



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION PARA  
LA EXPLOTACION DE RECURSOS NO RENOVABLES  
MEDIANTE LA METODOLOGIA DE OPCIONES REALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALEJANDRO NAVA CAMACHO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VICENTE ANGEL SORIANO RAMIREZ



2005



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

m. 345021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA 11  
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Alejandro Nava Camacho

FECHA: 2 Junio 2005

FIRMA: [Signature]

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**

**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Evaluación de proyectos de inversión para la explotación de recursos no renovables mediante la metodología de opciones reales"

realizado por Alejandro Nava Camacho

con número de cuenta 09619724-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Vicente Ángel Soriano Ramírez

Propietario

Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

Propietario

Dr. Juan González Hernández

Suplente

Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Suplente

Dr. Pablo Padilla Longoria

*[Signatures of: Vicente Ángel Soriano Ramírez, Margarita Elvira Chávez Cano, Juan González Hernández, Luis Antonio Rincón Solís, Pablo Padilla Longoria]*

**Consejo Departamental de Matemáticas**

*[Signature of Jaime Vázquez Alamillo]*



Act. Jaime Vázquez Alamillo

FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

# Agradecimientos

Al Dr. Vicente Angel Soriano Ramírez por su tiempo y apoyo que me brindo para la realización del presente trabajo de tesis.

# Índice

Introducción.	1
<b>I Preliminares.</b>	<b>6</b>
1 Posiciones y Estrategias de Inversión.	8
1.1 Historia y Desarrollo de las Opciones. . . . .	8
1.2 Planteamiento . . . . .	9
1.3 Evolución de un activo. . . . .	11
1.4 Arbitraje. . . . .	13
1.5 Volatilidad. . . . .	14
1.5.1 Volatilidad en Mercados Financieros. . . . .	15
2 Teoría de las opciones financieras.	18
2.1 Activos financieros y estrategias. . . . .	18
2.1.1 Activos financieros . . . . .	18
2.1.2 Estrategias. . . . .	19
2.1.3 Estrategias admisibles y arbitraje. . . . .	22
2.2 Martingalas y arbitraje . . . . .	23
2.2.1 Transformada de martingala. . . . .	24
2.2.2 Mercados financieros viables . . . . .	26
2.3 Mercados completos y precios de opciones. . . . .	29
2.3.1 Mercados completos. . . . .	29
2.3.2 Valoración y cobertura de las reclamaciones contingentes bajo un mercado completo . . . . .	32

2.3.3	Introducción a opciones americanas . . . . .	33
2.4	Problemas de parada óptima y opciones americanas . . . . .	35
2.4.1	Tiempos de parada . . . . .	35
2.4.2	El proceso dominante (o la envoltura de Snell) . . . . .	37
2.4.3	Descomposición de martingalas. . . . .	42
2.4.4	Envoltura de Snell y cadenas de Markov . . . . .	44
2.5	Aplicación a opciones americanas . . . . .	45
2.5.1	Cobertura con opciones americanas . . . . .	45
2.5.2	Opciones americanas y opciones europeas . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Teoría de las opciones reales</b>	<b>50</b>
3.1	Introducción . . . . .	50
3.1.1	Metodologías de valorización de opciones reales . . . . .	53
3.1.2	Opciones reales VS. Valor presente neto. . . . .	55
3.1.3	Literatura acerca de la Teoría Opciones Reales. . . . .	56
<b>II</b>	<b>Modelo de Brennan y Schwartz</b>	<b>60</b>
<b>4</b>	<b>Modelo de Brennan y Schwartz</b>	<b>62</b>
4.1	Descripción general del modelo de Brennan y Schwartz . . . . .	63
4.2	Modelo para la explotación de una mina . . . . .	64
4.2.1	Modelo de precios . . . . .	64
4.2.2	Valor de la mina: modelo general . . . . .	65
4.2.3	Valor de la mina: en términos reales. . . . .	69
<b>5</b>	<b>Aproximación numérica.</b>	<b>72</b>
5.1	Las aproximaciones numéricas. . . . .	73
5.1.1	Valoración de la opción real europea por procedimientos numéricos	73
5.1.2	Árboles binomiales. . . . .	75
5.1.3	Diferencias finitas . . . . .	77
5.1.4	Simulación . . . . .	80
5.1.5	Comparando procedimientos numéricos alternativos. . . . .	82
5.1.6	Aproximación del valor de la mina por diferencias finitas. . . . .	83

<b>III Anexos.</b>	<b>92</b>
Anexo A.1: Movimiento browniano. Anexo A.2: Martingalas	94
Anexo B: Valoración de opciones financieras por diferencias finitas.	96
Anexo C: Evaluación del Modelo de Black & Scholes.	111

# Introducción.

Los objetivos del presente trabajo de tesis son: 1) analizar un modelo de evaluación de proyectos de inversión para la explotación de recursos no renovables mediante la metodología de opciones reales; dicho análisis centra su atención en el modelo planteado originalmente por Brennan y Schwartz (1985), 2) describir la valoración de las opciones financieras y, en consecuencia, la de las opciones reales.

Para ello, planteamos las hipótesis siguientes:

- 1.- El empleo de las opciones reales en la evaluación de los proyectos de inversión aumenta su valor mediante la consideración de oportunidades / hecho fortuitos que permitan incrementar el valor mediante la *flexibilidad*;
- 2.- El valor del proyecto planteado por Brennan y Schwartz (1985) está modelado por una ecuación diferencial parcial (EDP) con adecuadas condiciones de frontera; para este modelo, el método de Diferencias Finitas proporciona una excelente aproximación al valor del proyecto.

Las herramientas empleadas para realizar este trabajo están enmarcadas dentro de la evaluación de opciones por: valoración neutral al riesgo, por arbitraje bajo la hipótesis de mercados completos y portafolios autofinanciados.

Además, nuestro análisis está circunscrito por la teoría de los procesos estocásticos, en concreto por el uso de martingalas, tiempos de parada, descomposición de Doob, movimiento browniano y Lema de Itô; y dentro del análisis numérico para EDP el método de diferencias finitas explícitas.



Algunas referencias sobre la evaluación de proyectos de inversión para la explotación de recursos *no renovables*, que emplean la metodología de las opciones reales y que se ha constituido en un ejemplo clásico en su tipo de modelado, ha sido presentada originalmente por Brennan y Schwartz en 1985, ahí es evaluada una mina de cobre considerando la opción de apertura, cierre y abandono de las operaciones.

La estructura de la tesis consta de dos partes, la primera basa en los capítulos 1,2 y 3 la presentación del entorno de evaluación de las opciones, comenzando por describir la Teoría de las Opciones Financieras, seguido por la descripción de la Teoría de las Opciones Reales.

En ellos, entendemos por opción a una decisión contingente que entrega la posibilidad de tomar ciertas acciones una vez despejada la incertidumbre, en este sentido, una opción financiera entrega a su poseedor el derecho pero no la obligación de comprar (o vender según sea el caso) un activo a un precio determinado de antemano conocido como precio de ejercicio.

Algunos tipos de opciones financieras –quizás las más conocidas– son: las europeas, es decir, aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento; las americanas se pueden ejercer en cualquier tiempo antes de la fecha de maduración o en la fecha de maduración. Por lo anterior, su estructura de valoración presentada en el capítulo 2, es la siguiente: En las opciones europeas hemos buscado construir un portafolio que iguale el valor de la reclamación contingente o valor de la opción en la fecha de vencimiento. Cabe hacer énfasis que mediante la hipótesis de neutralidad al riesgo es posible descontar el valor del mismo a la tasa libre de riesgo, esto se logra bajo el empleo de la hipótesis de mercados completos en donde no existen oportunidades de arbitraje. Es decir, no hay la posibilidad de generar dinero sin arriesgarlo con una apuesta previa. Dicho mercado se obtiene cambiando la medida de probabilidad del precio del activo subyacente, de tal manera con el portafolio se logra realizar una cobertura completa del riesgo adquirido por parte del emisor.

Para el caso de las opciones americanas, por un lado, tenemos que su valor se puede describir como un problema de tiempo de parada óptimo o equivalentemente como una supermartingala, en este caso, se trata de avanzar recursivamente en retroceso en el tiempo empezando en la fecha de maduración para luego tomar el máximo de entre el valor por ejercer la opción al día de hoy o el valor presente de la misma que se ejerce en una fecha posterior. Por otro lado, utilizando la descomposición de Doob es separado el valor de la opción americana en una martingala y en un proceso predecible no decreciente con valor inicial igual a cero. Nuevamente, bajo el supuesto de mercados completos se construye un portafolio igual a la martingala y su valor resulta ser mayor o igual al valor de la opción americana, con el cual se logra una cobertura completa del riesgo adquirido por parte del emisor.

Posteriormente, en el capítulo 3, presentamos las opciones financieras sobre activos reales, dichas opciones adoptan el nombre de opciones reales y de manera general es conocida como Teoría de Opciones Reales (TOR). Donde el activo real puede ser una mina, una plataforma, un pozo, un edificio un terreno o maquinaria. Algunos ejemplos de opciones reales son: opción de abandono, de cierre, de cambio de escala, de diferir la realización del proyecto, de apertura, por mencionar algunas. El hecho más importante a tomar en cuenta sobre las opciones reales es que el valor de una opción o decisión adoptada sobre el desarrollo del proyecto es la *flexibilidad*.

Prácticamente como los gerentes o directivos financieros están tomando las decisiones día a día, estamos tratando con opciones del tipo americano.

Pero, ¿cuáles son las ventajas de la metodología de opciones reales sobre la metodología tradicional como el Valor Presente Neto (VPN), la Tasa Interna de Retorno (TIR), o los métodos actuariales tradicionales? Las ventajas más relevantes son: que la metodología de opciones reales asigna valor a la flexibilidad, es decir, incorpora la habilidad que los tomadores de decisiones puedan adaptar el proyecto al entorno en el que se va desarrollando para ejercer la opción real en el momento apropiado. Otra ventaja es, que incorpora el riesgo en la valoración, manteniendo un importante y a primera vista desconcertante resultado que muestra que en ambientes de incertidumbre se puede conducir el valor del

proyecto adaptándolo según se van presentado los escenarios contingentes. Enfatizamos que las opciones reales resultan complementarias a la metodología de valoración actual.

Las desventajas que suelen presentar son: el grado de dificultad en su cálculo dada la complejidad de los modelos casi artesanal para los diferentes tipos de proyectos. Otra es que el precio del bien (*commodity*) se supone como un movimiento browniano pero, no siempre, se argumenta adecuadamente el sentido de esta hipótesis. Por ejemplo, al extender el argumento a proyectos de investigación y desarrollo, la mayoría de los aplicadores de opciones reales siguen manteniendo este supuesto. De hecho, no existe un modelo general que se pueda aplicar a cualquier proyecto de inversión.

De esta manera surge la pregunta ¿cuándo es conveniente utilizar métodos tradicionales y cuando Opciones Reales? Por un lado, es aconsejable utilizar métodos tradicionales cuando el desarrollo del proyecto sea estable o si los precios del bien (*commodity*) son modelables linealmente. Por el otro, es conveniente utilizar opciones reales cuando existe un ambiente de alta incertidumbre en los parámetros del proyecto o cuando los plazos del proyecto son largos;

La segunda parte de la tesis se compone de los capítulos 4 y 5, en estos la finalidad es presentar el modelo planteado por Brennan y Schwartz. Ahí es modelada la explotación de una mina de cobre que cuenta con tres decisiones a considerar que son: cierre temporal, apertura, o abandono, con ellas el dueño o el gerente puede ejercer continuamente la opción de abrir, cerrar o abandonar, por abrir o cerrar la mina se incurren en costos de operación, mientras que el abandono no representa desembolso alguno.

Posteriormente, el valor de la mina bajo cualquier política de operación es obtenido al considerar el retorno de un portafolio compuesto por dos posiciones una *larga* en la mina y una *corta* en contratos futuros sobre el bien (*commodity*). ¿Que duda cabe que bajo una combinación adecuada de instrumentos financieros? entonces el portafolio contiene diferentes intensidades de incertidumbre, esto junto con la hipótesis de que no existen oportunidades de arbitraje nos lleva a concluir que el portafolio deberá rentar la tasa libre de riesgo, con ello la dinámica queda modelada por una ecuación parcial que describe el

crecimiento del valor de la mina.

Por último, en el capítulo 5 son descritos algunos métodos numéricos y su aplicación para resolver problemas de opciones reales. Como ejemplo, del modo de operar de estos métodos numéricos se considera un proyecto caso con la opción de diferir la inversión.

**Parte I**  
**Preliminares.**

# Capítulo 1

## Posiciones y Estrategias de Inversión.

El último decenio ha sido testigo de un crecimiento impresionante de los llamados *mercados financieros secundarios o de derivados*, no sólo en cuanto a volumen, sino también en cuanto a la diversidad de los productos que en ellos se negocian.

La matemática que se precisa para el correcto manejo de los nuevos instrumentos financieros es avanzada y muy rica. Más aún, las innovaciones permanentes de estos mercados requieren de una nueva matemática dando así lugar a un nuevo campo de investigación.

El objetivo de este capítulo es describir los aspectos básicos de las matemáticas de los productos derivados y, particularmente, de los contratos de *opciones*. Aquí se analiza tanto el fundamento económico de los modelos usados como la matemática que se requiere para su análisis, aunque pondremos énfasis en el proceso de modelación.

### 1.1 Historia y Desarrollo de las Opciones.

Las opciones, históricamente, surgieron como un contrato para cubrir el riesgo sobre un cargamento fletado, como especulación sobre el precio de las cosechas, etc. Todos estos contratos se realizaban entre dos partes sin la necesidad de acudir a ningún tipo de

mercado intervenido por un mediador que regulase las características del mismo. sino que se acomodaba a las necesidades de cada uno que quedaban plasmadas en las cláusulas de un contrato. Este tipo de mercado llamado *over the counter (OTC)*, que se traduce como “no organizado”, es utilizado en la actualidad por muchas instituciones financieras para cubrir riesgos sobre tipos de interés o sobre rentabilidad en sus productos como por ejemplo, fondos de inversión. Las ventajas de esta modalidad, son muchas y derivan de la libertad entre las partes de fijar las condiciones del contrato. Sin embargo este tipo de mercado tiene grandes limitaciones debido a la escasa liquidez , ya que su posible venta es complicada y, normalmente, hasta su vencimiento no se puede realizar el contrato. También presenta el inconveniente de que el comprador está asumiendo el riesgo de insolvencia del emisor del contrato de opción, sin ningún tipo de fondo o aval que respalde la operación.

Por estos motivos durante el siglo XX, específicamente en los años setenta, comienzan a aparecer los primeros mercados organizados siendo el pionero el *Chicago Board Options Exchange* que comenzó regulando el intercambio de opciones sobre valores bursátiles. Desde esta fecha hasta nuestros días han ido apareciendo mercados similares en todos los países desarrollados.

Actualmente en nuestro país existen lugares especializados para el manejo de las opciones en sus diferentes facetas y cuya información acerca de cómo establecer este tipo de contratos la podemos obtener en una manera sencilla a través de diferentes sitios en Internet<sup>1</sup>.

## 1.2 Planteamiento

Es septiembre; para finales de año vislumbra la posibilidad de participar en un negocio. Esta participación requerirá liquidez por su parte y usted se plantea conseguir esa liquidez convirtiendo la cartera de acciones de PEMEX que posee. En principio se le presentan dos alternativas.

Una primera alternativa consiste en liquidar su cartera *ahora* e invertir el total en

---

<sup>1</sup>Información más completa en el sitio web: <http://www.mexder.com.mx>.

instrumentos de rentabilidad fija asegurada como Bonos del Ahorro Nacional (préstamos al Estado) con vencimiento en diciembre. Sin embargo, el mercado, más concretamente las acciones de PEMEX –aun cuando sean de alta rentabilidad–, manifiestan una *volatilidad* preocupante; es decir, su rentabilidad *ha ido oscilando* de manera ostensible alrededor de la renta media. Pero muy bien podría ocurrir que justo durante diciembre el precio de las acciones no fuese alto. De manera que *la alternativa más rentable conlleva más riesgos*. Lo que, ciertamente, no debe sorprender. Pero, ¿qué hacer?

Podemos asegurarnos contra ese riesgo comprando *opciones de venta* u *opciones put*. Dado que una opción *put* sobre un cierto activo, como acciones de PEMEX, es un contrato que otorga a su comprador el derecho, pero no la obligación, a *vender* a un *precio de ejercicio* fijo,  $K$ , en una *fecha de vencimiento*<sup>2</sup>, una acción de ese activo. La fecha de vencimiento será en nuestro caso diciembre. De esta manera garantizamos un precio  $K$  para nuestras acciones.

Por supuesto, el derecho absoluto que supone una opción de venta (*put*) tiene un precio. En otros términos, el emisor de la *put* asume riesgos ajenos por una *prima/precio*. ¿A cuánto debe ascender el importe de esa prima? Si el precio es muy alto, al inversor –usted– no le compensará, mientras que si el precio es muy bajo el emisor de la *put* asume un riesgo sin contrapartidas suficientes que le permitan cubrir el mismo.

¿Hay un precio de equilibrio en el que ambas partes estén de acuerdo? Este es común como el *problema de valoración*. Y la respuesta es que *sí*. Es importante señalar que cualquier procedimiento que justifique el precio de la prima debe llevar aparejado de algún modo la especificación de una estrategia de inversión (o al menos, la confirmación de la existencia de una) que permita al emisor cubrir sus riesgos. Este es *el problema de cobertura* y, como veremos, existe un precio que cumple los requisitos anteriores.

En otras palabras, un *put* es un instrumento financiero *derivado*, es decir, su valor depende del valor de otro activo al que se le conoce como *subyacente*; en el ejemplo anterior las acciones de PEMEX. Necesidades de inversión, de cobertura y también intereses especuladores promueven un crecimiento incesante del número y variedad de productos derivados que se negocian en el mercado.

Paralelo, aunque no exactamente simétrico, es el contrato de *opción de compra* u *opción call*. Como bien se ha mencionado, una *call* es un contrato que da a su comprador

---

<sup>2</sup>Llamada también *fecha de ejercicio*.



el derecho, pero no la obligación, de comprar a un precio de ejercicio establecido. Los contratos anteriores se dicen de tipo  *europeo*  porque sólo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento. El contrato, en cambio, se llama  *americano*  si el tenedor de la opción de venta, puede ejercer su derecho de venta en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento. Tampoco el precio de ejercicio tiene por qué estar determinado de antemano y, por ejemplo, podría ser el valor medio, aritmético o geométrico de las cotizaciones hasta su vencimiento. Este tipo de contratos se conocen como  *opciones asiáticas* . Conviene resaltar que las denominaciones geográficas anteriores no tienen nada que ver con el lugar donde se negocian los instrumentos.

El comprador de la opción de venta ( *put* ) quizá crea que la cotización de las acciones subyacentes pueden bajar y en cualquier caso le resultará de interés si así sucede. El vendedor, por otro lado, espera/desea que las acciones suban. Es esta contraposición de opiniones diversas sobre la tendencia futura la que hace posible la existencia de un mercado.

Las opciones constituyen también un instrumento especulativo. Por ejemplo: una opción de compra ( *call* ) sobre el índice IPC de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) con vencimiento el 20 de diciembre de 2001 con precio de ejercicio de 4.550 puntos cotiza hoy una prima de 50 puntos. Hoy el IPC está a 4.400 puntos. Si al vencimiento el IPC alcanza los 4.650, la  *call*  le rinde a su poseedor 100 puntos: una ganancia de 50. es decir, un rendimiento del 100%. El poseedor de una cesta de acciones que replique la composición del IPC, sin embargo, alcanza sólo una rentabilidad de  $\frac{150}{4.400} \times 100\%$ , es decir, del 3.4%. A este fenómeno se le conoce en la jerga financiera como  *apalancamiento* . Por supuesto, si al vencimiento el IPC vale 4.549, el poseedor de la  *call*  pierde el total de su inversión: la prima. Por cierto, 1 punto es una cantidad fija  *p*  en el mercado (por ejemplo: 100 pesetas en España, 10 pesos en México o 1 dólar en EU).

### 1.3 Evolución de un activo.

Nuestro objetivo es valorar una opción de compra ( *call* ). El valor de una  *call*  depende de la evolución del activo subyacente. Por ello, primero centraremos nuestra atención en especificar un modelo para esa evolución.

Tenemos dada una unidad de tiempo, por ejemplo, el día. Por  $R$  denotaremos el tipo de interés por unidad de tiempo compuesto según esa unidad. El valor del activo cambia sólo en los instantes de  $n = 1, 2, \dots$  y permanece constante en los intervalos  $[n, n + 1]$ . El valor del activo que se alcanza en el instante  $n$  se denotará por  $S_n$ . El instante de tiempo presente es 0. Nos interesa la evolución hasta el instante de tiempo  $N$ , que supondremos es el vencimiento de la opción de compra (*call*).

En el modelo más simple supondremos que el activo tiene una rentabilidad central, que no media, por unidad de tiempo  $m$  y una dispersión sobre ese valor central  $\sigma$ . La notación intenta sugerir que  $m$  es una rentabilidad media y que  $\sigma$  es una desviación típica (o estándar) de esa rentabilidad. Pero obsérvese que no hemos introducido ninguna probabilidad. Es importante señalar que el caso  $\sigma = 0$  es simplemente el de la evolución de un activo sin riesgo (que rinde  $m$ ), y que en ese caso debe ocurrir que  $m = R$ . De esta manera vemos que la evolución que postulamos consiste en añadir un riesgo, una oscilación, a un activo que tiene una rentabilidad determinista. Es decir, postulamos que la evolución del activo de tiempo  $n$  al tiempo  $n + 1$  sólo admite dos estados posibles:

$$S_{n+1} - S_n = S_n \times (m \pm \sigma).$$

Si denotamos por  $X_n$  una variable que toma los valores  $\pm 1$ , entonces podemos representar los posibles valores de  $S_{n+1}$  en la forma

$$S_{n+1} = S_n(1 + m + \sigma X_n)$$

o bien,

$$S_{n+1} = S_0 \prod_{j=1}^n (1 + m + \sigma X_j).$$

Implícitamente estamos considerando el espacio muestral que consiste de las listas de  $+1$ 's y  $-1$ 's de longitud  $N$ .

Cada inversionista, en principio, si toma como base este modelo y deberá calibrar a su gusto los parámetros  $m$  y  $\sigma$  y adjudicará además probabilidades subjetivas a cada sucesión de  $X_j$ 's.

Es fundamental suponer que el modelo de mercado que estudiemos cuente con la peculiaridad de que el precio de un activo en un momento dado recoge toda la información sobre el activo disponible en ese instante, y que, por tanto, la evolución futura de un activo depende sólo del precio actual y no de la trayectoria seguida hasta ese instante. En otras palabras, las probabilidades a asignar a las transiciones deben hacer que el *proceso*  $S_n$  sea markoviano.

Supondremos incluso que las  $X_j$  son independientes e idénticamente distribuidas, lo que por supuesto garantiza la markovianidad. Digamos que  $\mathbb{P}(X_j = +1) = p$ , de manera que el modelo contiene tres parámetros  $m, \sigma, p$  a determinar por el inversionista.

Este tipo de modelos para la evolución de activos en mercados financieros fueron introducidos por Bachelier (ver [Ba]) en su tesis doctoral *Theorie de la spéculation*, en París, en 1900. Bachelier, sin embargo, postula que el propio valor del activo, y no su rentabilidad, sigue un camino aleatorio. Mas aún, Bachelier analiza la evolución continua del proceso de evolución de  $S_t$  y para ello *crea el concepto y el primer desarrollo teórico del movimiento browniano* en una frase bien conocida: “El movimiento browniano, una joya de la física moderna, es un descubrimiento botánico cuya teoría matemática tiene su origen en las ciencias sociales”. Pero, en primer lugar, la evolución anterior depende de la subjetividad de cada inversionista. Y, en segundo, lugar, el modelo no incorpora el aspecto económico fundamental, a saber, que si  $\sigma = 0$ , entonces  $m = R$ . Antes, de manera literaria aunque correcta, hemos comentado que eso se debía a que si  $\sigma$  es cero, entonces nuestro activo no tiene riesgo y debe ser un préstamo sin riesgo. La argumentación económica que justifica este razonamiento se basa en la noción fundamental de *arbitraje*, o mejor, de que en un mercado *completo* las oportunidades de arbitraje duran muy poco tiempo.

## 1.4 Arbitraje.

El diccionario de la Academia define arbitraje como: operación de cambio de valores mercantiles, en la que se busca la ganancia aprovechando la diferencia de precios entre unas

plazas y otras. En el sentido más técnico que emplearemos, denominaremos *oportunidad de arbitraje* a una estrategia de inversión con capital inicial cero que *garantiza* un rendimiento positivo. En el mercado financiero operan un gran número de personas dedicadas al arbitraje dedicados a localizar y explotar oportunidades de arbitraje. Estas oportunidades de arbitraje duran poco tiempo y se compensan unas con otras, dada la efectividad de los arbitrajistas. Es una hipótesis razonable, cuando se está pronosticando a medio plazo, suponer que tales oportunidades no existen. Los creadores del arbitraje cumplen pues una importante función sanitaria en los mercados financieros.

