $m = n$.

$$
A + B = \begin{array}{|c|}
\hline
(a_m)(20^m) + (b_m)(20^m) \\
\hline
\vdots \\
\hline
(a_1)(20^1) + (b_1)(20^1) \\
\hline
(a_0)(20^0) + (b_0)(20^0) \\
\hline
\end{array}
= \begin{array}{|c|}
\hline
(a_m + b_m)(20^m) \\
\hline
\vdots \\
\hline
(a_1 + b_1)(20^1) \\
\hline
(a_0 + b_0)(20^0) \\
\hline
\end{array}
$$

Así, al tener sumas de términos multiplicados por iguales factores, el resultado es válido.

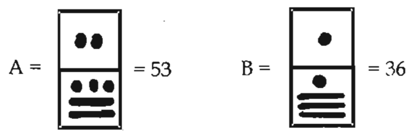
EJEMPLOS

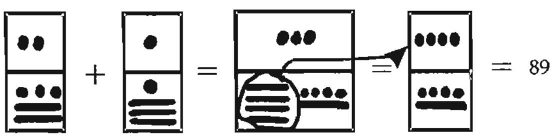
EJEMPLO 1
Sean A y B



Donde podemos ver de forma muy clara el proceso de "juntar" por niveles los valores de ambas cantidades, y en este caso, al no aparecer números mayores que 19 no hay acarreo.

EJEMPLO 2
Sean A y B



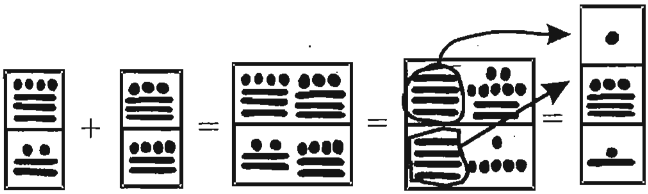


Ahora se ha ejemplificado un caso donde se aplicó el acarreo mostrando que las cuatro barras juntas forman una veintena que se sube como un punto al nivel siguiente.

EJEMPLO 3
Sean A y B

A =  = 392

B =  = 374

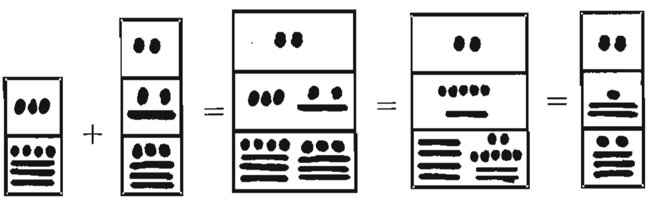
 = 766

Aquí el proceso de acarreo se aplicó dos veces y también se muestra como cinco puntos se cambian por una barra.

EJEMPLO 4
Sean A y B

A =  = 79

B =  = 958

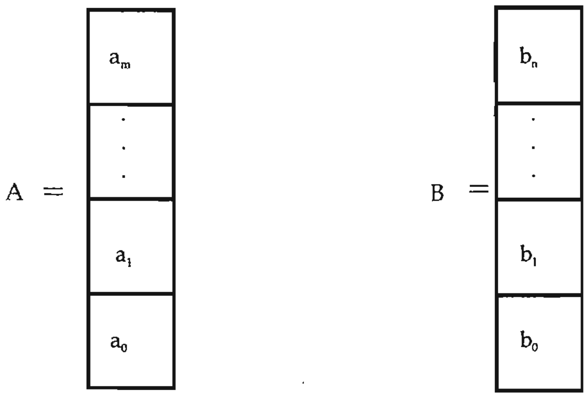
 =. 1037

Finalmente se ha mostrado un ejemplo donde **A** y **B** no tienen el mismo número de niveles y, sin anotarse explícitamente en el ejemplo, se completa **A** con cero en el tercer nivel y se suman los valores de los niveles correspondientes como en los ejemplos anteriores.

RESTA

El proceso para la resolución de la resta también aparece desde Sánchez, y tampoco hay una prueba formal en su libro ni en el de Calderón, aunque la prueba sí está en el trabajo de Magaña.

Sean **A, B** $\in \mathbb{N}$, dos números mayas, y sean **m, n** $\in \mathbb{N}$, los valores de los niveles superiores de **A** y **B** respectivamente, además **A** $\geq$ **B**.



El procedimiento que a continuación se desglosa supone que **m = n**; como **A** $\geq$ **B**, **m** $\geq$ **n**, y en el caso de que **m > n**, tomaremos $b_i = 0$, $i = n+1, \ldots, m$.

De manera similar al proceso para la suma de números mayas, se resta por niveles; pero también de manera similar al proceso para la resta en el sistema decimal, habrá acarreo cuando no alcance el valor de un número para quitarle el valor del otro número.

Por lo tanto, primero se verifica que $a_i \geq b_i$ para todo $i = 0, \ldots, m$, para poder restar, quitar, el valor b_i del valor a_i.

Iniciaremos verificando que se cumpla la desigualdad $a_i \geq b_i$, para todo $i = 0, \ldots. m$.

Si $a_i \geq b_i$ para todo $i = 0, \ldots, m$, tendremos simplemente que

$$A - B = \begin{array}{|c|}\hline a_m - b_m \\ \hline \vdots \\ \hline a_1 - b_1 \\ \hline a_0 - b_0 \\ \hline \end{array}$$

De lo contrario, tendremos lo siguiente.

Sea $a_j < b_j$, para algún $j = 0, \ldots, m-1$, pues siempre $a_m \geq b_m$ por ser $A \geq B$.

Si $a_{j+1} > 0$, tomamos este valor multiplicado por su potencia correspondiente y escribimos

$$a_{j+1}(20^{j+1}) = (1 + (a_{j+1} - 1))\, 20^{j+1} = 20^{j+1} + (a_{j+1} - 1)\, 20^{j+1} = 20(20^j) + (a_{j+1} - 1)\, 20^{j+1}$$

De la última igualdad se ve como 20, que está multiplicado por 20^j, puede ser escrito en el nivel j, y que sumado al valor que había en este nivel obtenemos

$$20(20^j) + a_j\, 20^j = (20 + a_j)\, 20^j$$

De este modo tenemos en el nivel j de A y B que

$20 + a_j \geq 20 > b_j$, pues el valor de todos los números en las casillas de A y de B es estrictamente menor que 20.

Y así, aplicando el acarreo del nivel $j+1$ al nivel j en A, ya podemos hacer la resta con el nuevo valor del nivel j de A y el valor b_j.

Si $a_{j+1} = 0$ continuamos recorriendo los niveles de A hacia arriba hasta hallar algún $a_k > 0$, con $k = j+2, \ldots, m$, (ver ejemplos 3 y 4). La condición inicial de que $A \geq B$ garantiza que haya al menos un valor $a_k > 0$.

En los siguientes ejemplos se marcan algunas líneas auxiliares en los primeros de ellos para resaltar el punto que se baja o la barra que se separa en puntos, y en los últimos ejemplos se omiten estas líneas.

EJEMPLOS

EJEMPLO 1

Sean A y B

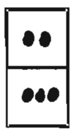
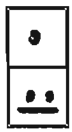
A =  = 11 B =  = 4

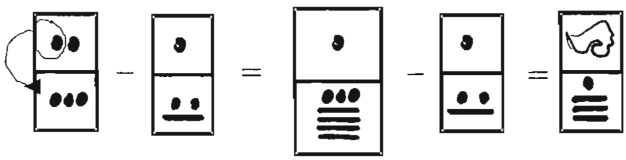
 = 7

En este caso solamente se ilustra como se toma una barra por su equivalente de cinco puntos para hacer más claro el proceso de quitar los valores de un número en el otro. Los números encerrados son los que se están quitando.

EJEMPLO 2

Sean A y B

A =  = 43 B =  = 27

 = 16

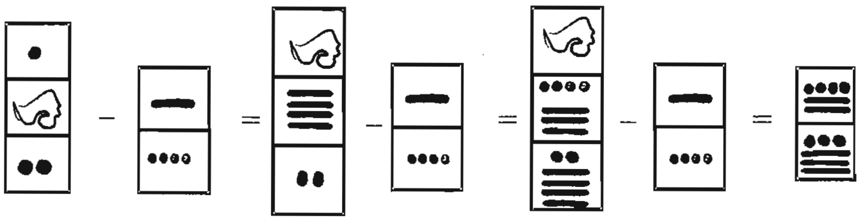
En este ejemplo se ha utilizado el acarreo, el punto encerrado en la figura se pasa como 20 hacia abajo en forma de cuatro barras.

EJEMPLO 3

Sean A y B

A =  = 402

B =  = 104

 = 298

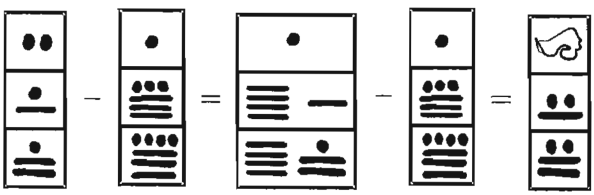
En este ejemplo vemos, ya sin las líneas auxiliares, otra vez la utilización del acarreo aplicado dos veces bajando cada vez un solo punto transformado en cuatro barras hasta que, finalmente, los valores de todas las casillas de **A** son mayores o iguales que los valores de sus correspondientes casillas en **B**.

EJEMPLO 4

Sean A y B

A =  = 931

B =  = 779

 = 152

Aquí se muestra que el hecho de ser **A** $\geq$ **B** nos asegura que al menos en el nivel superior de **A** haya un número mayor o igual que en su correspondiente de **B**, y de este modo podemos aplicar el acarreo en todas las casillas donde sea necesario.

●●●● MULTIPLICACIÓN

Sánchez propone un proceso para la resolución de multiplicaciones que difiere de éste, como se mencionó antes, omite la aplicación de tabas, y de esta manera él hace una reproducción de las figuras, es decir el número que representa un factor, tantas veces como lo indique el otro factor, no utiliza el tablero, que aquí se denomina arreglo rectangular y que corresponde a la propuesta de Calderón, aunque ninguno de los anteriores da una justificación del algoritmo propuesto; Magaña inicia la prueba de manera muy general para este algoritmo, partiendo del hecho de suponer que si los números que se multiplican son

$$A = c_0b^0 + c_1b^1 + c_2b^2 + \ldots + c_nb^n \text{, y} \quad B = d_0b^0 + d_1b^1 + d_2b^2 + \ldots + d_mb^m \text{,}$$

Su multiplicación sería

$$AB = (c_0b^0 + c_1b^1 + c_2b^2 + \ldots + c_nb^n)(d_0b^0 + d_1b^1 + d_2b^2 + \ldots + d_mb^m) =$$

$$= c_0b^0(d_0b^0 + d_1b^1 + d_2b^2 + \ldots + d_mb^m) + c_1b^1(d_0b^0 + d_1b^1 + d_2b^2 + \ldots + d_mb^m) + \ldots +$$

$$+ c_nb^n(d_0b^0 + d_1b^1 + d_2b^2 + \ldots + d_mb^m)$$

De donde resolviendo los productos y agrupando por exponentes de base **20** llegaremos a la suma de diagonales que se anota más adelante y que corresponde a la propuesta de Calderón, que simplifica en un alto grado la que hiciera anteriormente Sánchez.

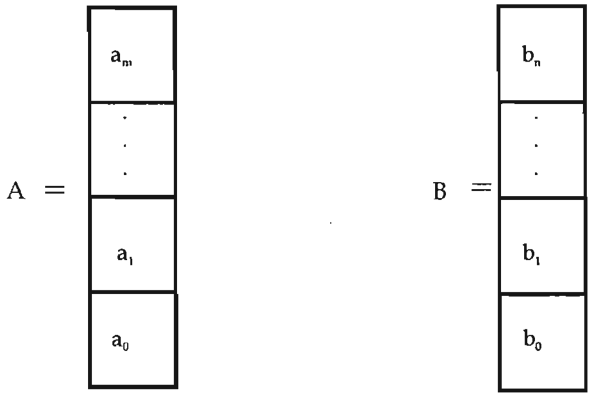
Aquí se detallan los pasos del proceso, así como la justificación matemática partiendo de la propuesta de Calderón retomada por Magaña.

La multiplicación en el sistema de numeración maya la interpretaremos de dos formas para propósitos distintos, en la primera, para describir los pasos del procedimiento y, en la segunda, para justificar formalmente la validez de este proceso.

En la primera parte, la aplicación del algoritmo se basa en el concepto de suma en el sistema maya. Adelantando un poco los pasos del procedimiento, el algoritmo se centra en copiar una cantidad, su valor y su forma, tantas veces como la otra cantidad indique, de manera que para obtener el resultado juntaremos, es decir, sumaremos, las barras y los puntos que aparezcan en total en una celda después de algunos pasos, y finalmente, revisaremos que en cada nivel de la cantidad resultante no haya valores superiores a 19, para que el resultado quede formalmente escrito.

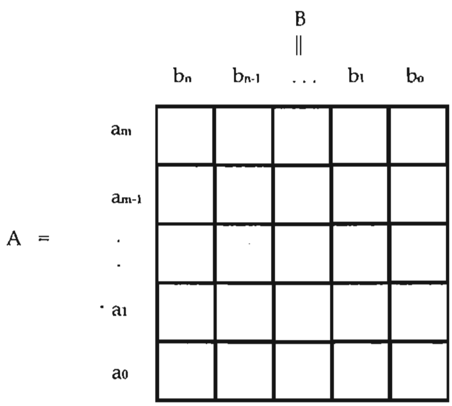
En la segunda parte analizaremos este proceso utilizando el concepto de multiplicación y algunas de sus propiedades, con el fin de darle una justificación formal al procedimiento que se revisó en la primera parte.

Para empezar, sean **A, B** ∈ **N**, dos números mayas, con **m, n** ∈ **N**, siendo **m** y **n** los valores de los niveles superiores de **A** y **B** respectivamente.



El algoritmo que a continuación se mostrará requiere de un arreglo rectangular formado por **m+1** renglones y **n+1** columnas.

Colocaremos en la parte exterior izquierda del rectángulo el número **A**, de forma vertical, de abajo hacia arriba, y en la parte externa superior del rectángulo colocamos el número **B** de forma horizontal de derecha a izquierda. Las componentes de **A** formarán los renglones del arreglo rectangular y las de **B** formarán las columnas.

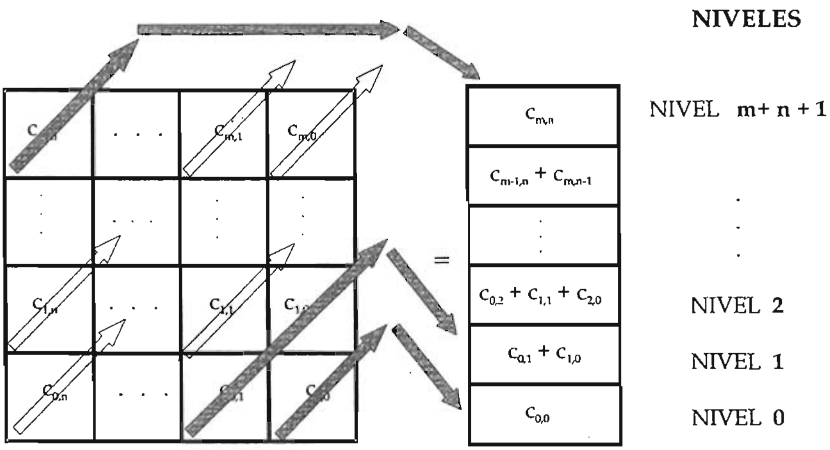


Este arreglo rectangular se irá llenando con la anotación dentro de cada celda de la representación gráfica de a_i veces el valor de b_j correspondiente, o viceversa, es decir, **bj** veces el valor de a_i, lo que sea más práctico, con $i = 0, \ldots, m$ y con $j = 0, \ldots, n$, denotaremos como $c_{i,j}$ tales representaciones numéricas.

	b_n	. .	b_1	b_0
a_m	$c_{m,n}$	. .	$c_{m,1}$	$c_{m,0}$
:	:	. .	:	:
a_1	$c_{1,n}$	. .	$c_{1,1}$	$c_{1,0}$
a_0	$c_{0,n}$	. .	$c_{0,1}$	$c_{0,0}$

Una vez hecho esto, se tomará cada una de las diagonales del arreglo rectangular y se sumarán los valores de las celdas que lo forman, obteniendo así un nuevo número, como se muestra en la figura.

Se aclara que aquí está entendido el concepto de diagonal como se muestra en la figura, y recordando que los arreglos son rectangulares.



Y para concluir revisaremos cada una de las casillas del número obtenido en esta última parte, de manera que en cada celda haya una cantidad estrictamente menor que 20; al valor así obtenido lo llamaremos C, y será el resultado de la multiplicación **AB**.

Por lo tanto **AB** = C, con **A, B** y C números mayas

Aquí termina la primera parte.

En la segunda parte visualizaremos este procedimiento asumiendo que, visto en nuestro sistema, cada $c_{i,j}$ es una multiplicación, $c_{i,j} = a_i b_j$, para todo $i = 0, \ldots, m$ y $j = 0, \ldots, n$.

Puesto que $c_{i,j}$ era a_i veces b_j, o bien b_j veces a_i, entonces $c_{i,j} = a_i b_j$. En esta parte estamos haciendo un manejo aritmético de lo que en la primera parte se hizo en forma gráfica.

