



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**“MODELO PARA EL CALCULO DE FUNCIONES
ACTUARIALES CON TASAS DE INTERES
ESTOCASTICAS Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD
A VARIACIONES EN LOS SUPUESTOS
FINANCIEROS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

JORGE OTILIO AVENDAÑO ESTRADA



DIRECTOR DE TESIS:

ACT. PEDRO AGUILAR BELTRAN

2005



m. 345098



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Modelo para el cálculo de funciones actuariales con tasas de interés estocásticas y análisis de sensibilidad a variaciones en los supuestos financieros.

realizado por Jorge Otilio Avendaño Estrada

con número de cuenta 8337440-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuario

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Act. Pedro Aguilar Beltrán 

Propietario

Act. Oscar Aranda Martínez 

Propietario

Act. Marco Antonio Velázquez Vázquez 

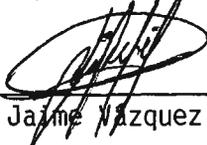
Suplente

Act. Fernando Eleazar Vanegas Chávez 

Suplente

Act. Maximino Gómez Mendoza 

Consejo Departamental
de Matemáticas





Act. Jaime Vazquez Alamilla
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Contenido

Prefacio	xi
1. Desarrollo histórico de la ciencia actuarial	1
Introducción	1
1.1. Las herramientas del cálculo actuarial	1
1.1.1. Las matemáticas financieras	1
1.1.2. La teoría de probabilidad	2
1.1.3. El análisis estadístico de los registros de mortalidad	3
1.2. Las primeras tablas de mortalidad	4
1.2.1. La tabla de Ulpiano	4
1.2.2. Graunt y los “bills of mortality”	6
1.3. Primeros intentos de valuación de rentas vitalicias	6
1.3.1. Las tontinas	6
1.3.2. El trabajo de los hermanos Huygens	7
1.3.3. Nicolás Bernoulli	8
1.3.4. Jan de Witt y su tratado sobre rentas vitalicias	9
1.3.5. Jan Hudde	9
1.3.6. Edmund Halley	10
1.4. Los inicios de la matemática actuarial	12
1.4.1. Abraham De Moivre	12
1.4.2. Thomas Simpson	14
1.5. Primeras compañías de seguros de vida	14
1.5.1. La Amicable	14
1.5.2. El Scottish Ministers Widows’ Fund	15
1.5.3. La Equitable	15
1.6. Desarrollo ulterior	16
1.6.1. El concepto de reserva matemática	16
1.6.2. Sistemas modificados de reservas	17
1.6.2.1. El método de Zillmer	17
1.6.2.2. Otros sistemas modificados	17
1.7. Modelo continuo del seguro de vida	18
1.7.1. Modelo de Woolhouse	18
1.7.2. La ecuación diferencial de Thiele	19
1.7.3. Gompertz y Makeham	19
1.7.4. Otros modelos de mortalidad	21
1.8. Desarrollos recientes	23
1.8.1. Modelo estocástico	23
1.8.2. Modelo markoviano	24
1.8.3. Modelo con tasas de interés estocásticas	27
1.8.4. Axiomatización	27
1.8.5. Modelos de tarificación (pricing)	27
1.9. Epílogo	27

2. Elementos de la teoría del interés	29
Introducción	29
2.1 Teorías del capital y el interés	29
2.2 Distintas clasificaciones de las tasas de interés	31
2.3 Factores que influyen en los niveles de las tasas de interés	32
2.4 Capital e interés	36
2.4.1 Funciones de acumulación y de descuento	36
2.4.2 Fuerza de acumulación	36
2.5 Funciones de acumulación más comunes en la práctica	37
2.5.1 Interés simple	37
2.5.2 Interés compuesto	37
2.5.2.1 Modelo discreto	38
2.5.2.2 Modelo continuo	39
2.6 Modelos estocásticos	39
2.7 Modelos para la tasa de interés	40
2.7.1 Distribución idéntica e independencia	40
2.7.2 Modelos dependientes	41
2.7.2.1 Procesos autorregresivos (<i>AR</i>)	42
2.7.2.1.1 Caminata aleatoria	43
2.7.2.2 Procesos de medias móviles (<i>MA</i>)	44
2.7.2.3 Procesos autorregresivos y de medias móviles (<i>ARMA</i> y <i>ARIMA</i>)	44
3. Análisis de sensibilidad	45
Introducción	45
3.1 La naturaleza de la reserva matemática	46
3.2 Análisis de sensibilidad	53
3.2.1 El teorema de Lidstone	53
3.3 Sensibilidad de primas a cambios en las tasas de interés	56
3.3.1 Primas únicas	56
3.3.2 Primas niveladas	60
3.4 Análisis de sensibilidad sobre las reservas	62
4. Modelos estocásticos en el seguro de vida	67
Introducción	67
4.1 Primas únicas	69
4.1.1 Seguro de vida	69
4.1.2 Rentas contingentes	72
4.2 Primas niveladas	73
4.3 Reservas	73
4.4 Modelos para la tasa de interés	75
4.4.1 Modelo determinista con tasa constante	75
4.4.2 Modelo determinista con tasa variable	75
4.4.3 Modelo estocástico en tiempo discreto con espacio de estados a lo más numerable	75
4.4.4 Escenarios	77

4.4.5	Modelo lognormal	79
4.4.6	Modelo autorregresivo	82
5.	Simulación y aplicación	85
	Introducción	85
5.1	Simulación aleatoria	85
5.1.1	Variables continuas	85
5.1.2	Variables discretas	88
5.1.3	Variables mixtas	89
5.2	La función de distribución empírica y el principio de sustitución	90
5.2.1	Las funciones de distribución y de probabilidad empíricas	90
5.2.2	El principio de sustitución	92
5.3	Aplicaciones	92
5.3.1	Aplicación 1: Escenarios aleatorios con trayectorias deterministas	94
5.3.2	Aplicación 2: Seguro contingente sobre dos vidas, a corto plazo	96
5.3.3	Aplicación 3: Reservas con márgenes de seguridad	102
	Conclusiones	117
	Anexos	119
	Anexo 1 Tablas de mortalidad	119
	Anexo 2 Monotonicidad de funciones racionales	120
	Bibliografía y referencias	123

Prefacio

Los modelos actuariales tradicionales del seguro de vida consideran dos elementos determinísticos básicos para el cálculo de primas y reservas: la tabla de decrementos (mortalidad, invalidez, etc.) y la tasa de interés. Con la introducción de un elemento estocástico, el tiempo al decremento, se da un primer avance en la construcción de modelos que reconozcan el carácter inherentemente aleatorio de una operación financiera de este tipo. Adicionalmente, en años recientes la investigación actuarial se ha orientado hacia la construcción de modelos en los que se da un tratamiento estocástico a la tasa de interés.

El presente trabajo tiene dos objetivos: por un lado, exponer el modelo general para el cálculo de primas y reservas bajo el supuesto de que tanto los decrementos o salidas, como las tasas de descuento, son variables aleatorias. Se pretende explicar porqué el modelo estocástico representa una mejoría respecto al modelo clásico, que no da cabida a un análisis de la variabilidad en el valor presente de flujos involucrados en una operación de seguros.

El otro tema que se plantea es el de la sensibilidad de primas y reservas a variaciones en las tasas de interés. El propósito es el presentar algunos resultados que permitan, bajo ciertos supuestos de monotonicidad, predecir el comportamiento de las funciones actuariales ante variaciones en las hipótesis financieras.

Se ha dividido el trabajo en 5 capítulos. En el primero de ellos se resume, a grandes rasgos, la evolución del cálculo actuarial de vida a través del tiempo. Con este fin, se presenta una breve historia del desarrollo del mismo, desde la construcción de las primeras tablas de mortalidad, hasta los sofisticados modelos de hoy en día.

En el capítulo 2 se revisan los fundamentos de la teoría del interés que serán de utilidad en este trabajo, enfatizando en la aplicación dentro del contexto del cálculo actuarial.

El análisis de la sensibilidad de valores actuariales bajo distintos supuestos de interés es tema del capítulo 3. Tomando como referencia el resultado más notable en este campo de investigación, el teorema de Lidstone, desarrollaremos una metodología basada en las herramientas del cálculo diferencial, para analizar el comportamiento de las funciones actuariales bajo condiciones cambiantes de interés.

En el capítulo 4 se presenta el modelo estocástico del seguro de vida. Como casos particulares se derivan las fórmulas clásicas al suponer que la tasa de interés es una variable aleatoria degenerada, es decir, una constante. También se incluyen fórmulas explícitas para primas y reservas en casos particulares donde se aplica un modelo para el proceso estocástico de la tasa de interés.

Finalmente, en el capítulo 5, valiéndonos de técnicas de simulación aleatoria (métodos de Monte Carlo), determinaremos empíricamente primas y reservas suponiendo diversos modelos probabilísticos para la mortalidad y las tasas de rendimiento. Como aplicación de interés, se propone, para una cartera de pólizas de vida de largo plazo, un método para determinar reservas con márgenes de seguridad contra posibles desviaciones adversas en la siniestralidad o en las tasas de interés, tomando como referencia la cantidad que se debe tener disponible para cubrir la siniestralidad, dado un nivel de confianza.

Capítulo 1

Desarrollo histórico de la ciencia actuarial

A limited historical perspective can sometimes be a hindrance when considering the future whereas those who know about the past can not only avoid reinventing the wheel but also consider today's decisions in an overall context.

Chris Lewin (2001)

Introducción

Si bien es cierto que diversos autores coinciden en fijar como fecha de nacimiento de la ciencia actuarial el año de 1693, año en que el astrónomo inglés Edmund Halley publica un estudio sobre mortalidad y cálculo de primas de anualidades, no hay que olvidar que el cálculo actuarial de vida está fundamentado primordialmente en las técnicas de las matemáticas financieras, la probabilidad y el análisis estadístico. El mérito de Halley es inobjetable, pues no es una labor intrascendente el asociar ideas de campos del conocimiento tan disímiles para concebir una nueva teoría. Sin embargo, no podemos ignorar, aunque sea por la reminiscencia que se hace en este párrafo, las contribuciones de individuos, trátense de personajes que pasaron a ser protagonistas de la historia por sus notables contribuciones a la ciencia, o de, digámoslo así, héroes anónimos, que fueron forjando, poco a poco, los cimientos de la ciencia actuarial.

En los párrafos que siguen, se presenta un panorama general de la situación en que se encontraban estos campos del conocimiento en la época en que surge la ciencia actuarial, para después continuar con la revisión de algunos pasajes de la historia del desarrollo de esta ciencia.

1.1 Las herramientas del cálculo actuarial

1.1.1 Las matemáticas financieras

Las bases matemáticas de la formación de capitales a interés compuesto se conocen desde la Edad Media, como lo evidencia un manuscrito del siglo XIV en el que se puede apreciar una tabla de acumulación de un capital a interés compuesto.¹ En 1478 se publica la *Aritmética de Treviso*, obra de autor anónimo en la que se analizan métodos para calcular interés.

¹ Lewin, 2001.

Se atribuye al matemático flamenco Simon Stevin,² conocido también como *Simon de Brujas*, la publicación de un tratado sobre técnicas de cálculo del interés. En esta obra, escrita en 1585 y denominada *La pratique d'arithmetique*, se muestra una serie de ejemplos sobre el cálculo de valores presentes de anualidades. Stevin también explica la relación existente entre *valor presente* y *valor futuro o acumulado*.

En 1613, el matemático inglés Richard Witt publica la obra *Arithmeticall questions, touching the buying or exchange of annuities; taking of leases for lines, or yearly rent; purchase of fee-simples; dealing for present or future possessions; and other bargaines and accounts, wherein allowance for disbursing or forebearance of money is intended; briefly resolved, by means of certain breviats*. En este trabajo se expone un método para calcular el valor futuro de una unidad monetaria a una cierta tasa de interés, para luego aplicar este resultado a la determinación del valor presente de una serie de pagos (anualidades o rentas). Plantea, también, *ecuaciones de valor*, un concepto de fundamental importancia en las teorías financiera y actuarial.

Prácticamente, toda la teoría elemental de las matemáticas financieras se construyó en esta época. Y esto resulta bastante comprensible, en vista de que las herramientas teóricas necesarias para el desarrollo de fórmulas para el cálculo de valores presentes y montos, no van más allá de la aplicación de técnicas algebraicas básicas.³ No obstante, para poder contar con una teoría del interés completa, se requiere de la aplicación de conocimientos que en aquel tiempo no habían sido desarrollados aún, o se encontraban en etapa de surgimiento. Nos referimos concretamente al cálculo diferencial e integral, una técnica que no estaría disponible sino hasta el siglo XVIII, a la teoría de probabilidad, y a las modernas teorías económico-financieras que intentan explicar las complejas relaciones entre los niveles de las tasas de interés y el entorno macroeconómico, "así como el comportamiento de los individuos en la asignación intertemporal de sus recursos en un entorno incierto".⁴ El cálculo diferencial e integral empezó a aplicarse como herramienta auxiliar durante los siglos XVIII y XIX para incluir el modelo continuo de la teoría del interés, en tanto que la teoría de probabilidad tiene una aplicación relativamente reciente en los modelos financieros.⁵

1.1.2 La teoría de probabilidad

Otro de los bloques de construcción de la ciencia actuarial y, sin vacilación alguna, el más esencial, es la teoría de probabilidad. Es ampliamente conocido que esta teoría surge de la necesidad de resolver problemas relacionados con los juegos de azar. El primer libro que se escribió sobre este tipo de juegos fue el *Liber de ludo aleae*, de Girolamo Cardano, el cual se publicó en 1663. Posteriormente, Galileo se ocupó de los juegos de azar en *Sopra le scoperte dei dadi*, obra que fue publicada hasta 1718. En ambos trabajos se pueden apreciar ya de forma definida los elementos que constituyen el enfoque clásico de la probabilidad, también conocido como *probabilidad a priori*.

En 1654, Antoine Chevalier de Méré, más conocido como el Caballero de Méré, quien tenía un particular interés por los juegos de azar, plantea a los matemáticos franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat, un problema sobre un juego que consistía en lanzar un par de dados 24 veces. La cuestión radicaba en decidir si debía o no apostarse a que durante los 24 lanzamientos se obtendrá al menos un par de seises.

² Entre otras contribuciones de Stevin podemos mencionar la extensión del sistema de lugares decimales a los que representan valores inferiores a la unidad, llamando a las décimas, centésimas y milésimas, primas, secundas y tercias, respectivamente.

³ Esta aseveración no es del todo precisa. Considérese, por ejemplo, la cuestión de determinar la tasa de interés utilizada en el cálculo del valor presente de una anualidad. Para resolver este problema, hará falta resolver una ecuación de grado n , donde n representa el número de años de duración del contrato. Para la época a la que nos estamos refiriendo, se conocían técnicas para resolver ecuaciones hasta de grado cuarto. Si bien la teoría de Galois demuestra que no existen fórmulas explícitas para resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor a 5, las soluciones o raíces se pueden aproximar mediante métodos numéricos.

⁴ Marín y Rubio, 2001.

⁵ Entre los trabajos pioneros en el campo de aplicación de la teoría de probabilidad a las finanzas, encontramos la tesis doctoral del matemático francés Louis Bachelier, *Théorie de la spéculation* (París, 1900).

Algunos matemáticos italianos de los siglos XV y XVI, en particular Luca Pacioli, Nicola di Tartaglia y Gerolamo Cardano, habían ya estudiado problemas semejantes, como el de la distribución equitativa del dinero en juego entre dos jugadores que han interrumpido su partida.

Como era usual en aquellos tiempos, el planteamiento y discusión de problemas se divulgaba entre los estudiosos a través de cartas. De la comunicación epistolar entre Fermat y Pascal sobre el problema expuesto por De Mére, surgieron los principios fundamentales de la teoría de probabilidad planteados por primera vez. Como señala Vega-Amaya (2002), “*el impacto que provocaron las soluciones de Pascal y Fermat fue tan profundo, que para muchos historiadores, 1654 es el año del nacimiento de la teoría de probabilidad, mientras que los progresos previos solamente son prehistoria.*”

En 1657 Christian Huygens, analizando la correspondencia entre Fermat y Pascal sobre el problema de los dados, encontró una serie de resultados de los cuales se derivó la primera obra sobre teoría de probabilidad. Su trabajo, titulado *Libellus de ratiociniis in ludo aleae*, trata sobre problemas asociados con juegos de azar. En esta obra introduce un concepto de trascendental importancia: el *valor esperado* o *esperanza matemática* de una variable aleatoria; también analiza el concepto de *juego justo*, definiéndolo como aquél en el que cada uno de los jugadores tiene la misma esperanza matemática. El concepto de juego justo aplicado al ámbito de la ciencia actuarial da origen al *principio de equivalencia*, del cual hablaremos más adelante.

Debido al interés que se tenía sobre los juegos de azar, la teoría de probabilidad se divulgó rápidamente, de manera que el tema se abordó profusamente durante el siglo XVII. En ese período resaltan las contribuciones de Jakob Bernoulli, quien formuló la ley de los grandes números, y de Abraham De Moivre, con una versión particular del teorema central del límite (teorema de De Moivre-Laplace).

Posteriormente, en 1812, Pierre Simon Laplace introdujo nuevas ideas y técnicas matemáticas en su libro *Theorie analytique des probabilités*. Con antelación a Laplace, la teoría de probabilidad se aplicaba casi exclusivamente a resolver problemas relacionados con juegos de azar; por el contrario, Laplace aplicó probabilidades a diversas áreas del conocimiento, como la genética, la psicología y la economía.

1.1.3 El análisis estadístico de los registros de mortalidad

El registro sistemático de nacimientos y defunciones tiene su origen en la Inglaterra de principios del siglo XVI. Esta práctica se suscita a partir de un decreto derivado del *Concilio de Trento*⁶ (1545-1563), que dictaba que los párrocos de todas las iglesias mantuvieran registros de bautizos y matrimonios. En 1614, el papa Paulo V ordenó que se llevaran también padrones de funerales y entierros. Casi al mismo tiempo, las iglesias evangélicas de Alemania comenzaron a llevar registros de bautizos, casamientos y funerales. En Inglaterra aparecen los famosos *Bills of Mortality* que sirvieron de base para importantes trabajos como los de John Graunt y Richard Price, a quienes nos referiremos en subsecuentes secciones.

En 1662 se publica el primer estudio estadístico notable sobre una población. Su título: *Natural and political observations upon the bills of mortality of the city of London*. Tratados similares aparecieron más tarde bajo la tutoría de William Petty. Entre sus estudios podemos mencionar *Observations on the Dublin bills*, 1683; *Political survey and anatomy of Ireland*, 1691, y *Political arithmetic*, obra esta última en la que se resalta la importancia de la incipiente teoría estadística⁷ (a la

⁶ Concilio ecuménico de la iglesia católica apostólica romana. Convocado con la intención de responder a la Reforma protestante, supuso una reorientación general de la Iglesia y definió con precisión sus dogmas esenciales. Los decretos del Concilio fijaron los paradigmas de fe y las prácticas de la Iglesia hasta mediados del siglo XX.

⁷ El término *estadística*, derivado de la palabra *estado*, aparece a mediados del siglo XVIII para denotar conjuntos de datos relevantes para el estado o gobierno.

que se refiere como *aritmética política*) como “el arte del razonamiento a través de cifras concernientes a los asuntos gubernamentales”.

Un estudio sobre las tasas de mortalidad en la ciudad de Breslau, en Alemania, realizado en 1693, fue utilizado por el astrónomo inglés Edmund Halley como base para la construcción de una tabla de mortalidad. A este trabajo nos referiremos con mayor detalle más adelante.

1.2 Las primeras tablas de mortalidad

La ciencia actuarial surge como respuesta a una necesidad específica de los gobiernos en la Edad Media: para financiar guerras de expansión y colonización, los gobiernos se allegaban de fondos mediante la venta de rentas vitalicias. Con frecuencia, el precio de una anualidad se calculaba mediante reglas de carácter empírico. Por ejemplo, el costo podía establecerse como 14 veces el pago anual (lo cual se denominaba una “*compra de catorce años*”), sin importar la edad del comprador. El precio que se fijaba para las anualidades dependía de la tasa de interés, pero comúnmente era independiente de la edad del rentista. Esta práctica motivó que los compradores eligieran, preferentemente, niños pequeños en buenas condiciones de salud como beneficiarios de estos contratos.

Es entonces cuando se manifiesta la necesidad de contar con una técnica que permitiese la correcta valoración del costo de estas rentas en función de la edad del beneficiario. No obstante, esta técnica tendría que esperar algún tiempo, pues el valor de una anualidad, además de depender de la tasa de interés, depende de las probabilidades de sobrevivencia del rentista, por lo que el cálculo riguroso de las primas o precios de estos contratos involucra un conocimiento previo de la teoría de la probabilidad, la estadística y la demografía.

El elemento clave es, como se ve, la noción de las probabilidades de fallecimiento o de sobrevivencia de un individuo en función de su edad. Este parámetro se resume, generalmente, en una *tabla de mortalidad*, por lo que si se pretende conocer los orígenes de la ciencia actuarial, es conveniente investigar cuáles fueron los pasos iniciales en la construcción de este tipo de herramientas.

1.2.1 La tabla de Ulpiano

Existe evidencia de que los romanos contaban con la información estadística y los conocimientos suficientes para la construcción de tablas de anualidades. Es en Roma donde surge una de las mayores aportaciones al surgimiento y consolidación de los seguros: la organización de sociedades cooperativas de enterramiento como forma rudimentaria de los actuales seguros de vida y enfermedades. También es dentro de esta cultura donde se encuentran los antecedentes más importantes del seguro de anualidades vitalicias en una norma jurídica por la que las viudas de los prestatarios de ciertos contratos de préstamos percibían una indemnización en forma de renta. En la *Lex Falcidia* (*Lex, Falcidia*, año 40 a.C.) aparece por primera vez el concepto de anualidad. En el año 220 d.C., Domicio Ulpiano, jurista romano,⁸ construyó una tabla de esperanzas de vida con el objeto de valorar legados en forma de ingresos vitalicios, de acuerdo con esta ley.

x	0-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50-54	55-59	60-64
e _x	30	28	25	22	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	7	5

Tabla de esperanzas de vida de Ulpiano

En opinión de diversos autores, entre ellos Walter J. Mays,⁹ existe incertidumbre en cuanto a si la tabla construida por Ulpiano es una tabla de esperanzas de vida o de valores presentes de rentas vitalicias de una unidad monetaria anual, calculadas a una cierta tasa de interés. Mays menciona

⁸ Ulpiano desempeñó el cargo de *praefectus praetoria*, similar a un ministro de justicia, durante el Imperio Romano.

⁹ Mays, 1979.

también que posiblemente esta tabla es un refinamiento de otra descrita por Aemilius Macer, un contemporáneo de Ulpiano. Como referencia de la importancia que llegó a tener esta tabla, vale la pena señalar su aplicación en el cálculo de rentas vitalicias en épocas tan distantes de su creación, como los albores del siglo XVIII.

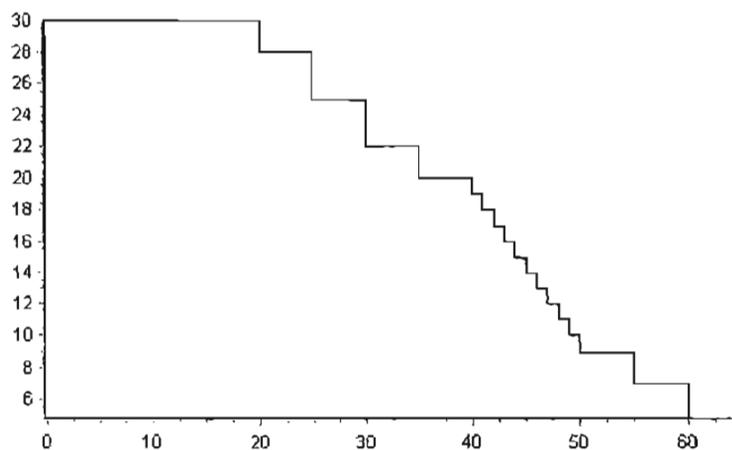
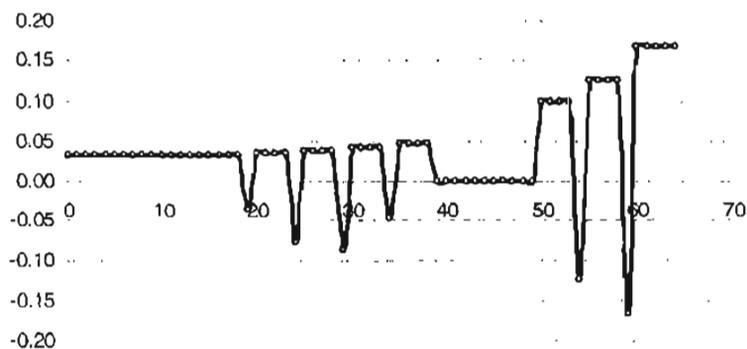


Tabla de Ulpiano (esperanza de vida en función de la edad)

Como resulta explicable, la tabla de Ulpiano muestra algunas incoherencias e irregularidades que se revelan cuando intentamos estimar las probabilidades de fallecimiento correspondientes. Un ejemplo lo encontramos al determinar las tasas de mortalidad. Para tal fin, aplicamos la fórmula recursiva de la esperanza abreviada de vida, $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$. De esta relación resulta, al despejar la tasa anual de mortalidad, $q_x = 1 - (e_x / (1 + e_{x+1}))$.

En la gráfica siguiente se puede observar que, para algunas edades, las tasas de mortalidad son negativas. La razón por la cual se obtienen estos valores es que, si se observa en la tabla de Ulpiano, entre dos edades contiguas puede haber una diferencia de más de una unidad en la esperanza de vida, lo cual no es posible. Para comprender porqué, recuérdese que la *esperanza incompleta o abreviada de vida* se define como el valor esperado de la variable aleatoria $K(x)$, el número entero de años que restan de vida a una persona de edad x , es decir, $e_x = E[K(x)]$. Considérese la expresión para q_x que recién hemos analizado. Si, tal como se puede comprobar en la tabla de Ulpiano para algunas edades, $e_x - e_{x+1} > 1$, entonces $e_x > e_{x+1} + 1$ y, por lo tanto, el numerador del sustraendo en la expresión para q_x será mayor que el denominador, lo que implicará que el valor de q_x sea negativo.



Valores de q_x estimados a partir de la tabla de esperanzas de vida de Ulpiano

1.2.2 Graunt y los “bills of mortality”

En 1662, John Graunt, un mercader inglés interesado en cuestiones científicas, publica sus *Natural and political observations made upon the bills of mortality*, tratado en el que se pueden apreciar las ideas que dieron origen al análisis estadístico descriptivo y a la demografía. Esta obra contiene una recopilación de registros de nacimientos y fallecimientos en la ciudad de Londres durante los años 1604 a 1661. El objetivo principal de este trabajo era conocer la distribución de la población de acuerdo a características tales como el sexo, la edad, religión, ocupación, rango o grado, o, algo que interesaba al gobierno, la proporción de hombres aptos para tomar las armas.

A partir de sus datos, Graunt construye una tabla de mortalidad. Aunque la información analizada por Graunt no registraba la edad al fallecimiento, sí incluía la causa del mismo. Con esta limitación, y aquí radica principalmente el mérito de Graunt, comienza a plantear algunos supuestos: ya que algunas enfermedades podían relacionarse primordialmente con la infancia, calculó la proporción de personas que morían de enfermedades infantiles (las cuales serían, presumiblemente, niños), añadiendo la mitad de las que morían de enfermedades como sarampión o varicela que afectan tanto a niños como a adultos. Bajo estas premisas, dedujo que aproximadamente el 36% del total de fallecidos eran niños menores de 6 años. Como hipótesis adicional para completar su tabla, presume que ninguna persona vive más de 86 años.

Si bien Graunt no da una interpretación probabilística de las cifras que calculó, su trabajo puede considerarse la primera tabla de mortalidad, la cual, como resulta atinado pensar, resultaba inexacta y bastante desviada de la experiencia real. Como muestra de lo que acabamos de afirmar, si se estima la esperanza de vida al nacer, ésta resulta ser de sólo 17.5 años.¹⁰

x	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86
l_x	100	64	40	25	16	10	6	3	1	0

Tabla de Graunt

1.3 Primeros intentos de valuación de rentas vitalicias

1.3.1 Las tontinas

Durante el reinado de Luis XIV, el llamado *Rey Sol* (1643-1715), Francia se consolidaba como potencia hegemónica. En esta época, la política expansionista del imperio lo llevó a confrontaciones bélicas contra Inglaterra, España, Flandes, Alemania, Italia y Holanda. Si bien, en muchos aspectos Francia contaba con una posición bastante firme, las finanzas no se encontraban en un estado satisfactorio. La inadecuada política de recaudación de impuestos, en conjunción con la necesidad de mantener una de las fuerzas armadas más grandes de Europa, conformada por más de 300.000 hombres, llevaron a buscar nuevas fuentes de financiamiento.¹¹

En 1654, Laurens Tontis,¹² banquero napolitano, que gozaba de una posición política influyente en las cortes parisinas, gracias a la ayuda del cardenal Mazarin, consejero del rey, propuso un sistema de anualidades para obtener fondos para el Estado.

¹⁰ Schoen, 1976. Se puede estimar la esperanza de vida al nacer suponiendo que el número de fallecimientos entre edades consecutivas se distribuye uniformemente entre las edades para las cuales existen valores tabulares. Realizando este ejercicio se obtiene $e_0 = 17.72$. Nicolás Bernoulli, en su obra *De usu ars conjectandi in jure*, calcula la esperanza de vida al nacer para la tabla de Graunt, obteniendo el valor 18.22 bajo la hipótesis de que los fallecimientos ocurren a la mitad de cada intervalo de edades.

¹¹ Edwards, 20XX.

¹² La palabra *tontina* se deriva del apellido de este personaje italiano.

Aunque se trataba de una forma de especulación, su sistema puede considerarse como el primer intento de utilizar las leyes de la probabilidad y la esperanza de vida para fijar el precio de las anualidades. Con este sistema, se constituían asociaciones de individuos que, al margen de su edad, creaban un fondo de contribuciones equitativas para cada miembro. El total se invertía, y al final de cada año el interés obtenido se repartía entre los sobrevivientes. El último sobreviviente recibía el interés ganado ese año y la totalidad del capital.

El plan de Tontí era el siguiente:¹³ recolectar un fondo de 25 millones de libras e invertirlo a una tasa del 4.1% anual, obteniendo un rendimiento 1,025,000 libras. Los suscriptores del fondo se dividían en 10 grupos o clases, de acuerdo a su edad: 0-7, 8-14, 15-22, 23-28, 29-35, 36-42, 43-49, 50-56, 57-63 y 64, ó más. Cada grupo recibiría un pago anual de 102,500 libras. Las contribuciones al fondo eran mayores para personas más jóvenes, en tanto que la tasa de rendimiento se ajustaba en función de la edad, siendo la tasa más baja a medida que la edad del participante era menor. Estas características suponen un avance respecto a la forma de fijar los precios de anualidades contingentes durante la edad media. Dentro de cada grupo, los intereses se distribuían entre los miembros que sobrevivían a cada año; una vez extinguido el grupo, el fondo inicial se restituía al estado.

Aunque la idea de Tontí no era totalmente original, ya que en Italia existía un sistema ligeramente similar -los *montes de piedad* o *montes pietatis*-¹⁴ por medio de los cuales los progenitores financiaban las dotes para sus hijos, su esquema de tontinas convenció a Mazarín y al rey, quien, mediante decreto real, formalizó su constitución (*Edict du roi, pour la création de la société de la tontine royale*). No obstante, el Parlamento no dio su aprobación porque consideraba el sistema como un juego de apuestas sobre la vida de los participantes, aunque, paradójicamente, era precisamente su naturaleza especulativa lo que lo hacía atractivo al público.

No fue sino hasta 1689, orillada por su participación en la *Guerra de los Nueve Años*,¹⁵ que Francia estableció su primera tontina, logrando recolectar la cantidad de 3,600,000 libras. El esquema se mantuvo hasta 1726, año en que falleció el último beneficiario. Después de Francia, varios países implementaron este sistema, con distintos niveles de éxito.

Las tontinas también fueron utilizadas por pequeñas agrupaciones como medio para financiar proyectos de construcción de viviendas; asimismo, sentaron los cimientos de los sistemas de retiro en las compañías de seguros.

1.3.2 El trabajo de los hermanos Huygens

En 1669, los hermanos Christiaan y Lodewijk Huygens inician una correspondencia mediante la cual se discuten temas como la esperanza de vida y la aplicación de la tabla de Graunt para el cálculo de anualidades vitalicias. Es necesario señalar aquí que en la época a la cual nos estamos refiriendo, el único lenguaje disponible para hablar sobre probabilidad era el de los juegos de azar.

Sin embargo, aun con este lenguaje y el limitado desarrollo de la incipiente teoría, ya se formulaban y proponían soluciones a problemas tales como la mediana o la esperanza de la variable aleatoria que hoy denotamos como $K(x)$. Para obtener este último resultado, Lodewijk multiplica el

¹³ Kopf, 19XX.

¹⁴ La palabra *mons* se deriva del latín y significa *acumulación de riqueza o dinero*. El término fue usado en el siglo XV para denotar casas de préstamo en general; de la misma forma, los *montes pietatis* o *monti di pietà*, eran casas de préstamo de caridad. Como fueron instituidos originalmente, los *monti di pietà* fueron oportunos y efectivos remedios contra los males ocasionados por la usura practicada por judíos en la Italia cristiana.

¹⁵ También conocida como *Guerra de la Gran Alianza*, conflicto bélico que enfrentó a distintos países europeos contra Francia desde 1688 hasta 1697. En ella, las ambiciones expansionistas del rey francés Luis XIV fueron frenadas por una alianza formada principalmente por Gran Bretaña, las Provincias Unidas de los Países Bajos, y los Habsburgo austriacos (Liga de Habsburgo). El objetivo principal de la Liga de Habsburgo fue mantener el equilibrio de poder entre las casas reales rivales de Habsburgo y Borbón, exacerbado por la incertidumbre sobre el sucesor del rey español Carlos II.

número de personas en cada uno de los renglones de la tabla de Graunt, por el número promedio de años vividos por cada uno de ellos y divide el resultado por el total de personas.

Lodewijk formula también la hipótesis de que los valores de la tabla de mortalidad provienen de una distribución continua, llegando, incluso, a graficarla, construyendo, así, la primera gráfica del complemento de una función de distribución de probabilidad, es decir, la gráfica de la función de sobrevivencia, $s = 1 - F_{T(x)}$. Otra contribución que debemos a Lodewijk es el haber obtenido el tiempo promedio de existencia de un status de dos vidas conjuntas.

1.3.3 Nicolás Bernoulli

Tomando como referencia el trabajo de los hermanos Huygens, Nicolás Bernoulli, en su tesis *De usu artis conjectandi in jure* (1709), calcula la esperanza de vida o "tiempo de vida probable" para las edades de la tabla de Graunt.

Su razonamiento se establece en los siguientes términos: en primer lugar, dado que la tabla de Graunt sólo mostraba los valores de l_x para las edades 0, 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76 y 86, siendo estos 100, 64, 40, 25, 16, 10, 6, 3 y 1, supone que los fallecimientos ocurrirán en los puntos medios de los intervalos, es decir, a las edades 3, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71 y 81.

Por lo tanto, para una persona de edad cero, la esperanza de vida será

$$\frac{36 * 3 + 24 * 11 + 15 * 21 + 9 * 31 + 6 * 41 + 4 * 51 + 3 * 61 + 2 * 71 + 1 * 81}{100}$$

Razonando de manera análoga, su expresión de cálculo para las siguientes edades de la tabla se puede escribir como

$$e_{6+10t} = \frac{\sum_{j=t}^7 \{ [l_{6+10j} - l_{6+10(j+1)}] [5 + 10(j-t)] \}}{l_{6+10t}}, \quad t = 0, 1, \dots, 7$$

Observando que el cálculo de la esperanza de vida puede llevarse a cabo principiando por la edad última de la tabla, idea una fórmula de cálculo recursiva. Por ejemplo, razona, "una persona de 66 años tiene 2 oportunidades de 3 de morir en los próximos 10 años y una de llegar con vida a edad 76. En este último caso, su esperanza de vida es de 5 años. Por lo tanto,

$$e_{66} = \frac{2 * 5 + 1 * (10 + 5)}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Un hombre de 56 años tiene tres oportunidades de seis de morir en una década y otras 3 de sobrevivir a edad 66 y a partir de ahí vivir e_{66} años más. De aquí,

$$e_{56} = \frac{3 * 5 + 3 * (10 + 8\frac{1}{3})}{6}$$

Continuando de esta manera, su fórmula recursiva es

$$e_{6+10t} = \frac{(l_{6+10t} - l_{6+10(t+1)}) + l_{6+10(t+1)} [10 + e_{6+10(t+1)}]}{l_{6+10t}}, \quad t = 0, 1, \dots, 6$$

1.3.4 Jan de Witt y su tratado sobre rentas vitalicias

Los siglos XV a XVII representaron para algunos países europeos como España, Francia, Inglaterra, Portugal y Holanda una primera etapa de colonización de pueblos americanos, asiáticos y africanos. Este movimiento es motivado principalmente por la búsqueda de metales preciosos, la necesidad de encontrar nuevas tierras para la agricultura, la huida de persecuciones derivadas de motivos religiosos y el deseo de ganar a los pueblos indígenas para la causa del Cristianismo. Por lo tanto, se requerían capitales cuantiosos para financiar el expansionismo. Ya se ha comentado que una forma común de allegarse dichos fondos consistía en la venta de rentas vitalicias, pero el precio al que se vendía se basaba en métodos bastante imprecisos que comúnmente ignoraban la duración de la vida humana. Sin embargo, en esta época comienzan a aparecer trabajos que, basados en la incipiente teoría de probabilidad y los escasos resultados derivados de los análisis de registros de mortalidad, toman en cuenta la probable duración de la vida humana.

Entre las primeras tentativas de establecer una metodología de valuación de rentas vitalicias, encontramos el trabajo del estadista y matemático holandés Jan De Witt.¹⁶

En 1670, el gobierno holandés estableció una tontina para captar fondos, sin embargo, su éxito fue bastante exiguo. Posteriormente, intentó capitalizarse vendiendo rentas vitalicias, fijando el precio de éstas mediante los imprecisos métodos que hemos referido al principio de este capítulo. Con el fin de demostrar que el gobierno estaba vendiendo rentas en una cantidad inferior a la que realmente se debía pagar por ellas, De Witt escribe en 1671 su *Waardye van lyf-renten naer proportie van los-renten* (*Reporte sobre el valor de las rentas vitalicias en proporción a las rentas ciertas*). En esta obra, De Witt, apoyándose en los resultados de Huygens, define la esperanza de una variable aleatoria y calcula el valor de una renta vitalicia tomando como base una tabla hipotética con un radix de 768 personas bajo la suposición de que, para las edades de 3 a 53, la probabilidad de fallecer en un intervalo de seis meses, ${}_xq_{\frac{1}{2}}$, toma un valor constante. En la notación actuarial utilizada en la actualidad, su expresión de cálculo puede escribirse como

$$u_t = \sum_{i=1}^{t-1} a_i d_{x+i} / l_x,$$

fórmula que representa la suma de anualidades temporales a t años, multiplicadas por la probabilidad de que el rentista viva $t - 1$ años a partir de que contrata la anualidad.

El trabajo de De Witt corrió la suerte que han corrido diversas ideas innovadoras a lo largo de la historia de la humanidad: fue ignorado por el parlamento de su país y vapuleado al grado de que sus enemigos políticos le acusaron de pretender enriquecerse con el dinero del erario público.¹⁷

1.3.5 Jan Hudde

Otro ciudadano holandés que abordó el problema de la valoración del precio de las rentas vitalicias fue Jan Hudde. Utilizando una estadística de un grupo de 1495 rentistas de los años 1586 a 1590, Hudde, aprovechando sus habilidades matemáticas y conocimientos de la teoría de probabilidad, calcula el precio de una renta vitalicia. A diferencia de De Witt, la base demográfica utilizada por Hudde se deriva de una experiencia de mortalidad de rentistas, por lo que la tabla en la que basó sus

¹⁶ Entre las aportaciones matemáticas de De Witt podemos mencionar la definición general de las secciones cónicas en términos del foco y la directriz y el uso del discriminante para deducir, a partir de los coeficientes de los términos de la fórmula algebraica, de qué curva se trata.

¹⁷ Kopf, 19XX.

cálculos puede considerarse la primera experiencia de mortalidad de un grupo específico, a diferencia de las tablas construidas con anterioridad, relativas a la población general.

1.3.6 Edmund Halley

En calidad de secretario de la Royal Society y editor de la revista de dicha institución, las *Philosophical Transactions*, se encomendó al astrónomo y matemático británico Edmund Halley la tarea de analizar algunos datos demográficos que la Sociedad había recibido de manos del pastor y científico alemán Caspar Neumann.

Los datos analizados consistían en un conjunto de registros sobre el número de nacimientos y fallecimientos ocurridos mes a mes en la ciudad de Breslau, para cada uno de los años de 1687 a 1691. Los registros se encontraban clasificados de acuerdo al sexo y, para los datos sobre fallecimientos, se refería, adicionalmente, la edad al morir.

En el año de 1693, Halley publicó *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslau; with an attempt to ascertain the prices of annuities upon lives*, trabajo que contiene una tabla en la que se muestra el resumen de la experiencia de mortalidad en la ciudad de Breslau, Alemania y con base en la cual construyó la primera tabla de rentas vitalicias en función de la duración probable de la vida determinada con base en una experiencia de mortalidad real.

Los datos con los que contaba Halley podían clasificarse de la siguiente manera:

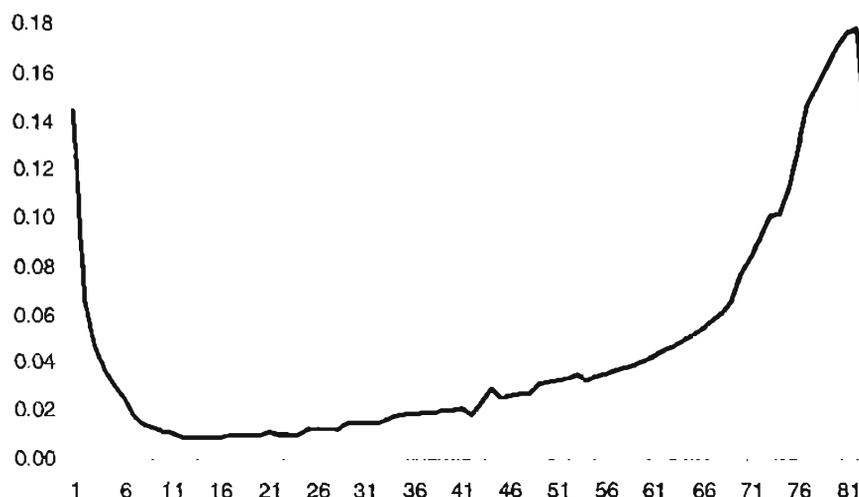
$$\begin{array}{cccc} d_{0,1687} & d_{0,1688} & \cdots & d_{0,1691} \\ d_{1,1687} & d_{1,1688} & \cdots & d_{0,1691} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

donde la entrada d_{ij} corresponde al número de personas entre edades i e $i + 1$ que fallecieron en el año j . Posteriormente, redujo los datos obtenidos en 5 años a un valor por cada período sustituyéndolos por su media aritmética:

$$\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots$$

calculando, así, l_0 como la suma $l_0 = \bar{d}_0 + \bar{d}_1 + \dots$

Derivado de su análisis, Halley construye una tabla donde muestra la distribución de fallecimientos en función de la edad.



Gráfica de valores de q_x para la tabla de mortalidad construida por Halley en 1693

Entre las aplicaciones que Halley dio a su tabla, podemos mencionar las siguientes:¹⁸

- Al igual que Graunt, calcula la proporción de hombres aptos para tomar las armas, fijándola en 9/34. Esta proporción la obtiene una vez que conoce la distribución de la población por edades y suponiendo que la mitad de la población es de sexo masculino. De acuerdo con Halley, esta proporción puede bien pasar como regla general y aplicarse a otras poblaciones.
- Utiliza la proporción $L_{x+1} : d_x$ como una medida de los “diferentes grados de mortalidad o vitalidad”,¹⁹ en función de la edad.
- Define el tiempo de vida restante de una persona de edad x como la solución de la ecuación $L_{x+t} = \frac{1}{2}L_x$, que corresponde al concepto de vida media y equivale desde el punto de vista de la probabilidad, a la mediana de la variable aleatoria $T(x)$, el tiempo restante de vida de una persona de edad x .
- Muestra cómo calcular el precio de un seguro de vida temporal a un año mediante la expresión dada en el punto anterior.
- En cuanto a la valuación de anualidades vitalicias, que es el objetivo principal de esta obra, Halley escribe: “el comprador debe pagar únicamente aquella parte del valor de la anualidad que tiene la posibilidad de recibir; este cálculo debe realizarse anualmente y los valores para cada uno de los años deben sumarse, dando como resultado el valor de la anualidad para la persona propuesta”. De acuerdo con lo anterior, la fórmula de Halley para el valor de una anualidad vitalicia es

$$\sum_{t=1}^{a-x-1} (1+i)^{-t} L_{x+t} / L_x$$

¹⁸ Anders, 1987.