Si  $\sigma = 0$ , pero  $m > R$ , entonces se crea una oportunidad de arbitraje: simplemente compramos una unidad de activo con dinero que hemos pedido prestado. Al cabo de  $N$  unidades de tiempo tenemos garantizada una ganancia igual al valor del activo menos el valor del préstamo a devolver. Es decir, una ganancia de  $(m - R)(1 + R)^N$  (que tiene crecimiento exponencial). Si fuera  $m < R$  el argumento es análogo, siempre y cuando tengamos en cuenta la posibilidad de un *short-selling*, es decir, de *ventas al descubierto*, en suma que uno puede vender acciones que no tiene (responsabilizándose de su rentabilidad). Aunque claro, si  $\sigma$  es pequeño, entonces debiera darse que  $m$  es próximo a  $R$ . De hecho, es fácil ver (con un argumento similar al anterior) que si no hay oportunidad de arbitraje, entonces  $|m - R| \leq \sigma$ .

Pero, ¿cómo incorporar de manera eficaz la ausencia de oportunidad de arbitraje en la valoración de opciones? A este punto insatisfactorio se llegó en el siglo pasado alrededor de los años sesenta con Samuelson (ver [Sa]), quien modeló por vez primera la rentabilidad como un recorrido aleatorio, o lo que es lo mismo, postuló que los activos siguen recorridos aleatorios *geométricos*.

## 1.5 Volatilidad.

La volatilidad es la palabra más usada y quizá menos entendida en el mundo de las opciones. Volatilidad simplemente significa movimiento, pero este concepto no es

asimilado bien por los operadores de acciones y futuros, los cuales están acostumbrados a pensar en términos de dirección y no de variabilidad. Un 10% arriba y un 10% abajo son iguales en términos de volatilidad, pero no para aquel poseedor de un activo para el que un 10% para arriba es “bueno” y un 10% para abajo es “malo”.

Al operador de opciones también le interesa la dirección del mercado. Pero a diferencia con el operador de contado, el operador de opciones está también muy interesado en la variabilidad del mercado. Si el mercado de contado no fluctúa demasiado, las opciones disminuirán de valor debido a que se reduce la probabilidad de que el mercado se desplace hacia un determinado precio de ejercicio. En resumen, la volatilidad es la medida de la variabilidad del mercado. Los mercados que varían poco son mercados de baja volatilidad, los mercados que varían mucho son mercados de alta volatilidad. Entonces se intuye que algunos mercados son más volátiles que otros.

### 1.5.1 Volatilidad en Mercados Financieros.

Los mercados financieros operan de manera casi continua, de modo que la cotización de un activo queda mejor representada por un proceso continuo  $S_t$ , donde  $t$  es ahora un número real positivo.

Queremos hacer que la unidad de tiempo empleada tienda hacia cero. Pongamos que la unidad de tiempo tiene tamaño  $\Delta t$  en términos de un año (en el caso de cotización diaria  $\Delta t = \frac{1}{365}$ ). Sea  $T$  el instante de vencimiento que escribimos  $T = N\Delta t$ , donde  $N$  es un número natural. Así que  $N \rightarrow \infty$  equivale a  $\Delta t \rightarrow 0$ . Supondremos que el tipo de interés anual compuesto continuamente es  $R$ , de manera que en el modelo de tiempo discreto debemos tomar un tipo de interés  $R_N = R\Delta t$ . Así  $(1 + R_N)^N - e^{RT}$ .

La *volatilidad anual* de un activo se define como la *desviación típica de los rendimientos anuales*. Se suele denotar por  $\sigma$  y se expresa en *tantos por cientos*. Es decir,

$$\sigma = \text{desviación típica} \left( \frac{S_{\text{al año}}}{S_{\text{hoy}}} \right).$$

Y con las hipótesis de independencia y de distribución idéntica anteriores:

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \text{desviación típica} \left( \frac{S_t + \Delta t}{S_t} \right).$$

Haciendo que  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene bajo una probabilidad (con riesgo-neutro)  $P$  que se torna imposible la oportunidad de arbitraje:

1. La cotización del activo se rige por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(Rdt + \sigma DB_t).$$

En particular, bajo esa probabilidad el rendimiento medio del activo es el mercado por el tipo de interés sin riesgo.

2. El valor en tiempo  $t$ ,  $V_t$  de una opción de compra (*call*) con vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $K$  viene dado por la fórmula de Black-Scholes.

$$V_t = E_P \left( (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right) = e^{-\beta T} S_t \Phi(d_+) - e^{-R(T-t)} K \Phi(d_-), \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{F}_t$  es la filtración natural del movimiento browniano (es decir,  $\mathcal{F}_t$  representa la información generada por las cotizaciones hasta el tiempo  $t$ ),  $\Phi$  es la función de distribución de la normal estándar y

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(R \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

3.  $V_t$  satisface la ecuación de evolución

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + RS \frac{\partial V_t}{\partial S} - R = 0. \quad (1.2)$$

Que mediante el cambio de variables

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{S}{K} \\ \tau &= (T-t) \frac{1}{2} \sigma^2 \\ V_t &= e^{\alpha x + \beta t} W_t, \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes adecuadas, reduce la ecuación (1.2) a

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

El lector informado reconocerá el papel de la *fórmula de Feynman-Kac* en que la solución de una ecuación en derivadas parciales como (1.2) pueda expresarse mediante esperanzas condicionadas como las de (1.1).

Es fundamental observar que en la fórmula (1.1) sólo aparece  $\sigma$  y que no aparece la rentabilidad media del activo. Se trata de un hecho contraintuitivo (en los años setenta) característico de la mística asociada con la fórmula de Black-Scholes.

Por otro lado, hemos pasado ligeramente sobre un hecho básico. La definición de  $\sigma$  no especificó bajo que probabilidad debía calcularse ésta: sobre la probabilidad “real” o sobre la probabilidad “objetiva=riesgo-neutro”. La razón es que *a posteriori* da igual. esto es una consecuencia importante del conocido teorema de cambio de probabilidad de Cameron-Martin/Girsanov del cálculo estocástico.

¿Y las opciones americanas? Basta decir que desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales su valoración y la decisión de cuándo ejercer constituyen un *problema de frontera libre* y se trata de un *problema de tiempo óptimo de parada* de una *supermartingala*.

# Capítulo 2

## Teoría de las opciones financieras.

En este capítulo se abordarán las ideas principales relacionadas con la teoría matemática de las opciones europeas y americanas. Básicamente abordaremos el modelo de mercado financiero discreto, es decir, de manera más simple al conjunto de activos o bienes con precios que cambian en el tiempo y cuyos valores de esos cambios son registrados de forma discreta. Posteriormente, es determinado el precio de las opciones europeas y americanas para un activo. Nuestras herramientas principales son los conceptos de martingalas y tiempos de parada. Las fuentes bibliográficas principales de este capítulo son: [La-La], [St].

### 2.1 Activos financieros y estrategias.

#### 2.1.1 Activos financieros

Un modelo de mercado financiero discreto es un conjunto de activos en donde el precio de cada uno de ellos en cada tiempo  $j$  es una variable aleatoria. Por ello el modelo ha de considerar la construcción de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Aquí  $\Omega$  es un conjunto finito que describe al conjunto de resultados en una filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^N$ , que indica para cada índice  $j$  que hay un conjunto  $\mathcal{F}_j$  de formas o maneras de hacer preguntas acerca del



precio al tiempo  $j$  al observar como evoluciona en el período de interés es denotada por  $\mathcal{F}_j$ . Hay que notar que al inicio del proceso la información proporcionada o experiencia es ínfima. Esto se traduce en que las forma de hacer preguntas se reduce a  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ . Conforme va transcurriendo el tiempo se conoce mejor el proceso precio y por lo tanto:  $\mathcal{F}_j \supset \mathcal{F}_k$  para  $j > k$ .

En el presente análisis, consideramos un mercado que se compone de  $d + 1$  activos, cuyos precios al tiempo  $j$  son variables aleatorias no negativas  $S_j^0, S_j^1, \dots, S_j^d$  medibles con respecto a  $\mathcal{F}_j$ . El vector  $S_j = (S_j^0, S_j^1, \dots, S_j^d)$  se conoce como vector de precios al tiempo  $j$ . Aquí el superíndice 0 denota al precio de mercado (*Spot*) del activo que evoluciona sin riesgo y los superíndices  $j \geq 1$  indican a los precios que evolucionan bajo incertidumbre, es decir,  $S_j^0$  representa un activo sin riesgo y  $S_0^0 = 1$ . Ante la consideración de una tasa libre de riesgo  $r$  constante, entonces  $S_j^0 = S_0^0(1+r)^j = (1+r)^j$ . Como bien se puede ver, el coeficiente  $\beta_j = \frac{1}{S_j^0}$  es el llamado factor de descuento.

En resumen, los activos numerados desde 1 hasta  $d$  son llamados activos con riesgo y el activo numerado con 0 es sin riesgo.

### 2.1.2 Estrategias.

Una estrategia está definida como un proceso aleatorio  $\phi = \{(\phi_j^0, \phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$  con valores en  $\mathbb{R}^{d+1}$ , donde  $\phi_j^i$  denota la cantidad respectiva del activo  $i$  en el tiempo  $j$ .  $\phi$  que es predecible, i.e. para  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$  se tiene que.

$$\begin{cases} \phi_0^i & \text{es } \mathcal{F}_0\text{-medible,} \\ \text{y, para } j \geq 1 : \phi_j^i & \text{es } \mathcal{F}_{j-1}\text{-medible.} \end{cases}$$

Esta hipótesis dice que las posiciones en el portafolio al tiempo  $j$   $(\phi_j^0, \phi_j^1, \dots, \phi_j^d)$  son decididas con respecto a la información disponible al tiempo  $j - 1$  y se conserva constante hasta el tiempo  $j$ .

El valor del portafolio al tiempo  $j$  es el producto escalar

$$V_j(\phi) = \langle \phi_j, S_j \rangle = \sum_{i=0}^d \phi_j^i S_j^i.$$

y su valor descontado es

$$\tilde{V}_j(\phi) = \beta_j \langle \phi_j, S_j \rangle = \langle \phi_j, \tilde{S}_j \rangle,$$

donde  $\beta = \frac{1}{S_j^0}$  y  $\tilde{S}_j = (1, \beta_j S_j^1, \dots, \beta_j S_j^d)$  es el vector del valor presente de los precios.

Se dice que una estrategia es autofinanciable si la siguiente relación se cumple para toda  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ :

$$\langle \phi_j, S_j \rangle = \langle \phi_{j+1}, S_j \rangle.$$

Esta relación se interpreta de la siguiente manera: al tiempo  $j$  después de conocer  $S_j$ , el inversionista reajusta su portafolio pasando de la composición  $\phi_j$  a  $\phi_{j+1}$  sin que el inversionista aporte o retire fondos. Se conoce también como ajuste del inversionista al mercado.

**Observación 2.1.1** *La igualdad  $\langle \phi_j, S_j \rangle = \langle \phi_{j+1}, S_j \rangle$  es equivalente a*

$$\langle \phi_{j+1}, S_{j+1} \rangle - \langle \phi_j, S_j \rangle = \langle \phi_{j+1}, S_{j+1} - S_j \rangle,$$

o, en consecuencia, también

$$V_{j+1}(\phi) - V_j(\phi) = \langle \phi_{j+1}, S_{j+1} - S_j \rangle.$$

Por esta razón, al tiempo  $j+1$ , la diferencia  $\langle \phi_{j+1}, S_{j+1} \rangle - \langle \phi_{j+1}, S_j \rangle$  representa la ganancia neta por variación del valor del portafolio entre el tiempo  $j$  y  $j+1$ . Una estrategia autofinanciable es. Una estrategia para la que las variaciones del valor del portafolio provienen únicamente de los movimientos intrínsecos de los activos.

La siguiente proposición pone en claro ciertas observaciones en relación con el valor presente. En el ambiente anterior y con la misma notación e hipótesis se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.1** *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) *La estrategia  $\phi$  es autofinanciable.*

ii) *Para todo  $i \in 1, \dots, N$ , el valor del portafolio es incremental*

$$V_j(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^j \langle \phi_k, \Delta S_k \rangle$$

donde  $\Delta S_k$  es el vector  $S_k - S_{k-1}$ .

iii) *para todo  $j \in 1, \dots, N$ , el valor descontado del portafolio es*

$$\tilde{V}_j(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^j \langle \phi_k, \Delta \tilde{S}_k \rangle,$$

donde  $\Delta \tilde{S}_k$  es el vector incremental  $\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1} = \beta_k S_k - \beta_{k-1} S_{k-1}$ .

**Demostración:**

La equivalencia entre i) y ii) resulta de la observación 2.1.1. La equivalencia entre i) y iii) se obtiene del hecho que  $\langle \phi_j, S_j \rangle = \langle \phi_{j+1}, S_j \rangle$  si y sólo si  $\langle \phi_j, \tilde{S}_j \rangle = \langle \phi_{j+1}, \tilde{S}_j \rangle$  para cada  $j = 0, \dots, N$ .  $\square$

Esta proposición muestra que si un inversionista sigue una estrategia autofinanciable, entonces el valor presente de su portafolio queda determinado por la riqueza inicial y el proceso  $\{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$ , debido a que  $\Delta \tilde{S}_k^0 - \Delta \tilde{S}_{k-1}^0 = 0$ . De hecho, pueden ser obtenidas estrategias autofinanciables para cualquier valor inicial del portafolio, como lo muestra la siguiente:

**Proposición 2.1.2** *Para cualquier proceso predecible  $\{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$  y para cualquier variable  $V_0$  que es  $\mathcal{F}_0$ -medible, entonces existe un único proceso predecible  $\{\phi_j^0\}_{0 \leq j \leq N}$  tal que la estrategia  $\{\phi_j^0\}_{0 \leq j \leq N} = \{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$  es autofinanciable y el valor inicial de dicho portafolio es  $V_0$ .*

**Demostración:**

Sea  $\{\phi_j\}_{0 \leq j \leq N}$  una estrategia autofinanciable y el valor inicial del portafolio  $V_0$ , y por la proposición anterior se tiene que

$$\tilde{V}_j(\phi) = \phi_j^0 + \phi_j^1 \cdot \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \cdot \tilde{S}_j^d = V_0 + \sum_{k=1}^j (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d)$$

por lo que para  $j = 0$  obtenemos

$$\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi) = \phi_0^0 + \phi_0^1 \cdot S_0^1 + \dots + \phi_0^d \cdot S_0^d$$

De hecho,  $\phi_j^0$  queda determinado de manera única por:

$$\phi_j^0 = \begin{cases} V_0(\phi) - (\phi_0^1 \cdot S_0^1 + \dots + \phi_0^d \cdot S_0^d) & \text{para } j = 0 \text{ y} \\ V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{j-1} (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d) - (\phi_j^1 (\tilde{S}_{j-1}^1) + \dots + \phi_j^d (\tilde{S}_{j-1}^d)) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

con ello concluimos que  $\{\phi_j^0\}_{0 \leq j \leq N}$  es predecible, ya que,  $V_0$  es  $\mathcal{F}_0$ -medible y la estrategia  $\{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$  también es predecible, para  $i \in \{1, \dots, d\}$  y  $k \in \{0, \dots, j-1\}$ . Por todos los argumentos anteriores  $\tilde{S}_k^i$  es  $\mathcal{F}_k$ -medible.  $\square$

### 2.1.3 Estrategias admisibles y arbitraje.

Formalmente, consideraremos cuando se tienen valores negativos de  $(\phi_j^i)$ , por ello se adopta la siguiente convención:

Si  $\phi_j^0 < 0$ , significa que tomamos prestado en el mercado de activos sin riesgo la cantidad  $|\phi_j^0|$ , en otros términos

si  $\phi_j^i < 0$  para  $i \geq 1$ . Esto significa que se adquirió una deuda en activos con riesgo por ventas al descubierto, es decir, por ventas que hacemos sin tener posesión de los activos. Sin embargo las cobramos con el compromiso de entregarlas en el futuro. Entonces, los préstamos y las ventas al descubierto están permitidas, siempre y cuando el valor del portafolio sea positivo o nulo en todo instante para que el inversionista esté en condiciones de reembolsar sus préstamos.

**Definición 2.1.1** *Una estrategia  $\phi$  es admisible si es autofinancible y  $V_j(\phi) \geq 0$  para toda  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ .*

En finanzas la palabra arbitraje significa la oportunidad de hacer dinero sin arriesgarlo. En los mercados eficientes tales oportunidades no pueden existir por un intervalo significativo de tiempo, ya que antes de que ocurra los activos se mueven para eliminarlos. Para evitar en el modelo del mercado las oportunidades de arbitraje, se deberán excluir aquéllas estrategias tales que sin arriesgar dinero o bienes permiten obtener una ganancia. Con la siguiente definición quedan determinadas matemáticamente las estrategias que dan lugar al arbitraje.

**Definición 2.1.2** *Una estrategia de arbitraje es una estrategia admisible con valor inicial cero ( $V_0(\phi) = 0$ ) y con valor final distinto de cero ( $V_N(\phi) > 0$ ).*

Por lo que los modelos deberán excluir la oportunidad de arbitraje lo cual será el objetivo de la siguiente sección con la noción de martingalas.

## 2.2 Martingalas y arbitraje

En esta sección se tratará la relación entre martingalas y arbitraje, por ello para los lectores no familiarizados con tales conceptos se recomienda revisar el Apéndice A.2.

Hay que observar que la ausencia de oportunidad de arbitraje da lugar a operaciones comerciales justas. Esto también se entiende como la falta de fricción en el mercado.

### 2.2.1 Transformada de martingala.

En esta sección, consideraremos un espacio finito de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , con  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  y  $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ , equipada con una filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_j\}_{0 \leq j \leq N}$  está adaptada a la filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  si para toda  $j$ ,  $X_j$  es  $\mathcal{F}_j$ -medible.

**Definición 2.2.1** Una sucesión adaptada de variables aleatorias  $\{H_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es predecible si, para toda  $j \geq 1$ , entonces  $H_j$  es  $\mathcal{F}_{j-1}$ -medible.

**Proposición 2.2.1** Sea  $\{M_j\}_{0 \leq j \leq N}$  una martingala con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  y  $\{H_j\}_{0 \leq j \leq N}$  un proceso predecible con respecto a  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Si  $\Delta M_j = M_j - M_{j-1}$ , entonces el proceso  $\{X_j\}_{0 \leq j \leq N}$  definido por:

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0, \\ X_j &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_j \Delta M_j \quad \text{para } j \geq 1 \end{aligned}$$

es una martingala con respecto a  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$

A  $\{X_j\}$  se le llama "martingala transformada" de  $\{M_j\}$  por el proceso  $\{H_j\}$ .

**Demostración:**

Dado que  $\{X_j\}$  es un proceso adaptado a  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ , entonces para  $j \leq 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{j+1} - X_j | \mathcal{F}_j] &= \mathbb{E}[H_{j+1}(M_{j+1} - M_j) | \mathcal{F}_j] \\ &= H_{j+1} \mathbb{E}[M_{j+1} - M_j | \mathcal{F}_j] = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}[X_{j+1} | \mathcal{F}_j] = \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_j] = X_j$$

lo cual demuestra que  $\{X_j\}$  es una martingala.  $\square$

La siguiente proposición es útil para la caracterización de martingalas.

**Proposición 2.2.2** *Una sucesión adaptada de variables aleatorias reales  $\{M_j\}$  es una martingala si y sólo si para cualquier sucesión predecible  $\{H_j\}$ , tenemos*

$$\mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^N H_j \Delta M_j \right) = 0.$$

**Demostración:**

Si  $M_j$  es una martingala, y  $\{H_j\}$  es un proceso predecible arbitrario, entonces la sucesión  $\{X_j\}$  definida por  $X_0 = 0$  y, para  $j \geq 1$ ,  $X_j = \sum_{j=1}^N H_j \Delta M_j$  por la Proposición 2.2.1  $\{X_j\}$  es una martingala, y en consecuencia,

$$\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0) = 0.$$

Recíprocamente, si  $k \in \{1, \dots, N-1\}$ , para cualquier  $A \in \mathcal{F}_k$  es posible asociar la sucesión predecible  $\{H_j\}$  dada por

$$\begin{aligned} H_j &= 0 \text{ para } j \neq k+1 \\ \text{y } H_{k+1} &= \mathbf{1}_A \end{aligned}$$

Ésta junto con la hipótesis y puesto que

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(M_{k+1} - M_k) | \mathcal{F}_k] = 0$$

y como la igualdad vale para cualquier  $A \in \mathcal{F}_k$  se concluye que

$$\mathbb{E}(M_{k+1} | \mathcal{F}_k) = M_k. \quad \square$$

## 2.2.2 Mercados financieros viables

Nuevamente dentro del ambiente del modelo en tiempo discreto introducido en la primera sección, la siguiente definición identifica a los mercados donde no hay oportunidad de arbitraje.

**Definición 2.2.2** *El mercado es viable si no existen las oportunidad de arbitraje.*

**Teorema 2.2.1** *El mercado es viable si y sólo si existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$  equivalente<sup>1</sup> a  $\mathbb{P}$  bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas.*

**Demostración:**

Supongamos primero que existe una probabilidad  $\mathbb{P}^*$  equivalente a  $\mathbb{P}$  tal que los precios en valor presente de los activos son martingalas. Entonces, por la proposición 2.1.1, tenemos que para toda estrategia autofinanciable  $\{\phi_j\}_{0 \leq j \leq N}$  se cumple la siguiente igualdad:

$$\tilde{V}_j(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^j \langle \phi_k, \Delta \tilde{S}_k \rangle.$$

Por otra parte, por la Proposición 2.2.1 y el hecho que la suma de martingalas es martingala,  $\{\tilde{V}_j(\phi)\}$  es una martingala bajo  $\mathbb{P}^*$  y, en consecuencia, tenemos

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_0(\phi)).$$

Entonces, con una estrategia admisible con valor inicial nulo

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = 0$$

se puede decir que  $\tilde{V}_N(\phi) = 0$   $\mathbb{P}^*$  - c.s. pero  $\mathbb{P}^*(\omega) > 0$  para toda  $\omega \in \Omega$  por lo que  $\tilde{V}_N(\phi) = 0$ .

---

<sup>1</sup>Dos probabilidades  $\mathbb{P}^1$  y  $\mathbb{P}^2$  son equivalentes si y sólo si para todo evento  $A$ ,  $\mathbb{P}_1(A) = 0$  si y sólo si  $\mathbb{P}_2(A) = 0$ . En nuestro caso  $\mathbb{P}^*$  es equivalente a  $\mathbb{P}$  implica que para toda  $\omega \in \Omega$ , se verifica que  $\mathbb{P}^*(\omega) > 0$ .



Inversamente, defina a  $\Gamma$  como el conjunto convexo de las variables aleatorias estrictamente positivas distintas de la variable aleatoria idénticamente cero. Con este conjunto podemos decir que el mercado es viable si y sólo si para cualquier estrategia admisible  $\phi$ , se verifica que,  $\tilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma$ .