Por lo tanto, si tomamos los mismos números **A** y **B** de la primera parte en el arreglo rectangular de la multiplicación, pero en vez de anotar $c_{i,j}$, anotamos $a_i b_j$, dentro de cada celda, tenemos.

	b_n	b_{n-1}	. .	.	b_2	b_1	b_0
a_m	$a_m b_n$	$a_m b_{n-1}$	. .	.	$a_m b_2$	$a_m b_1$	$a_m b_0$
a_{m-1}	$a_{m-1} b_n$	$a_{m-1} b_{n-1}$	. .	.	$a_{m-1} b_2$	$a_{m-1} b_1$	$a_{m-1} b_0$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_2	$a_2 b_n$	$a_2 b_{n-1}$	. .	.	$a_2 b_2$	$a_2 b_1$	$a_2 b_0$
a_1	$a_1 b_n$	$a_1 b_{n-1}$	. .	.	$a_1 b_2$	$a_1 b_1$	$a_1 b_0$
a_0	$a_0 b_n$	$a_0 b_{n-1}$	. .	.	$a_0 b_2$	$a_0 b_1$	$a_0 b_0$

De este modo, al tomar la suma de las entradas de cada diagonal, según los niveles antes señalados, y haciendo uso de la notación desarrollada de **A** y **B**, la multiplicación, con las respectivas potencias de base **20** de cada uno de sus factores, toma la forma siguiente.

$$AB = \begin{array}{|l|}\hline (a_m)(20^m)(b_n)(20^n) \\ \hline (a_{m-1})(20^{m-1})(b_n)(20^n) + (a_m)(20^m)(b_{n-1})(20^{n-1}) \\ \hline \vdots \\ \hline (a_0)(20^0)(b_2)(20^2) + (a_1)(20^1)(b_1)(20^1) + (a_2)(20^2)(b_0)(20^0) \\ \hline (a_0)(20^0)(b_1)(20^1) + (a_1)(20^1)(b_0)(20^0) \\ \hline (a_0)(20^0)(b_0)(20^0) \\ \hline \end{array}$$

Y con las propiedades de la multiplicación tendremos.

$$AB = \begin{array}{|l|}\hline (a_m b_n)(20^{m+n}) \\ \hline (a_{m-1} b_n)(20^{m+n-1}) + (a_m b_{n-1})(20^{m+n-1}) \\ \hline \vdots \\ \hline (a_0 b_2)(20^2) + (a_1 b_1)(20^2) + (a_2 b_0)(20^2) \\ \hline (a_0 b_1)(20^1) + (a_1 b_0)(20^1) \\ \hline (a_0 b_0)(20^0) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|l|}\hline (a_m b_n)(20^{m+n}) \\ \hline (a_{m-1} b_n + a_m b_{n-1})(20^{m+n-1}) \\ \hline \vdots \\ \hline (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(20^2) \\ \hline (a_0 b_1 + a_1 b_0)(20^1) \\ \hline (a_0 b_0)(20^0) \\ \hline \end{array}$$

Lo que muestra que al tomar la suma de los números de cada diagonal se preserva el exponente del nivel correspondiente.

Finalmente se revisa que en cada entrada haya un valor estrictamente menor que 20, de lo contrario se hará lo indicado anteriormente.

A continuación se muestran algunos ejemplos de la aplicación de este algoritmo en casos concretos.

En el ejemplo 1 hallamos un caso muy simple, en el que básicamente se observa como, en un esquema gráfico, un número es una figura, que se repite tantas veces como indica el otro número, en este caso es más fácil repetir tres veces el número o la figura que representa al 6 que hacer lo inverso, es decir, repetir seis veces la figura que representa al 3. Al final de este ejemplo vemos que no se aplica el acarreo y se llega al resultado final de una forma directa después de acomodar las barras y los puntos.

En los ejemplos siguientes además de observar lo anterior se muestra la aplicación del acarreo y el uso de la equivalencia de la barra y los cinco puntos.

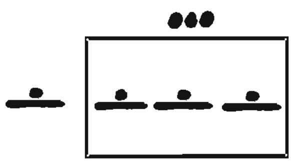
Es importante señalar como, a pesar de que los ejemplos muestran la aplicación del algoritmo en la multiplicación de números relativamente pequeños, las cantidades que se obtienen al hacer la suma de cada diagonal pueden aglutinar gran cantidad de puntos y barras, por ello es importante revisar con detenimiento cada paso.

EJEMPLOS

EJEMPLO 1

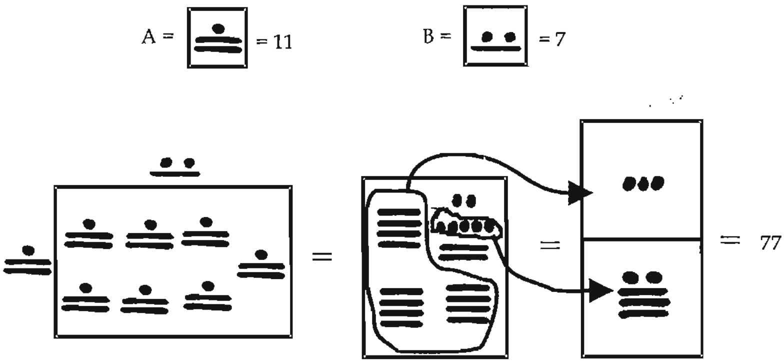
Sean A y B

A =  = 6 B =  = 3

 =  = 18

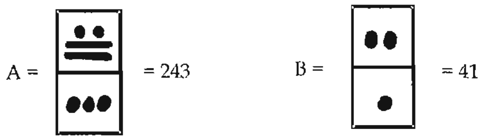
EJEMPLO 2

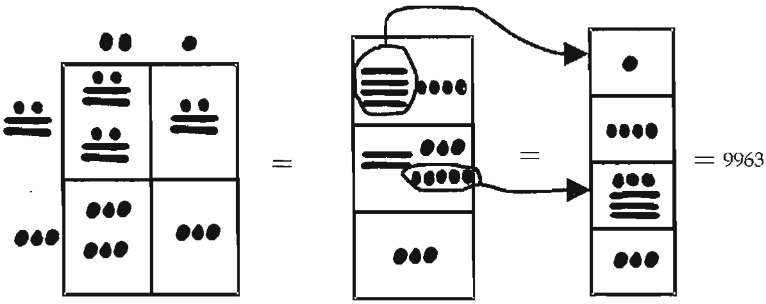
Sean A y B



EJEMPLO 3

Sean A y B



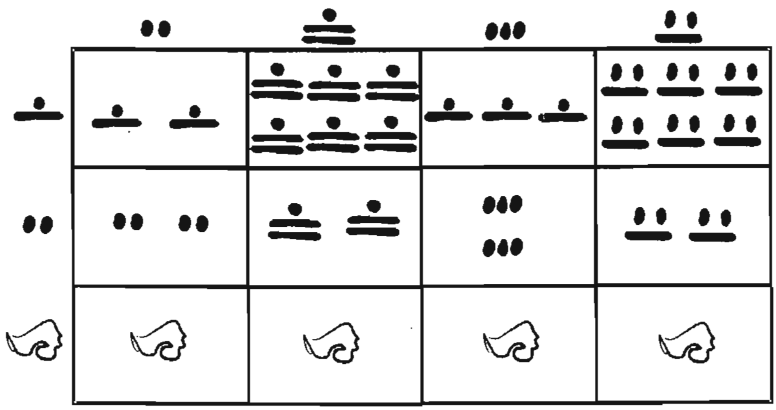


EJEMPLO 4

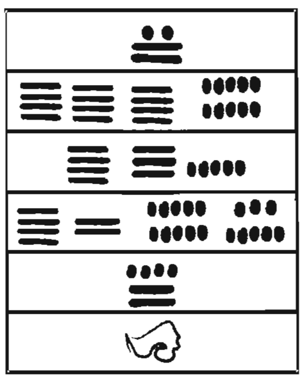
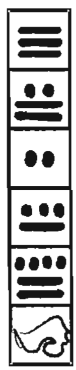
Sean A y B

A =  = 2440

B =  = 20467



=

=  =  = 49 939 480

DIVISIÓN

La propuesta de Sánchez para la división es más similar al proceso que hacemos en el sistema decimal que el que propone posteriormente Calderón, ninguno de los dos hace mención de una prueba o justificación de la propuesta dada; sin embargo Calderón asume clara la justificación del algoritmo que plantea partiendo del hecho de que es evidentemente un proceso inverso al de la multiplicación, Magaña en este punto toma el mismo enfoque que Calderón pero menciona y utiliza las potencias negativas de **20** para extraer fracciones vigesimales en la división. Calderón sólamente menciona que es posible hacerlo simplemente prosiguiendo la operación de división, pero no muestra ningún ejemplo. Sin embargo, Sánchez es el primero en mencionar la posibilidad de utilizar el punto vigesimal en el sistema maya.

Aquí retomamos el enfoque que rescatan Calderón y Magaña y partimos del hecho de que es un proceso inverso al de la multiplicación.

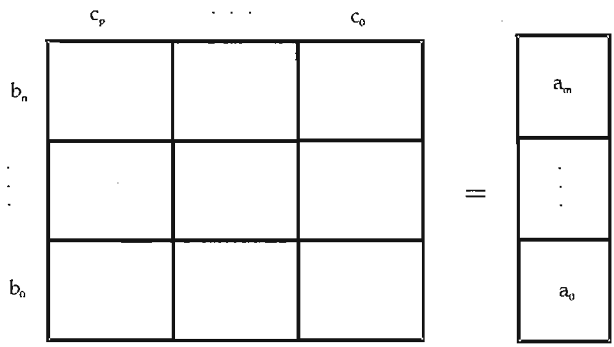
Por ello, el proceso de la división se efectuará de manera recíproca al de la multiplicación por ser estas dos operaciones también recíprocas como se acaba de mencionar; para justificar este algoritmo observaremos cómo hacer los pasos de regreso de la multiplicación.

Sean **A, B, C** $\in \mathbb{N}$, números mayas y sean **m, n, p** $\in \mathbb{N}$, los niveles superiores de **A, B** y **C** respectivamente, es decir,

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a_m \\ \hline \vdots \\ \hline a_0 \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|} \hline b_n \\ \hline \vdots \\ \hline b_0 \\ \hline \end{array} \qquad C = \begin{array}{|c|} \hline c_p \\ \hline \vdots \\ \hline c_0 \\ \hline \end{array}$$

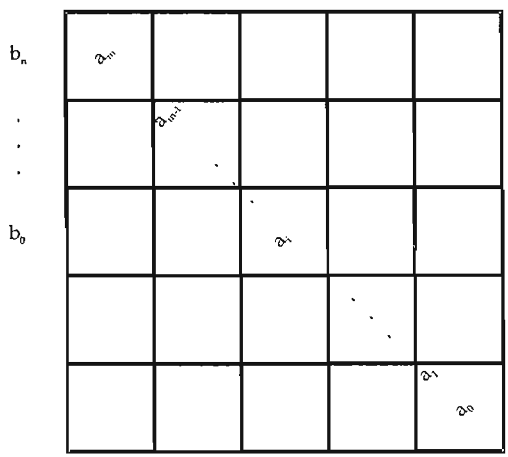
Donde

$$BC = A$$



Es decir, que **A** es el resultado final de la multiplicación **BC**. Lo que significa que **A** escrito formalmente tiene **m** niveles, y como se vio anteriormente, puede ocurrir que **A** no coincida de manera exacta con la diagonal del rectángulo de donde se obtuvo.

Así, para iniciar el proceso de la división de **A** ÷ **B** lo primero a realizar será colocar **B** afuera del arreglo rectangular, del lado izquierdo y de abajo hacia arriba. Y **A** se coloca dentro de arreglo rectangular en sobre la diagonal como se muestra en la figura, extendiéndose hacia abajo cuanto sea necesario.



Cada valor a_i, $i = 0, \ldots, m$, de **A** puede desplazarse ubicándolo dentro de cualquier casilla a lo largo de la diagonal que preserva su potencia de base **20**, pero puede también partirse ubicando cada parte dentro de cualquier casilla de esa misma diagonal de modo que la suma de todas las partes en que a_i ha quedado partido es igual al valor inicial a_i.

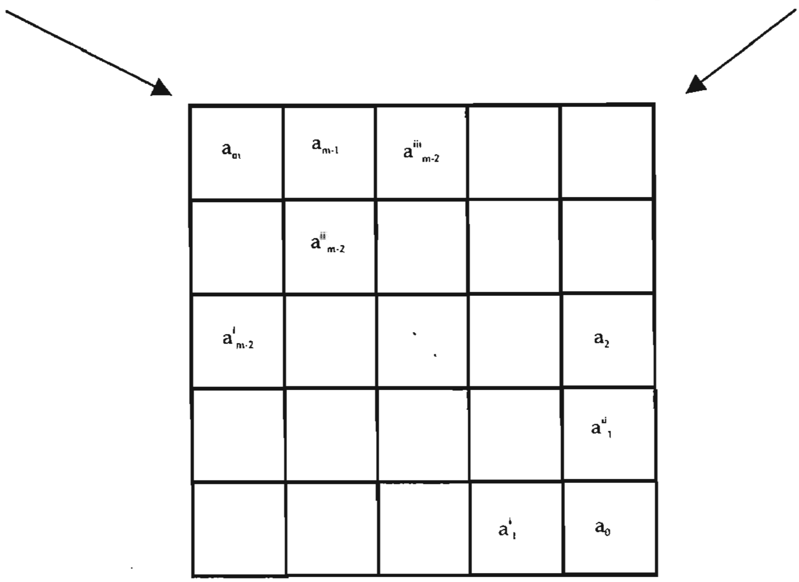
Todo valor a_i, $i = 0, \ldots, m$, puede desplazarse o partirse de la forma que se muestra en el siguiente esquema donde algunos valores se han movido sobre la diagonal sin modificar su valor y otros han sido partidos; cabe señalar que aún cuando las dimensiones del arreglo rectangular quedan determinadas desde el inicio por el tamaño de **A** y de **B**, siempre es posible extender el arreglo rectangular, en renglones o columnas, si el algoritmo así lo requiere.

En la figura siguiente se muestran los valores de **A** distribuidos sobre la diagonal donde algunos de ellos se han desplazado en un solo bloque, mientras que otros se han partido en diferentes partes y desplazado sobre la diagonal que preserva su exponente de base **20**. Cuando algún a_i ha sido partido en **r** partes, este a_i es la suma de todas sus partes.

Cabe señalar que la diagonal sobre la que el valor de **A** se coloca al inicio del proceso, es otra que las diagonales sobre las que se desplazan los distintos a_i, $i = 0, \ldots, m$, como se muestra en la figura.

Sentido de la diagonal de **A**

Sentido de las diagonales de los valores en que a_i o sus partes se desplazan



Los valores de los superíndices indican las partes en que ha sido dividido un valor a_i.

Esta posibilidad de mover cada a_i, completo o por partes, es una propiedad importante que se utilizará tanto en la forma de colocar al número **A** dentro del arreglo rectangular para iniciar la aplicación del algoritmo, como también se usará reiteradamente en la aplicación de los siguientes pasos del proceso de la división aquí descrito.

El primer paso para iniciar la división **A** ÷ **B** será colocar los números **A** y **B** en el arreglo rectangular de la siguiente manera, que llamaremos formación en L, por la forma que toma **A**.

b_n	a_m			
$\vdots$	$\vdots$			
b_0	a_{m-n-1}	. . .	a_1	a_0

El siguiente paso será empezar a buscar los valores c_j, $j = 0, \ldots, p$, del resultado o cociente C de la división; iniciaremos por calcular el valor c_p, es decir, el valor que se ubicará sobre la columna en el extremo izquierdo del arreglo rectangular.

Sea c_p el mayor número natural tal que $b_n c_p \leq a_m$

Este valor se anota sobre la columna izquierda del arreglo rectangular, afuera del mismo, y con este c_p fijo se verifican todos los niveles de la columna abajo de él con **B**.

Es decir:

Para el nivel de b_n tendremos las siguientes posibilidades:

Primero analizaremos cuando $b_n c_p < a_m$.

Si $b_n c_p < a_m$, habrá un primer residuo $x_{1,1}$ que se bajará multiplicado por 20 al nivel inferior y se sumará a a_{m-1}.

Visto lo anterior en un diagrama sobre el arreglo rectangular, tendremos:

	c_p		
b_n	$b_n c_p$		
b_{n-1}	$a_{m-1} + 20x_{1,1}$		
$\vdots$	$\vdots$		
b_0	a_{m-n-1}	. . .	a_0

En una segunda posibilidad, tenemos que, $\mathbf{b_n c_p = a_m}$; de tal modo, no habrá residuo y no habrá nada que bajar, quedando del modo siguiente.

	c_p		
b_n	$b_n c_p$		
b_{n-1}	a_{m-1}		
$\vdots$	$\vdots$		
b_0	a_{m-n-1}	. . .	a_0

Para el nivel de $\mathbf{b_{n-1}}$ tendremos las siguientes posibilidades:

Si $\mathbf{b_{n-1}c_p < a_{m-1}+20x_{1,1}}$, habrá un residuo $\mathbf{x_{1,2}}$, que se partirá en $\mathbf{x^{i}_{1,2}}$ y $\mathbf{x^{ii}_{1,2}}$, si fuera necesario, de modo que $\mathbf{x^{i}_{1,2} + x^{ii}_{1,2} = x_{1,2}}$. Esta partición dependerá de la cantidad que haya que bajar multiplicada por **20** al nivel inmediato - que será el valor de $\mathbf{x^{i}_{1,2}}$ - para verificar la multiplicación con $\mathbf{c_p}$ en ese nivel; la parte que no sea necesario bajar - que será el valor de $\mathbf{x^{ii}_{1,2}}$ - se desplazará a la derecha sobre su diagonal a la columna siguiente, no se multiplica por **20**.