¹⁹ Halley, 1693.

Halley discute también el cálculo de rentas vitalicias sobre dos y tres vidas, considerando las probabilidades de supervivencia conjunta y recomienda el uso de logaritmos para el vasto trabajo que presupone el cálculo de una prima, o, como él mismo dice, de la “vulgar aritmética involucrada.”²⁰

1.4 Los inicios de la matemática actuarial

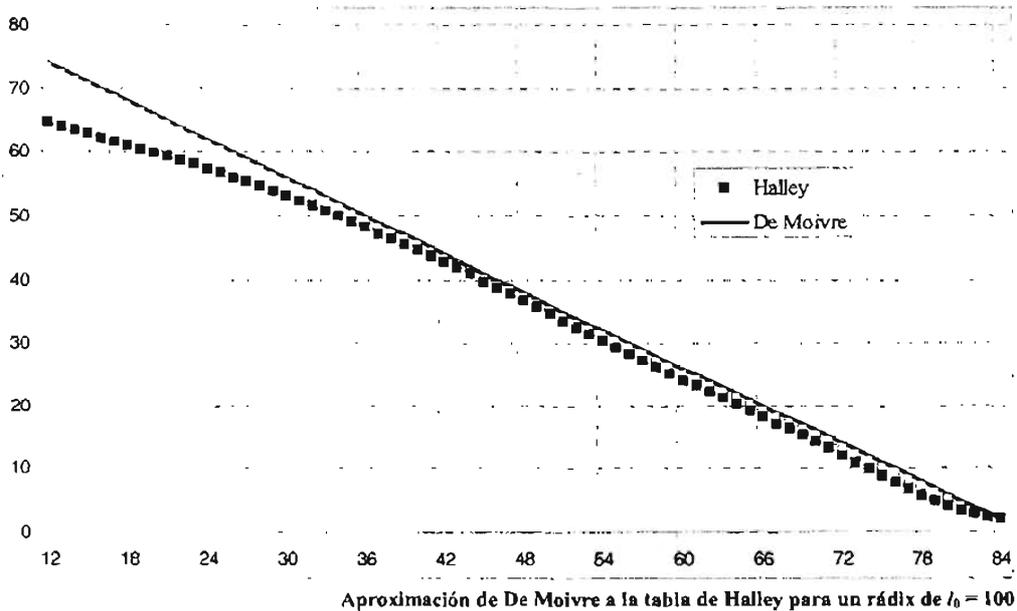
1.4.1 Abraham de Moivre

Después del trabajo de Halley, sólo hacía falta un paso en la creación de la teoría matemática del seguro de vida. Tal paso consiste en el ajuste de una fórmula a una tabla empírica. La primera proposición en este sentido es la de Abraham De Moivre, matemático francés²¹ que se vio forzado a emigrar a Inglaterra después de que Luis XIV revocó el *Edicto de Nantes*.²²

En su tratado *Annuities upon lives*, escrito en 1725, estudia la tabla de Halley y observa que el número de sobrevivientes en edades sucesivas se asemeja a los términos de una progresión aritmética decreciente, y propone la función lineal $l_x = 86 - x$, para $x \in [12, 86]$, como una primera aproximación a dicha tabla. Esta hipótesis implica, entre otras cuestiones, que la función d_x es constante en su dominio, es decir, que el número de fallecimientos es el mismo en cada año.

Aunque, en general, este modelo no es muy realista, tiene la ventaja de simplificar el cálculo involucrado en la valuación de anualidades, lo cual, para la época a la cual nos estamos refiriendo, resultaba de bastante utilidad. Por ejemplo, De Moivre demuestra que el valor de una renta vitalicia puede calcularse como

$$a_x = \frac{1 - [1 + i] a_{\overline{86-x}|}}{i}$$



²⁰ Halley, op. cit.

²¹ El trabajo matemático de De Moivre se orientó principalmente a la teoría de probabilidad, y al álgebra y trigonometría.

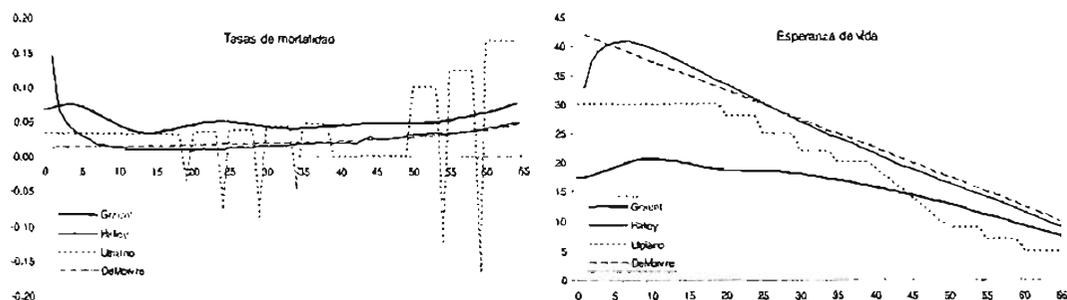
²² Decreto publicado en 1598 que concedía libertades religiosas a los protestantes franceses.

Actualmente, la hipótesis de De Moivre, restringida a edades enteras consecutivas, se aplica extensivamente para determinar probabilidades de fallecimiento o supervivencia para intervalos inferiores a la unidad de tiempo (hipótesis de distribución uniforme de fallecimientos entre edades enteras consecutivas).

Entre otras aportaciones de De Moivre a la matemática actuarial, podemos señalar que en 1744 presentó a la Royal Society un trabajo cuya intención era determinar el valor de una renta vitalicia con un pago proporcional al tiempo transcurrido entre el último pago y el momento del fallecimiento.²³

De Moivre resolvió la mayoría de los problemas sustantivos relacionados con rentas vitalicias. Así, la mayoría de las contribuciones posteriores se orientan a técnicas de aplicación y de cálculo. Entre éstas encontramos los estudios de los holandeses Nicholas Struyck (1687-1769) y Willem Kerseboom (1691-1771) y el francés Antoine Déparcieux. Struyck reconoce la importancia de basar las tablas de valuación en tablas para rentistas y no en tablas de mortalidad; también fue el primero en construir tablas de valuación diferenciadas por sexo. Por su parte, Déparcieux, en su *L'essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* (1760), calcula una importante cantidad de tablas de diversos tipos de anualidades, además de dar una explicación muy detallada de su construcción.

En los cuadros siguientes se exhiben dos comparativos relacionados con los modelos de mortalidad que hemos revisado hasta ahora.²⁴ Por un lado, se contrastan las tasas de mortalidad y por otro, las esperanzas de vida.



²³ Llamadas *anualidades completas*. En la notación actuarial, el símbolo para una renta vitalicia unitaria de este tipo es

$$\ddot{a}_x$$

²⁴ En el estudio de Graunt se muestran los valores de l_x para $x = 0, 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76$ y 86 . Para estimar el número de sobrevivientes a edades intermedias se utilizaron splines cúbicos para interpolar dicha función:

$$l_x = \begin{cases} 100 - \frac{571657}{796545}x + \frac{184529}{9536140}x^3, & x \in [0, 6) \\ \frac{193486088}{1809875} - \frac{392033650}{1908625}x + \frac{1041549}{1809875}x^2 - \frac{1008267}{79634500}x^3, & x \in [6, 16) \\ \frac{868373848}{1908625} + \frac{24211301}{1908625}x - \frac{3208271}{1908625}x^2 + \frac{444351}{159269000}x^3, & x \in [16, 26) \\ \frac{3360986364}{1908625} - \frac{138926297}{1908625}x + \frac{3351252}{1908625}x^2 - \frac{338677}{159269000}x^3, & x \in [26, 36) \\ \frac{6292524}{159269} - \frac{284709}{796345}x - \frac{4965}{318338}x^2 + \frac{661}{1185280}x^3, & x \in [36, 46) \\ \frac{1801212614}{1908625} - \frac{73251855}{1908625}x + \frac{1129337}{1908625}x^2 - \frac{6349}{1908625}x^3, & x \in [46, 56) \\ \frac{39235765}{1809875} - \frac{174036}{1908625}x - \frac{176634}{1908625}x^2 + \frac{11349}{159269000}x^3, & x \in [56, 66) \\ \frac{37185213}{1908625} - \frac{12796525}{1908625}x - \frac{121149}{79634500}x^2 + \frac{1549}{39812250}x^3, & x \in [66, 76) \\ \frac{274215231}{1908625} - \frac{16804341}{3619750}x + \frac{4248757}{79634500}x^2 - \frac{32933}{159269000}x^3, & x \in [76, 86) \end{cases}$$

Vale la pena comentar dos particularidades en estas gráficas. Una, el grado de ajuste bastante aceptable que se obtiene de la aplicación del modelo de De Moivre como aproximación a la tabla de Halley. La otra es que la gráfica de la esperanza de vida para la tabla de Graunt queda, por lo menos en el rango de 0 a 45 años, por debajo incluso de la curva de Ulpiano.

Una explicación que podemos dar a las bajos niveles de la esperanza de vida para la tabla de Graunt es el hecho de que en la época en que ésta fue construida, todavía existían brotes epidémicos de la peste negra, enfermedad que azotó Europa desde mediados del siglo XIV y que perduró durante los siguientes tres siglos, desapareciendo gradualmente tras 1670, año en que apareció el último brote en Inglaterra.

1.4.2 Thomas Simpson

Thomas Simpson es otro de los grandes contribuyentes del desarrollo de la ciencia actuarial. En su obra titulada *Doctrine of annuities and reversions* (1742), acuña el término *decremento* para denotar, en una tabla de mortalidad, el número de personas de una determinada edad que fallecen de un grupo inicial. También debemos a Simpson las fórmulas recursivas para el cálculo de la prima única de una renta vitalicia: $a_x = vp_x(1 + a_{x+1})$ y $\ddot{a}_x = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1}$.²⁵

1.5 Primeras compañías de seguros de vida

Hemos visto que el problema de la valuación de rentas vitalicias fue ampliamente estudiado por la importancia que tuvieron como fuente de financiamiento para los gobiernos. El avance sobre la valuación de seguros de fallecimiento, sin embargo, no corrió con la misma suerte, debido principalmente a restricciones legales y cuestiones morales y religiosas, ya que este tipo de contratos eran percibidos como juegos de apuestas, más que como instrumentos de protección.

Kessler (1985) menciona que el primer contrato de seguro de vida del que se tiene evidencia fue emitido en 1583: un seguro temporal a un año sobre la vida de un ciudadano londinense llamado William Gybbons, siendo beneficiario un tal Richard Martin. Gybbons falleció veinte días después de haberse suscrito el trato, pero los suscriptores se rehusaban a pagar, argumentando que el mismo era por un *año lunar*.²⁶ Sin embargo, el caso llegó hasta los tribunales, en los que se emitió un veredicto favorable al beneficiario, por lo que los suscriptores tuvieron que satisfacer la suma asegurada convenida. Vemos entonces que, desde sus orígenes, la parte a la que le corresponde satisfacer la indemnización en un contrato de seguro, muestra cierta reticencia a cubrir sus obligaciones, situación que, tristemente, prevalece en nuestros días.

1.5.1 La Amicable

La primera compañía de seguros de vida de la que se tenga noticia se estableció en Inglaterra en el año de 1705: la *Amicable Society for Perpetual Assurance Office*. Como sucedió con las rentas vitalicias, en sus orígenes los seguros de fallecimiento se cotizaban con independencia de la edad. En el caso de la Amicable, el plan de protección funcionaba bajo el siguiente esquema.²⁷ Al inicio de cada año se constituía un fondo con las aportaciones que se exigían a los integrantes. Al finalizar el año, se distribuía cierta suma entre los beneficiarios o “*representantes*” de aquéllos que hubiesen muerto durante el período.

²⁵ Leonhard Euler llegó a este mismo resultado en un trabajo publicado en 1760 (*General researches on the mortality and the multiplication of the human race*).

²⁶ El año lunar, de 12 meses lunares, es decir, 354 días (=12 X 29), se emplea en algunos calendarios, en particular en el judío y el musulmán.

²⁷ Kopf, op. cit.

Para tener la posibilidad de ser admitido por la Sociedad, la edad de la persona debía estar comprendida entre los doce y los cincuenta y cinco años, ya que todos los miembros aportaban la misma cantidad. En 1734, la Sociedad hizo ajustes en su esquema de contribuciones para garantizar que los “*dividendos*”²⁸ para cada miembro fallecido no fueran inferiores a £100.

1.5.2 El Scottish Ministers Widows' Fund

En 1743 se constituye la primera institución financiera que expidió contratos de vida a largo plazo basando sus cálculos en métodos científicos. Nos referimos a la *Scottish Ministers Widows' Fund*, institución que sobrevivió 250 años, hasta su cierre en 1993. En 1748, la institución elaboró un estudio intitulado *Calculations with the principles and data on which they were instituted*. Esta disertación, apoyándose en la tabla de mortalidad de Halley, mostraba una proyección de la población de viudas que deberían estar recibiendo una pensión en años futuros y, por lo tanto, una estimación del fondo necesario para cubrir estas obligaciones.

Como muestra de la solidez de las bases actuariales sobre las que se calculó el fondo, podemos mencionar que, en 1777 el número de viudas que estaban recibiendo una pensión era de 305, cifra bastante próxima a las 307 que se habían previsto; por otro lado, en 1765 el fondo ascendía a £58,347, contra la proyección de £58,348.

Una contribución notable a la teoría del seguro apareció en 1747, año en que Corbyn Morris publica *An essay towards illustrating the science of insurance*. En este trabajo, anticipándose a la moderna teoría del riesgo, demuestra, mediante la aplicación del teorema binomial y técnicas probabilísticas básicas, que la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora decrece a medida que la cantidad de pólizas que emite se incrementa.

1.5.3 La Equitable

En 1762 se funda la primera compañía de seguros que basa sus cálculos en la ciencia actuarial: *The Equitable Assurance Society on Lives and Survivorship*. Esta sociedad, establecida en Londres, introdujo el concepto de prima nivelada y, a diferencia de la *Amicable* que cobraba la misma prima a todos los asegurados, establece primas graduadas de acuerdo a la edad, una idea desarrollada por James Dodson en *First lectures on insurance* (1756), primer tratado que expone la teoría del seguro de vida.

Posteriormente, en 1765, se encargó a Richard Price, considerado por algunos autores como el padre de la ciencia actuarial,²⁹ la elaboración de una tabla de mortalidad para el cálculo de primas. Para llevar a cabo su tarea, Price se basó en los registros de mortalidad que se llevaban en la parroquia del poblado de Northampton, en Inglaterra. Los resultados de su estudio se publicaron en 1771 en un libro titulado *Observations on reversionary payments; on schemes for providing annuities for widows, and for persons in old age*, obra considerada como la “biblia” del cálculo actuarial hasta bien entrado el siglo XIX.

Como dato interesante, mencionamos aquí que la Equitable fue la primera institución que utilizó el término *actuario* (*actuary*), refiriéndose a su ejecutivo principal. Etimológicamente, la palabra *actuario* proviene de la palabra latina *actuarius*, término con el que se designaba al planificador-administrador del senado de la antigua Roma.

²⁸ La suma asegurada.

²⁹ Bernstein, 1996.

1.6 Desarrollo ulterior

1.6.1 El concepto de reserva matemática

Los primeros contratos de seguro de vida eran contratos a corto plazo, a lo más, coberturas a un año. La suscripción de contratos de seguros de vida a largo plazo mediante primas niveladas requiere de un nuevo concepto: la *reserva matemática*.

La primera definición de esta idea se debe a Francis Bailey,³⁰ actuario inglés, quien define la reserva como el valor presente de las obligaciones futuras de la compañía, menos el valor presente de las primas por pagar por parte del asegurado, es decir, debemos a Bailey la definición prospectiva de este concepto.

Desde los tiempos en que Halley construyó su tabla de mortalidad, ha sido permanente la preocupación por encontrar técnicas que faciliten el cálculo de las funciones actuariales. Como propuestas de solución se han ideado algoritmos, algunos aplicables únicamente a casos particulares, otros, de aplicación más general.

Como muestra, consideremos el artificio ideado por el matemático danés Nikolaus Tetens, que revolucionaría el tedioso cálculo de primas: en *Introduction to the calculation of life annuities* (1785) presenta el uso de los símbolos de conmutación o valores conmutados y el método de columnas para calcular primas.³¹

Otro ejemplo de procedimiento simplificador lo encontramos en el método recursivo para el cálculo de la reserva matemática. Se debe al actuario norteamericano Elizur Wright una expresión para la reserva, vista como un fondo que se incrementa por el ingreso por primas e intereses, a la vez que disminuye por el pago de siniestros:

$${}_{t+1}V' = ({}_tV + P - c_{t+1})u_{x+t}$$

En la expresión anterior,

$$u_x = \frac{1+i}{p_x} \text{ y } c_x = vq_x$$

La contribución de Wright no sólo se limita al campo teórico. En el aspecto práctico, inventó una máquina que llamó *Arithmeter*, que utilizaba para calcular reservas.³²

Otra expresión recursiva, aunque equivalente a la ideada por Wright, fue propuesta por su coetáneo David Parks Fackler, quien llega a la fórmula

$${}_{t+1}V = ({}_tV + P)u_{x+t} - k_{x+t},$$

donde

$$k_x = \frac{q_x}{p_x}$$

³⁰ Bailey, *The doctrine of life annuities and assurances*, Londres, 1810. Citado en Insolera, 1950.

³¹ Se debe también a Tetens la descripción de un contrato de seguro como un juego de azar, llegando, incluso, a calcular el valor esperado de dicho juego.

³² Moorhead, 1989.

La expresión de Fackler sólo difiere de la de Wright en el punto de referencia focal de valuación de la reserva. Independientemente de los trabajos de Wright y Fackler, el actuario francés Georges Fourret idea un algoritmo de recurrencia para calcular la *reserva global* o *agregada* de un conjunto de pólizas idénticas:³³

$$l_{x+t}(V + P)(1+i) - d_{x+t} = l_{x+t+1}V$$

1.6.2 Sistemas modificados de reservas

1.6.2.1 El método de Zillmer

A medida que el negocio del seguro de vida fue prosperando, la competencia entre compañías aseguradoras se intensificó, lo cual trajo como consecuencia que, para atraer más a la fuerza de ventas, se empezaran a proponer esquemas con comisiones fuertes en los primeros años, en particular el primero.

August Zillmer, actuario alemán, advierte que, bajo estos programas de comisiones decrecientes, la manera tradicional de calcular las reservas puede colocar a la compañía en una situación de desequilibrio en los primeros años, por lo que sugiere un sistema modificado de reservas que permita, solventar, al menos parcialmente, esta situación.

En "*Beiträge zur theorie der prämienreserve bei lebensversicherungsanstalten (Contribución a la teoría de las reservas de primas en una compañía de seguros de vida)*", obra escrita en 1863, Zillmer propone que en vez de calcular la reserva con primas niveladas, se determine mediante un sistema de primas escalonadas, de tal manera que en el primer año se tenga una prima inferior a la prima nivelada, destinando la diferencia entre prima nivelada y prima de primer año, a cubrir los gastos iniciales. De esta manera, los sistemas modificados de reservas permiten a las compañías de seguros reducir sus pasivos (reservas) tomando en cuenta los altos costos del primer año y asegurando una provisión adecuada para enfrentar las reclamaciones por siniestros.

1.6.2.2 Otros sistemas modificados

Bastante se ha discutido sobre cuál debe ser la reducción justa a la prima en el primer año, y, por lo tanto, la cantidad máxima que se puede deducir como préstamo para hacer frente a los altos costos de primer año, para un plan determinado.

Aunque el método de Zillmer propone reducir la prima de primer año, él mismo advierte sobre la cota inferior, la cual debe ser suficiente, por lo menos, para cubrir los costos por reclamaciones. De lo anterior se deduce que la cantidad que se puede tomar de la prima de primer año en calidad de préstamo fluctúa en el intervalo $[0, P_1 - CS_1]$, donde P_1 y CS_1 representan la prima y el costo de siniestralidad del primer año, respectivamente. En el caso extremo de que se tome como préstamo la cantidad $P_1 - CS_1$, se tiene el método conocido como *Año Temporal Preliminar Completo* (ATPC).

En términos matemáticos, la idea que subyace detrás de todo sistema modificado de reservas se resume a calcular la reserva matemática, no con el conjunto de primas con el que originalmente se han determinado las obligaciones del asegurado, P_1, P_2, \dots, P_m , sino con un conjunto de *primas modificadas*, $P_1^{mod}, P_2^{mod}, \dots, P_m^{mod}$. Este último conjunto de primas debe calcularse de tal manera que subsista el principio de equivalencia, es decir, debe sujetarse a la condición de que el valor presente actuarial de las primas no modificadas sea igual al valor presente actuarial de las primas modificadas:

³³ Fourret, Georges. *Note sur une méthode rapide pour calculer les réserves des assurances à prime constante et à risque variable*. Bulletin de l'Institut des Actuaires Français, 1892. Citado en Insolera, 1950.

$$\sum_{t=0}^{m-1} P_{t+1}^{mod} v^t P_x = \sum_{t=0}^{m-1} P_{t+1} v^t P_x$$

En algunos casos, la aplicación del método ATPC puede resultar excesiva. Por ejemplo, la prima de primer año para un plan temporal a 5 años sería igual a la de un dotal al mismo plazo si se utilizase ATPC para modificar las reservas. En este último caso, la cantidad que se tendría disponible para afrontar gastos de primer año sería exagerada, quizás sin necesidad. Para evitar esta situación, las distintas regulaciones han establecido parámetros para diferenciar los planes para los cuales resulta apropiado el método ATPC, de aquéllos para los cuales el método les concede un préstamo en demasía.

De este modo, surgen métodos tales como el de Illinois, el de Ohio, de los Comisionados, etc., métodos que han sido elaborados para cubrir necesidades específicas de regulación o de particularidades de determinadas formas de seguros.

1.7 Modelo continuo del seguro de vida

1.7.1 Modelo de Woolhouse

Indubitablemente, los modelos actuariales de aplicación más extendida en la práctica son los modelos discretos, en los que se supone que los pagos se efectúan en determinados puntos del tiempo, tomando generalmente como unidad referencial el año (por ejemplo, el pago de sumas aseguradas por fallecimiento al final del año en que acaece el deceso o, en un intento de aproximación al modelo continuo, al final del m -ésimo de fracción de año en que ocurre el siniestro), no obstante, para contar con una teoría completa del cálculo actuarial del seguro de vida, se requiere de un modelo continuo.

Debemos a Wesley Stoker Barker Woolhouse³⁴ la elaboración sistemática del modelo continuo del seguro de vida. En *On an improved theory of annuities and assurances* (1869), presenta el modelo como caso extremo de los seguros pagaderos en m -ésimos de año, haciendo tender m a infinito.

Así, en lugar de tratar con seguros de vida pagaderos al final del año de fallecimiento, se habla de seguros pagaderos al momento del deceso; en vez de anualidades pagaderas anualmente, semestralmente o mensualmente, se trata con rentas continuas, es decir, rentas en las que los pagos se realizan en cada instante del tiempo. Por supuesto que, en este último caso, hablamos de una mera idealización, imposible de realizarse en la práctica. No obstante, como se ha mencionado, el modelo continuo sirve de sustento a desarrollos teóricos de importancia, a la vez que, en el campo práctico, se recurre a él para aproximar un cálculo engoroso.

El concepto fundamental que sirve como punto de partida para el desarrollo del modelo continuo es el de *fuerza de mortalidad*,³⁵ que se define como

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_h q_x}{h}$$

y representa una tasa de mortalidad instantánea, anualizada.

³⁴ De las aportaciones más conocidas de Woolhouse recordamos, entre otras, las fórmulas de aproximación para anualidades pagaderas m veces al año (*On Interpolation Summation and the Adjustment of Numerical Tables*, 1865).

³⁵ El concepto de fuerza de mortalidad aparece por primera vez en un trabajo de T. R. Edmonds: *Life Tables, Founded upon the Discovery of a Numerical Law* (1832). Citado en Ogborn, 1953.

El cálculo de primas se efectúa por medio de expresiones que involucran esta función. Por ejemplo, la prima de riesgo única para un seguro de vida entera con suma asegurada pagadera al momento del fallecimiento para (x) está dada por la expresión

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} SA_{t|} p_x \mu_{x+t} dt,$$

donde SA_t representa la suma asegurada a pagar si el asegurado fallece en el instante t , en tanto que el producto $p_x \mu_{x+t}$ es la probabilidad de que (x) fallezca en el intervalo infinitesimal $(x+t, x+t+dt)$.

1.7.2 La ecuación diferencial de Thiele

Como parte de las ventajas que ofrece el modelo continuo, podemos mencionar la posibilidad de aplicar herramientas matemáticas más complejas. Una muestra la podemos apreciar en la conocida ecuación diferencial de Thiele:³⁶

$$\frac{d(l_{x+t} \bar{V})}{dt} = \bar{P}l_{x+t} + \delta l_{x+t} \bar{V} - l_{x+t} \mu_{x+t}$$

Esta expresión representa la contraparte continua de las fórmulas recursivas de cálculo de la reserva que hemos visto en las secciones anteriores. Las fórmulas de este tipo (en el caso discreto, vía la teoría de las diferencias finitas) han dado origen a desarrollos de expresiones que arrojan luz sobre las diversas interpretaciones de la reserva, o a fórmulas cuyas aplicaciones prácticas se materializan en modelos relacionados con esquemas de seguros que involucran devolución de reservas o valores de rescate, además de la suma asegurada.³⁷

1.7.3 Gompertz y Makeham

El intento de De Moivre y de otros investigadores posteriores por encontrar una ley matemática continua que describiese el comportamiento de la mortalidad estuvo siempre expresado en términos de la función l_x , o de L_x . Por ejemplo, una fórmula que representa un progreso respecto a la de De Moivre se debe a Sang, quien propone la expresión $l_x = a + bc^x$. Otro modelo, semejante al de Sang, se debe a Donnay. Su expresión prescinde del término constante a en la expresión de Sang, bajo la hipótesis de que el número de sobrevivientes en un grupo va decreciendo conforme a una progresión geométrica.³⁸

Los modelos de mortalidad que siguen una progresión geométrica decreciente muestran un inconveniente: la tasa de mortalidad instantánea o fuerza de mortalidad resulta ser una función que no depende de la edad.³⁹

³⁶ Thorvald Nicolai Thiele (1838-1910). Astrónomo y matemático danés.

³⁷ Para una exposición de este tipo de investigaciones, consúltese los trabajos de Mereu (1963) o Smith (1964).

³⁸ Donnay formuló tres leyes de mortalidad. Este modelo corresponde a su primera ley. Con el fin de rectificar los poco realistas resultados que se desprenden de esta hipótesis, propone una segunda expresión, que es de la forma $\mu_t = a + bx$. La tercera ley corresponde a un modelo polinomial de 2º grado, i.e., $\mu_t = a + bx + cx^2$.

³⁹ La fuerza de mortalidad, μ_t , se puede definir en términos de l_t como

$$\mu_x = -\frac{d}{dx} \ln l_x$$

Si l_t decrece conforme a una progresión geométrica será $l_t = bc^x$, $\ln l_t = \ln b + x \ln c$, por lo que $\mu_t = -\ln c$.

En 1825, mientras intentaba encontrar una expresión general que facilitara la ardua tarea que implicaba el cálculo numérico del precio de las rentas sobre varias vidas, el actuario inglés Benjamín Gompertz observa que el supuesto de que la tasa de mortalidad instantánea tome un valor constante, tal y como había propuesto Dormoy en su primera ley, conduce a resultados incoherentes, tales como el que el precio de una anualidad sea invariable respecto a la edad.⁴⁰ En su estudio *On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining life contingencies*, basándose en el análisis de la experiencia de mortalidad de las poblaciones inglesas de Carlisle y Northampton, expone una ley fundamentada bajo el supuesto de que “la propensión a morir crece geoméricamente con la edad”.⁴¹ La hipótesis de Gompertz equivale al planteamiento de que la función μ_x es una función exponencial de la edad, es decir, $\mu_x = Bc^x$, donde B y c son constantes a determinar.

El resultado de Gompertz se deriva de la idea de que existe una relación funcional entre l_x y la fuerza de mortalidad, μ_x , que opera continuamente. Así, considera la función $1/\mu_x$ como la medida que cuantifica la resistencia del ser humano a morir y establece la relación

$$\frac{d}{dx} \mu_x = -h \left[\frac{1}{\mu_x} \right]$$

Aunque Gompertz considera que “la muerte puede ser consecuencia de dos causas coexistentes: una, el azar, sin previa disposición a la muerte o deterioro; la otra, un deterioro o creciente inhabilidad a la destrucción”, su modelo comprende exclusivamente el segundo de estos componentes. No fue sino hasta 1860, cuando William Matthew Makeham, en su estudio *On the law of mortality and the construction of annuity tables*, presenta una expresión para la fuerza de mortalidad que toma en consideración un componente constante y que asocia con elementos azarosos, tales como los accidentes, intoxicaciones, epidemias, es decir, factores exógenos al individuo, el primer factor del cual hablaba Gompertz. La formulación matemática de tal hipótesis puede expresarse en términos de la función $\mu_x = A + Bc^x$.

En 1889, derivado del análisis de la tabla inglesa H^M (*Healthy Men*), Makeham formuló una segunda ley, más flexible y fundamentada en la anterior, añadiendo otro sumando, proporcional a la edad: $\mu_x = A + Hx + Bc^x$.

Los modelos de Gompertz y Makeham han sido aplicados extensamente para graduar tablas de mortalidad dado el nivel de exactitud con el que se ajustan a las tasas empíricas y por la propiedad que poseen de obedecer a la llamada *ley del envejecimiento uniforme*, aunque esta característica no es

⁴⁰ Kunitura, 1997. En realidad esta aserción es verdadera sólo si en el modelo de sobrevivencia no existe edad límite (lo cual se cumple para el modelo de Dormoy). En efecto, considérese el caso en que la fuerza de mortalidad es una función constante de la edad, x . La probabilidad de que (x) sobreviva a edad $x+t$ se puede expresar como

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right)$$

Si la fuerza de mortalidad es constante, digamos, igual a k , entonces

$${}_t p_x = \exp(-kt)$$

y, como consecuencia,

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \exp(-kt) = \frac{1}{1 - \exp(-[\delta + k])}$$

expresión independiente de la edad.

⁴¹ Wetterstrand, 1978.

privativa de tales modelos.⁴² Por ejemplo, puede demostrarse que, para dos vidas, el modelo $\mu_x = a + bx$ sigue la ley del envejecimiento uniforme.

Cuando se trabaja con funciones actuariales que involucran varias vidas, el modelo de Makeham es de gran utilidad, ya que se puede sustituir un status de m vidas conjuntas de distintas edades, por uno de igual número de integrantes, pero con idénticas edades, de donde surge el concepto de *edad equivalente*. Esta propiedad fue notada por primera vez por Augustus de Morgan en *On a property of Mr. Gompertz's law of mortality* (1859). En el caso de la hipótesis de Gompertz, se obtiene una simplificación mayor, ya que puede reemplazarse un status conjunto de múltiples vidas por uno de una sola vida.

Los modelos de Gompertz y Makeham tienen el inconveniente de que no muestran un grado aceptable de ajuste para edades extremas, ya sea al inicio o al final de la tabla de mortalidad. Lazarus (1867), pretendiendo extender el modelo de Makeham hacia las edades infantiles, propone una generalización mediante la expresión $\mu_x = A + Bc^x + De^x$.

Quiquet⁴³ ha generalizado el concepto de sobrevivencia según resulta de las hipótesis de Gompertz y Makeham. El punto central de su estudio se resume en la siguiente proposición:

Para un status de r vidas conjuntas (x_1, x_2, \dots, x_r) , existe una ley analítica de sobrevivencia tal que, para efectos del cálculo de las probabilidades de sobrevivencia, puede sustituirse aquel grupo por uno nuevo $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\rho)$ de ρ vidas, con $\rho < r$, que obedecen a una ley analítica de sobrevivencia de igual forma que la primera e independiente de las edades x_1, x_2, \dots, x_r .

Quiquet llama *actuarios* a las ρ vidas $(\xi_1), (\xi_2), \dots, (\xi_\rho)$ que sustituyen de tal forma a las r vidas $(x_1), (x_2), \dots, (x_r)$ y define como *ley de sobrevivencia de orden ρ* a la expresión analítica que hace posible la sustitución de las r vidas por los ρ actuarios. La expresión general de una tal función es de la forma

$$l_x = \exp\left[A + Bx + \sum \exp(r_i x) \varphi_i(x)\right]$$

en la cual A y B son constantes.

1.7.4 Otros modelos de mortalidad

Entre otras leyes notables para el comportamiento de la mortalidad podemos citar las siguientes:

⁴² Para un tratamiento general puede consultarse el estudio de Greville (1956). Insolera (1950) comenta que H. Poterin du Motel (*Note sur une propriété commune à deux lois de survie*, Bulletin de l'Institut des Actuaire Français, tomo VI, 1896), demostró que los modelos de De Moivre y Sang, y sólo ellos, tiene la propiedad de identificar un grupo de r vidas de edades distintas x_1, x_2, \dots, x_r con otro grupo de igual número, pero teniendo todas ellas una misma edad x , definida por la relación

$$\ln f(x) = \sum_{i=1}^r \ln f(x_i)$$

donde

$$f(x) = \frac{c^x}{a + bc^x} \text{, o bien, } f(x) = 86 - x$$

según se trate de la hipótesis de Sang o De Moivre, respectivamente.

⁴³ *Représentation Algébrique des Tables de Survie*, Bulletin de l'Institut des Actuaire Français, tomo III, 1893, citada en Insolera, 1950.

- Wittstein (1883): $q_x = \frac{1}{m} a^{-(ax)^n} + a^{-(a-x)^n} \quad x \in [0, \omega]$;
- Weibull (1939): $\mu_x = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{x}{m} \right]_{\sigma}^{\sigma-1}$;
- Carriere (1992), modelo que resulta de una composición de las leyes de Gompertz y Weibull.

Los modelos de mortalidad que se han propuesto desde la época de De Moivre se han caracterizado porque el rango de edades a los cuales se ajustan es limitado. Y esta situación se antoja bastante comprensible, puesto que las expresiones funcionales para las leyes de mortalidad antes mencionadas contienen un reducido número de parámetros, lo cual juzgamos como poco verosímil para modelar un fenómeno de tan excepcional complejidad. Por ejemplo, las hipótesis de Gompertz y Makeham, que involucran en sus expresiones matemáticas 2 y 3 parámetros, respectivamente, no ofrecen un grado aceptable de ajuste para edades inferiores a 12 años, ni superiores a 80.

Para solucionar este inconveniente, se han sugerido modelos que consisten en la composición de diversas expresiones de cálculo para distintos rangos de edad, como en el caso de Carriere.

Excepcionalmente, se han construido funciones de mortalidad que se ajustan en rangos más amplios de edades. Un modelo que presenta un aceptable grado de ajuste en un intervalo bastante amplio de edades es el de Thiele.⁴⁴ Su expresión es del tipo

$$\mu(x) = a_1 \exp(-b_1 x) + a_2 \exp\left[-\frac{1}{2} b_2 (x-c)^2\right] + a_3 \exp(b_3 x),$$

donde los parámetros $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ y c son todos números positivos.

En la expresión de Thiele el primer sumando, una función exponencial negativa, señala la fuerte disminución de la mortalidad en los años que siguen al nacimiento, para después ir perdiendo intensidad progresivamente, hasta tal punto que, para valores de x superiores a 20, dicha expresión prácticamente se anula; lo mismo ocurre con las otras dos expresiones. El segundo sumando corresponde a una función de densidad normal. El tercer componente corresponde a una función tipo Gompertz que representa el comportamiento de la mortalidad en edades superiores a la edad media de fallecimiento de una persona.

Betzuen (1999) ha comparado esta función con valores empíricos de una experiencia de mortalidad general española, obteniendo una aproximación bastante notable.

Otro modelo de gran complejidad por el número de parámetros que intervienen, es el propuesto por Heligman y Pollard (1980).⁴⁵

$$q_x / p_x = A^{(x+B)^c} + De^{-\{E(\log x - \log F)\}} + GH^x$$

Este modelo de 8 parámetros ha sido utilizado para ajustar tasas de mortalidad derivadas de una experiencia australiana. El término GH^x refleja el patrón exponencial de la mortalidad en las edades adultas, mientras que el primer término captura el decaimiento de la misma durante la niñez. El término medio refleja el incremento en las tasas alrededor de las edades 18 a 25 que se observa en muchas tablas de reciente construcción. Este incremento de la mortalidad en esta etapa de la vida se atribuye a la alta incidencia de suicidios, homicidios, accidentes fatales y mortalidad de mujeres en edad fértil.

Existen pocos estudios sobre el comportamiento de la mortalidad a edades avanzadas. Algunos de ellos muestran que las curvas teóricas tales como la de Gompertz, exponen valores muy

⁴⁴ Thiele, 1871.

⁴⁵ También conocido como modelo UN o de las Naciones Unidas.

altos respecto a las tasas observadas, ya que si bien éstas continúan creciendo, la tasa de variación tiende a disminuir.⁴⁶

1.8 Desarrollos recientes

1.8.1 Modelo estocástico

Durante los siglos XVIII, XIX y parte del s. XX, el cálculo de las funciones actuariales estuvo basado únicamente en el enfoque del valor presente determinístico, es decir, dada una función de mortalidad o de decrementos, se supone que la población a la cual se aplica seguirá dicho patrón y, en función de las cifras de siniestros que se van obteniendo al seguir dicho comportamiento, se van calculando los valores presentes de las obligaciones por cubrir.

El enfoque probabilístico del cálculo actuarial se fundamenta en la hipótesis de que, más que seguir una ley determinística, la mortalidad sigue un patrón aleatorio. El punto de partida en esta dirección es el considerar el tiempo restante de vida de una persona como una variable aleatoria.

Uno de los primeros investigadores en trabajar bajo esta perspectiva fue el actuario estadounidense Walter O. Minge, quien en su trabajo *A statistical treatment of actuarial functions*, considera el tiempo restante de vida de una persona de edad x como una variable aleatoria de tipo continuo, la cual se simboliza, en la notación actuarial internacional, como $T(x)$.

Las funciones biométricas tales como las probabilidades de fallecimiento, de sobrevivencia o la tasa instantánea de mortalidad se obtienen ahora como características numéricas de esta variable aleatoria. Por ejemplo, la función de distribución acumulativa de $T(x)$, $F_{T(x)}$, es

$$F_{T(x)}(t) = P[T(x) \leq t] = {}_tq_x$$

De esta manera, ${}_t p_x = 1 - F_{T(x)}(t)$ y $f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = -{}_t p_x \mu_{x+t}$, de donde se deriva

$$\mu_{x+t} = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)}$$

Este enfoque puede extenderse a una teoría más general de la sobrevivencia, donde el concepto se aplica ya no únicamente a seres humanos, sino a una entidad abstracta que lo mismo puede ser un organismo como una empresa, que un componente de un dispositivo electrónico, dando origen, en este último caso, a la *teoría de la confiabilidad*.

Cuando se efectúa el cálculo de primas y reservas utilizando como base este modelo, se obtienen las mismas fórmulas clásicas que ya se habían descubierto desde los orígenes del cálculo actuarial.⁴⁷ Surge entonces la cuestión de cuál es la *raison d'être* del enfoque probabilístico. La respuesta a esta cuestión la encontramos en la teoría del riesgo, ya que bajo esta perspectiva es posible

⁴⁶ Bayo y Faber, 1983.

⁴⁷ Existe, al menos, una excepción a esta aseveración: en un artículo publicado en el boletín ASTIN, Colin M. Ramsay expone los siguientes problemas clásicos:

Problema 1: Cada uno de los integrantes de un grupo de n vidas independientes de edad x realiza un depósito de una unidad monetaria en un fondo al momento 0. Al momento t , el valor acumulado del fondo se divide en partes iguales entre los sobrevivientes, si es que existen. Si el fondo se acumula a la tasa i anual y ${}_t p_x$ es la probabilidad de que (x) sobreviva t años, calcular el valor esperado de la cantidad que recibirá cada sobreviviente. La respuesta tradicional a este problema es $1/E_x$.

Problema 2: ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad que recibirá cada sobreviviente si en vez de realizar un pago único se realizan aportaciones de una unidad monetaria al inicio de cada año? La solución dada en este caso es $\bar{s}_{x:\infty}$.

Sin embargo, Ramsay demuestra en su artículo que éstas son sólo soluciones aproximadas, dando la respuesta exacta usando los momentos inversos de una distribución binomial.

determinar la prima bajo otros principios distintos al de equivalencia.⁴⁸ Este principio está basado en la *teoría de los juegos justos* que, en términos generales, plantea que la cuota de *entrada* de un juego de azar debe ser determinada de tal manera que la esperanza de la pérdida, tanto para el jugador, como para la "casa", sea igual a cero. Sin embargo, puede demostrarse que si una compañía cobra únicamente la prima derivada de tal principio, entonces, para un portafolio homogéneo, la probabilidad de ruina es igual a $1/2$.⁴⁹

Por otro lado, el modelo estocástico permite definir dos importantes funciones aleatorias: el *valor presente de beneficios* y la *pérdida* en un momento t . La función valor presente de beneficios a edad de emisión x , se define como el valor presente de las obligaciones de la aseguradora a lo largo del tiempo futuro de vida de (x) , $T(x)$. La función de pérdida en un momento t , dado que el asegurado se encuentra con vida en dicho instante, es el valor presente de las obligaciones futuras de la aseguradora, menos el valor presente de las primas por pagar. La mayoría de las funciones actuariales se obtienen como esperanzas o valores esperados de estas funciones. Por ejemplo, la prima única es la esperanza de la función valor presente de beneficios y la reserva en el momento t es la esperanza de la función de pérdida, dado que el asegurado se encuentra con vida en t .

También es posible calcular la varianza, la moda, la mediana y otras características numéricas de estas variables aleatorias, así como sus funciones de distribución y de probabilidad, de tal suerte que el actuario cuenta con parámetros adicionales que le permiten medir con mayor precisión el grado de desviación y, por lo tanto, de riesgo, que puede representar una determinada operación de seguros.

1.8.2 Modelo markoviano

Otra línea de investigación, desarrollada por Engelfriet (1954) y Hoem (1968), y de mayor generalidad, identifica los modelos de salidas o decrementos múltiples con cadenas de Markov, donde los estados del proceso estocástico corresponden a las posibles condiciones de un asegurado (por ejemplo, *activo, inválido, enfermo, jubilado, fallecido*) y las probabilidades de transición se relacionan con las probabilidades de permanencia o de cambio de condición.

Por lo anterior, este modelo es de amplia aplicación en el análisis de seguros tales como los de invalidez, salud o enfermedades terminales, así como en esquemas de pensiones donde existen varias causas de salidas. El mérito teórico de este enfoque es la facilidad para extenderlo a un modelo de estados múltiples, que podemos asociar con las teorías de decrementos múltiples y secundarios o la de varias vidas.

El modelo de decrementos múltiples fue introducido por primera vez por Daniel Bernoulli. En 1760 presentó a la Real Academia de Ciencias de París, un estudio titulado *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*. Bernoulli perseguía dos fines con su estudio: por un lado, determinar las tasas de incidencia de la viruela en función de la edad y, por otro, mostrar los efectos sobre las tasas de mortalidad, derivados de la práctica de la inoculación contra esta enfermedad.⁵⁰

⁴⁸ Para una revisión de los diferentes principios bajo los cuales se puede construir una prima, véase Gerber (1979) o Goovaerts et al. (1984).

⁴⁹ La demostración de este resultado puede consultarse en DeVolder (1997). En el caso particular de una cartera de pólizas idénticas lo suficientemente grande como para poder aplicar el teorema del límite central, tenemos, para una cobertura temporal a un año,

$$P\{S \leq k\} = 1/2 \Leftrightarrow P\left[\frac{S - E[S]}{\sigma_S} \leq \frac{k - E[S]}{\sigma_S}\right] = 1/2$$

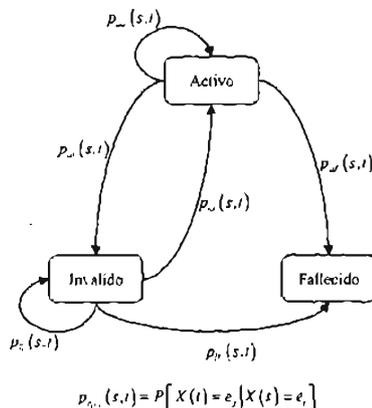
Como $(S - E[S])/\sigma_S$ tiene una distribución aproximadamente normal estándar, se debe tener $(k - E[S])/\sigma_S = 0$, i.e., $k = E[S]$.

⁵⁰ Daw, 1979.