A cualquier proceso predecible  $\{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$ , le asociamos el proceso definido por:

$$\tilde{G}_j(\phi) = \sum_{k=1}^j (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d),$$

que es el valor presente de la ganancia obtenida por adoptar una estrategia autofinanciable  $\phi_j^1, \dots, \phi_j^d$  de acuerdo con la Proposición 2.1.2 existe un único proceso  $\{\phi_j^0\}$  tal que  $\{(\phi_j^0, \phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$  que es una estrategia autofinanciable con valor inicial cero. Por esta razón,  $\tilde{G}_j(\phi)$  es el valor presente de esta estrategia al tiempo  $j$  y, ya que el mercado es viable, esto implica que si  $\tilde{G}_j(\phi) \geq 0$  para toda  $j \in \{1, \dots, N\}$  se tenga  $\tilde{G}_N(\phi) = 0$  y, por tanto,  $\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$ . Cabe hacer notar que aún en el caso en el que la estrategia  $\phi$  no sea admisible se verifica la misma conclusión.  $\square$

**Lema 2.2.1** *Dado que el mercado es viable, cualquier proceso predecible  $\{(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)\}_{0 \leq n \leq N}$  satisface que:*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma.$$

### Demostración:

Supongamos que  $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$ . Primero cuando  $\tilde{G}_j \geq 0$  para toda  $j \in \{0, \dots, N\}$ , el mercado es no viable. Segundo, si  $\tilde{G}_j(\phi)$ , definimos  $j = \sup\{k | \mathbb{P}(\tilde{G}_k(\phi) < 0) > 0\}$ ,  $j \leq N - 1$ , y  $\mathbb{P}(\tilde{G}_j(\phi) < 0) > 0$  para  $m > j$  se tiene  $\tilde{G}_m(\phi) \geq 0$ . Entonces, podemos definir un nuevo proceso  $\{\psi_j\}_{0 \leq j \leq N}$  en  $\mathbb{R}^d$  como:

$$\psi_k(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq j \\ \mathbf{1}_A(\omega) \phi_k(\omega) & \text{si } k > j, \end{cases}$$

donde  $A$  es el evento  $\{\tilde{G}_j(\phi) < 0\}$ . Ya que  $\phi$  es predecible y  $A$  es  $\mathcal{F}_j$ -medible, entonces podemos concluir que  $\psi$  es predecible. Y además

$$\tilde{G}_k(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq j, \\ \mathbf{1}_A(\tilde{G}_k(\phi) - \tilde{G}_j(\phi)) & \text{si } k > j. \end{cases}$$

Por consiguiente,  $\tilde{G}_k(\psi) > 0$  para toda  $k \in \{0, \dots, N\}$  y  $\tilde{G}_N(\psi) > 0$  sobre  $A$ . Que contradice la hipótesis de viabilidad del mercado, y así queda demostrado el lema.  $\square$

**Proposición 2.2.3** *Las variables aleatorias de la forma  $\tilde{G}_N(\phi)$ , con una estrategia predecible  $\phi$  en  $\mathbb{R}^d$  forman un subespacio vectorial del espacio  $\text{span}(\Omega)$  de todas las variables aleatorias reales definidas sobre  $\Omega$ .*

**Demostración:**

Para un par de procesos predecibles  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en  $\mathbb{R}^d$  y otro par de números reales  $a$  y  $b$  se tiene

$$\begin{aligned} a\tilde{G}_N(\phi_1) + b\tilde{G}_N(\phi_2) &= a \sum_{k=1}^N (\phi_{1,k}^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_{1,k}^d \Delta \tilde{S}_k^d) + b \sum_{k=1}^N (\phi_{2,k}^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_{2,k}^d \Delta \tilde{S}_k^d) \\ &= \sum_{k=1}^N (a\phi_{1,k}^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + a\phi_{1,k}^d \Delta \tilde{S}_k^d) + \sum_{k=1}^N (b\phi_{2,k}^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + b\phi_{2,k}^d \Delta \tilde{S}_k^d) \\ &= \sum_{k=1}^N (a\phi_{1,k}^1 + b\phi_{2,k}^1) \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + (a\phi_{1,k}^d + b\phi_{2,k}^d) \Delta \tilde{S}_k^d \\ &= \tilde{G}_N(a\phi_1 + b\phi_2), \end{aligned}$$

$a\phi_1 + b\phi_2$  es predecible. Por tanto,  $\tilde{G}_N(\phi)$  forma un subespacio vectorial del espacio  $\Omega$ .  $\square$

Sea  $\mathcal{V}$  el subespacio vectorial de las variables aleatorias de la forma  $\tilde{G}_N(\phi)$ , con el proceso predecible  $\phi$  en  $\mathbb{R}^d$ , de acuerdo al Lema 2.2.1 el subespacio  $\mathcal{V}$  no se intersecta con  $\Gamma$ . Y, por lo tanto, con ningún subconjunto de él. es decir, no se intersecta con  $K = \{X \in \Gamma \mid \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}$ . De hecho, como consecuencia del Teorema de Separación de conjuntos convexos (ver Lamberton, B [La-La], [Si]). existe una sucesión  $(\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$  con las siguientes características:

1.  $\forall X \in K$ , se tiene  $\sum_{\omega} \lambda(\omega)X(\omega) > 0$ .

2. para cualquier  $\phi$  predecible

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0.$$

De la Propiedad 1 se deduce que  $\lambda(\omega) > 0$  para toda  $\omega \in \Omega$ , tal que la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$  definida por:

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$

es equivalente a  $\mathbb{P}$  ya que  $\mathbb{P}^*(\omega) > 0$  para toda  $\omega \in \Omega$ . Mas aún, si denotamos por  $\mathbb{E}^*$  a la esperanza respecto a la probabilidad  $\mathbb{P}^*$ , entonces la Propiedad 2 nos dice que para cualquier proceso predecible  $(\phi_j)$  en  $\mathbb{R}^d$  se verifica

$$\mathbb{E}^* \left( \sum_{k=1}^N \phi_k \Delta \tilde{S}_k \right) = 0$$

para toda  $i \in \{1, \dots, d\}$  y cualquier sucesión predecible  $(\phi_j^i)$  en  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{E}^* \left( \sum_{k=1}^N \phi_k^i \Delta \tilde{S}_k^i \right) = 0.$$

Así que de acuerdo con la Proposición 2.2.3, concluimos que bajo  $\mathbb{P}^*$  los precios a valor presente de los activos  $\{\tilde{S}_j^1\}, \dots, \{\tilde{S}_j^d\}$  son martingalas.

## 2.3 Mercados completos y precios de opciones.

### 2.3.1 Mercados completos.

Definiremos una opción europea con fecha de vencimiento  $N$  como una variable aleatoria  $h \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_N$ -medible, que representa la ganancia que permite el ejercicio de la opción. De este modo, para una opción de compra (*call*) sobre una unidad del activo 1 cuyo precio

al vencimiento es  $S_N^1$  y con precio de ejercicio  $K$ ,  $h = (S_N^1 - K)_+$ . Una opción de venta (*put*) sobre el mismo activo y precio de ejercicio  $K$  será definida por  $h = (K - S_N^1)_+$ . Estos dos ejemplos, que son en realidad los más importantes en la práctica,  $h$  es sólo función de  $S_N$ . Sin embargo, hay otros que dependen no sólo de  $S_N$  sino de toda la trayectoria descrita del activo subyacente, es decir,  $h$  es función de  $S_0, S_1, \dots, S_N$ . Este es el caso de las llamadas opciones asiáticas donde el precio de ejercicio es igual al promedio del precio de la acción que ha sido observado durante un cierto período de tiempo antes del vencimiento.

**Definición 2.3.1** *La reclamación contingente definida por  $h$  es alcanzable si hay una estrategia admisible, tal que el valor del portafolio al tiempo  $N$  sea igual a  $h$*

**Observación 2.3.1** *En un mercado financiero viable, es suficiente encontrar una estrategia autofinanciable con valor de portafolio  $h$  a la fecha de término  $N$  para decir que  $h$  es alcanzable. Ciertamente, si  $\phi$  es una estrategia autofinanciable y  $\mathbb{P}^*$  una medida de probabilidad equivalente a  $\mathbb{P}$  bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas, entonces  $\{\tilde{V}_j(\phi)\}$  también es una  $\mathbb{P}^*$ -martingala, dado que es una transformada de martingalas. Por todo ello, para  $j \in \{0, \dots, N\}$  concluimos que  $\tilde{V}_j(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_j)$ . En particular cuando  $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$  (si  $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{h}$ ), entonces la estrategia  $\phi$  es admisible.*

**Definición 2.3.2** *El mercado es completo si toda reclamación contingente es alcanzable.*

La suposición que un mercado financiero es completo es una suposición restrictiva que no tiene una clara justificación económica pues induce a la suposición de que no hay oportunidades de arbitraje. El interés fundamental en los mercados completos radica en que éstos permiten el uso de una teoría simple que se derivada del precio de las reclamaciones contingentes y coberturas. En otras palabras, permite valorar y hacer la cobertura de las opciones. Por un lado, valorar para conocer el precio justo o prima del contrato y hacer la cobertura para que el vendedor de la opción, con la prima que recibe, pueda construir un portafolio y producir al vencimiento del contrato la riqueza necesaria para garantizar el ejercicio de la opción sin ningún riesgo. El siguiente teorema caracteriza de forma precisa los mercados financieros viables completos.

### Teorema 2.3.1

Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}^*$  equivalente a  $\mathbb{P}$  bajo la que el precio en valor presente de los activos son martingalas.

La probabilidad  $\mathbb{P}^*$  se utilizará de aquí en adelante en los cálculos de precios y coberturas.

#### Demostración:

(a) Suponiendo que el mercado es viable y completo. Entonces, cualquier variable aleatoria  $h$  no negativa, y que es  $\mathcal{F}_N$ -medible puede ser escrita como  $h = V_N(\phi)$ , donde  $\phi$  es una estrategia admisible que replica la reclamación contingente  $h$ , dado que  $\phi$  es autofinanciable. Por ello se tiene que

$$\frac{h}{S_N^0} = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{k=1}^N \phi_k \cdot \Delta \tilde{S}_k.$$

Entonces, si  $\mathbb{P}_1$  y  $\mathbb{P}_2$  son dos medidas de probabilidad bajo las cuales el precio en valor presente son martingalas, entonces  $\{\tilde{V}_N(\phi)\}_{0 \leq j \leq N}$  es una martingala bajo ambas  $\mathbb{P}_1$  y  $\mathbb{P}_2$ . Se tiene que, para  $i = 1$  ó  $i = 2$

$$\mathbb{E}_i(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}_i(\tilde{V}_0(\phi)) = V_0(\phi),$$

la última igualdad viene dada por el hecho que  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Por tanto, también

$$\mathbb{E}_1\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = \mathbb{E}_2\left(\frac{h}{S_N^0}\right).$$

Dado que  $h$  es arbitraria<sup>2</sup> y en general, la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_N$  es equivalente a  $\mathcal{F}$ , entonces,  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ , lo que prueba la unicidad.

<sup>2</sup>Si  $\mathbb{P}_1$  y  $\mathbb{P}_2$  son dos medidas de probabilidad en  $(\Omega, \mathcal{F})$ , tales que  $\int h d\mathbb{P}_1 = \int h d\mathbb{P}_2$  para toda función  $h$  que sea  $\mathcal{F}_N$ -medible, entonces para toda  $A \in \mathcal{F}$  se cumple que  $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$

(b) Supongamos que el mercado es viable e incompleto. Por lo tanto, existe una variable aleatoria  $h \geq 0$  que no es alcanzable. Definamos a  $\tilde{\mathcal{V}}$  como el conjunto de las variables aleatorias de la forma

$$U_0 + \sum_{j=1}^N \phi_j \Delta \tilde{S}_j,$$

donde  $U_0$  es  $\mathcal{F}_0$ -medible y  $\{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$  es un proceso predecible con valores en  $\mathbb{R}^d$ . Como resultado de la Proposición 2.1.2 y la Observación 2.3.1 la variable aleatoria  $\frac{h}{S_N^0}$  no pertenece a  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Entonces  $\tilde{\mathcal{V}}$  es un subconjunto propio del conjunto de todas las variables aleatorias definidas sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ . En conclusión si  $\mathbb{P}^*$  es una probabilidad equivalente a  $\mathbb{P}$  bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas, y bajo el supuesto de que poseen su segundo momento se define el siguiente producto escalar  $\langle X, Y \rangle \mapsto \mathbb{E}^*(XY)$  sobre el conjunto de variables aleatorias (definidas en  $(\Omega, \mathcal{F})$ ). Nótese que existe una variable aleatoria  $X$  no nula ortogonal a  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Además escribamos

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbb{P}^*(\{\omega\})$$

con  $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$ . Dado  $\mathbb{E}^*(X) = 0$ , queda definida una nueva medida de probabilidad equivalente a  $\mathbb{P}$  y diferente de  $\mathbb{P}^*$ . En otras palabras, tenemos que

$$\mathbb{E}^{**} \left( \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j \right) = 0.$$

para cualquier proceso predecible  $\{(\phi_j^1, \dots, \phi_j^d)\}_{0 \leq j \leq N}$ . Finalmente mediante el uso de la Proposición 2.2.2 concluimos que  $\{\tilde{S}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es una  $\mathbb{P}^{**}$ -martingala, lo que contradice la unicidad.  $\square$

### 2.3.2 Valoración y cobertura de las reclamaciones contingentes bajo un mercado completo

Por un lado, supongamos que el mercado es viable y completo, y denotemos a una reclamación contingente a través de la variable aleatoria  $h \geq 0$  que es  $\mathcal{F}_N$ -medible, por otro, si  $\phi$  denota a una estrategia admisible no negativa que replica a  $h$ , es decir, tal que  $V_N(\phi) = h$ . Entonces el proceso  $\{\tilde{V}_j(\phi)\}_{0 \leq j \leq N}$  es una transformada de la martingala

$\{\tilde{S}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  bajo  $\mathbb{P}^*$  y por consiguiente  $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi))$ , lo que implica que  $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0}\right]$ .

De manera más general tenemos

$$\tilde{V}_j(\phi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_j\right] \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N,$$

por lo tanto

$$V_j(\phi) = S_j^0 \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_j\right] \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N,$$

Con este resultado queda claro que bajo la hipótesis que el mercado es viable y completo, el valor en cualquier momento del portafolio para toda estrategia admisible que replica a  $h$  está completamente determinado por  $h$ . Naturalmente  $V_j(\phi)$  es el valor de la opción, pues representa la riqueza al tiempo  $j$  que permite, siguiendo la estrategia  $\phi$  a partir del instante  $j$ , para producir exactamente la riqueza  $h$  al instante  $N$ . A la variable aleatoria  $h$  se le conoce como el flujo de efectivo que garantiza la opción europea al tiempo de su vencimiento. Es decir, por una parte se está haciendo la valoración de la opción, o equivalentemente, asignamos, el precio justo del contrato. Por la otra parte, el vendedor de la opción cubre sus riesgos y garantiza, con una inversión inicial igual a la prima que recibe.

### 2.3.3 Introducción a opciones americanas

Dado que una opción americana se puede ejercer en cualquier tiempo entre 0 y  $N$ , definimos a  $Z_j$  como el beneficio o ganancia por ejercer la opción al tiempo  $j$ , donde  $\{Z_j\}$  es un proceso adaptado a  $\{\mathcal{F}_j\}$ . En el caso de tener una opción americana sobre el activo con riesgo  $S^1$  y precio de ejercicio  $K$ , el beneficio obtenido para una opción de compra (*call*) es  $Z_j = (S_j^1 - K)_+$  y para una opción de venta (*put*) es  $Z_j = (K - S_j^1)_+$ . Con el propósito de definir el precio de una opción asociado al proceso  $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$ , es conveniente pensar en términos de inducciones inversas o inducción hacia atrás empezando al tiempo  $N$ . En efecto el valor de la opción al termino es igual a  $U_N = Z_N$ . Lo que da lugar a la

siguiente pregunta ¿a que precio se tendrá que vender la opción en el tiempo  $N - 1$ ? Para resolver esta pregunta pensemos que, el poseedor de la opción ejerce su derecho, por lo que obtendrá una ganancia de  $Z_{N-1}$ , o quizás el ejerce su derecho al tiempo  $N$  y en este caso el vendedor de la opción tendrá que estar listo para pagar el monto  $Z_N$ . Por lo que, al tiempo  $N - 1$  el vendedor, deberá tener el máximo entre  $Z_{N-1}$  y el monto necesario al tiempo  $N - 1$  para generar el beneficio  $Z_N$  al tiempo  $N$ . En otras palabras, el poseedor desea obtener el máximo entre  $Z_{N-1}$  y el valor presente al tiempo  $N - 1$  de una estrategia admisible con un pago de  $Z_N$  al tiempo  $N$ , i.e.  $S_{N-1}^0 \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1})$ , con  $\tilde{Z}_N = Z_N / S_N^0$ , por lo que el precio de la opción al tiempo  $N - 1$  es:

$$U_{N-1} = \max \left( Z_{N-1}, S_{N-1}^0 \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1}) \right).$$

mediante un argumento de inducción definimos el precio de la opción americana para  $j = 1, \dots, N$  por

$$U_{j-1} = \max \left( Z_{j-1}, S_{j-1}^0 \mathbb{E}^* \left( \frac{U_j}{S_j^0} | \mathcal{F}_{j-1} \right) \right).$$

En donde, al suponer que la tasa de interés a un periodo es constante e igual a  $r$  obtenemos, una vez transcurrido el tiempo, a

$$S_j^0 = (1 + r)^j$$

y con ello

$$U_{j-1} = \max \left( Z_{j-1}, \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}^*(U_j | \mathcal{F}_{j-1}) \right).$$

al tomar  $\tilde{U}_j = U_j / S_j^0$  deducimos el precio en valor presente de la opción americana.

**Proposición 2.3.1** *La sucesión  $\{\tilde{U}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es una  $\mathbb{IP}^*$ -supermartingala. Y ésta es la menor  $\mathbb{IP}^*$ -supermartingala que domina a la sucesión  $\{\tilde{Z}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ .*

Se debe notar que, como caso opuesto a las opciones europeas, el valor presente del precio de las opciones americanas generalmente no es una martingala bajo  $\mathbb{IP}^*$ .



### Demostración

Apartir de la igualdad

$$\tilde{U}_{j-1} = \max\left(\tilde{Z}_{j-1}, \mathbb{E}^*(\tilde{U}_j|\mathcal{F}_{j-1})\right).$$

se sigue que  $\{\tilde{U}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es una supermartingala que domina a  $\{\tilde{Z}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Consideremos otra supermartingala  $\{\tilde{T}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  que también domine a  $\{\tilde{Z}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Con lo que  $\tilde{T}_N \geq \tilde{U}_N = \tilde{Z}_N$  y si  $\tilde{T}_j \geq \tilde{U}_j$  entonces,

$$\tilde{T}_{j-1} \geq \mathbb{E}^*(\tilde{T}_j|\mathcal{F}_{j-1}) \geq \mathbb{E}^*(\tilde{U}_j|\mathcal{F}_{j-1})$$

de donde

$$\tilde{T}_{j-1} \geq \max\left(\tilde{Z}_{j-1}, \mathbb{E}^*(\tilde{U}_j|\mathcal{F}_{j-1})\right) = \tilde{U}_{j-1}.$$

Mediante un argumento inductivo en retroceso comenzando en  $N$  concluye la demostración de esta proposición.  $\square$

## 2.4 Problemas de parada óptima y opciones americanas

El propósito de esta parte del documento es abordar el precio y la cobertura de las opciones americanas y establecer la conexión con el problema de parada óptima. Para ello se requiere de la noción de tiempo de parada óptima, y definiremos también el proceso dominante conocido como la cubierta de Snell, un concepto fundamental usado para resolver el problema de parada óptima.

### 2.4.1 Tiempos de parada

Se sabe que el comprador de una opción americana puede ejercer su derecho en cualquier tiempo desde el momento en que la adquiere y hasta el término del contrato.

La decisión de ejercer o no la opción al tiempo  $j$  será tomada de acuerdo a la información disponible al tiempo  $j - 1$ . En un modelo de tiempo discreto, la construcción se realizará en  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}, \mathbb{P})$ , un espacio de probabilidad filtrado, finito, y la fecha de ejercicio estará descrita por una variable aleatoria llamada tiempo de parada.

**Definición 2.4.1** *Una variable aleatoria  $v$  que toma valores en  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$  es un tiempo de parada si, para cualquier  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ , se tiene*

$$\{v = j\} \in \mathcal{F}_j.$$

**Observación 2.4.1** *Como en secciones anteriores, suponemos que  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  y  $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0, \forall \omega \in \Omega$ . Sin embargo esta hipótesis no es necesaria, si no se cuenta con ella el resultado presentado es verdadero también casi seguramente (c.s.). De hecho, sólo supondremos que  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  y  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$  en la Sección 2.4.5*

**Observación 2.4.2** *El lector puede verificar que  $v$  es tiempo de parada, sí y sólo si, para cualquier  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ .*

$$\{v \leq j\} \in \mathcal{F}_j.$$

$$\text{ya que } \{v \leq j\} = \bigcup_{k=0}^{k=j} \{v = k\}.$$

*Una definición equivalente se usa para generalizar el concepto de tiempo de parada en escenarios de tiempos continuos.*

Se introducirá ahora el concepto de “sucesión de tiempos de parada”. Considere a  $\{X_j\}_{0 \leq j \leq N}$  una sucesión adaptada a la filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$  y sea  $v$  un tiempo de parada. La sucesión que aproxima al tiempo de parada  $v$  esta definida como

$$X_j^v(\omega) = X_{v(\omega) \wedge j}(\omega),$$

esto es, sobre el conjunto  $\{v = k\}$  tenemos

$$X_j^v = \begin{cases} X_k & \text{si } k \leq j, \\ X_j & \text{si } k > j. \end{cases}$$

note que  $X_N^v(\omega) = X_{v(\omega)}(\omega)$  (e igual a  $X_k$  en  $\{v = k\}$ ).

**Proposición 2.4.1** *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión adaptada y  $v$  un tiempo de parada. entonces la sucesión de parada  $\{X_j^v\}_{0 \leq j \leq N}$  es adaptada y aún más, si  $\{X_j\}$  es una martingala (respectivamente una supermartingala), entonces  $\{X_j^v\}$  es una martingala (respectivamente una supermartingala).*

### Demostración

Por una parte, sabemos que para  $j \geq 1$ , la sucesión de parada se escribe como

$$X_j^v = X_0 + \sum_{k=1}^j \phi_k (X_k - X_{k-1}),$$

donde  $\phi_k = \mathbf{1}_{\{k \leq v\}}$ . Y dado que  $\{k \leq v\}$  es el complemento del conjunto  $\{v < k\} = \{v \leq k - 1\}$ , entonces el proceso  $\{\phi_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es predecible.

Por esta razón concluimos que  $\{X_{v \wedge j}\}_{0 \leq j \leq N}$  está adaptada a la filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Además, si  $\{X_j\}$  es una martingala, entonces  $\{X_{v \wedge j}\}$  es también una martingala con respecto a  $\{\mathcal{F}_j\}$ , dado que  $\{X_{v \wedge n}\}$  es la transformada de una martingala  $\{X_j\}$ .  $\square$

Similarmente, se puede demostrar que si la sucesión  $\{X_j\}$  es una supermartingala (o respectivamente una submartingala), la sucesión de parada es una supermartingala (o respectivamente una submartingala) usando el hecho de que  $\{\phi_k\}_{0 \leq k \leq N}$  es predecible y no negativa.  $\square$

## 2.4.2 El proceso dominante (o la envoltura de Snell)

En esta sección consideramos una sucesión adaptada  $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$ , y definiremos la sucesión  $\{U_j\}_{0 \leq j \leq N}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N, y, \\ U_j &= \max(Z_j, \mathbb{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j)) \quad \forall j \leq N - 1. \end{aligned}$$

Como vemos el estudio de esta sucesión permite un primer acercamiento a las opciones americanas descritas en secciones anteriores. Ya sabemos por la Proposición 2.3.1, que

$\{U_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es la supermartingala más pequeña que domina a la sucesión  $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Ahora llamaremos a  $U_j$  el proceso dominante (la envoltura de Snell) de la sucesión  $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$ .

Por definición,  $U_j$  es mayor que  $Z_j$  (por lo tanto, la igualdad para  $j = N$  es válida) y en el caso de una desigualdad estricta,  $U_j = \mathbb{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j)$ , que sugiere que es posible obtener una martingala de la sucesión  $\{U_j\}$  para un adecuado tiempo de parada, como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.2** *La variable aleatoria definida por*

$$v_0 = \inf \{j \geq 0 | U_j = Z_j\}$$

*es un tiempo de parada y la sucesión de parada  $\{U_{j \wedge v_0}\}_{0 \leq j \leq N}$  es una martingala.*

**Demostración:**

Dado que  $U_N = Z_N$ , entonces  $v_0$  está bien definido en  $\{0, 1, \dots, N\}$  y por ello

$$\{v_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} = \Omega \in \mathcal{F}_0.$$

Por otro lado, para  $k \geq 1$  tenemos que

$$\{v_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \dots \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k.$$

En fin, para demostrar que  $\{U_j^{v_0}\}$  es una martingala, hay que escribir a  $\{U_j^{v_0}\}$  como

$$U_j^{v_0} = U_{j \wedge v_0} = U_0 + \sum_{k=1}^j \phi_k \Delta U_k,$$

donde  $\phi_k = 1_{\{v_0 \geq k\}}$ . Para  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , debe de ser aditiva, i.e.

$$\begin{aligned} U_{j+1}^{v_0} - U_j^{v_0} &= \phi_{j+1}(U_{j+1} - U_j) \\ &= 1_{\{j+1 \leq v_0\}}(U_{j+1} - U_j). \end{aligned}$$

Por definición, se tiene que  $U_j = \max(Z_j, \mathbb{E}(U_{j+1}|\mathcal{F}_j))$  sobre el conjunto  $\{j+1 \leq v_0\}$ .  $U_j > Z_j$ . En consecuencia  $U_j = \mathbb{E}(U_{j+1}|\mathcal{F}_j)$  y se deduce que

$$U_{j+1}^{v_0} - U_j^{v_0} = \mathbf{1}_{\{j+1 \leq v_0\}}(U_{j+1} - \mathbb{E}(U_{j+1}|\mathcal{F}_j)).$$

Y puesto que estamos interesados en comportamientos promedio consideramos a su esperanza condicional obteniendo

$$\mathbb{E}((U_{j+1}^{v_0} - U_j^{v_0})|\mathcal{F}_j) = \mathbf{1}_{\{j+1 \leq v_0\}}\mathbb{E}((U_{j+1} - \mathbb{E}(U_{j+1}|\mathcal{F}_j))|\mathcal{F}_j)$$

puesto que  $\{j+1 \leq v_0\} \in \mathcal{F}_j$  (donde el complemento de  $\{j+1 \leq v_0\} \in \mathcal{F}_j$  es  $\{v_0 \leq j\}$ ).

De ahí se infiere también que

$$\mathbb{E}((U_{j+1}^{v_0} - U_j^{v_0})|\mathcal{F}_j) = 0,$$

lo que prueba que  $U^{v_0}$  es una martingala.

En lo que sigue denotaremos a  $\tau_{j,N}$  como el conjunto de tiempos de parada que toman valores en  $\{j, j+1, \dots, N\}$ . Note que  $\tau_{j,N}$  es un conjunto finito dado que el conjunto  $\Omega$  es por hipótesis finito. Las propiedades de martingala de la sucesión  $U^{v_0}$  proporcionan los siguientes resultados que relacionan el concepto de cubierta de Snell a el problema de parada óptima.