Visto en un esquema, tenemos:

	c_p		
b_n	b_nc_p		
b_{n-1}	$a_{m-1} + 20x_{1,1}$		
b_{n-2}	a_{m-2}		
$\vdots$	$\vdots$		
b_0	a_{m-n-2}	. . .	a_0

$\Rightarrow$

	c_p		
b_n	b_nc_p		
b_{n-1}	$b_{n-1}c_p + x_{1,2}$		
b_{n-2}	a_{m-2}		
$\vdots$	$\vdots$		
b_0	a_{m-n-2}	. . .	a_0

Y finalmente:

	c_p		
b_n	b_nc_p	$x''_{1,2}$	
b_{n-1}	$b_{n-1}c_p$		
$\Rightarrow$ b_{n-2}	$a_{m-2} + 20x'_{1,2}$		
$\vdots$	$\vdots$		
b_0	a_{m-n-2}	. . .	a_0

Otra posibilidad es que $\mathbf{b_{n-1}c_p > a_{m-1}+20x_{1,1}}$.

Si $\mathbf{b_{n-1}c_p > a_{m-1}+20x_{1,1}}$, se reduce el valor $\mathbf{c_p}$ hasta que $\mathbf{b_{n-1}c_p \leq a_{m-1}+20x_{1,1}}$.

La última posibilidad, si $\mathbf{b_{n-1}c_p = a_{m-1}+20x_{1,1}}$ no hay residuo.

Para los niveles desde $\mathbf{b_{n-2}}$ hasta $\mathbf{b_1}$ se hará lo mismo que en el nivel de $\mathbf{b_{n-1}}$, pero recordando que ahora tenemos que tomar al x^i correspondiente que se baja multiplicado por 20, por ejemplo, buscaremos que $\mathbf{b_{n-2}c_p \leq a_{m-2}+20x^i_{1,2}}$, en el caso del nivel $\mathbf{b_{n-2}}$.

Para el nivel de $\mathbf{b_0}$ tendremos las siguientes posibilidades:

Si $\mathbf{b_0c_p} < \mathbf{a_{m-n-1}+20x^i_{1,n}}$, habrá un residuo $\mathbf{x_{1,n+1}}$ que se desplazará sobre su diagonal a la columna de la derecha, no se parte.

	c_p			
b_n	b_nc_p	$x^{ii}_{1,2}$		
b_{n-1}	$b_{n-1}c_p$	$x^{ii}_{1,3}$		
b_{n-2}	$b_{m-2}c_p$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
b_1	b_1c_p	$x_{1,n+1}$		
b_0	b_0c_p	a_{m-n-2}	. . .	a_0

Si $\mathbf{b_0c_p} = \mathbf{a_{m-n-1}+20x^i_{1,n}}$, no habrá residuo, no habrá nada que desplazar.

	c_p			
b_n	b_nc_p	$x^{ii}_{1,2}$		
b_{n-1}	$b_{n-1}c_p$	$x^{ii}_{1,3}$		
b_{n-2}	$b_{m-2}c_p$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
b_1	b_1c_p			
b_0	b_0c_p	a_{m-n-2}	. . .	a_0

Si $\mathbf{b_0c_p} > \mathbf{a_{m-n-1}+20x^i_{1,n}}$, se reduce el valor de $\mathbf{c_p}$ hasta que $\mathbf{b_0c_p} \leq \mathbf{a_{m-n-1}+20x^i_{1,n}}$.

Así se cumple la multiplicación con $\mathbf{c_p}$ para **B** y la columna de **A** que ocupa el lado derecho del arreglo rectangular.

Este procedimiento se aplica ahora en la columna de la derecha del arreglo, es decir, buscando un valor $\mathbf{c_{p-1}}$ y repitiendo los pasos anteriores en esta columna. De este modo se continuará buscando los restantes valores del cociente hasta obtener el valor de c_0 y completar así el resultado final, C.

En el caso en el que la división tenga un residuo $R > 0$, este residuo será la cantidad obtenida en la columna de la derecha de c_0, recordando que en dicha columna, la segunda casilla de abajo hacia arriba es la correspondiente a la potencia de 20^0, es decir, las unidades. El residuo también debe tener en cada casilla un valor estrictamente menor que **20**, por lo tanto, se verifica cada uno de sus niveles de abajo hacia arriba como se describió en los capítulos anteriores.

Aunque en esta parte se tratan las divisiones en **N**, para separar la parte del cociente de la parte del residuo se introducirá el uso del asterisco (⋆) en el proceso, de tal modo, lo que aparezca a la derecha del asterisco dentro del arreglo rectangular será lo que corresponda al residuo, que en algunos ejemplos al no quedar escrito de manera formal necesitará que se aumenten casillas hacia arriba en la columna que ocupa, para escribirlo formalmente.

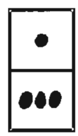
Y una vez obtenido C lo anotamos en forma vertical.

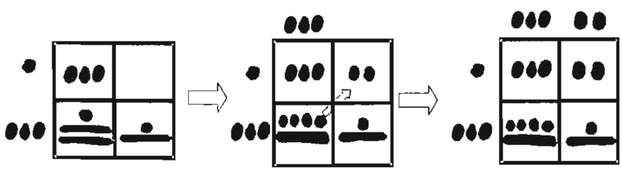
EJEMPLOS

EJEMPLO 1

Sean A y B

A =  = 1426

B =  = 23

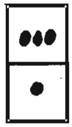


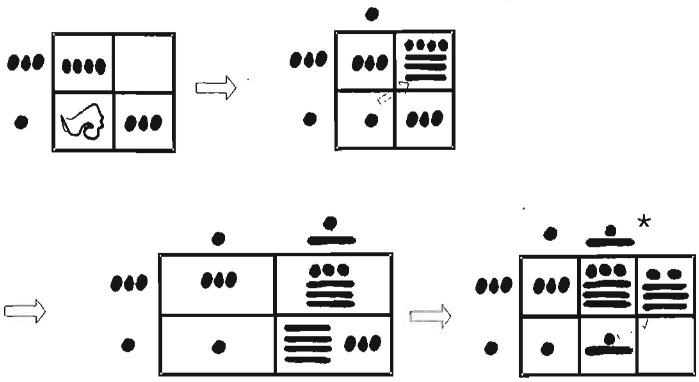
C =  = 62

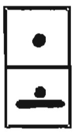
R =  = 0

EJEMPLO 2
Sean A y B

A =  = 1603

B =  = 61



C =  = 26

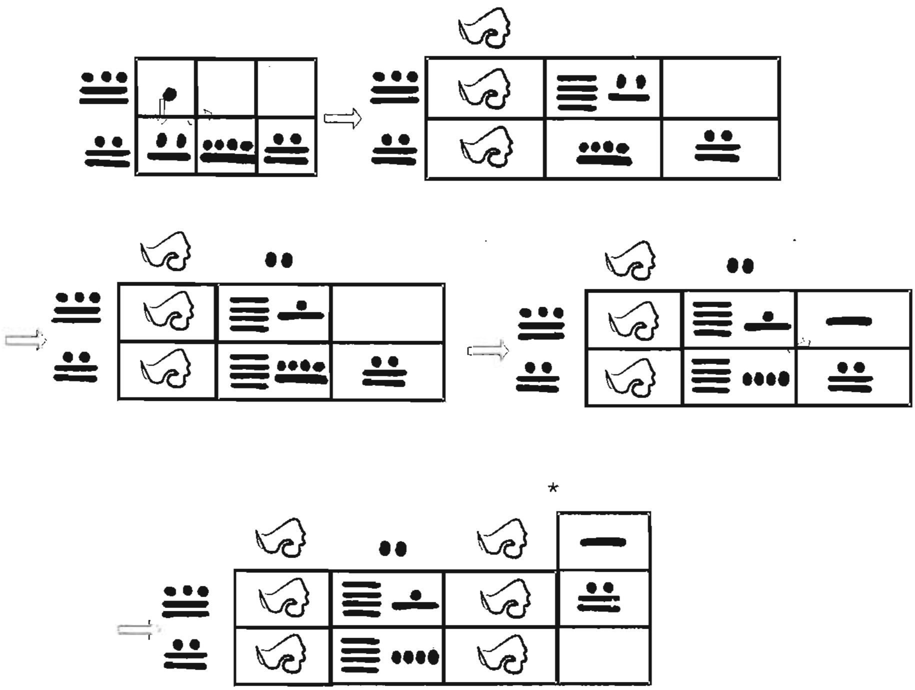
R =  = 17

En este ejemplo hubo un residuo mayor que cero.

EJEMPLO 3
Sean A y B

A =  = 10992

B =  = 272



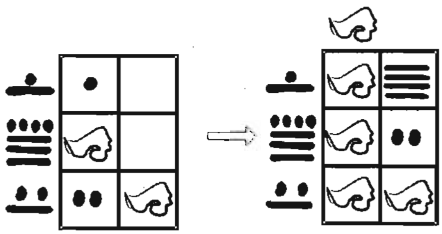
C =  = 40

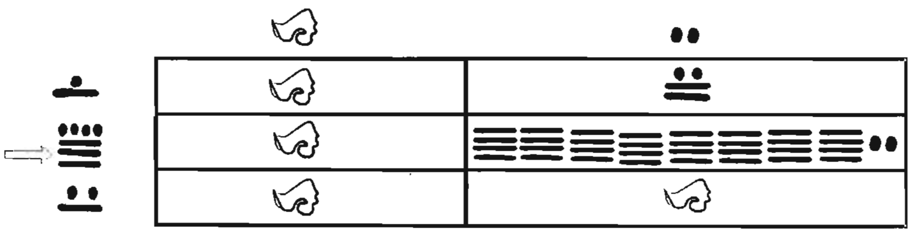
R =  = 112

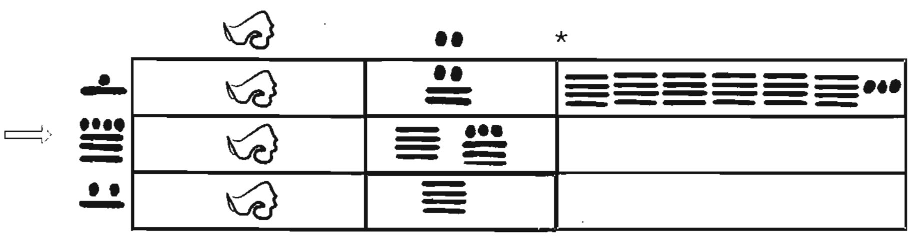
EJEMPLO 4
Sean A y B

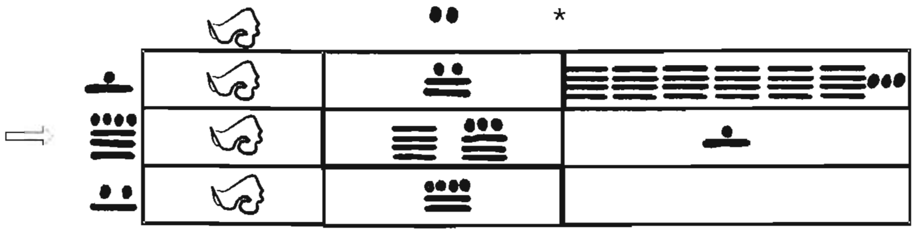
A =  = 8040

B =  = 2787









C = 

R =  = 2466

RAÍZ CUADRADA

Sánchez no aborda el algoritmo para la raíz cuadrada, es Calderón quien lo describe sin hacer mayor mención acerca de una justificación. Magaña en [12], toma el enfoque que sigue Calderón de considerar la raíz cuadrada como un caso especial de la división, en donde el divisor y el conciente son desconocidos, pero sabemos que deben ser iguales entre sí.

En este trabajo seguimos el mismo enfoque que Calderón y Magaña, así el procedimiento para la obtención de la raíz cuadrada de un número natural guarda alguna semejanza con el de la división ya que ambos son de alguna manera un regreso del proceso de la multiplicación; la primera diferencia es la utilización de un arreglo cuadrado, y otra, es que no se inicia, como en la división, a partir de un factor al exterior del arreglo, pues es éste el número que se desea encontrar, el cual, una vez obtenido, quedará anotado tanto del lado izquierdo como en la parte superior del arreglo cuadrado, de manera análoga a la forma en que quedan anotados los factores en el proceso de la división; teniendo así, dentro del arreglo cuadrado, el resultado de la multiplicación de un número por sí mismo.

De acuerdo a lo anterior, dentro del arreglo obtendremos una simetría respecto a la diagonal, simetría que solamente se romperá en la anotación de residuos.

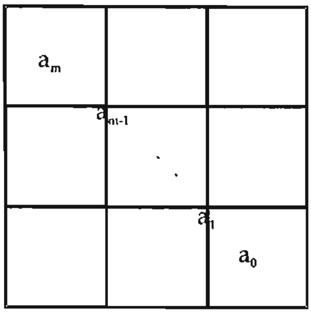
Sea **A** $\in \mathbb{N}$, un número maya, y sea **m** $\in \mathbb{N}$, el valor del nivel superior de **A** .

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a_m \\ \hline \vdots \\ \hline a_1 \\ \hline a_0 \\ \hline \end{array}$$

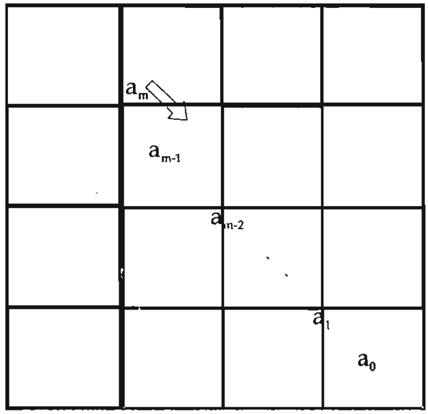
En la primera parte del proceso colocaremos **A** dentro del arreglo cuadrado sobre la diagonal de manera que las unidades, a_0, queden anotadas dentro de un cuadro, no en la intersección de las líneas del arreglo.

Si **m** es par, al hacer lo anterior también a_m, quedará dentro de un cuadro del arreglo, de lo contrario, es decir, con **m** impar, a_m quedará sobre las líneas del cuadrado; si esto último ocurre hay que multiplicar a_m por 20 y bajarlo al nivel siguiente de la diagonal sumado con a_{m-1}, y de esta forma **A** queda anotado sobre la diagonal del arreglo con su primera y última componentes dentro de un cuadrado, que es la primera condición para aplicar el algoritmo de la raíz cuadrada.

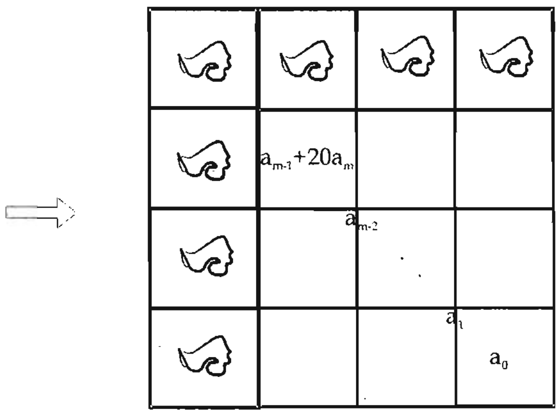
Con **m** par



Con **m** impar



Con **m** impar y después de bajar $\mathbf{a_m}$ al nivel inmediato, tenemos:



Después de que esto se ha realizado queda determinado el tamaño del arreglo cuadrado.

En seguida empezaremos a calcular los valores $\mathbf{b_j}$, $\mathbf{j = 0, \ldots, n}$, de **B**, con $\mathbf{B} \in \mathbb{N}$, número maya. De forma similar que en el proceso de la división, iniciaremos obteniendo $\mathbf{b_n}$, pero en este procedimiento $\mathbf{b_n}$ quedará colocado tanto a la izquierda como arriba del arreglo cuadrado.

Supondremos que **m** es par y que **A** ya está colocado dentro del arreglo cuadrado sobre su diagonal.

Tomaremos $\mathbf{b_n}$, de modo que sea el mayor número natural tal que $\mathbf{b_n b_n \le a_m}$, y de acuerdo con esta condición pueden ocurrir dos cosas dadas por la desigualdad.

Si $\mathbf{b_n b_n < a_m}$, habrá un primer residuo $\mathbf{x_1}$, que se multiplicará por **20** y se bajará al nivel inmediato de la diagonal inicial, quedando en dicho nivel $\mathbf{a_{m-1} + 20x_1}$.

Si $\mathbf{b_n b_n = a_m}$, no habrá nada que bajar.

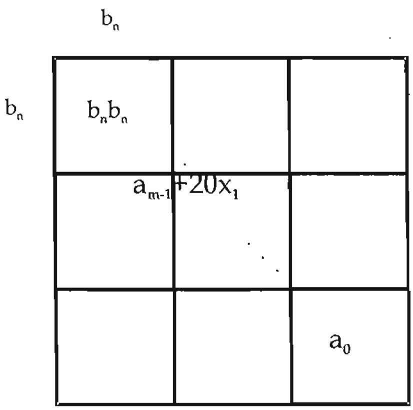
Con este cálculo inicial de $\mathbf{b_n}$ formaremos el primer cuadrado simétrico del proceso de obtención de la raíz.