Con posteridad al trabajo de Bernoulli, entre otros científicos de la misma época que estudiaron el modelo de decrementos múltiples, podemos nombrar a Jean Le Rond D'Alembert (1717-83), Johann Heinrich Lambert (1728-77) y Jean Trembley (1749-1811).

Volviendo al modelo de estados múltiples, una póliza individual se representa como una trayectoria de un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, donde $X(t)$ representa la condición del asegurado al momento t y toma valores en un espacio finito de estados $\{1, 2, \dots, N\}$. Las probabilidades de transición del proceso se denotan por $p_{jk}(s, t)$ y se definen como

$$p_{jk}(s, t) = P[X(t) = k | X(s) = j]$$



En el diagrama anterior se muestra un ejemplo de una cadena de tres estados, dos de los cuales son recurrentes (*Activo* e *Invalído*) y el otro absorbente (*Fallecido*). La función $p_{e'e}(s, t)$ está asociada a la probabilidad de transición del estado e , al e , en el intervalo de tiempo (s, t) .

Para representar todas las posibles permutaciones de estado en un intervalo de tiempo (s, t) , se utilizan las llamadas matrices de transición

$$[\Psi]_{s,t} = \begin{bmatrix} p_{11}(s, t) & p_{12}(s, t) & \cdots & p_{1,N-1}(s, t) & p_{1N}(s, t) \\ p_{21}(s, t) & p_{22}(s, t) & \cdots & p_{2,N-1}(s, t) & p_{2N}(s, t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1}(s, t) & p_{N2}(s, t) & \cdots & p_{N,N-1}(s, t) & p_{NN}(s, t) \end{bmatrix}$$

De esta manera, se pone al alcance de la ciencia actuarial toda la teoría de matrices y el álgebra lineal. En particular, para una póliza en la que únicamente se concedan beneficios por fallecimiento o sobrevivencia, se define la variable aleatoria

$$\Lambda^{(x)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } T(x) \geq t \\ 0, & \text{si } T(x) < t \end{cases}$$

Intuitivamente, puede interpretarse esta variable aleatoria como una variable indicadora de sobrevivencia: si al instante t , (x) se encuentra con vida, entonces la v.a es uno, en otro caso será igual a cero. Supóngase que $T(x)$ toma el valor s . Si observamos el desarrollo en el tiempo de la variable $\Lambda^{(x)}(s)$ para una s fija, obtenemos una trayectoria muestral

$$\lambda_s(t) = \Lambda^{(s)}(t) | T(x) = s$$

La distribución de $\Lambda^{(s)}(t)$ se determina mediante las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} P[\Lambda^{(s)}(t) = 1] &= P[T(x) \geq t] \\ &= P[\Lambda(x+t) = 1 | \Lambda(x) = 1] \\ &= P[T \geq x+t | T \geq x] \end{aligned}$$

Esta cantidad, que caracteriza al proceso estocástico $\Lambda^{(s)}(t)$, se denomina *probabilidad de transición* y se denota por

$$P[x|x+t] = P[\Lambda(x+t) = 1 | \Lambda(x) = 1]$$

En este contexto, el concepto equivalente a la fuerza de mortalidad es la llamada *intensidad de transición*, y se define como

$$\mu(x) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P[x|x+t] - P[x|x]}{t} = -\frac{\partial}{\partial t} P[x|x+t]_{t=0}$$

Matemáticamente, el conjunto $\{\Lambda^{(s)}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ representa un proceso markoviano de dos estados con estado absorbente "0". Se puede construir una teoría equivalente utilizando únicamente las propiedades de este proceso. Por ejemplo, el tiempo futuro de vida, $T(x)$, se construye a partir de este proceso como $T(x) = \max\{t | \Lambda^{(s)}(t) = 1\}$.

La relación $P[x|x+t+u] = P[x+t+u|x+t] \cdot P[x+t|x]$ puede demostrarse mediante el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} &P[\Lambda(x+t+u) = 1 | \Lambda(x) = 1] \\ &= P[\{\Lambda(x+t+u) = 1\} \cap \{\Lambda(x+t) = 1\} | \Lambda(x) = 1] \\ &\quad + P[\{\Lambda(x+t+u) = 1\} \cap \{\Lambda(x+t) = 0\} | \Lambda(x) = 1] \\ &= P[\{\Lambda(x+t+u) = 1\} | \{\Lambda(x+t) = 1\} \cap \{\Lambda(x) = 1\}] \cdot P[\Lambda(x+t) = 1 | \Lambda(x) = 1] \\ &= P[\Lambda(x+t+u) = 1 | \Lambda(x+t) = 1] \cdot P[\Lambda(x+t) = 1 | \Lambda(x) = 1] \end{aligned}$$

El modelo que acabamos de resumir puede asociarse también con las llamadas *tablas de mortalidad dinámicas o longitudinales*. Una tabla dinámica es aquella que capta los cambios en las tasas de mortalidad, considerando que dichas tasas dependen no sólo de la edad, sexo o condición de salud de la persona, sino también de la evolución futura de las condiciones de vida. De esta manera, las tasas de años futuros toman en cuenta la variación en los niveles de mortalidad del momento actual y las del año correspondiente. Esta modificación futura se basa en una extrapolación del desarrollo en el pasado.

1.8.3 Modelo con tasas de interés estocásticas

Tradicionalmente, los modelos para el cálculo de primas y reservas en los seguros de vida admiten como supuesto que la tasa de descuento de flujos futuros toma un valor constante. Durante mucho tiempo, el modelo tradicional ha operado satisfactoriamente, básicamente por dos aspectos: *i*) las tasas de interés no sufrían variaciones significativas a lo largo del tiempo, y *ii*) comúnmente se utilizan tasas conservadoras en los cálculos, lo que permite que, implícitamente, se asuman márgenes de seguridad ante desviaciones desfavorables.

Sin embargo, recientemente se ha observado gran volatilidad en las tasas de interés por lo que surge la necesidad de estudiar modelos que permitan cuantificar el riesgo asociado. De esta manera, a partir de los años 70's, la investigación actuarial sobre el modelo probabilístico se ha visto complementada con la introducción del supuesto de que la tasa de interés es un proceso estocástico.

Las dificultades que se presentan bajo este enfoque radican principalmente en la elección de un modelo apropiado para el proceso que describirá el comportamiento de la tasa de interés en el tiempo. Se han sugerido desde modelos tan sencillos como un proceso con variables independientes e idénticamente distribuidas, hasta series de tiempo tales como los procesos *ARMA* (Autoregressive Moving Averages), *ARIMA* (Autoregressive Integrated Moving Averages), *ARCH* (Autoregressive Conditional Heteroscedastic) y *GARCH* (Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedastic).

Otra dificultad que surge es que, aun bajo hipótesis muy simples, como el supuesto de que el conjunto de variables aleatorias que integran el proceso de las tasas de interés son estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas,⁵¹ se obtienen, en algunos casos, expresiones para las esperanzas y varianzas demasiado complejas, llegando incluso a que funciones tales como la de distribución sean inexpresables en términos elementales.

1.8.4 Axiomatización

Toda teoría matemática está fundamentada en un conjunto de axiomas, que son los bloques básicos de construcción para todo el edificio de conocimientos. La ciencia actuarial, como ciencia cimentada sobre principios matemáticos, no puede permanecer al margen de tal orientación. Norberg (1990) ha propuesto una teoría de flujos estocásticos basada en ciertos axiomas de las teorías de la medida y de la integral.

1.8.5 Modelos de tarificación (pricing)

Recientemente, algunos investigadores (entre otros, Mao et al, 2004) han sugerido métodos basados en técnicas de maximización de utilidades, englobando conceptos tales como tasas de interés estocásticas, tasas de rendimiento de inversiones, modelos estocásticos de mortalidad y solvencia. La *prima óptima* (desde el punto de vista del asegurador) se obtiene optimizando una función objetivo estocástica, mediante técnicas de la investigación de operaciones y de simulación de Monte Carlo.

1.9 Epílogo

Hemos visto que la ciencia actuarial se desarrolla a partir de la fusión de ideas en campos tan disímiles como la teoría del interés y la de probabilidad. El grado de sofisticación de los modelos con los que se trabaja actualmente no hubiera sido posible sin el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos y la teoría económica financiera.

⁵¹ Esta hipótesis, por cierto, se encuentra muy alejada de la realidad, ya que se ha observado, a través del análisis de series de tiempo, que estas variables aleatorias tienen un alto grado de correlación.

Queda, sin embargo, mucho trabajo por hacer. Por ejemplo, un problema que ha intrigado a generaciones de investigadores es el de la existencia de una expresión matemática para la fuerza de mortalidad o si existe un límite para la duración de la vida de un ser humano, cuestiones que caen en el ámbito de otras ramas del conocimiento, tales como la teoría de las ecuaciones diferenciales, la biomatemática e, incluso, la filosofía.

Dentro del campo de la modelación estocástica de las variables económicas de trascendencia para la labor de un actuario, tales como las tasas de inflación o de rendimiento, queda todavía un buen trecho por recorrer. En este sentido, en un mundo globalizado, de interrelaciones cada vez más complejas, donde el desarrollo de productos de vida nos involucra en aspectos de la teoría económica financiera, así como de procesos estocásticos, es conveniente, como sugiere Hans Bühlmann,⁵² prepararse para llegar a ser un *actuario del tercer tipo*.

⁵² De acuerdo con Bühlmann, existen tres tipos de actuarios: los *actuarios del primer tipo* son los actuarios de vida, sus métodos involucran cálculos determinísticos. Los *actuarios del segundo tipo* son los actuarios de los seguros no vida, como se les conoce en la Europa continental, que desarrollan métodos probabilísticos para aplicarlos en la solución de problemas que involucran componentes de riesgo. Los *actuarios del tercer tipo* tratan con temas relacionados con el aspecto financiero de los seguros, e incorporan procesos estocásticos en los cálculos actuariales.

Capítulo 2

Elementos de la teoría del interés

*In a time of drastic change it is the learners who inherit the future.
The learned usually find themselves equipped to live in a world that no longer exists.*

Eric Hoffer

Introducción

Siendo este un trabajo en el que se presentan modelos donde las tasas de interés juegan un papel central, conviene revisar a detalle los conceptos involucrados con la teoría del capital y el interés.

2.1 Teorías del capital y el interés

Desde el punto de vista de la teoría económica, el término *capital* designa un conjunto de bienes o una cantidad de dinero de los que se puede obtener, en el futuro, un conjunto de ingresos.

Fueron los economistas franceses del siglo XVIII los primeros en exponer un sistema económico. Su trabajo fue posteriormente ampliado por Adam Smith, de donde surgió la *teoría clásica del capital*, tras su posterior perfeccionamiento por parte de David Ricardo, a principios del siglo XIX. Según la teoría clásica, el *capital* se define como el *conjunto de valores creados mediante el trabajo*. Una parte de este capital está dado por los bienes de consumo utilizados por los trabajadores que producen bienes para el consumo futuro. Otra parte está determinada por los bienes de producción utilizados para obtener rendimientos futuros. La utilización de los bienes de capital aumenta la productividad del trabajo, posibilitando la creación de una plusvalía superior a la que se necesita para mantener la fuerza laboral. Esta plusvalía es el *interés* que se paga al capital.

Karl Marx aceptaba la visión clásica del capital, añadiendo un importante matiz: sólo podían ser considerados capital los bienes productivos que permitían obtener ingresos, independientemente del trabajo realizado por su dueño. La escuela socialista expresaba que el capital termina siendo una fuerza determinante en la sociedad cuando un reducido grupo de personas, los capitalistas, poseen la mayor parte de los medios de producción, y un grupo mayoritario de personas, los trabajadores, reciben poco más que unos medios de subsistencia como pago por la manipulación de los medios de producción que sólo benefician a sus propietarios.

A mediados del siglo XIX, los economistas británicos Nassau William Senior y John Stuart Mill, entre otros, consideraban que la teoría clásica no era satisfactoria. Para reemplazarla, crearon una *teoría psicológica del capital*, basada en una investigación sistemática de los motivos de la moderación o abstinencia. Partiendo del supuesto de que la satisfacción debida al consumo presente es preferible, psicológicamente, a la satisfacción futura, defendían que el capital se origina en la privación del consumo de aquellas personas que desean un rendimiento futuro que compense su actual abstención.

Dado que esas personas están dispuestas a renunciar al consumo presente, la capacidad productiva puede desviarse de la producción de bienes de consumo para producir más medios de producción o bienes de capital. Por lo tanto, al igual que el trabajo físico justifica el pago de salarios, la abstinencia justifica el pago de intereses o beneficios.

Dado que la teoría de la abstinencia se basa en juicios subjetivos, no puede considerarse como una base válida para el análisis económico formal.

Con el fin de evitar esta deficiencia, el economista austriaco Eugen Böhm-Bawerk, y el británico Alfred Marshall, entre otros autores, intentaron unir la teoría de la abstinencia y la teoría clásica del capital. Coincidían con los teóricos de la abstinencia en que la posibilidad de rendimientos futuros incentivaba a los individuos para que se abstuvieran de consumir ahora y utilizaran parte de sus ingresos para aumentar la producción, pero añadían, en consonancia con la teoría clásica, que la cuantía de los rendimientos depende de las ganancias de productividad resultantes del aumento de capital utilizado en el proceso productivo. Estos aumentos de capital alargan el proceso de producción, por lo que aumenta el tiempo necesario para obtener rendimientos. Por lo tanto, se pensaba que la cantidad de dinero que se ahorra, y en consecuencia la cantidad de capital creado, dependían del equilibrio entre el deseo de una satisfacción inmediata, derivada del consumo presente, y el deseo de obtener ganancias en el futuro, derivadas de un proceso de producción más largo. El economista estadounidense Irving Fisher fue uno de los que contribuyeron al desarrollo de esta teoría del capital.

John Maynard Keynes rechazaba esta teoría porque no conseguía explicar las diferencias entre el dinero que se ahorra y el capital creado. A pesar de que, según la teoría ecléctica, el ahorro siempre tenía que ser igual a la inversión, Keynes demostró que la decisión de invertir en bienes de capital es independiente de la decisión de ahorrar. Si las inversiones no son rentables, se seguirá ahorrando a la misma tasa, pero los individuos, las empresas y los bancos tendrán una fuerte preferencia por la liquidez, conservando sus ahorros en lugar de invertirlos. La preferencia por la liquidez provocará un desempleo del capital, lo cual, a su vez, provocará un desempleo o desocupación de la mano de obra.

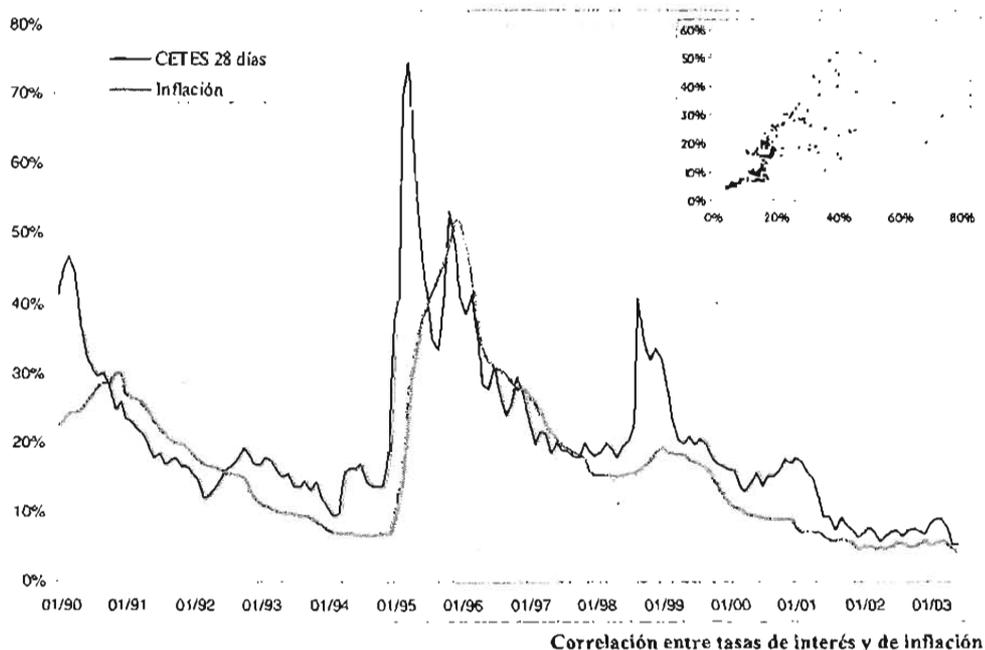
Aunque las teorías sobre el capital son todas relativamente recientes, el capital, como tal, ha existido en las sociedades civilizadas desde la antigüedad. En los antiguos imperios del Lejano Oriente y del Oriente Próximo, y en mayor medida en el mundo grecorromano, se utilizaba el capital en forma de herramientas y equipos sencillos para producir tejidos, cerámica, cristalería, objetos metálicos y muchos otros productos que se vendían. Tras la caída del Imperio romano, la desaparición del comercio en Occidente acarrió una menor especialización en la división del trabajo y redujo la utilización del capital en la producción. Las economías medievales se basaban fundamentalmente en una agricultura de subsistencia, por lo que no se las puede considerar economías capitalistas. Con las Cruzadas empezó a resurgir el comercio. Esta reaparición del comercio se aceleró a escala mundial durante el periodo de los descubrimientos y colonizaciones de finales del siglo XV. El aumento del comercio favoreció una mayor división del trabajo y una mecanización de la producción, estimulando así el crecimiento del capital. Los flujos de oro y plata provenientes del Nuevo Mundo facilitaron el intercambio y la acumulación de capital, estableciendo las bases para la Revolución Industrial, gracias a la cual los procesos productivos se alargaron, necesitando mayores aportaciones de capital.

En las primeras etapas de la evolución del capitalismo, la inversión en fábricas y maquinaria fue relativamente pequeña, siendo el capital predominante el capital circulante o mercantil, es decir, los bienes en circulación. Sin embargo, a medida que la industria iba desarrollándose, el capital industrial, o fijo, fue el que predominó. A finales del siglo XIX y principios del XX, el capital financiero, en forma de pasivos sobre la propiedad de los bienes de capital en todos los sentidos, fue adquiriendo mayor importancia. Al crear, adquirir y controlar estos pasivos, los financieros y los banqueros adquirieron un mayor control sobre la producción y la distribución. Tras la Gran Depresión de la década de 1930, el control financiero fue sustituido, en casi todos los países capitalistas, por el control del Estado.

2.2 Distintas clasificaciones de las tasa de interés

Desde el punto de vista de la teoría económica financiera, las tasas de interés pueden clasificarse tomando como base diversos criterios. Por ejemplo, podemos hablar de tasas *ex ante* o tasas *ex post*. Las tasas *ex ante* son aquellas que se espera se presenten en el futuro, en tanto que las tasas *ex post* se refiere a tasas ya observadas. Las tasas *ex post* pueden considerarse también como realizaciones o trayectorias de un proceso estocástico de tasas de interés *ex ante*.

Otra clasificación de las tasas de interés se refiere a la relación que existe entre éstas y las tasas de inflación. Como lo demuestra la evidencia empírica, existe una correlación positiva entre las tasas de interés y las de inflación.



Bajo este criterio, se clasifican las tasas en *nominales* y *reales*. Las tasas *nominales*, como lo indica el calificativo son "*tasas de nombre*" en el sentido de que no reflejan el verdadero efecto del cambio del dinero en el tiempo al no tomar en cuenta la pérdida del poder adquisitivo por el efecto de la inflación. En contraste, las tasas *reales* reflejan el efecto de la inflación, es decir, representan el valor de una inversión, descontando el efecto inflacionario, por lo tanto, expresan de manera más precisa los cambios en el poder adquisitivo. Si denotamos con i la tasa de interés nominal, π la tasa de inflación y r la tasa real, entonces la relación entre estas tasas es la siguiente:

$$i = r + \pi + r\pi$$

Esta relación se conoce con el nombre de *ecuación de Fisher*, debido a que fue formulada por primera vez por el economista estadounidense Irving Fisher.

También puede hablarse de tasas nominales en otro sentido: si la tasa de interés coincide con el periodo de capitalización, llamamos a éstas tasas *efectivas*. En caso contrario se denominarán tasas *nominales*.

2.3 Factores que influyen en los niveles de tasas de interés

Hasta este punto hemos revisado algunas teorías que explican el origen del capital y del interés, pero, ¿qué factores influyen para que las tasas de interés se muevan en un determinado momento? Para poder contestar esta pregunta, debemos adentrarnos un poco en los terrenos de la macroeconomía, ciencia que estudia el comportamiento de variables agregadas, tales como el producto interno bruto, la renta, el desempleo, la balanza de pagos y las tasas de inflación.

Un concepto de fundamental importancia para la macroeconomía es el *producto interno bruto* (en adelante, PIB), que mide, en términos monetarios, lo que se produce en un país, es decir, la producción final.

El PIB potencial en determinado momento depende de la cantidad de factores de producción disponibles tales como el trabajo y capital y de la tecnología. Estos tres elementos cambian con el tiempo; pero, para un momento concreto, en un análisis estático en el que el capital, la formación profesional, la educación de la mano de obra y la tecnología están dados, la producción dependerá de la utilización del capital y la mano de obra disponibles. Así, esta producción podrá ser inferior a la potencial si existe desempleo o subutilización del capital disponible.

Desaprovechar o subutilizar la mano de obra causa problemas sociales, por lo que la teoría macroeconómica se ha centrado en estudiar las causas y consecuencias del desempleo. Hasta la publicación en 1936 de la *Teoría general del empleo, el interés y el dinero*, de John Maynard Keynes, la explicación clásica de las causas del desempleo afirmaba que éste se debía a estructuras rígidas en el mercado de trabajo que impedían que los salarios bajaran hasta el nivel de equilibrio. La idea que subyace en este modelo afirma que cuando existe desempleo masivo en el mercado de trabajo, la disponibilidad de los trabajadores sin empleo debe reducir los salarios hasta el punto de que algunos no estarían dispuestos a trabajar, por lo que se reduciría la oferta de mano de obra, y que las empresas estarían dispuestas a aumentar su plantilla de trabajadores a medida que el menor costo a pagar (el salario) hiciera rentable la contratación. Sin embargo, si existe rigidez o inflexibilidad que impida que los salarios caigan hasta ese punto en el que la oferta y la demanda se igualen, el desempleo no se reducirá.

La principal innovación de Keynes consistió en afirmar que el desempleo puede deberse a una insuficiencia de la demanda y no a un desequilibrio en el mercado de trabajo. Esta insuficiencia se puede producir porque la inversión planeada es menor que el ahorro disponible. Éste constituye una salida de dinero del flujo circular de la renta, creada mediante la producción de bienes y servicios y utilizada para comprar esos mismos bienes y servicios. Esta salida de ingresos reduce el nivel de demanda agregada. La inversión real, que es la que permite producir, tiene el efecto contrario, por lo que tiende a incrementar la demanda total de bienes y servicios.

En los primeros modelos clásicos sobre desempleo no se tenía en cuenta la posible insuficiencia de la demanda agregada en el mercado de bienes y servicios. Se pensaba que cualquier diferencia entre el ahorro planeado y la inversión planeada se eliminaría mediante un ajuste de las tasas de interés. Por ejemplo, si el ahorro planeado era superior a la inversión planeada las tasas de interés disminuirían. Además, esto reduciría la oferta de ahorro y al mismo tiempo aumentaría la demanda de inversión porque las empresas estarían dispuestas a endeudarse con menores costes para comprar maquinaria, oficinas, etcétera. En otras palabras, las variaciones de las tasas de interés serían la fuerza que equilibraría el mercado de bienes.

Por el contrario, el modelo keynesiano subraya la importancia de las variaciones en el nivel de producción y empleo como movimientos equilibradores que permitirían igualar la inversión y el ahorro, determinándose así el nivel de equilibrio de la renta nacional total y de la producción nacional. Pero éste no tiene por qué corresponderse con el punto en que la oferta de trabajo es igual a la demanda. Es más, según Keynes, una disminución de los salarios en esta situación no ayudaría a reducir el desempleo. Keynes no fue el primer economista que señaló como causa del desempleo la insuficiencia de la demanda agregada en el mercado de bienes. Como él mismo reconocía, Thomas

Robert Malthus y otros economistas ya habían apuntado hacia este tipo de causas. Además, al mismo tiempo que Keynes publicaba su obra, y de manera independiente, el economista polaco, Michal Kalecki, divulgaba una teoría señalando las mismas razones.

La revolución keynesiana implica que el mercado de bienes estaría en una situación de equilibrio de subempleo al no permitir el equilibrio del mercado de trabajo. Por lo tanto, en este último, los empresarios no contratan a los trabajadores que necesitarían para maximizar beneficios si hubiera suficiente demanda en el mercado de bienes.

Durante los últimos decenios, la teoría de Keynes ha sido perfeccionada. Por ejemplo, aunque se sigue discrepando sobre la relevancia de la rigidez de los salarios, se han logrado importantes adelantos en cuanto a la explicación de las causas de esta rigidez sin tener que recurrir al argumento de los sindicatos o de la reglamentación gubernamental del salario mínimo. Al principio parecía difícil reconciliar la noción de rigidez de salarios con el supuesto económico clásico según el cual las personas intentan maximizar su utilidad, que implicaría, en teoría, que estarían dispuestas a aceptar un salario menor con tal de poder trabajar. Sin embargo, al ampliarse el número de variables analizadas y tener en cuenta otras como la maximización a largo plazo del bienestar, la lealtad, el orgullo y otro tipo de variables sociológicas y psicológicas, se ha podido reconciliar el desequilibrio en el mercado de trabajo con los supuestos clásicos del comportamiento maximizador.

Otro aspecto significativo de la teoría macroeconómica parte de la importancia que Keynes otorgaba al efecto de la incertidumbre sobre el comportamiento económico. Se trata de analizar la información asimétrica para explicar el desempleo agregado, utilizando también algunos de los elementos de la teoría de juegos. Por ejemplo, las empresas contratarían más mano de obra si supieran con seguridad que el resto de las empresas iba a hacer lo mismo, de forma que el consiguiente aumento de los salarios pagados permitiría aumentar la demanda agregada de la economía y, por tanto, la demanda de sus productos. Al no existir ningún mecanismo que permita tomar este tipo de decisiones colectivas favorables para todos, el resultado es un equilibrio de subempleo, en el que cada empresa individual decide, de forma egoísta, asegurarse sus propios beneficios, a pesar de que si se pusiese en común la información y se tomaran en conjunto las decisiones se podrían asegurar mayores beneficios para todos.

El énfasis del keynesianismo en la demanda como determinante clave del nivel de producción a corto plazo permitió avanzar en otras áreas de la macroeconomía. En parte se pudo iniciar el desarrollo de la contabilidad nacional y de conceptos tales como el gasto total en consumo, en formación de capital, en consumo público y en exportaciones e importaciones, que constituyen los elementos clave que componen la demanda final agregada de la economía. El planteamiento keynesiano también permitió realizar el análisis de los determinantes de estos elementos clave de la demanda final, al desarrollar, por ejemplo, la teoría de la demanda agregada de consumo y sus relaciones con los niveles de ingresos, así como su dependencia de las tasas de interés existentes.

La teoría monetaria es una parte esencial de la teoría macroeconómica, pero también es origen de algunas de las discrepancias más importantes entre los economistas. Según la visión keynesiana, la tasa de interés es, en esencia, una variable monetaria cuya función principal en un mundo de incertidumbre se limita a equilibrar la oferta y demanda de dinero y no a equilibrar la inversión y el ahorro planeados. Esta interpretación de la función del dinero permite analizar las variaciones en los deseos de tener dinero líquido dependiendo de la tasa de interés y, por lo tanto, determina la velocidad de circulación monetaria. Esto subraya la importancia de los determinantes a corto plazo de las tasas de interés que contrasta con la visión clásica según la cual, a largo plazo, las tasas de interés dependen de las fuerzas reales de la productividad y el ahorro. El planteamiento keynesiano que afirma que las tasas de interés son un fenómeno monetario reflejaba la inclinación de Keynes por el corto plazo; la mayoría de los economistas están de acuerdo en que, a largo plazo, la tasa de interés media, descontada la inflación y los impuestos, tiende a aproximarse a la tasa de retorno real a largo plazo de los activos financieros.

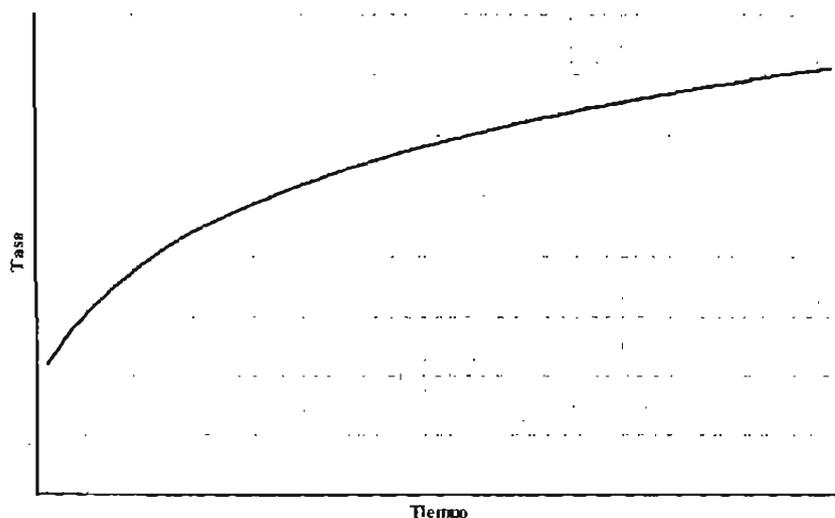
Por el contrario, y partiendo del supuesto de que la demanda de dinero dependa de la riqueza, se ha defendido que un aumento de la oferta de dinero reducirá las tasas de interés, lo que, a su vez, estimulará la inversión y, por tanto, la demanda agregada. Por lo tanto, una forma alternativa para reducir el desempleo consiste en aumentar la oferta monetaria. Sin embargo, y aunque existen diferentes explicaciones sobre los efectos del dinero, casi todos los defensores del monetarismo están de acuerdo en que los efectos de estos métodos para incrementar la producción sólo serían efectivos de modo transitorio, sobre todo porque un aumento de la oferta monetaria, sin otras variaciones, provocaría un incremento de la inflación.

La teoría monetaria también está relacionada con otro elemento clave de la macroeconomía: la inflación. Durante varias décadas tras la Segunda Guerra Mundial se aceptaban dos tipos de teorías de la inflación: de demanda y de costos. Esta última destaca como principal causa de la inflación el excesivo aumento de los salarios en relación con el incremento de la productividad, mientras que la primera teoría achaca la inflación al exceso de demanda en el mercado de bienes. Este exceso de demanda suele producirse por un crecimiento excesivo de la oferta monetaria. Un concepto esencial de la teoría de la inflación desde mediados de la década de 1950 es la *curva de Phillips*, que relaciona el nivel de desempleo con la tasa de inflación. La curva sugiere que un menor desempleo presionará al alza los salarios, permaneciendo todo lo demás igual. Si se acepta que puede existir una relación estable entre empleo e inflación, la sociedad deberá elegir entre varias combinaciones de tasa de inflación y nivel de desempleo. Sin embargo, muchos economistas dudan de que exista esta posibilidad de intercambiar empleo por inflación y, afirman que, de ser posible, la curva de Phillips se desplazaría de tal forma que la mayor inflación no se vería acompañada por un menor desempleo y que, para poder disminuir la tasa de desempleo por debajo de la "tasa natural" habría que aceptar continuos aumentos de la inflación. Otros economistas dudan de que exista una relación estable entre nivel de desempleo y demandas de salarios reales y, por tanto, dudan que exista una *tasa natural de desempleo*. También hay muchos que defienden que esta tasa natural de paro existe, pero que varía con el tiempo.

Los macroeconomistas también se ocupan de analizar, como ya se ha señalado, los determinantes principales de la demanda final, como la inversión *real*, que se diferencia de la inversión en activos financieros, la cual sólo afecta de forma indirecta al nivel de demanda de la economía. Otro componente clave de la demanda final es el gasto público y el alcance de la política fiscal como instrumento estabilizador de la economía en un contexto de pleno empleo sin inflación, marco de análisis fundamental en macroeconomía. Para completar el estudio de los principales componentes de la demanda agregada la macroeconomía debe tener en cuenta los factores de equilibrio externo, es decir, el saldo entre exportaciones e importaciones y los determinantes de éstas, sobre todo los tipos de cambio. Las exportaciones estimulan la demanda de forma análoga a la que se produce en la formación de capital. Las importaciones constituyen una salida de rentas, porque satisfacen la demanda nacional sin generar renta que se pueda reciclar para crear más demanda.

Uno de los factores que influye relevantemente en los niveles de tasas de interés es el plazo de la inversión, elemento que se manifiesta en las llamadas *curvas de rendimiento* o *estructura temporal de las tasas de interés*. Comúnmente, la tasa de rendimiento será mayor, mientras más amplio sea el plazo o fecha de vencimiento de la inversión, comportamiento que se explica, al menos parcialmente, porque el precio de bonos a plazos largos es más volátil, originando mayor riesgo.

Ocasionalmente pueden encontrarse curvas de rendimiento invertidas, es decir, las tasas de rendimiento a corto plazo son superiores a las de largo plazo. Esto tiende a ocurrir en épocas de inflación alta.



Curva de rendimiento

Par explicar el comportamiento de la curva de rendimiento se han desarrollado diversas teorías entre las cuales podemos mencionar la *teoría de las expectativas*, la *teoría de la preferencia de liquidez* y la *teoría de la prima de inflación*.¹

De acuerdo con la primera de estas teorías, la mayoría de los inversionistas tiene como expectativa que las tasas de rendimiento futuras se elevarán, en tanto que aquéllos que estiman que las tasas disminuirán, son los menos. Por lo tanto, existe una presión tendiente a reducir posibles pérdidas por costos de oportunidad.

La *teoría de la preferencia de liquidez* basa su razonamiento en que los inversionistas prefieren invertir a plazos cortos que a plazos largos, con la intención de contar con niveles apropiados de liquidez. Por lo tanto, para incentivar las inversiones a largo plazo, se requerirá de una tasa más atractiva que la que se ofrezca a corto plazo.

Para explicar la tercera de las teorías es preciso remontarnos hacia un concepto que intenta medir el grado de riesgo en una inversión sujeta a la posibilidad de no recuperación de la misma: el *riesgo de crédito*. Supóngase que un inversionista tiene la opción de invertir en los bonos *A* y *B*, ambos con idénticas fechas de vencimiento, tasas de rendimiento y valores de redención. El instrumento *A* es emitido por el gobierno federal, en tanto que el *B* es un bono de alto riesgo. Bajo estas condiciones, es claro que el valor de mercado del bono *B* debe ser menor al del bono *A*. Por lo tanto, al valuar los bonos, deberá considerarse el riesgo de no recuperación de la inversión, atribuyendo una mayor tasa de valuación en el bono más riesgoso. El exceso de rendimiento sobre la tasa libre de riesgo se denomina *prima de riesgo* o *sobretasa*.

Volvamos ahora al tema de la teoría de la prima de inflación. Según esta teoría, el inversionista muestra elevados grados de incertidumbre en lo que concierne a las tasas de inflación futuras y, por lo tanto, requerirá de tasas de interés más altas, a medida que el plazo de la inversión sea mayor.

Una vez comentados algunos factores que pueden ejercer influencia en los movimientos que presentan las tasas de interés, analizaremos los modelos relacionados con la teoría de la variación del valor del dinero en el tiempo.

¹ Kellison, 1991.

2.4 Capital e interés

Como ya hemos visto, todo bien económico o servicio de bien económico constituye un elemento de riqueza. El valor de un elemento de riqueza varía, en general, de un instante a otro y de mercado a mercado; en un determinado instante, define el capital; por otra parte, la medida de las variaciones de dicho elemento a través del tiempo define el *rendimiento, interés o rédito*. El valor del capital es, pues, en un mismo mercado, función del tiempo y el valor del rédito es función de la cantidad de capital de la cual se deriva y del tiempo durante el cual se determina.

Desde un punto de vista técnico, podemos definir como *capital* toda cantidad colocada en una *operación financiera*, entendiendo por tal toda acción que determine una variación cuantitativa del capital.

2.4.1 Funciones de acumulación y de descuento

Una vez que contamos con las nociones de capital e interés desde el punto de vista técnico, pasamos a revisar los conceptos que ligan estos dos elementos.

Sea entonces el interés un flujo bajo cuya acción sufra el capital modificaciones productivas en el tiempo. Sea $\rho(t)dt$ el valor de interés producido por un capital unitario en el intervalo infinitesimal $(t, t+dt)$. Siendo, entonces, $a(t)$ el valor al tiempo t de un capital $a(0)$ colocado inicialmente en una operación financiera, $a(t)\rho(t)dt$ será el valor del rendimiento o rédito producido por el capital $a(0)$ en el intervalo $(t, t+dt)$.

En términos más generales, supóngase una operación financiera en la que se dispone de un capital al tiempo s . Para $0 \leq s \leq t$, se define la función de dos variables

$$a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

llamada *función de acumulación*, como el monto acumulado al momento t , de una inversión original de una unidad monetaria al momento s . Supondremos que el rendimiento sobre una inversión de un capital de C , $C \neq 1$ será proporcional al que se obtendría con un capital unitario, es decir, será $Ca(s, t)$.

Para $s > t$, sea $v(t, s)$ el monto requerido al momento t para tener una unidad monetaria al momento s . Es claro que para dos números reales s y t , $a(s, t) = [a(t, s)]^{-1}$. A la función $v(t, s) = a(s, t)^{-1}$ se le denomina *función de descuento* o *función valor presente*.

2.4.2 La fuerza de acumulación

Supongamos que, para $s < t$, $\frac{\partial a(s, t)}{\partial t}$ existe y es continua. Se define la *fuerza de acumulación*, $\delta(s, t)$, como

$$\delta(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln[a(s, t)]$$

$\delta(s, t)$ representa la tasa instantánea de variación del capital al momento t de una inversión realizada al momento s . Pueden escribirse las funciones de acumulación y de descuento en términos de la fuerza de acumulación, como sigue

$$a(s, t) = \exp \left[\int_s^t \delta(s, \zeta) d\zeta \right]$$

$$a(s, t)^{-1} = \exp \left[- \int_s^t \delta(s, \zeta) d\zeta \right]$$

Comúnmente la valuación de flujos se efectúa respecto a un punto de origen, el momento o instante 0. En este caso, para simplificar la simbología se conviene la siguiente notación: para $s = 0$, sean $a(0, t) = a(t)$, $a^{-1}(0, t) = a^{-1}(t) = v(t)$ y $\delta(0, t) = \delta_t$.

2.5 Funciones de acumulación más comunes en la práctica

Si bien la teoría no restringe el modelo funcional que deben tener las funciones de acumulación, en la práctica las funciones de aplicación más extendida son las de *interés simple* e *interés compuesto*.

2.5.1 Interés simple

Este modelo es equivalente a una función con crecimiento aritmético del capital. La expresión de la función de acumulación es

$$a(t) = 1 + it$$

donde i es la tasa de crecimiento.

Para esta función de acumulación, la tasa de rendimiento anual en el año n , denotada por I_n , es una función decreciente, como se puede constatar de la siguiente expresión:

$$I_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{1 + in - 1 - i(n-1)}{1 + i(n-1)} = \frac{i}{1 + i(n-1)}$$

La fuerza de interés es

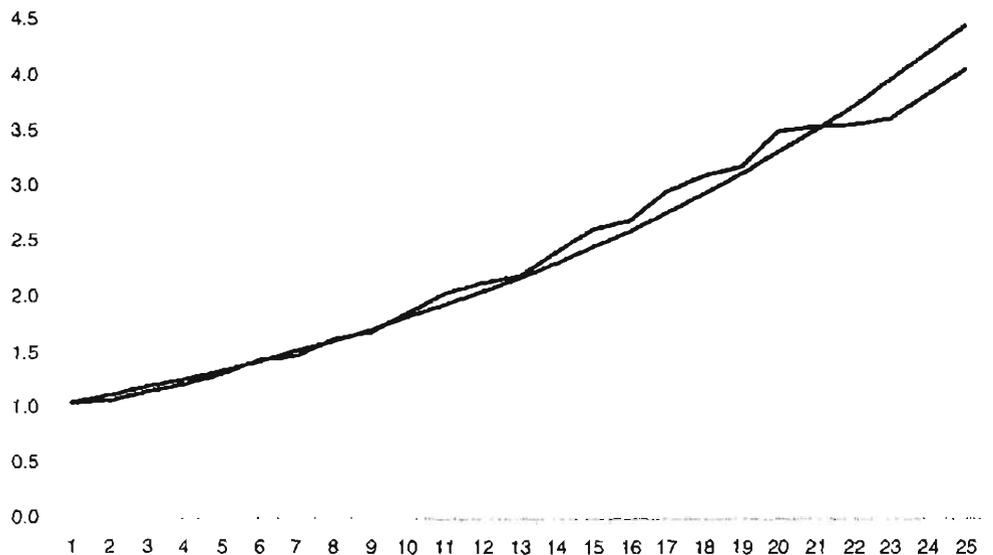
$$\delta_t = \delta(0, t) = \frac{d}{dt} \ln[a(t)] = \frac{d}{dt} \ln(1 + it) = \frac{i}{1 + it}$$

2.5.2 Interés compuesto

Bajo esta ley de capitalización se tiene $a(t) = (1+i)^t$, $I_n = i$ y $\delta_t = \ln(1+i)$. Para los modelos que estudiaremos más adelante, es necesario estudiar las funciones de acumulación y de descuento bajo este régimen, pero suponiendo que la tasa de interés es variable. Analizaremos los siguientes dos casos:

- **Variación discreta.** Bajo esta modalidad, se definen intervalos discretos de capitalización, no necesariamente anuales, ni uniformes. En cada intervalo de capitalización se define una tasa efectiva por período que varía de acuerdo a una ley dada. Se admite que dentro de cada intervalo de capitalización, el capital se mantiene constante ya que la acreditación del rédito se materializa al final del mismo.

- **Variación continua.** En este caso, la variación se define en intervalos infinitesimales, por lo que los cambios en los niveles de rendimiento estarán dados por la función que defina la fuerza de acumulación.



Capitalización continua a tasa constante vs. tasa variable

2.5.2.1 Modelo discreto

Si i_k representa la tasa de interés efectiva correspondiente al período k , entonces la función de acumulación está dada por

$$a(t) = \prod_{k=1}^{[t]} (1 + i_k) (1 + i_{[t+1]})^{t-[t]}$$

donde $\prod_{k=1}^0 (1 + i_k) \stackrel{def}{=} 1$

En términos de la función δ :

$$\begin{aligned} a(t) &= \prod_{k=1}^{[t]} \exp(\delta_k) \exp([\delta_{[t+1]}] [t - [t]]) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{[t]} \delta_k + (\delta_{[t+1]})(t - [t])\right) \end{aligned}$$

En la mayoría de las aplicaciones t será un entero, por lo que

$$a(t) = \prod_{k=1}^t (1 + i_k) = \prod_{k=1}^t \exp(\delta_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^t \delta_k\right)$$

Por otro lado, la función de descuento es

$$\begin{aligned} a^{-1}(t) &= \prod_{k=1}^{[t]} (1 + i_k)^{-1} (1 + i_{[t]+1})^{[t]-t} \\ &= \prod_{k=1}^{[t]} \exp(-\delta_k) \exp(-\delta_{[t]+1} [t - [t]]) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{[t]} \delta_k - (\delta_{[t]+1})(t - [t])\right) \end{aligned}$$

2.5.2.2 Modelo continuo

Sea δ_s la fuerza de interés en el instante s . El valor acumulado de una unidad monetaria al momento t está dado por

$$a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right),$$

en tanto que la función de descuento estará dada por

$$a^{-1}(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right)$$

2.6 Modelos estocásticos

Hasta este punto hemos supuesto que la tasa de interés aplicable en cada momento o en cada período de capitalización es una cantidad fija o variable, pero sujeta a una ley determinista. En lo que sigue, supondremos que la tasa de interés, o la fuerza de interés, según sea el caso, tiene un comportamiento estocástico. En esta última situación, al ser las tasas de capitalización variables aleatorias, las funciones de acumulación y de descuento también lo son.

Si $A(t)$ y $A^{-1}(t)$ representan las funciones de acumulación y de descuento, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} A(t) &= \prod_{k=1}^{[t]} (1 + I_k) (1 + I_{[t]+1})^{t-[t]} \\ A^{-1}(t) &= \prod_{k=1}^{[t]} (1 + I_k)^{-1} (1 + I_{[t]+1})^{[t]-t} \end{aligned}$$

o bien,

$$A(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{[t]} \Delta_k + (\Delta_{[t]+1})(t - [t])\right),$$

$$A^{-1}(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{[t]} \Delta_k - (\Delta_{[t]+1})(t - [t])\right)$$

para el caso discreto y

$$A(t) = \exp\left(\int_0^t \Delta_s ds\right),$$

$$A^{-1}(t) = \exp\left(-\int_0^t \Delta_s ds\right)$$

en el caso continuo.