**Corolario 2.4.1** *Sea  $v_0$  el tiempo de parada definido según los argumentos anteriores. Entonces el tiempo de parada  $v_0$  satisface*

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_{v_0}|\mathcal{F}_0) = \sup_{v \in \tau_{0,N}} \mathbb{E}(Z_v|\mathcal{F}_0).$$

*Para fijar ideas, pensemos a  $Z_j$  como el total de triunfos de un jugador después de  $j$  juegos, entonces el tiempo de parada  $v_0$  maximiza la ganancia esperada conociendo únicamente a  $\mathcal{F}_0$ .*

**Demostración**

Dado que  $U^{v_0}$  es una martingala, tenemos que

$$U_0 = U_0^{v_0} = \mathbb{E}(U_N^{v_0} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_{v_0} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(Z_{v_0} | \mathcal{F}_0).$$

Por otra parte, si  $v \in \tau_{0,N}$ , entonces la  $U^v$  sucesión de parada es una supermartingala tal que

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbb{E}(U_N^v | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_v | \mathcal{F}_0) \\ &\geq \mathbb{E}(Z_v | \mathcal{F}_0), \end{aligned}$$

de lo cual se desprende el resultado.  $\square$

**Observación 2.4.3** *Una generalización inmediata del corolario anterior es la siguiente*

$$U_j = \sup_{v \in \tau_{j,N}} \mathbb{E}(Z_v | \mathcal{F}_j) = \mathbb{E}(Z_{v_j} | \mathcal{F}_j),$$

donde  $v_j = \inf\{k \geq j | U_k = Z_k\}$ .

**Definición 2.4.2** *Un tiempo de parada  $v$  es óptimo para la sucesión  $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$  si*

$$\mathbb{E}(Z_v | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau_{0,N}} \mathbb{E}(Z_v | \mathcal{F}_0).$$

Es fácil ver que el tiempo de parada  $v_0$  es óptimo.

El siguiente teorema resulta dar una caracterización para los tiempos de parada óptimos que demuestra que  $v_0$  es el menor tiempo de parada óptimo.

**Teorema 2.4.1** *Un tiempo de parada es óptimo si y sólo si*

$$\begin{aligned} Z_v &= U_v \quad \text{y} \\ \{U_{v \wedge j}\}_{0 \leq j \leq N} &\text{ es una martingala.} \end{aligned}$$

### Demostración

Si la sucesión de parada  $U^v$  es una martingala, entonces  $U_0 = \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0)$  y la hipótesis que  $Z_v = U_v$ . nos deduce a concluir que,  $U_0 = \mathbb{E}(Z_v|\mathcal{F}_0)$ . Por otro lado, la optimalidad de  $v$  queda garantizada por el corolario anterior.

Inversamente si  $v$  es óptimo, entonces se tiene que

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_v|\mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0).$$

Por otra parte, como  $U^v$  es una supermartingala, se sabe que

$$\mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0) \leq U_0.$$

En conclusión, obtenemos que

$$\mathbb{E}(Z_v|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0).$$

pero puesto que  $U_v \geq Z_v$ , entonces  $U_v = Z_v$ .

$\mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0) = U_0$  que junto con el hecho que  $\{U^v\}$  es una supermartingala nos permite obtener las siguientes desigualdades

$$U_0 \geq \mathbb{E}(U_{v \wedge j}|\mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0).$$

Por consiguiente, también

$$\mathbb{E}(U_{v \wedge j}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_j)|\mathcal{F}_0).$$

Finalmente, dado que tenemos  $U_{v \wedge j} \geq \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_j)$ , entonces  $U_{v \wedge j} = \mathbb{E}(U_v|\mathcal{F}_j)$

Los argumentos anteriores demuestran que  $\{U_j^v\}$  es una martingala .  $\square$

### 2.4.3 Descomposición de martingalas.

La siguiente descomposición, comúnmente conocida como descomposición de Doob, se usará en un modelo de mercado financiero viable y completo. La ventaja principal de su uso es que esta descomposición permite asociar a cualquier supermartingala una estrategia comercial para la que el consumo está permitido.

**Proposición 2.4.3** *Sea  $\{U_j\}_{0 \leq j \leq N}$  una supermartingala y  $N$  un entero positivo constante. Entonces,  $\{U_j\}_{0 \leq j \leq N}$  posee una única descomposición en una martingala y un proceso predecible. En otras palabras, para  $j = 1, \dots, N$*

$$U_j = M_j - A_j$$

donde  $\{M_j\}$  es una martingala y  $\{A_j\}$  es un proceso predecible no decreciente cuyo valor inicial es 0.

#### Demostración

Por un lado, la única solución para  $j = 0$  es  $M_0 = U_0$  y  $A_0 = 0$ . Para los otros casos podemos hacer

$$U_{j+1} - U_j = M_{j+1} - M_j - (A_{j+1} - A_j).$$

De tal manera que, ambos lados de la igualdad anterior puedan ser condicionados con  $\mathcal{F}_j$ . De hecho, por las propiedades de los procesos predecibles y martingalas se tiene que

$$-(A_{j+1} - A_j) = \mathbb{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j) - U_j$$

y también

$$M_{j+1} - M_j = U_{j+1} - \mathbb{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j).$$



La martingala  $\{M_j\}$  y  $\{A_j\}$  un proceso predecible no creciente quedan completamente determinados y permiten la descomposición de la supermartingala  $\{U_j\}$ .

Si  $\{U_j\}$  denota a la cubierta de Snell de una sucesión adaptada  $\{Z_j\}$ . Entonces una caracterización del mayor tiempo de parada óptima para  $\{Z_j\}$  usando el proceso no decreciente  $\{A_j\}$  de la descomposición de Doob de  $\{U_j\}$ .

**Proposición 2.4.4** *El mayor tiempo de parada óptima para  $\{Z_j\}$  está dado por*

$$v_{max} = \begin{cases} N & \text{si } A_N = 0, \\ \inf\{j | A_{j+1} \neq 0\} & \text{si } A_N \neq 0. \end{cases}$$

**Demostración:**

$v_{max}$  es un tiempo de parada, ya que  $\{A_j\}_{0 \leq j \leq N}$  es un proceso predecible, entonces la descomposición  $U_j = M_j - A_j$  junto con el hecho que  $A_j = 0$ , para  $j \leq v_{max}$ , se obtiene que  $U^{v_{max}} = M^{v_{max}}$  y, por consiguiente,  $U^{v_{max}}$  es una martingala. Por otra parte, para demostrar la optimalidad de  $v_{max}$ , basta con probar que

$$U_{v_{max}} = Z_{v_{max}}.$$

Observe que  $U_{v_{max}}$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} U_{v_{max}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{v_{max}=k\}} U_k + \mathbf{1}_{\{v_{max}=N\}} U_N \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{v_{max}=k\}} \max(Z_k, \mathbb{E}(U_{k+1} | \mathcal{F}_k)) + \mathbf{1}_{\{v_{max}=N\}} Z_N. \end{aligned}$$

La descomposición induce a  $\mathbb{E}(U_{k+1} | \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1}$  sobre el conjunto  $\{v_{max} = k\}$  en donde  $A_k = 0$  y  $A_{k+1} > 0$ , así que  $U_k = M_k$  y  $\mathbb{E}(U_{k+1} | \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1} < U_k$ . Por lo tanto, la igualdad  $U_k = \max(Z_k, \mathbb{E}(U_{k+1} | \mathcal{F}_k)) = Z_k$  es válida.

$$U_{v_{max}} = Z_{v_{max}}$$

Esto demuestra que  $v_{max}$  es el mayor tiempo de parada óptima. Finalmente si  $v$  es un tiempo de parada tal que  $v \geq v_{max}$  y  $\mathbb{P}(v > v_{max}) > 0$ , entonces

$$\mathbb{E}(U_v) = \mathbb{E}(M_v) - \mathbb{E}(A_v) = \mathbb{E}(U_0) - \mathbb{E}(A_v) < \mathbb{E}(U_0)$$

y  $U^v$  no podría ser una martingala, esto contradice las afirmaciones anteriores.  $\square$

#### 2.4.4 Envoltura de Snell y cadenas de Markov

El objetivo de esta sección es el cálculo de envoltura de Snell en un escenario Markoviano. Sea  $\{X_j\}_{j \geq 0}$  una sucesión de variables aleatorias que toman sus valores en  $E$  un conjunto finito. Diremos que es una cadena de Markov si, para cualquier entero  $j \geq 1$  y cualquiera de los elementos  $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, y$  de  $E$ , se verifica

$$\mathbb{P}(X_{j+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{j-1} = x_{j-1}, X_j = x_j) = \mathbb{P}(X_{j+1} = y | X_j = x_j).$$

Por una parte, dice que una cadena es homogénea si el valor  $P(x, y) = \mathbb{P}(X_{j+1} = y | X_j = x)$  no depende de  $j$ . Por otra, a la matriz  $P = (P(x, y))_{(x, y) \in E \times E}$ , cuyos elementos pertenecen a  $E \times E$ , se le conoce como la matriz estocástica de transición de la cadena. Esta cumple las siguientes condiciones:

1.  $\mathbb{P}(x, y) \in [0, 1]$  para toda  $(x, y) \in E \times E$ ,
2.  $\sum_{y \in E} P(x, y) = 1$  para toda  $x \in E$

Esta cadena está definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}, \mathbb{P})$  filtrado con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ .

**Definición 2.4.3** Una sucesión  $\{X_j\}_{0 \leq j \leq N}$  de variables aleatorias que toma sus valores en  $E$  es una cadena de Markov homogénea con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ , con

matriz de transición  $P$ , si  $\{X_j\}$  es un proceso adaptado, y para cualquier función real  $f$  definida sobre  $E$ , se tiene que

$$\mathbb{E}(f(X_{j+1})|\mathcal{F}_j) = Pf(X_j).$$

Donde,  $Pf$  es la función que asigna a cada valor  $x \in E$  el valor real  $Pf(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)f(y)$ .

Una interpretación real sobre  $E$  como una matriz con una columna y con valores tomados de  $E$ , entonces  $Pf$  es entendida efectivamente como el producto de las dos matrices  $P$  y  $f$ . Notar que una cadena de Markov está medida con respecto a la filtración natural, definida por  $\mathcal{F}_j = \sigma(X_0, \dots, X_j)$ .

En la práctica, no es posible encontrar los valores directos de una cadena.

**Proposición 2.4.5** Sean  $\{Z_j\}$  una sucesión adaptada y definida por  $Z_j = \psi(j, X_j)$ ,  $\{X_j\}$  una cadena de Markov homogénea con matriz de transición  $P$ , que toma sus valores en  $E$ , y  $\psi$  una función de  $\mathbb{N} \times E$  a  $\mathbb{R}$ . Entonces, la cubierta de Snell denotada por  $\{U_j\}$  de la sucesión  $\{Z_j\}$  está dada por  $U_j = u(j, X_j)$ , con la función  $u$  definida como

$$u(N, x) = \psi(N, x) \quad \forall x \in E$$

en donde, para  $j \leq N - 1$  se tiene que

$$u(j, \cdot) = \max(\psi(j, \cdot), Pu(j + 1, \cdot)).$$

## 2.5 Aplicación a opciones americanas

De ahora en adelante se trabajará con un mercado viable y completo. La modelación estará basada sobre el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_j\}_{0 \leq j \leq N}, \mathbb{P})$  con una medida de probabilidad única  $\mathbb{P}^*$  bajo la cual el precio en valor presente de los activos con riesgo son martingalas.

### 2.5.1 Cobertura con opciones americanas

En secciones anteriores, hemos definido el valor del proceso  $\{U_j\}$  descrito por la sucesión  $\{Z_j\}$  de una opción americana. Este viene dado por

$$\begin{cases} U_N = Z_N, & \text{y} \\ U_j = \max(Z_j, S_j^0 \mathbb{E}^*(U_{j+1}/S_{j+1}^0 | \mathcal{F}_j)) & \forall j \leq N-1. \end{cases}$$

De este modo, la sucesión  $\{\tilde{U}_j\}$  definida por  $\tilde{U}_j = U_j/S_j^0$  que es el valor presente del precio de la opción coincide con la cubierta o envoltura de Snell, bajo  $\mathbb{P}^*$  de la sucesión  $\{Z_j\}$ . En virtud de los argumentos de la sección anterior tenemos que.

$$\tilde{U}_j = \sup_{v \in \tau_{j,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_v | \mathcal{F}_j).$$

En consecuencia, obtenemos que

$$U_j = S_j^0 \sup_{v \in \tau_{j,N}} \mathbb{E}^*\left(\frac{Z_v}{S_v^0} | \mathcal{F}_j\right).$$

La descomposición de Doob, nos proporciona la estructura en diferencias

$$\tilde{U}_j = \tilde{M}_j - \tilde{A}_j,$$

donde  $\{\tilde{M}_j\}$  es una  $\mathbb{P}^*$ -martingala y  $\{\tilde{A}_j\}$  es un proceso predecible creciente y con valor inicial igual a 0. Por otro lado, dado que el mercado es completo, entonces existe una  $\phi$  estrategia autofinanciable tal que

$$V_N(\phi) = S_N^0 \tilde{M}_N,$$

en otras palabras,  $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$ . La sucesión  $\{\tilde{V}_j(\phi)\}$  es una  $\mathbb{P}^*$ -martingala, ya que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(\phi) &= \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_j) \\ &= \mathbb{E}^*(\tilde{M}_N | \mathcal{F}_j) \\ &= \tilde{M}_j. \end{aligned}$$

Al sustituir ésta descripción del valor usando la estrategia  $\phi$  autofinanciable la estructura en diferencias adquiere la forma

$$\tilde{U}_j = \tilde{V}_j(\phi) - \tilde{A}_j.$$

por lo tanto

$$U_j = V_j(\phi) - A_j$$

donde  $A_j = S_j^0 \tilde{A}_j$ . Como bien se puede ver en las igualdades previas, para el vendedor de la opción una vez que él recibe la prima  $U_0 = V_0(\phi)$ , entonces puede cubrir su riesgo perfectamente, es decir, puede generar una cantidad igual a  $V_j(\phi)$  al tiempo  $j$  que es mayor que  $U_j$  y una fortuna  $Z_j$ .

Estas ideas nos conducen a la pregunta: ¿Cuál es la fecha óptima para ejercer la opción? Primero, la fecha de ejercicio deberá ser escogida entre todos los tiempos de parada. Luego una persona interesada en comprar una opción americana perderá su interés al tiempo  $j$  cuando  $U_j > Z_j$  ya que él no podrá comercializar un activo con valor  $U_j$  (la opción) al monto  $Z_j$  (que se genera por ejercer la opción). De hecho, una fecha de ejercicio óptima  $\tau$  es tal que  $U_\tau = Z_\tau$ . En otras palabras, no hay ningún interés en ejercer la opción después del tiempo

$$v_{max} = \inf\{k | A_{k+1} \neq 0\}$$

que es igual a  $\inf\{k | \tilde{A}_{k+1} \neq 0\}$  puesto que, en este tiempo vender la opción provee al tenedor una cantidad de dinero  $U_{v_{max}} = V_{v_{max}}(\phi)$ . Esto quiere decir que al seguir una estrategia  $\phi$  se creará un portafolio cuyo valor es estrictamente mayor que la opción al tiempo  $v_{max} + 1, v_{max} + 2, \dots, N$ . Cabe hacer notar que el conjunto donde se tendrá que ejercer la opción estará condicionado por  $\tau \leq v_{max}$ , lo cual nos permite decir que  $\tilde{U}^\tau$  es una martingala. Otro resultado secundario precisa que las fechas óptimas para ejercer una opción son precisamente tiempos de parada óptimos para la sucesión  $\{\tilde{Z}_j\}$ , bajo la probabilidad  $\mathbb{P}^*$ . Desde la postura del inversionista la protección mediante el uso de la estrategia  $\phi$  y, bajo el supuesto que el comprador ejerce al tiempo  $\tau$ , que no es una fecha óptima de ejercicio, entonces  $U_\tau > Z_\tau$  o  $A_\tau > 0$ . Esto quiere decir que el inversionista obtiene una ganancia positiva  $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau$ .

## 2.5.2 Opciones americanas y opciones europeas

**Proposición 2.5.1** *Sea  $C_j$  el valor de una opción americana al tiempo  $j$  descrita por una sucesión adaptada,  $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$  y  $c_j$  el valor de una opción europea al tiempo  $j$  definida por la variable aleatoria  $h = Z_N$ . Entonces, se tiene que  $C_j \geq c_j$ .*

*Aún más, si  $c_j \geq Z_j$  para cualquier  $j$ , entonces*

$$c_j = C_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Enfatizamos que la desigualdad  $C_j \geq c_j$  tiene sentido apropiado a los intereses del inversionista dado que la opción americana ofrece a su poseedor más derechos que una opción europea y la flexibilidad de ejercer en cualquier instante de tiempo.

**Demostración:**

Como el valor descontado  $\{\tilde{C}_j\}$  es una supermartingala bajo  $\mathbb{P}^*$ , tenemos que

$$\tilde{C}_j \geq \mathbb{E}^*(\tilde{C}_N | \mathcal{F}_j) = \mathbb{E}^*(\tilde{c}_N | \mathcal{F}_j) = \tilde{c}_j.$$

de ahí que  $C_j \geq c_j$ .

Por otra parte, si  $c_j \geq Z_j$  para cualquier  $j$ , entonces la sucesión  $\{\tilde{c}_j\}$  que es una martingala bajo  $\mathbb{P}^*$  es una supermartingala (bajo  $\mathbb{P}^*$ ) y constituye un límite superior para la sucesión  $\{\tilde{Z}_j\}$ . Ello permite concluir que

$$\tilde{C}_j \leq \tilde{c}_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

En resumen,  $\tilde{C}_j = \tilde{c}_j$ .  $\square$

**Observación 2.5.1** *Las relaciones de la proposición anterior en ocasiones no se tienen, sin embargo, aún en ese ambiente existen oportunidades de arbitraje al ejercer la opción.*

Para mostrar la observación anterior, consideremos un mercado con un único activo con riesgo y una tasa de interés libre de riesgo.  $r$  en cada período. Entonces el precio de mercado (*spot*) actualizado del período  $j$  es  $S_j^0 = (1+r)^j$ . Y por la proposición anterior al definir  $Z_j = (S_j - K)_+$ . En donde  $(\cdot)_+$  denota la parte positiva de la expresión a incluir dentro del paréntesis para el caso de una opción europea con fecha de maduración  $N$ ,  $c_j$  denota el precio al tiempo  $j$ , y  $K$  denota al precio de ejercicio para una unidad de activo con riesgo. Por otra parte, si  $C_j$  es el precio correspondiente de la opción americana de compra (*call*), se tiene que.

$$\begin{aligned}\tilde{c}_j &= (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_j) \\ &\geq \mathbb{E}^*(\tilde{S}_N - K(1+r)^{-N} | \mathcal{F}_j) \\ &= \tilde{S}_j - K(1+r)^{-N},\end{aligned}$$

obtenido por el uso de las propiedades de martingala de  $\{\tilde{S}_j\}$ . Observe que:  $c_j \geq S_j - K(1+r)^{-N+j} \geq S_j - K$ , y puesto que  $c_j \geq 0$ , entonces tenemos también que  $c_j \geq (S_j - K)_+$ . Por la proposición anterior  $C_j = c_j$ . En otras palabras, existe una igualdad directa entre el precio de una opción europea de compra (*call*) y el precio de la correspondiente opción americana de compra.

Esta propiedad no está presente en el caso de opciones de venta, ni tampoco en el caso de opciones de compra (*call's*) de divisas.

# Capítulo 3

## Teoría de las opciones reales

En este capítulo se abordarán las ideas principales relacionadas con la Teoría de Opciones Reales (TOR) iniciando con una pequeña introducción. En seguida se exponen los métodos más empleados de valorización para los activos reales (neutral al riesgo y por arbitraje). Luego, se presenta una comparación entre las (TOR) y la metodología tradicional de valorización de activos mediante el uso del Valor Presente Neto (VPN). Por último, se realiza una revisión de la literatura referente a opciones reales, que se relaciona con la explotación de recursos no renovables.

### 3.1 Introducción

Una buena parte del éxito alcanzado por una empresa se debe a la capacidad de gestión de sus ejecutivos. Sin embargo, aún cuando el reconocimiento de este hecho se encuentra debidamente documentado, la incorporación de esta premisa a la hora de tomar las decisiones de asignación de capital fue postergada durante mucho tiempo.

Esta inconsistencia ha sido resarcida por una nueva metodología de evaluación de proyectos, la cual se conoce con el nombre de Teoría de Opciones Reales. Y el hecho más importante a tomar en cuenta sobre las opciones reales es que el valor de una opción o decisión adoptada sobre el desarrollo del proyecto es la *flexibilidad*.



La Teoría de Opciones Reales puede entenderse como una adaptación de la teoría de opciones financieras a la valorización de activos de origen real, por ejemplo: plataformas petroleras, pozos, minas, edificios, equipos, terrenos, etc.

Al ser las opciones financieras decisiones contingentes a la realización de un evento aleatorio, ellas entregan la posibilidad de tomar ciertas acciones una vez despejada esta incertidumbre, permitiendo a sus poseedores aprovechar los escenarios favorables, y al mismo tiempo resguardar a la empresa de los eventos negativos. Esta facultad se representa mediante flujos de caja no lineales.

Asimismo, cuando se evalúa un proyecto de inversión considerando las distintas alternativas que éste otorga, las proyecciones de sus flujos de caja también resultan no lineales. Para ejemplificar lo anterior se puede considerar el beneficio que significa para una empresa la posibilidad de aplazar una inversión. Esta flexibilidad resulta valiosa debido a que proporciona un tiempo adicional para examinar la tendencia futura de los acontecimientos, reduciendo así la probabilidad de incurrir en costosos errores. De hecho, mientras mayor sea el intervalo de tiempo disponible para tomar la decisión, mayor será la posibilidad de esperar a que las circunstancias se desarrollen favorablemente, incrementando la rentabilidad del proyecto.

La semejanza entre las funciones que representan los flujos de caja de las opciones financieras y algunos proyectos de inversión comenzó a ser detectada a partir de los años ochenta. Las opciones financieras al ser derechos contingentes otorgan a sus poseedores la facultad de aprovechar los eventos favorables y al mismo tiempo limitar las pérdidas en escenarios negativos. Esta asimetría puede ser caracterizada mediante funciones que representan flujos de caja no-lineales. Por ejemplo, una opción de compra (*call*) que otorga el derecho pero no la obligación de comprar un determinado activo a un precio preestablecido (precio de ejercicio), exhibe flujos de caja convexos, debido a que su poseedor se beneficia de aumentos de precio del activo subyacente, mientras que sus pérdidas se encuentran acotadas si éste disminuye. Asimismo, una opción de venta (*put*) también posee flujos de caja convexos, ya que al igual que una opción de compra este instrumento financiero presenta disimetrías entre las pérdidas y ganancias que puede generar.

Muchas inversiones en la explotación de recursos no renovables exhiben flujos de caja muy similares al de las opciones financieras. Por ejemplo, un proyecto minero en el cual el yacimiento puede abrir o cerrar sin costo, puede verse como una opción de compra sobre el precio del mineral a extraer. En este caso, el costo marginal de producción sería equivalente al precio de ejercicio de la opción.

También existen similitudes en el área de los proyectos de investigación y desarrollo, ya que en este contexto la opción de compra estaría emitida sobre el valor del proyecto a desarrollar, mientras que su precio de ejercicio corresponderá a la inversión en investigación.

De este modo, un proyecto de inversión puede ser visto como una opción en cuanto a la forma de sus flujos de caja, escrita sobre un activo real. Por ejemplo, el activo derivado real puede ser una mina de cobre o un pozo de petróleo, en cuyo caso el subyacente sería el cobre y el petróleo, respectivamente.

Prácticamente como los gerentes o directivos financieros están tomando las decisiones día a día, se está tratando con opciones del tipo americano.

El reconocimiento de estas semejanzas tiene como consecuencia que la valorización de estos proyectos de inversión en la explotación de recursos no renovables está estrechamente ligada a la valorización de opciones financieras. Al igual que los activos derivados financieros los activos derivados reales también pueden ser clasificados: en europeos y americanos. Como bien se ha mencionado al inicio de este escrito las opciones reales europeas son aquellas que pueden ser ejercidas solamente en una determinada fecha de expiración. En cambio, las opciones reales americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta la fecha de expiración del proyecto.

Sin embargo, no debe olvidarse que los proyectos de inversión son complejos, ya que muchos de ellos pueden incluir una sucesión de opciones anidadas, por ejemplo: adquirir una propiedad minera entrega la opción de explorarla, la obtención de información de

la fase de exploración otorga la posibilidad de explotar la mina y al explotarla se tiene la flexibilidad de extraer el mineral por etapas. Finalmente, una vez que el dueño se encuentra explotando la mina éste puede cerrarla o bien abandonarla.

### 3.1.1 Metodologías de valorización de opciones reales

Como se ha mencionado la teoría de opciones reales se encuentra ligada a la teoría de opciones financieras, y es por ello que la metodología de valoración de opciones reales resulta muy similar a la de valoración de opciones financieras.