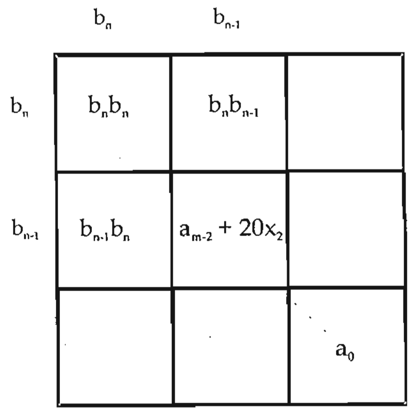
Con $\mathbf{b_n}$ fijo, procedemos a calcular $\mathbf{b_{n-1}}$, de manera que $\mathbf{a_{m-1}+20x_1}$ pueda repartirse sobre su diagonal verificando que $\mathbf{b_{n-1}b_n+b_nb_{n-1} \le a_{m-1}+20x_1}$.

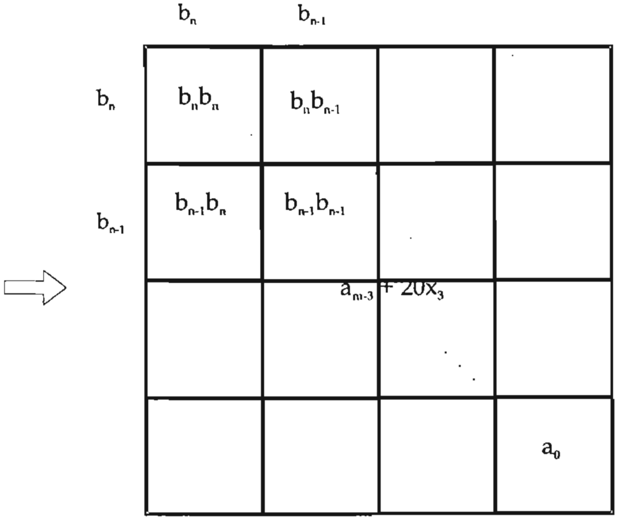
Si $\mathbf{b_{n-1}b_n+b_nb_{n-1} < a_{m-1}+20x_1}$, habrá un nuevo residuo $\mathbf{x_2}$, con el cual también debe verificarse que $\mathbf{b_{n-1}b_{n-1} \le a_{m-2}+20x_2}$.

Si $\mathbf{b_{n-1}b_n+b_nb_{n-1} = a_{m-1}+20x_1}$, solamente debe cumplirse $\mathbf{b_{n-1}b_{n-1} \le a_{m-2}}$.

Si alguna de las multiplicaciones que aparecen no se cumple para los valores hasta aquí asignados para **B**, se reduce el valor de $\mathbf{b_n}$ o bien el del $\mathbf{b_{n-1}}$, según el caso.







De este modo se continúan calculando los valores restantes de **B** hasta llegar a $\mathbf{b_0}$, siempre verificando que el valor sobre la diagonal pueda repartirse y alcance para las multiplicaciones que se van obteniendo, y cada vez que sea necesario en el desarrollo de este proceso se podrá reducir cualquiera de los valores $\mathbf{b_j}$, $\mathbf{j = 0,\ldots,n}$, para que se cumplan las multiplicaciones que van apareciendo.

Cuando el valor de **A** no tiene raíz exacta en enteros, obtendremos un residuo final $\mathbf{R} \in \mathbb{N}$, con $\mathbf{R > 0}$, que quedará anotado a la derecha del cuadrado simétrico obtenido, residuo que podría necesitar reescribirse siguiendo las reglas de formación de números mayas, por lo que habría que revisar la conformación de dicho número.

Finalmente el resultado es el número que queda anotado en la parte superior externa una vez, y otra vez, en la parte externa izquierda del arreglo cuadrado; para concluir se anota en forma vertical.

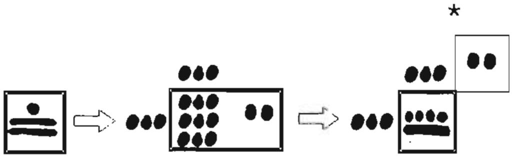
Como se ve el procedimiento de obtención de la raíz cuadrada de un número natural nos remite a un proceso inverso de la multiplicación.

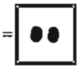
EJEMPLOS

EJEMPLO 1

Sea A

A =  = 11

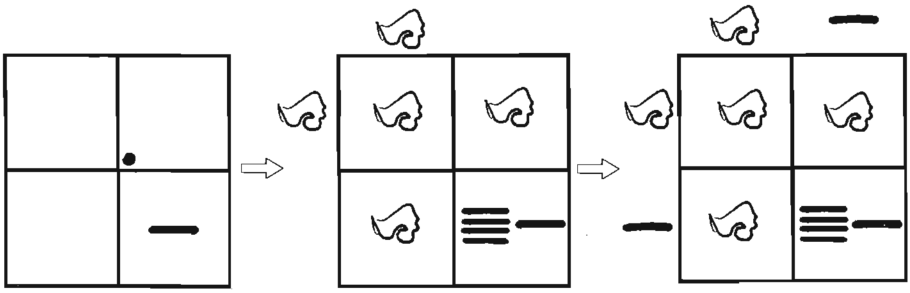


; B =  = 3 ; R =  = 2

EJEMPLO 2

Sea A

A =  = 25

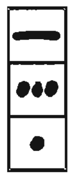


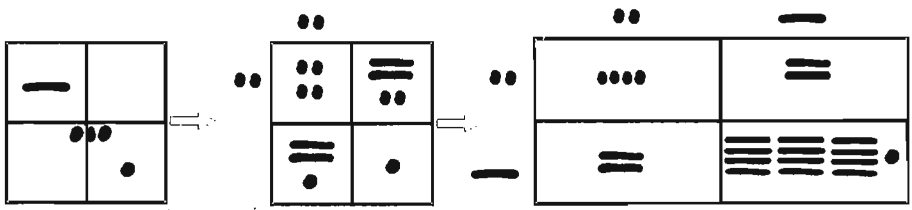
B =  = 5

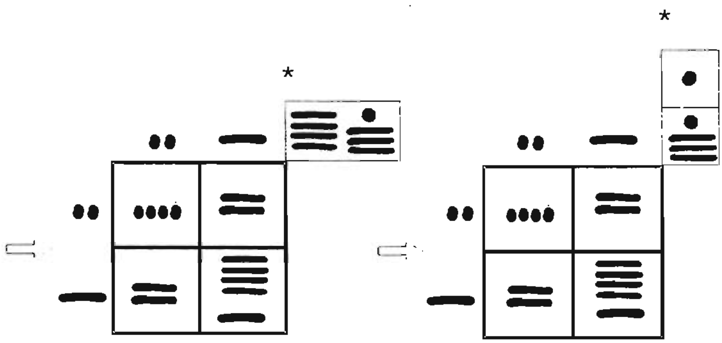
R =  = 0

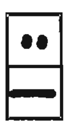
EJEMPLO 3

Sea A

A =  = 2061



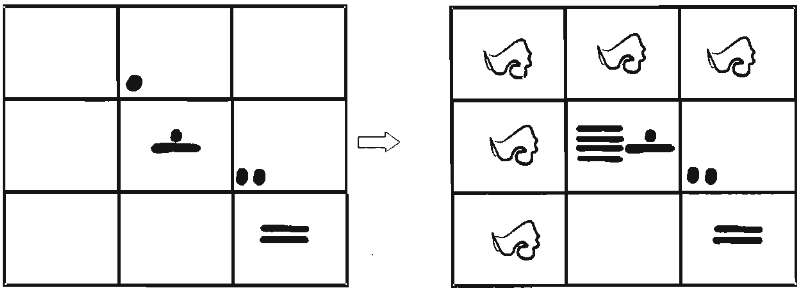


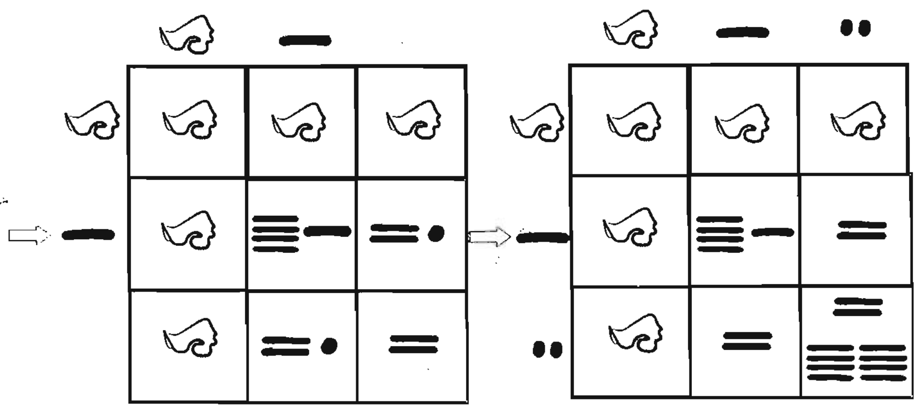
B =  = 45

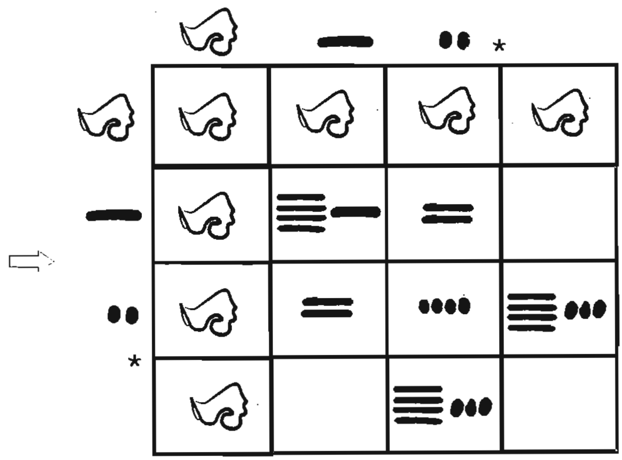
R =  = 36

EJEMPLO 4
Sea A

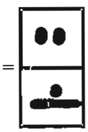
A =  = 10 450







B =  =102 ;

R =  = 46

SUMA CON FRACCIONES VIGESIMALES

Los procesos para las operaciones con números vigesimales, formas racionales escritos en expansión finita de potencias negativas de la base 20, no se trataron en Sánchez ni en Calderón aunque en Magaña se menciona explícitamente en la división. Calderón los mencionan como una consecuencia natural de los algoritmos para números naturales pues siguen básicamente los mismos pasos que los procedimientos descritos para cada operación aritmética de los capítulos anteriores.

La suma vigesimal se efectuará como se describió para $\mathbb{N}$, pero como primera parte de este proceso los números se alinean por niveles de acuerdo al punto, en este caso asterisco vigesimal, quedando las cantidades a sumar una frente a la otra, de manera que coincidan, tanto los correspondientes niveles por potencias de la base 20, los exponentes positivos y los negativos, así como los asteriscos; si un sumando tiene más niveles que el otro completaremos con ceros.

Sean **A**, **B** $\in \mathbb{Q}$, dos números mayas, escritos en una expansión vigesimal finita, y sean m, n, p, $q \in \mathbb{N}$, siendo m y n los niveles superiores y $-p$ y $-q$ los niveles inferiores de **A** y **B** respectivamente, es decir

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a_m \\ \hline \vdots \\ \hline a_0 \\ \hline \vdots \\ \hline a_{-p} \\ \hline \end{array} \qquad\qquad B = \begin{array}{|c|} \hline b_n \\ \hline \vdots \\ \hline b_0 \\ \hline \vdots \\ \hline b_{-q} \\ \hline \end{array}$$

La suma **A** + **B** se efectúa como se expuso en el capítulo 4, obteniendo como resultado un número $C \in \mathbb{Q}$, escrito en expansión vigesimal finita, que tiene en cada una de sus entradas un valor menor que 20.

EJEMPLO

Sean A y B

A = *  = 19.39

B = *  = 66.65

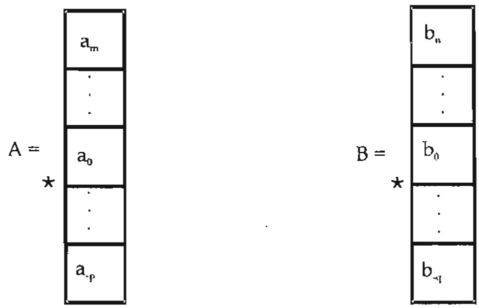
*  + *  = *  = *  = 86.04

RESTA CON FRACCIONES VIGESIMALES

La resta con números racionales en expansión vigesimal finita, se hará, en términos generales como se describió en la parte de resta con números naturales pero con la aplicación del paso inicial descrito en el capítulo anterior, es decir, acomodando las cantidades por niveles.

También aquí consideraremos únicamente restas **A - B**, con **A** $\geq$ **B**.

Sean **A, B** $\in \mathbb{Q}$, números mayas en expansión vigesimal finita, y sean **m, n, p, q** $\in \mathbb{N}$, con **m** y **n** como los valores de los niveles superiores y **-p** y **-q** los valores de los niveles inferiores de **A** y **B** respectivamente.



Primero anotamos **A** frente a **B** por niveles, haciendo coincidir los asteriscos uno frente al otro, después verificamos que $a_i \geq b_i$, para todo **i** = **-p, ... m**, aplicando el acarreo como en el caso de los naturales donde haga falta al no cumplirse la desigualdad, y, finalmente restamos siguiendo los pasos del procedimiento para enteros visto anteriormente.

EJEMPLO

Sean A y B

A = *  = 12.4025 B = *  = 8.1

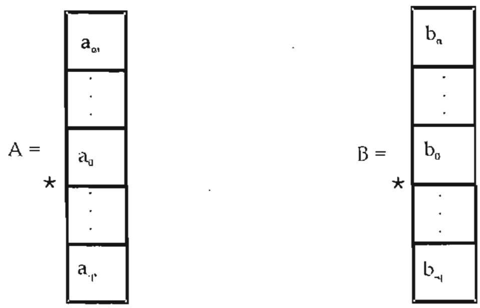
*  – *  = *  = 4.3025

MULTIPLICACIÓN CON FRACCIONES VIGESIMALES

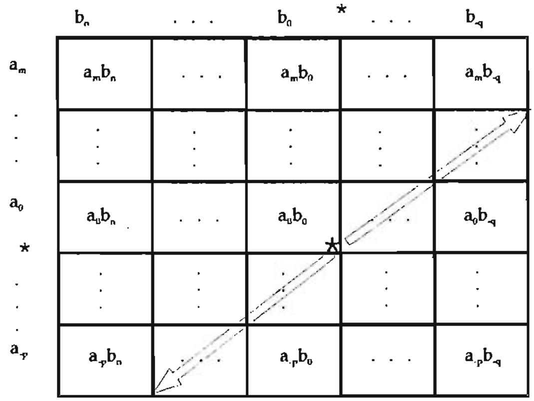
La multiplicación de dos números mayas escritos con fracciones vigesimales en una expansión finita, seguirá básicamente el proceso descrito para números naturales, pero ubicando la colocación del asterisco tanto en la formación del arreglo rectangular como en la colocación del mismo en el resultado final.

También para la colocación del asterisco en el resultado final se seguirá el orden de las diagonales que se mostró en el proceso con números naturales, de este modo, al llevar cada diagonal a su nivel correspondiente en el resultado, también se trasladará el asterisco, quedando así en el lugar que separa las potencias positivas de las negativas en la parte final.

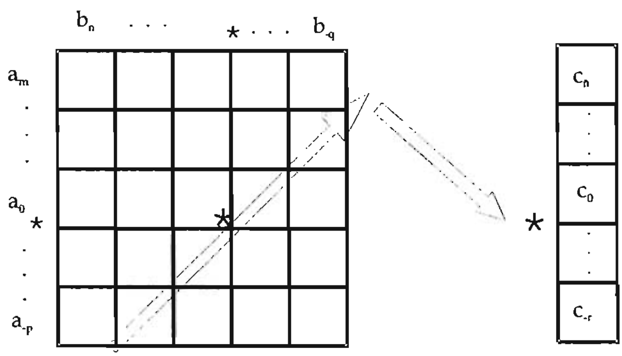
Sean **A, B** $\in$ **Q**, dos números mayas, escritos en expansión vigesimal finita, y sean **m**, **n**, **p**, **q** $\in$ **N**, con **m** y **n** los niveles superiores y **−p** y **−q** los niveles inferiores de **A** y **B** respectivamente.



En la figura siguiente se muestra la multiplicación **AB** dentro del arreglo rectangular recordando que cada a_ib_j, corresponde a una figura $c_{i,j}$ en el proceso; la flecha indica a partir de dónde los exponentes de la base **20** son negativos.