En estas expresiones, $\{\Delta_k\}$ y $\{\Delta_s\}$ representan conjuntos de variables aleatorias de las tasas de interés y la fuerza de interés, respectivamente. Los valores acumulado y presente de una unidad monetaria bajo la hipótesis de que las tasas de interés son estocásticas se definen como las esperanzas matemáticas de las funciones de acumulación y de descuento, respectivamente.

2.7 Modelos para la tasa de interés

Una *serie de tiempo* es una sucesión de valores ordenados cronológicamente. Si, conocidos los valores pasados de la serie, no fuese posible predecir con total certeza el próximo valor de la variable, decimos que la serie es *no determinista* o *aleatoria*. Al conjunto conformado por la sucesión ordenada de variables aleatorias $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ y la distribución de probabilidad asociada a cada elemento de la sucesión, se denomina *proceso estocástico*. Un proceso estocástico es, por tanto, el modelo matemático para una serie de tiempo aleatoria.

2.7.1 Distribución idéntica e independencia

Entre los modelos más simples para la tasa de interés considerada como un proceso estocástico, encontramos el caso en que las $\{\Delta_k\}$ son v.a.i.i.d. Bajo tal supuesto, las funciones de acumulación y valor presente serán, para t entero positivo,

$$A(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^t \Delta_k\right)$$

y

$$A^{-1}(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^t \Delta_k\right)$$

Si, por ejemplo, $\Delta_k \sim N(\mu, \sigma^2)$, el valor presente de una unidad monetaria será

$$E[A^{-1}(t)] = E\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^t \Delta_k\right)\right] = \exp\left(-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

en vista de que

$$-\sum_{k=1}^t \Delta_k \sim N(-\mu t, \sigma^2 t)$$

y, por lo tanto,

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^t \Delta_k\right) \sim \log \text{normal}(-\mu t, \sigma^2 t).$$

Análogamente, para la función de acumulación se tendrá

$$E[A(t)] = E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^t \Delta_k\right)\right] = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

2.7.2 Modelos dependientes

Los modelos para la tasas de interés que parten de la hipótesis de independencia estocástica permiten obtener resultados analíticos relativamente fáciles de manipular matemáticamente; no obstante, tienen la desventaja de ser poco representativos de la realidad si tomamos en consideración que existe un cierto grado de correlación estadística entre valores sucesivos de las tasas a lo largo del tiempo. En estas circunstancias, resulta más adecuado trabajar con modelos dependientes.

Dentro de los modelos con dependencia, un concepto de fundamental importancia es el de *estacionariedad*. Informalmente, una serie de tiempo es *estacionaria* si se encuentra en *equilibrio estadístico*, en el sentido de que sus propiedades, tales como la media y la varianza, no se alteran a lo largo del tiempo, y por lo tanto no existen tendencias. Un proceso es *no estacionario* si sus propiedades varían con el tiempo. Este tipo de procesos se representan mediante modelos *ARCH* o *GARCH*, modelos que no serán revisados en este trabajo.

La metodología tradicional para el estudio de series de tiempo se basa fundamentalmente en descomponer las series en varias partes: tendencia, variación estacional o periódica, y otras fluctuaciones irregulares.

- **Tendencia.** Es la dirección general de la variable en el periodo de observación, es decir el cambio a largo plazo de la media de la serie. Las técnicas más utilizadas para detectar y eliminar la tendencia de una serie de tiempo se basan en la aplicación de *filtros*, tales como las *medias móviles*, el *ajuste polinomial* y el *suavizamiento exponencial*. Una clase de filtro que es particularmente útil para eliminar la tendencia se basa en aplicar *diferencias* a la serie hasta convertirla en estacionaria.
- **Estacionalidad.** Corresponde a fluctuaciones periódicas de la variable, en periodos relativamente cortos de tiempo. Para analizar la estacionalidad se utiliza la llamada *función de autocorrelación*, que mide la correlación entre los valores de la serie distanciados un lapso de tiempo k , llamado *retardo* o *rezago*. Si existe estacionalidad, los valores separados entre sí por intervalos iguales al periodo estacional deben estar correlacionados de alguna forma. Es decir que el *coeficiente de autocorrelación* para un retardo igual al periodo estacional debe ser significativamente diferente de 0.

- **Otras fluctuaciones irregulares.** Después de extraer de la serie la tendencia y variaciones cíclicas, nos quedará una serie de valores residuales, que pueden ser o no totalmente aleatorios.

En el análisis e identificación de un modelo apropiado para una serie de tiempo dada, el primer paso consiste en transformar la serie de observaciones en una serie estacionaria mediante la aplicación de los filtros apropiados. Enseguida, se procede a estudiar la presencia de regularidades en la serie, para identificar un posible modelo matemático. Para esto, calculamos la *función de autocorrelación* y se compara su forma con un catálogo de patrones gráficos, que son característicos de los diferentes modelos propuestos, seleccionando el que más se adecue a la forma de las *funciones de autocorrelación muestrales*.

Una vez elegida la forma del modelo, se estiman los coeficientes del mismo, y finalmente se procede a efectuar un análisis de los residuos (diferencia entre el valor realmente observado y el valor previsto por el modelo), con el fin de comprobar si el ajuste del modelo a los datos es adecuado.

En las secciones siguientes revisamos algunos de los modelos de series de tiempo que se utilizan para simular series estacionarias.

2.7.2.1. Procesos autorregresivos (AR)

Un proceso autorregresivo de orden n , $AR(n)$, tiene la forma general

$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \dots + \lambda_n X_{t-n} + \varepsilon_t$$

donde las $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. En particular, para un modelo $AR(1)$, si suponemos que el proceso inicia con un valor igual a X_0 , tenemos

$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

de donde

$$\begin{aligned} X_t &= \lambda_1 \{ \lambda_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \} + \varepsilon_t \\ &= \lambda_1 [\lambda_1 \{ \lambda_1 X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} \} + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &= \lambda_1^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la esperanza y la varianza de X_t dado un valor inicial X_0 se pueden calcular como

$$\begin{aligned} E[X_t | X_0] &= E \left[\lambda_1^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^j \varepsilon_{t-j} \right] = \lambda_1^t X_0 \\ \text{Var}[X_t | X_0] &= \text{Var} \left[\lambda_1^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^j \varepsilon_{t-j} \right] = \sum_{j=0}^{t-1} \text{Var} [\lambda_1^j \varepsilon_{t-j}] \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^{2j} \text{Var} [\varepsilon_{t-j}] = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^{2j} \sigma^2 = \frac{1 - \lambda_1^{2t}}{1 - \lambda_1^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

La condición que se debe cumplir para que el proceso sea *estacionario* es que $-1 < \lambda_1 < 1$.

Para las aplicaciones en el seguro de vida, será necesario calcular la esperanza del valor presente de una unidad monetaria, $v(t)$:

$$E[v(t)] = E\left[\exp\left(-\sum_{s=1}^t \Delta_s\right)\right]$$

donde Δ_s representa la fuerza de interés del año s .

$$\begin{aligned} E[v(t)] &= E\left[\exp\left(-\sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s\right)\right] \\ &= \exp\left[-E\left[\sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s\right] + \frac{1}{2} \text{Var}\left[\sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s\right]\right] \\ &= \exp\left[-\sum_{s=0}^{t-1} E[\Delta_s | \Delta] + \frac{1}{2} \text{Cov}\left[\sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s, \sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s\right]\right] \\ &= \exp\left[-\sum_{s=0}^{t-1} \Delta \lambda_1^s + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{r=0}^{t-1} \text{Cov}(\Delta_s, \Delta_r)\right] \\ &= \exp\left[-\Delta \sum_{s=0}^{t-1} \lambda_1^s + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=0}^{t-1} \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} + 2 \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{r=s+1}^{t-1} \frac{\lambda_1^{r-s}}{1-\lambda_1^2} \sigma^2 \right\}\right] \\ &= \exp\left[-\Delta \frac{1-\lambda_1^t}{1-\lambda_1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} t + 2 \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{r=s+1}^{t-1} \lambda_1^{r-s} \right\}\right] \\ &= \exp\left[-\Delta \frac{1-\lambda_1^t}{1-\lambda_1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} t + 2 \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} (1-\lambda_1^{t-s-1}) \right\}\right] \\ &= \exp\left[-\Delta \frac{1-\lambda_1^t}{1-\lambda_1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma^2}{1-\lambda_1^2} t + 2 \frac{\sigma^2 \lambda_1}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1)} \left(t - \frac{1-\lambda_1^t}{1-\lambda_1}\right) \right\}\right] \end{aligned}$$

2.7.2.1.1 Caminata aleatoria

El caso particular de un proceso $AR(1)$ en el que $\lambda_1 = 1$, se obtiene el modelo conocido como *caminata aleatoria*:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Considerando el desarrollo anterior, se tiene que

$$E[X_t | X_0] = X_0$$

y

$$\text{Var}[X_t | X_0] = \sigma^2 t$$

2.7.2.2 Procesos de medias móviles (MA)

El proceso de medias móviles de orden m , $MA(m)$, tiene la forma general

$$X_t = \varepsilon_t + \mu_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \mu_m \varepsilon_{t-m}$$

La esperanza y varianza están dadas por

$$E[X_t] = 0$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_t | X_0] &= \text{Var}\left[\lambda_1^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^j \varepsilon_{t-j}\right] = \sum_{j=0}^{t-1} \text{Var}[\lambda_1^j \varepsilon_{t-j}] \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^{2j} \text{Var}[\varepsilon_{t-j}] = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_1^{2j} \sigma^2 = \frac{1 - \lambda_1^{2t}}{1 - \lambda_1^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

2.7.2.3 Procesos autorregresivos y de medias móviles (ARMA y ARIMA)

Un proceso $ARMA(p, q)$ está constituido por una combinación de p términos AR (proceso autorregresivo), y q términos MA (proceso de medias móviles). La porción AR modela la influencia de los valores anteriores de la serie (X_{t-1} hacia atrás), y la parte MA modela la influencia del ruido en valores anteriores de la serie (Z_{t-1} hacia atrás), junto con el término ε_t que corresponde al ruido esperado en el momento t en el que se estima el nuevo valor de la variable X . La fórmula general de los modelos $ARMA$ es

$$X_t = \lambda_1 X_{t-1} + \lambda_2 X_{t-2} + \dots + \lambda_p X_{t-p} + \mu_1 Z_{t-1} + \mu_2 Z_{t-2} + \dots + \mu_q Z_{t-q} + \varepsilon_t$$

Capítulo 3

Análisis de sensibilidad

*-¡Ah, querido Watson,
aquí entramos en el terreno de las conjeturas,
donde la mente más lógica puede fracasar!*

*Sherlock Holmes, en
La Aventura de la Casa Vacía, de
Sir Arthur Conan Doyle (1891)*

Introducción

Cuando se discute sobre los modelos matemáticos en los seguros de vida de largo plazo, un aspecto de suma importancia tanto para el asegurador, como para las autoridades regulatorias, es la selección de las hipótesis de valuación, es decir, aquellos supuestos de mortalidad, interés y, en algunos casos, de caducidad, que se utilizarán como base para el cálculo de primas y reservas.

Con el propósito de que las compañías de seguros cuenten con una base confiable para hacer frente a las obligaciones que contraen, las entidades de supervisión fijan las tasas de mortalidad mínimas y tipos de interés máximos permisibles a aplicar para propósitos de valuación de reservas. Por otro lado, la aseguradora busca siempre la combinación óptima que le permita, por una parte, aprovechar la información relevante que tiene a su disposición (factores de selección por experiencia propia, variables del entorno económico, etc.) y, por otra, determinar primas que garanticen suficiencia, rentabilidad y un producto competitivo en precio y beneficios. Es de capital importancia, entonces, contar con criterios que permitan inferir los cambios que significan las variaciones en las hipótesis de valuación.

Aparentemente, el efecto de cambios en las hipótesis de valuación sobre las reservas es evidente: si las tasas de mortalidad disminuyen, entonces parece obvio que, al menos para ciertas formas de seguro, las reservas deban reducirse. Por otro lado, si las tasas de interés descienden, uno está tentado a afirmar que las reservas se incrementarán. No obstante, como veremos más adelante, las anteriores aseveraciones no necesariamente son verdaderas.

En este capítulo analizaremos la sensibilidad de primas y reservas a cambios en las tasas de interés, dejando al margen el efecto de las variaciones en las bases demográficas. Antes de iniciar nuestro análisis, será conveniente dejar fundamentado el concepto de reserva matemática.

3.1 La naturaleza de la reserva matemática

Como hemos visto en el capítulo 1, las primeras formas de seguro de vida eran contratos a corto plazo, a lo más a un año. Bajo este esquema de aseguramiento, la compañía aseguradora recibe la cantidad suficiente para hacer frente al costo esperado de los siniestros en el plazo respectivo, ni más ni menos. Sin embargo, con el surgimiento de los esquemas de prima nivelada, aparece la necesidad de acumular reservas para reflejar los diferentes momentos en los que se realizan los ingresos o egresos esperados.

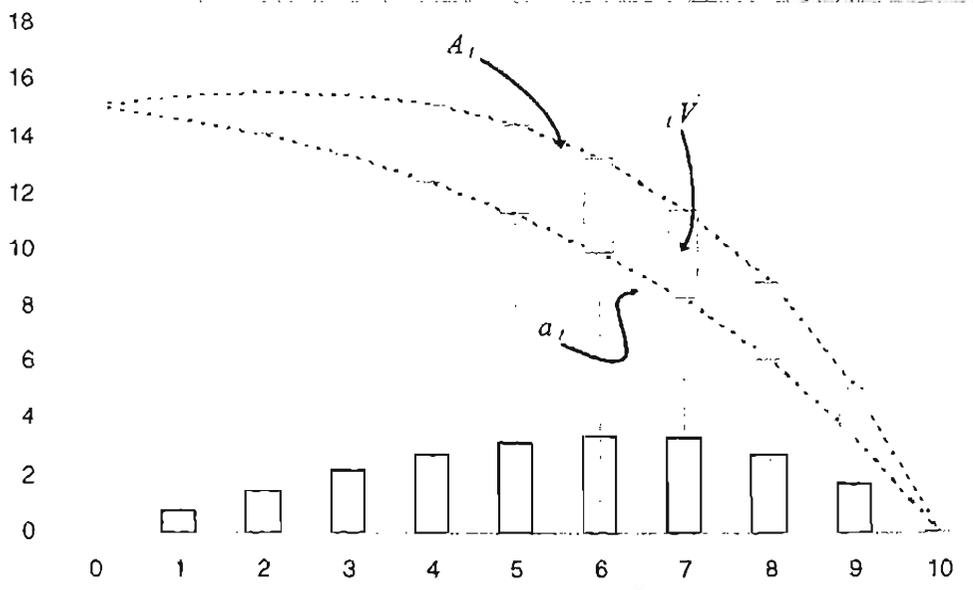
Tomando como referencia el principio de equivalencia, las primas niveladas se construyen bajo la hipótesis de que, al momento del contrato, son iguales, a valor presente actuarial, las obligaciones de la compañía y las del asegurado. A medida que transcurre el tiempo, tal equivalencia puede quedar anulada. En otros términos, si denotamos con A_t el valor presente esperado de obligaciones de la compañía y con a_t el valor presente esperado de obligaciones del asegurado, ambos al momento t , medido a partir del punto de contratación, entonces,

$$A_0 = a_0$$

pero, para $t > 0$, se puede tener

$$A_t \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} a_t$$

Para el año póliza t , definimos la *reserva terminal*, denotada por ${}_tV$, como la diferencia $A_t - a_t$, es decir, ${}_tV$, representa el exceso del valor presente actuarial de obligaciones de la compañía sobre el valor presente actuarial de obligaciones del asegurado al término del año póliza t . Esta es la definición *prospectiva* de la reserva, dada por vez primera por el actuario inglés Francis Bailey.



La definición de reserva terminal desde el punto de vista prospectivo

De la definición de este concepto y en vista de la relación que puede existir entre A_t y a_t , se sigue que V puede tomar valores positivos, nulos o negativos. En este trabajo, nos confinaremos a revisar esquemas de seguros para los cuales V toma valores no negativos. En principio, será conveniente, entonces, conocer bajo qué condiciones las reservas terminales de un plan de largo plazo son positivas.

Antes de atacar este problema, examinaremos la noción de reserva desde otra perspectiva: la que considera tal concepto como el valor acumulado actuarial de las diferencias entre costos de siniestralidad esperados y primas.

Proposición 1. Sea P la prima nivelada de un seguro de vida a n años con plazo de pago de primas igual al plazo de cobertura. Definimos

SA_t , suma asegurada por fallecimiento en el año póliza t ,

$v_t = (1+i)^{-t}$, factor de descuento en el año t ,

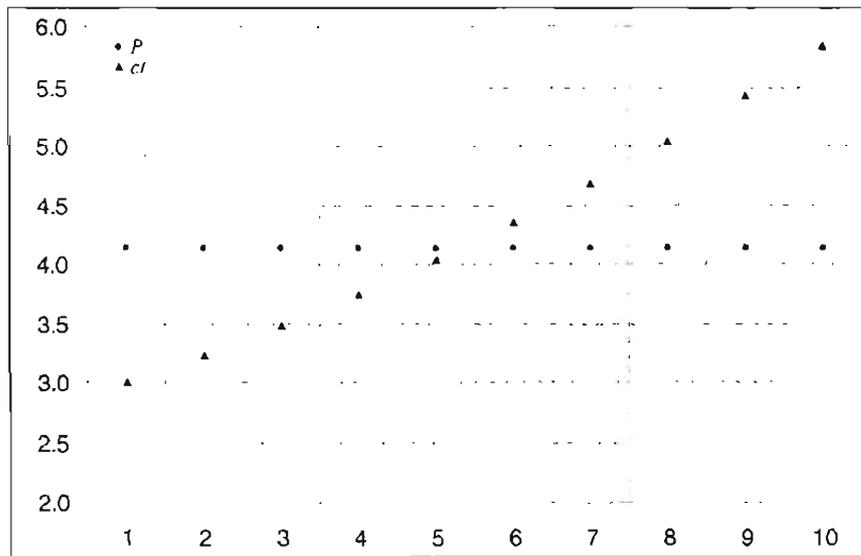
$c_t = SA_t v_t q_{x+t-1}$, costo de siniestralidad esperada del año t .

Si $\{c_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$ es una sucesión creciente, entonces existe $t_0 \in \{1, \dots, n\}$, tal que se cumplen las desigualdades

$$P > c_t, \forall t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}$$

y

$$P < c_t, \forall t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, n\}$$



Costo de siniestralidad, c_t , vs. prima nivelada, P

Puesto que

$$P = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} c_{t+1} E_x}{\sum_{t=0}^{n-1} E_x} = c_1 \frac{E_x}{\sum_{t=0}^{n-1} E_x} + c_2 \frac{E_x}{\sum_{t=0}^{n-1} E_x} + \dots + c_n \frac{E_x}{\sum_{t=0}^{n-1} E_x},$$

la prima nivelada puede considerarse como un *promedio ponderado* de los costos esperados de siniestralidad, donde el peso asociado a c_t es

$$\frac{v^{t-1} E_x}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t E_x}$$

Por lo tanto, al menos intuitivamente, es claro que P debe tomar un valor intermedio entre los c_t 's. La demostración formal es como sigue:

Por el principio de equivalencia,

$$P \sum_{t=0}^{n-1} v^t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} c_{t+1} v^t E_x,$$

donde

$$v^t E_x = v(t) v^t P_x \text{ y } v(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t=0 \\ \prod_{k=1}^t v_k & \end{cases}$$

Consideremos los signos de la sucesión $\{P - c_t\}_{t \in \{1, 2, \dots, n\}}$,¹ distinguiendo los siguientes casos:

i.) Los signos son todos positivos o todos negativos, lo que nos lleva a

$$P \sum_{t=0}^{n-1} v^t E_x \neq \sum_{t=0}^{n-1} c_{t+1} v^t E_x,$$

contradiciendo el principio de equivalencia.

ii.) $P = c_t$ para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$. En este caso se llega a una identidad, pero se contradice la hipótesis de que $\{c_t\}_{t \in \{1, 2, \dots, n\}}$ es una sucesión creciente, ya que si $P = c_t$ para toda $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $c_1 = c_2 = \dots = c_n$.

iii.) La sucesión $\{P - c_1, P - c_2, \dots, P - c_n\}$ muestra varios cambios de signo. En esta situación se presentará necesariamente un cambio de signo de $-$ a $+$, por lo que existirá $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tal que se cumple $P - c_k < 0$ y $P - c_{k+1} > 0$, lo cual significa que $c_k > c_{k+1}$, contradiciendo la hipótesis de monotonicidad de la sucesión de los costos de siniestralidad.

iv.) La sucesión presenta sólo un cambio de signo. Si el cambio es de $-$ a $+$, entonces, por el numeral iii, se contradice la hipótesis de monotonicidad. Queda únicamente la posibilidad de un cambio de $+$ a $-$, misma que no conduce a contradicción alguna.

Tratándose de seguros con pagos limitados, la proposición resulta trivial, puesto que en estas condiciones se tiene $c_t > P = 0$ para $t > m$ y, por otro lado, simbolizando con P_n y P_m las primas niveladas a n y m años, respectivamente ($m < n$), entonces, como puede demostrarse sin dificultad alguna, $P_n < P_m$, de donde se deduce que $P_m > c_t$ para, al menos, toda t que cumpla $P_n > c_t$. ■

¹ En estricto sentido, la acepción que se da en este trabajo al término *sucesión*, no corresponde a la definición matemática de este concepto, puesto que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, por lo que el conjunto de puntos que la conforman es infinito. A partir del término $n+1$ se podrían definir como cero los puntos de la sucesión, pero este hecho no sirve de nada al análisis, razón por la cual nos abstendremos de inclinarnos por esta opción.

La hipótesis de que $\{c_t\}_{t \in \{1, 2, \dots, n\}}$ es una sucesión creciente es esencial y puede dejar de verificarse bajo las siguientes circunstancias, aunque esto no significa que la reserva terminal no exista, sino que ésta puede resultar nula o negativa:

- La tasa de mortalidad es función constante de la edad, situación prácticamente imposible de ocurrir en la realidad.
- La experiencia demográfica consta de un conjunto de tasas de mortalidad que no necesariamente se incrementan al avanzar la edad, como ocurre con la mayoría de las tablas de reciente experiencia, en ciertos rangos de edades.
- La suma asegurada es decreciente, como suele ser el caso en los seguros de deudores o en los de exención de primas pendientes de pago.
- La tasa de interés varía bruscamente de un año a otro. Por ejemplo, en un seguro con suma asegurada constante, si las tasas de mortalidad son crecientes, es suficiente que

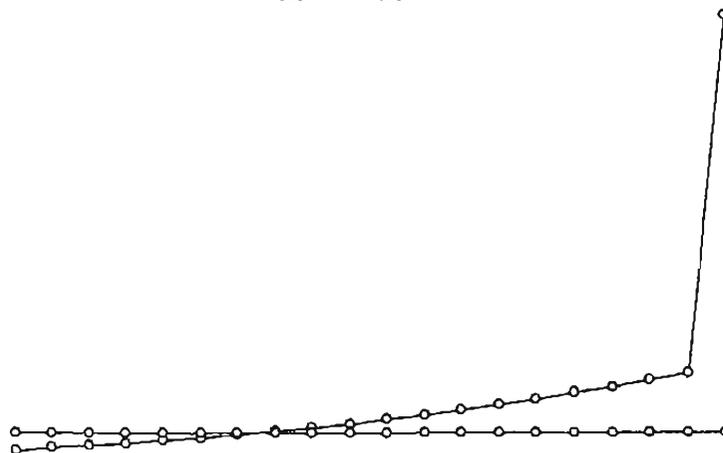
$$\frac{1+i_{t+1}}{1+i_t} > \frac{q_{x+t}}{q_{x+t-1}}$$

para que $c_t > c_{t+1}$.

Si bien desde el punto de vista teórico no existe restricción alguna relacionada con las reservas negativas, en la práctica se procura evitarlas porque representan un activo para la compañía aseguradora que no podrá recuperar en caso de que el asegurado cancele su póliza.

Para los seguros con beneficio de sobrevivencia, el costo de siniestralidad del año n , c_n , está dado por $v_n SA_n$. En estos casos, se garantiza la existencia del cambio de signo en la sucesión de diferencias de primas niveladas y costos de siniestralidad, observando que si k representa el año de cambio de signo de la misma sucesión considerando exclusivamente la cobertura de fallecimiento, entonces, denotando con P_D , P_T y P_{DP} las primas niveladas de los seguros dotal, temporal y dotal puro, respectivamente, se tiene $P_D = P_T + P_{DP} > P_T > c_{k-1}$ y, por otro lado, $P_D < c_n$, ya que de no verificarse esta última condición se tendría $P_D \cdot c_n > c_{n-1} > \dots > c_1$, contradiciendo el principio de equivalencia, al establecerse la desigualdad

$$P_D \sum_{x=0}^{n-1} E_x > \sum_{x=0}^{n-1} c_{t+1} E_x$$



Sucesión de costos de siniestralidad y primas niveladas en un seguro dotal

Veamos ahora en qué casos se puede asegurar la existencia de reservas positivas.

Proposición 2. Las reservas terminales del contrato de seguro cuyas características se enlistan en el teorema 1, son positivas para $t = 1, 2, \dots, n - 1$.

Demostración:

Por la proposición 1, existe un punto $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $P > c_t$ para $t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}$, en tanto que $P < c_t$ si $t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, n\}$. En consecuencia, $V > 0$ para $t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, n\}$. Basta, entonces, demostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo si $t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}$.

Por el principio de equivalencia,

$$\sum_{j=0}^{n-1} [c_{j+1} - P] {}_jE_x^{[0]} = 0 \dots\dots\dots (*)$$

expresión en la cual ${}_jE_x^{[0]}$ representa el factor de descuento actuarial en el origen:

$${}_jE_x^{[0]} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ {}_jP_x \prod_{k=1}^j v_k, & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Para $t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}$, escindimos ahora la suma en el miembro izquierdo de (*) como

$$\sum_{j=0}^{t-1} [c_{j+1} - P] {}_jE_x^{[0]} + \sum_{j=t}^{n-1} [c_{j+1} - P] {}_jE_x^{[0]}$$

De esta expresión se deduce que

$$\sum_{j=t}^{n-1} [c_{j+1} - P] {}_jE_x^{[0]} = \sum_{j=0}^{t-1} [P - c_{j+1}] {}_jE_x^{[0]} \dots\dots\dots (**)$$

Para $t \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, definimos el factor de descuento actuarial en el punto t , ${}_jE_{x+t}^{[t]}$, como

$${}_jE_{x+t}^{[t]} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ {}_jP_{x+t} \prod_{k=t+1}^{t+j} v_k, & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Dividiendo (**) por ${}_tE_x^{[0]}$:

$$\frac{\sum_{j=t}^{n-1} [c_{j+1} - P] {}_jE_x^{[0]}}{{}_tE_x^{[0]}} = \frac{\sum_{j=0}^{t-1} [P - c_{j+1}] {}_jE_x^{[0]}}{{}_tE_x^{[0]}} \dots\dots\dots (***)$$

Ahora, como

$$\frac{{}_j E_x^{[0]}}{{}_t E_x^{[0]}} = \begin{cases} {}_{j-t} E_{x+t}^{[t]}, & j \geq t \\ 1/{}_t E_{x+j}^{[t]}, & j < t \end{cases}$$

La ecuación (***) queda

$$\sum_{j=t}^{n-1} [c_{j+1} - P] {}_{j-t} E_{x+t}^{[t]} = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{[P - c_{j+1}]}{{}_t E_{x+j}^{[t]}}$$

El miembro izquierdo de esta última expresión es igual a ${}_t V$, puesto que representa la suma de las diferencias de valores presentes actuariales entre obligaciones de la compañía y primas pendientes de pago por parte del asegurado, al momento t . Por otro lado, el miembro derecho de la ecuación es positivo en vista de que $P > c$, para $t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}$. Por lo tanto, se cumple que ${}_t V > 0$ para $t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}$.

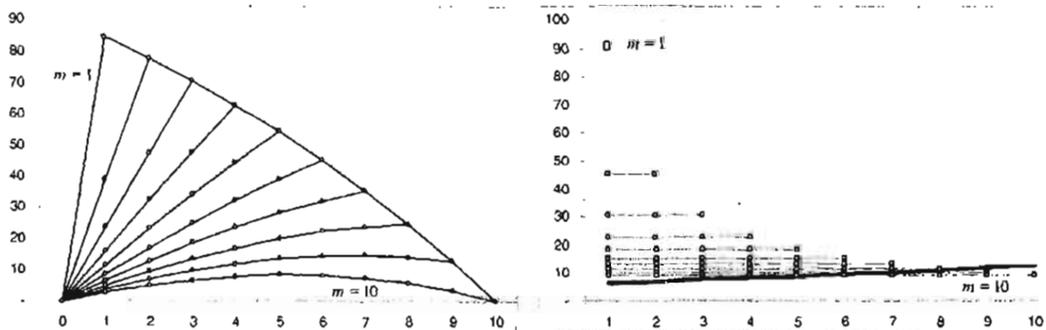
Se ha supuesto que el plazo de pago de primas es igual al plazo de cobertura. Si ${}_t V_a$ y ${}_t V_b$ simbolizan las reservas terminales al año t si la prima se paga por a y b años, respectivamente, entonces ${}_t V_a > {}_t V_b$ para $t \in \{1, 2, \dots, b\}$, siempre que $a < b \leq n$. Para verificar esta aseveración, tenemos, si $t \in \{1, 2, \dots, a\}$,

$${}_t V_a = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{[P_a - c_{j+1}]}{{}_t E_{x+j}^{[j]}} > \sum_{j=0}^{t-1} \frac{[P_b - c_{j+1}]}{{}_t E_{x+j}^{[j]}} = {}_t V_b,$$

puesto que $P_a > P_b$. También,

$${}_t V_a = \sum_{j=t}^{n-1} [c_{j+1}] {}_{j-t} E_{x+t}^{[t]} > \sum_{j=t}^{b-t-1} [c_{j+1} - P_b] {}_{j-t} E_{x+t}^{[t]} + \sum_{j=b-t}^{n-1} [c_{j+1}] {}_{j-t} E_{x+t}^{[t]} = {}_t V_b$$

cuando $t \in \{a+1, a+2, \dots, b\}$. Luego, las reservas terminales serán también positivas si el plazo de pago de primas es menor al de cobertura. ■



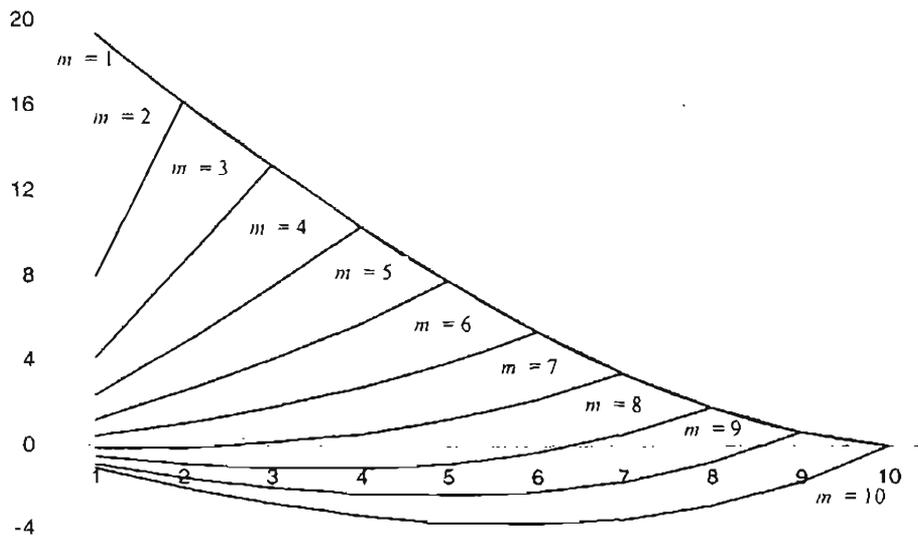
Variación de reservas terminales y primas para un seguro temporal a 10 años para distintos plazos de pago de primas

La proposición 1 demuestra que en los primeros años de vigencia del seguro, la compañía recibe una cantidad superior al costo de cobertura del año en curso, por lo que deberá ir separando y

acumulando los excedentes para afrontar los déficits que se generarán en el futuro. Así, tomando como base la discusión anterior, y en vista de la conclusión de la proposición 2, se puede definir alternativamente la reserva terminal al año t como el valor acumulado actuarial de las diferencias entre primas niveladas y costos esperados de siniestralidad al año t :

$$V = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{[P - c_{j+1}]}{i - j} E_{x+j}^{(j)}$$

Se ha comentado el hecho de que las reservas terminales pueden tomar valores negativos bajo ciertas circunstancias. Un ejemplo pudiera darse si el costo de siniestralidad esperada es decreciente. En los seguros con beneficio decreciente que se han valuado con una tasa de interés constante, se pueden evitar las reservas negativas limitando el plazo de pago de primas. Este procedimiento tiene el inconveniente de que la prima se incrementa, por lo que es necesario reducir el plazo de pago lo menos posible. Al reducir el plazo de pago de primas no es forzoso calcular todas las reservas terminales para verificar si se obtienen reservas negativas. Es suficiente con verificar que la reserva terminal de primer año es positiva, ya que, en tal situación, las reservas terminales de los años sucesivos serán también positivas, como lo demuestra el siguiente razonamiento:



Reserva para un seguro temporal a 10 años con suma asegurada decreciente y distintos plazos de pago

Para un seguro temporal a n años con plazo de pagos k , $k < n$, sea SA_t la suma asegurada del año t y $SA_t q_{x+t-1} > SA_{t+1} q_{x+t}$. Entonces, si ${}_1V > 0$, entonces ${}_tV > 0$, para $t \in \{2, \dots, n-1\}$.

Demostración:

Supongamos, que el plazo de pago de primas es igual al de cobertura. Para los casos en que el plazo de pago de primas sea inferior al de cobertura, la aplicación de la proposición 2 nos conduce directamente al resultado deseado una vez que se ha demostrado el primer caso.

Por hipótesis, $SA_t q_{x+t-1} > SA_{t+1} q_{x+t}$, por lo tanto, el costo esperado de siniestralidad será decreciente, ya que la tasa de valuación es constante. Como ${}_1V > 0$, entonces

$$\sum_{j=0}^0 \frac{[P-c_{j+1}]}{{}_{1-j}E_{x+j}^{[j]}} = \sum_{j=0}^0 \frac{[P-c_{j+1}]}{{}_{1-j}E_{x+j}} = \frac{P-c_1}{v p_x} > 0 \Rightarrow P(1+i) - SA_1 q_x > 0$$

Por lo tanto, para $t \in \{2, \dots, n\}$,

$$P(1+i) - SA_1 q_{x+t-1} > 0$$

Así,

$${}_2V = \frac{(P-c_1)}{{}_2E_x} + \frac{(P-c_2)}{{}_1E_{x+1}} = \frac{(P-c_1)}{{}_1E_x {}_1E_{x+1}} + \frac{(P-c_2)}{{}_1E_{x+1}} > 0$$

Procediendo ahora por inducción, supongamos que para $t = k$, ${}_kV > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} {}_{k+1}V &= \frac{(P-c_1)}{{}_{k+1}E_x} + \frac{(P-c_2)}{{}_kE_{x+1}} + \dots + \frac{(P-c_{k+1})}{{}_1E_{x+k}} \\ &= \frac{(P-c_1)}{{}_kE_x {}_1E_{x+k}} + \frac{(P-c_2)}{{}_{k-1}E_{x+1} {}_1E_{x+k}} + \dots + \frac{(P-c_{k+1})}{{}_1E_{x+k}} \\ &= \frac{{}_kV + (P-c_{k+1})}{{}_1E_{x+k}} > 0 \end{aligned}$$

3.2 Análisis de sensibilidad

3.2.1 El teorema de Lidstone

La sensibilidad de la reserva a cambios en las hipótesis de valuación ha sido estudiada por un grupo relativamente pequeño de investigadores de la ciencia actuarial. Uno de los resultados más notables que se ha logrado en este campo es el teorema de Lidstone, el cual se expone a continuación. Algunas extensiones y generalizaciones de este teorema se pueden encontrar en los trabajos de Baillie (1951), Promislow (1981), Norberg (1985) y Kalashnikov y Norberg (2001).

En 1905, el actuario inglés George James Lidstone, en un trabajo titulado *Changes in pure premium values consequent upon variations in the rate of interest or rate of mortality*, derivó un criterio para determinar el efecto que tienen los cambios en los elementos de valuación sobre las reservas, para ciertas formas de seguro.² Para tal fin, define una función, conocida como *función crítica de Lidstone*, en los siguientes términos:

$$C_t = ({}_tV + P)(i' - i) - (q'_t - q_t)(1 - {}_{t+1}V), \quad 0 \leq t < n$$

Teorema de Lidstone. *Para un seguro con suma asegurada constante con primas niveladas pagaderas durante el plazo de cobertura, sean P y ${}_tV$ la prima neta nivelada y la reserva terminal del año t , respectivamente, bajo una base de valuación con tasa de interés i y tasas de mortalidad q . Sean P' y ${}_tV'$ las correspondientes primas y*

² Para la demostración de este teorema, vid. Jordan, 1967 o Ziocck, 1978.

reservas en una base de valuación con tasa de interés i' y tasas de mortalidad q' .

Entonces, para $t \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, se tiene

i.) Si C_t es decreciente, entonces ${}_tV' > {}_tV$,

ii.) Si C_t es creciente, entonces ${}_tV' < {}_tV$,

iii.) Si C_t es constante, entonces ${}_tV' = {}_tV$.

De este teorema se desprenden importantes corolarios, uno de los cuales es el siguiente:

Supóngase que se desea medir el efecto de un cambio en las tasas de interés, manteniendo las tasas de mortalidad. En este caso, la función crítica es

$$C_t = (V + P)(i' - i), \quad 1 \leq t < n$$

Si $i' > i$ y ${}_tV$ es creciente, entonces C_t será una función creciente y por lo tanto, por el inciso ii del teorema se tendrá que, a mayor tasa de interés, menor reserva.

La condición de que las reservas sean funciones crecientes del tiempo t se verifica para los seguros ordinario de vida y dotal, si las sumas aseguradas son constantes. Si las sumas aseguradas son variables, no puede afirmarse que la reserva sea creciente.

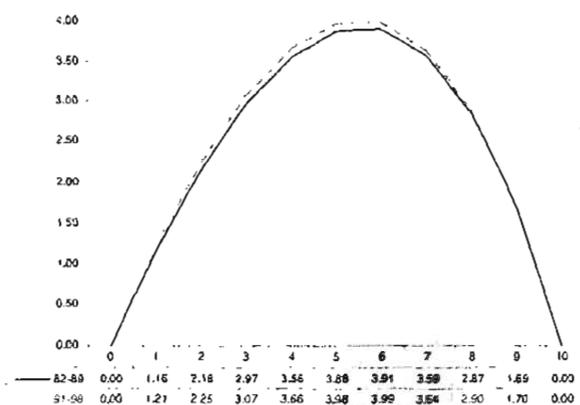
Del comentario anterior se concluye que el teorema de Lidstone es de aplicación limitada; por ejemplo, no necesariamente es aplicable a los seguros con beneficios variables o a los seguros temporales, ya que, por ejemplo en este último caso, la función crítica no es monótona. Así, tratándose de un seguro temporal con suma asegurada constante, se pueden obtener resultados que parecen contrarios a la intuición, como queda demostrado a continuación.

Ejemplo 1.

Base demográfica: Tablas de tasas de mortalidad *Experiencia Mexicana 82-89* y *Experiencia Mexicana 91-98*.³ Se observa que $q_x^{82-89} > q_x^{91-98}$ para todo valor de x que figure como argumento de ambas tablas.

Base financiera: 5% efectivo anual.

Plan: seguro temporal a 10 años para (40).



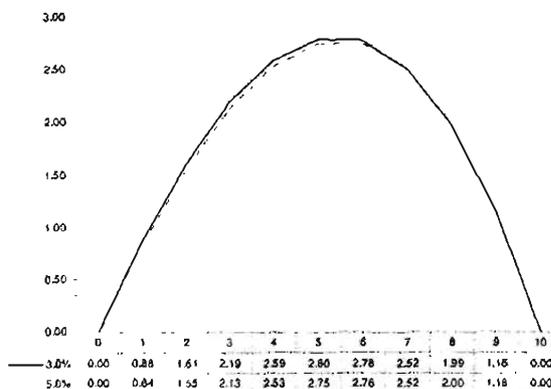
³ Publicadas en el Diario Oficial de la Federación de fechas 30 de diciembre de 1991 y 31 de diciembre de 1999, respectivamente.

Ejemplo 2.

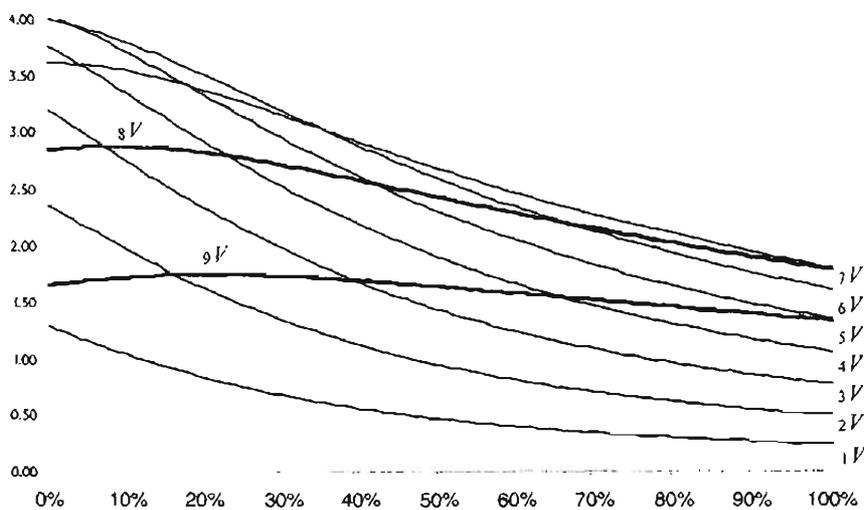
Base demográfica: Tabla de mortalidad *Experiencia Mexicana 82-89*.

Base financiera: 3.0% y 5.0% efectivo anual.

Plan: seguro temporal a 10 años para (35).



Estos ejemplos ponen de manifiesto que lo que nos dicta la intuición no siempre es correcto. Posiblemente, los resultados anteriores sean naturales si se interpreta la definición de reserva desde otra perspectiva y lo que causa desconcierto aquí es la percepción que tenemos sobre lo que debe significar este concepto.



Comportamiento de la reserva terminal para un seguro T-10 para (40)

En lo que resta de este capítulo se expone una metodología basada principalmente en el análisis de las funciones derivadas para determinar el comportamiento de primas y reservas en función de las variaciones en las tasas de interés.

Para el estudio de la variación de las primas únicas, se les dará el tratamiento de valores esperados de variables aleatorias.

3.3 Sensibilidad de primas a cambios en las tasas de interés.

Antes de analizar la sensibilidad de las reservas a cambios en las tasas de interés, estudiaremos cuál es el efecto sobre primas únicas y niveladas.

Para tal fin, nos valdremos de la siguiente simbología:

- $\Lambda_x''(i)$ prima única de un seguro de vida a n años para (x) . Para un plan vitalicio, $n = \infty$,
- m plazo de pago de primas,
- SA_k suma asegurada por fallecimiento en el año k ,⁴
- SAS suma asegurada por sobrevivencia. Si la cobertura es vitalicia, $SAS = 0$,
- i tasa de interés de valuación,
- $\alpha_x''(i)$ prima única de un seguro de rentas a $m + 1$ años para (x) . Si la cobertura es vitalicia, $m = \infty$,
- R_t renta a pagar en el instante t , medido a partir de la contratación, $t = 0, 1, 2, \dots$

3.3.1 Primas únicas

Para un seguro de vida con beneficios pagaderos al final del año de fallecimiento del asegurado, la prima única está dada por la esperanza de la variable aleatoria "valor presente de beneficios". Esta variable aleatoria tiene como soporte el conjunto

$$\{SA_1v, SA_2v^2, \dots, SA_nv^n, Bv^n\}$$

con $B = SAS$, si la cobertura es dotal y $B = 0$, si la cobertura es exclusivamente por fallecimiento. Las probabilidades asociadas a estos puntos son

$$\bigcup_{t=0}^{n-1} \{P[K(x) = t]\} \cup \{P[K(x) \geq n]\}$$

Aquí, $K(x)$ simboliza el número entero de años que restan de vida a (x) . Su función de masa es

$$f_{K(x)}(t) = P[K(x) = t] = {}_t p_x q_{x+t}$$

La prima es, entonces,

$$\Lambda_x''(i) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} v^k E_x + SAS_n E_x$$

donde $c_k = SA_k v q_{x+k-1}$.