#### a) Valorización por arbitraje.

La metodología tradicional de valorización de opciones reales está basada en la valorización por arbitraje. El objetivo de la valorización por arbitraje es evaluar un activo en relación a otro (*benchmark*). Según esta técnica, cada activo posee su propio *benchmark*: otro activo perfectamente correlacionado. El CAPM planteado por Sharpe (1964), utiliza un razonamiento similar, ya que al descomponerse el riesgo total de un activo en su parte diversificable y no diversificable, el CAPM plantea que sólo este último componente del riesgo es importante para evaluar el activo, debido a que presenta una perfecta correlación con otro activo: el portafolio de mercado.

La valorización por arbitraje es un método robusto cuando se encuentran dos activos perfectamente correlacionados. es decir siempre que sea posible construir un portafolio libre de riesgo mediante la combinación de activos perfectamente correlacionados, esta cartera deberá rentar al menos la tasa libre de riesgo. De no ser así, cualquier inversionista independientemente de sus preferencias, podría beneficiarse al negociar este portafolio, obligando a que los precios sean ajustados.

Según Black y Scholes (1973) el retorno de las opciones se encuentra perfectamente correlacionado con el retorno de sus activos subyacentes. Luego, la formación de un portafolio que contenga al activo subyacente y a la opción, da origen a la conocida ecuación diferencial que describe el precio de este activo derivado en función de su activo subyacente.

En el caso de las opciones reales donde el subyacente es un bien (*commodity*), es usual que el portafolio esté formado con contratos futuros en vez del activo subyacente. Esto se debe a que los inversionistas no pueden tomar posiciones cortas en los mercados de bienes (*commodities*), pero sí pueden efectuar este tipo de transacciones en los mercados de futuros. Además, la gran liquidez de estos contratos permite que sus precios reflejen mucha información.

La ecuación diferencial resultante contiene tantas dimensiones como variables de estado se utilicen en la evaluación. Como se mencionó anteriormente, la mayoría de las inversiones otorgan la posibilidad a sus dueños de ejercer distintas opciones a lo largo de la vida del proyecto. Esta característica transforma a estos derivados reales en activos de tipo americano, y a la ecuación diferencial correspondiente en una ecuación con “borde libre”.

#### b) Valorización neutral al riesgo.

Al igual que para el caso de las opciones financieras como se elaboró en el capítulo dos, las opciones reales también pueden ser evaluados usando la valorización neutral al riesgo. Esta metodología señala que es válido asumir que todos los inversionistas son indiferentes al riesgo (vale decir que no requieren compensación cuando se aumenta la incertidumbre), cuando se trata de evaluar activos derivados. Dada esta suposición, basta con calcular el valor esperado de los pagos de la opción en un mundo neutral al riesgo para luego descontarlos a la tasa libre de riesgo. Por lo que para aproximar las distribuciones de las variables aleatorias que representan los pagos de la opción, generalmente se recurre a la simulación de Monte Carlo, presentada en el capítulo cuatro.

Sin embargo, no todas las opciones reales son contingentes al valor de variables de estado que son negociadas en los mercados financieros. Por ejemplo, los costos incluyen capital humano que no se puede comprar ni vender. Para valorizar estas opciones se utiliza un método desarrollado por Brennan y Schwartz (1982) y por Cox, Ingersoll, y Ross (1985), éste consiste en ajustar la tasa de crecimiento instantánea esperada (*drift*) de los distintos procesos estocásticos en una cantidad que refleje el premio por riesgo

de las variables consideradas. Esta prima, se obtiene de un modelo de equilibrio de los mercados financieros. Esta metodología, a diferencia de las opciones reales sobre bienes (*commodities*) negociables, tiene la ventaja de prescindir de la modelación del retorno por conveniencia <sup>1</sup> (parámetro que se trata de estimar mediante el uso de la estructura temporal de los contratos futuros).

### 3.1.2 Opciones reales VS. Valor presente neto.

¿Cuáles son las ventajas de la metodología de opciones reales sobre la metodología tradicional como el Valor Presente Neto (VPN), la Tasa Interna de Retorno (TIR), o los métodos actuariales tradicionales?

Primero recordemos en que el valor presente neto (VPN), consiste en descontar los flujos de caja esperados a una cierta tasa que considere el valor del dinero en el tiempo, como también el riesgo inherente al activo. De esta forma, el precio de un activo corresponde al valor presente de estos flujos de caja menos la inversión inicial, y el criterio de inversión óptimo será invertir si este número es positivo.

La gran ventaja del VPN es su sencillez, sin embargo, ésta puede ser también su mayor desventaja, sobre todo cuando la estructura de la inversión a valorizar no se adapta a los supuestos intrínsecos de esta metodología<sup>2</sup>.

En primer lugar, si bien es cierto que la incertidumbre no es importante en inversiones para las cuales los precios relevantes sean razonablemente predecibles, esta volatilidad cobra una importancia vital en aquellos proyectos donde las fluctuaciones de precios del orden del 30% anual son muy frecuentes. Bajo estas condiciones, la práctica del VPN de reemplazar la distribución de los precios futuros por sus valores esperados tiende a causar errores en el cálculo de los flujos de caja esperados, como también de las tasas de

<sup>1</sup>Con este nombre se conoce al costo de oportunidad que significa poseer un contrato futuro, en vez del activo subyacente.

<sup>2</sup>Para una descripción detallada de las desventajas del VPN como método de valorización de inversiones en recursos naturales, véase Cortázar (1999).

descuento apropiadas.

En segundo lugar, el VPN no considera las flexibilidades inherentes a un proyecto, tales como: la opción de posponer inversiones, aumentar la producción en caso que los precios suban, reducirla en caso que éstos bajen, o bien, abandonar el proyecto si las condiciones son muy desfavorables. En tercer lugar, la estimación de una tasa de descuento que refleje el riesgo de los flujos de caja a lo largo de toda la vida del proyecto resulta muy difícil, ya que la incertidumbre puede ser variable a lo largo del tiempo y además este único parámetro debe considerar el apalancamiento al cual se opera el proyecto, al igual que sus distintas flexibilidades.

Finalmente, una ventaja del método de opciones reales es que además de evaluar el activo derivado real, también determina la política óptima que maximiza el valor de este proyecto. Estas estrategias están determinadas por valores críticos de las variables inciertas. Estos umbrales señalan cuándo es óptimo ejercer las distintas opciones de las que se dispone, por ejemplo, invertir, almacenar, o cerrar.

### 3.1.3 Literatura acerca de la Teoría Opciones Reales.

En esta subsección se efectúa una reseña de los principales artículos que forman parte de la literatura de las opciones reales<sup>3</sup>, destacando en cada uno de ellos las flexibilidades de los proyectos considerados.

Brennan y Schwartz (1985) evalúan una mina considerando la opción de apertura, cierre y abandono de las operaciones. En primer lugar, se resuelve el caso de una mina con reservas infinitas, lo que da origen a una solución analítica, luego es estudiada la concesión de una mina con reservas físicas conocidas, problema que se resuelve mediante diferencias finitas. En este artículo se consideran costos asociados a la apertura, cierre y mantenimiento de la mina cerrada. El precio del activo de salida (cobre) se modela como una variable estocástica que sigue un proceso browniano geométrico, y la política

---

<sup>3</sup>Para una excelente recopilación, de los principales artículos publicados en el área de opciones reales, véase Schwartz y Trigeorgis (2001).

óptima está dada por tres precios críticos. Por último, al incorporar la opción de diferir la inversión inicial, a manera de encontrar el momento óptimo para llevarla a cabo.

McDonald y Siegel (1985) estudian la situación que enfrenta una empresa cuando debe decidir invertir en proyectos con riesgo. En este caso, supongamos que la firma puede detener temporalmente su producción si la variable estocástica que modela los costos excede las ventas. Los autores asumen que los individuos que manejan la empresa son adversos al riesgo.

Majd y Pindyck (1987) también consideran la opción de diferir la inversión en un proyecto, sin embargo, en este caso la decisión puede ser tomada a lo largo de un tiempo variable, dependiendo de la tasa de inversión, la cual a su vez se encuentra acotada. La variable principal en este artículo corresponde a la tasa de inversión acumulada, ya que la opción ha de ser ejercida sobre la tasa de inversión que puede ser nula para escenarios desfavorables, o bien, alcanzar su cota máxima para escenarios positivos. Para este caso, la política óptima está dada por un valor crítico del proyecto para cada nivel de inversión acumulada.

Trigeorgis y Mason (1987) implementan la opción de expandir las operaciones al analizar el caso de una empresa que puede variar su tasa de producción según las condiciones del mercado. Si estas son favorables la firma puede aumentar su escala de producción incurriendo en una inversión determinada.

Paddock, Siegel y Smith (1988) estudian una reserva de petróleo sin desarrollar. La opción se plantea en términos de invertir para habilitar el yacimiento, y de esta manera comenzar a explotarlo. A diferencia de los artículos anteriores que abordan la opción de diferir inversiones, en este caso se considera que existe un costo de oportunidad por tener la opción sobre la reserva y no el yacimiento de petróleo.

Por su parte, Cortazar y Schwartz (1993) analizan el caso de una firma que posee un proceso productivo de dos etapas, y que cuenta con la opción de almacenar las unidades en proceso en un inventario intermedio. La variable incierta corresponde al precio de venta

del producto que se obtiene en la segunda etapa, por lo que cada unidad en inventario puede considerarse como una opción de compra americana sobre el precio del producto, cuyo precio de ejercicio corresponde al costo marginal de la segunda etapa. De esta forma, la primera etapa es equivalente a la mina planteada por Brennan y Schwartz (1985), pero en vez de vender cada unidad producida al precio de mercado, el valor obtenido corresponde al de una opción de compra americana asociada a la segunda etapa de producción. Cortazar y Schwartz (1998) analizan el caso de una concesión de un pozo de petróleo. En este modelo, el valor presente de los flujos de la producción corresponde a una variable estocástica que depende de dos variables de estado: el precio del petróleo y su retorno por conveniencia. El valor de esta concesión puede ser homologada al de una opción de compra americana sobre el valor presente de la producción, donde el precio de ejercicio corresponde al monto de la inversión necesaria para comenzar la explotación, mientras que el tiempo de duración de la opción coincide con el plazo de concesión.

Schwartz y Moon (2000) presentan un modelo que caracteriza a las inversiones en investigación y desarrollo, en particular a aquellas que buscan encontrar una nueva droga en la industria farmacéutica. Las incertidumbres presentes en este tipo de inversiones se resumen en tres procesos estocásticos. El primero es usado para modelar el nivel de inversión requerido para desarrollar el proyecto. El segundo, tiene que ver con los pagos futuros que generará la investigación, por lo tanto su volatilidad disminuye a medida que se aumenta la cantidad invertida. Por último, también considera la posibilidad que un evento catastrófico ponga fin a la inversión. La solución de la ecuación diferencial parcial resultante entrega no sólo el valor del proyecto, sino también, la política óptima de inversión, esto es, los valores de las tres variables de estado para los cuales resulta óptimo proseguir con la investigación.

Cortazar y Cassasus (2000) extienden el modelo planteado por Cortázar y Schwartz (1993) al considerar una inversión en un recurso natural que pueden ser explotados mediante múltiples etapas de producción. Este mineral dispone de reservas conocidas, y cuenta además con la flexibilidad de almacenar los productos intermedios.

Slade (2001) valoriza mediante opciones reales 21 proyectos mineros llevados a cabo



en Canadá durante el periodo 1980-1993. Utilizando datos empíricos son estimados los parámetros relevantes de los procesos estocásticos que describen la evolución de: precios, costos, leyes, reservas y tasas de producción. A continuación establece la comparación de los valores de estos proyectos considerando diversas hipótesis acerca de los procesos estocásticos considerados. La autora destaca la escasa adopción de la teoría de opciones reales como instrumento de valorización de proyectos mineros al interior de la industria canadiense.

## Parte II

# Modelo de Brennan y Schwartz

## Capítulo 4

# Modelo de Brennan y Schwartz

En el presente capítulo se describe el problema clásico de opciones reales propuesto por Brennan y Schwartz (1985). Este modelo evalúa una mina de cobre que cuenta con reservas finitas de mineral, una estructura de costos conocida y un tiempo de concesión ilimitado. Es decir, la mina puede operar indefinidamente mientras su inventario no se haya agotado. Además, el dueño de este activo puede ejercer continuamente la opción de abrir, cerrar o abandonar el yacimiento. Para abrir o cerrar la mina se incurre en un costo operacional, mientras que el abandono no significa desembolso alguno. Asimismo, para conservar las faenas temporalmente detenidas se debe incurrir un gasto de mantenimiento.

Este proyecto de inversión puede representarse mediante una secuencia de opciones americanas anidadas. Si bien esta característica aumenta la complejidad del modelo, también le permite describir la realidad de manera más precisa, lo que resulta fundamental para comprobar la eficiencia y aplicabilidad del método de diferencias finitas.

A modo de introducción se presenta una reseña general del problema a resolver. Luego, se realiza una descripción formal del modelo planteado por Brennan y Schwartz (1985). Posteriormente, se detallan los pasos necesarios para desarrollar el método de diferencias finitas para la valorización de este proyecto de inversión. Por último, se expone la forma en la cual la metodología de diferencias finitas evalúa la secuencia de opciones americanas que conforman el problema.

## 4.1 Descripción general del modelo de Brennan y Schwartz

El modelo a describir corresponde al presentado por Brennan y Schwartz (1985) <sup>1</sup>.

En esta sección se presenta una mina de cobre que cuenta con una etapa de producción. Este yacimiento posee una estructura de costos conocida y un nivel de reservas finito. Además, se supone que el precio del cobre se determina de manera exógena y que existe un mercado de gran liquidez donde se transan contratos futuros sobre este bien (*commodity*).

En la evaluación de este recurso natural se incorpora la opción de apertura, cierre y abandono de la producción. Para abrir o cerrar la mina debe incurrirse en costos fijos, mientras que el abandono de las faenas puede realizarse sin desembolsar recursos. Además, se considera un costo de mantención el cual garantiza que la mina se encuentre en buenas condiciones a pesar de estar cerrada.

Junto con la obtención del valor de este proyecto minero el enfoque de opciones reales permite dilucidar su política óptima de operación. De esta manera, para cada nivel de reservas y en todo instante de tiempo se obtienen tres precios críticos. El primero, marca el umbral después del cual resulta beneficioso abrir la mina. El segundo, define el punto a partir del cual resulta óptimo cubrir los costos de cierre y dejar de producir al menos de manera temporal. El último de estos parámetros señala el nivel de precios para el cual conviene terminar la producción de manera definitiva.

Luego de encontrar el valor del yacimiento Brennan y Schwartz (1985) analizan el momento óptimo para realizar la inversión de desarrollo, lo cual coincide con el problema de ejercicio de una opción americana tradicional. Al finalizar el artículo, se aprovecha la metodología desarrollada para valorizar un tipo de contrato de largo plazo. Este derivado

---

<sup>1</sup>Algunas extensiones o modificaciones de este modelo pueden encontrarse en: Cortázar y Schwartz (1993), Casassus (1996), Castillo (1999), Cortázar y Casassus (2000) y Cortázar, Schwartz y Casassus (2001).

fija el valor de una cierta cantidad del bien, pero además otorga el derecho de recibir este mineral de forma variable a lo largo de un plazo determinado. Este tipo de acuerdos resulta frecuente en la industria minera, toda vez que permite a los compradores industriales asegurar un flujo de insumos que se adapte a sus demandas productivas.

## 4.2 Modelo para la explotación de una mina

Esta descripción incluye el modelo de precios utilizado, así como el valor de la mina según las distintas variables de estado consideradas.

### 4.2.1 Modelo de precios

Para describir la evolución de los precios de mercado o precios al contado (*spot*) del cobre el modelo utilizado supone que este bien (*commodity*) sigue un proceso browniano geométrico, definido por la siguiente ecuación:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (4.1)$$

En esta ecuación  $dz$  corresponde al incremento de un proceso Wiener,  $\sigma$  simboliza la desviación estándar instantánea de los rendimientos del precio de mercado (*spot*) y  $\mu$  representa el “rendimiento esperado total” por invertir en el activo  $S$ , es decir, incluye los aumentos de precio más el rendimiento por conveniencia  $C_y$ .

El rendimiento por conveniencia constituye el flujo de servicios que recibe el dueño de un inventario físico del bien, pero no el poseedor de un contrato futuro. EL beneficio proviene del hecho de que el dueño del bien físico es capaz de escoger donde guardará y cuando liquidará el inventario. Se puede pensar en el rendimiento por conveniencia como en la ganancia derivada de la propiedad en periodos de escasez local. En este modelo de precios este rendimiento se considera proporcional al precio de mercado (*spot*).

El modelo de precios definido por la ecuación (4.1) resulta no estacionario, debido a la raíz unitaria presente en todos los movimientos brownianos geométricos. Esto provoca

que el modelo ignore los ciclos de precios de los bienes (producidos por las fluctuaciones de la oferta y demanda de estos activos reales).

#### 4.2.2 Valor de la mina: modelo general

El valor de la mina en su versión más general depende de tres variables de estado: el precio de mercado (*spot*) del bien  $S$ , el inventario físico de la mina  $Q$  y el tiempo de calendario  $t$ . Además, el modelo supone que la mina se maneja según una política de operación denotada por  $\phi$ .

Esta política de operación se define como una función que determina la tasa anual de producción de la mina cuando ésta se encuentra abierta. Esta función queda denotada por:  $q(S, Q, t)$  y es generada a partir de tres precios críticos:  $S_0(Q, t)$  que representa el precio bajo el cual resulta preferible abandonar la mina si ésta se encuentra previamente cerrada;  $S_1(Q, t)$  corresponde al precio bajo el cual conviene cerrar o abandonar la mina si ésta se encuentra previamente abierta, mientras que  $S_2(Q, t)$  cuantifica el precio sobre el cual resulta conveniente abrir la mina. La tasa anual de producción puede variar sin costo entre un límite superior denotado por  $\bar{q}$  y un límite inferior simbolizado por  $\underline{q}$  (el cual sólo es alcanzado cuando la mina está cerrada).

Luego, el valor de la mina se escribe de la siguiente manera:

$$V = V(S, Q, t; j, \phi). \quad (4.2)$$

Para esta ecuación la variable  $j$  indica el estado de operación de la mina, ya que cuando ésta toma el valor uno, entonces el yacimiento se encuentra produciendo, mientras que cuando se hace igual a cero la mina se encuentra cerrada. Considerando el proceso estocástico definido por la ecuación (4.1), el cambio instantáneo en el valor de la mina puede ser obtenido mediante la aplicación del lema de Itô.<sup>2</sup> Al utilizar este resultado el diferencial total de la mina está dado por la siguiente expresión:

<sup>2</sup>En cierto sentido este lema constituye una especie de regla de la cadena en la teoría del cálculo diferencial estocástico. Para un análisis detallado de su deducción, véase Itô (1951).

$$dV = V_S dS + V_Q dQ + V_t dt + \frac{1}{2} V_{SS} (dS)^2 \quad (4.3)$$

Donde el cambio diferencial en el inventario de la mina está supeditado a la tasa de producción según la siguiente ecuación:

$$dQ = qdt.$$

El flujo de caja o tasa de rendimiento continua proveniente de la mina se define mediante la siguiente expresión:

$$FC = q(S - A) - M(1 - j) - \lambda_j V - T \quad (4.4)$$

Donde:  $A(q, Q, t)$  indica el costo marginal promedio de producir a una tasa  $q$  en el tiempo  $t$  cuando el inventario de la mina es  $Q$ . Por otra parte  $M(t)$  corresponde al costo de mantenimiento de la mina en el tiempo  $t$  cuando ésta se encuentra cerrada. Además,  $\lambda_j$  para ( $j = 0, 1$ ) simboliza la tasa de impuestos proporcional al valor de la mina cuando ésta se encuentra abierta o cerrada, y  $T(q, Q, S, t)$  denota al total de impuestos y derechos a pagar cuando la mina está operando.

El modelo supone que la función de impuestos puede ser representada según la siguiente expresión:

$$T(q, Q, S, t) = t_1 qS + \max\{t_2 q[S(1 - t_1) - A]; 0\}. \quad (4.5)$$

En esta ecuación  $t_1$  representa la tasa de impuesto a las ventas y  $t_2$  corresponde a la tasa de impuesto a las utilidades.

Siguiendo la teoría de valorización por arbitraje, la ecuación diferencial que determina el valor de la mina  $V$ , bajo la política de operación  $\phi$ , se obtiene considerando el

rendimiento de un portafolio compuesto por una posición larga<sup>3</sup> en la mina y una posición corta en contratos futuros sobre el bien.<sup>4</sup>

Cuando estos activos son combinados en forma adecuada el incremento en el valor de esta cartera deja de ser estocástico para pasar a ser determinístico. Para evitar oportunidades de arbitraje este rendimiento debe ser igual a la tasa libre de riesgo (denotada por  $\rho$ ), esto provoca que se deba cumplir la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (\rho S - C_y)V_S - qV_Q + V_t + q(S - A) - M(1 - j) - T = (\rho + \lambda_j)V \quad (4.7)$$

El valor de la mina  $V(S, Q, t)$  satisface la ecuación (4.8) para cualquier política de operación  $\phi = \{q, S_0, S_1, S_2\}$ , pero bajo la estrategia óptima representada por:  $\phi^* = \{q^*, S_0^*, S_1^*, S_2^*\}$  el valor de la mina, además, satisface el siguiente problema de optimización:

<sup>3</sup>Un inversionista adopta una posición larga cuando ha comprado la opción y adopta una posición corta cuando ha vendido la opción

<sup>4</sup>Nótese que el precio del futuro  $F(t, S)$  en el momento  $t$  es función del proceso browniano que sigue  $S$ . De esta manera, el cambio instantáneo en  $F$ , esta dado por el lema de Ito:

$$dF = \left( -F_\tau + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S^2 \right) dt + F_S dS \quad (4.6)$$

Donde  $\tau = T - t$  y  $T$  es la fecha de entrega del bien. Considerando el rendimiento de una cartera compuesta por la compra de una unidad del bien (*commodity*) y la venta de  $(F_S)^{-1}$  contratos futuros, el rendimiento de esta cartera es:  $\frac{dS}{S} + \frac{C_y}{S} - \frac{dF}{(SF_S)} = (SF_S)^{-1} (F_S C_y - \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S^2 + F_\tau) dt$ . Dado que este rendimiento es no estocástico y que  $C_y$  se define como la tasa de conveniencia *convenience yield* de una unidad marginal de inventario, el rendimiento debe ser igual a la tasa libre de riesgo  $\rho dt$ . obteniendo la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S^2 + F_S(\rho S - C_y) = F_\tau$ . Finalmente, reemplazando (4.6) en (4.7), el cambio instantáneo en el precio futuro se puede expresar en términos de la tasa de conveniencia y el cambio instantáneo en el precio de mercado (*spot*), es decir,

$$dF = F_S dS + F_S(\rho S - C_y)$$



$$\begin{cases} V(S, Q, t) = \max_{\phi} V(S, Q, t, 1, \phi), y \\ W(S, Q, t) = \max_{\phi} V(S, Q, t, 0, \phi) \end{cases}$$

La solución de estos problemas determinan los dos estados de operación posibles :  $V(S, Q, t)$  cuando la mina está abierta y  $W(S, Q, t)$  cuando el yacimiento se encuentra cerrado.

Según la definición anterior del problema. el valor de la mina bajo la política óptima de operación se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\max_{q \in (\underline{q}, \bar{q})} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (\rho S - C_y) V_S - q V_Q + V_t + q(S - A) - T \right] = (\rho + \lambda_1) V \quad (4.8)$$

Si la mina se encuentra abierta y,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 W_{SS} + (\rho S - C_y) W_S + W_t - M = (\rho + \lambda_0) W \quad (4.9)$$

Si la mina se encuentra cerrada.

Las condiciones en la frontera que deben satisfacerse son las siguientes:

1) Si las reservas físicas del cobre se han agotado, el valor de la mina será cero:

$$V(S, Q = 0, t) = W(S, Q = 0, t) = 0. \quad (4.10)$$

2) Si el precio al contado del cobre es cero, el valor de la mina también lo será:

$$W(S = 0, Q, t) = 0. \quad (4.11)$$

3) El valor de la mina como porcentaje del precio al contado del cobre no debe explotar a medida que éste tienda a infinito:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, Q, t)}{S} < +\infty \quad (4.12)$$

Por último, si se supone que los precios críticos de cierre y apertura que maximizan el valor de la mina (denotados por:  $S_1^*$  y  $S_2^*$ ) son conocidos por todos los inversionistas del mercado, se obtienen las siguientes condiciones de equilibrio:

$$W(S_2^*, Q, t) = V(S_2^*, Q, t) - K_2(Q, t) \quad (4.13)$$

$$V(S_1^*, Q, t) = \max[W(S_1^*, Q, t) - K_1(Q, t); 0] \quad (4.14)$$

$$V_S(S_1^*, Q, t) = \left\{ \begin{array}{l} W_S(S_1^*, Q, t) \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} W(S_1^*, Q, t) - K_1(Q, t) \geq 0 \\ W(S_1^*, Q, t) - K_1(Q, t) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

$$W_S(S_2^*, Q, t) = V_S(S_2^*, Q, t) \quad (4.16)$$

$$W_S(S_0^*, Q, t) = 0 \quad (4.17)$$

Las ecuaciones (5.13) (5.14) y (5.15) se desprenden de las condiciones de *high contact*<sup>5</sup> descritas por Merton-Samuelson, mientras que  $K_1(Q, t)$  y  $K_2(Q, t)$  corresponden a los costos de cierre y de apertura respectivamente.