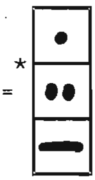
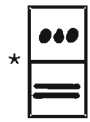


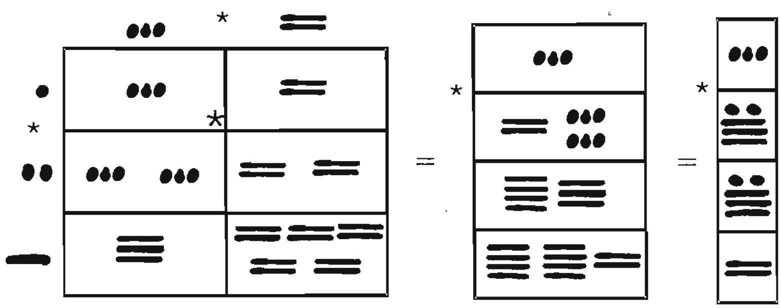
Siguiendo la figura, tenemos que, de la diagonal marcada con la flecha y hacia arriba aparecen los exponentes desde cero de forma creciente, y de la flecha hacia abajo aparecen los exponentes negativos desde -1 de forma decreciente. Así, al colocar el asterisco en el resultado final, después de la suma de los valores de la diagonal marcada en la figura con la flecha, también los niveles bajo el asterisco conservan su correspondiente potencia de la base 20.



EJEMPLO

Sean A y B

A =  = 1.1125 B =  = 3.5

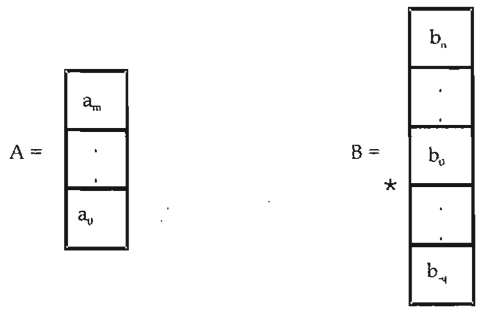
 = 3.89375

DIVISIÓN CON FRACCIONES VIGESIMALES

El proceso para efectuar la división de dos números **A, B** $\in$ **Q**, números mayas en expansión vigesimal finita, **B** $\div$ **A** se dividirá en cuatro casos. Tanto Sánchez, Calderón y Magaña, hacen alusión a las fracciones vigesimales en la división. Sánchez es el primero en proponer la posibilidad de utilizar el punto vigesimal para fracciones vigesimales en el sistema de numeración maya.

PRIMER CASO

Con **A** $\leq$ **B**, **A** $\in \mathbb{N}$ y **B** $\in$ **Q**, número maya en expansión vigesimal finita; con **m, n, q** $\in \mathbb{N}$, siendo **m** y **n** los niveles superiores de **A** y **B** respectivamente, y **–q** el nivel inferior de **B**; si **A** $\leq$ **B**, entonces **m** $\leq$ **n**.



Utilizando el mismo arreglo rectangular y forma de acomodar ambos números, **A** afuera y **B** adentro del arreglo en forma de "**L**", se procede a subir de manera vertical el asterisco desde donde se ubicó una vez colocado **B**, hasta la parte superior externa del arreglo rectangular, que será su lugar en el resultado final, **C**, con **C** $\in$ **Q**, número maya en expansión vigesimal finita, de la forma en la que se muestra en la figura.

Al colocar **B** dentro del arreglo queda establecido el lugar del asterisco en el resultado final.

$\star$

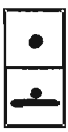
a_m	b_n				
$\vdots$	$\vdots$				
a_0	b_{n-m+1}	. . .	b_0	. . .	b_{-q}

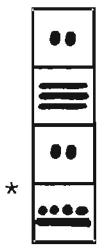
Una vez hecho esto se procede de la misma manera que se describió en el caso de números naturales, pudiendo continuar el proceso tanto como se quiera, ya sea con los residuos parciales que se van obteniendo o aumentando ceros dentro del arreglo rectangular.

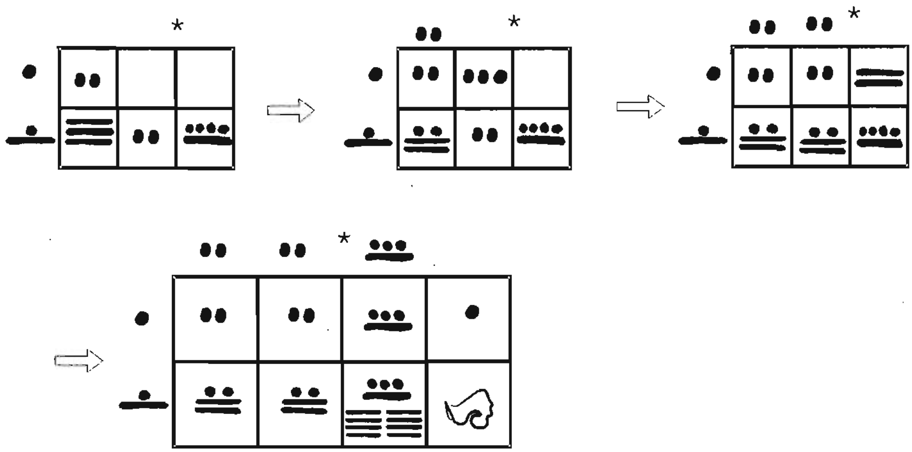
En el ejemplo siguiente solamente se calculó el resultado de la división hasta el primer valor a la derecha del asterisco, es decir, hasta el nivel correspondiente a **20^{-1}**, como se puede ver el proceso podría continuar con la columna que se ha completado en la parte derecha del último esquema al agregar un cero en la parte inferior, si se quiere obtener un resultado más preciso.

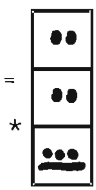
EJEMPLO

Sean A y B

A =  = 26 .

B =  = 1102.45

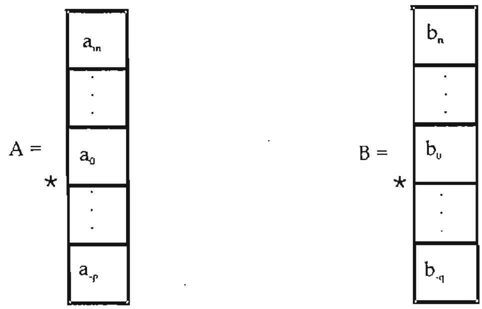


C =  = 42.4

En el ejemplo anterior se obtuvo el resultado hasta el nivel de 20^{-1} de C, pero como se dijo antes, el proceso puede continuarse hasta donde se quiera, en este caso anotando cero en la parte inferior de la columna del extremo derecho del arreglo en el último paso que se muestra, queda completo el arreglo rectangular y el proceso puede continuar.

SEGUNDO CASO

Sean **A** ≤ **B** y **A, B** ∈ **Q**, números mayas en expansión vigesimal finita, con **m, n, p, q** ∈ ℕ, siendo **m** y **n** los niveles superiores y **–p** y **–q** los niveles inferiores de **A** y **B** respectivamente; con m ≤ n.



En este caso tanto **A** como **B** se multiplican por **20^p**, con lo cual el asterisco de **A** estaría siendo desplazado hasta el extremo inferior de este número, y el mismo efecto se observa en **B**, donde el asterisco desaparece si **p = q**; el asterisco desaparece pero hay que agregar ceros si **p > q** y el asterisco no desaparece, sólo se desplaza, si **p < q**.

Y en cualquiera de las situaciones anteriores este caso se reduce al caso anterior.

Supondremos que **p < q**, de lo contrario, haremos $b_i = 0$ para todo **i** $= -(q + 1), \ldots, -p$

Arreglo después de multiplicar **A** y **B** por **20^p**.

			*		
a_{m+p}	b_{n+p}				
$\vdots$	$\vdots$				
a_0	$b_{n-m-p-1}$	. . .	b_0	. . .	b_{-q+p}

Cabe aclarar que no siempre quedará el asterisco en **B**, como en el ejemplo siguiente, al ser **p** > **q**, el asterisco en **B** necesitará que se aumente un cero al final de dicha cantidad para poderse recorrer en **B** tantos lugares como se recorrió el asterisco en **A**.

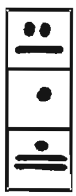
De cualquier manera, al desaparecer el asterisco tanto en **A** como en **B**, el caso se reduce a números enteros, pues **B** > **A**, y si el asterisco sigue apareciendo en **B** una vez que se multiplicó, este caso cae en el caso anterior.

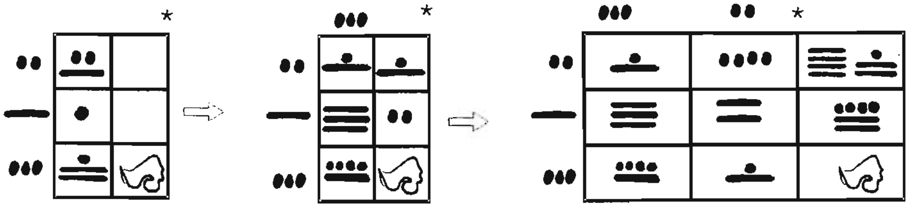
En el ejemplo siguiente se multiplica **A** y **B** por **20²**, quedando sin asterisco tanto **A** como **B**, pero aumentando un cero en **B**. En este ejemplo tampoco se ha calculado una serie más larga en el resultado, así como tampoco se aprecia si hay o no periodicidad en el cociente.

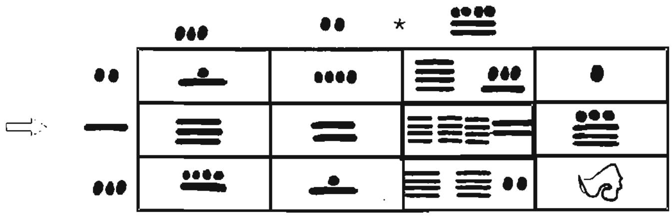
Por razones de espacio se omiten las columnas que se muestran con cociente de cero no significativas después del tercer esquema.

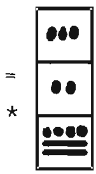
EJEMPLO

Sean A y B

A = *  = 2.2575; B =  * =141.55 $\Rightarrow$ A(20^2) =  B(20^2) = 

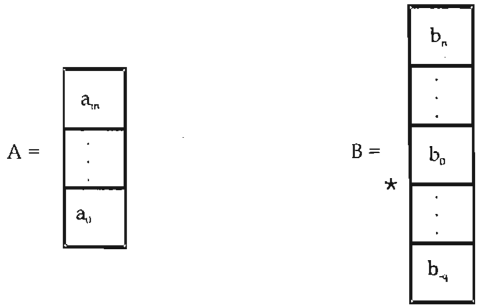




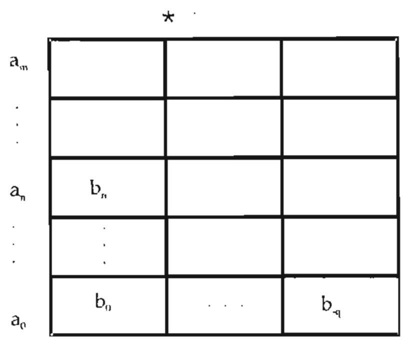
C =  = 62.7

TERCER CASO

Con **A > B** y **A** $\in$**N**, **B** $\in$ **Q**, en expansión vigesimal finita, ambos números mayas; y con **m, n, q** $\in$N, siendo **m** y **n** los niveles superiores de **A** y **B** respectivamente y **-q** el nivel inferior de **B**; en consecuencia **m** $\geq$ **n**.



Primero colocamos **A** fuera del arreglo rectangular igual que en el primer caso, luego colocamos **B** dentro del arreglo en forma de "L", pero como **A > B** y **m ≤ n** colocaremos **B** haciendo coincidir los exponentes de la base **20** por niveles con los de **A**, quedando así el asterisco entre la primera y la segunda casilla del lado izquierdo de C de la forma en que se muestra en la figura.

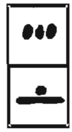


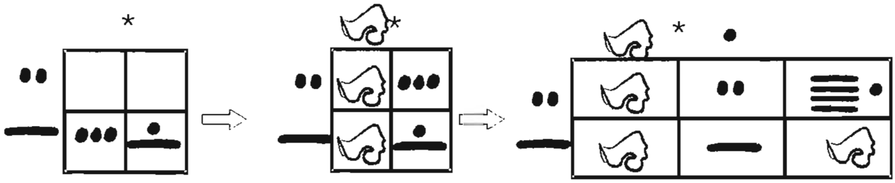
Una vez hecho esto empezamos a aplicar el algoritmo de la división, pero en este caso, al ser **A > B**, obtendremos cero a la izquierda del asterisco en C, es decir, en las unidades. Siguiendo la descripción del procedimiento para la división, se continuarán calculando los valores del resultado hasta obtener las cifras significativas que se deseen.

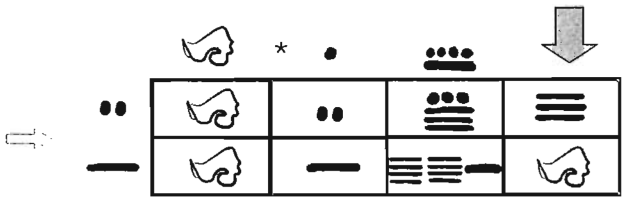
EJEMPLO

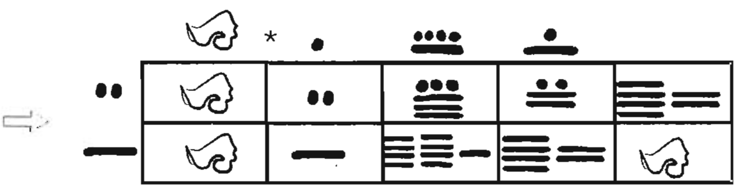
Sean A y B

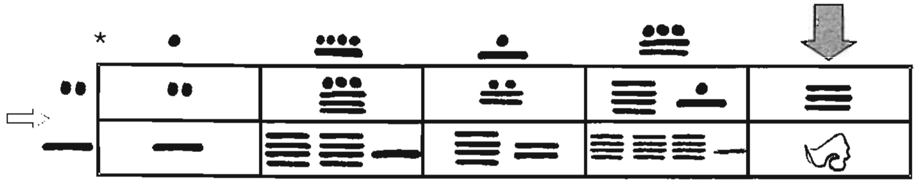
A =  = 45

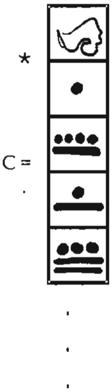
B = *  = 3.3









C =  $= 0.07\overline{3}$

Las flechas verticales indican que la columna se repite de manera idéntica en el proceso, por lo que el resultado se vuelve periódico.

Por razones de espacio se omitió la columna de la izquierda, correspondiente al cero.

Donde los puntos suspensivos indican que el resultado es periódico, después del **13**, aparecerá otra vez el **6** y así sucesivamente, el resultado, usando una correspondencia en nuestro sistema y escrito en forma horizontal sería:

0 . 1, 9, 6, 13, 6, 13, 6, 13, . . .

Cabe aclarar que en sistema maya tiene una secuencia de periodicidad **6, 13** para los números que en decimal tienen periodicidad **3**, y de **13, 6** para aquellos que en el sistema decimal tienen periodicidad de **6**.

CUARTO CASO

Con **A** > **B** y **A, B** ∈ **Q**, números mayas en expansión vigesimal finita, con **m**, **n**, **p** y **q** ∈ℕ; tal que **m** y **n** son los valores de los niveles superiores, y **-p** y **-q**, los valores de los niveles inferiores de **A** y **B** respectivamente.

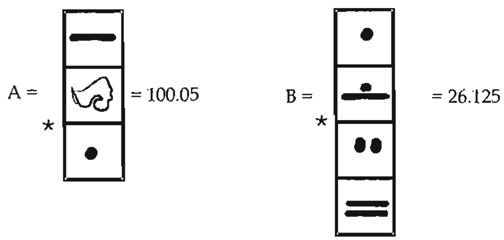
En este caso multiplicamos tanto **A** como **B** por **20^p**, y de este modo queda eliminado el asterisco en **A** reduciéndose al caso anterior.

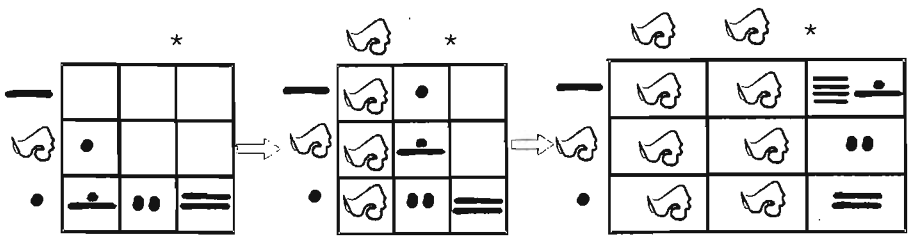
En el ejemplo siguiente se hizo el cálculo únicamente hasta el tercer valor a la derecha del asterisco, es decir, hasta el nivel de 20^{-3}, y hasta tal iteración del procedimiento no se puede apreciar la periodicidad en caso de haberla.

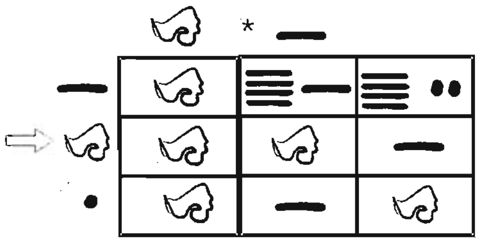
También aquí se han omitido las columnas con cociente de cero no significativas después del tercer esquema, lo cual, como en el ejemplo anterior, no afecta la aplicación del proceso.