La prima única de un seguro de rentas a $m + 1$ años se obtiene al calcular la esperanza de la variable aleatoria cuyo rango es el conjunto

$$\left\{ \sum_{j=0}^m R_j v^j \right\}_{j=0}$$

⁴ Se supondrá que las sumas aseguradas por fallecimiento y sobrevivencia son no negativas.

donde $m = \infty$ para una renta vitalicia. Las probabilidades asociadas a estos eventos son

$$\bigcup_{t=0}^{n-1} \{P[K(x)=t]\} \cup \{P[K(x) \geq m]\}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha_x^m(i) &= \sum_{t=0}^m \left(\sum_{j=0}^t R_j (1+i)^{-j} P[K(x)=t] \right) \\ &= \sum_{j=0}^m R_j (1+i)^{-j} p_x \\ &= \sum_{j=0}^m R_j E_x \end{aligned}$$

Proposición 3. $\Lambda_x^n(i)$ y $\alpha_x^m(i)$ son funciones decrecientes de la tasa de interés de valuación.

Demostración

Para la demostración de este resultado recurriremos a la siguiente propiedad de las variables aleatorias:

Sean f y g dos funciones definidas sobre un mismo conjunto tales que, para toda x , $f(x) > g(x)$. Si $E[f(x)]$ y $E[g(x)]$ existen, entonces $E[f(X)] > E[g(X)]$.

Para $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$, definimos las funciones

$$\begin{aligned} f(t) &= SA_{t+1} (1+i_1)^{-t-1} I_{\{0,1,\dots,n-1\}}(t) + SAS(1+i_1)^{-n} I_{\{n,n+1,\dots\}}(t), \\ g(t) &= SA_{t+1} (1+i_2)^{-t-1} I_{\{0,1,\dots,n-1\}}(t) + SAS(1+i_2)^{-n} I_{\{n,n+1,\dots\}}(t). \end{aligned}$$

Definimos las variables aleatorias

$$\begin{aligned} \Phi &= SA_{K(x)+1} (1+i_1)^{-K(x)-1} I_{\{0,1,\dots,n-1\}}(K(x)) + SAS(1+i_1)^{-n} I_{\{n,n+1,\dots\}}(K(x)) \text{ y} \\ \Gamma &= SA_{K(x)+1} (1+i_2)^{-K(x)-1} I_{\{0,1,\dots,n-1\}}(K(x)) + SAS(1+i_2)^{-n} I_{\{n,n+1,\dots\}}(K(x)). \end{aligned}$$

$I_A(t)$ representa aquí la función indicadora del conjunto A , definida como $I_A(t) = 1 \Leftrightarrow t \in A$ y $I_A(t) = 0 \Leftrightarrow t \in A^c$.⁵

Si se verifica que $i_1 < i_2$, es inmediato demostrar que $f(t) > g(t)$. Es claro también que Φ y Γ y representan el valor presente de la obligación del asegurador al aplicar las tasas de interés i_1 o i_2 , respectivamente.

Por consiguiente,

$$\Lambda_x^n(i_1) = E[\Phi] = E[f(K(x))] > E[g(K(x))] = E[\Gamma] = \Lambda_x^n(i_2)$$

La demostración de la proposición en el caso de un seguro de rentas es semejante, considerando las funciones

⁵ Nótese que en el caso de un seguro de vida entera, $n = \infty$ y, por lo tanto,

$$P[I_{\{0,\dots\}}(K(x))=1] = q_x = 1$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^t R_j (1+i_1)^{-j},$$

$$g(t) = \sum_{j=0}^t R_j (1+i_2)^{-j}.$$

y las variables aleatorias

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\min\{K(x), m\}} R_j (1+i_1)^{-j} \text{ y}$$

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{\min\{K(x), m\}} R_j (1+i_2)^{-j}.$$

Para verificar que las esperanzas de Φ y Γ son, efectivamente, iguales a $\alpha_x^m(i_1)$ y $\alpha_x^m(i_2)$, respectivamente, nos valemos de la ley de la esperanza iterada.

En efecto,

$$\begin{aligned} E[\Phi] &= E \left[\sum_{j=0}^{\min\{K(x), m\}} R_j (1+i_1)^{-j} \right] \\ &= E \left[\sum_{j=0}^{\tilde{K}(x)} R_j (1+i_1)^{-j} \right] \\ &= E \left[\sum_{j=0}^{\tilde{K}(x)} R_j (1+i_1)^{-j} \middle| \tilde{K}(x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \left\{ P[\tilde{K}(x) = k] E \left[\sum_{j=0}^{\tilde{K}(x)} R_j (1+i_1)^{-j} \middle| \tilde{K}(x) = k \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ {}_1 p_x q_{x+k} \sum_{j=0}^k R_j (1+i_1)^{-j} \right\} + {}_m p_x \sum_{j=0}^m R_j (1+i_1)^{-j} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \sum_{j=0}^k R_j (1+i_1)^{-j} \right\} + {}_m p_x \sum_{j=0}^m R_j (1+i_1)^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^m R_j (1+i_1)^{-j} \cdot {}_j p_x \\ &= \alpha_x^m(i_1) \end{aligned}$$

En esta expresión, se ha puesto $\tilde{K}(x) = \min\{K(x), m\}$, cuya función de probabilidad es

$$P[\tilde{K}(x) = j] = \begin{cases} {}_j p_x q_{x+j}, & j \in \{0, 1, \dots, m-1\} \\ {}_m p_x, & j = m \end{cases}$$

Alternativamente, puede analizarse la sensibilidad de estas funciones a cambios en la tasa de interés, derivando respecto a esta variable:

$$\begin{aligned} \frac{d}{di} \Lambda_x^n(i) &= \frac{d}{di} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} {}_k E_x + SAS_n E_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1})' ({}_k E_x) + (c_{k+1})({}_k E_x)' + (SAS_n E_x)' < 0 \end{aligned}$$

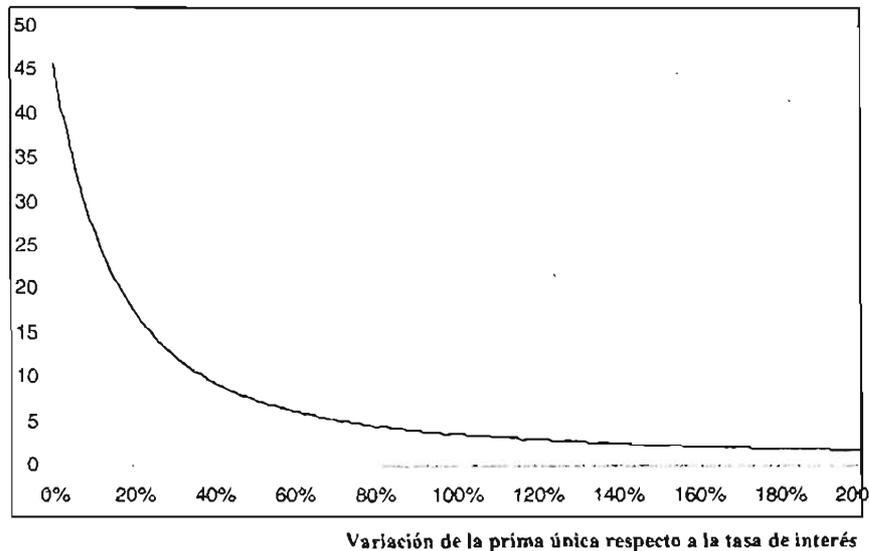
en vista de que $\frac{d}{di} c_k = -SA_k v^2 q_{x+k-1}$ y $\frac{d}{di} SAS_n E_x = -nv SAS_n E_x$

La segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{di^2} \Lambda_x^n(i) &= \frac{d}{di} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1})' ({}_k E_x) + (c_{k+1})({}_k E_x)' + (SAS_n E_x)' \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1})' ({}_k E_x)' + (c_{k+1})'' ({}_k E_x) + (c_{k+1})({}_k E_x)'' + (c_{k+1})' ({}_k E_x)' + (SAS_n E_x)'' > 0, \end{aligned}$$

resultado que se deduce de las relaciones $\frac{d^2}{di^2} c_k = 2SA_k v^3 q_{x+k-1}$ y $\frac{d^2}{di^2} SAS_n E_x = n(n+1)v^2 SAS_n E_x$.

De las desigualdades anteriores se concluye que la prima única, como variable dependiente de la tasa de interés, es una función decreciente y convexa, es decir, que las variaciones más significativas se presentan en el extremo inicial del intervalo de definición de la función.



Para una anualidad, el resultado es análogo en vista de que ésta se puede considerar como una suma de seguros dotales puros. ■

3.3.2 Primas niveladas

Puesto que la prima nivelada resulta del cociente de las esperanzas de dos variables aleatorias, no podemos seguir la metodología aplicada en el análisis de primas únicas.

La variación en la prima nivelada se analizará bajo la hipótesis de que el costo de siniestralidad es creciente. La derivada de la prima es la derivada del cociente

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} E_x + SAS_n E_x}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k E_x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} SA_{k+1} v^{k+1} p_x q_{x+k} + SASv^n p_x}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k p_x}$$

Considerando la expresión del miembro derecho como función de v , digamos, $P(v)$, se tiene, aplicando la regla de la derivada de composición de funciones (*regla de la cadena*),

$$\begin{aligned} \frac{d}{di} {}^{iu} P_{\overline{v}|i}(i) &= \frac{d}{di} P(v) = \frac{d}{dv} \left[\frac{\sum_{k=0}^{n-1} SA_{k+1} v^{k+1} p_x q_{x+k} + SASv^n p_x}{\sum_{k=0}^{n-1} I_{\{1, \dots, n\}} v^k p_x} \right] \frac{d}{di} v \\ &= -v^2 \frac{\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^k p_x \right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) SA_{k+1} v^k p_x q_{x+k} + nSASv^{n-1} p_x \right] - \left[\sum_{k=0}^{n-1} SA_{k+1} v^{k+1} p_x q_{x+k} + SASv^n p_x \right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} kv^{k-1} p_x \right]}{\left[\sum_{k=0}^{n-1} I_{\{1, \dots, n\}} v^k p_x \right]^2} \end{aligned}$$

El signo de la derivada de la prima dependerá entonces del signo del numerador en el segundo factor de esta última expresión. Para determinarlo, obsérvese que

$$\begin{aligned} N &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} I_{\{1, \dots, n\}} v^k p_x \right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) SA_{k+1} v^k p_x q_{x+k} + nSASv^{n-1} p_x \right] - \left[\sum_{k=0}^{n-1} SA_{k+1} v^{k+1} p_x q_{x+k} + SASv^n p_x \right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} I_{\{1, \dots, n\}} kv^{k-1} p_x \right] \\ &= \left[\sum_{\beta=0}^{n-1} I_{\{1, \dots, n\}} v^\beta p_x \right] \left[\sum_{\alpha=0}^{n-1} (\alpha+1) SA_{\alpha+1} v^\alpha p_x q_{x+\alpha} + nSASv^{n-1} p_x \right] - \left[\sum_{\alpha=0}^{n-1} SA_{\alpha+1} v^{\alpha+1} p_x q_{x+\alpha} + SASv^n p_x \right] \left[\sum_{\beta=0}^{n-1} \beta v^{\beta-1} p_x \right] \end{aligned}$$

Haciendo

$$a_\alpha = \begin{cases} SA_{\alpha+1} p_x q_{x+\alpha}, & \alpha \in \{1, 2, \dots, n-2\} \\ SA_{n-n-1} p_x q_{x+n-1} + SAS_n p_x, & \alpha = n-1 \end{cases}$$

$$b_\alpha = a p_x$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
N &= \left[\sum_{\beta=0}^{n-1} b_{\beta} v^{\beta} \right] \left[\sum_{\alpha=0}^{n-1} (\alpha+1) a_{\alpha} v^{\alpha} \right] - \left[\sum_{\alpha=0}^{n-1} \alpha b_{\alpha} v^{\alpha-1} \right] \left[\sum_{\beta=0}^{n-1} a_{\beta} v^{\beta+1} \right] \\
&= \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{n-1} \alpha x^{\alpha+\beta-1} (a_{\alpha} b_{\beta} - \alpha b_{\alpha} a_{\beta})
\end{aligned}$$

Conmutando los índices α y β , la expresión anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \beta x^{\alpha+\beta-1} (a_{\beta} b_{\alpha} - \alpha b_{\beta} a_{\alpha}) \\
&= - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \beta x^{\alpha+\beta-1} (a_{\alpha} b_{\beta} - \alpha b_{\beta} a_{\alpha})
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
2N &= \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} (\alpha - \beta) x^{\alpha+\beta-1} (a_{\alpha} b_{\beta} - \alpha b_{\beta} a_{\alpha}) \\
&= - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} b_{\alpha} b_{\beta} x^{\alpha+\beta-1} \{ (\alpha - \beta) (a_{\alpha} / b_{\alpha} - a_{\beta} / b_{\beta}) \}
\end{aligned}$$

En esta expresión, el producto

$$(\alpha - \beta) (a_{\alpha} / b_{\alpha} - a_{\beta} / b_{\beta})$$

nunca es negativo porque

$$\frac{a_{\alpha}}{b_{\alpha}} = \begin{cases} SA_{\alpha+1} q_{x+\alpha}, & \alpha \in \{1, 2, \dots, n-2\} \\ SA_n q_{x+n-1} + SAS, & \alpha = n-1 \end{cases}$$

es mayor o igual (menor) que

$$\frac{a_{\beta}}{b_{\beta}} = \begin{cases} SA_{\beta+1} q_{x+\beta}, & \beta \in \{1, 2, \dots, n-2\} \\ SA_n q_{x+n-1} + SAS, & \beta = n-1, \end{cases}$$

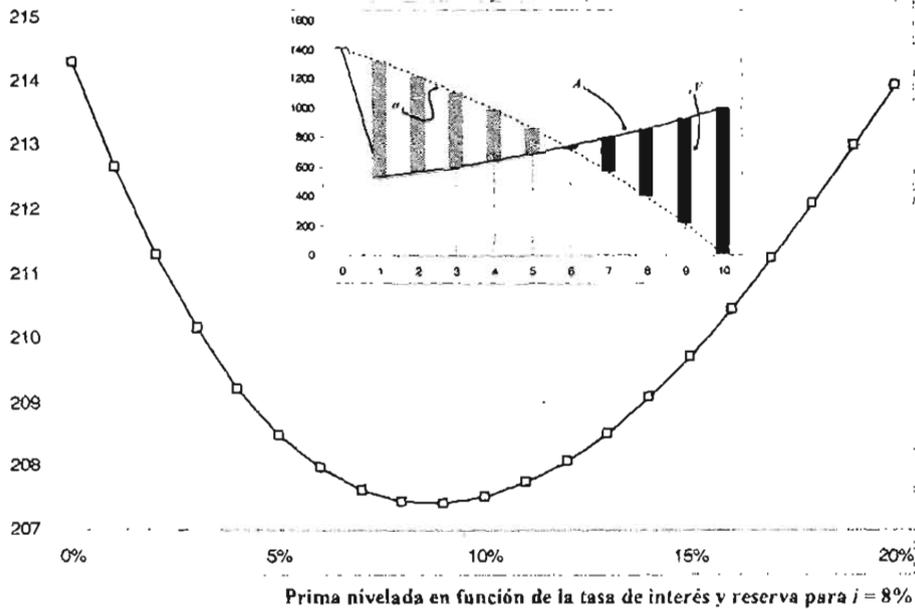
siempre que se cumpla $\alpha \geq \beta$ ($\alpha < \beta$), al ser el costo esperado de siniestralidad función creciente del tiempo. En consecuencia, la derivada de la prima nivelada respecto a la tasa de interés es negativa. Se ha demostrado, entonces, la siguiente proposición:

Proposición 4. Para un seguro con cobertura a n años y plazo de pago de primas a m años, $m \geq n$, la prima nivelada es una función decreciente de la tasa de interés si el costo esperado de siniestralidad anual es una función creciente del tiempo.

Nada se puede inferir sobre el comportamiento de la prima nivelada si el costo de siniestralidad no es creciente, puesto que el supuesto de la anterior proposición es una condición suficiente, no necesaria.

Se exhibe a continuación un contraejemplo de un seguro cuya prima nivelada no es función decreciente de la tasa de interés. Como se puede deducir de la gráfica, el costo esperado de siniestralidad anual no es función creciente con el tiempo.

Plazo de cobertura: 10 años, plazo de pago de primas: igual al plazo de cobertura, $SA_t = 1,000$ para $t \in \{1, \dots, 10\}$, $SAS_t = 1,000$ para $t = 1$ o $t = 10$ y $SAS_t = 0$ si $t \in \{2, \dots, 9\}$.



3.4 Análisis de sensibilidad sobre las reservas

El siguiente teorema (De Vylder, 1997), aunque más general que el resultado de Lidstone al permitir variabilidad en las sumas aseguradas, demuestra también su inaplicabilidad en el caso de los seguros temporales.

Proposición 5. Si q_{x+t} es una función creciente del tiempo t , entonces las reservas de un seguro con plazo de cobertura de n años, con sumas aseguradas por fallecimiento y supervivencia iguales a SAF y SAS , respectivamente, que satisfacen $0 < SAF \leq SAS$ y que se paga durante m años, siendo $m \leq n$, son funciones decrecientes de la tasa de interés de valuación i .

Demostración

Para la demostración, utilizaremos el siguiente resultado del cálculo diferencial, mismo que se demuestra en el anexo 2:

Para $x > 0$, sea

$$f(x) = \frac{\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}}{\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}}$$

con $a_\alpha \geq 0$ y $b_\alpha > 0$. Si la sucesión $\{a_\alpha / b_\alpha\}$ es creciente (decreciente), entonces f es una función creciente (decreciente) de x .

Como se demuestra con facilidad, la reserva terminal del año t se puede escribir como

$$V = SAF \left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:n-t}}{\ddot{a}_{x:n}} \right) + (SAS - SAF)_{n-t} E_{x+t} \frac{\ddot{a}_{x:t}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Definimos

$$f_1(v) = \frac{\ddot{a}_{x+t:n-t}}{\ddot{a}_{x:n}} = \frac{\sum_{\alpha=0}^{n-t-1} v^\alpha {}_a p_{x+t}}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} v^\alpha {}_a p_x}$$

y

$$f_2(v) = {}_{n-t} E_{x+t} \frac{\ddot{a}_{x:t}}{\ddot{a}_{x:n}} = v^{n-t} p_{x+t} \frac{\sum_{\alpha=0}^{t-1} v^\alpha {}_a p_x}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} v^\alpha {}_a p_x}$$

Si demostramos que f_1 es decreciente y f_2 creciente, entonces la conclusión de la proposición se seguirá inmediatamente.

Como la tasa de mortalidad anual es función creciente del tiempo, es decir, $q_x < q_{x+1} < \dots$, entonces $p_x > p_{x+1} > \dots$. Así, la sucesión $\{j p_{x+t} / j p_x\}$, donde el término j -ésimo se define como cero para $j > n - t - 1$, es decreciente, puesto que

$$\frac{j p_{x+t}}{j p_x} = \frac{\prod_{g=0}^{j-1} p_{x+t+g}}{\prod_{g=0}^{j-1} p_{x+g}} > \frac{\prod_{g=0}^{j-1} p_{x+t+1+g}}{\prod_{g=0}^{j-1} p_{x+1+g}} = \frac{j p_{x+t+1}}{j p_{x+1}}$$

Por lo tanto, aplicando el resultado preliminar,

$$f_1(v) = \frac{\ddot{a}_{x+t:n-t}}{\ddot{a}_{x:n}} = \frac{\sum_{\alpha=0}^{n-t-1} v^\alpha {}_a p_{x+t}}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} v^\alpha {}_a p_x}$$

es decreciente.

Por otro lado, nótese que

$$\begin{aligned}
f_2(v) \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= {}_{n-t}E_{x+t} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\
&= v^{n-t} {}_{n-t}P_{x+t} \sum_{\alpha=0}^{t-1} v^\alpha {}_\alpha P_x \\
&= {}_{n-t}P_{x+t} \sum_{\alpha=0}^{t-1} v^{\alpha+n-t} {}_\alpha P_x \\
&= {}_{n-t}P_{x+t} \sum_{\alpha=n-t}^{n-1} v^\alpha {}_{\alpha-n+t} P_x
\end{aligned}$$

De este modo,

$$f_2(v) = \frac{{}_{n-t}P_{x+t} \sum_{\alpha=n-t}^{n-1} v^\alpha {}_{\alpha-n+t} P_x}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} v^\alpha {}_\alpha P_x} = {}_{n-t}P_{x+t} \frac{\sum_{\alpha=n-t}^{n-1} v^\alpha {}_{\alpha-n+t} P_x}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} v^\alpha {}_\alpha P_x}$$

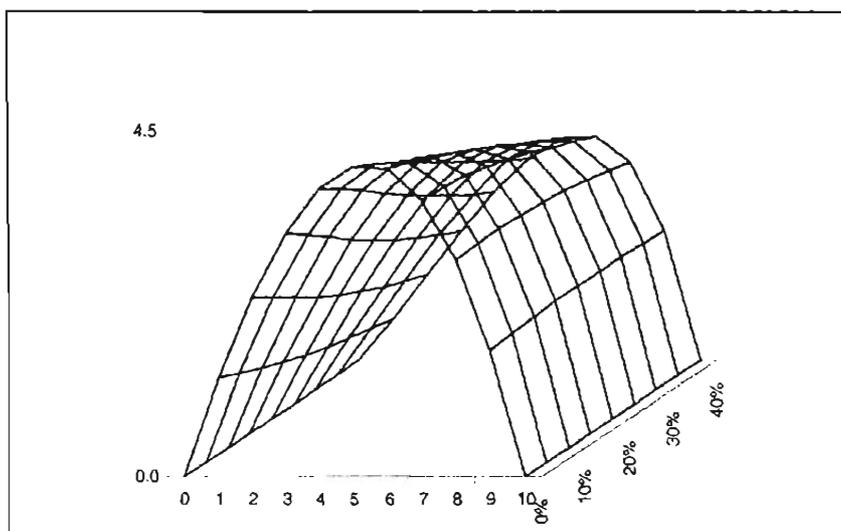
La sucesión $0, 0, \dots, {}_\alpha P_x / {}_\beta P_x, {}_{\alpha+1} P_x / {}_{\beta+1} P_x, \dots, {}_{n-1} P_x / {}_{n-1} P_x$, es creciente, puesto que, para $\alpha \leq \beta$,

$${}_\alpha P_x / {}_\beta P_x \leq {}_{\alpha+1} P_x / {}_{\beta+1} P_x \quad \blacksquare$$

El teorema que acabamos de ver, al igual que el teorema de Lidstone, resuelve el problema para los seguros dotales. Nada se puede inferir acerca de los seguros temporales, en vista de que se tiene la hipótesis $SAF \leq SAS$.

Concluimos este capítulo con algunas consideraciones en relación a las proposiciones que hemos revisado.

1. En la proposición 2 demostramos que si el costo de siniestralidad es creciente, las reservas terminales son no negativas. No obstante, también se ha visto que en el caso de esquemas con costo decreciente, si bien se pueden obtener reservas negativas, limitando el plazo de pago de primas se puede revertir tal situación. Cabe entonces preguntarse cuál es una condición **necesaria y suficiente** para que en un contrato de seguro, las reservas terminales sean no negativas.
2. En cuanto a la sensibilidad de las funciones actuariales a variaciones en las tasas de interés, en particular tratándose de las reservas de seguros temporales, no se puede predecir su comportamiento, ya que, en algunos casos, la reserva disminuye en todos los años si se incrementa la tasa de interés, pero en otros, como el ejemplo que exhibimos, no ocurre así.
3. Hemos visto que para los seguros temporales con costo esperado de siniestralidad creciente con el tiempo, la sucesión de diferencias entre prima nivelada y prima natural o costo esperado de siniestralidad, presenta un único cambio de signo. Un problema que nos podemos plantear y que se relaciona con este resultado, consiste en la determinación del año en que se verifica tal cambio de signo. En los seguros temporales con costo de siniestralidad esperada creciente, el año de cambio de signo depende del año en que la reserva alcanza su valor máximo.

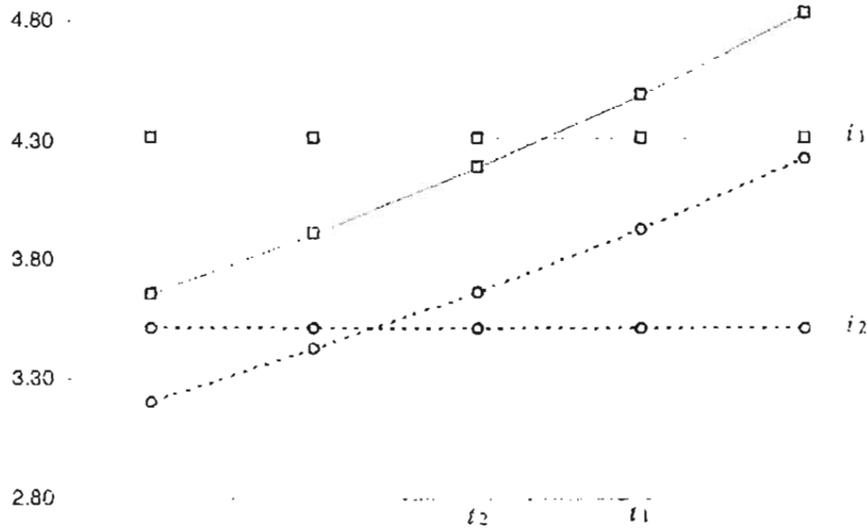


Reserva para un seguro temporal a 10 años en función de la tasa de interés

La existencia de este valor máximo está garantizada por las siguientes dos condiciones: *i*) que, al ser creciente el costo de siniestralidad esperada, se tiene, en los años en que la prima nivelada es superior a la prima natural, que la reserva es creciente, y, *ii*) aunque no se puede asegurar que la reserva empiece a decrecer a partir del año de cambio de signo -lo cual nos conduciría a que el valor máximo se da en el año inmediato anterior-, sabemos que al final del plazo de cobertura la reserva es nula.

La siguiente propiedad se juzga asaz plausible, en vista de que a medida que la tasa de interés se incrementa, el año en que el costo de siniestralidad excede a la prima nivelada, tiende hacia el inicio de vigencia del contrato, como se ilustra en la gráfica:

Para un seguro temporal a n años con costo de siniestralidad creciente y plazo de pago de primas igual al plazo de cobertura, sea $A(i)$ el año en que la reserva alcanza su valor máximo si ésta se calcula con la tasa de interés i . Entonces $A(i)$ es una función no decreciente de la tasa de interés, es decir que se verifica que $A(i_1) \leq A(i_2)$, siempre que $i_1 < i_2$.



Prima nivelada y costo de siniestralidad para distintas tasas de interés ($i_1 < i_2$)

4. Finalmente, aunque no es tema de este trabajo, sería interesante analizar el efecto de las variaciones en los decrementos sobre primas y reservas. Como se demostró en uno de los ejemplos de este capítulo, la reducción en las tasas de decremento no necesariamente implica una reducción en las reservas, como se piensa comúnmente. Para emprender una investigación en este sentido, puede servir de orientación el trabajo de Kalashnikov y Norberg (2001), quienes exploran el análisis de sensibilidad en el caso continuo.

Capítulo 4

Modelos estocásticos en el seguro de vida

El concepto de probabilidad es el más importante de la ciencia moderna, especialmente porque nadie tiene la mínima idea de lo que significa.

Bertrand Russell (1929)

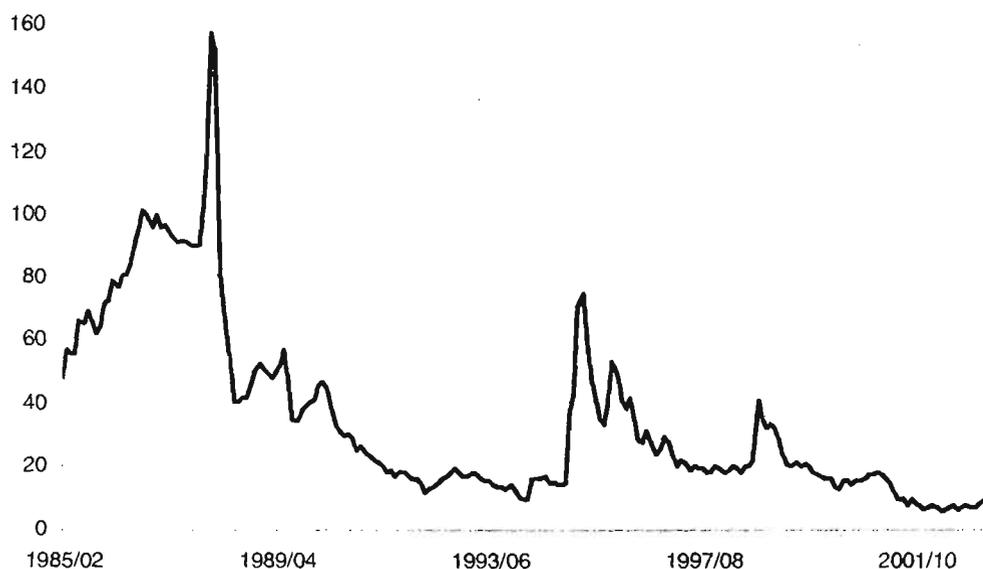
Introducción

La tarificación de productos y el cálculo de reservas en los seguros de vida requieren de especial atención al fijar los supuestos demográficos y financieros que se utilizarán para valuar los flujos de efectivo involucrados en una operación de este tipo, dado que los contratos son a largo plazo. El aplicar una tasa de interés demasiado alta podría derivar en insuficiencia de primas al encontrarse la compañía imposibilitada para invertir en instrumentos que le garanticen dichas tasas, por lo que tendrá que destinar fondos adicionales para hacer frente a sus obligaciones. Generalmente, como una medida de precaución, se consideran en los cálculos tasas de interés bajas. De esta manera, si las expectativas económicas son adversas y las tasas de interés no alcanzan los niveles proyectados, los diferenciales no serán tan importantes y la compañía no se enfrentará a una situación de insuficiencia tan grave.

En contraste con el escenario anterior, si la compañía obtiene rendimientos superiores a los que ha utilizado en sus modelos de valuación, se generarán excedentes derivados de cobrar una prima mayor. Para subsanar esta situación, las compañías de seguros suelen reintegrar a los asegurados parte de estos excedentes, vía dividendos.

Se ve entonces que, ya sea que la tasa de rendimiento obtenida sea mayor o menor que la tasa implícita en los cálculos, se derivarán situaciones que de una manera u otra tendrán que compensarse. En la mayoría de los modelos de tarificación de productos de vida, se supone que la tasa de interés a la que puede invertir la compañía es constante durante el plazo de cobertura del seguro.

En el siguiente gráfico se exhibe la serie de tiempo correspondiente a la tasa de rendimiento de Cetes a 28 días, desde febrero de 1985, a marzo de 2003. Claramente se observa que la hipótesis de que el valor del dinero en el tiempo crece exponencialmente a una tasa constante y sobre la cual se sustenta el modelo tradicional, dista mucho de la realidad.



Tasa de rendimiento de CETES a 28 días. Período: 02/85 a 03/03
Fuente: Banco de México, Indicadores Económicos

Dada la situación anterior, se han propuesto modelos en los que la tasa de interés es variable. En el caso de que la tasa de interés cambie de manera determinística, no existe complicación alguna para el cálculo de las funciones actuariales. Sin embargo, si se supone que las tasas de interés varían aleatoriamente en el tiempo, surgen algunas dificultades. En primer término nos encontramos con el problema de la elección del modelo adecuado que represente el movimiento estocástico de estas tasas. En segundo lugar, queda pendiente el problema de la confiabilidad del modelo mismo, ya que no existen proyecciones fiables para las tasas futuras de rendimiento a largo plazo. Esperamos que en lo venidero el desarrollo de técnicas de predicción se vaya haciendo gradualmente más confiable con la finalidad de poder aplicar estos modelos.

En este capítulo se presentan fórmulas generales para el cálculo de las funciones actuariales suponiendo que tanto el tiempo futuro de vida, como la tasa de interés, son variables aleatorias. Se desarrollan las fórmulas bajo la premisa de un modelo discreto para los esquemas de pagos de beneficios y primas, es decir, la suma asegurada por fallecimiento o sobrevivencia, según sea el caso, se paga al final del año, en tanto que las primas se pagan al inicio de cada período anual. En cuanto a las tasas de interés, se supondrán procesos estocásticos continuos o discretos con espacio de estados en un subconjunto arbitrario de números reales.

Los modelos estocásticos para las tasas de interés y su aplicación en el cálculo actuarial del seguro de vida han sido estudiados desde principios de los años 70's. Entre los estudios más notables podemos mencionar el trabajo pionero de Pollard (1971), así como los artículos de Boyle (1976), Panjer y Bellhouse (1978), Giacotto (1986) y Frees (1988).

El propósito que se persigue al aplicar un modelo con estas características es el de su potencial uso para determinar primas y reservas con márgenes de seguridad para afrontar posibles desviaciones adversas en la siniestralidad o en las tasas de interés.

Para abreviar la presentación, se desarrollarán paralelamente las fórmulas para los casos continuo y discreto, valiéndonos del símbolo \longrightarrow para denotar la expresión alterna para el caso discreto.

4.1 Primas únicas

4.1.1 Seguro de vida

Considérese una póliza de seguro de vida emitida para una persona de edad x . Sean $T(x)$ el tiempo restante de vida de (x) y $K(x) = [T(x)]$, donde $[\]$ representa la función *máximo entero menor o igual*. Sea también SA_{k+1} la suma asegurada del año $k + 1$, es decir, el beneficio por fallecimiento si el asegurado muere entre k y $k + 1$.

Si la tasa de interés es una función del tiempo, entonces, según se ha visto en el capítulo 2, la *función de acumulación* está dada por

$$\psi_t = \exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right)$$

$$\left(\cdots \rightarrow \psi_t = \exp\left(\sum_{s=0}^t \delta_s\right)\right)$$

en tanto que la *función de descuento* será

$$v_t = \exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right)$$

$$\left(\cdots \rightarrow v_t = \exp\left(-\sum_{s=0}^t \delta_s\right)\right)$$

Sea $\{\Delta_s\}_{s \geq 0}$ $\left(\cdots \rightarrow \{\Delta_s\}_{s \in \{0,1,2,\dots\}}\right)$ el proceso estocástico de la fuerza de interés. Denotaremos con \mathfrak{S} la variable aleatoria que representa el valor presente del beneficio, es decir,

$$\mathfrak{S} = SA_{K(x)+1} V_{K(x)+1}$$

donde

$$V_n = \exp\left(-\int_0^n \Delta_s ds\right) \left(\cdots \rightarrow V_t = \exp\left(-\sum_{s=0}^t \Delta_s\right)\right)$$

representa la variable aleatoria *función de descuento*.

Para la construcción de primas utilizaremos el principio de equivalencia y la hipótesis esencial de que $K(x)$ es independiente del proceso $\{\Delta_s\}$. Los siguientes resultados de la teoría de probabilidad nos permitirán calcular la esperanza, es decir, la prima, y la función de probabilidad de \mathfrak{S} . Dada la importancia de estas proposiciones para el tema que nos ocupa, hemos incluido su demostración.

Teorema 1. Si X e Y son v.a. continuas, entonces

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) E[Y|X=x] dx$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) E[Y|X=x] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= E[Y] \end{aligned}$$

El resultado análogo para el caso discreto es el siguiente:

Teorema 2. Si X e Y son v.a. discretas, entonces

$$E[Y] = \sum_{x \in \text{Ran}_X} f_X(x) E[Y|X=x]$$

Demostración:

Si $x \in \text{Ran}_X$, entonces $f_X(x) > 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Ran}_X} f_X(x) E[Y|X=x] &= \sum_{x \in \text{Ran}_X} \left\{ f_X(x) \sum_{y \in \text{Ran}_Y} y f_{Y|X}(y|x) \right\} \\ &= \sum_{x \in \text{Ran}_X} \left\{ P[X=x] \sum_{y \in \text{Ran}_Y} y \frac{P[\{Y=y\} \cap \{X=x\}]}{P[X=x]} \right\} \\ &= \sum_{x \in \text{Ran}_X} \sum_{y \in \text{Ran}_Y} y P[\{Y=y\} \cap \{X=x\}] \\ &= \sum_{y \in \text{Ran}_Y} \sum_{x \in \text{Ran}_X} y P[\{Y=y\} \cap \{X=x\}] \\ &= \sum_{y \in \text{Ran}_Y} y P[Y=y] \\ &= E[Y] \end{aligned}$$

Aplicando los teoremas anteriores a las variables aleatorias \mathfrak{S} y $K(x)$, la prima única del seguro de vida está dada por

$$\begin{aligned}
P &= E[\mathfrak{S}] \\
&= \sum_{k \in \text{Ran}_{K(x)}} f_{K(x)}(k) E \left[SA_{k+1} \exp \left(- \int_0^k \Delta_s ds \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1} E \left[\exp \left(- \int_0^k \Delta_s ds \right) \right] \\
\left(\longrightarrow P &= \sum_{k=0}^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1} E \left[\exp \left(- \sum_{s=0}^k \Delta_s \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

donde $\rho = \omega - x$, si la cobertura es vitalicia y $\rho = n$ si el plan es temporal a n años. La función de probabilidad de masa de $K(x)$ está dada por

$$f_{K(x)}(k) = \begin{cases} P[K(x) = k] = {}_k p_x q_{x+k}, & k \in \text{Ran}_{K(x)} \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

En esta expresión, el rango o soporte de $K(x)$ estará dado en función del modelo de mortalidad como

$$\text{Ran}_{K(x)} = \begin{cases} \{0, 1, \dots, M_{\omega, x}\}, & \text{si existe una edad límite } \omega \\ \{0, 1, \dots, \}, & \text{si no existe una edad límite} \end{cases}$$

$$M_{\omega, x} = \begin{cases} \omega - x - 1, & \text{si } \omega - x \in Z \\ \lfloor \omega - x \rfloor, & \text{si } \omega - x \notin Z \end{cases}$$

La esperanza de $V_{K(x)+1}$ dependerá del supuesto que se utilice para modelar el proceso estocástico de la tasa de interés. Para calcular la varianza de \mathfrak{S} , calculamos su segundo momento y utilizamos la relación

$$\text{Var}[\mathfrak{S}] = E[\mathfrak{S}^2] - (E[\mathfrak{S}])^2.$$

El segundo momento es

$$\begin{aligned}
P &= E[\mathfrak{S}^2] = E[\mathfrak{S}^2 | K(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1}^2 E \left[\exp \left(- 2 \int_0^k \Delta_s ds \right) \right] \\
\left(\longrightarrow P &= \sum_{k=0}^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1}^2 E \left[\exp \left(- 2 \sum_{s=0}^k \Delta_s \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la varianza de \mathfrak{S} es

$$\begin{aligned}
Var[\mathfrak{S}] &= E[\mathfrak{S}^2] - (E[\mathfrak{S}])^2 \\
&= \left\{ \sum_0^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1}^2 E \left[\exp \left(-2 \int_0^k \Delta_s ds \right) \right] \right\} \\
&\quad - \left\{ \sum_0^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1} E \left[\exp \left(- \int_0^k \Delta_s ds \right) \right] \right\}^2 \\
\left(\longrightarrow Var[\mathfrak{S}] &= \left\{ \sum_0^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1}^2 E \left[\exp \left(-2 \sum_{s=0}^k \Delta_s \right) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \sum_0^{\rho-1} P[K(x) = k] SA_{k+1} E \left[\exp \left(- \sum_{s=0}^k \Delta_s \right) \right] \right\}^2 \right)
\end{aligned}$$

4.1.2 Rentas contingentes

Para el cálculo de primas únicas de este tipo de beneficios consideremos primero un seguro de sobrevivencia con un solo pago a n años (dotal puro), es decir, el contrato mediante el cual el asegurado recibe una suma asegurada si se encuentra con vida una vez que han transcurrido n años.

Si SAS es la suma asegurada por sobrevivencia, entonces

$$\mathfrak{S} = \begin{cases} SASV_n, & \text{si } (x) \uparrow t \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

El símbolo $(x) \uparrow t$ representará, en lo sucesivo, el evento " (x) sobrevive a edad $x + t$ ". La prima para el dotal puro será entonces, considerando \mathfrak{S} como una distribución mixta, y aplicando la ley de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}
P &= E[\mathfrak{S}] \\
&= E[\mathfrak{S} |_{(x) \uparrow n}] \\
&= E[SAS \cdot P[(x) \uparrow n] V_n] \\
&= SAS_n p_x E \left[\exp \left(- \int_0^n \Delta_s ds \right) \right] \\
\left(\longrightarrow P &= SAS_n p_x E \left[\exp \left(- \sum_{s=0}^n \Delta_s \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Consideremos ahora una anualidad temporal a n años con pagos al final de cada período. Sea R_j la renta a recibir si $(x) \uparrow j$. Podemos considerar la renta a n años equivalente a una suma de n dotales puros con vencimientos a $1, 2, \dots, n$ años y sumas aseguradas R_1, R_2, \dots, R_n , respectivamente. Sea

$$S_n = \sum_{j=0}^n R_j V_j,$$

donde $R_0 V_0$ se define como cero. Esta variable aleatoria representa el valor presente del total de pagos efectuados por la aseguradora bajo el contrato de renta. Por lo tanto, la prima que buscamos está dada por

$$\begin{aligned} P &= E[S_n] = E\left[\sum_{j=0}^n R_j V_j\right] \\ &= \sum_{j=0}^n E[R_j V_j] = \sum_{j=0}^n R_j P[(x) \uparrow j] E[V_j] \\ &= \sum_{j=0}^n R_j {}_j p_x E\left[\exp\left(-\int_0^j \Delta_s ds\right)\right] \\ &\left(\longrightarrow P = \sum_{j=0}^n R_j {}_j p_x E\left[\exp\left(-\sum_{s=0}^j \Delta_s\right)\right]\right) \end{aligned}$$

El cálculo para otros tipos de rentas es análogo, razón por la cual omitimos su desarrollo.

4.2 Primas niveladas

Una vez determinadas las primas únicas para seguros y anualidades podemos pasar a la construcción de primas niveladas. Para este fin, utilizaremos nuevamente el principio de equivalencia, de tal manera que la prima nivelada quedará definida por la condición

$$E\left[\Lambda - \sum_j P_j\right] = 0$$

En esta expresión, Λ representa el valor presente de las obligaciones de la compañía y P_j el valor presente de la prima que pagará el asegurado en el año j .

4.3 Reservas

Bajo una operación financiera con flujos estocásticos, las obligaciones quedan determinadas por los valores esperados de estos flujos. Así, la prima para un cierto contrato de seguro de vida quedará definida al igualar, al momento del contrato, los valores presentes esperados de las obligaciones de ambas partes.

Análogamente, la reserva en un determinado punto t del tiempo, puede definirse, como la diferencia entre el valor esperado de las obligaciones de la aseguradora y el valor presente esperado de obligaciones del asegurado, dada la condición de que el asegurado se encuentra con vida en el momento t . Si denotamos con L_t la v.a. que representa esta diferencia, entonces la reserva en tal instante, ${}_t V$, estará dada por

$${}_t V = E[L_t | (x) \uparrow t]$$

Por ejemplo, para un seguro ordinario de vida en el cual se ha determinado la prima nivelada bajo el principio de equivalencia, se tiene

$$\begin{aligned} V &= E[L_t | (x) \uparrow t] = E[\Lambda_t - P\ddot{a}_t | (x) \uparrow t] \\ &= E[\Lambda_t | (x) \uparrow t] - E[P\ddot{a}_t | (x) \uparrow t] \end{aligned}$$

En esta expresión, Λ_t es la variable aleatoria "valor presente de obligaciones de la compañía al año t " y $P\ddot{a}_t$ corresponde al "valor presente de obligaciones del asegurado".

$$E[\Lambda_t | (x) \uparrow t] = E[SA_{K(x)+1-t} V_{K(x)+1-t} | T(x) > t]$$

Bajo la hipótesis de que la distribución condicional de $V_{K(x)+1-t}$ dado que $T(x) > t$, es igual a la de $SA_{K(x+t)+1} V_{K(x+t)+1}$ se puede escribir

$$\begin{aligned} E[SA_{K(x)+1-t} V_{K(x)+1-t} | T(x) > t] &= E[SA_{K(x+t)+1-t} V_{K(x+t)+1-t}] \\ &= \sum_{k \in \text{Ran}_{K(x+t)}} SA_{k+t+1} f_{K(x+t)}(k) E\left[\exp\left(-\int_t^{t+k} \Delta_s ds\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-t-1} SA_{k+t+1} P[K(x+t) = k] E\left[\exp\left(-\int_t^{t+k} \Delta_s ds\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-t-1} SA_{k+t+1} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} E\left[\exp\left(-\int_t^{t+k} \Delta_s ds\right)\right] \\ &\left(\longrightarrow \sum_{k=0}^{\omega-x-t-1} SA_{k+t+1} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} E\left[\exp\left(-\sum_{s=t}^{t+k} \Delta_s\right)\right]\right) \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} E[P\ddot{a}_t | (x) \uparrow t] &= PE\left[\sum_{j=0}^{\omega-x-t} V_j\right] = P \sum_{j=0}^{\omega-x-t} E[V_{t+j}] \\ &= P \sum_{j=0}^{\omega-x-t} P[(x+t) \uparrow j] E[V_{t+j}] \\ &= P \sum_{j=0}^{\omega-x-t} {}_j p_{x+t} E\left[\exp\left(-\int_t^{t+j} \Delta_s ds\right)\right] \\ &\left(\longrightarrow P \sum_{j=0}^{\omega-x-t} {}_j p_{x+t} E\left[\exp\left(-\sum_{s=t}^{t+j} \Delta_s\right)\right]\right) \end{aligned}$$

La reserva será, entonces

$$V = \sum_{k=0}^{\omega-x-t-1} SA_{k+t+1} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} E\left[\exp\left(-\int_t^{t+k} \Delta_s ds\right)\right] - P \sum_{j=0}^{\omega-x-t} {}_j p_{x+t} E\left[\exp\left(-\int_t^{t+j} \Delta_s ds\right)\right]$$

$$\left(\dots \rightarrow \mathcal{V} = \sum_{k=0}^{0-x-t-1} SA_{k+t+1} k P_{x+t} q_{x+t+k} E \left[\exp \left(- \sum_{s=t}^{t+k} \Delta_s \right) \right] - P \sum_{j=0}^{0-x-t} j P_{x+t} E \left[\exp \left(- \sum_{s=t}^{t+k} \Delta_s \right) \right] \right)$$

Hasta aquí es a donde podemos llegar sin hacer más supuestos sobre el modelo probabilístico para la tasa o fuerza de interés. En lo que sigue se muestra cómo se pueden simplificar (o complicar) las fórmulas si se supone algún modelo particular para el proceso estocástico de la fuerza de interés.