Este modelo no cuenta con una solución analítica y como está definido por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en tres dimensiones, su resolución numérica resulta extremadamente compleja.

### 4.2.3 Valor de la mina: en términos reales.

---

<sup>5</sup>Se denomina *high contact* a la condición local donde la primera derivada por la izquierda es igual a la primera derivada por la derecha.

El valor de la mina depende del tiempo de calendario exclusivamente debido a que los costos  $A$ ,  $M$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ , y el precio de mercado (*spot*) están sujetos a esta variable. Si para simplificar el modelo se supone que la tasa de inflación denotada por:  $p$  es constante a lo largo del tiempo, y el rendimiento por conveniencia se simboliza por:  $kS$ , entonces el valor de la mina depende sólo de dos variables de estado: el precio de mercado y el nivel de reservas en inventario.

Para describir este nuevo modelo primero deben definirse las siguientes variables deflactadas:

$$a(q, Q) = A(q, Q, t)e^{-\pi t} \quad (4.18)$$

$$f = M(t)e^{-\pi t} \quad (4.19)$$

$$k_1(Q) = K_1(Q, t)e^{-\pi t} \quad (4.20)$$

$$k_2(Q) = K_2(Q, t)e^{-\pi t} \quad (4.21)$$

$$s = Se^{-\pi t} \quad (4.22)$$

$$v(S, Q) = V(S, Q, t)e^{-\pi t} \quad (4.23)$$

$$w(S, Q) = W(S, Q, t)e^{-\pi t} \quad (4.24)$$

$$(4.25)$$

Al hacer este cambio se supone que las variables sólo suben de precio debido a la tasa de interés real. Para estas nuevas definiciones, el valor de la mina en términos reales para ambos estados de operación se encuentra dado por las siguientes expresiones:

$$\max_{q \in (\underline{q}, \bar{q})} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 v_{ss} + (r - k)sv_s - qv_Q + q(s - a) - \tau \right] = (r + \lambda_1)v \quad (4.26)$$

cuando la mina se encuentra abierta. Sin embargo, si la mina está cerrada, entonces

$$\frac{1}{2} \sigma^2 s^2 w_{ss} + (r - k)sw_s - f = (r + \lambda_0)w. \quad (4.27)$$

En estas ecuaciones, hacemos énfasis en que  $r = \rho - \pi$  corresponde a la tasa "real" libre de riesgo, y  $\tau$  está dado por la siguiente expresión

$$\tau = t_1qs + \max\{t_2q[s(1 - t_1) - a]; 0\}.$$

Por último, las condiciones en el borde y de equilibrio para esta nueva versión del modelo son las siguientes

$$v(s, Q = 0) = w(s, Q = 0) = 0 \quad (4.28)$$

$$w(s = 0, Q) = 0 \quad (4.29)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{v(s, Q)}{s} < +\infty \quad (4.30)$$

$$w(s_2^*, Q) = v(s_2^*, Q) - k_2(Q) \quad (4.31)$$

$$v(s_1^*, Q) = \max[w(s_1^*, Q) - k_1(Q); 0] \quad (4.32)$$

$$v_s(s_1^*, Q) = \left\{ \begin{array}{l} w_s(s_1^*, Q) \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} w(s_1^*, Q) - k_1(Q) \geq 0 \\ w(s_1^*, Q) - k_1(Q) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (4.33)$$

$$w_s(s_2^*, Q) = v_s(s_2^*, Q) \quad (4.34)$$

De esta manera, el valor de la mina para ambos estados operacionales no depende del tiempo, por lo que este modelo puede resolverse numéricamente, mediante diferencias finitas implícitas.

# Capítulo 5

## Aproximación numérica.

En este capítulo quedan descritos de manera global algunos métodos numéricos y su adecuada participación resolviendo problemas de opciones reales. También algunas aproximaciones alternativas e indicios de aplicación mediante procedimientos de inducción, con evolución *hacia delante* y *hacia atrás*, que tienen un lugar en la valoración de las opciones reales.

Un caso-proyecto con la opción de invertir en el futuro dependiente de un precio con rendimiento estocástico es evaluado usando árboles binomiales, diferencias finitas, y simulación. La solución analítica dada por Black-Scholes para este problema es usado como referencia. Los cuatro métodos proporcionan resultados muy parecidos.

Algunas extensiones de esos métodos son adecuados tanto para opciones de tipo americano, como para la solución de Brennan y Schwartz a su problema de valoración clásico. Los beneficios de este acercamiento, también son discutidos.

## 5.1 Las aproximaciones numéricas.

### 5.1.1 Valoración de la opción real europea por procedimientos numéricos

Ciertos problemas de demandas contingentes pueden ser resueltos a través de expresiones analíticas con expresiones exactas, pero esto no ocurre con la mayoría de ellos. De no encontrar una solución analítica entonces, lo ideal es el uso de métodos numéricos. Para ilustrar esta discusión de las aproximaciones numéricas alternativas y su comparación con una simulación normal, definimos un simple problema de valoración de opciones reales y se resuelve usando diferentes métodos.

Suponga que se quiere valorar un proyecto con flujos del dinero en efectivo dependiente de un precio de rendimiento estocástico,  $S$ . Sin pérdida de generalidad, y para hacer más simple la exposición puede suponer que la inversión inicial es nula, *i.e.*  $I_0 = 0$  pero que requiere de una inversión  $I_1$  veces, al tiempo  $T_1$  lo cual, de ser realizado, genera flujos de dinero en efectivo con un valor presente en  $T_1$  de  $V(S)$ . Dependiendo de este valor  $V(S)$  el gerente puede decidir no invertir en  $T_1$ , en tal caso el proyecto debe ser abandonado en un valor de liquidación cero. El valor de este proyecto puede planearse como una opción de compra (*Call*) escrita sobre  $V(S)$  con precio de ejercicio  $I_1$  y tiempo de maduración  $T_1$ .

Para hallar el valor de este proyecto es posible usar la bien conocida fórmula de Black y Scholes para una opción de compra (*call*), bajo ciertos supuestos. Entre ellos, que  $S$  es un recurso comercializable, que los mercados sean completos y permitan realizar cobertura en contra del riesgo del precio, del rendimiento y, sobretodo, suponiendo que sus precios de retorno están bien modelados por un movimiento browniano con tasas de interés y volatilidad constantes. De ser válidos estos supuestos, entonces no hay necesidad de acudir a los procedimientos numéricos.

Sin embargo, la mayoría de los modelos de opciones reales, no tienen una solución analítica en forma exacta. Hay muchas razones para qué esto suceda, ello incluye a los modelos de incertidumbre más complejos y a las especificaciones de la flexibilidad de los proyectos. En estos casos, para valorar la demanda contingente también deben usarse procedimientos de solución numérica.

Hay muchos métodos numéricos que pueden usarse para valorar una demanda contingente de tipo europeo. De hecho, podemos mencionar procedimientos de simulaciones normales Monte Carlo como las más conocidas y, para discutir sus ventajas comparativas y desventajas, resolvemos el problema anterior mediante el uso de tres procedimientos numéricos alternativos: árboles binomiales, diferencias finitas, y simulación. Supondremos lo que Black y Scholes sostienen para tener una solución analítica que pueda usarse como una referencia para nuestros métodos numéricos aproximados.

Concretamente, supondremos que los precios de “riesgo-ajustado” siguen un movimiento browniano geométrico con una especificación de discretización como sigue:

$$\Delta S = rS\Delta t + \sigma S\sqrt{\Delta t}Z \quad (5.1)$$

Ante la elección de los parámetros :

- $r = 0.10$ ,
- $\sigma = 0.2$ ,
- $\Delta t$  son intervalos o pasos de tiempo,
- $Z$  son variables aleatorias con una distribución normal estándar para cada tiempo fijo.

El proyecto de la inversión descrito antes tiene la especificación siguiente:

- $V(S) = aS + b$
- $a = 10, b = 0$
- $l_1 = 10$

- $T_0 = 0$
- $T_1 = 1$

Como bien se ha mencionado antes, el valor de esta opción real puede ser directamente obtenida usando Black y Scholes, dado que el valor del proyecto con un precio de rendimiento inicial de 1 es 1.30. Resolver este problema de valoración implica el uso de las tres aproximaciones numéricas alternativas.

### 5.1.2 Árboles binomiales.

Las aproximaciones a través de árboles discretos de procesos estocásticos y su uso en la valoración de la opción han sido propuestas por Cox [Co-Ro-Ru], Rendleman y Barter [Re-Ba], y Sharpe [Sha]. Dado que, no es el propósito de este escrito abordar el tema de árboles binomiales, sólo recordaremos la generalidad de sus fundamentos. Los árboles binomiales suponen que esa incertidumbre en cualquier estado puede ser representada a través de dos estados alternativos. Estos dos estados se definen de tal modo que jugando con la distribución de los precios implícitos tan estrechamente vinculados con la distribución de probabilidad de la variable continua del estado subyacente. El proceso estocástico para modelar el precio del rendimiento es reacondicionado para restringir los valores y las probabilidades de los dos estados de igual manera que el retorno del precio esperado sobre el próximo intervalo de tiempo sea igual a  $r\Delta t$  y que su volatilidad sea  $\sigma\Delta t^{\frac{1}{2}}$ . Una solución pasa por definir los dos valores para la variable de estado como  $S_u$  y  $S_d$ , con probabilidades  $p$  y  $(1 - p)$ , respectivamente. Por otra parte,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (5.2)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (5.3)$$

por lo que también

$$d = \frac{1}{u}.$$

Y una expresión alternativa para la probabilidad en término de los valores anteriores viene dada por

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (5.4)$$



Dependiendo de la exactitud requerida es posible determinar el tamaño del intervalo de tiempo  $\Delta t$ , o equivalentemente, el número de subintervalos de la partición del tiempo total de madurez. En nuestro caso el tiempo de la madurez es  $T_1 = 1$ , y se ha dividido en en 10 subintervalos, por lo tanto, ponemos  $\Delta t = \frac{1}{10}$ . Una vez que el árbol binomial es obtenido y, por lo tanto, la distribución del precio subyacente también, la valoración del derivado (en nuestro caso el proyecto de la inversión) puede ser entendido como una demanda contingente en precio del rendimiento.

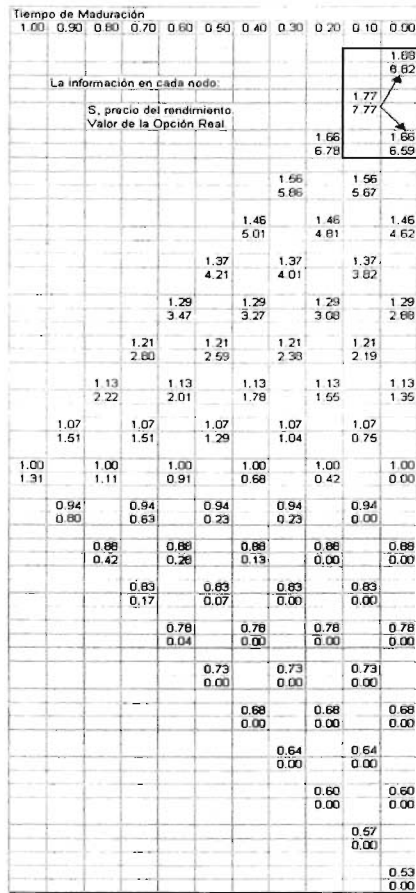


Figura 5.1: Árbol binomial.

La figura 5.1 presenta una solución del árbol binomial para nuestro problema de va-

loración de inversión. Un vector bidimensional que especifica en cada nodo del binomio, tanto al precio del rendimiento, como al valor de la opción. Obtener esos valores de la opción conduce al cálculo del flujo de dinero en el tiempo de maduración ( $T_1$ ) a través de

$$\text{Max}(V(S) - I_1; 0).$$

Estos valores se presentan en negritas al derecho extremo en 5.1.

El siguiente paso deriva en calcular el valor de la opción para cada uno de los nodos anteriores. Por ejemplo, en la parte superior en una esquina de la figura 5.1 se presenta una caja con tres nodos. El valor de la opción de 7.77 se calcula como el valor de la opción esperado en los dos siguientes nodos usando las probabilidades de riesgo neutral

$$\text{Valor de la opción} = [p \cdot 8.82 + (1 - p) \cdot 6.59] e^{r\Delta t} = 7.77.$$

El procedimiento se repite columna a columna de derecha a izquierda. El último nodo representa el valor de la opción actual de 1.31 por un precio del rendimiento inicial de 1. Esta opción es muy similar a nuestro valor de la solución analítico de Black y Scholes.

### 5.1.3 Diferencias finitas

Una alternativa, a los árboles binomiales, es usar diferencias finitas para resolver la ecuación de valoración. En este caso, podemos usar condiciones normales de no arbitraje para derivar una ecuación diferencial parcial para el valor de la demanda contingente. Para nuestro problema de opciones reales, la ecuación diferencial estándar Black-Scholes cuya solución es precisamente el valor de la opción real  $\mathbb{H}(S, t)$  es:

$$\frac{1}{2}\mathbb{H}_{ss}S^2\sigma^2 + rS\mathbb{H}_s - r\mathbb{H} + \mathbb{H}_t = 0. \quad (5.5)$$

Con las siguientes condiciones de maduración en el borde:

$$\mathbb{H}(S, t = T_1) = \text{Max}[V(S) - I_1; 0]. \quad (5.6)$$

Aquí  $S$  es una concentración del estado, de tal manera que:

$$\mathbb{H}(0, t) = 0. \quad (5.7)$$

En 1977, Eduardo Schwartz propuso la discretización de todas las variables de estado para el procedimiento de diferencias finitas, poniendo el valor de las demandas contingentes en el límite, reemplazando la primera y segunda derivada por una aproximación de diferencias finitas y, resolviendo usando una versión discreta de la ecuación diferencial parcial que representa la ecuación de valoración hacia atrás (*backward*). Hay dos aproximaciones de las diferencias finitas básicas: el método implícito y explícito. Aunque el anterior es más robusto, nosotros llevamos a cabo el último por las razones expuestas.

En nuestro problema, el valor del proyecto es una función de dos variables de estado: el precio del rendimiento,  $S$ , y el tiempo de maduración,  $T$ . El tiempo es discreto en  $M$  intervalos, y el precio  $S$  en  $N$  intervalos. La ecuación diferencial de Black y Scholes es reemplazada por las aproximaciones de la diferencias siguientes:

$$\Delta S = \frac{S_{\max}}{N}. \quad (5.8)$$

$$\Delta T = \frac{T_1}{M}. \quad (5.9)$$

También la derivada se discretiza mediante,

$$\mathbb{H}_s = \frac{\mathbb{H}_{i+1,j+1} - \mathbb{H}_{i+1,j-1}}{2\Delta S}. \quad (5.10)$$

y para la de segundo orden se tiene:

$$\mathbb{H}_{ss} = \frac{\mathbb{H}_{i+1,j+1} - 2\mathbb{H}_{i+1,j} + \mathbb{H}_{i+1,j-1}}{\Delta S^2}. \quad (5.11)$$

mientras que para la derivada temporal,

$$\mathbb{H}_t = \frac{\mathbb{H}_{i+1,j} - \mathbb{H}_{i,j}}{\Delta t}. \quad (5.12)$$

Una vez que estas aproximaciones se sustituyen en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$a_j \mathbb{H}_{i+1,j-1} + b_j \mathbb{H}_{i+1,j} + c_j \mathbb{H}_{i+1,j+1} = \mathbb{H}_{i,j}. \quad (5.13)$$

Más precisamente,

$$a_j = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left[ -\frac{1}{2} r j \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right]. \quad (5.14)$$

$$b_j = \frac{1}{1 + r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t). \quad (5.15)$$

$$c_j = \frac{1}{1+r\Delta t} \left[ \frac{1}{2} r j \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right]. \quad (5.16)$$

Así, dado el conocimiento de los valores de la demanda contingente en  $i+1$  el obtener los valores en  $i$  resulta sencillo. Por una parte, existe una condición al límite que da valores iniciales en  $i = M$ , y hace posible trabajar hacia atrás, es decir, desde  $i = M$  hasta  $i = 0$ .

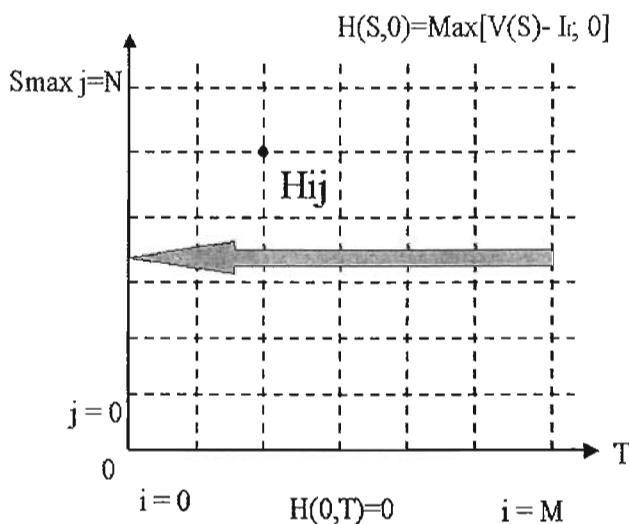


Figura 5.2: Discretización del estado del espacio .

La figura 5.2 presenta una solución obtenida mediante las diferencias finitas, y muestra el valor de la inversión. Las tres columnas del lado derecho calculan las constantes necesarias y en la siguiente columna, aparecen los valores a la izquierda, y el de la opción real en el límite. Es posible programar el cálculo de la opción real en el límite:

$$\text{Valor Opción en la fecha de Maduración} = \text{Max}(V(S) - I_1; 0).$$

Finalmente, se presenta el valor del proyecto para cada precio inicial (cuando el tiempo de maduración es 1). Para un precio del rendimiento inicial de 1, el valor de la opción calculado es 1.30, nuevamente muy similar a nuestros resultados anteriores.

Valor de la Opción Real																
Tiempo de Maduración (i)																
j	Precio	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	aj	bj	cj	
20	2.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10	0.6931	-0.5941	0.8911
19	1.9	9.2	9.3	9.2	9.3	9.2	9.2	9.2	9.2	9.1	9.1	9	0.6208	-0.4396	0.8089	
18	1.8	8.6	8.4	8.5	8.4	8.4	8.3	8.3	8.2	8.2	8.1	8	0.5525	-0.2931	0.7307	
17	1.7	7.6	7.7	7.6	7.6	7.5	7.4	7.4	7.3	7.2	8.1	7	0.4881	-0.1545	0.6564	
16	1.6	6.8	6.7	6.7	6.6	6.6	6.5	6.4	6.3	6.2	7.1	6	0.4277	-0.0238	0.5861	
15	1.5	5.9	5.8	5.7	5.7	5.6	5.5	5.4	5.3	5.2	6.1	5	0.3713	0.0990	0.5198	
14	1.4	4.9	4.8	4.8	4.7	4.6	4.5	4.4	4.3	4.2	5.1	4	0.3188	0.2139	0.4574	
13	1.3	4.0	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	4.1	3	0.2703	0.3208	0.3990	
12	1.2	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	3.1	2	0.2257	0.4198	0.3446	
11	1.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.3	1.2	2.1	1	0.1851	0.5109	0.2941	
10	1.0	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	1.1	0	0.1485	0.5941	0.2475	
9	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2	0	0.1158	0.6693	0.2050	
8	0.8	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0871	0.7366	0.1663	
7	0.7	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0624	0.7960	0.1317	
6	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0416	0.8475	0.1010	
5	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0248	0.8911	0.0743	
4	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0119	0.9267	0.0515	
3	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0030	0.9545	0.0327	
2	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	-0.0020	0.9743	0.0178	
1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	-0.0030	0.9861	0.0069	
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0000	0.9901	0.0000	

Figura 5.3: Solución de diferencias finitas para una inversión con una Opción Real Europea.

### 5.1.4 Simulación

En el año de 1977, Boyle [Boy] propuso una aproximación por simulación Monte Carlo para la valoración de la opción europea. El método está basado en la idea, en donde, simulando las trayectorias de los precios pueden aproximarse por distribuciones de probabilidad de los valores finales del recurso. Se calculan los flujos de efectivo de la opción para cada simulación y entonces se hacen los promedios. El flujo del dinero promedio descontado, usando la tasa de interés libre de riesgo, representa un punto estimado del valor de la opción.

Hay varias maneras de aumentar la exactitud de la estimación, la más simple es incrementar el número de trayectorias simuladas. La eficacia también puede ser mejorada usando técnicas de reducción de la varianza, incluyendo las aproximaciones a la variable de control y variables de prueba (*test variables*) (ver Hammersley y Handscomb [Ha-Ha]).

A continuación resolvemos nuestro problema de opciones reales.

Corrida	Tiempo de maduración (t)											V(S)	VPN
	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0		
1	1.00	0.98	0.98	0.91	1.00	0.99	0.95	0.97	0.95	0.91	0.88	0.00	0.00
	1.00	1.04	1.06	1.16	1.06	1.09	1.16	1.16	1.20	1.28	1.34	3.44	1.56
2	1.00	0.98	0.99	1.11	1.13	1.11	1.23	1.19	1.26	1.27	1.31	3.12	1.98
	1.00	1.04	1.05	0.95	0.94	0.98	0.89	0.94	0.91	0.91	0.90	0.00	1.49
3	1.00	0.98	1.07	1.09	1.06	1.01	1.06	1.00	1.06	1.08	1.25	2.50	1.30
	1.00	1.04	0.97	0.97	1.01	1.08	1.05	1.13	1.09	1.08	0.94	0.00	1.37
4	1.00	0.93	0.89	0.90	0.88	0.75	0.77	0.82	0.90	0.80	0.72	0.00	1.28
	1.00	1.09	1.16	1.17	1.22	1.43	1.41	1.34	1.24	1.40	1.58	5.81	1.68
5	1.00	0.92	0.88	0.72	0.68	0.64	0.60	0.59	0.60	0.67	0.70	0.00	1.30
	1.00	1.10	1.17	1.41	1.52	1.63	1.77	1.84	1.85	1.65	1.60	6.01	1.89
10	1.00	1.00	1.02	0.99	0.96	1.09	0.99	0.94	0.89	0.90	0.88	0.00	1.29
	1.00	1.02	1.02	1.07	1.12	1.00	1.11	1.18	1.27	1.29	1.33	3.33	1.43
15	1.00	1.07	1.08	1.15	1.09	1.14	1.24	1.43	1.45	1.54	1.61	6.10	1.33
	1.00	0.95	0.96	0.92	0.98	0.96	0.89	0.77	0.78	0.75	0.73	0.00	1.44
20	1.00	0.91	0.93	0.93	0.93	0.94	0.92	0.94	1.01	1.13	1.18	1.75	1.32
	1.00	1.11	1.11	1.13	1.16	1.16	1.22	1.21	1.15	1.03	1.01	0.10	1.37
25	1.00	1.10	1.10	1.06	1.13	1.18	1.23	1.24	1.35	1.35	1.35	3.53	1.31
	1.00	0.92	0.94	0.99	0.95	0.92	0.90	0.91	0.85	0.86	0.88	0.00	1.34
30	1.00	1.05	1.02	1.05	1.09	1.08	1.13	1.07	1.04	1.12	1.18	1.82	1.30
	1.00	0.97	1.01	1.01	0.99	1.02	0.99	1.06	1.11	1.05	1.01	0.15	1.30

Figura 5.4: Solución por simulación para una inversión con una Opción Real Europea.

La figura 5.4 muestra la simulación para valorar la opción real. Cada ejecución comienza con un precio de rendimiento inicial de 1, y usando una serie específica de números aleatorios, una trayectoria de precios es calculada. Por ejemplo, la primera trayectoria del precio acaba (tiempo de madurez de la opción) con un precio de rendimiento de 0.88. La siguiente columna de la derecha muestra los pagos finales de la opción para ese precio específico. Dado que, para ese precio el proyecto se abandonaría, el valor de la opción es cero.

Para llevar a cabo la técnica de reducción de varianza de la variable de prueba, el siguiente renglón en la figura 5.4 muestra la trayectoria del precio usando los mismos números aleatorios anteriores, pero con un cambio de signo. Dado que nuestros números aleatorios iniciales eran tales que el precio del rendimiento en la fecha de maduración era

bajo (0.88), pero cambiando los signos de los números aleatorios este segundo renglón proporciona una trayectoria con el precio del rendimiento en la fecha de maduración alto (1.34). Para este nuevo precio de rendimiento la opción es ahora valiosa y proporciona un flujo del dinero en efectivo de 3.44. Es fácil ver que un promedio de estas dos filas proporcionan una estimación de varianza baja de los flujos de dinero actuales que usando simplemente una sola fila.

Solo una vez, un número adecuado de trayectorias de precios se genera, el valor de la opción real puede ser calculado descontando los flujos promedio de dinero de la opción, libres de riesgo. Puede verse que en nuestro caso con una serie de sólo 30 trayectorias del precios independientes (60 renglones incluyendo sus valores de prueba) podemos obtener un mismo valor de cierre para nuestro problema de opción real (1.30). En la mayoría de los casos es necesario hacer un número mayor de corridas de simulaciones para obtener estimaciones exactas.