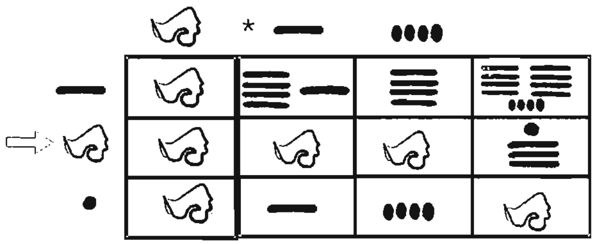
EJEMPLO

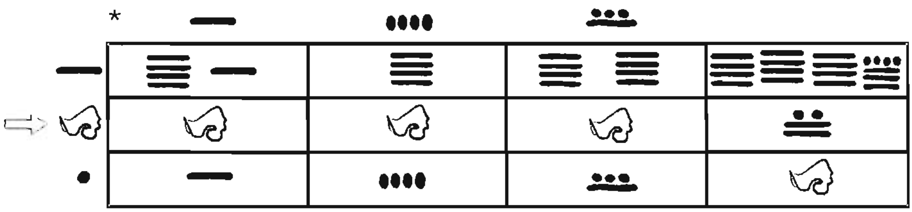
Sean A y B

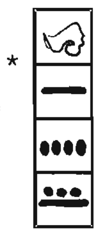










C =  = 0.261

RAÍZ CUADRADA CON FRACCIONES VIGESIMALES

Al igual que para los números naturales primero colocaremos **A** dentro del arreglo cuadrado, de modo que de la parte entera de **A** tanto el primero como el último valor queden anotados dentro de un cuadrado del arreglo; para la aplicación de este procedimiento no importa donde quede anotado el valor inferior de **A**.

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}$, un número maya en expansión vigesimal finita, y sean $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, **m** el valor del nivel superior y **-n** el valor del nivel inferior de **A** respectivamente.

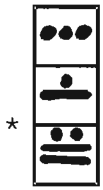
$$A = \begin{array}{r|c|}
\hline
 & a_m \\
\hline
 & \vdots \\
\hline
 & a_0 \\
\hline
* & \vdots \\
\hline
 & a_{-p} \\
\hline
\end{array}$$

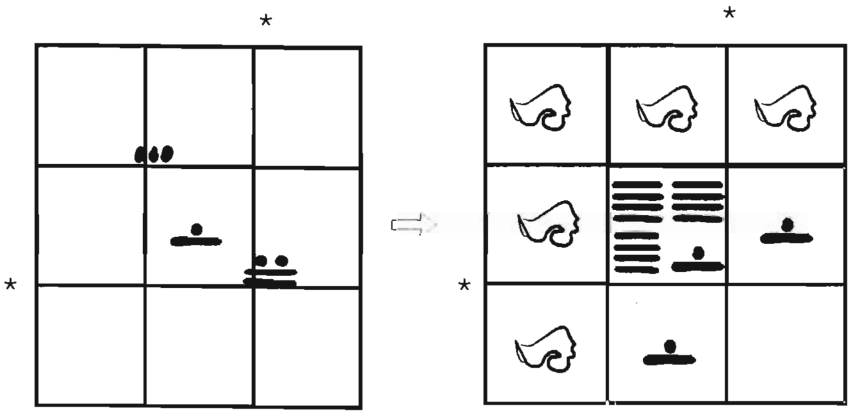
Una vez anotado **A** dentro del arreglo cuadrado, se colocará el asterisco en la posición que tendrá en cada factor en el resultado final, es decir, que anota conforme las líneas del arreglo cuadrangular, sobre la vertical, en la parte superior del arreglo, y sobre la horizontal, en la parte izquierda del arreglo.

Ya colocado el asterisco en la posición que tendrá en el resultado final se procede a aplicar el algoritmo conforme los mismos pasos descritos en el capítulo 8, calculando hasta el valor que se desee después del asterisco.

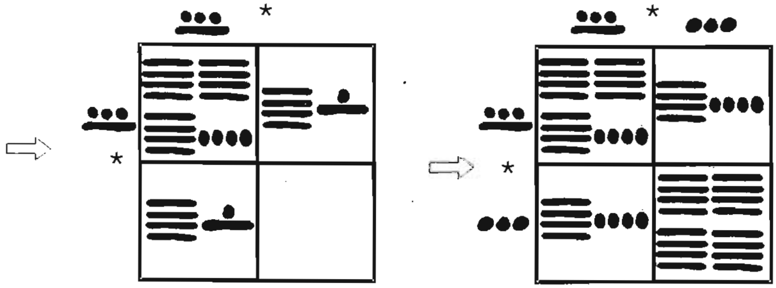
EJEMPLO

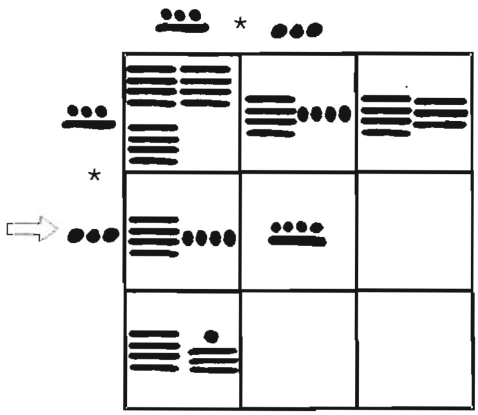
Sea A

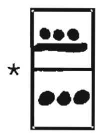
A =  = 66.6



En la siguiente parte del proceso se omiten las columnas y renglones de ceros que aparecieron en el arreglo anterior.





B =  = 8.15

CONCLUSIONES

De lo expuesto en la tesis podemos concluir lo siguiente:

1. El sistema de numeración maya permite expresar de manera muy simple y precisa cualquier cantidad tanto con números enteros, como con fracciones vigesimales en expansión finita.

2. Los algoritmos para los cálculos revisados en este trabajo son de una aplicación muy simple; por ejemplo, en el caso de la multiplicación no se requiere la memorización de tablas; y en el caso de la raíz cuadrada, la sencillez que ofrece parte del hecho de que este proceso permite visualizar de forma geométrica el concepto básico de esta operación, además no implica el uso de todas las otras operaciones de manera tan complicada como en el caso del algoritmo empleado en nuestro sistema decimal, pues únicamente con la división se llega al resultado.

3. La propuesta de algoritmos dada por Sánchez en 1961, aporta los elementos fundamentales en la búsqueda de los procedimientos que hagan más prácticos y funcionales los cálculos, aunque no da demostraciones de ellos. Hace mención del uso del punto vigesimal en el sistema maya, en analogía con el uso del punto decimal.

4. Las aportaciones de Calderón en 1966, han hecho más fáciles estos procesos, y aunque tampoco da demostraciones de todos los algoritmos, ofrece una para la multiplicación únicamente; además, el haber introducido el uso del tablero, hizo que estas aplicaciones fueran simples y eficientes. Por otro lado, propone un método para la extracción de la raíz cúbica en un ejemplo concreto, que finalmente no resulta sencillo de reproducir con otras cantidades. Aunque sí hace referencia al uso de números con fracciones vigesimales.

5. El Dr. Magaña en 1990, da pruebas de porqué funciona el método de suma, resta, multiplicación y división, concebida esta última como una operación inversa a la multiplicación. Menciona la utilización de potencias negativas de 20 para expresar números con fracciones vigesimales y utiliza estas potencias en la división con fracciones vigesimales. En sus trabajos de 1995 y de 2003, Magaña habla de la raíz cuadrada, siguiendo el enfoque de Calderón.

6. Este trabajo reúne, de manera sistemática, la fundamentación y justificación de los algoritmos empleados en las operaciones aritméticas en el sistema de numeración maya.

7. El sistema de numeración maya permite realizar las cuatro operaciones fundamentales, suma, resta, multiplicación y división, además e la raíz cuadrada, de manera muy simple y eficiente. Este sistema permite realizar estas operaciones de una forma más rápida y sencilla que la que tenemos en nuestro sistema actual. La ventaja radica en el uso de puntos y rayas y en el valor implícito de cada raya como cinco puntos, que lleva a la aparición de simetrías que pueden explotarse de manera intuitiva, como menciona Magaña en su trabajo de 2003.

APÉNDICE I
ACERCA DEL CERO

De las grandes civilizaciones de la antigüedad conocidas hasta hoy, solamente hay indicios de que posiblemente tres de ellas, la cultura india, la babilónica y la maya, desarrollaron o tuvieron una noción del cero en su sistema de numeración dentro de sus respectivos desarrollos culturales e intelectuales.

En el caso de la cultura babilonia las evidencias de la noción del cero no son tan claras para muchos especialistas, y aún entre los más connotados investigadores de la historia de las ciencias, y en particular de las matemáticas, no hay un acuerdo de que este pueblo haya tenido el concepto del cero, un símbolo o un término lingüístico para él antes de Cristo; hasta ahora no es precisa la ubicación en el tiempo de este hecho. Aunque su sistema de numeración también era posicional, los vestigios arqueológicos que han llegado hasta nuestros días, no ofrecen una certeza incuestionable acerca del uso del cero en esta cultura antes de nuestra era.

En el caso de la India, se ha establecido que el uso del cero se remonta hacia los primeros siglos de la era cristiana, y las evidencias históricas señalan un uso generalizado de un símbolo preciso, así como de una palabra para designarlo a mediados del primer milenio de esta misma era, y a diferencia del caso babilonio, el cero indio fue un concepto que se desarrolló clara y evidentemente llegando hasta nuestros días.

El tercer caso citado, el de la cultura maya, es el ejemplo de una civilización que desarrolló ampliamente el concepto del cero dentro de un sistema de numeración posicional, alrededor de 3 o 4 siglos antes de nuestra era, como lo muestran las evidencias históricas y arqueológicas halladas hasta ahora. Este hecho haría de esta cultura la primera en la historia de la humanidad en concebir, dar un nombre y utilizar el cero en su sistema numérico y en su vida cotidiana. Además de su importancia dentro del desarrollo de las matemáticas, hay investigaciones que señalan que el cero tuvo también una gran relevancia en otros aspectos culturales de los antiguos mayas.

Para muchos estudiosos existen evidencias de que en mesoamérica hubo rasgos culturales compartidos por las diversas civilizaciones ahí desarrolladas. Con características propias, estos rasgos se han ido evidenciando conforme se ahonda en los estudios que se realizan en dichos pueblos; uno de ellos es la visión del cosmos permeada por un profundo sentido o sentimiento religioso que parece ser patente en las restantes manifestaciones culturales de estas antiguas civilizaciones.

El desarrollo de las matemáticas no estuvo exento de esta visión mística en el pensamiento maya. Así, tenemos que para estos antiguos hombres, los números eran dioses o estaban relacionados con dioses, como se verá más detalladamente en el apéndice II. Y en el caso particular del cero, muchos especialistas deducen que para la mente maya, dicho concepto, no representaba la vacuidad, como lo es para nuestra actual cultura, sino que era el origen, la semilla; también se piensa que era el término de algo, el punto en el cual se llega a completar alguna cosa.

De esta manera el cero es el número que da origen a los otros números, los genera, es el primero de los números en las cuentas calendáricas mayas, por ello, según se cree, el primer día es el día cero.

Es tal vez por esta razón que a este número se le ha relacionado con la Luna, que era la diosa de la fertilidad, tanto para los mayas como para otros pueblos de mesoamérica. Laurencich, ver [9], y Mucía, ver [16], aducen una relación del cero con la flor como una promesa de fruto, promesa de vida, principio de la vida. Así mismo, se pueden encontrar representaciones del cero con glifos en forma de flor o que contienen una flor en su conformación.

Aunque desde un poco después de la llegada de los españoles, se ha sabido que en las antiguas lenguas mayas había un término para designar al cero, como número, Laurencich, [9], hace referencia al hecho de que en ocasiones un indígena maya no haya podido encontrar un término en su lengua para designar el concepto de cero desde la mentalidad de nuestra actual cultura.

Esta visión tan distinta a la nuestra para conceptuar este elemento cero, la atribuyen algunos, como Laurencich, en [9], o como el mismo Thompson, en [21], a la idea cíclica del transcurso del tiempo que tenían los antiguos mayas, y no lineal, como es la nuestra; así como al hecho de que en su interpretación, parece ser lo mismo espacio que tiempo. Según la misma Laurencich, aún en la actualidad, algunos indígenas mayas emplean el mismo término para designar ambas ideas.

Lo anterior nos da una idea de la diferencia en cuanto a la interpretación de las ideas que nos separan de la mentalidad de este antiguo pueblo mesoamericano. Y es importante tenerlo presente al tratar de acercarnos al conocimiento de esta fascinante cultura.

APÉNDICE II
MARCO HISTÓRICO

La aparición del hombre en el continente americano es tema de muchas controversias y existen diversas hipótesis para tratar de explicar este hecho, pero por tener un mayor sustento paleontológico, la teoría más aceptada acerca del surgimiento de la especie humana en América es la que afirma que cruzó del extremo oriente de Asia a nuestro continente por el Estrecho de Bering.

Estas travesías, pues se cree que fueron muchas, se remontan principalmente a la época de la última glaciación, en el periodo Pleistoceno, hace 40 000 a 20 000 años, aproximadamente. Aunque cabe señalar que sobre estas fechas las hipótesis son tan diversas que los periodos antes señalados pueden resultar muy controversiales, como lo son las propias hipótesis. Pues, por citar solo un ejemplo, el mismo Eric J. Thompson, ver [21], quien es hasta ahora uno de los investigadores de la cultura maya más connotados, así como y A. J. Toynbee, ver [23], uno de los historiadores más destacados del siglo XX, creen que aún hubo grupos que cruzaron de Asia a América ya en la era cristiana. Aunque quienes sustentan dicha hipótesis piensan que estas últimas oleadas de grupos que cruzaron tuvieron poca influencia en el desarrollo cultural de las grandes civilizaciones mesoamericanas.

Los primeros grupos eran principalmente de recolectores y cazadores nómadas, que tal vez llegaron al continente siguiendo a los grandes mamíferos de la época. Traían consigo conocimientos técnicos en el tallado y pulido de piedra para hacer puntas de flecha, el dominio del fuego, la elaboración de vestidos a base de pieles de animales y un lenguaje, entre otros.

En este mismo periodo encontramos en América una gama de grandes mamíferos que posteriormente se extinguieron, como son el mamut, el mastodonte, el caballo y el camello principalmente, además de otras especies de mamíferos que continúan vivas aunque algunas de ellas se encuentran actualmente en peligro de extinción, como es el caso del lobo y el berrendo, por citar sólo dos ejemplos.

Por las evidencias arqueológicas que existen y por sus etapas evolutivas algunos investigadores dividen a estos primeros inmigrantes en tres grandes grupos que fueron desplazándose hacia el este y el sur del continente, estos grupos se denominan el Complejo Sandía, el Complejo Clovis y el Complejo Folsom.

- El Complejo Sandía, entre 25 000 y 15 000 años a. C. aproximadamente, debe su nombre al sitio de Nuevo México donde se hallaron sus restos por primera vez, se extendió principalmente hacia el sur llegando hasta lo que hoy es el norte de México.

- El Complejo Clovis, entre 15 000 y 9 000 años a. C. aproximadamente, se extendió más hacia el este, abarcando una mayor región de los Estados Unidos y hasta el centro de México.

- El Complejo Folsom, entre 9 000 y 7 000 años a. C. aproximadamente, se extendió más al sur llegando hasta lo que hoy es Centroamérica.

Posteriormente a estas expansiones terminó la etapa nómada. De acuerdo con las hipótesis más aceptadas, se cree que en el periodo arcaico, de 6 000 a 2 000 años a. C. aproximadamente, se dieron los primeros asentamientos humanos en nuestro continente. Donde ya encontramos grupos organizados y con un desarrollo que les permitió establecerse en lugares fijos a partir del dominio de la agricultura, principalmente del maíz que empezó a cultivarse en ciertas regiones de México.

El cultivo del maíz más remoto, hasta mediados del siglo XX, lo ubicó R. MacNeish, ver [19] en la región central de México, en el valle de Puebla, y los registros más antiguos que encontró dan una fecha que lo remonta hacia unos 6 000 a 4 000 años a. C. aproximadamente, aún muy primitivo, una mazorca llegaba a medir de 4.5 cm a 6 cm de longitud. Más tarde Girard, menciona que este cultivo como planta ya domesticada fue encontrada por Coe y Flanney en el área maya, en la región de Ocós, antes que la del centro de México, ver [7]. De cualquier modo debieron transcurrir muchos años para que estos pueblos dependieran del cultivo del maíz principalmente.

Otras plantas que se han podido identificar en diversas excavaciones y que los estudios de MacNeish ubican en esta misma época son la calabaza, el chile y el frijol, principalmente. Girar sostiene que fueron la yuca y el camote el sustento alimenticio primordial de los pueblos mesoamericanos en sus orígenes durante la etapa de domesticación del maíz.

Este es uno de los hechos más trascendentales en la historia del continente, pues es gracias al dominio de la agricultura que da inicio el florecimiento y desarrollo de civilizaciones propiamente dichas.

Alfonso Caso, ver [19], denominó Horizonte prehistórico al de los cazadores de mamuts o de grandes mamíferos. Al periodo del descubrimiento de la agricultura, lo denominó Horizonte primitivo. Y finalmente a la etapa de surgimiento, florecimiento y decadencia de las grandes civilizaciones mesoamericanas se le divide de muy distintas formas, pero una muy común es la siguiente.

- Periodo preclásico o formativo, del año 2 000 a.C. al año 200 d.C. Subdividido a su vez en:
  - Preclásico temprano, del año 2 000 a.C. al 1 000 a. C.
  - Preclásico medio, del año 1 000 a. C. al 400 a.C.
  - Preclásico tardío, del año 400 a.C. al 200 d.C.