4.4 Modelos para la tasa de interés

4.4.1 Modelo determinista con tasa constante

Este caso corresponde al modelo determinista, como se desarrolla en los textos clásicos de cálculo actuarial, tales como King (1902), Spurgeon (1932), Hooker y Longley-Cook (1957), Jordan (1967), Gerber (1986), Clarke et al. (1994) y Bowers et al. (1997), en estos tres últimos, bajo el enfoque probabilístico de la mortalidad. Para el estudio de un modelo más general, véase DeVylder (1997).

4.4.2 Modelo determinista con tasa variable

En este caso el proceso estocástico $\{\Delta_s\}_{s \geq 0}$ $\left(\dots \rightarrow \{\Delta_s\}_{s \in \{0,1,2,\dots\}} \right)$ se degenera en un conjunto de funciones deterministas $\{\delta_s\}_{s > 0}$ $\left(\dots \rightarrow \{\delta_s\}_{s \in \{0,1,2,\dots\}} \right)$, por lo que la prima será

$$P = \sum_{k=0}^{p-1} P[K(x) = k] SA_{k+1} \exp \left(- \int_0^{k+1} \delta_s ds \right)$$

$$\left(\dots \rightarrow P = \sum_{k=0}^{p-1} P[K(x) = k] SA_{k+1} \exp \left(- \sum_{s=0}^{k+1} \delta_s \right) \right)$$

4.4.3 Modelo estocástico en tiempo discreto con espacio de estados a lo más numerable

Sean

Δ_k , fuerza de interés del año k ,

$Ran_{\Delta_k} = \{\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots\}$, rango de Δ_k

$$\begin{array}{cccc} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{k1} \\ \delta_{12} & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \delta_{2h_2} & & \vdots \\ \delta_{1h_1} & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & \delta_{kh_k} \end{array}$$

$f_{\Delta_k}(\delta_{k_i}) = P[\Delta_k = \delta_{k_i}]$, función de probabilidad de masa de Δ_k .

Suponiendo que $\{\Delta_k\}_{k \in \{1,2,\dots\}}$ son variables aleatorias independientes, se tiene

$$E\left[\exp\left(-\sum_k \Delta_k\right)\right] = E\left[\prod_k \exp(-\Delta_k)\right] = \prod_k E[\exp(-\Delta_k)],$$

ya que las $\{\exp(-\Delta_k)\}_{k \in \{1,2,\dots\}}$ son v.a.i.

Para calcular $E[\exp(-\Delta_k)]$ podemos proceder de dos maneras:

1. Por medio de la expresión $E[\exp(-\Delta_k)] = \sum_{j \in \text{Ran}_{\Delta_k}} \exp(-\delta_{kj}) P[\Delta_k = \delta_{kj}]$, o bien,
2. calculando primero la función de probabilidad de masa de $\exp(-\Delta_k)$.

Nótese que $E[\exp(-\Delta_k)] \neq \exp(E[-\Delta_k])$, por lo que no puede calcularse la prima utilizando factores de descuento a tasas esperadas. De hecho, dado que la función $x \rightarrow \exp(-x)$ es cóncava hacia arriba (convexa), se tiene, por la desigualdad de Jensen,

$$E[\exp(-\Delta_k)] \geq \exp(E[-\Delta_k])$$

Si denotamos con $\eta_k = E[\exp(-\Delta_k)]$, entonces podemos escribir la expresión para calcular la prima como

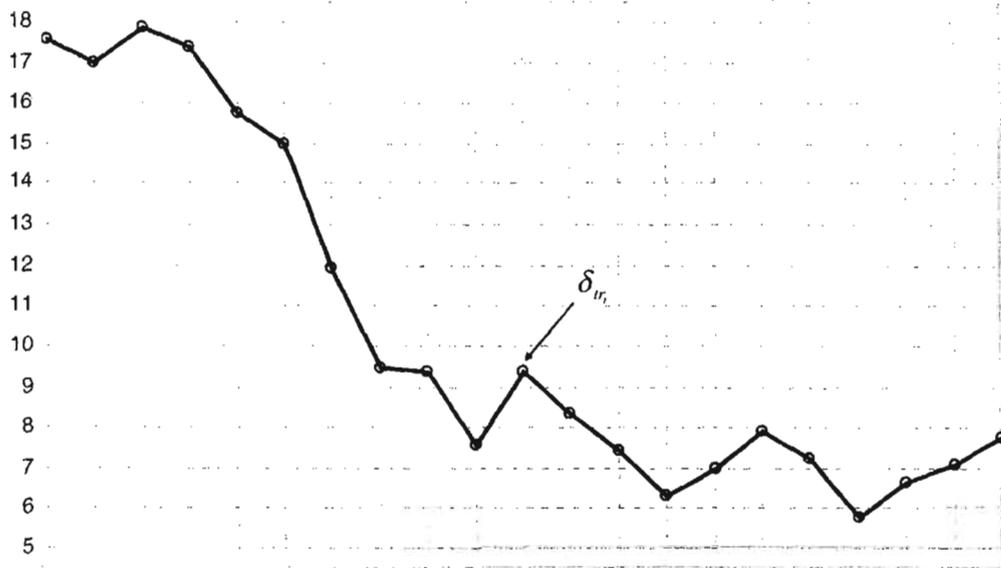
$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ P[K(x) = k] S_{A_{k+1}} \prod_{j=0}^k E[\exp(-\Delta_k)] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ S_{A_{k+1}} p_x q_{x+k} \prod_{j=0}^k \eta_j \right\} \end{aligned}$$

Una simplificación adicional se obtiene al suponer que $\{\Delta_k\}_{k \in \{1,2,\dots\}}$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas. En este caso,

$$\prod_{j=0}^k E[\exp(-\Delta_k)] = (E[\exp(-\Delta_1)])^k = \eta_1^k$$

Una trayectoria o realización del proceso estocástico $\{\Delta_k\}_{k \in \{1,2,\dots\}}$ puede representarse como

$$\delta_{1r_1} \mapsto \delta_{2r_2} \mapsto \dots \delta_{kr_k}$$



Una trayectoria del proceso estocástico de la tasa de interés

4.4.4 Escenarios

Bowers et al (1997) describen un modelo en el que se suponen ciertos escenarios para la tasa de interés. Cada escenario consiste en un conjunto de tasas conocidas de antemano que se aplicarán en cada uno de los años de valuación. El componente aleatorio se manifiesta en la asignación subjetiva de la probabilidad de ocurrencia de cada escenario. Esta asignación puede basarse en las expectativas a nivel macroeconómico o en la experiencia del actuario que aplique el modelo.¹

Un conjunto de escenarios se representa entonces como una matriz Δ de $k \times e$, donde k es el número de años que, en este caso, debe coincidir con el plazo de cobertura del seguro, y e indica el número de escenarios considerados

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \cdots & \delta_{1e} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2e} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \cdots & \delta_{ke} \end{bmatrix}$$

La entrada δ_{ij} representa la fuerza de interés aplicable en el año i , bajo el escenario j . Cada escenario tiene fijada una probabilidad de realización, por ejemplo, $\pi_j = P[E = j]$, donde E es la variable aleatoria discreta que indica el número o índice del escenario. Nótese que, a diferencia del modelo expuesto en el apartado anterior, las trayectorias no son aleatorias, sino **determinísticas**.

Para calcular la prima que se deriva de este modelo, aplicamos el teorema 2 de este capítulo:

¹ Para una descripción amplia sobre algunas consideraciones a tomar en cuenta en la generación de escenarios, consúltese Jetton (1988).

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{j \in \text{Ran}_E} E[\mathfrak{S} | E = j] P[E = j] \\
&= \sum_{j \in \text{Ran}_E} \left\{ \sum_{k=0}^{\rho-1} \prod_{s=0}^k \exp(-\delta_{s+1,j}) S A_{k+1} p_x q_{x+k} \right\} \pi_j
\end{aligned}$$

La varianza es

$$\text{Var}[\mathfrak{S}] = E[\mathfrak{S}^2] - (E[\mathfrak{S}])^2 = \sum_{j \in \text{Ran}_E} E[\mathfrak{S}^2 | E = j] P[E = j] - P^2$$

Para determinar la función de probabilidad de masa de \mathfrak{S} , $f_{\mathfrak{S}}$, obsérvese que el rango de esta variable aleatoria está dado por

$$\text{Ran}_{\mathfrak{S}} = \{v_k^j \mid k \in I_n, j \in \text{Ran}_E\} \cup A,$$

donde

$$v_k^j = S A_{k+1} \prod_{s=0}^k \exp(-\delta_{s+1,j}),$$

$$I_n = \{0, \dots, n-1\}, \text{ y}$$

$$A = \begin{cases} \{0\}, & \text{si el plan es temporal} \\ \emptyset, & \text{si el plan es vitalicio} \end{cases}$$

De la consideración anterior y suponiendo que E y $K(x)$ son independientes, se tiene

$$\begin{aligned}
f_{\mathfrak{S}}(v_k^j) &= P[\mathfrak{S} = v_k^j] \\
&= P[\{E = j\} \cap \{K(x) = k\}] \\
&= f_{E, K(x)}(j, k) = f_E(j) f_{K(x)}(k) = \pi_j p_x q_{x+k}
\end{aligned}$$

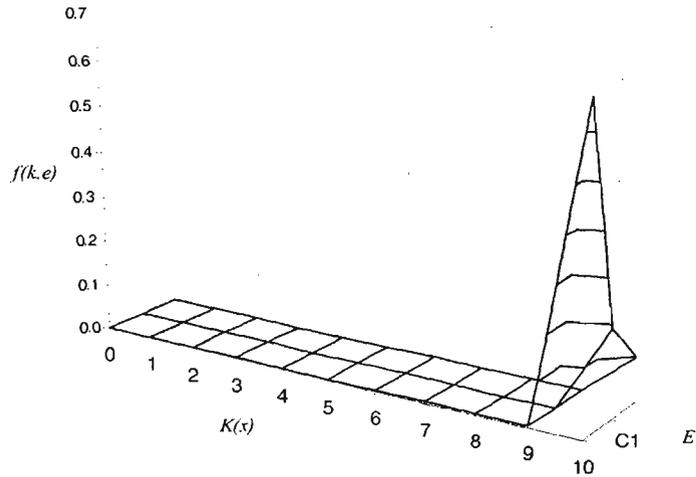
$$\begin{aligned}
f_{\mathfrak{S}}(0) &= P[\mathfrak{S} = 0] \\
&= P\left[\{K(x) \geq n\} \cap \bigcup_{j \in \text{Ran}_E} \{E = j\}\right] \\
&= P[K(x) \geq n] = {}_n p_x
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_{\mathfrak{S}}(\ell) = \begin{cases} \pi_j p_x q_{x+k}, & \text{si } \ell = v_k^j \text{ para alguna } j \in \text{Ran}_E \text{ y alguna } k \in I_n \\ {}_n p_x, & \text{si } \ell = 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La hipótesis de que $K(x)$ y E son v.a.i. nos permite escribir $f_{\mathfrak{S}}$ como una función bivariada $f_{K(x), E}$. En este caso, se podrá calcular la función de probabilidad conjunta como el producto de las respectivas funciones de probabilidad:

$$\begin{aligned}
 f_{K(x),E}(k,e) &= P[K(x)=k, E=e] \\
 &= P[K(x)=k]P[E=e] \\
 &= f_{K(x)}(k)f_E(e)
 \end{aligned}$$



Distribución conjunta de $K(x)$ y E

4.4.5 Modelo lognormal

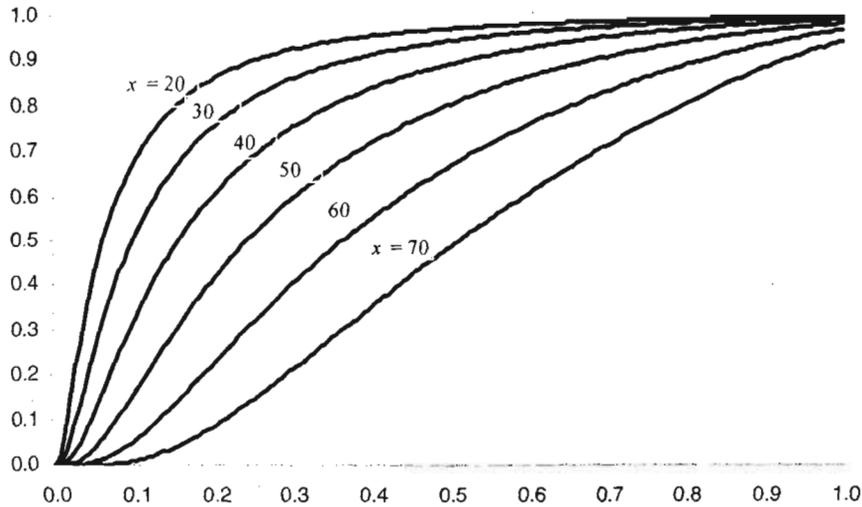
De acuerdo con los resultados del capítulo 3, la prima de un seguro estará dada por

$$\begin{aligned}
 E[\mathfrak{S}] &= E[SAv_{K(x)+1}] \\
 &= E[E[SAv_{K(x)+1} | K(x)]] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} E[SAv_{K(x)+1}]P[K(x)=k] \\
 &= SA \sum_{k=0}^{\infty} \left[\exp\left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]^{k+1} P[K(x)=k]
 \end{aligned}$$

En casos como éste, no encontramos dificultad alguna para determinar las funciones de distribución y de probabilidad de \mathfrak{S} . A manera de ejemplo, imaginemos un seguro de vida entera con suma asegurada constante e igual a SA . Utilizando el *teorema de probabilidad total* tenemos

$$\begin{aligned}
F_{\mathfrak{S}}(s) &= P[\mathfrak{S} \leq s] = P[\mathcal{S}A v_{K(x)+1} \leq s] = P[v_{K(x)+1} \leq s/\mathcal{S}A] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P[v_{K(x)+1} \leq s/\mathcal{S}A | K(x) = k] P[K(x) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P[v_{k+1} \leq s/\mathcal{S}A]_k p_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left[\exp\left(-\sum_{j=1}^{k+1} \Delta_j\right) \leq s/\mathcal{S}A\right]_k p_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P[X_{k+1} \leq \ln\{s/\mathcal{S}A\}]_k p_x q_{x+k}
\end{aligned}$$

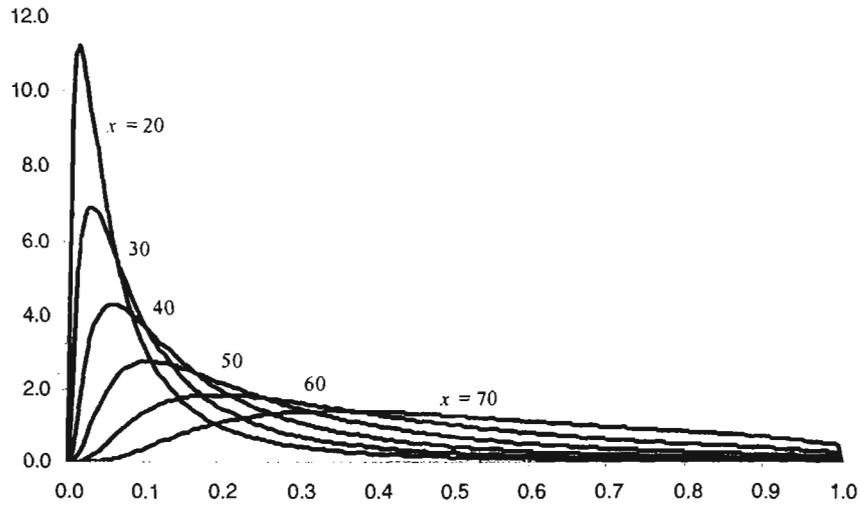
donde $X_k \sim N(-\mu k, \sigma^2 k)$.



Funciones de distribución del valor presente de la reclamación para un seguro de vida entera

La función de densidad será, por tanto,

$$\begin{aligned}
f_{\mathfrak{S}}(s) &= \frac{d}{ds} F_{\mathfrak{S}}(s) \\
&= \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} P[X_{k+1} \leq \ln\{s/\mathcal{S}A\}]_k p_x q_{x+k} \\
&= \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{k+1}}} \int_{-\infty}^{\ln\{s/\mathcal{S}A\}} \exp\left(-\frac{(y + \mu[k+1])^2}{2\sigma^2[k+1]}\right) dy \right\}_k p_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{k+1}}} \right) \exp\left(-\frac{(\ln\{s/\mathcal{S}A\} + \mu[k+1])^2}{2\sigma^2[k+1]}\right) \right\}_k p_x q_{x+k}
\end{aligned}$$



Funciones de densidad del valor presente de la reclamación para un seguro de vida entera

Utilizando la tabla de mortalidad CNSF2000-I y los parámetros $\mu = 5\%$ y $\sigma^2 = 1\%$, la prima única por unidad de suma asegurada para una persona de edad 40 equivale a 0.2261. La probabilidad de que el valor presente de la obligación de la compañía sea superior a este valor, es decir, que se tenga una pérdida, es aproximadamente igual a 0.3477. Si se pretende reducir esta probabilidad, digamos a 10%, habrá que aumentar la prima a 0.5200, lo cual implica un recargo del 130%. Para un portafolio conformado por pólizas idénticas, el recargo a la prima debe disminuir conforme el número de aquéllas se incrementa.

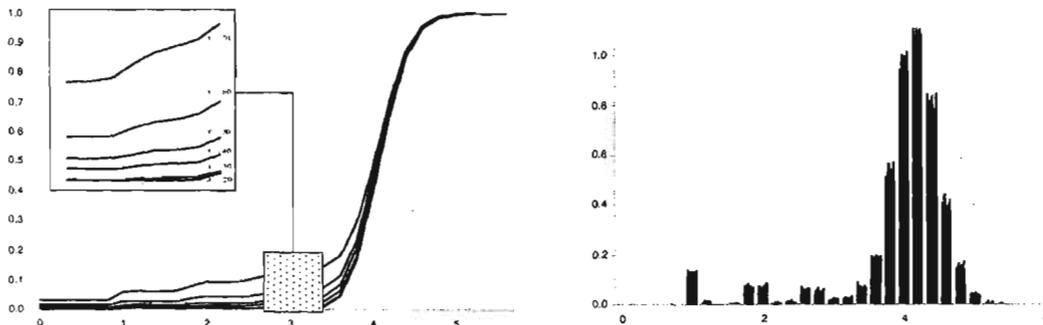
La prima para una anualidad inmediata unitaria temporal a n años se calcula como

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{j=1}^n {}_j p_x E \left[\exp \left(- \sum_{s=1}^j \Delta_s \right) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n {}_j p_x \left[\exp \left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^j
 \end{aligned}$$

Para determinar la función de distribución del valor presente de esta renta se procede como sigue

$$\begin{aligned}
 F_{\mathfrak{S}}(s) &= P[\mathfrak{S} \leq s] = P \left[\sum_{\alpha=1}^{K(x)+1} v_{\alpha} \leq s \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} P \left[\sum_{\alpha=1}^{K(x)+1} v_{\alpha} \leq s \mid K(x) = k \right] P[K(x) = k] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} P \left[\sum_{\alpha=1}^{k+1} v_{\alpha} \leq s \right] {}_k p_x q_{x+k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} P \left[\sum_{y=1}^{k+1} \exp \left(- \sum_{y=1}^{\alpha} \Delta_y \right) \leq s \right] {}_k p_x q_{x+k}
 \end{aligned}$$

En vista de que las v_{α} no son v.a.i. y además, se distribuyen *lognormal*, la función de distribución de Σv_{α} , no puede formularse en términos simples, por lo que hará falta aplicar un proceso de aproximación. Una posibilidad es la estimación vía simulación, mediante técnicas que se examinarán en el siguiente capítulo.



Funciones de distribución y de probabilidad empíricas obtenidas por simulación para un seguro temporal de rentas

4.4.6 Modelo autorregresivo

Como ya hemos mencionado, los modelos que más se apegan a la realidad para representar procesos estocásticos de tasas o fuerzas de interés, son los modelos con dependencia. Dentro de los modelos que incorporan en su estructura la dependencia entre valores consecutivos, pero, sin embargo, no reconocen el efecto de las variaciones o tendencias temporales en la media o varianza, encontramos los procesos autorregresivos (AR).

La clase más simple de procesos autorregresivos está constituida por los modelos de primer orden. Supongamos que la fuerza de interés es constante dentro de cada período anual, pero cambia, siguiendo un proceso de este tipo, entre un año y otro. En este caso, la fuerza de interés correspondiente al año t , Δ_t , dependerá solamente del valor que haya tomado en el año $t - 1$, es decir, $\Delta_t = \Delta + \psi(\Delta_{t-1} - \Delta) + \varepsilon_t$ donde las ε_t representan v.a.i.i.d. con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ y el factor ψ mide el grado de correlación entre observaciones sucesivas.

La prima neta única de un seguro de vida a n años donde la suma asegurada del año k es SA_k , se calcula como

$$\begin{aligned}
 P &= E \left[I_{(1,2,\dots,n-1)} (K(x)+1) SA_{K(x)+1} v(K(x)+1) \right] \\
 &= E \left[I_{(1,2,\dots,n-1)} (K(x)+1) SA_{K(x)+1} e^{-\sum_{h=0}^{K(x)+1} \Delta_h} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} SA_{k+1} e^{\left[-(k+1)\Delta + \sigma^2 \left\{ \frac{k(1+\psi)}{2} - \psi \frac{1-\psi^k}{(1-\psi)^2} \right\} \right]} P[K(x) = k] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} SA_{k+1} e^{\left[-(k+1)\Delta + \sigma^2 \left\{ \frac{k(1+\psi)}{2} - \psi \frac{1-\psi^k}{(1-\psi)^2} \right\} \right]} {}_k P_x q_{x+k}
 \end{aligned}$$

Tratándose de una renta temporal donde el pago al final del año h es R_h , la prima está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 P &= E \left[I_{\{1,2,\dots,n\}} (K(x)) \sum_{h=1}^{K(x)} R_h v(h) \right] \\
 &= E \left[I_{\{1,2,\dots,n\}} (K(x)) \sum_{h=1}^{K(x)} R_h e^{-\sum_{j=1}^h \Delta_j} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n R_k e^{-\left[-k\Delta + \sigma^2 \left\{ \frac{k(1+\psi)}{2} - \psi \frac{1-\psi^k}{(1-\psi)^2} \right\} \right]} P[K(x) \geq k] \\
 &= \sum_{k=1}^n R_k e^{-\left[-k\Delta + \sigma^2 \left\{ \frac{k(1+\psi)}{2} - \psi \frac{1-\psi^k}{(1-\psi)^2} \right\} \right]} {}_k D_x
 \end{aligned}$$

Capítulo 5

Simulación y aplicación

*-Entonces, ¿por qué queréis saber?
-Porque la ciencia no consiste sólo en saber
lo que debe o puede hacerse,
sino también en saber lo que podría hacerse
aunque quizá no debería hacerse.*

*Conversación entre
Adso de Melke y Guillermo de Baskerville, en
El nombre de la rosa, de
Umberto Eco (1980).*

Introducción

Como hemos visto en el capítulo anterior, el cálculo de las características numéricas de las funciones actuariales puede complicarse a tal grado que sea prácticamente imposible expresarlas en términos elementales. Para poder estudiar las propiedades de interés de estas funciones hará falta, entonces, la aplicación de métodos numéricos.

En este capítulo se desarrollan algunos ejemplos para ilustrar la estimación de primas y reservas, así como las funciones de probabilidad para las variables aleatorias asociadas a valores actuariales, a través de la aplicación de técnicas de simulación estocástica. Es necesario mencionar que no se pretende que se vea esta técnica como una panacea pretendiendo que las valuaciones actuariales se realicen con esta metodología; en la medida de lo posible, será preferible trabajar con el modelo teórico e inclinarse por la simulación sólo en casos muy complejos, ya que ésta no deja de ser una mera aproximación.

5.1 Simulación aleatoria

5.1.1 Variables continuas

Como punto de partida para la construcción de números aleatorios con una distribución dada, se requiere de un generador de números aleatorios con distribución uniforme continua en $(0,1)$. Existen diversos algoritmos para obtener una sucesión $\{u_n\}$ de este tipo de números.¹ Entre los más conocidos

¹ Los algoritmos para generar números aleatorios con distribución uniforme continua en el intervalo $(0, 1)$ están definidos por funciones determinísticas, razón por la cual a tales números se les da el calificativo de *pseudoaleatorios*, puesto que, en realidad, no son aleatorios; sin embargo, poseen propiedades estadísticas que hacen prácticamente imposible discernir si provienen de una serie determinística, o de una estocástica.

podemos mencionar los *generadores congruenciales multiplicativos*, que se definen mediante fórmulas recursivas como

$$\begin{aligned}x_n &= \alpha x_{n-1} \text{ mod } k \\u_n &= x_n / k\end{aligned}$$

donde α y k son números enteros positivos y el valor de partida x_0 recibe el nombre de *semilla*.

Para efectos de simulación de números aleatorios con una distribución no uniforme se aplicará el método de *inversión* o de la *transformación integral de probabilidad*, el cual es de aplicación universal y de fácil implementación.

El método está fundamentado en el siguiente teorema

Sea F la función de distribución de la v.a. continua X . Supóngase que F^{-1} es continua y estrictamente creciente. Entonces, si $U \sim U(0, 1)$,

$$F^{-1}(U) \sim X$$

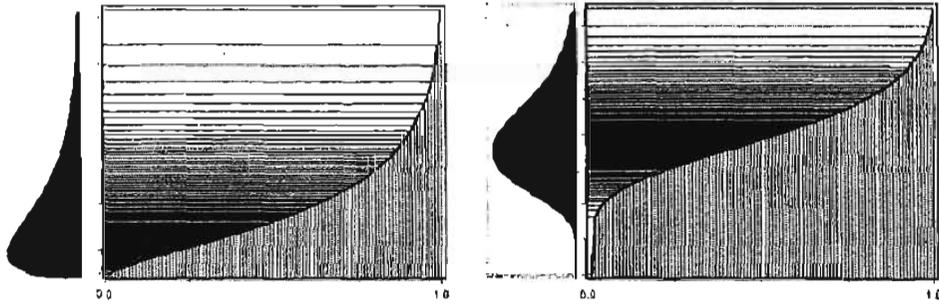
Lo que nos dice el resultado anterior es que para generar un número aleatorio proveniente de una v.a. con función de distribución F , basta con generar un número aleatorio u con distribución uniforme continua en $(0, 1)$ y aplicar la inversa de F a u .

Demostración

$$\begin{aligned}F_{F^{-1}(U)}(x) &= P[F^{-1}(U) \leq x] \\&= P[F(F^{-1}(U)) \leq F(x)] \\&= P[U \leq F(x)] \\&= F(x)\end{aligned}$$

Nótese que es condición necesaria el hecho de que F^{-1} sea estrictamente creciente para que se verifique la desigualdad $F(F^{-1}(U)) \leq F(x)$. Si no fuera el caso, es decir, si existen intervalos con probabilidad cero, habrá que definir de una manera más general el algoritmo, tomando como valor $\inf\{x : F(x) = u\}$.

En las siguientes gráficas se muestra la transformación de números aleatorios $U(0,1)$, aplicando la inversa de la función de distribución de dos variables aleatorias, la primera de ellas con sesgo a la izquierda, y la segunda, más simétrica. La concentración de las líneas horizontales nos proporciona una noción de las formas de las funciones de probabilidad de las variables que se están simulando.



Una de las desventajas del algoritmo de inversión es que se requiere calcular la inversa de la función de distribución de la variable aleatoria a simular. En muchos casos, la expresión de la inversa de la función de distribución es demasiado compleja o no se puede expresar en términos elementales,² por lo tanto, al no poderse invertir dicha función mediante métodos analíticos, indefectiblemente tendremos que aplicar un procedimiento de aproximación numérico.

Una técnica muy sencilla que puede aplicarse al utilizar una hoja electrónica de cálculo, es la de *búsqueda inversa*.³ Para la aplicación de este método, la función de distribución se *discretiza* de la siguiente manera: supóngase que el soporte de $T(x)$ es el conjunto $[0, \omega)$. Para $h > 0$, considérese la partición homogénea del intervalo $[0, \omega)$:

$$P = \{0, h, 2h, \dots, \omega\}$$

Definimos la variable aleatoria discreta $T_h(x)$ como

$$T_h(x) = h \lceil T(x)/h \rceil,$$

es decir,

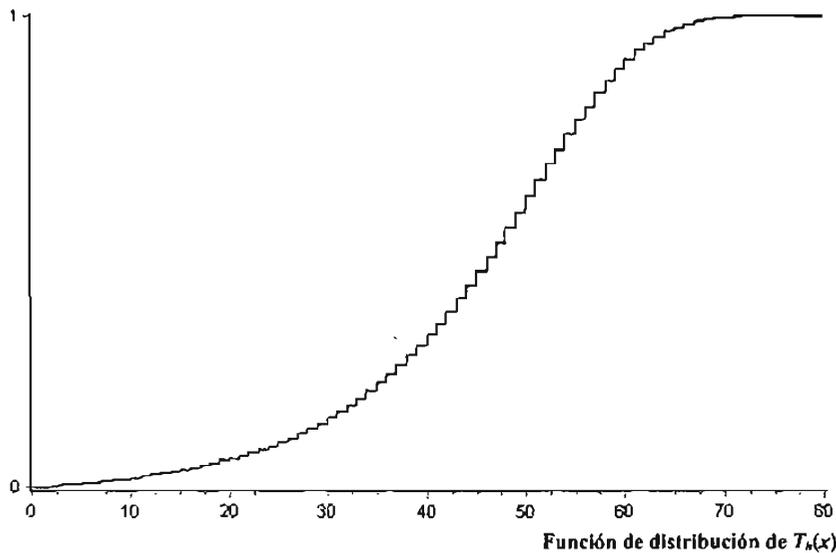
$$T_h(x) = jh, \text{ si } jh \leq T(x) < (j+1)h$$

donde j es un entero no negativo. El rango de $T_h(x)$ es el conjunto $\{0, h, 2h, \dots\}$, mientras que su función de masa es

$$P[T_h(x) = kh] = \begin{cases} P[hk \leq T(x) < h(k+1)], & k \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

² El teorema de la función inversa establece las condiciones bajo las cuales una función dada es invertible en términos elementales.

³ Este algoritmo está sustentado en el siguiente teorema: Sea X una variable aleatoria y $X_\epsilon, \epsilon > 0$, definida como $X_\epsilon = \epsilon \lceil X/\epsilon \rceil$. Si existe $\epsilon > 0$ tal que X_ϵ tiene esperanza finita, entonces $E[X_\epsilon]$ existe para toda $\epsilon > 0$ y $E[X_\epsilon] \rightarrow E[X]$ cuando $\epsilon \rightarrow \infty$.



Una vez calculada esta función, se emula el procedimiento utilizado para simular una variable aleatoria discreta, mismo que se explica en la siguiente sección. Aunque este algoritmo es muy eficiente, tiene el inconveniente de ser poco preciso, a menos que se utilice una partición muy fina del soporte de la variable aleatoria, sin embargo se requerirá de una ingente cantidad de recursos de la computadora, con la consecuente reducción de la velocidad de procesamiento.

5.1.2 Variables discretas

En los ejercicios que se han incluido en este capítulo será preciso simular variables aleatorias discretas. Como ejemplo, considérese la simulación del tiempo de vida de un asegurado de edad x . En muy contadas ocasiones se dispone de un modelo teórico continuo para el comportamiento de las tasas de fallecimiento o de la fuerza de mortalidad; lo más común es que se disponga como herramienta demográfica una tabla con las tasas anuales para edades enteras. En tal circunstancia, los valores de $P\{K(x) = k\}$ pueden obtenerse inmediatamente de la tabla de mortalidad y, en consecuencia, es posible simular $K(x)$ sin necesidad de conocer la distribución de $T(x)$; se requerirá entonces simular una v.a. discreta.

Para la simulación de variables aleatorias discretas, nos valdremos del siguiente algoritmo basado en la misma idea que subyace tras el método de inversión.⁴

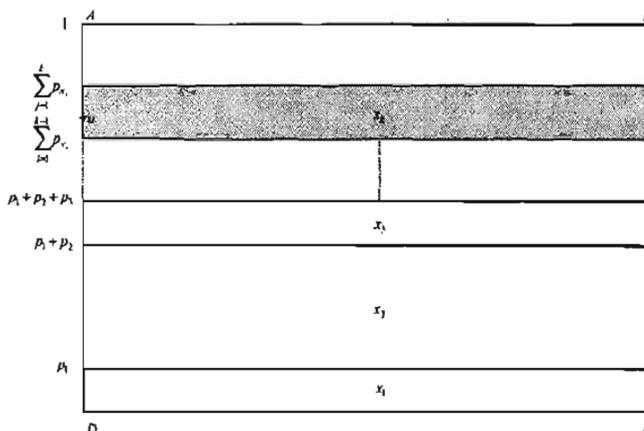
Sean $x_1 < x_2 < \dots$ los puntos masa de una variable aleatoria discreta X y $p_k = P[X = x_k]$. Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme continua en $(0,1)$. Definase $g:(0,1) \rightarrow \text{Ran}_X$ mediante la transformación

$$g(u) = x_k \text{ si } u \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_{x_j}, \sum_{j=1}^k p_{x_j} \right], \text{ donde } \sum_{j=1}^0 p_{x_j} \stackrel{\text{def.}}{=} 0.$$

Entonces $Y = g(U) \sim X$.

⁴ Como sucede en el caso continuo, este algoritmo es de aplicación general, existiendo técnicas más eficientes para algunas variables aleatorias de utilización frecuente, tales como la Poisson, la binomial, etc.

Antes de pasar a la demostración, veamos la siguiente gráfica en la cual se intenta ilustrar cómo opera el algoritmo:



En primer término se genera un número u partir de una distribución uniforme continua en $(0,1)$. En la gráfica,

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_{x_j} < u \leq \sum_{j=1}^k p_{x_j} ,$$

entonces, de acuerdo con el algoritmo, $g(u) = x_k$. Iterando el proceso n veces, se obtendrá una sucesión de valores $\{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}\}$. La proporción de puntos de este conjunto que son iguales a x_k será aproximadamente igual a la proporción que existe entre el área sombreada y la del rectángulo $ABCD$. Esta última proporción es igual a

$$\frac{\left\{ \sum_{j=1}^k p_{x_j} - \sum_{j=1}^{k-1} p_{x_j} \right\} |DC|}{|AD| |DC|} = p_k = P[X = x_k]$$

Para verificar que el algoritmo que se propone realmente funciona, debemos demostrar lo siguiente: 1) $Ran_Y = Ran_X$ y, 2) $P[Y = x_k] = P[X = x_k]$, para cada $x_k \in Ran_X$.

1. Puesto que U toma valores en $(0,1)$, la imagen de $g(U)$, es decir, el rango de Y , es subconjunto de $\{x_1, x_2, \dots\}$. Ahora, si $x_k \in Ran_X$, entonces $0 < p_k = P[X = x_k] \leq 1$, lo que implica que $x_k \in Ran_Y$, puesto que $Y = x_k$ cuando $F_X(x_{k-1}) < U \leq F_X(x_k)$.
2.
$$P[Y = x_k] = P\left[U \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_{x_j}, \sum_{j=1}^k p_{x_j} \right] \right] = \sum_{j=1}^k p_{x_j} - \sum_{j=1}^{k-1} p_{x_j} = p_k = P[X = x_k]$$

Las condiciones 1 y 2 implican que, con probabilidad 1, $X = Y$.

5.1.3 Variables mixtas

Se han revisado las técnicas que aplicaremos para simular variables aleatorias, sean éstas continuas o discretas. Sin embargo, es común en la práctica actuarial encontrarse con variables

aleatorias que no son continuas, ni discretas. En tal situación se dice que la variable aleatoria tiene una *distribución mixta*.

Una muestra de este tipo de variables aleatorias en el ámbito del seguro de vida es la siguiente: imaginemos un seguro dotal a n años para una persona de edad x en el que la suma asegurada, pagadera a los beneficiarios al ocurrir el fallecimiento, es igual a SA_t , si el asegurado muere en el instante t , $0 \leq t \leq n$; si el asegurado sobrevive a edad $x + n$, se le entrega la cantidad SAS . Siendo Θ el importe que ha de cubrir la compañía aseguradora al ocurrir el evento previsto en el contrato, es claro que $Ran_{\Theta} = \{SA_t \mid 0 \leq t \leq n\} \cup \{SAS\}$. Entonces, Θ no es una variable aleatoria discreta, puesto que su rango no lo es; tampoco es una variable continua, pues su función de distribución tiene una discontinuidad en el punto SAS al ser $P[\Theta = SAS] = p_x > 0$. Así, resulta que Θ tiene una distribución mixta.

Para la simulación de este tipo de variables aleatorias se puede aplicar el siguiente procedimiento:

Si x_0 es un punto de discontinuidad de la función de distribución de Θ , es decir, $P[\Theta = x_0] > 0$, definir $\theta = x_0$ cuando

$$\lim_{y \rightarrow x_0^-} F_{\Theta}(y) < u \leq F_{\Theta}(x_0)$$

La técnica de simulación de valores para el componente continuo de la distribución es idéntica que en el caso de una v.a. continua.

5.2 La función de distribución empírica y el principio de sustitución

El objetivo de un estudio de simulación es la generación de una muestra aleatoria de una v.a. cuya función de probabilidad se desconoce, a fin de obtener información relevante acerca de ella, por ejemplo, su valor esperado, la mediana, la varianza, los percentiles, o, inclusive, las funciones de distribución y de probabilidad mismas. Las características numéricas de las v.a. pueden estimarse de una muestra por medio de procedimientos estadísticos estándares. La estimación de las funciones de distribución y de densidad se lleva a cabo a través de la *función de distribución empírica* u *ojiva* y de la *función de probabilidad empírica* o *histograma*.

Un paso más allá en la construcción de un estudio más exhaustivo lo constituye la estimación paramétrica puntual o por intervalos, mediante métodos tales como el de momentos o de la función de máxima verosimilitud, una vez que se propone una forma funcional para la distribución, además de la aplicación de pruebas de bondad de ajuste. Para los fines de este capítulo, nos limitaremos a estimar características tales como la media o la función de distribución, absteniéndonos de proponer una expresión funcional para las variables de relevancia.

5.2.1 Las funciones de distribución y de probabilidad empíricas

Si X es una variable aleatoria, su función de distribución se define como

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

A partir de una muestra aleatoria se puede obtener una aproximación a F_X sustituyendo probabilidades por proporciones. Para una muestra aleatoria conformada por los puntos X_1, \dots, X_n , sean

$c_0 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $c_m = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $c_0 < c_1 < \dots < c_m$. Se define la *función de distribución empírica*, F_n , como

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < c_0 \\ \frac{1}{n} \kappa_j, & x = c_j \\ \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(x - c_{j-1}) + F_n(c_{j-1}), & x \in (c_{j-1}, c_j] \\ 1, & x > c_m \end{cases}$$

donde κ_j representa el número de puntos de la muestra que son menores o iguales a c_j .

La función F_n , al ser monótona no decreciente y continua por la derecha, define una distribución de probabilidad, que asigna probabilidad $1/n$ a cada valor x_i observado en la muestra. En otros términos, si pretendemos obtener una muestra aleatoria simple X_1^*, \dots, X_n^* de la distribución F_n , tenemos que muestrear, con probabilidad $1/n$ y con reemplazo, entre los valores observados x_1, \dots, x_n de la muestra original. Las muestras observadas x_1, \dots, x_n y x_1^*, \dots, x_n^* contienen los mismos valores, pero difieren en que entre los x_i^* puede haber valores repetidos.

No resulta difícil advertir que, para cualquier número real x , la variable aleatoria $nF_n(x)$ sigue una distribución binomial con parámetros n y $F_X(x)$. En consecuencia,

1. el valor esperado de la función de distribución empírica en cada punto coincide con el valor de la verdadera función de distribución, es decir, $E[F_n(x)] = F_X(x)$,
2. la varianza de $F_n(x)$ converge a cero a medida que el tamaño de la muestra, n , tiende a infinito. Más precisamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[F_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_X(x)[1 - F_X(x)]}{n} = 0$$

De las propiedades anteriores se deduce directamente la convergencia puntual en probabilidad de $F_n(x)$ a $F_X(x)$. En otras palabras, $F_n(x)$ es un *estimador consistente* de $F_X(x)$, para todo número real x . De hecho, se cumple un resultado mucho más fuerte, conocido como *teorema de Glivenko-Cantelli*:

Teorema (Glivenko-Cantelli): Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria simple de una población F y sea F_n la correspondiente función de distribución empírica. Si n tiende a $+\infty$, entonces, con probabilidad igual a 1,

$$\|F_n - F_X\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_X(x)| \rightarrow 0$$

El teorema de Glivenko-Cantelli establece que $F_n(x)$ no sólo converge en probabilidad a $F_X(x)$ para todo número real x , sino que, con probabilidad 1, la función de distribución empírica, F_n , converge *uniformemente* a la función de distribución F_X .

Para estimar la función de probabilidad generatriz de la muestra X_1, \dots, X_n , se calcula la *función de probabilidad empírica* o *histograma*, que se define como la derivada de la función de distribución empírica en los puntos donde ésta es diferenciable, y como cero, en cualquier otro punto:

$$f_n(x) = F_n'(x) = \begin{cases} 0, & x < c_0, \quad x > c_m \text{ o } x = c_j \\ \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}, & x \in (c_{j-1}, c_j] \end{cases}$$

5.2.2 El principio de sustitución

Como hemos visto, F_n es un estimador no paramétrico de F_X con buenas propiedades, especialmente si se trata de muestras grandes. Este hecho sugiere un procedimiento general para estimar cantidades que dependan de la distribución desconocida F_X . Tal principio consiste simplemente en sustituir F_X por F_n siempre que sea necesario. Por esta razón suele designarse con el nombre de *principio de sustitución*.

Más concretamente, si requerimos estimar una cantidad $\xi = \xi(F_X)$, que depende de F_X , el principio de sustitución sugiere usar como estimador el valor $\xi(F_n)$, donde F_n es la función de distribución empírica.

En los ejemplos que se incluyen a continuación para esclarecer los conceptos que hemos revisado, los datos consisten en una muestra aleatoria simple X_1, \dots, X_n de la distribución desconocida F_X .

Ejemplo 1. Dada una función $h(x)$, pretendemos estimar $\theta = E[h(X)] = \int h(x) dF_X(x)$. El principio de sustitución proporciona el estimador:

$$\hat{\theta} = \int h(x) dF_n(x)$$

Ejemplo 2. En general, supongamos que $\theta = \theta(F_X)$ verifica la ecuación

$$\int g(x, \theta) dF_X(x) = 0$$

Entonces, el estimador que se obtiene por el método de sustitución queda definido como la solución de la ecuación

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i, \hat{\theta}) = 0$$

Esta última ecuación incluye como casos particulares muchos parámetros poblacionales de interés.

5.3 Aplicaciones

En esta sección aplicaremos las técnicas de simulación que hemos revisado en los apartados anteriores para estimar primas y reservas bajo modelos estocásticos para la tasa de interés. En los casos en que sea posible, se determinará explícitamente la función de distribución de las primas únicas.