### 5.1.5 Comparando procedimientos numéricos alternativos.

Hemos presentado aplicaciones de tres aproximaciones numéricas alternativas al mismo problema de opciones reales. Cada uno de ellos tienen sus propios méritos y son especialmente útiles para ciertos tipos específicos de problemas de valoración.

Quizá el factor más importante, una vez elegido el acercamiento numérico apropiado es el tipo de opción que estamos intentando valorar. La simulación normal es un procedimiento de inducción hacia adelante, y como tal presenta problemas para valorar opciones de tipo americano. En situaciones en las que la estrategia óptima no es de conocida de antemano, los procedimientos de simulación no pueden valorar estas opciones correctamente. Como se dijo, muchas opciones reales permiten decisiones de mercados para cambiar la producción o niveles de inversión en diferentes puntos del tiempo, y se modela por consiguiente como opciones americanas. Las diferencias finitas y árboles binomiales, por otro lado, son procedimientos de la inducción dirigidos hacia atrás que pueden determinar políticas del ejercicio óptimas, valorando correctamente estas opciones americanas.

La debilidad en la simulación, manejando opciones americanas, se vuelve importante cuando hay trayectorias dependientes de flujos de dinero. Por ejemplo, los pagos de impuestos actuales normalmente dependen de ganancias del pasado y presentan una dificultad por todos los procedimientos de la inducción dirigidos hacia atrás. Siempre es posible evitar este problema definiendo nuevas variables de estado que representan un camino de información dependiente, pero esto puede aumentar la complejidad del modelo de una manera sustancial. Por consiguiente, en la presencia de camino-dependiente de los flujos del dinero en efectivo, la simulación es un mucho mejor procedimiento que los procedimientos de inducción dirigidos hacia atrás.

La principal característica que hace a la simulación tan atractiva es su habilidad para cubrir la incertidumbre de una manera muy simple. La reciente tendencia en modelar la incertidumbre de los precios usando modelos de múlti-factores es más sencillo de llevar a cabo usando simulación que usando otros acercamientos numéricos. Algo similar puede decirse en el uso de procesos estocásticos complejos para modelar la dinámica de éstos factores de riesgo, que también son más simples usando simulación.

Finalmente, el hecho que el costo de la informática ha estado bajando dramáticamente en los últimos años y que esta tendencia no muestra ninguna señal de debilitarse en un futuro cercano, se presenta una perspectiva favorable para el uso creciente de la simulación. Es más, su inconveniente mayor, la incapacidad para manejar opciones del tipo americano con éxito, ha sido tema para nuevas investigaciones en recientes años, como se describirá en la sección siguiente. Con costos computacionales más bajos podemos esperar manejar el aumento en la complejidad en los modelos, y obtener un uso reforzado en técnicas de simulación.

### **5.1.6 Aproximación del valor de la mina por diferencias finitas.**

En lo siguiente aplicamos el método de diferencias finitas implícitas, al modelo planteado por Brennan y Schwartz del valor de una mina: en términos reales, descrito en la sección 4.2.3. Para facilitar los cálculos se supone que la mina solo puede ser explotada a una



tasa fija  $q$ , de este modo, las EDP que representan a este proyecto son:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 v_{ss} + (r - k)sv_s - qv_Q + q(s - a) - \tau = (r + \lambda_1)v \quad (5.17)$$

cuando la mina se encuentra abierta. Y

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 w_{ss} + (r - k)sw_s - f = (r + \lambda_0)w, \quad (5.18)$$

cuando la mina está cerrada

Para aproximar las derivadas parciales de primer orden respecto a la variable de estado  $s$  (precio del cobre) de las ecuaciones (5.17) y (5.18), adoptamos las siguientes diferencias simétricas:

$$v_s = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta s}, \quad (5.19)$$

$$w_s = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta s}, \quad (5.20)$$

para aproximar la derivada parcial de segundo orden respecto de la variable  $s$ , empleamos las siguientes diferencias:

$$v_{ss} = \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 2v_{i,j}}{\Delta s^2}, \quad (5.21)$$

$$w_{ss} = \frac{w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 2w_{i,j}}{\Delta s^2}. \quad (5.22)$$

Por último para aproximar la derivada parcial de primer orden respecto de la variable de estado  $Q$  (reserva de cobre en la mina) utilizamos la siguiente diferencia *forward*:

$$v_Q = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta Q}.$$

Sustituyendo las diferencias anteriores en la ecuación (5.17) obtenemos un método implícito para aproximar el valor de la mina abierta. esto es,

$$(r + \lambda_1)v_{i,j} = \frac{1}{2}\sigma^2\Delta s^2 j \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 2v_{i,j}}{\Delta s^2} + (r - k)\Delta s j \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta s} - q \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta Q} + q(\Delta s j - a) - \tau,$$

recuerde que  $dQ = qdt$ , por tanto,  $\Delta Q = q\Delta t$ . Si  $\Delta t = 1$  entonces  $\Delta Q = q$ , ordenando,

$$v_{i+1,j} = v_{i,j+1} \frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 + (r - k)j) + v_{i,j} (1 - \sigma^2 j^2 - (r + \lambda_1)) + v_{i,j-1} \frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 - (r - k)j) + q(\Delta s j - a) - \tau,$$

Para un manejo más sencillo de está ecuación, definamos las variables siguientes:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 + (r - k)j), \\ b_j &= (1 - \sigma^2 j^2 - (r + \lambda_1)), \\ c_j &= \frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 - (r - k)j). \end{aligned}$$

De este modo, la ecuación resultante queda escrita de la siguiente manera:

$$v_{i,j+1}a_j + v_{i,j}b_j + v_{i,j-1}c_j + q(\Delta s j - a) - \tau = v_{i+1,j} \quad (5.23)$$

Con las condiciones en el borde, con un supuesto  $S_{Max}$  (máximo valor alcanzado por el precio del cobre<sup>1</sup>) y el número total de reservas iniciales  $Q_{Max}$ , se puede determinar el valor de la mina en operación para cualquier precio de cobre  $s$  y número de reservas  $Q$ .

<sup>1</sup>se obtiene de considerar la condición de borde  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{v(s,Q)}{s}$

La cuadrícula de valores en el contorno y el diagrama para avanzar adelante en el tiempo, se presenta en la figura 5.5.

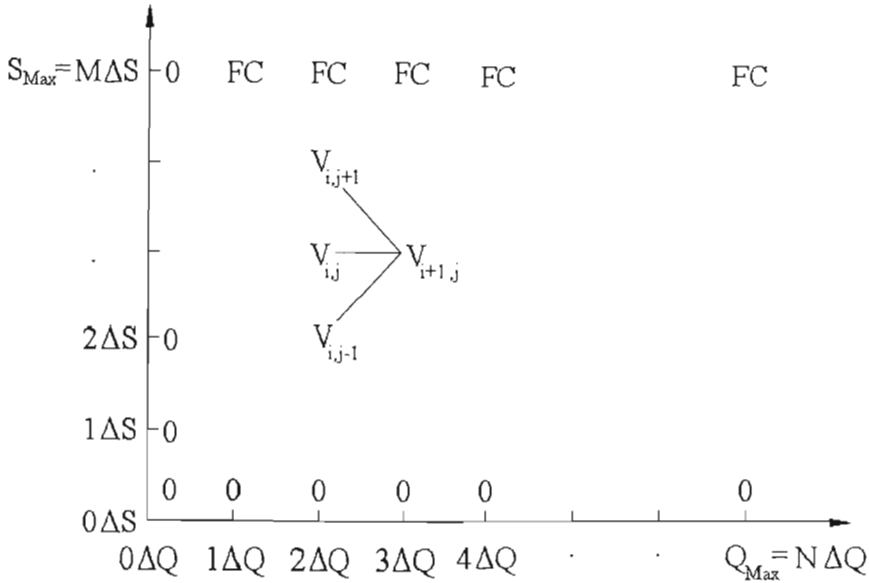


Figura 5.5: Diagrama del método de diferencias finitas implícitas.

Por otra parte, sustituyendo las diferencias (5.20) y (5.22), en la ecuación que describe el comportamiento de la mina cerrada (5.18), se obtiene la siguiente ecuación.

$$\frac{1}{2}\sigma^2\Delta s^2j^2\frac{w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 2w_{i,j}}{\Delta s^2} + (r - k)sj\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta s} - f = (r + \lambda_0)w_{i,j}.$$

Note, que el valor de la mina-cerrada, no depende de la cantidad de reserva de cobre  $Q$ , es por este motivo que el subíndice  $i$  no avanza o retrocede en ningún sumando, en base a esta conjetura lo podemos eliminar. Ordenando y agrupando términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$w_{j+1} \frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 + (r - k)j) - w_j (\sigma^2 j^2 + (r + \lambda_0)) - w_{j-1} \frac{1}{2} ((r - k)j - \sigma^2 j^2) = f$$

Con objeto de un manejo más claro de la ecuación anterior, se definen las siguientes variables.

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 + (r - k)j), \\ \beta_j &= (\sigma^2 j^2 + (r + \lambda_0)), \\ \gamma_j &= \frac{1}{2} ((r - k)j - \sigma^2 j^2),\end{aligned}$$

reescribiendo,

$$w_{j+1}\alpha_j - w_j\beta_j - w_{j-1}\gamma_j = f$$

Sin embargo, surge un pequeño problema al determinar el valor de la mina para cada precio del cobre, ya que, las condiciones en el borde con que contamos, a saber  $w(0) = 0$  y  $w(s_{max}) = -f$ , no son sucesivas. Por tanto, para corregir está inconsistencia, se definen las variables siguientes.

$$\begin{aligned}\alpha_j^* &= \frac{f}{\alpha_j}, \\ \beta_j^* &= \frac{\beta_j}{\alpha_j}, \\ \gamma_j^* &= \frac{\gamma_j}{\alpha_j},\end{aligned}$$

Sustituyendo y organizando términos

$$w_{j+1} = \alpha_j^* + w_j\beta_j^* + w_{j-1}\gamma_j^* \quad (5.24)$$

Ahora, procedemos de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \alpha_1^* + w_0\beta_1^* + w_1\gamma_1^*, \\
 w_3 &= \alpha_2^* + w_1\beta_2^* + w_2\gamma_2^*, \\
 w_4 &= \alpha_3^* + w_2\beta_3^* + w_3\gamma_3^*, \\
 &\vdots \\
 w_M &= \alpha_{M-1}^* + w_{M-2}\beta_{M-1}^* + w_{M-1}\gamma_{M-1}^*,
 \end{aligned}$$

Se definen las variables  $u_j$  y  $v_j$ , de la siguiente manera recursiva, A  $w_2$ , se le designan  $u_1 = \alpha_1^* + w_0\beta_1^*$  y  $v_1 = \gamma_1^*$ , entonces,  $w_2 = u_1 + v_1w_1$ , para determinar a  $u_2$  y  $v_2$  se sigue el camino siguiente,

$$\begin{aligned}
 w_3 &= \alpha_2^* + w_1\beta_2^* + w_2\gamma_2^*, \\
 w_3 &= \alpha_2^* + w_1\beta_2^* + (u_1 + w_1v_1)\gamma_2^*, \\
 w_3 &= \alpha_2^* + w_1\beta_2^* + \gamma_2^*u_1 + w_1v_1\gamma_2^*, \\
 w_3 &= \alpha_2^* + \gamma_2^*u_1 + w_1(v_1\gamma_2^* + \beta_2^*),
 \end{aligned}$$

entonces,  $u_2 = \alpha_2^* + \gamma_2^*u_1$ ,  $v_2 = v_1\gamma_2^* + \beta_2^*$  y  $w_3 = u_2 + v_2w_1$ , Se procede de la misma forma para determinar  $u_3$  y  $v_3$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 w_4 &= \alpha_3^* + w_2\beta_3^* + w_3\gamma_3^*, \\
 w_4 &= \alpha_3^* + (u_1 + w_1v_1)\beta_3^* + (u_2 + w_1v_2)\gamma_3^*, \\
 w_4 &= \alpha_3^* + u_1\beta_3^* + u_2\gamma_3^* + w_1(v_1\beta_3^* + v_2\gamma_3^*),
 \end{aligned}$$

por tanto,  $w_4 = u_3 + v_3w_1$  con  $u_3 = \alpha_3^* + u_1\beta_3^* + u_2\gamma_3^*$  y  $v_3 = v_1\beta_3^* + v_2\gamma_3^*$ , Siguiendo la misma idea se determina  $u$  y  $v$ , para cualquier  $j > 2$

$$\begin{aligned} u_j &= \alpha_j^* + u_{j-2}\beta_j^* + u_{j-1}\gamma_j^* \quad \text{y} \\ v_j &= v_{j-2}\beta_j^* + v_{j-1}\gamma_j^*. \end{aligned}$$

De esta manera  $w_M$ , queda escrito de la siguiente forma,

$$w_M = u_{M-1} + w_1 v_{M-1} \quad (5.25)$$

Y como,  $w_M$  es conocido (por ser una condición de borde), solo resta despejar a  $w_1$ . De este modo, conseguimos dos valores consecutivos de la mina ( $w_0$  y  $w_1$ ) y que juntos con la ecuación  $w_{j+1} = \alpha_j^* + w_j\beta_j^* + w_{j-1}\gamma_j^*$  producen el valor de la mina-cerrada para cualquier precio del cobre.

Si el modelo no considerase, que existe un costo por cambiar de estado operacional de la mina (cierre, apertura o abandono), entonces, para determinar el valor global de la mina para cada precio del cobre y para cualquier número de reserva, solo se tendría que elegir el valor máximo de entre los tres valores posibles de la mina, esto es,

$$\max (\text{Valor de mina-abierta, Valor de mina-cerrada, Valor de abandonar})$$

Que resulta de ejecutar simultáneamente los métodos de aproximación detallados anteriormente.

## Conclusiones.

En este trabajo de tesis ha sido descrito el entorno de evaluación de las opciones financieras, con objeto de presentar el nuevo enfoque de las mismas sobre activos reales, es decir, mostrar lo que se conoce como teoría de las opciones reales, resaltando la importancia de dicha metodología a la hora de evaluar los proyectos de inversión inestables y centrando nuestra atención en proyectos de inversión para la explotación de recursos no renovables. Además, hemos abordado las ventajas y desventajas al utilizar este nuevo enfoque de opciones reales sobre la metodología tradicional en la evaluación de proyectos de inversión.

De este modo, utilizando las ventajas de las opciones reales, sé presentó el modelo planteado por Brennan y Schwartz en 1985, dicho modelo analiza la explotación de una mina de cobre que cuenta con una tasa de producción variable, los parámetros considerados para su evaluación son: el nivel físico de reserva de cobre en la mina, tiempo de concesión y el precio *spot* del recurso, del cual, el valor de la mina hereda la incertidumbre. El modelo revela las diversas dificultades para su valorización debido a las flexibilidades con las que cuentan los dueños de este yacimiento, dentro de las cuales se encuentran involucradas la detección temporal de la producción, su reanudación, o bien, su abandono definitivo.

En conclusión hemos mostrado que la incorporación de las opciones reales en la evaluación de los proyectos de inversión proporciona un aumento en su valor, aumento que se conoce como el *valor de la flexibilidad*.

De este manera, para el caso de la mina, tenemos que su valor total consiste del VPN de los flujos futuros de efectivo más el valor de las opciones de cierre temporal, abandono

y apertura. Esto muestra que el valor final del yacimiento utilizando la metodología de opciones reales es mucho mayor que el valor obtenido únicamente al aplicar los métodos tradicionales de evaluación.

Por otra parte, la determinación del valor de la mina bajo una estrategia óptima de operación  $\phi^*$  satisface además el problema de optimización y determina los dos estados posibles de operación (cierre y apertura) de la mina con sus respectivas EDP, con adecuadas condiciones de frontera y de equilibrio que garantizan la existencia y unicidad de la solución. Éllo permite concluir que una aproximación a su valor, puede ser realizada mediante el empleo del método de diferencias finitas explícitas.

Por último, los trabajos a futuro de esta tesis son:

- 1.- Extender las ideas a la explotación de recursos **renovables** (pesquerías, madera, ganado, etc.) utilizando modelos de depredación, morbilidad, migración, entre otros.
- 2.- Resolver la ecuación diferencial mediante elementos infinitos.
- 3.- Introducir condiciones reales para el manejo del recurso. Penalizaciones por no entrega, retrasos en la distribución del recurso, retrasos en la entrega de material por parte de los proveedores, por mencionar algunos.
- 4.- Modificar las hipótesis de mercados completos.
- 5.- Aproximar mediante diferencias finitas la solución de la EDP con el empleo de las tres variables de estado.



## Parte III

### Anexos.

# Anexo A

## A.1.- El movimiento browniano.

### Definición.

Un movimiento browniano (MB) es un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  de valor real, con incrementos independientes y estacionarios, i.e.,

1.- El mapeo  $s \rightarrow X_s(\omega)$  es continuo c.s., en  $\mathbb{P}$ , es decir.

Para cada  $\omega \in \Omega$  asociamos el mapeo de  $\mathbb{R}^+$  a  $E$ :  $s \rightarrow X_s(\omega)$

2.- Incrementos independientes: si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ .

3.- Incrementos estacionarios: si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$

si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un MB, entonces  $X_t - X_0 \sim N(rt, \sigma^2 t)$  y si  $X_0 = 0$  c.s.  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{E}(X_t) = 0$ ,  $\mathbb{E}(X_t^2) = t$  diremos que es: un movimiento browniano estándar con distribución

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Definición de MB respecto a una filtración.

Un proceso estocástico continuo de valor real es un  $\{\mathcal{F}_t\}$ -MB si este satisface:

1.- Para cualquier  $t \geq 0$ ,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

2.- Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  y tiene la misma ley de distribución que  $X_{t-s} - X_0$

La pregunta obligada es: ¿Qué es un proceso continuo? basta seguir una guía de tres principios. Primero un valor real que es tomado se puede expresar con funciones arbitrarias y cualquier número real se puede considerar como un valor. Segundo, el valor puede cambiar de un momento a otro; y tercero, el proceso cambia continuamente, el

valor no puede dar saltos instantáneos. En otras palabras, si el valor cambia de 1 a 1.05 debe haber pasado por todos los valores intermedios.

## A.2.- Martingalas.

### Definición.

Sea  $\{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}$  una filtración del espacio de probabilidad  $(\Omega, \{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}, \mathbb{P})$ , y  $Y_j$  una sucesión de variables aleatorias que es adaptada a  $\{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}$ . Entonces llamaremos martingala al par  $(Y_j, \{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}) = \{(Y_j, \mathcal{F}_j)\}_{j \geq 0}$ , si para toda  $j \geq 0$  se tiene que

- a)  $\mathbb{E}(|Y_j|) < \infty$ , y
- b)  $\mathbb{E}(Y_{j+1}|\mathcal{F}_j) = Y_j$ .

De la misma forma definiremos supermartingalas (submartingalas). Sea  $(\Omega, \{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad con filtración,  $\{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}$  y  $Y_j$  una sucesión de variables aleatorias que está adaptada a  $\{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}$ . Entonces llamaremos supermartingala (submartingala) al par  $(Y, \{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0}) = \{(Y_j, \{\mathcal{F}_j\}_{j \geq 0})\}$ , si para toda  $j \geq 0$  son verificadas las siguientes condiciones:

- a)  $\mathbb{E}(|Y_j|) < \infty$ ,
- b)  $\mathbb{E}(Y_{j+1}|\mathcal{F}_j) \geq Y_j$ , respectivamente  $\mathbb{E}(Y_{j+1}|\mathcal{F}_j) \leq Y_j$ .

## Anexo B: Valoración de opciones financieras por diferencias finitas.

En este anexo son expuestos algunos ejemplos de como la estructura de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) puede ser aprovechada para valorizar el precio de las opciones. La idea es aplicar el método de diferencias finitas para solucionar la EDP de Black-Scholes. Comenzaremos por recordar el método de aproximación derivado y como las condiciones de frontera pueden conducir a un modelo de opciones específico.

### b.1.- Aplicación del método de diferencias finitas a la ecuación de Black-Scholes.

En principio podemos recordar que el valor de una opción al tiempo  $t$  escrita sobre el activo subyacente  $S(t)$  es una función  $f(t, S)$  que satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (5.26)$$

con una condición de frontera adecuada que caracteriza el tipo de la opción. Se pueden obtener ecuaciones distintas si las hipótesis son modificadas y es introducida una dependencia en la trayectoria, pero esta ecuación será el punto de partida para comprender la aplicación del método numérico basado en diferencias finitas para el precio de una opción. Para resolver por diferencias finitas una EDP en primer termino hay que establecer una cuadrícula de valores, en este caso como la función depende del tiempo  $t$  y del activo  $S$  con respecto a dos variables. Sea  $T$  el tiempo de expiración de la opción y  $S_{max}$  un supuesto máximo valor que no puede ser alcanzado por el activo subyacente  $S(t)$  por lo menos dentro del horizonte considerado. Necesitamos el valor  $S_{max}$  para propósitos computacionales ya que el dominio para la EDP no es acotado con respecto al precio del activo subyacente, en este sentido  $S_{max}$  juega el papel de  $+\infty$ . De esta manera la cuadrícula de puntos de  $(t, S)$  está formada por

$$t = 0, \delta t, 2\delta t, \dots, N\delta t = T,$$

$$S = 0, \delta S, 2\delta S, \dots, M\delta S = S_{max}$$

En adelante para la cuadrícula se usará la notación  $f_{i,j} = f(i\delta t, j\delta S)$ .

Recordemos las diferentes opciones que tenemos para aproximar la EDP (5.30):

- Diferencia hacia delante (*Forward*):

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta S} \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta t}$$

- Diferencia hacia atrás (*Backward*):

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\delta S} \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\delta t}$$

- Diferencia simétrica

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta t}$$

- Diferencia para la derivada de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\delta S} \right) / \delta S \\ &= \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\delta S^2}. \end{aligned}$$

Dependiendo de la combinación de estructuras que utilicemos para discretizar la ecuación, acabaremos con diferentes aproximaciones, explícita o implícita, las cuales se abordan en la siguiente sección.

La condición de frontera es otra situación en la que deberemos tener cuidado. A la fecha de expiración se cuenta con la condición final,

$$f(T, S) = \max\{S - X, 0\} \quad \forall S$$

para una opción de compra (*call*) con precio de ejercicio  $X$ , y

$$f(T, S) = \max\{X - S, 0\} \quad \forall S$$

para una opción de venta (*put*). Cuando se consideremos la condición de frontera con respecto al precio del activo, el problema no resulta fácil, puesto que tendremos que resolver la ecuación numéricamente en una región acotada, mientras que el dominio es ilimitado con respecto al precio del activo. Veamos unos ejemplos para aclarar esta situación.

**Ejemplo 1** Consideremos primero una opción europea de venta (*put*). Cuando el precio del activo  $S(t)$  es muy elevado, la opción pierde su valor, ya que podemos estar seguros que la opción está fuera del dinero, por lo que

$$f(S_{max}, t) = 0.$$

Cuando el precio del activo sea igual a cero  $S(t) = 0$ , y. Dado que el modelo del activo es dinámico, entonces el precio del activo permanecerá nulo. De esta manera la ganancia a la fecha de expiración será igual a  $X$  descontando de regreso en el tiempo  $t$ , tendremos

$$f(t, 0) = X e^{-r(T-t)}.$$

En notación de la cuadrícula o mallado

$$\begin{aligned} f_{N,j} &= \max[X - j\delta S, 0] & j = 0, 1, \dots, M \\ f_{i,0} &= X e^{-r(N-i)\delta t} & i = 0, 1, \dots, N \\ f_{i,M} &= 0 & i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2** Ahora pensemos que se tiene una opción europea de compra (*call*) razonando como en el ejemplo anterior. Cuando el precio del activo es  $S(t) = 0$ , entonces la opción pierde su valor:

$$f(t, 0) = 0.$$

Para un precio elevado del activo  $S(t)$ , podemos estar seguros que la opción estará dentro del dinero a la fecha de expiración y conseguiremos una ganancia de  $S(T) - X$ . Para determinar el valor al tiempo  $t$  se requiere descontar el valor de  $X$  y tener en cuenta que el precio del activo subyacente libre de arbitraje al tiempo  $t$  es simplemente  $S(t)$ . Entonces una condición de frontera adecuada es

$$f(S_{max}, t) = S_{max} - X e^{-r(T-t)}.$$

En notación de mallado, tenemos

$$\begin{aligned} f_{N,j} &= \max[j\delta S - X, 0] & j = 0, 1, \dots, M, \\ f_{i,0} &= 0 & i = 0, 1, \dots, N, \\ f_{i,M} &= M\delta S - X e^{-r(N-i)\delta t} & i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

El manejo de las condiciones de frontera para las opciones europeas y opciones barrera, como se ha visto, resulta un tanto sencillo. Sin embargo, el manejo de las opciones americanas resulta ms complicado, ya que dichas opciones deberán contar con una condición de frontera para él ejercicio temprano; es decir se tendrá que tomar en cuenta para que precio del activo y a que tiempo (si es que existe) el ejercicio de la opción es óptimo. Surgiendo de esta manera una condición de frontera libre que se deberá determinar en el proceso de solución.