- Periodo clásico, del año 200 d.C. al 900 d.C. Subdividido a su vez en :
  - Clásico temprano, del año 200 d.C. al 500 d.C.
  - Clásico medio, del año 500 d.C. al 600 d.C.
  - Clásico tardío, del año 600 d.C. al 800 d.C.
  - Clásico terminal, del año 800 d.C. al 900 d.C.

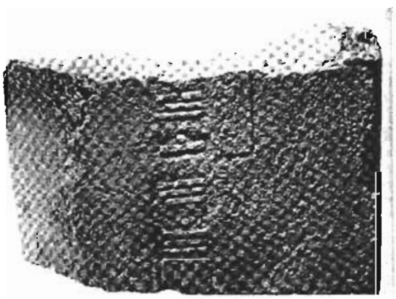
- Periodo postclásico, del año 900 d.C. al 1 500 d.C.

Cabe aclarar que las etapas anteriormente señaladas pueden variar en su clasificación, denominación o duración de acuerdo con distintos especialistas, así como con el avance en el desarrollo de las investigaciones de las culturas mesoamericanas en sí mismas.

Es durante el periodo preclásico que van tomando características distintivas cada una de las que serían las más sobresalientes civilizaciones de mesoamérica, y a través de la influencia de unas en otras y de su adaptación a las condiciones de sus particulares medios, cada una se identifica por sus rasgos propios.

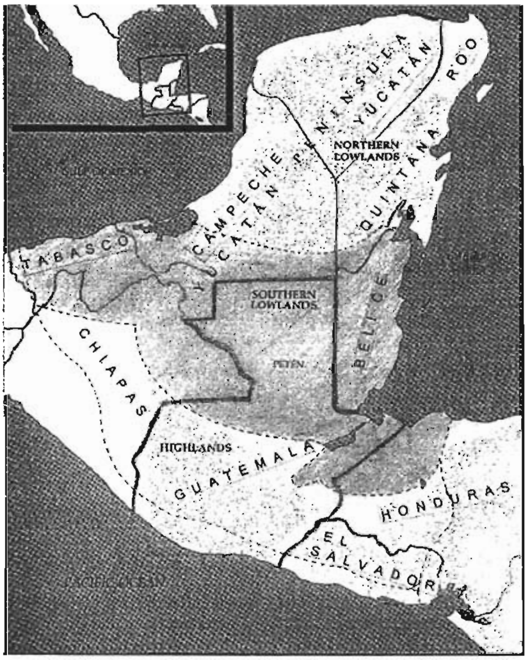
A lo largo del estudio de la historia de los pueblos antiguos de nuestro continente ha habido una evolución que responde al avance en las investigaciones y hallazgos que realizan arqueólogos, antropólogos, etnólogos, etc.; así tenemos que durante el siglo XX, y considerando como principales culturas mesoamericanas la olmeca, la maya, la mexica, la teotihuacana y la zapoteca, se han ido situando en ocasiones una u otra sobre las demás conforme se han hallado más evidencias históricas; por ejemplo, Sodi en [19] y Thompson en [21], entre otros, afirman que la olmeca es la cultura madre de las demás, aunque décadas antes este lugar lo ocupaba la cultura maya; por otro lado Girard en [7], haciendo un interesante análisis y dando un paralelismo entre las aportaciones históricas, arqueológicas y antropológicas, entre otras, y la narración del Popol Vuh, llega a establecer que es la cultura maya la que da origen a las otras grandes civilizaciones así como a otros pueblos menos conocidos en nuestro continente.

Tanto quienes siguen considerando a la olmeca o quienes toman a la maya, o inclusive a la mixe-zoque, como la primera gran cultura, se basan en hallazgos como son algunas estelas con jeroglíficos encontradas en lugares ubicados fuera del área maya, por ejemplo, la Estela C de Tres Zapotes, Veracruz, la cual tiene una inscripción calendárica simple con los numerales de barras y puntos, que si está basada en la misma forma posicional maya, correspondería al año 31 a. C.; otros ejemplos son las Estelas 12 y 13 de Monte Albán, Oaxaca, también con numerales semejantes a los mayas pero que corresponderían al año 450 a. C.



Fragmento de la Estela C
Tres Zapotes, Veracruz.

El área maya, que comprende en México lo que hoy son los estados de Yucatán, Quintana Roo, Campeche, parte de Chiapas y parte de Tabasco, y fuera de México, Belice, parte de Guatemala, parte de Honduras y parte de El Salvador, se divide en lo que se denomina Las Tierras Altas, por su orografía, pues hay algunas cadenas montañosas como la Cordillera de América Central, que se ubica al centro y sur de la región, y en Las Tierras Bajas, situadas hacia el norte de la zona maya, llamadas así porque son la parte llana, baja de la región, de suelo calizo cubierto de arbustos y maleza.



Mapa del área maya con estados de México y otros países que lo forman

Se observan los límites de Las Tierras Bajas y Las Tierras Altas

El área maya no limita con el Océano Pacífico

Alrededor del año 2 000 a.C., la mayor parte del área maya estaba ya ocupada por asentamientos que más tarde desarrollarían la gran civilización maya a través de muchos factores, entre ellos la influencia e interrelación con otros pueblo, como se señaló anteriormente. Fue en Las Tierras Altas donde se dieron los primeros asentamientos de la región con rasgos claramente identificados ya con esta cultura; estamos hablando del periodo preclásico. Es ahí donde se han encontrado las evidencias más tempranas del desarrollo de la escritura en el área maya, mediante un elaborado sistema jeroglífico, así como una notación calendárica, aunque todavía muy elemental. También aquí se han encontrado los sitios arqueológicos más antiguos con importantes centros ceremoniales con las primeras construcciones de pirámides, como son Kaminaljuyú, Chiapa de Corzo, Izapa, El Baúl, Chalchuapan y Altar de Sacrificios, entre otros.

La maya es en realidad una cultura que estuvo integrada por varios grupos con aproximadamente la misma filiación étnica, sus rasgos eran semejantes, y sus lenguajes, aunque no eran iguales, estaban emparentados; de hecho se reconocen en la región alrededor de 30 lenguas dentro de la misma familia, la maya, y aún en la actualidad se continúan hablando muchas de ellas; algunas de estas lenguas son chol, chontal, tzetzal, tzotzil, jacalteco, mam, quiché, cakchiqué, kekchí, mopán, lacandón y maya yucateco, que es la más común en la actualidad. Se considera que la hablan más de 5 000 000 de personas aún, en contraste con otras lenguas que se cree se extinguirán en algunos lustros, o inclusive años.

Al parecer hacia el final del periodo preclásico hubo un declive del área sur de la región. Aparentemente algunos centros fueron abandonados, suceso para el cual no se han podido encontrar explicaciones lo suficientemente satisfactorias hasta el día de hoy. También para este hecho las hipótesis son muy diversas y algunas hasta antagónicas. Desde explicaciones basadas en problemas sociales, pasando por supersticiones religiosas, hasta desastres naturales. Lo que sí se ha comprobado es que, en lo que hoy es El Salvador, el volcán Ilopango hizo erupción hacia el año 250 d. C. aproximadamente. Este hecho afectó gravemente la vida de las comunidades cercanas. Desafortunadamente la actual ciudad capital del país, San Salvador, se ha expandido tanto que cubre los restos de los antiguos asentamientos de la región, lo que dificulta en gran medida los estudios en esta línea.

Muchos investigadores piensan que en el periodo clásico temprano y clásico medio la región centro y norte del área maya, Las Tierras Bajas, vivió un auge de centros con gran desarrollo como lo muestran sitios arqueológicos que han sido o siguen siendo estudiados, por ejemplo, Piedras Negras, Tikal, Dzibilchaltún, Seibal, Palenque, Edzná, Yaxchilán, Quiriguá y Copán entre muchos otros.

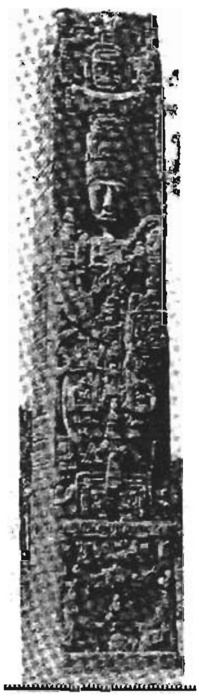
En Edzná, por ejemplo, se cree que se estableció uno de los primeros observatorios lunares de mesoamérica; además de que probablemente se fijó aquí el día de año nuevo al llegar el sol al punto zenital sobre un poste situado en la base de una pirámide de cinco pisos encontrada en la zona. Asimismo, en este sitio, se descubrió en 1 971 la existencia de un sistema hidráulico que fue construido a finales del preclásico. Se encontraron más de 20 kilómetros de canales y reservas de agua construidos para el servicio de Edzná. Esta impresionante obra hidráulica es equiparable a la construcción de las pirámides del Sol y de la Luna en Teotihuacan, en cuanto a la labor y también al periodo de construcción.

Se cree que no había un imperio maya propiamente, sino que los grandes centros se manejaban como Estados-ciudad y ha sido denominado centro primario a aquel de los centros mayas con mayor auge y dominio sobre los otros. Este centro primario tenía inclusive su propio emblema y hasta el clásico temprano solamente se han encontrado inscripciones jeroglíficas con el emblema de Tikal, que al parecer dominaba en la región del Petén; pero al final del clásico temprano se han encontrado inscripciones con emblemas de Palenque, Yaxchilán, Copán, Calakmul, Cobá y Uxmal, y posteriormente de Piedras Negras, el Naranjo, Toniná, Seibal y Quiriguá, lo que hace pensar que en su momento alcanzaron un desarrollo que les permitió mayor poder y con ello el control de la región.

Parece haber sido durante el periodo clásico en Las Tierras Bajas que se desarrolló en forma más completa la escritura y la literatura de la región, en cambio no se ha encontrado hasta ahora ningún texto de este periodo en Las Tierras Altas.

También es en el periodo clásico que la arquitectura maya se reconoce actualmente por haber desarrollado estilos muy característicos, en particular por el llamado arco maya, o arco falso, empleado en numerosas construcciones que aún hoy pueden apreciarse.

El registro de fechas importantes, así como de textos literarios e históricos que fueron esculpidos en monumentales estelas, también llegó a su nivel más elevado en esta etapa. Alrededor del año 550 d. C., era muy común la erección de monumentos fechados en el área central, y para el siglo VI esta práctica también se halló muy evidentemente en la región del norte y la costa oriental de Yucatán. En Tikal se han registrado alrededor de 115 estelas, aunque solamente 32 de ellas están talladas. Calakmul cuenta con 103 estelas conocidas, 73 de las cuales tienen inscripciones. En la actualidad se han descubierto alrededor de 19 ciudades que dedicaron monumentos jeroglíficos hacia el año 790 d. C.



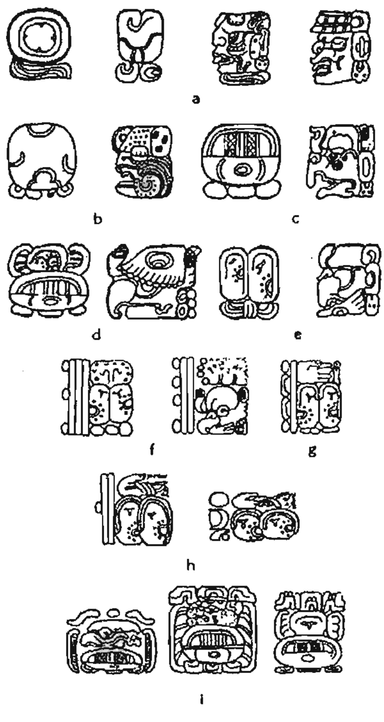
Estela E, Quiriguá, Guatemala
Retrato del emperador Cauac

Con inscripción en la cara Este
y fecha en la cuenta larga:
9. 17. 0. 0. 0, correspondiente al
año 771 d. C.

Otras artes también alcanzaron su máximo esplendor en el periodo clásico, como es la elaboración de la cerámica, con dominio de una notable técnica en la selección de materiales, el cocimiento, la coloración y la decoración de platos, vasos, vasijas, ollas y otras piezas, algunas de ellas aparentemente de carácter puramente ornamental.

Otro de los aspectos culturales que alcanzó la culminación de su desarrollo en el periodo clásico fue el calendario, o, con mayor precisión, los calendarios, ya que los mayas al igual que otros pueblos mesoamericanos, utilizaron dos calendarios que combinaban y contaban simultáneamente. Uno era el calendario solar de 360 días, llamado en la actualidad Tzolkin, y el otro, el calendario ritual de 260 días, llamado en la actualidad Haab. Se desconocen los nombres antiguos.

Los ciclos en la medición del tiempo son: un día, llamado kin; un mes, llamado uinal, que consta de 20 días; un año, llamado tun, ciclo de 18 meses de 20 días, 360 días; el año civil se completaba con 5 días que no tenían nombre, se les consideraba días aciagos, llamados Uayeb, con ellos se tenía el año de 365 días. Había también otros períodos, un katún, ciclo de 20 años; y finalmente un baktún, ciclo de 400 años, que son los que encontramos en las inscripciones calendáricas para registrar fechas, aunque también había otros períodos más grandes como se ve en la siguiente imagen.



Glifos mayas de los periodos
a) kin, día; b)uinal, mes de 20 días;
c) tun, año de 360 días;
d) katún, 7 200 días;
e) baktún, 144 000 días;
f) pictún, 2 880 000 días;
g) calabtún, 57 600 000 días;
h) kinchiltún, 1 152 000 000 días;
i) alautún, 23 040 000 000 días

Existen diversas interpretaciones de la cuenta del tiempo en la cultura maya, por ejemplo, el Doctor Miguel León-Portilla se refiere a una obsesión del tiempo en la cultura maya, a una filosofía basada en el tiempo. Aunque hay otros especialistas de esta cultura que no lo ven de ese modo.

Los mayas concibieron las divisiones del tiempo como pesos que cargadores divinos llevaban a través de la eternidad. Estos cargadores eran los números por medio de los cuales se distinguía a los diferentes periodos. Las cargas eran conducidas sobre la espalda utilizando un mecapal apoyado en la frente. Usando un símil en términos de nuestro calendario, es como si hubiera para el 31 de diciembre de 1 972, por ejemplo, los siguientes cargadores: el dios del número Treinta y Uno llevando a Diciembre a cuestas; el dios especial del número Uno cargando los milenios; el dios del número Nueve, las centurias; el del número Siete, las décadas; y el dios del número Dos acarreando los años. Al finalizar ese día se presenta una pausa momentánea antes de que la procesión reinicie la marcha; en ese momento el dios del número Uno reemplaza, con Enero en sus espaldas, a la deidad del Treinta y Uno que había cargado a Diciembre; a su vez, el dios del número Tres releva como cargador del año al dios del número Dos. Desde el punto de vista místico, estas cargas también tenían un significado: la esperada buena o mala fortuna del año, de acuerdo con el aspecto benéfico o malévolo del dios cargador. Para Thompson, ver [21] fue precisamente en los intentos de encontrar la clave de todas estas influencias en conflicto que provenían de los diversos dioses de tantos ciclos del tiempo, que los mayas alcanzaron sus más grandes descubrimientos intelectuales. Para ellos el tiempo retrocedía en incontables perspectivas de cientos de miles de periodos; los lugares de reposo, esas etapas anuales de los portadores de las cargas del tiempo, llegaban a millones y aun a veintenas de millones de años. Existe una inscripción maya que remonta el cálculo a 90 000 000 de años atrás, y otra más que alcanza hasta 400 000 000 de años en un remoto pasado. Al parecer la mayor preocupación de los mayas fue el pasado y no el futuro, pues con la creencia de que la historia se repetiría siempre, conociendo el pasado conocerían también el futuro.

Podría caber como ejemplo un acontecimiento que describe Thompson, ver [21], relativo a los últimos días de Tayasal, último reducto de los itzaes, un pueblo de tradición guerrera, que se mantuvo independiente de los españoles hasta 1 697. En 1 696 el lugar fue visitada por Andrés de Avendaño, franciscano de gran perspicacia, que además conocía el calendario maya, así como algunas de las profecías. Este religioso persuadió a la gente de Tayasal, de que sólo faltaban cuatro meses para que, de acuerdo con las antiguas profecías de ellos mismos, aceptaran el cristianismo y la sujeción a la corona española.

Avendaño sabía de las profecías del katún y les explicó a los indígenas que el katún 8 Ahau, un katún de cambios políticos, estaba por comenzar y por lo tanto, el momento de aceptar la nueva religión. Los itzaes estuvieron de acuerdo en someterse, pero hasta que diera principio el nuevo ciclo. Aunque Avendaño tenía un error de un año en sus cálculos, la derrota de los itzaes y su sometimiento al gobierno español se realizó casi sin resistencia de un pueblo que tenía gran fama de guerrero.

Las observaciones astronómicas y la aplicación de conocimientos matemáticos de los mayas, los llevaron a calcular el año solar en 365.2420 días; la astronomía moderna lo aproxima en 365.2422 días; el calendario gregoriano lo calculaba en 365.2425 días; de igual forma, los mayas calcularon el año de Venus en 584 días, la astronomía moderna lo ha calculado en 583.92 días.