Para los ejercicios que se expondrán en este capítulo se suponen dos tipos de hipótesis para simular los tiempos al fallecimiento: i) modelos continuos, bajo supuestos tales como los de Makeham, Weibull, etc., y ii) modelos discretos, a través de una tabla de mortalidad.

La función de distribución de probabilidad de $T(x)$ se calcula a partir de la expresión disponible para el modelo de mortalidad. Por ejemplo, si utilizamos el modelo de Makeham, podemos proceder como sigue:

De la relación

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right\},$$

se tiene

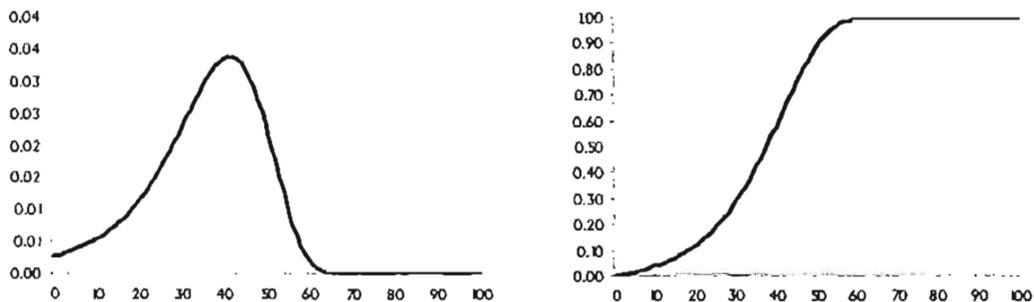
$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_0^t (A + Bc^{x+s}) ds\right\}$$

lo que implica que la función de densidad de $T(x)$ es

$$f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} = \exp\left[-At - \frac{B}{\ln c} c^x (c^t - 1)\right] \cdot [A + Bc^{x+t}],$$

en tanto que la función de distribución acumulativa está dada por

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= \int_0^t \exp\left[-As - \frac{B}{\ln c} c^x (c^s - 1)\right] \cdot [A + Bc^{x+s}] ds \\ &= 1 - \exp\left[-At - \frac{B}{\ln c} c^x (c^t - 1)\right] \end{aligned}$$



Funciones de densidad y de distribución de $T(20)$ con $A = 0.0007$, $B = 0.00005$ y $c = 10^{0.04}$.

La simulación aleatoria de los valores de $K(x)$ se efectuará a partir de su definición, a saber, $K(x) = [T(x)]$. Es necesario señalar en este punto que para la simulación de tiempos futuros de vida existen métodos particulares, tales como los propuestos por Scollnik (1995) o Pai (1997). Este último, por ejemplo, recurre a la relación existente entre la *función de distribución acumulativa*, $F(t)$, y la *fuerza de mortalidad acumulativa*, $M(t)$, definida como

$$M(t) = \int_0^t \mu_s ds$$

De la relación entre estas funciones, a saber,

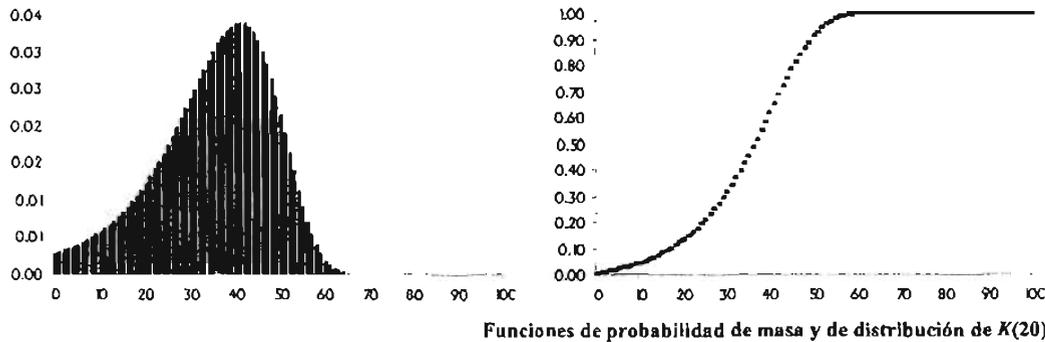
$$F(t) = 1 - p_x = 1 - \exp(-M(t)),$$

se deduce que $M(t)$ tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$.

Por lo tanto, mediante este método, que Pai denomina *de composición*, es suficiente invertir una variable aleatoria exponencial. El algoritmo será, entonces,

- i Generar un número E con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$. De acuerdo con el método de inversión, será $E = \ln(1/(1 - U))$, donde U es una v.a con distribución uniforme continua en $(0, 1)$.
- ii Calcular $T^* = M^{-1}(E)$.

Si el modelo consiste en una tabla de mortalidad, el cálculo de la función de masa de $K(x)$ es inmediato. Sin embargo, si se requieren estimar funciones de la v.a. continua $T(x)$, será necesario aplicar alguna de las hipótesis para edades fraccionadas para aproximar su distribución.



5.3.1 Aplicación 1: Escenarios aleatorios con trayectorias deterministas.

Hipótesis

Plan: Seguro temporal a 10 años para (40) con suma asegurada constante e igual a una unidad monetaria. Las primas son pagaderas durante el plazo de cobertura.

Demográfica: Tabla de mortalidad CNSF2000-I

Financiera: Escenarios de tasas de interés

$$\Delta = \begin{bmatrix} 8.0\% & 6.0\% & 10.0\% \\ 7.5\% & 6.0\% & 11.0\% \\ 6.0\% & 5.5\% & 12.0\% \\ 7.0\% & 5.5\% & 11.0\% \\ 6.0\% & 5.0\% & 10.0\% \\ 5.0\% & 5.0\% & 8.0\% \\ 4.0\% & 4.5\% & 8.0\% \\ 4.0\% & 4.5\% & 8.0\% \\ 3.0\% & 4.0\% & 7.0\% \\ 2.0\% & 4.0\% & 7.0\% \end{bmatrix}$$

con función de probabilidad

Escenario (j)	$P[E = j]$
1	0.70
2	0.20
3	0.10

Sean B_t y $P\Pi_t$, las v.a. *valor presente de beneficios* y *valor presente de primas pendientes de pago al final del año póliza t* , dado que el asegurado se encuentra con vida, respectivamente. Si $t = 0$, B_t y $P\Pi_t$, representan los valores presentes de obligaciones de las partes al momento del contrato. Para obtener la prima y las reservas terminales habrá que calcular, para $t = 0, 1, \dots, 10$, las funciones de masa de estas v.a. Para un punto de valuación en el tiempo t , $t = 0, 1, 2, \dots$, definimos los *factores de descuento* y de *renta unitaria* como

$$v_j(t, n) \doteq \prod_{a=1}^n (1 + i_{t+a, j})^{-1}$$

$${}_j \ddot{a}_{\overline{n}|}(t) \doteq 1 + \sum_{a=1}^{n-1} v_j(t, a)^{-1}$$

con ${}_j \ddot{a}_{\overline{0}|}(t) \doteq 1$.

Las funciones de probabilidad de masa de B_t y Π_t son, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo 4,

$$f_{B_t}(b) = \begin{cases} \pi_{j k} P_{x+t} q_{x+k+t}, & \text{si } b = v_j(t, k) \text{ para alguna } j \in \text{Ran}_E \text{ y alguna } k \in \{0, 1, \dots, 9-t-1\} \\ {}_n P_{x+t}, & \text{si } b = 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$f_{\Pi_t}(a) = \begin{cases} \pi_{j k} P_{x+t}, & \text{si } a = {}_j \ddot{a}_{\overline{n}|}(t) \text{ para alguna } j \in \text{Ran}_E \text{ y alguna } k \in \{0, 1, \dots, 9-t-1\} \\ {}_{n-t} P_{x+t}, & \text{si } a = {}_j \ddot{a}_{\overline{n-t}|}(t) \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

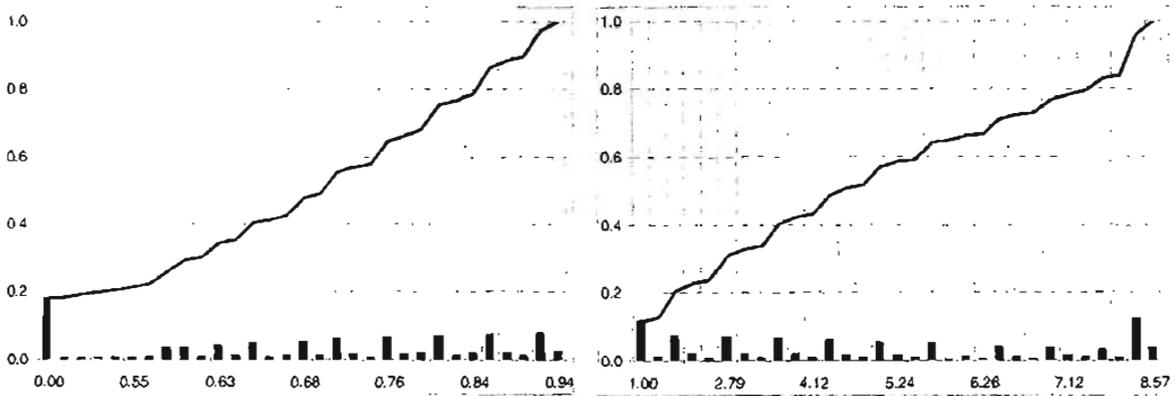
La prima nivelada queda definida, por tanto, por la relación

$$P \cdot E[\Pi_0] = E[B_0]$$

de donde,

$$P = \frac{\sum_{j=1}^3 E[B_0 | E = j] P[E = j]}{\sum_{j=1}^3 E[\Pi_0 | E = j] P[E = j]} = \frac{\sum_{j=1}^3 \left[\left\{ \sum_{k=0}^9 v_j(0, k+1) {}_k p_x q_{x+k} \right\} \pi_j \right]}{\sum_{j=1}^3 \left[\left\{ \sum_{k=0}^9 {}_k p_x j \ddot{a}_{\overline{1}|} (0) \right\} \pi_j \right]}$$

Las gráficas de las funciones de probabilidad y de distribución de B_0 y Π_0 se muestran a continuación.



Reserva. La reserva al final del año t corresponde al valor esperado condicional de la diferencia entre el valor presente de obligaciones futuras de la compañía y el valor presente de las primas pendientes de pago, dado que el asegurado se encuentra con vida al final de dicho año. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} {}_tV &= E[B_t - P\Pi_t | (x) \uparrow t] \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\left\{ \sum_{k=0}^{9-t} v_j(t, k+1) {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} \right\} \pi_j \right] - P \sum_{j=1}^3 \left[\left\{ \sum_{k=0}^{9-t} {}_k p_{x+t} j \ddot{a}_{\overline{1}|} (t) \right\} \pi_j \right] \end{aligned}$$

5.3.2 Aplicación 2: Seguro contingente sobre dos vidas, a corto plazo

Las funciones biométricas que comprenden status de más de una vida,⁵ tomando en consideración el orden en que sobrevienen los fallecimientos, reciben el nombre de funciones

⁵ En la teoría general, los componentes de un status no necesariamente deben ser vidas. Considérese por ejemplo el status

$$\left(\begin{matrix} 1 \\ x : \overline{m} \end{matrix} \right),$$

contingentes. Por ejemplo, para dos vidas, (x) e (y), la probabilidad de que (x) fallezca antes que (y) es una función contingente que se denota con el símbolo

$${}_{\infty}q_{xy}$$

En este ejemplo calcularemos la prima de un contrato de seguro temporal a un año sobre dos vidas en el que se pacta que la suma asegurada se paga al fallecer (x), siempre y cuando (y) se encuentre con vida. La probabilidad de reclamación se simboliza como

$$q_{xy}$$

Esta probabilidad se expresa, en términos de los tiempos restantes de vida $T(x)$ y $T(y)$, como $P[T(x) < T(y), T(x) < 1]$. Se puede demostrar, suponiendo independencia estadística de las variables aleatorias $T(x)$ y $T(y)$, que

$$q_{xy} = \int_0^1 f_{T(x)}(t) [1 - F_{T(y)}(t)] dt = \int_0^1 {}_tP_{xy} \mu_{x+t} dt$$

La prima de riesgo de la cobertura está dada por

$$E \left[B \left({}^1_{xy} : \bar{1} \right) \right]$$

donde

$$B \left({}^1_{xy} : \bar{1} \right) = \begin{cases} v^{T(x)}, & \text{si } T(x) < T(y) \text{ y } T(x) < 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

si el seguro se paga al momento de ocurrir el siniestro, o

$$B \left({}^1_{xy} : \bar{1} \right) = \begin{cases} v, & \text{si } T(x) < T(y) \text{ y } T(x) < 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

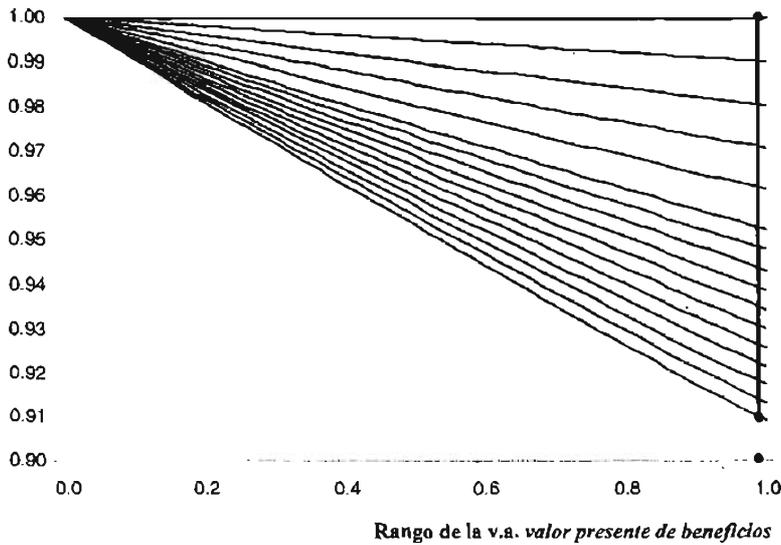
en caso de que se hubiese pactado que el seguro sea pagadero al final del año.

La distribución del *valor presente de beneficios* dependerá de la elección del momento de pago de los mismos. Si estos son pagaderos al ocurrir el evento que se cubre, entonces obtendremos una distribución mixta con soporte

$$Ran_{B \left({}^1_{xy} : \bar{1} \right)} = \{0\} \cup \left[\bigcup_{i \in Ran_i} [v_i^1, v_i^0] \right],$$

puesto que deben considerarse todas las probables trayectorias de la función v^t , $t \in [0, 1]$, para los distintos valores que pueda tomar la v.a que representa la tasa de interés anual.

conformado por una persona de edad x y un plazo cierto de longitud n . La condición para que el status deje de existir es que la persona de edad x fallezca antes de que el plazo expire.



Si el beneficio es pagadero al final del año, se obtendrá una distribución con rango

$$Ran_{B\left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y; \bar{1} \end{smallmatrix}\right)} = \{0\} \cup \left[\bigcup_{i \in Ran_I} \{v_i\} \right]$$

La función de probabilidad será entonces mixta, cuando la tasa de interés tome valores en un conjunto continuo, y discreta en el caso de que tome valores en un conjunto numerable.

Por ejemplo, si I toma valores en un intervalo cerrado, la función de distribución del valor presente de la indemnización se obtiene al aplicar el teorema de probabilidad total. Para $t \in Ran_I$,

$$\begin{aligned} F_{B\left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y; \bar{1} \end{smallmatrix}\right)}(t) &= P\left[B\left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y; \bar{1} \end{smallmatrix}\right) \leq t\right] \\ &= P\left[B\left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y; \bar{1} \end{smallmatrix}\right) \leq t \mid \{T(x) < T(y)\} \cap \{T(x) < 1\}\right] P[\{T(x) < T(y)\} \cap \{T(x) < 1\}] \\ &\quad + P\left[B\left(\begin{smallmatrix} t \\ x, y; \bar{1} \end{smallmatrix}\right) \leq t \mid \{T(x) \geq T(y)\} \cup \{T(x) \geq 1\}\right] P[\{T(x) \geq T(y)\} \cup \{T(x) \geq 1\}] \\ &= q_{x,y} P\left[SA(1+I)^{-1} \leq t\right] + \left(1 - q_{x,y}\right) \\ &= \left(1 - q_{x,y}\right) + q_{x,y} P\left[I \geq \frac{SA}{t} - 1\right] \\ &= \left(1 - q_{x,y}\right) + q_{x,y} \left(1 - F_I\left(\frac{SA}{t} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Por tanto, la función de distribución es

$$F_{\beta(x,y;\mathbb{R})}^{(t)} = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0) \\ 1 - q_{x,y}, & t \in [0, (1 + \max\{Ran_i\})^{-1}] \\ \left(1 - q_{x,y}\right) + q_{x,y} \left(1 - F_i\left(\frac{SA}{t} - 1\right)\right), & t \in \left[(1 + \max\{Ran_i\})^{-1}, (1 + \min\{Ran_i\})^{-1}\right] \\ 1, & t \in \left((1 + \min\{Ran_i\})^{-1}, \infty\right) \end{cases}$$

A menos que conozcamos la forma analítica de las distribuciones de $T(x)$ y $T(y)$ y la probabilidad $P\{T(x) < T(y), T(x) < 1\}$ se pueda expresar en términos elementales, tendremos que conformarnos con una aproximación para la distribución del valor presente.

En el supuesto de que I tome valores en un conjunto numerable, la función de masa es

$$f_{\beta(x,y;\mathbb{R})}^{(j)} = \begin{cases} P[T(x) \geq T(y)], & \text{si } j = 0 \\ P[\{T(x) < T(y)\} \cap \{T(x) < 1\} \cap \{I = i\}], & \text{si } j = v_i \text{ para alguna } i \in Ran_i \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Si son conocidas las formas funcionales de las densidades de $T(x)$ y $T(y)$, la valoración de las probabilidades involucradas en las expresiones anteriores se reduce a un problema de integración. Sin embargo, el cálculo puede complicarse al grado de que resulte imposible expresar la integral en términos elementales.⁶ A manera de ilustración, supóngase que la ley de mortalidad sigue la hipótesis de Makeham; entonces el cálculo de $P\{T(x) < T(y), T(x) < 1\}$ involucra la expresión

⁶ La hipótesis de distribución uniforme entre edades enteras consecutivas puede servir en este caso para simplificar los cálculos, incluso, prescindir del modelo para $T(x)$. Si admitimos que se sigue esta hipótesis, la probabilidad de que (x) fallezca antes que (y) y en el término de un año, puede obtenerse mediante el siguiente razonamiento.

La probabilidad de que (x) fallezca en el intervalo $\left(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ es igual a

$$P\left[\frac{k}{m} < T(x) \leq \frac{k+1}{m}\right] = {}_{k/m}q_x - \frac{1}{m}q_x = \frac{k+1}{m}q_x - \frac{1}{m}q_x = \frac{k}{m}q_x$$

La probabilidad de que (x) fallezca en el intervalo $\left(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ y (y) esté con vida al final del mismo es, suponiendo independencia de los tiempos futuros de vida,

$$\frac{1}{m}q_x \left[1 - \frac{k+1}{m}q_y\right]$$

Sumando las probabilidades para $k = 0, 1, \dots, m-1$ y haciendo tender m a infinito

$$\begin{aligned} q_{x,y} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} q_x \left[1 - \frac{k+1}{m} q_y\right] \\ &= q_x \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{m} - \frac{k+1}{m^2} q_y\right] \\ &= q_x \left[1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1+m(m+1)}{m^2} q_y\right]\right] \\ &= q_x \left[1 - \frac{1}{2} q_y\right] \end{aligned}$$

$$q_{xy} = \int_0^1 f_{T(x)}(t) [1 - F_{T(y)}(t)] dt$$

$$= \int_0^1 \exp\left[-At - \frac{B}{bc} c^x (c^t - 1)\right] [A + Bc^{x+t}] \left[1 - \exp\left[-At - \frac{B}{bc} c^y (c^t - 1)\right]\right] dt$$

Supuestos para el ejemplo

Plan: Seguro temporal a 1 año para (60) y (30) con la condición de que la suma asegurada se pagará si fallece (60) estando (30) con vida. Se considerarán las modalidades de pago inmediato al ocurrir el evento y de pago al final del año. En ambos casos, las hipótesis serán las siguientes:

Hipótesis Demográfica: Ley de Makeham, $\mu_x = A + Bc^x$. Los parámetros tomarán los valores siguientes: $A = 0007$, $B = 00005$ y $c = 10^{0.045}$.

Base Financiera: La tasa de interés a un año es una variable aleatoria I con distribución uniforme discreta en el conjunto $\{03, .04, .05, .06\}$

Suma asegurada: 1,000

Simulamos independientemente valores para I , $T(x)$ y $T(y)$ y registramos aquellos eventos en los que se cumplen simultáneamente las desigualdades $T(x) < T(y)$ y $T(x) < 1$.

Si la suma asegurada es pagadera al ocurrir el evento, entonces, para cada iteración, simulamos una muestra para la v.a.

$$B = \begin{cases} 1000v_t^{T(x)}, & T(x) < T(y) \text{ y } T(x) < 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

obteniendo la sucesión de valores

Es interesante señalar que, aun bajo la hipótesis de distribución uniforme de siniestros, la reserva para este seguro es, suponiendo que la tasa de interés es nula,

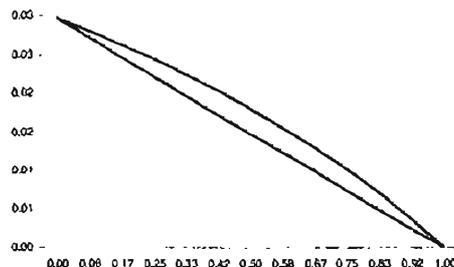
$$V = \sum_{x+t \leq 1} q_{x+t}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1-t}{n} q_{x+t} \left[1 - \frac{(t+1)(1-t)}{n} \right]$$

$$= \frac{(1-t)q_x}{1-tq_x} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} - \frac{(t+1)(1-t)}{n^2} \frac{q_y}{1-tq_y} \right]$$

$$= \frac{(1-t)q_x}{1-tq_x} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(1-t)q_y}{1-tq_y} \right]$$

expresión que no es una función lineal de t , para $t \in [0, 1]$, como puede advertirse en la siguiente figura, donde se han exagerado los valores de las probabilidades de muerte con el propósito de hacer más notoria la curvatura de la gráfica.



$$1000v_i^{t(x)}, 1000v_{i_2}^{t(x)}, 0, \dots, 1000v_{i_n}^{t(x)}$$

Cuando la suma asegurada sea pagadera al final del año la variable aleatoria de interés será

$$B = \begin{cases} 1000v_i, & T(x) < T(y) \text{ y } T(x) < 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Generamos los valores

$$1000v_i, 1000v_{i_2}, 0, \dots, 1000v_{i_n}$$

Normalmente, no dispondremos de los modelos para los tiempos futuros de vida, así que la simulación habrá de llevarse a cabo con la ayuda de una tabla de mortalidad y aplicar algún supuesto para aproximar la probabilidad del evento $\{T(x) < T(y)\} \cap \{T(x) < 1\}$. La aproximación bajo el supuesto de linealidad es

$$q_{x,y} \cong q_x \left[1 - \frac{1}{2} q_x \right]$$

En tal situación, simulamos una v.a. Bernoulli con probabilidad de éxito igual a

$$q_x \left[1 - \frac{1}{2} q_x \right]$$

Como la tasa de interés es también una v.a., la distribución del *valor presente de beneficios* es una distribución *Bernoulli mixta*, es decir,

$$B \left(\begin{matrix} 1 \\ x, y : \bar{1} \end{matrix} \right) | I \sim \text{Bernoulli} \left(v_i, q_x \left[1 - \frac{1}{2} q_x \right] \right)$$

Por lo tanto, la prima se puede obtener como

$$E \left[B \left(\begin{matrix} 1 \\ x, y : \bar{1} \end{matrix} \right) \right] = E \left[E \left[B \left(\begin{matrix} 1 \\ x, y : \bar{1} \end{matrix} \right) | I \right] \right]$$

Resultados. Se presentan los resultados de la simulación en los cuadros siguientes. Los valores numéricos corresponden a la media de las observaciones, la cual representa la estimación para la prima, y los valores máximo y mínimo. Estos dos últimos datos son de utilidad para definir los intervalos que servirán de base para la construcción de la distribución empírica, cuya gráfica se exhibe también.

Continua

Prima	Min	Max
30.84	0.00	997.05

Rango	Frec. Abs.	Frec. Rel. Ac.
0	981	0.968
943	0	0.968
953	2	0.970
963	4	0.974
973	7	0.981
983	9	0.990
993	6	0.996
1000	4	1.000

Discreta

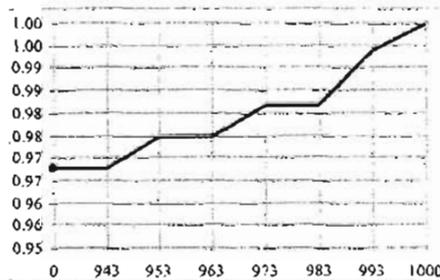
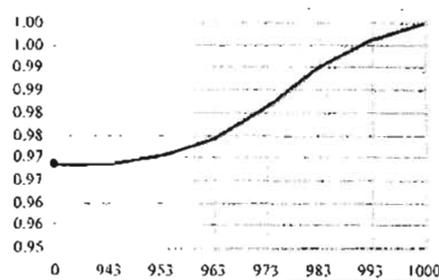
Prima	Min	Max
30.24	0.00	970.87

Rango	Frec. Abs.	Frec. Rel. Ac.
0	965	0.968
941	0	0.968
946	7	0.975
951	0	0.975
956	7	0.982
961	0	0.982
966	12	0.994
971	6	1.000

Tablas de frecuencias

Nótese que, tal y como debe esperarse, la prima para el seguro pagadero al ocurrir el evento es mayor a la que resulta de suponer que la suma asegurada se liquida hasta el término del contrato.

También se advierte que la distribución empírica, en el caso discreto, muestra intervalos con probabilidad cero; esto es así porque hemos definido la tasa de interés como una v.a. discreta y, por lo tanto, la distribución es una función escalonada.



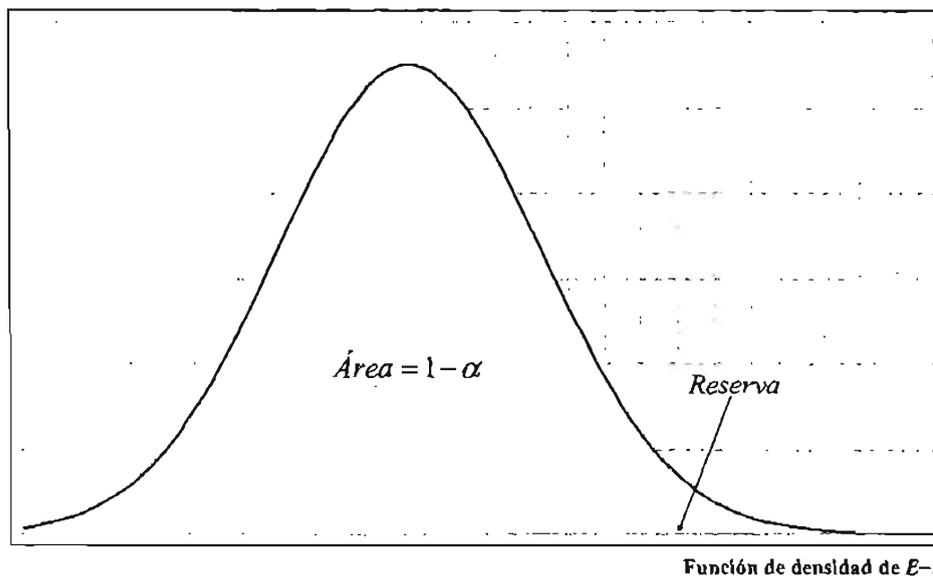
Distribución empírica

5.3.3 Aplicación 3: Reservas con márgenes de seguridad

En este ejemplo desarrollaremos un algoritmo para calcular *reservas agregadas* con márgenes de seguridad para una cartera de pólizas de seguros de vida de largo plazo. Para tal fin, definiremos la reserva en un punto fijo del tiempo, como la cantidad de recursos que requiere la compañía aseguradora en tal momento para cumplir, con un determinado nivel de confianza, con las obligaciones contractuales futuras originadas de su cartera de pólizas en vigor. Para determinar este valor, nos guiaremos por el principio prospectivo, que define la reserva como la diferencia entre el valor presente esperado de beneficios y el valor presente esperado de las primas pendientes de pago.

El método que se propone consiste en analizar como variables aleatorias los flujos de egresos, (E), e ingresos, (I), representados, los primeros, por las cantidades que debe satisfacer la aseguradora por pago de siniestros, y los últimos, por los pagos futuros de primas. En vista de que se requiere incluir un margen de seguridad, nuestra definición de reserva no consistirá en un valor esperado condicional, sino en un percentil de la distribución de la v.a. $V = E - I$, es decir, la solución para v de la ecuación $P[V \geq v] = 1 - \alpha$ donde α es el nivel de confianza requerido.

En la literatura actuarial se pueden encontrar modelos para calcular la distribución del valor presente de flujos estocásticos para portafolios con **pólizas idénticas**. Dentro de estos destacamos los trabajos de Beekman y Fuelling (1991) y Parker (1994).



Notación:

En la simbología utilizada a continuación, el subíndice j se refiere a la j -ésima póliza, por lo tanto, este parámetro toma los valores $1, 2, \dots, N$, donde N es el tamaño de la cartera (número de pólizas en vigor al momento de la valuación).

- N_x número de asegurados de edad x ,
- σx_j edad del asegurado al momento de la emisión de la póliza,
- x_j edad del asegurado al momento de la valuación,
- $T(x_j)$ tiempo futuro de vida del asegurado,
- $K(x_j)$ número entero de años que restan de vida al asegurado, a partir del momento de la valuación,
- ε_j tiempo por transcurrir entre el momento de la valuación y el aniversario inmediato posterior de la póliza, $\varepsilon_j \in [0, 1)$,
- σn_j plazo de cobertura de la póliza, a partir del momento de la contratación (en años),
- n_j plazo de cobertura de la póliza, a partir del momento de la valuación (en años),
- $n_{max} = \max\{n_j\}_{j=1}^N$,
- σm_j plazo de pago de primas de la póliza, a partir del momento de la contratación (en años),
- m_j número de primas pendientes de pago de la póliza, a partir del momento de la valuación,
- $m_{max} = \max\{m_j\}_{j=1}^N$,
- A_j antigüedad de la póliza,
- $P_{j,t}$ prima de la póliza en el año t , a partir del momento de la valuación,
- $SASF_{j,t}$ suma asegurada por fallecimiento de la póliza en el año póliza t , a partir del momento de la valuación,
- $SAS_{j,t}$ suma asegurada por supervivencia de la póliza en el año póliza t , a partir del momento de la valuación,

Paso 1. Simulación de vectores de flujos por fallecimiento y sobrevivencia. Como hipótesis, supondremos que el aniversario de cada póliza coincide con el aniversario del asegurado y que la fecha de aniversario de la póliza es la misma en todos los casos. Además, las reclamaciones y beneficios serán pagaderos al final del año.

En primer término, simulamos valores para $K(x_1), K(x_2), \dots, K(x_N)$. En estas condiciones, se requiere simular, para cada j , un valor de la v.a. discreta $K(x_j)$, a partir de su función de distribución, a saber,

$$F_{K(x_j)}(k) = \sum_{g=0}^k p_{x_j} q_{x_j+g} = {}_{k+1}q_{x_j}, \quad k \in \{0, 1, \dots\}$$

Si k_1, k_2, \dots, k_N representan los valores simulados, entonces, para $j = 1, 2, \dots, N$, se generan los vectores $\bar{A}_j, \bar{B}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\bar{C}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= \begin{bmatrix} SAF_{j,1} 1_{\{k_j\}}(0) & SAF_{j,2} 1_{\{k_j\}}(1) & \dots & SAF_{j,n_j} 1_{\{k_j\}}(n_j-1) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_j &= \begin{bmatrix} SAS_{j,1} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(1) & SAS_{j,2} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(2) & \dots & SAS_{j,n_j} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(n_j-1) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C}_j &= \begin{bmatrix} P_{j,1} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(1) & P_{j,2} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(2) & \dots & P_{j,m_j} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(m_j) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La proyección de los siniestros vía simulación de las variables $K(x_j)$ favorece la simplificación del proceso, ya que de otra forma tendría que disgregarse la cartera formando subconjuntos de asegurados de una misma edad x , simular el número de fallecimientos mediante una distribución binomial con parámetros N_x y q_x y, en seguida, para determinar qué pólizas son afectadas por siniestros, simular una distribución uniforme discreta en el conjunto $\{1, 2, \dots, d_x\}$, siendo d_x la realización de la variable simulada en el paso anterior. Otra ventaja que se logra bajo esta perspectiva, es el hecho de que es posible modelar el tiempo de vida de cada asegurado en función de características individuales, tales como su sexo, condición de salud, etc., a diferencia del modelo binomial, que exige, para su aplicación, que la probabilidad de siniestro sea la misma para cada integrante del subgrupo.

Para desvincularse de la condición de que los aniversarios de las pólizas deben coincidir con el aniversario del asegurado y con la idea de obtener un mayor nivel de precisión, podemos estimar la función de distribución de $T(x)$ a partir de la tabla de mortalidad utilizando cualesquiera de los supuestos para edades fraccionadas: *distribución uniforme de fallecimientos*, *hipótesis de Balducci*, *fuerza de mortalidad constante*, u otro que se considere adecuado. A manera de ilustración, si nos inclinamos por el modelo lineal, la función de distribución de $T(x)$ se obtiene a partir de la de $K(x)$ como

$$F_{T(t)}(k+t) = (1-t)F_{K(x)}(k) + tF_{K(x)}(k+1), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad t \in (0, 1)^7$$

⁷ Para las hipótesis de Balducci y fuerza de mortalidad constante las expresiones son

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-F_{T(t)}(k+t)} &= \frac{t}{1-F_{K(x)}(k+1)} + \frac{1-t}{1-F_{K(x)}(k)} \text{ y} \\ F_{T(t)}(k+t) &= \left[1-F_{K(x)}(k)\right] \left[\frac{1-F_{K(x)}(k+1)}{1-F_{K(x)}(k)}\right]^t, \end{aligned}$$

En este último caso, también podemos generar los valores de $T(x_j)$ recordando que, bajo el supuesto de linealidad, las variables aleatorias $K(x_j)$ y $S(x_j) = T(x_j) - K(x_j)$ son estocásticamente independientes, y, al mismo tiempo, $S(x_j) \sim U(0,1)$.

Paso 2. Simulación de vectores de descuento de flujos por fallecimiento y sobrevivencia. Simulamos el proceso estocástico de las tasas de interés (o fuerzas de interés, según corresponda) $I_1, I_2, \dots, I_{m_{\text{ano}}}, \dots, I_{n_{\text{ano}}}$. Siendo $i_1, i_2, \dots, i_{m_{\text{ano}}}, \dots, i_{n_{\text{ano}}}$ las tasas simuladas, construimos los vectores de descuento de flujos de egresos por pagos de beneficios por fallecimiento o sobrevivencia, y de ingresos por pagos de primas.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}_A &= \left[(1+i_1)^{-1} \quad (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} \quad \dots \quad \prod_{k=1}^{n_{\text{ano}}} (1+i_k)^{-1} \right] \\ \bar{\mathbf{U}}_B &= \left[(1+i_1)^{-1} \quad (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} \quad \dots \quad \prod_{k=1}^{n_{\text{ano}}} (1+i_k)^{-1} \right] \\ \bar{\mathbf{U}}_C &= \left[1 \quad (1+i_1)^{-1} \quad \dots \quad \prod_{k=1}^{m_{\text{ano}}-1} (1+i_k)^{-1} \right]\end{aligned}$$

Paso 3. Cálculo del valor presente de obligaciones de la compañía (reclamaciones, beneficios) y del valor presente de primas pendientes de pago. Se calculan ahora el valor presente de beneficios (E)

$$E = \sum_{j=1}^N \{ \bar{A}_j \cdot \bar{\mathbf{U}}_A + \bar{B}_j \cdot \bar{\mathbf{U}}_B \},$$

y el valor presente de primas pendientes de pago (I)

$$I = \sum_{j=1}^N \bar{C}_j \cdot \bar{\mathbf{U}}_C$$

En estas expresiones, el operador \cdot representa el *producto interior* o *producto punto* de los vectores que figuran a ambos lados del mismo.

Paso 4. Cálculo de las diferencias entre valores presentes. Se determina la diferencia entre el valor presente de obligaciones y el valor presente de primas:

$$V = \sum_{j=1}^N \{ \bar{A}_j \cdot \bar{\mathbf{U}}_A + \bar{B}_j \cdot \bar{\mathbf{U}}_B \} - \sum_{j=1}^N \bar{C}_j \cdot \bar{\mathbf{U}}_C$$

Paso 5. Cálculo de la reserva al momento de la valuación. Una vez calculado este último valor, repetimos los pasos 1 a 4 para obtener una muestra aleatoria de V de tamaño w : $v_1, v_2, v_3, \dots, v_w$.

El estimador natural para la reserva al momento de la valuación será la media muestral de las observaciones:

$$\hat{v} = \frac{1}{w} \sum_{\lambda=1}^w v_{\lambda}$$

Intervalo de confianza para la reserva. Recordemos que, de acuerdo con los teoremas del límite central y de Slutsky, para w suficientemente grande,

$$\frac{\sqrt{w}(\bar{V} - E[\bar{V}])}{S} \approx N(0,1)$$

Aquí, \bar{V} y S^2 representan la media y varianza muestrales, respectivamente, i.e.,

$$\bar{V} = \frac{\sum_{\lambda=1}^w v_{\lambda}}{w} \text{ y } S = \sqrt{\frac{\sum_{\lambda=1}^w (v_{\lambda} - \bar{V})^2}{w-1}}$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para la reserva será

$$\left[\bar{V} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{w}}, \bar{V} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{w}} \right]$$

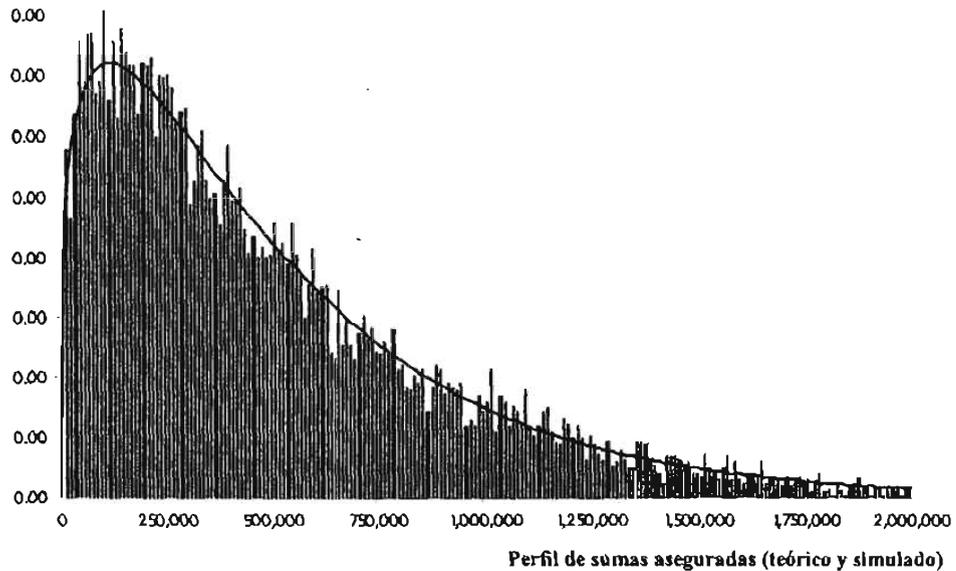
donde $z_{\alpha/2}$ es tal que $P[-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$ y $Z \sim N(0, 1)$.

Hasta este punto hemos determinado la reserva mediante la estimación de un valor esperado. Si el objetivo es que la compañía aseguradora posea los recursos suficientes para cumplir con sus obligaciones con un nivel de probabilidad fijado de antemano, entonces será preciso calcular la distribución de V . Si bien es cierto que esta tarea puede resultar bastante engorrosa, mediante la aplicación del teorema de Glivenko-Cantelli y el principio de sustitución, determinaremos el percentil correspondiente al nivel de confianza requerido construyendo, a partir de los datos muestrales, las funciones de distribución empírica y el histograma.

Un ejercicio numérico nos permitirá precisar las distintas fases del método que se está proponiendo. Para fijar ideas, generamos una cartera hipotética, con las siguientes características:⁸

- **Tamaño de la cartera (N):** 1,000.
- **Sumas aseguradas por fallecimiento ($SAF_{j,t}$):** Para cada póliza, la suma asegurada por fallecimiento se supondrá constante por el periodo de cobertura, sin embargo, para no perder de vista el efecto de tener una cartera no homogénea respecto al perfil de sumas aseguradas, éstas se simularán de acuerdo a una distribución $\Gamma(1.3, 400,000)$. El perfil obtenido es el que se muestra en el gráfico siguiente.

⁸ En la práctica, la compañía de seguros deberá establecer qué modelos de mortalidad y de tasas de interés son los apropiados para su cartera, de acuerdo con la estadística e información que tenga disponible.



- ⇒ **Sumas aseguradas por sobrevivencia ($SAS_{j,t}$):** Para los seguros dotales, se supondrá un solo pago por sobrevivencia al final del plazo de cobertura. La suma asegurada por este concepto será igual a la de fallecimiento.
- ⇒ **Distribución de edades de los asegurados al momento de emisión:**

Edad	Pólizas
20	10%
30	15%
40	30%
50	25%
60	15%
70	5%

- ⇒ **Distribución por tipo de plan:** La cartera comprenderá los siguientes planes, con la distribución indicada a continuación.⁹

Plan	Pólizas
Ordinario de Vida	18%
Vida 20 pagos	7%
Temporal 10	23%
Temporal 20	24%
Dotal 10	16%
Dotal 20	12%

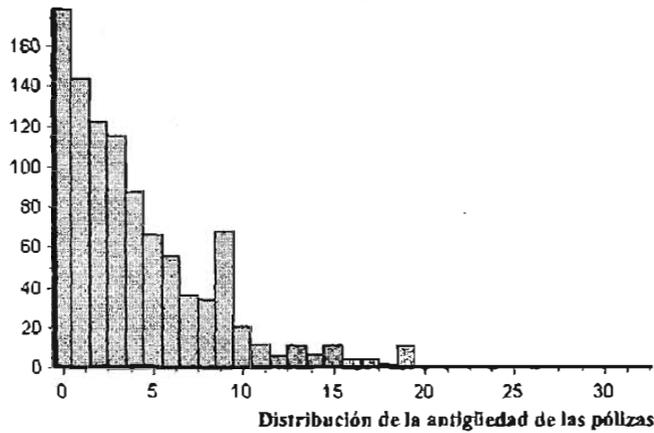
- ⇒ **Antigüedad de las pólizas:** Sin pérdida de generalidad, se supondrá que la póliza j tiene una antigüedad A_j , donde $A_j = \min\{0, m_j - 1, G\}$, siendo G una v.a. tal que $G \sim \text{Geom}(1/4)$.¹⁰ De esta manera, las variables n_j y m_j , definidas con anterioridad, se calculan como

⁹ En los planes temporales y dotales se supondrá que el plazo de pago de primas es igual al plazo de cobertura.

¹⁰ El supuesto implica una antigüedad media de cuatro años para pólizas con cobertura de por vida. Para las pólizas temporales, se ha modificado la antigüedad para asegurar que la simulación no arroje valores superiores al plazo de pago de primas.

$$n_j = {}_0n_j - A_j$$

$$m_j = {}_0m_j - A_j$$



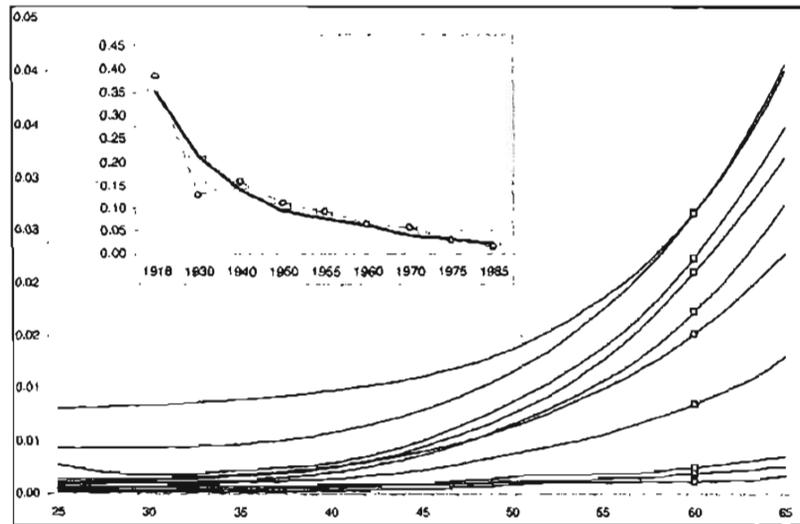
Elementos de valuación

- Modelo de mortalidad:** Tasas de Mortalidad Individual CNSF 2000-I (1991-1998). Si se cuenta con la estadística suficiente, podrán estimarse las tasas de mortalidad mediante técnicas estadísticas. Por ejemplo, bajo la hipótesis de distribución uniforme de fallecimientos y la aplicación del método de momentos, el estimador de la tasa de mortalidad anual a edad x , dado un número observado de fallecimientos d_x^{obs} , se obtiene de la expresión

$$\hat{q}_x \sum_{i=1}^{N_x} \frac{s_i - r_i}{1 - r_i \hat{q}_x} = d_x^{obs}$$

En esta expresión, se supone que el asegurado i está expuesto entre las edades $x + r_i$ y $x + s_i$, $0 < r_i < s_i < 1$.