## **b.2.- Precio de una opción europea utilizando un método explícito**

Una aproximación inicial para resolver la ecuación (5.30), pasa por analizar una opción europea de venta (*put*). Aproximando la derivada con respecto a  $S$  por una diferencia central y la derivada con respecto al tiempo por una diferencia hacia atrás (*backward*). Sin embargo, no es única elección posible dado que cualquier elección puede ser compatible

con la condición de frontera. El resultado al utilizar esta combinación es el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\delta t} + r_j \delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\delta S^2} = r f_{i,j}.$$

La ecuación puede ser resuelta en retroceso en el tiempo utilizando las condiciones de frontera del ejemplo 1, y el conjunto de condiciones finales. Sea  $i = N$  en la ecuación anterior; dada la condición final, pero se tiene una cantidad desconocida.  $f_{N-1,j}$ , expresada como una función de tres valores de la opción conocidos. De esta manera reescribiendo la ecuación, se consigue un método explícito:

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1} \quad i = 0, 1, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, M-1, \quad (5.27)$$

Donde

$$\begin{aligned} a_j^* &= \frac{1}{2} \delta t (\sigma^2 j^2 - r_j), \\ b_j^* &= 1 - \delta t (\sigma^2 j^2 + r), \quad y \\ c_j^* &= \frac{1}{2} \delta t (\sigma^2 j^2 + r_j). \end{aligned}$$

este método es simple y posible de implementar en Matlab. El código es presentado en la figura ??.

### b.3.- Precio de una opción europea utilizando un método implícito.

Para resolver la inestabilidad del método explícito, se recurre a un método implícito. Este se obtiene por utilizar diferencias hacia delante (*forward*) para aproximar las derivadas parciales con respecto al tiempo. De esta combinación se obtiene la siguiente ecuación.

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta t} + r_j \delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\delta S^2} = r f_{i,j}.$$



```

function precio=OpErVeEx(S0,X,r,T,sigma,Smax,dS,dt)
M=round(Smax/dS);
dS=Smax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
matval=zeros(M+1,N+1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1)';
veti=0:N;
vetj=0:M;
matval(:,N+1)=max(X-vetS,0);
matval(1,:)=X*exp(-r*dt*(N-veti));
matval(M+1,:)=0;
a=0.5*dt*(sigma^2*vetj-r).*vetj
b=1-dt*(sigma^2*vetj.^2+r)
c=0.5*dt*(sigma^2*vetj+r).*vetj
for i=N:-1:1
    for j=2:M
        matval(j,i)=max(X-dS*j,a(j)*matval(j-1,i+1)+b(j)*
            matval(j,i+1)+c(j)*matval(j+1,i+1));
    end
end
jdown=floor(S0/dS);
jup=ceil(S0/dS);
if jdown==jup
    precio=matval(jdown+1,1);
else
    precio=matval(jdown+1,1)+(S0-jdown*dS)*(matval(jup+1,1)
        -matval(jup+1,1))/dS;
end
end

```

Figura 5.6: Código en Matlab para el precio de una opción europea por método explícito.

Que se puede reescribir, para  $j = 1, 2, \dots, M - 1$  e  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  como

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j}, \quad (5.28)$$

donde, para cada  $j$ ,

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2} r j \delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t, \\ b_j &= 1 + \sigma^2 j^2 \delta t + r \delta t, \quad y \\ c_j &= -\frac{1}{2} r j \delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t. \end{aligned}$$

Aquí tenemos tres valores desconocidos ligados a un valor conocido. Inicialmente, para cada línea de tiempo se cuenta con  $M - 1$  ecuaciones con  $M - 1$  incógnitas; junto con la condición de frontera que proporciona los valores faltantes para cada línea de tiempo y la condición final que brinda el valor en la última. De esta manera, y como en el caso explícito, ir en retroceso en el tiempo, resolviendo para  $i = N - 1, \dots, 0$  una serie de sistemas de ecuaciones lineales. A continuación mostramos el sistema para la línea de tiempo  $i$ :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} & & & \\ & & & & & & a_{M-1} & b_{M-1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ \vdots \\ f_{i,M-2} \\ f_{i,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i+1,1} \\ f_{i+1,2} \\ f_{i+1,3} \\ \vdots \\ f_{i+1,M-2} \\ f_{i+1,M-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 f_{i+1,0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1} f_{i+1,M} \end{bmatrix}.$$

Notemos que esta matriz es tridiagonal y constante para cada línea de tiempo  $i$ . El sistema puede ser resuelto por una factorización  $LU$ . Todo esto aparece en el código en Matlab mostrado en la figura ??.

Los resultados son exactos y pueden ser mejorados realizando una refinación en la cuadrícula de valores sin incurrir en un riesgo de inestabilidades numéricas. Otro camino

```

function precio=OpEuVeIm(S0,X,r,T,sigma,Smax,dS,dt)
M=round(Smax/dS);
dS=Smax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
matval=zeros(M+1,N+1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1)';
veti=0:N;
vetj=0:M;
matval(:,N+1)=max(X-vetS,0);
matval(1,:)=X*exp(-r*dt*(N-veti));
matval(M+1,:)=0;
a=0.5*(r*dt*vetj-sigma^2*dt*(vetj.^2));
b=1+sigma^2*dt*(vetj.^2)+r*dt;
c=-0.5*(r*dt*vetj+sigma^2*dt*(vetj.^2));
C=diag(a(3:M),-1)+diag(b(2:M))+diag(c(2:M-1),1)
[L,U]=lu(C)
aux=zeros(M-1,1)
for i=N:-1:1
    aux(1)=-a(2)*matval(1,i);
    mv=matval(2:M,i+1)
    matval(2:M,i)=U\ (L\ (matval(2:M,i+1)+aux));
end
matval
jdown=floor(S0/dS);
jup=ceil(S0/dS);
if jdown==jup
    precio=matval(jdown+1,1);
else
    precio=matval(jdown+1,1)+(S0-jdown*dS)*(matval(jup+1,1)
        -matval(jup+1,1))/dS;
end
end

```

Figura 5.7: Código en Matlab para el precio de una opción europea por método implícito.

para mejorar la exactitud es el aprovechamiento del método de Crank-Nicholson; que desarrollaremos en la siguiente apartado para una opción barrera.

#### b.4.-Precio de una opción barrera utilizando el método de Crank-Nicholson.

El método de Crank-Nicholson mejora la exactitud en la solución puesto que emplea la combinación del método explícito y el método implícito. Aplicando esta idea en la ecuación de Black-Scholes nos conduce a la siguiente ecuación para el mallado:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\delta t} + \frac{rj\delta S}{2} \left( \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\delta S} \right) + \frac{rj\delta S}{2} \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} \right) \\ + \frac{\sigma^2 j^2 (\delta S)^2}{4} \left( \frac{f_{i-1,j+1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1}}{(\delta S)^2} \right) \\ + \frac{\sigma^2 j^2 (\delta S)^2}{4} \left( \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\delta S)^2} \right) \\ = \frac{r}{2} f_{i-1,j} + \frac{r}{2} f_{i,j}. \end{aligned}$$

Podemos volver a expresar esta ecuación como

$$-\alpha_j f_{i-1,j-1} + (1 - \beta_j f_{i-1,j} - \gamma_j f_{i-1,j+1} = \alpha_j f_{i,j-1} + (1 + \beta_j) f_{i,j} + \gamma_j f_{i-1,j+1}.$$

Donde

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{\delta t}{4} (\sigma^2 j^2 - rj), \\ \beta_j &= -\frac{\delta t}{2} (\sigma^2 j^2 + r), \quad y \\ \gamma_j &= \frac{\delta t}{4} (\sigma^2 j^2 + rj). \end{aligned}$$

En este caso tenemos con una opción barrera *down-and-out*. Así, únicamente se considera el dominio dentro de  $S \geq S_b$ ; y junto con las condiciones de frontera

$$f(t, S_{max}) = 0 \quad \text{y} \quad f(t, S_b) = 0.$$

La ecuación en forma matricial también queda descrita por

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{i-1} = \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_i, \quad (5.29)$$

Donde

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 & -\gamma_1 & & & & & \\ -\alpha_2 & 1 - \beta_2 & -\gamma_2 & & & & \\ & -\gamma_3 & 1 - \beta_3 & -\gamma_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\gamma_{M-2} & 1 - \beta_{M-2} & -\alpha_{M-2} & \\ & & & & -\gamma_{M-1} & 1 - \beta_{M-1} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 + \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ \alpha_2 & 1 + \beta_2 & \gamma_2 & & & & \\ & \gamma_3 & 1 + \beta_3 & \gamma_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \gamma_{M-2} & 1 + \beta_{M-2} & \alpha_{M-2} & \\ & & & & \gamma_{M-1} & 1 + \beta_{M-1} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_i = [f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,M-1}]^T.$$

El código desarrollado en Matlab se muestra en la figura ??.

## b.5.-Opciones americanas.

Para determinar el precio de una opción europea por el método de diferencias finitas

```

function precio=OpErVeEx(S0,X,r,T,sigma,Smax,dS,dt)
M=round(Smax/dS);
dS=Smax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
matval=zeros(M+1,N+1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1)';
veti=0:N;
vetj=0:M;
matval(:,N+1)=max(X-vetS,0);
matval(1,:)=X*exp(-r*dt*(N-veti));
matval(M+1,:)=0;
a=0.5*dt*(sigma^2*vetj-r).*vetj
b=1-dt*(sigma^2*vetj.^2+r)
c=0.5*dt*(sigma^2*vetj+r).*vetj
for i=N:-1:1
    for j=2:M
        matval(j,i)=max(X-dS*j,a(j)*matval(j-1,i+1)+b(j)*
            matval(j,i+1)+c(j)*matval(j+1,i+1));
    end
end
jdown=floor(S0/dS);
jup=ceil(S0/dS);
if jdown==jup
    precio=matval(jdown+1,1);
else
    precio=matval(jdown+1,1)+(S0-jdown*dS)*(matval(jup+1,1)
        -matval(jup+1,1))/dS;
end
end

```

Figura 5.8: Algoritmo en Matlab para el precio de una opción europea barrera utilizando Crank-Nicholson.

es por supuesto muy instructivo, este no es muy usual. Ya que se cuenta con una solución analítica para la ecuación de Black-Scholes. Sin embargo, las opciones americanas no cuentan con dicha solución analítica y, es en esta área, dónde el método de diferencias finitas resulta muy valioso

La principal dificultad para determinar el precio de una opción americana proviene de la condición de frontera libre debido a la posibilidad de ejercer antes de la fecha de expiración. Para evitar el arbitraje, el valor de la opción deberá en cada punto del espacio  $(t, S)$  no puede ser menor que el valor intrínseco (i.e., la ganancia inmediata que se obtiene cuando la opción es ejercida). Para una opción americana de venta (*put*) esto significa

$$f(t, S) \geq \max\{X - S(t), 0\}.$$

Esta condición no resulta tan complicada al menos en un método explícito debido a que simplemente hay que aplicar el procedimiento de f.2 con una pequeña modificación. Después calcular  $f_{i,j}$ , revisando debidamente la posibilidad de ejercer temprano la opción, y el conjunto

$$f_{i,j} = \max[f_{i,j}, X - j\delta S].$$

Debido a la inestabilidad que surge al emplear un método explícito, decidimos adoptar un método implícito. En este caso, existe una complicación adicional, como la relación requiere el reconocimiento de los valores alrededor de  $f_{i,j}$ . Para superar esta dificultad, recurrimos un método iterativo para resolver el sistema lineal en lugar de un método directamente basado en factorización LU. Por ello, consideramos el método de Gauss-Seidel.

Dado un sistema de ecuaciones lineales tales como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

se aplicará el método iterativo, comenzando de un punto inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^N a_{ij} x_i^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, N,$$

donde  $k$  es el contador iterativo y  $w$  es el parámetro de sobre relajación, hasta que un criterio de convergencia sea satisfecho, tal como

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon,$$

donde  $\epsilon$  representa un parámetro de tolerancia.

Ahora supongamos que queremos calcular el precio de una opción americana de venta (*put*) aplicando el método de Crank-Nicholson, para esto se tendrá que resolver mas o menos el mismo sistema de ecuaciones que en el apartado anterior, pero con la diferencia de que aquí no se cuenta con una barrera para la cual el valor de la opción es igual a cero. El sistema que se deberá resolver es el siguiente:

$$M_1 f_{i-1} = r_i,$$

donde el lado derecho esta dado por

$$r_i = M_2 f_i + \alpha_1 \begin{bmatrix} f_{i-1,0} + f_{i,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se deberán tomar en cuenta los acostumbrados términos adicionales para la condición de frontera de una opción de venta (*put*). Para el método de sobre relajación se deberá tomar en cuenta la forma tridiagonal de la matriz  $M_1$  y el ajuste para un ejercicio temprano. Sea  $g_j$ , el valor intrínseco cuando  $S = j\delta S$ . Con esto contamos con una estructura iterativa para cada línea de tiempo  $i$ ,

$$\begin{aligned} f_{i1}^{(k+1)} &= \max \left\{ g_1, f_{i1}^{(k)} + \frac{\omega}{1 - \beta_1} [r_1 - (1 - \beta_1) f_{i1}^{(k)} + \gamma_1 f_{i2}^{(k)}] \right\} \\ f_{i2}^{(k+1)} &= \max \left\{ g_2, f_{i2}^{(k)} + \frac{\omega}{1 - \beta_2} [r_2 + \alpha_2 f_{i1}^{(k+1)} - (1 - \beta_2) f_{i2}^{(k)} + \gamma_2 f_{i3}^{(k)}] \right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$



$$f_{i_{M-1}}^{(k+1)} = \max \left\{ g_{M-1}, f_{i_{M-1}}^{(k)} + \frac{\omega}{1 - \beta_{M-1}} [r_M - 1 + \alpha_{M-1} f_{i_{M-2}}^{(k+1)} - (1 - \beta_{M-1}) f_{i_{M-1}}^{(k)}] \right\}.$$

Cuando pasamos de una línea de tiempo a la siguiente, es razonable inicializar la iteración con un vector igual a la última salida de la línea de tiempo previa. El código en Matlab se desprende en la figura ??.

```

function precio=OpAmVecN(S0,X,r,T,sigma,Smax,dS,dt,omega,tol)
M=round((Smax-Sb)/dS); dS=(Smax-Sb)/M;
N=round(T/dt); dt=T/N;
oldval=zeros(M-1,1);
newval=zeros(M-1,1);
vetS=linspace(0,Smax,M+1)';
veti=0:N;
vetj=0:M;
ganancia=max(X-vetS(2:M),0);
pastval=ganancia;
valfrontera=X*exp(-r*dt*(N-veti));
alpha=0.25*dt*(sigma^2*(vetj.^2)-r*vetj);
beta=-dt*0.5*(sigma^2*(vetj.^2)+r);
gamma=0.25*dt*(sigma^2*(vetj.^2)+r*vetj);
M2=diag(alpha(3:M),-1)+diag(1+beta(2:M))+diag(gamma(2:M-1),1);
aux=zeros(M-1,1);
for i=N:-1:1
    aux(1)=alpha(2)*(valfrontera(1,i)+valfrontera(1,i+1));
    rhs=M2*pastval(:)+aux;
    oldval=pastval;
    error=REALMAX;
    while tol<error
        newval(1)=max(ganancia(1),oldval(1)+omega/(1-beta(2))
            *(rhs(1)-(1-beta(2))*oldval(1)+gamma(2)*oldval(2)));
        for k=2:M-2
            newval(k)=max(ganancia(k),oldval(k)+omega/(1-beta(2))
                *(rhs(k)+alpha(k+1)*newval(k-1)-(1-beta(k+1))*oldval(k)
                    +gamma(k+1)*oldval(k+1)));
        end
        newval(M-1)=max(ganancia(M-1),oldval(M-1)+omega/(1-beta(M))
            *(rhs(M-1)+alpha(M)*newval(M-2)-(1-beta(M))*oldval(M-1)));
        error = norm(newval-oldval);
        oldval=newval;
    end
    pastval=newval;
end
newval=[valfrontera;newval;0]
jdown=floor((S0-Sb)/dS);
jup=ceil((S0-Sb)/dS);
if jdown==jup
    precio=matval(jdown+1,1);
else
    precio=matval(jdown+1,1)+(S0-jdown*dS)*(newval(jup+1,1))/dS;
end

```

Figura 5.9: Algoritmo en Matlab para el precio de una opción americana.

## Anexo C: Evaluación del Modelo de Black & Scholes.

En este apartado se describen brevemente, los tres caminos distintos para obtener la formula de Black & Scholes

Para las tres aproximaciones supondremos que el precio del stock evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu dt + \sigma dW \quad (5.30)$$

Donde  $dW$  es un proceso de Wiener estándar. Y al aplicar el lema de Itô en la función  $V(t, S)^2$  obtenemos

$$dV = \left( V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + \mu S V_S \right) dt + \sigma S V_S dW. \quad (5.31)$$

### Primer aproximación para derivar la formula de Black & Scholes

Esta primer aproximación se basa en la idea de construir un portafolio Autofinanciado<sup>3</sup>, con una inversión de  $\phi_0$  de efectivo y  $\phi_1$  de activo, el cual reemplaza el valor de la opción en cualquier momento.

De esta manera, el valor de este portafolio es

$$\pi = \phi_0 S_0 + \phi_1 S_1$$

---

<sup>2</sup>se supone que  $S_1 = S$

<sup>3</sup>En tiempo continuo un portafolio  $V(\phi)$  es autofinanciado sí y solo sí  $dV = \phi_0 dS_0 + \phi_1 dS_1 + \dots + \phi_d dS_d$

y

$$d\pi = \phi_0 dS_0 + \phi_1 dS_1 \quad (5.32)$$

por ser un portafolio autofinanciado, además  $dS_0 = S_0 r dt$  por ser dinero en efectivo libre de riesgo. Sustituyendo  $dS_0$  y  $dS_1$  de acuerdo a la ecuación 5.42 en 5.44, tenemos que

$$d\pi = \phi_0 S_0 r dt + \phi_1 \mu S_1 dt + \phi_1 \sigma S dW, \quad (5.33)$$

$$d\pi = (\phi_0 S_0 r + \phi_1 \mu S_1) dt + \phi_1 \sigma S dW, \quad (5.34)$$

Ahora, si queremos que el portafolio  $\pi$  replique a la opción necesitamos que  $\pi$  y  $V$  sigan las mismas ecuaciones diferenciales parciales, por tanto,

$$\phi_0 S_0 r + \phi_1 \mu S_1 = V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + \mu S V_S, \quad (5.35)$$

$$\phi_1 \sigma S = \sigma S V_S \quad (5.36)$$

y si hacemos  $\phi_1 = V_S$ , 5.47 se reduce a  $\phi_0 S_0 r = V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS}$ . Con esta elección  $\pi = V$ , se puede escribir  $\phi_0 S_0 = \pi - \phi_1 S_1 = V - S V_S$ . Al sustituir estas variables en la ecuación anterior se obtiene

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + r S V_S - r V = 0$$

que es la ecuación de Black & Scholes

## Segunda aproximación para derivar el modelo de Black & Scholes

En esta parte elegimos un portafolio el cual replica al efectivo, a diferencia de la sección anterior donde se buscaba replicar a la opción. se construye el siguiente portafolio

$$\Pi = V - \Delta S.$$

que consiste de una opción y una venta en corto del activo  $S$  entonces

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS \\ &= \left( V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + \mu S(V_S - \Delta) \right) dt + \sigma S(V_S - \Delta) dW \end{aligned}$$

Elegimos  $\Delta = V_S$  a modo de eliminar el término que contiene a la diferencial estocástica  $dW$ . Ahora el portafolio crece con una tasa determinista. Mediante un argumento de ausencia de arbitraje, esta tasa debería ser igual a  $r$ , *i.e.*

$$d\Pi = \left( V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt = r\Pi dt = r(V - SV_S) dt.$$

Al reordenar esta ecuación obtenemos finalmente la de Black & Scholes.

### Tercer aproximación para derivar el modelo de Black & Scholes

En la medida del mercado  $\mathbb{P}$ ,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW = r dt + \sigma \left( dW + \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right).$$

Si  $\frac{\mu - r}{\sigma}$  es suficiente bien comportado, podemos reescribir  $dW + \frac{\mu - r}{\sigma} dt$  como  $dW^*$ , un movimiento browniano estándar bajo una medida de probabilidad equivalente (y en este caso única)  $\mathbb{P}^*$ . Esto es una consecuencia del teorema de Girsanov. Bajo esta nueva medida

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW^*$$

Puesto que la tasa promedio de crecimiento del stock bajo esta nueva medida es  $r$ , reconocemos a  $\mathbb{P}^*$  como la medida ajustada al riesgo. De hecho puede, ser verificado que el proceso de precios relativos  $Z = S_0^{-1}S$  es una martingala bajo esta medida. Ahora que si  $V(t, S)$  es el precio de una opción, entonces el lema de Itô nos proporciona

$$dV = \left( V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S \right) dt + \sigma SV_S dW^*.$$

En la medida ajustada al riesgo, todos los activos crecen a la tasa promedio  $r$ , *i.e.* podemos escribir

$$\mathbb{E}^*(dV) = \left( V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S \right) dt = rV dt.$$

integrando hasta el instante  $t$  y reorganizando los términos se obtiene la ecuación de Black & Scholes.

# Bibliografía

- [Ar] Aratza Murillas. *Incertidumbre y Opciones Reales: inversión y explotación de una pesquería (I) y (II)*, artículo preliminar, 2004
- [B-S] Black, Fischer, y M Scholes *The pricing of options and corporate liabilities*, *Journal of political economy*, Vol. 81, (1973).
- [Ba] Bachelier, L., *Theorie de la speculation, -On the Random Character of Stock Market Prices-*. The MIT Press. Cambridge, Mass.1964.
- [Boy] Boyle P. Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics*, no. 4, págs. 323- 338, 1977.
- [Bra] Brandimarte, Paolo. Numerical Methods in Finance a Matlab-based Introduction, Wiley Series in Probability and Statistics, cap. 8, 2002
- [Br-Sc1] Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. Evaluating Natural Resource Investments. *Journal of Business*, Vol. 58, 2, 135-157, 1985.
- [Br-Sc] Brennan, M. y Schwartz, E. A New Approach to Evaluating Natural Resource Investments. En CHEW, Donald (ed.): *The New Corporate Finance*. McGraw Hill. Nueva York. 1993. Págs.: 98-107.
- [Co] Cortazar, G. *Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation*, artículo
- [Co-Ca] Cortazar, G. y Casassus J. Optimal Timing of a Mine Expansion: Implementing a Real Options Model, *The Quarterly Reviews of Economics and Finance*, Vol. 3, 8, Special Issue, 755-769,1988.
- [Co-Ro-Ru] Cox, J. S., Ross, S. y Rubinstein,M. Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, no. 7, p. 229-64, 1979.

- [Co-Sc] Cortazar, G., y Schwartz E. S. A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories, *Journal of Business*, 1993. Vol.66. 4. 517-540. 1993.
- [Cor-Sch] Cortazar, G. y Schwartz, E. Monte Carlo Evaluation Model of an Undeveloped Oil Field, *Journal of Energy Finance and Development*, vol. 3, no. 1, págs.73- 84, 1998.
- [Es-Ca] Escobari U. J. A., Cárdenas G. C., *Evaluación de Inversiones en Recursos Naturales: Aplicación al Caso del Proyecto Minero San Cristóbal*, Documento de Trabajo. 2002
- [Gr] Gravet, G. M. A., *Evaluación de Opciones Reales Mediante Simulación: El Método de los Mínimos Cuadrados*, Tesis 2003
- [Ha-Ha] Hammersley, J. M. y Handscomb, D. C. Monte Carlo Methods, *Methuen*, London, 1964.
- [He-Pi] He, H., y Pindyck, R. Investment in Flexible Production Capacity, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 6, 575-599, 1972.
- [Hu-Wh] Hull J. y White A., The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 1987.
- [La-La] Lamberton, B. and Lapeirè, J. F. Financial Models, cap. 1 y 2, 1985.
- [Lo-Sc] Longstaff, F. y Schwartz, E. Valuing American Options By Simulation: A Simple Least- Squares Approach, *Tibe John E. Anderson Graduate School of Management at UCLA*, Finance Working Paper no. 25 - 98, 1998.
- [Mc-Si] Mcdonald, R. y Siegel, D. The Value of Waiting to Invest, *The Journal of Economics*, November 1986.
- [Pa-Si-Sm] Paddock, J. L., Siegel, D. W., and Smith, J. L. (1988) Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. *Quarteriy Journal of Economics*, Vol. 103, 3, 479-508, 1988.
- [Re-Ba] Rendíeman R. J. y Barter B. J. Two State Option Pricing. *Journal of Finance*, no. 34,pp. 1092-1110, 1979.



- [Sha] Sharpe W. F. Investments. *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, N. J., 1978.
- [Sa] Samuelson A. Paul, *Maximum Principles in Analytical Economics*, Analytical Economics Research, 1972.
- [Sc] Schwartz, E. S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging, *Journal of Finance*, vol.52, no. 3, pp.923-973, July 1997.
- [Si] Sidney I. Resnick. A Probability path, *birkhauser*, pp. 416-428, 1998
- [St] Steele J. Michael. Stochastic Calculus and Financial Applications, *Springer*, 2003.
- [Tr] Trigeorgies, L. Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation, *MIT press*, Cambridge, 1996.