Es importante tener presente las condiciones en que estas observaciones fueron hechas, en la región es común que por la mañana haya niebla, y en las estaciones de lluvia el cielo está nublado por varios días. Es de suponer el trabajo de muchas generaciones para poder tener un cúmulo de datos suficientes y precisos con los que hacer todos estos cálculos.

Aunque hasta la fecha no hay evidencia de que los mayas hayan utilizado las fracciones, pues no aparece registro de ellas en las inscripciones conocidas, las aproximaciones en los cálculos señalados anteriormente se pueden explicar por las referencias que hay en tablas de relación entre los períodos del Sol, de la Luna y de Venus, principalmente. Para ello buscaron mínimos comunes múltiplos y elaboraron tablas de corrección, por ejemplo en 301 revoluciones de Venus hicieron una corrección que sumaba 24 días, y con similares correcciones llegaron finalmente a tener un error de 0.08 días en el curso de 481 años. Establecieron 8 años solares iguales a 5 períodos venusinos; 104 años solares iguales a 65 ciclos de Venus; también por tablas de relación entre equinoccios y solsticios se advierte el grado de exactitud que alcanzaron en sus cálculos.

Seis páginas del Códice de Dresde están dedicadas a las anotaciones de estos resultados y fueron estudiadas por primera vez por el bibliotecario de la biblioteca de dicha ciudad, Ernst Förstemann a principios del siglo XX.

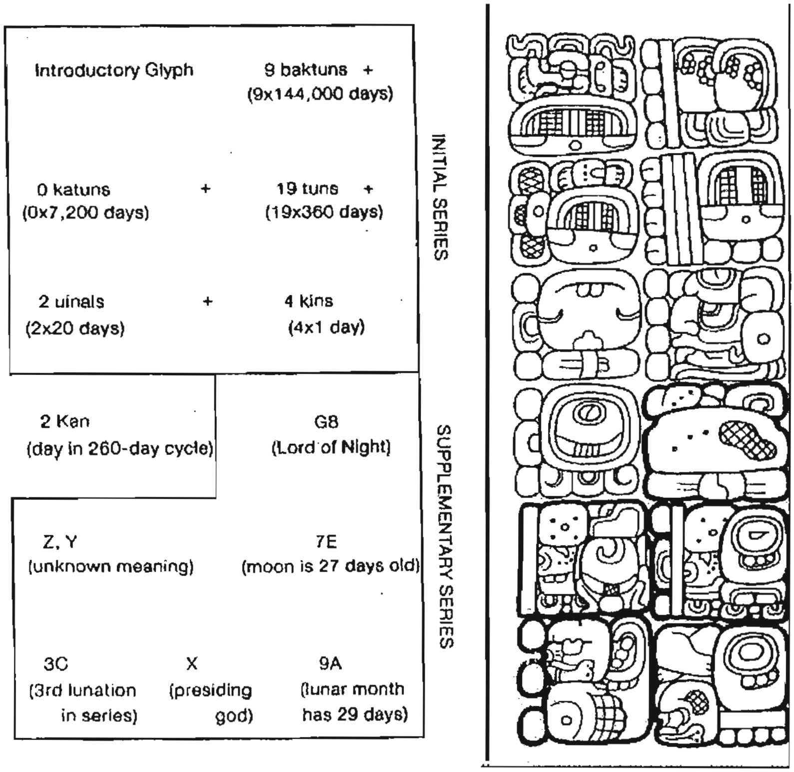
Otro logro intelectual de los sacerdotes-astrónomos mayas fue la elaboración de una tabla para predecir cuándo serían visibles los eclipses solares. Y aunque al parecer no tenían una idea heliocéntrica de la tierra, pudieron hacer esto gracias a llevar un registro minucioso de las posiciones de los astros más importantes para ellos en relación al almanaque sagrado de 260 días. En el mismo Códice de Dresde aparece una tabla que contiene 69 fechas en las cuales ocurren eclipses solares en un lapso de 33 años, después del cual la tabla puede usarse de nuevo, aunque muchos de estos eclipses no fueron visibles en la región maya.

Parece ser que fue en este periodo, el clásico, que los mayas establecieron una fecha fija para empezar a contar el tiempo y así registrar su transcurso. Esa fecha es 4 Ahau 8 Cumkú, donde 4 Ahau corresponde al calendario de 260 días y 8 Cumkú al de 360. Esta fecha de partida, mítica, corresponde en nuestro calendario al año 3 113 a. C. Se desconoce totalmente el por qué de esta fecha, aunque algunos especialistas, como Thompson, creen que corresponde a la última creación del mundo en su mitología, es decir, la edad de la creación del hombre hecho de maíz, como se menciona en el *Popol Vuh*.

Las estelas del período clásico llegan a alcanzar un alto grado de precisión en el registro de fechas, a las que están ubicadas en 4 Ahau 8 Cumkú, se les denomina de la serie inicial o de la cuenta larga, con el transcurso del tiempo fue cambiando la forma de anotar las fechas.

Estas fechas se componen de un glifo introductor que incluye un signo correspondiente al año, y otros glifos de la deidad que preside el mes en que cae la fecha; a continuación, y leyendo de izquierda a derecha y de arriba abajo, aparecen las distintas unidades en el orden siguiente:

> baktunes, ciclos de 144 000 días; katunes, ciclos de 7 200 días; tunes, ciclos de 360 días; uinales, ciclos de 20 días; kines, días; finalmente aparece la ubicación en el Haab y la ubicación en el Tzolkin



Así, una fecha registrada quedaba correlacionada tanto en el Tzolkin como en el Haab con toda precisión.

Es en Tikal, en la Estela 29, donde se consigna la inscripción calendárica maya más antigua hasta ahora descubierta, correspondiente al año 292 d. C.

La mayor parte de los textos que aún perduran los hallamos principalmente en estelas, dinteles, escalinatas y tumbas, sobretodo del período clásico. Solamente se conservan tres libros antiguos originales, que son el Códice de Madrid, el Códice de Dresde y el Códice de París, pliegos de amate, elaborados con una planta de la región que se dejaba secar, posteriormente se escribía sobre ellos y finalmente se plegaban para su manejo. Se cree que estos tres códices corresponden al período postclásico.

El Códice de Madrid, que tiene una longitud de 6.7 metros, y consta de 56 hojas, 112 páginas de 23 cm de alto por 9 cm de ancho cada una, está dividido en dos partes. Fue encontrado alrededor de 1 860 en España, aunque en distintos lugares cada una de las partes, y hasta 1 880 Leon de Rosny descubrió que ambas partes eran del mismo códice. La parte más grande fue hallada por Brasseur de Bourboug, misionero francés estudioso de la cultura maya, en poder del profesor Juan de Tro y Ortolano, de Madrid, y por ello se le conoció inicialmente como Manuscrito Troano o Códice Tro. La parte más pequeña estaba en poder de Juan Palacios, quien la vendió al Museo Arqueológico de Madrid en 1 875, donde se encuentran ambas actualmente. Por lo que se ha podido descifrar hasta ahora se piensa que contiene un almanaque además de anotaciones sobre horóscopos.

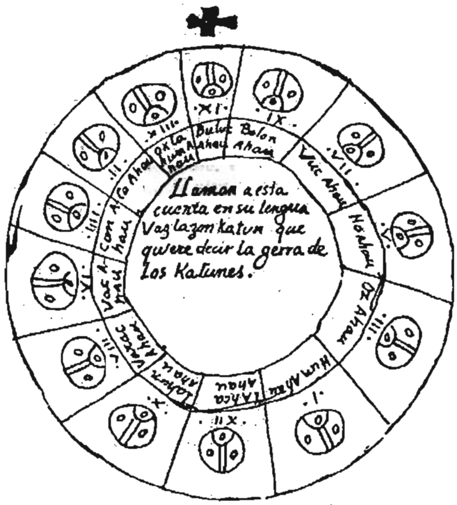
El Códice de Dresde, el cual tiene una longitud de 3.5 metros, está formado por 39 hojas, 78 páginas, de las cuales 4 están en blanco, con una altura de 20.4 cm y una anchura de 9 cm. Se encontró en un biblioteca privada de Viena y fue llevado a la biblioteca de la ciudad de Dresde, Alemania, en 1 739. A inicios del siglo XIX, por alguna razón, este códice fue partido en tres, lo que ocasionó gran confusión para su posterior paginación. Por lo que se ha podido descifrar, trata de astronomía.

El Códice de París, que es un fragmento del original, mide 1.45 metros de longitud, consta de 11 hojas, 22 páginas, de 22 cm de alto por 12.5 cm de largo. Fue hallado en 1 859 en la Biblioteca Nacional de París por Leon de Rosny. Inicialmente se le conoció con el nombre de Códice Peresianus, por encontrarse envuelto en un papel que llevaba escrita la palabra "Pérez". Parece ser un manuscrito ritual. Y actualmente es, de los tres, el que se encuentra en condiciones más deterioradas.

Estos tres códices son los únicos que se reconocen como originales por los especialistas y siguen siendo objeto de estudio hasta nuestros días.

No se sabe con precisión cual fue, o cuales fueron las causas de la decadencia de la civilización maya, también sobre esto hay un gran número de hipótesis, pero hasta ahora ninguna de ellas ha logrado tener mayor aceptación por parte de los expertos. Lo que parece ser un hecho es que las diversas ciudades mayas fueron llegando a un colapso poco a poco, de manera que al arribo de los españoles la selva había cubierto muchos de los antiguos centros; solamente se encontraban al descubierto unos cuantos vestigios de lo que había sido esta cultura.

Fue durante el proceso de conquista y evangelización de los pueblos americanos que se continuaron perdiendo más vestigios de lo que había sido una de las más brillantes culturas mesoamericanas. Pero al mismo tiempo, y de forma a primera vista antagónica, algunos de los conquistadores se dieron a la tarea de conservar memoria de ciertos hechos o hallazgos de lo que iban encontrando a su paso. De manera que las relaciones y crónicas de los españoles siguen siendo fuente de valiosa información acerca de las culturas que había en América; en particular, tenemos el caso del Obispo de Yucatán, Fray Diego de Landa, quien por un lado, fue el autor de la destrucción de innumerables manuscritos indígenas en su afán por terminar con el paganismo, la idolatría y las antiguas creencias y establecer la religión católica en Yucatán, y por otro lado, es el autor del manuscrito más ilustrativo acerca del lugar, *Relación de las Cosas de Yucatán*, ver [8], escrito hacia el año 1 560, donde además de describir físicamente la región, hace referencia a hechos históricos, tanto de los conquistadores, como de los lugareños, da referencias geográficas, hace relación de plantas, de animales, de comida y bebida, relata costumbres, da cuenta de profecías, hace una descripción del calendario, así como de la manera de contar de los indios, y da lo que será la primera y más directa relación entre los alfabetos maya y español, aunque no es precisa, ha sido y sigue siendo referencia obligada para quienes pretenden interpretar la escritura maya, sin olvidar que la fuente de su información es directa, los propios indígenas.



Rueda de los Katunes, de la *Relación de las cosas de Yucatán,* de Fray Diego de Landa.

Parte de la descripción que hace del calendario maya.

Durante la etapa del virreinato en nuestro país hubo una gran cantidad de españoles, principalmente frailes, que aprendieron algunas de las diversas lenguas nativas y de ese modo conocieron de forma directa por la narración de los propios pobladores, creencias, costumbre, mitos y leyendas, entre otras cosas; así como también hubo muchos indígenas que no solo aprendieron español, sino latín. Se dieron casos, inclusive, en que algunos de los indígenas tradujeron textos de la antigua tradición en su lengua original directamente al latín.

Los mismos indígenas dejaron en manuscritos como el *Popol Vuh*, ver [16], o los *Libros del Chilam Balam*, ver [14], registro de parte de su cultura; se cree que estas tradiciones iban pasando de manera oral de generación en generación, hasta que finalmente alguien las escribió ya con el uso de la lengua castellana; no se tiene referencia de que alguno de estos libros haya estado antes escrito en alguna de las lenguas mayas. Y todas estas fuentes siguen siendo material de estudio en nuestros días, junto con los sitios arqueológicos y demás vestigios a los que se puede acceder en la actualidad para su análisis e interpretación.

En la actualidad los estudios e investigaciones sobre la cultura maya continúan y así como cada día algo más se va perdiendo o se van deteriorando piezas arqueológicas, también se van descubriendo o entendiendo más cosas que seguirán enriqueciendo lo que hasta ahora sabemos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BACON, Edward, director del proyecto. *Historia de las civilizaciones*, El libro de bolsillo, Vol. 2, Alianza Editorial Mexicana y Editorial Labor S.A., 1989, México.

[2] BRODA, Johanna, IWANISZEWSKI, Stanislaw. *Arqueoastronomía y Etnoastronomía en Mesoamérica*. Memoria del Simposio que tuvo lugar en C. U. del 24 al 28 de septiembre de 1984, organizado por el Instituto de Investigaciones Antropológicas, el Instituto de Investigaciones Históricas y el Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, 1991, México.

[3] CALDERÓN, Héctor M. *La ciencia matemática de los mayas*, Editorial Orión, 1966, México.

[4] CASO, Antonio. *Los Calendarios Prehispánicos*. Instituto de Investigaciones Históricas, Serie La Cultura Náhuatl, UNAM, 1967, México.

[5] COLLETTE, Jean-Paul. *Historia de las matemáticas*, Ciencia y Técnica, Vol. 1, Editorial Siglo XXI, 2ª, Edición, 1986, México.

[6] CORTÉS, Hernán. *Cartas de Relación de la Conquista de México*, Colección Austral, No. 547, Espasa Calpe Mexicana S. A. 9ª. Edición 1985, México.

[7] GIRARD, Raphael. *Historia de las Civilizaciones Antiguas de América*. Vol. 1 y 3, Colegio Universitario de Ediciones Istmo, 1976, Madrid.

[8] LANDA, Fray Diego de. *Relación de las Cosas de Yucatán*, Biblioteca Porrúa No. 13, Editorial Porrúa, S. A., 12ª. Edición, 1982, México.

[9] LAURENCICH-MINELLI, Laura. *El curioso concepto del "cero concreto" mesoamericano y andino y la lógica de los dioses*. Espectáculo. Revista de estudios literarios, Universidad Complutense de Madrid, 2004, Madrid. Ver también: *Lo Zero Concreto del Mondo Inaca e Maya E Cenni Sul Calcolo Degli Inca*. MEMORIAS DEL INSTITUTO ITALO-LATINO AMERICANO. Calcolo Matematico Precolombiano. Atti del Convegno tenutosi all'IILA il 21 ottobre 2003, Bardi Editori, 2004, Roma, p. 289-314.

[10] LEÓN-PORTILLA, Miguel. *Tiempo y realidad en el pensamiento maya*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2ª. Edición, 1986, México.

[11] MAGAÑA Solís, Luis Fernando. *Las matemáticas y los mayas*. Revista Ciencias, No. 19, Julio 1990, p. 19-26. Universidad Nacional Autónoma de México, México.

[12] MAGAÑA Solís, Luis Fernando. *Matemáticas mayas: Raíz cuadrada*. Memorias del Coloquio Cantos de Mesoamérica, p. 251-257. Instituto de Astronomía y Facultad de Ciencias, UNAM, 1995, México.

[13] MAGAÑA Solís, Luis Fernando. *La Radice Quadrata con L'Aritmetica Maya*. MEMORIAS DEL INSTITUTO ITALO-LATINO AMERICANO. Calcolo Matematico Precolombiano. Atti del Convegno tenutosi all'IILA il 21 ottobre 2003, Bardi Editori, 2004, Roma, p. 321-339.

[14] MEDIZ Bolio, Antonio. *Libros del Chilam Balam de Chumayel*, Biblioteca del Estudiante Universitario, No. 21, Universidad Nacional Autónoma de México, 6ª. Edición, 2000, México.

[15] MORLEY, Sylvanus, BRAINERD, George W. *The Ancient Maya*, Stanford University Press, 4ª. Edition, 1983, Stanford, California.

[16] MUCÍA, Jose. *Cosmovisione E Numeri Maya*. MEMORIAS DEL INSTITUTO ITALO-LATINO AMERICANO. Calcolo Matematico Precolombiano. Atti del Convegno tenutosi all'IILA il 21 ottobre 2003, Bardi Editori, 2004, Roma, p. 341-360.

[17] RECINOS, Adrián. *Popol Vuh, las antiguas historias del Quiché*, Colección Popular No. 11, Fondo de Cultura Económica, 2ª. Edición, 1960, México.

[18] SÁNCHEZ, George I. *Arithmetic in Maya*, 1961, Austin, Texas.

[19] SODI M., Demetrio. *Las grandes culturas de mesoamérica*, Panorama Editorial, S. A., 2ª. Edición, 1981, México.

[20] SOTELO Santos, Laura Elena. *Las ideas cosmológicas mayas en el siglo XVI*, Instituto de Investigaciones Filológicas y Centro de Estudios Mayas, Universidad Nacional Autónoma de México, 1988, México.

[21] THOMPSON, J. ERIC S. *Grandeza y decadencia de los Mayas*, Fondo de Cultura Económica, 3ª. Edición 1984, México.

[22] THOMPSON, J. ERIC S. *Historia y religión de los Mayas*, América Nuestra No. 7, Editorial Siglo XXI, 4ª. Edición, 1980, México.

[23] TOYNBEE, Arnold J. *Estudio de la historia*, Compendio, Volúmenes 1-3 por D. C. Somervell, El libro de bolsillo No. 248, Alianza Editorial, 5ª. Edición, 1981, Madrid.