Una vez obtenidas las tasas brutas, será necesario recurrir a un método de graduación para suavizar la función de mortalidad. Por otro lado, dado que las tablas de mortalidad están, de cierta manera, desfasadas, puesto que las probabilidades corresponden a una experiencia pasada y su aplicación es hacia el futuro, es conveniente el manejo de tablas dinámicas, que toman en cuenta las tendencias de disminución en las tasas de mortalidad. La construcción de tablas dinámicas implica la aplicación de métodos paramétricos de graduación, analizando la tendencia mediante técnicas de series de tiempo. Las tasas de mortalidad futuras se pueden reducir, entonces, con la intención de reflejar las mejoras generacionales en la esperanza de vida a lo largo del tiempo. El procedimiento que se propone para calcular los factores de reducción se lleva a cabo mediante el análisis de la tendencia en la disminución en las tasas de mortalidad para una misma edad, a través de un examen comparativo de las curvas de mortalidad a lo largo de un período de tiempo. En la gráfica se observan las curvas de la función q_x para un determinado lapso de tiempo y en el recuadro podemos apreciar, para una edad fija, el comportamiento del factor de reducción de la tasa.



Evolución de las tasas de mortalidad en el tiempo

Con el objeto de evitar variaciones bruscas en los cálculos, se suavizan la curva de tendencia mediante funciones exponenciales de la forma $y = ae^{\beta}$, donde $\alpha > 0$ y $\beta < 0$. Las funciones de esta familia poseen ciertas características que las hacen adecuadas para el propósito que se persigue: son monótonas decrecientes, positivas y el decrecimiento porcentual de un año al siguiente es una función decreciente del tiempo. De esta manera, la tasa de mortalidad a edad x , en el año de proyección t , será

$$q'_x = \begin{cases} q'_x, & t=1 \\ q'_x [\varphi_x e^{\zeta_x t}], & t \in \{2, 3, \dots\} \end{cases}$$

donde φ_x y ζ_x son los parámetros resultantes de aplicar algún método de suavizamiento al conjunto de pares de valores

$$(t, \ln[q'_x/q'_x])$$

La tabla de mortalidad se transforma, así, en una matriz

$$\begin{bmatrix} q'_\alpha & q'^2_\alpha & q'^3_\alpha & \dots & 1 \\ q'^1_{\alpha+1} & q'^2_{\alpha+1} & q'^3_{\alpha+1} & \dots & 1 \\ q'^1_{\alpha+2} & q'^2_{\alpha+2} & q'^3_{\alpha+2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

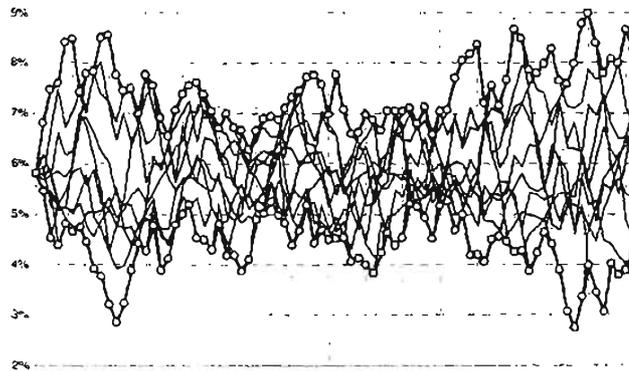
Dispuestas de esta manera, las tasas de mortalidad para edades sucesivas de un mismo asegurado se obtendrán leyendo en diagonal descendente:

$$\begin{bmatrix} q_{aa}^1 & & & & \\ q_{aa+1}^1 & q_{aa+1}^2 & & & \\ q_{aa+2}^1 & q_{aa+2}^2 & q_{aa+2}^3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Primas de valuación ($P_{j,t}$):** Se calculan mediante el principio de equivalencia con una tasa de interés constante e igual al 6% anual efectivo.
- **Escenarios de tasas de interés (I_t):** Se simulará el proceso estocástico para las fuerzas de interés, Δ_t , mediante un modelo autorregresivo de orden 1, $AR(1)$:

$$\Delta_t = \Delta + \varphi(\Delta_{t-1} - \Delta) + \xi_t$$

Los valores de los parámetros están dados por $\Delta = \ln 1.06$, $\varphi = 0.75$ y ξ_1, ξ_2, \dots representan v.a.i.i.d. con $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$,¹¹ donde $\sigma^2 = 0.01$.¹² La tasa de interés para el año t es, por lo tanto, $I_t = \exp(\Delta_t) - 1$.



Simulación de un proceso $AR(1)$

Resumen de resultados. En el cuadro siguiente se exhibe la información relativa a las primeras 20 pólizas de la cartera cuya reserva se va a estimar.

¹¹ Para garantizar que el proceso sea *estacionario*, es decir, que $E[\Delta_t] = \Delta$, para toda t , debe verificarse la condición $-1 < \varphi < 1$. Dada una serie histórica, se puede aplicar el método de máxima verosimilitud para determinar los parámetros apropiados a aplicar (vid., por ejemplo, Box y Jenkins, 1994).

¹² Para simular variables aleatorias con distribución normal, dado que la función de distribución no es invertible, puede aplicarse el método *polar* o de *Box-Muller* (consultese Ripley, 1987).

Póliza (j)	Plan	x_j	N_j	N_{15}	μ_j	m_j	l_j	v_j	n_j	m_j
1	Ordinario de Vida	40	54,432.45	-	60	60	0	40	60	60
2	Temporal 20	50	285,367.37	-	20	20	0	50	20	20
3	Ordinario de Vida	30	190,039.87	-	70	70	2	32	68	68
4	Ordinario de Vida	30	548,276.31	-	70	70	1	31	69	69
5	Dotal 20	50	500,088.93	500,088.93	20	20	5	55	15	15
6	Dotal 10	30	1,228,075.03	1,228,075.03	10	10	6	36	4	4
7	Temporal 20	50	378,290.41	-	20	20	1	51	19	19
8	Temporal 10	30	623,378.75	-	10	10	3	33	7	7
9	Ordinario de Vida	60	464,254.02	-	40	40	2	62	38	38
10	Dotal 20	50	210,035.15	210,035.15	20	20	0	50	20	20
11	Dotal 20	50	78,678.13	78,678.13	20	20	8	58	12	12
12	Ordinario de Vida	30	89,564.62	-	70	70	4	34	66	66
13	Dotal 20	40	191,382.47	191,382.47	20	20	5	45	15	15
14	Temporal 10	40	1,119,978.43	-	10	10	1	41	9	9
15	Ordinario de Vida	60	1,501,674.65	-	40	40	6	66	34	34
16	Temporal 10	50	671,173.93	-	10	10	4	54	6	6
17	Temporal 10	20	129,654.41	-	10	10	4	24	6	6
18	Dotal 10	50	845,557.45	845,557.45	10	10	2	52	8	8
19	Dotal 20	20	393,611.79	393,611.79	20	20	8	28	12	12
20	Vida 20 pagos	50	634,180.31	-	50	20	1	51	49	19

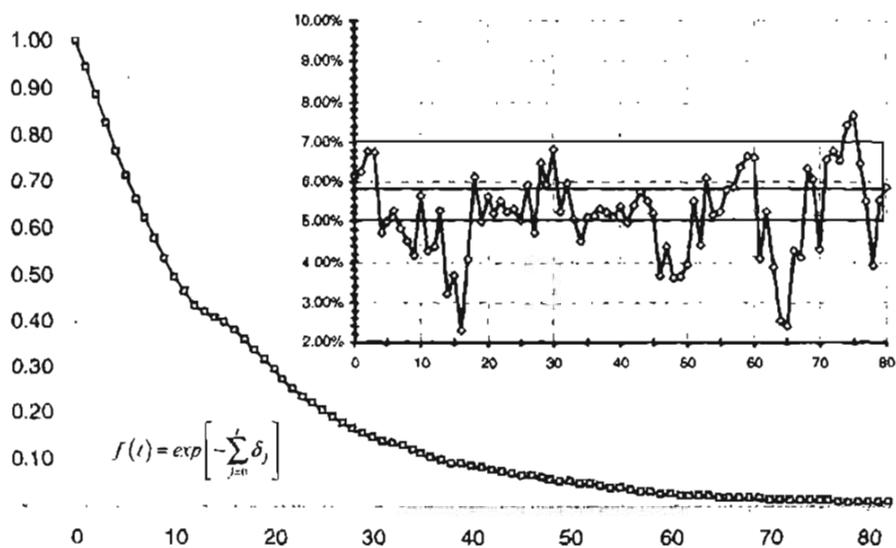
Se aplicó la metodología ejecutando 1,750 iteraciones independientes.¹³ En los siguientes cuadros resumimos, para estas mismas 20 pólizas, los valores simulados, en una de las iteraciones, de los parámetros que se requieren para valorar la reserva.

Simulación de $K(x_j)$:

Póliza (j)	x_j	n_j	m_j	l_j	x_j	n_j	m_j	k_j
1	40	60	60	0	40	60	60	23
2	50	20	20	0	50	20	20	50
3	30	70	70	2	32	68	68	54
4	30	70	70	1	31	69	69	50
5	50	20	20	5	55	15	15	44
6	30	10	10	6	36	4	4	36
7	50	20	20	1	51	19	19	26
8	30	10	10	3	33	7	7	35
9	60	40	40	2	62	38	38	18
10	50	20	20	0	50	20	20	30
11	50	20	20	8	58	12	12	40
12	30	70	70	4	34	66	66	18
13	40	20	20	5	45	15	15	29
14	40	10	10	1	41	9	9	40
15	60	40	40	6	66	34	34	7
16	50	10	10	4	54	6	6	33
17	20	10	10	4	24	6	6	53
18	50	10	10	2	52	8	8	25
19	20	20	20	8	28	12	12	35
20	50	50	20	1	51	49	19	32

Valores presentes de flujos por fallecimiento y sobrevivencia. En cada iteración, las tasas de descuento de flujos aplicables a todas las pólizas se obtienen de la simulación del proceso $AR(1)$ para las fuerzas de interés. En esta etapa se calculan los factores de descuento, $v(t)$.

¹³ El número de iteraciones depende del grado de precisión que se requiera y del número de pólizas de la cartera.



Traectoria del proceso Δ_t y función de descuento $v(t)$ para la misma trayectoria

Póliza (i)	Plan	SAF _{i,t}	SAS _{i,t}	n _i	m _i	k _i	P _i	V _i * _i	P _i * _i	(V _i * _i - P _i * _i)
1	Ordinario de Vida	54,432.45	-	60	60	23	626.37	11,959.16	7,901.11	4,058.05
2	Temporal 20	285,367.37	-	20	20	50	3,566.41	0.00	41,213.17	-41,213.17
3	Ordinario de Vida	190,039.87	-	70	70	54	1,324.83	7,032.20	20,956.11	-13,923.91
4	Ordinario de Vida	548,276.31	-	70	70	50	3,822.20	26,830.56	59,778.28	-32,947.72
5	Total 20	500,088.93	500,088.93	20	20	44	16,311.12	191,529.09	159,152.65	32,376.44
6	Total 10	1,228,075.03	1,228,075.03	10	10	36	89,305.67	873,415.45	326,785.57	546,629.88
7	Temporal 20	378,290.41	-	20	20	26	4,727.73	0.00	53,139.66	-53,139.66
8	Temporal 10	627,378.75	-	10	10	35	1,421.44	0.00	8,243.98	-8,243.98
9	Ordinario de Vida	464,254.02	-	40	40	18	15,615.91	146,668.52	175,522.76	-28,854.24
10	Total 20	210,035.15	210,035.15	20	20	30	6,850.60	57,249.83	79,164.97	-21,915.13
11	Total 20	78,678.13	78,678.13	20	20	40	2,566.20	33,071.09	21,791.87	11,279.22
12	Ordinario de Vida	89,564.62	-	70	70	18	624.38	28,295.52	7,018.06	21,277.46
13	Total 20	191,382.47	191,382.47	20	20	29	5,539.30	73,297.58	53,951.11	19,346.47
14	Temporal 10	1,119,978.43	-	10	10	40	4,764.08	0.00	33,345.26	-33,345.26
15	Ordinario de Vida	1,501,674.65	-	40	40	7	50,511.18	867,845.11	324,351.85	543,493.27
16	Temporal 10	671,175.93	-	10	10	33	5,990.14	0.00	30,774.28	-30,774.28
17	Temporal 10	129,654.41	-	10	10	53	188.20	0.00	966.87	-966.87
18	Total 10	845,557.45	845,557.45	10	10	25	64,208.06	450,510.55	412,304.78	38,205.77
19	Total 20	593,611.79	593,611.79	20	20	35	10,502.34	165,448.40	89,184.62	76,263.77
20	Vida 20 pagos	634,180.31	-	50	20	32	14,473.25	81,699.17	162,679.26	-80,980.09

Para explicar el detalle del cálculo, tenemos, tomando como ejemplo la póliza número 15: $SAF_{j,t} = 1,501,674.65$, $SAS_{j,t} = 0$, $P_j = 50,511.18$ y $k_j = 7$. Los vectores de flujos y de descuento son

$$\bar{A}_j = \begin{bmatrix} SAF_{j,1} 1_{\{k_j\}}(0) & SAF_{j,2} 1_{\{k_j\}}(1) & \dots & SAF_{j,m_{\max}} 1_{\{k_j\}}(n_j - 1) & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,501,674.65 \ \dots \ 0]$$

$$\bar{B}_j = \begin{bmatrix} SAS_{j,1} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(1) & SAS_{j,2} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(2) & \dots & SAS_{j,n_j} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(n_j - 1) & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$\bar{C}_j = \begin{bmatrix} P_{j,1} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(1) & P_{j,2} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(2) & \dots & P_{j,m_{\max}} 1_{\{1,2,\dots,k_j+1\}}(m_j) & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [50,511.18 \ 50,511.18 \ 50,511.18 \ 50,511.18 \ 50,511.18 \ 50,511.18 \ 50,511.18 \ 50,511.18 \ \dots \ 0]$$

$$\bar{U}_A = \begin{bmatrix} (1+i_1)^{-1} & (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} & \dots & \prod_{k=1}^{n_{\max}} (1+i_k)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [.9434 \ .8876 \ .8282 \ .7671 \ .7112 \ .6622 \ .6217 \ .5779 \ \dots \ .0082]$$

$$\bar{U}_B = \begin{bmatrix} (1+i_1)^{-1} & (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} & \dots & \prod_{k=1}^{n_{\max}} (1+i_k)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [.9434 \ .8876 \ .8282 \ .7671 \ .7112 \ .6622 \ .6217 \ .5779 \ \dots \ .0082]$$

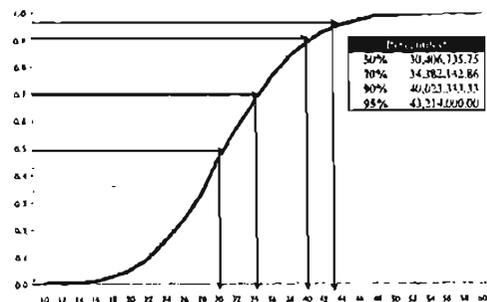
$$\bar{U}_C = \begin{bmatrix} 1 & (1+i_1)^{-1} & \dots & \prod_{k=1}^{n_{\max}-1} (1+i_k)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [1.0000 \ .9434 \ .8876 \ .8282 \ .7671 \ .7112 \ .6622 \ .6217 \ \dots \ .0088]$$

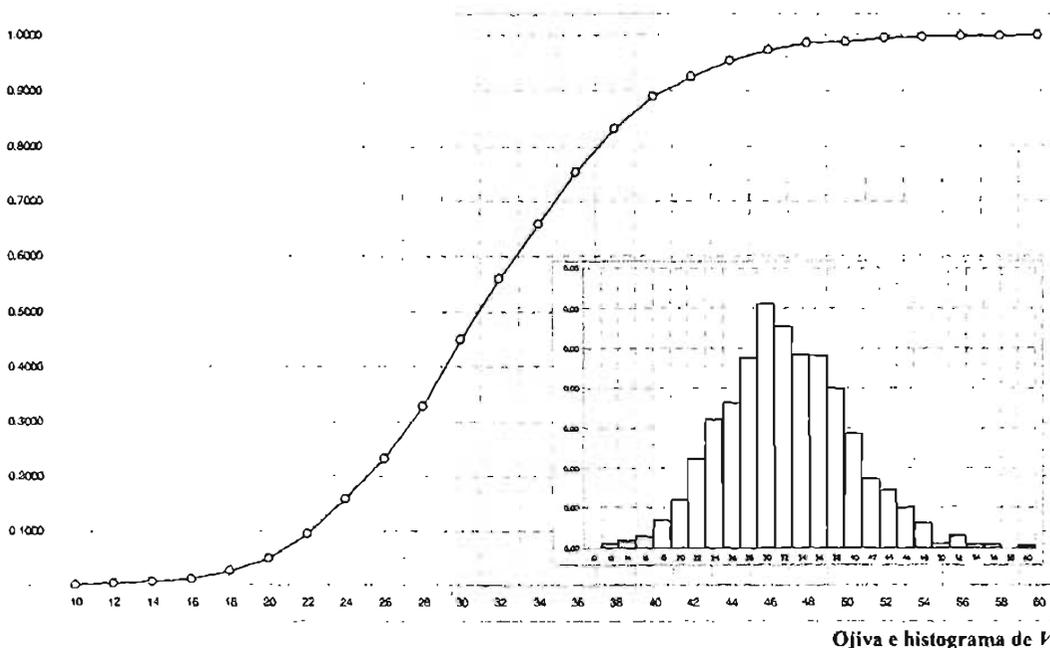
Por lo tanto, $\bar{A}_j \cdot \bar{U}_A = 867,817.78$, $\bar{B}_j \cdot \bar{U}_B = 0.00$ y $\bar{C}_j \cdot \bar{U}_C = 324,351.85$

Resumen de resultados. Una vez efectuada la simulación, calculamos las medidas de tendencia central y de dispersión y se agrupan los datos para construir la ojiva y el histograma. Los percentiles que se muestran en la gráfica se estimaron mediante interpolación lineal.

Parámetros muestrales	
Valor mínimo	9,443,128.33
Valor máximo	59,153,063.59
Rango	49,709,935.27
Medla	30,757,214.69
Mediana	30,406,735.75
Varianza	52,349,283,667.660.10
Desviación estándar	7,235,280.48
Curtosis	0.2326
Coefficiente de asimetría	0.2422
Int. conf. media (95.0%)	(30,417,286.89; 31,097,142.49)



Parámetros muestrales para $V = E - I$



Estimación de la reserva en puntos posteriores a la fecha de valuación. Una de las ventajas de las técnicas de simulación es que nos permiten suplir lo aleatorio por lo determinístico, calcular valores ciertos en vez de manipular variables estocásticas. De este modo, cuando estimamos una prima para un contrato de seguro por medio de esta técnica, calculamos el valor presente de un pago que se realiza en el momento en que ocurre el evento que se cubre. Así, para un seguro de vida entera de monto unitario, la prima única de riesgo está dada por la esperanza de la variable aleatoria $v(T(x))$; si la estimamos por simulación, entonces basta con generar una sucesión de valores para $v(t)$, donde t es una realización de $T(x)$, y obtener la media muestral de estos valores:

Modelo teórico probabilístico: $E[v(T(x))]$

Simulación aleatoria: $T(x) \xrightarrow{\text{Sim}} t \rightarrow v(t)$

Análogamente, podemos estimar la reserva agregada en puntos del tiempo posteriores a la fecha de valuación considerando las distintas trayectorias simuladas de los flujos de efectivo, hasta la extinción de la cartera:

Si ${}_0V$ es la reserva agregada al momento de la valuación, una trayectoria del proceso estocástico de los flujos que se realizan en períodos posteriores será

$${}_tV = {}_{t-1}V + PG_t + R_t - MS_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

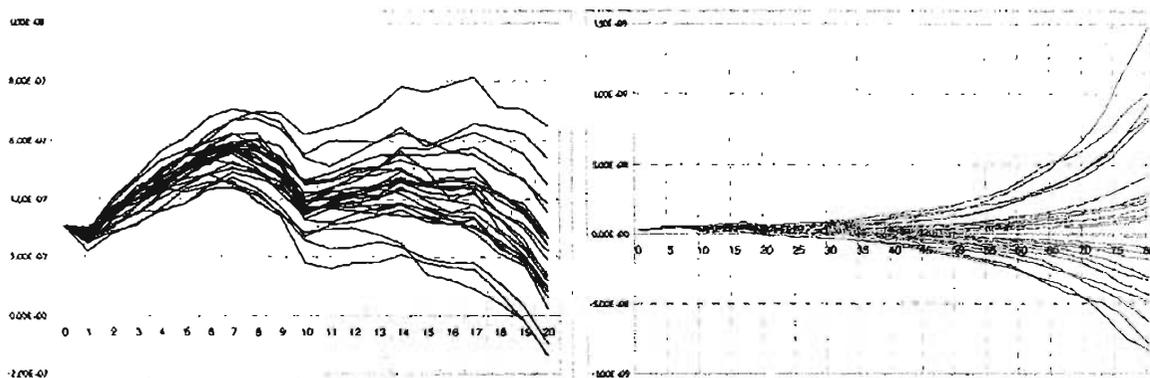
- PG_t Ingreso global por primas
- R_t Rendimiento
- MS_t Monto global de siniestros (pagos por fallecimiento o sobrevivencia)

En términos de las pólizas individuales:

$$V = {}_{t-1}V(1+i_t) + \sum_j P_{j,t}(1+i_t) - \sum_j SAF_{j,t} - \sum_j SAS_{j,t}$$

Los símbolos $P_{j,t}$, $SAF_{j,t}$, $SAS_{j,t}$ quedan definidos en términos de ${}_0n_j$ y ${}_0m_j$, n_j , m_j , y k_j , mediante las entradas de los vectores \bar{A}_j , \bar{B}_j y \bar{C}_j .

Para la cartera del ejemplo, si suponemos un valor inicial de ${}_0V$ igual a 30,757,214.69, equivalente a la media muestral de la simulación del paso preliminar, un conjunto de posibles trayectorias se apreciaría como en las gráficas siguientes:



Simulación de trayectorias del proceso de flujos $V = E - I: I)$ primeros 20 años (gráfico a la izquierda) y, $II)$ hasta la extinción de la cartera (gráfico a la derecha).

Conclusiones

*Es un error capital teorizar antes de tener datos.
Sin darse cuenta, uno empieza a deformar los hechos
para que se adapten a las teorías,
en lugar de adaptar las teorías a los hechos.*

*Sherlock Holmes, en
Escándalo en Bohemia, de
Sir Arthur Conan Doyle (1891)*

En este trabajo se han estudiado fundamentalmente dos problemas: la sensibilidad de primas y reservas a variaciones en las tasas de interés de valuación y el modelo del seguro de vida con tasas de interés estocásticas.

Para el primer tema, hemos revisado el teorema de Lidstone y se han expuesto sus limitaciones. Comenzando con algunas consideraciones sobre el principio de equivalencia, se han demostrado ciertas propiedades que, si bien a primera vista resultan bastante obvias, la mayoría de los textos en la materia los dan por sentados sin dar una demostración formal.

Por otro lado, utilizando herramientas de la teoría de probabilidad y el cálculo diferencial, se ha atacado el problema de la variación de las funciones actuariales, consideradas como variables dependientes de la tasa de interés, para obtener resultados de aplicación en los contratos de seguros con costo de siniestralidad creciente.

En cuanto a los modelos estocásticos para el seguro de vida, se ha ejemplificado la aplicación de la teoría de probabilidad para determinar primas y reservas, consideradas como valores esperados de ciertas variables aleatorias.

Como ventajas de este modelo hemos visto su aplicación en la determinación de márgenes de seguridad ante posibles desviaciones adversas en la siniestralidad o las tasas de interés.

Dentro de las dificultades a vencer dentro de este campo, encontramos la elección de un modelo apropiado y confiable para las tasas de valuación. También hemos visto que el cálculo de estas funciones actuariales se puede complicar a tal grado que no es posible encontrar soluciones analíticas explícitas.

Ante tal situación, se ha propuesto como alternativa la aplicación de técnicas de simulación. Sin embargo, como ya hemos mencionado, el empleo de este tipo de herramientas sólo debe reservarse para situaciones en las que la solución teórica sea demasiado compleja, debiendo privilegiar, en la medida de lo posible, la búsqueda de la solución exacta.

Debe quedar claro también, que la simulación estocástica, al ser una técnica numérica de aproximación, está muy lejos de constituir una panacea y que el adoptar la postura, un tanto cómoda, de pretender resolver cualquier problema mediante su empleo, tiene el inconveniente de que limita el avance de la investigación teórica.

Anexos

Anexo 1. Tablas de mortalidad Experiencia Mexicana 82-89 y CNSF2000-I

x	q_x^{82-89}	q_x^{85-89}	x	q_x^{82-89}	q_x^{85-89}
12	0.001120	0.000396	57	0.011720	0.011119
13	0.001140	0.000427	58	0.012690	0.011967
14	0.001160	0.000460	59	0.013760	0.012879
15	0.001190	0.000495	60	0.014920	0.013860
16	0.001210	0.000533	61	0.016190	0.014914
17	0.001240	0.000575	62	0.017570	0.016048
18	0.001270	0.000619	63	0.019070	0.017265
19	0.001300	0.000617	64	0.020700	0.018574
20	0.001340	0.000718	65	0.022490	0.019980
21	0.001380	0.000773	66	0.024430	0.021490
22	0.001420	0.000833	67	0.026540	0.023111
23	0.001470	0.000897	68	0.028840	0.024851
24	0.001520	0.000966	69	0.031340	0.026720
25	0.001570	0.001041	70	0.034060	0.028724
26	0.001640	0.001121	71	0.037020	0.030874
27	0.001700	0.001207	72	0.040240	0.033180
28	0.001770	0.001300	73	0.043750	0.035651
29	0.001850	0.001400	74	0.047550	0.038300
30	0.001940	0.001508	75	0.051690	0.041136
31	0.002030	0.001624	76	0.056180	0.044174
32	0.002140	0.001749	77	0.061050	0.047424
33	0.002250	0.001884	78	0.066340	0.050902
34	0.002370	0.002029	79	0.072080	0.054619
35	0.002500	0.002186	80	0.078290	0.058592
36	0.002650	0.002354	81	0.085030	0.062834
37	0.002810	0.002535	82	0.092320	0.067362
38	0.002980	0.002730	83	0.100210	0.072190
39	0.003170	0.002940	84	0.108740	0.077337
40	0.003380	0.003166	85	0.117960	0.082817
41	0.003600	0.003410	86	0.127900	0.088649
42	0.003840	0.003672	87	0.138620	0.094850
43	0.004110	0.003954	88	0.150170	0.101436
44	0.004400	0.004258	89	0.162590	0.108424
45	0.004720	0.004585	90	0.175930	0.115832
46	0.005070	0.004938	91	0.190250	0.123677
47	0.005450	0.005317	92	0.205580	0.131973
48	0.005860	0.005725	93	0.221980	0.140737
49	0.006310	0.006164	94	0.239480	0.149983
50	0.006800	0.006637	95	0.258130	0.159723
51	0.007330	0.007145	96	0.277950	0.169970
52	0.007910	0.007693	97	0.298950	0.180733
53	0.008550	0.008282	98	0.321210	0.192020
54	0.009240	0.008915	99	1.000000	0.203837
55	0.010000	0.009597	100	1.000000	1.000000
56	0.010820	0.010330			

Anexo 2. Monotonicidad de funciones racionales

Una *función racional* es aquella que resulta del cociente de dos funciones polinomiales. Al analizar la sensibilidad de primas niveladas y reservas a cambios en las tasas de interés, se han considerado las funciones de valor presente de flujos contingentes como funciones polinomiales del factor de descuento financiero, v .

Algunas proposiciones, tales como la referente a la variación de la prima nivelada, se demostraron basándonos en el comportamiento de cocientes de flujos, por lo que resultó fundamental el siguiente teorema, cuya demostración se incluye en este anexo.

Para $x > 0$, considérese la función racional

$$f(x) = \frac{\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}}{\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}}$$

con $a_{\alpha} \geq 0$ y $b_{\alpha} > 0$. Si la sucesión $\{a_{\alpha} / b_{\alpha}\}$ es creciente (decreciente), entonces f es una función creciente (decreciente) de x .

Demostración

La derivada de f es, utilizando la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{\left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}\right)' - \left(\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right)'}{\left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right)^2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right)^2 &= \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}\right)' - \left(\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right)' \\ &= \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n \alpha a_{\alpha} x^{\alpha-1}\right) - \left(\sum_{\alpha=0}^n \alpha b_{\alpha} x^{\alpha-1}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha}\right) \\ &= \left(\sum_{\beta=0}^n b_{\beta} x^{\beta}\right) \left(\sum_{\alpha=0}^n \alpha a_{\alpha} x^{\alpha-1}\right) - \left(\sum_{\alpha=0}^n \alpha b_{\alpha} x^{\alpha-1}\right) \left(\sum_{\beta=0}^n a_{\beta} x^{\beta}\right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \alpha x^{\alpha+\beta-1} (a_{\alpha} b_{\beta} - a_{\beta} b_{\alpha}) \end{aligned}$$

Intercambiando las variables índice

$$\begin{aligned} f'(x) \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha} \right)^2 &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \beta x^{\alpha+\beta-1} (a_{\beta} b_{\alpha} - a_{\alpha} b_{\beta}) \\ &= - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \beta x^{\alpha+\beta-1} (a_{\alpha} b_{\beta} - a_{\beta} b_{\alpha}) \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} 2f'(x) \left(\sum_{\alpha=0}^n b_{\alpha} x^{\alpha} \right)^2 &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n (\alpha - \beta) x^{\alpha+\beta-1} (a_{\alpha} b_{\beta} - a_{\beta} b_{\alpha}) \\ &= - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n x^{\alpha+\beta-1} b_{\alpha} b_{\beta} (\alpha - \beta) (a_{\alpha} / b_{\alpha} - a_{\beta} / b_{\beta}) \end{aligned}$$

El producto $(\alpha - \beta)(a_{\alpha} / b_{\alpha} - a_{\beta} / b_{\beta})$ es positivo (negativo) si la sucesión $\{a_{\alpha} / b_{\alpha}\}$ es creciente (decreciente), porque

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow a_{\alpha} / b_{\alpha} \leq a_{\beta} / b_{\beta} \quad \text{y} \quad \alpha \geq \beta \Rightarrow a_{\alpha} / b_{\alpha} \geq a_{\beta} / b_{\beta} \quad \blacksquare$$

Bibliografía y referencias

BAILLIE, Donald C. 1951. *Actuarial note: The Equation of Equilibrium.* Transactions of the Society of Actuaries, vol. III.

BAYO, Francisco R. y FABER, Joseph F. 1983. *Mortality Experience Around Age 100.* Transactions of the Society of Actuaries, vol. XXXV.

BEEKMAN, John A. y FUELLING, Clinton P. 1991. *Interest and Mortality Randomness in some Annuities.* Actuarial Research Clearing House, vol. I.

_____ **1993.** *One Approach to Dual Randomness in Life Insurance.* Scandinavian Actuarial Journal, vol. ***.

BERNOULLI, Nicolás. 1709. *De Usu Artis Conjectandi in Jure.* Traducción al inglés de Richard J. Pulskamp.

BERNSTEIN, P.L. 1996. *Against the Gods. The Remarkable Story of Risk.* Wiley, New York.

BETZUEN ZALBIDEGOITIA, Amancio. 1999. *Una Predicción de los Tantos Generales de Mortalidad.* Anales del Instituto de Actuarios Españoles.

BOWERS, Newton L., GERBER, Hans U., HICKMAN, James C., JONES, Donald A. y NESBITT, Cecil J. 1986. *Actuarial Mathematics.* Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

_____ **1997.** *Actuarial Mathematics,* 2da. edición. Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

BOX, George E.P., JENKINS, Gwilyn M. y REINSEL, Gregory C. 1994. *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

BOYLE, Phelim P. 1976. *Rates of Return as Random Variables.* Journal of Risk and Insurance, vol. XLIII.

BROFFITT, James y KLUGMAN, Stuart A. 1982. *Definitions for Compound and Simple Interest.* Actuarial Research Clearing House, vol. II.

BÜHLMANN, Hans. 1987. *Actuaries of the Third Kind?.* ASTIN Bulletin, vol. XVII.

CARRIERE, Jacques F. 1992. *Parametric Models for Mortality Data*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XLIV.

CASELLA, George y BERGER, Roger L. 1990. *Statistical Inference*. Duxbury Press, Belmont, California.

CASSEDY, James H. 1969. *Actuarial Science in 19th Century America*. The Actuary, vol. III, n° 5, mayo.

CLARKE, S.M., HARDY, M.R., MACDONALD, A.S., VERRALL, R.J. y WATERS, H.R. 1994. *Fundamentals of Actuarial Mathematics*. Faculty and Institute of Actuaries, Oxford.

DAW, R.H. 1979. *Smallpox and the Double Decrement Table. A Piece of Actuarial Pre-history*. Journal of the Institute of Actuaries, vol. CVI.

DE VICENTE MERINO, Ana, HERNÁNDEZ MARCH, Julio, ALBARRÁN LOZANO, Irene y RAMÍREZ PÉREZ, Cruz. 2001. *Proyección y Estudio de una Población. El Papel de la Mortalidad*. Universidad de Madrid.

DE VYLDER, F. Etienne. 1997. *Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Países Bajos.

DONALD, D.W.A. 1956. *Compound Interest and Annuity-Certain*. Cambridge University Press.

DUFRESNE, Daniel. 1992. *Distributions of Discounted Values*. Actuarial Research Clearing House, vol. I.

EDWARDS, Matthew. 20XX. *Signor Tontí's Tontines: An Article Examining the History of the Tontine, and its Inventor Signor Tontí*. En www.got01.dial.pipex.com/tontines.

FACULTY AND INSTITUTE OF ACTUARIES. 2004. *History of Actuarial Profession*. En www.actuaries.org.uk, adaptación del artículo *Inside Careers 2003-2004*, de Chris Lewin.

FIBIGER, J.A. y KELLISON, Stephen. G. 1971. *Actuarial Functions as Expected Values*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XXIII.

FREES, Edward W. 1988. *Net Premiums in Stochastic Life Contingencies*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XL.

_____ **1990.** *Stochastic Life Contingencies with Solvency Considerations*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XLII.

FROSTIG, Esther. 2002. *Comparison Between Future Lifetime Distribution and its Approximations*. North American Actuarial Journal, vol. VI, n° 2.

GAVRILOV, LEONID A. y GAVRILOVA, NATALIA S. 2002. *The Quest for the Theory of Human Longevity*. The Actuary, vol. ***, mayo.

GERBER, Hans U. 1979. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation, Philadelphia, Pennsylvania.

_____ 1986. *Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.

GERSHENSON, Harry. 1951. *Actuarial Note: Reserves by Different Mortality Tables*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. III.

GIACOTTO, Carmelo. 1986. *Stochastic Modelling of Interest Rates: Actuarial vs. Equilibrium Approach*. Journal of Risk and Insurance, vol. LII.

GOOVAERTS, M.J., DE VYLDER, Etienne F. y HAEZENDONCK, J. 1984. *Insurance Premiums*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, Países Bajos.

GRAUNT, John. 1662. *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index, and Made Upon the Bills of Mortality*. Versión html de Ed Stephan, enero de 1996.

GREVILLE, Thomas N.E. 1956. *Laws of Mortality Which Satisfy a Uniform Seniority Principle*. Journal of the Institute of Actuaries, vol. LXXXII.

HALD, Anders. 1987. *On the Early History of Life Insurance Mathematics*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. I.

HALLEY, Edmund. 1693. *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn From Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslau; with an Attempt to Ascertain the Prices of Annuities Upon Lives*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Reimpresión de Matthias Böhne, enero 2002.

HELIGMAN, L. y POLLARD, J.H. 1980. *The Age Pattern of Mortality*. Journal Institute of Actuaries, vol. CVII.

HEYWOOD, Jeffrey. 1985. *Edmond Halley: Astronomer and Actuary*. Journal Institute of Actuaries, vol. CXII.

HICKMAN, James C. 1985. *Why Not Random Interest?* The Actuary, vol. XIX, n° 2, febrero.

_____ 1985. *Updating Life Contingencies*. En *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. XXXV: *Actuarial Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

HIGGINS, Tim. 2003. *Mathematical Models of Mortality*. Documento de trabajo presentado al Taller de Modelos y Pronósticos de Mortalidad. Universidad Nacional de Australia.

HOEL, Paul G., PORT, Sidney C. y STONE, Charles J. 1971. *Introduction to Probability Theory*. Houghton Mifflin, Boston, Massachusetts.

HOOKER, P.F. y LONGLEY-COOK, L.H. 1957. *Life and Other Contingencies*, vols. I y II. Cambridge University Press.

INSOLERA, Filadelfo. 1950. *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Ediciones Aguilar, Madrid.

- JETTON, Merlin F. 1988.** *Interest Rate Scenarios*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XL.
- JOHNSTON, Ian. 2000.** *A Handbook on the History of Modern Science*. En www.mala.bc.ca
- JORDAN, Chester W. 1967.** *Life Contingencies*. Society of Actuaries, Chicago, Illinois.
- KALASHNIKOV, Vladimir y NORBERG, Ragnar. 2000.** *On the Sensivity of Primes and Reserves to Changes in Valuation Elements*. Documento de Trabajo n° 165, Laboratorio de Matemáticas Actuariales, Universidad de Copenhague.
- KELLISON, Stephen G. 1991.** *The Theory of Interest*, 2a. edición. Richard D. Irwin, Burr Ridge, Illinois.
- KESSLER, Ronald. 1985.** *The Life Insurance Game*. Holt, Rinehart & Winston, New York.
- KIJIMA, Masaaki. 2003.** *Stochastic Processes with Applications to Finance*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- KING, George. 1902.** *Institute of Actuaries' Textbook*. Charles and Edwin Layton, Londres.
- KOPF, Erwin W. 19XX.** *The Early History of the Annuity*. En International Actuarial Links: www1.fee.uva.nl/ke/act/actuariallinks/htm
- KUNIMURA, Dennis. 1997.** *The Gompertz Distribution-Estimation of Parameters*. Actuarial Research Clearing House, vol. II.
- LEWIN, Chris G. 1970.** *An Early Book on Compound Interest: Richard Witt's Arithmetical Questions*, Journal of the Institute of Actuaries, vol. XCVI
- _____ **2001.** *The Creation of Actuarial Science*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, vol. XXXIII, n° 2.
- MAO, Hong; CARSON, James M., OSTASZEWSKI, Krzysztof M. y LUO, Shoucheng. 2004.** *Pricing Life Insurance: Combining Economic, Financial and Actuarial Approaches*. Journal of Insurance Issues, n° 27.
- MARÍN, José M. y RUBIO, Gonzalo. 2001.** *Economía Financiera*. Antoni Bosch, editor, Barcelona, España.
- MAYS, Walter J. 1979.** *Ulpian's Table*. Actuarial Research Clearing House, vol. II.
- MENGE, Walter O. 1937.** *A Statistical Treatment of Actuarial Functions*. Record of the American Institute of Actuaries, vol. XXVI.
- MEREU, John A. 1963.** *The Mathematical Forces Operating on Reserves*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XV.
- MOOD, Alexander M., GRAYBILL, Franklin A. y BOES, Duane C. Introduction to the Theory of Statistics**, 3a. edición. McGraw-Hill, Singapur, 1985.

- MOORHEAD, E.J. (Jack).** 1989. *Our Yesterdays: The History of the Actuarial Profession in North America, 1809-1979*. Society of Actuaries, Itasca Illinois.
- NORBERG, Ragnar.** 1985. *Lidstone in the Continuous Case*. Scandinavian Actuarial Journal, n° I.
- _____ 1990. *Payment Measures, Interest, and Discounting: An Axiomatic Approach with Applications to Insurance*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. ***.
- OGBORN, M.E.** 1949. *The Theory of Simple and Compound Interest: An Eighteenth-Century Manuscript*. Journal of the Institute of Actuaries, vol. LXXV.
- _____ 1953. *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality*. Journal of the Institute of Actuaries, vol. LXXIX.
- PAI, Jeffrey S.** 1997. *Generating Random Variates with a Given Force of Mortality and Finding a Suitable Force of Mortality by Theoretical Quantile-Quantile Plots*. Actuarial Research Clearing House, vol. I.
- PANJER, Harry H. y BELLHOUSE, David R.** 1980. *Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies*. Journal of Risk and Insurance, vol. XLVII
- PARKER, Gary.** 1994. *Stochastic Interest Rates and Insurance Portfolios: The Impact of Model and Parameter Selection*. Actuarial Research Clearing House, vol. I.
- PICARD, Philippe.** 2000. *La Belle au Bois Dormant et l'Actuariat Vie*. Bulletin Français d'Actuariat, vol. IV, n° 8.
- POLLARD, A.H.** 1970. *Random Mortality Fluctuations and the Binomial Hypothesis*. Journal of the Institute of Actuaries, vol. XCVI.
- _____ 1971. *On Fluctuating Interest Rates*. Bulletin de L'Association Royale des Actuairees Belges, vol. LXVI.
- POLLARD, A.H. y POLLARD, J.H.** 1969. *A Stochastic Approach to Actuarial Functions*. Journal of the Institute of Actuaries, vol. XCV.
- PROMISLOW, S. David.** 1985. *Accumulation Functions*. Actuarial Research Clearing House, vol. I.
- _____ 1981. *Extensions of Lidstone's Theorem*. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XXXIII.
- RAMSAY, Colin M.** 1993. *A Note on Random Survivorship Group Benefits*. ASTIN Bulletin, vol. XXIII, n° 1.
- RIPLEY, Brian D.** 1987. *Stochastic Simulation*. John Wiley & Sons, New York.
- ROSENBERG, Margie y YOUNG, Howard.** 1997. *Stochastic Simulations Using Spreadsheet Software*. Actuarial Research Clearing House, vol. I.

ROSS, Sheldon M. 1997. *Simulation*, 2a. edición. Harcourt/Academic Press. Burlington, Massachusetts.

SÁNCHEZ LÓPEZ, José María. 2004. *Estimación Actuarial Versus Estimación por el Método de los Momentos para la Probabilidad de Muerte*. Documento de trabajo, Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de la Universidad Rey Juan Carlos.

SCHOEN, Robert. 1976. *The Calculation of the First Life Table: A Historical Note*. *The Actuary*, vol. X, n° 2, febrero.

SCOLLNIK, Davis P.M. 1995. *Simulating Random Variates from Makeham's Distribution and from Others with Exact or Nearly Log-Concave Densities*. *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. XLVII.

SEAL, H.L. 1980. *Early Uses of Graunt's Life Table*. *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. CVII.

SMITH, Franklin C. 1964. *A General Treatment of Insurance for Face Amount Plus Reserve or Cash Value*. *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. XVI.

SOLARI, Tito. 1999. *Assurance-Vie Avec Taux d'Intérêt Stochastique*. Institut de Sciences Actuarielles. Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Université de Lausanne, Suisse.

SPIVAK, Michael. 1992. *Cálculo Infinitesimal*, 2da. edición. Reverté. Barcelona, España.

SPURGEON, E.F. 1932. *Life Contingencies*, 3a. edición. Cambridge University Press.

TENENBEIN, Aaron. 1978. *Actuarial Functions as Random Variables*. Actuarial Research Clearing House, vol. II.

THIELE, Thorvald Nikolai. 1871. *On a Mathematical Formula to Express the Rate of Mortality Throughout the Whole of Life*. *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. XVI.

VEGA-AMAYA, Oscar. 2002. *Surgimiento de la Teoría Matemática de Probabilidad*. Apuntes de la Historia de las Matemáticas, vol. I, n° 1.

WATERS, H.R. 1978. *The Moments and Distributions of Actuarial Functions*. *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. CV.

WETTERSTRAND, William H. 1978. *Recent Mortality Experience Described by Gompertz's and Makeham's Laws - Including a Generalization*. Actuarial Research Clearing House, vol. II.

ZILLMER, August. 1863. *Beiträge zur Theorie der Prämienreserve bei Lebensversicherungsanstalten*. Traducción de Thomas G. Kabele, 1989.

ZIOCK, Richard W. 1978. *A Proof of Lidstone's Theorem*. Actuarial Research Clearing House, vol. II.