UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS RECLAMACIONES DE LOS SEGUROS DE ACCIDENTES Y ENFERMEDADES: PROCESOS ESTOCASTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MARIO PEDRO VARGAS GOMEZ

DIRECTOR DE TESIS: ACT. ALFONSO GARCIA DURAN

ASESOR DE TESIS: ACT. FRANCISCO SANCHEZ VILLARREAL

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Las reclamaciones de los seguros de accidentes y enfermedades: Procesos estocásticos"

realizado por Vargas Gómez Mario Pedro

con número de cuenta 07239881-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Alfonso García Durán	
Propietario	Dra. Guillermina Eslava Gómez	
Propietario	Act. Carlos Fernando Lozano Nathal	
Asesor de Tesis Suplente	Act. Francisco Sánchez Villarreal	
Suplente	Act. Roberto Canovas Theriot	

Consejo Departamental de
Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

D e d i c a t o r i a

Para: Federico y Angelina
Mis amados padres,

Antonia Hernández
Mi adorable abuelita.

José Celestino
Mi querido tío.

Y a mi hermano Daniel
Mi ángel guardián.

Por su enorme esfuerzo y sacrificio para formar nuestras vidas.

A g r a d e c i m i e n t o s

Quiero agradecer en primer término a mis profesores de carrera Adela Abad de Servin, Gerardo de Lizarriturri, Eduardo Godoy, Yolanda Zepeda, José García, al excelente maestro Ricardo, a los hermanos Agustín y Guadalupe Cano, Joaquín Curiel, Margarita Chávez, Arturo Blancas, José A. Flores, a mi estimado profesor y amigo Manuel Román, a varios magníficos profesores que de momento no recuerdo su nombre, por su dedicación y excelencia académica -creo que todos fueron muy buenos profesores- que me permitieron adentrarme y motivarme al estudio y docencia de las matemáticas y sus aplicaciones. Un agradecimiento especial y mi admiración a su sencillez para la Dra. Ma. Cristina Gutiérrez Delgado por su valiosa información en el ámbito de la teoría de riesgo.

Al apoyo brindado por mis sinodales y asesores de tesis la Dra. Guillermina Eslava Gómez, cuyas observaciones sirvieron para un trabajo de mayor precisión y utilidad práctica dentro de la comunidad escolar, al Act. Roberto Canovas Theriot por su calidad humana, al Act. Carlos Fernando Lozano Nathal por su paciente revisión a mi trabajo. Mi mayor agradecimiento y respeto a la calidad humana y profesional del Act. Francisco Sánchez Villarreal quien me brindara toda la ayuda necesaria para poder culminar esta etapa. Y al entrañable compañero y muy estimado amigo, el Act. Alfonso García Durán que hizo todo esto posible, las palabras resultarían insuficientes para agradecerle su gran apoyo y comprensión.

A todos ustedes que han dado personalidad a nuestra querida Universidad Nacional Autónoma de México, les reitero mi sincero, humilde y profundo agradecimiento.

R e s u m e n

En este trabajo se presenta inicialmente, con doble propósito, una forma de calcular primas y reservas (§2.1, §2.2) de los seguros de accidentes y enfermedades que se ha empleado en la práctica. Primero: que se ha resuelto el problema de cálculo y se tiene un ejemplo práctico de cómo hacerlo. Segundo, se aprecia que el procedimiento de cálculo no toma en cuenta el desarrollo del proceso de las reclamaciones en el tiempo, tomando simplemente sumas acumuladas de cantidades a posteriori.

El trabajo se complementa en seguida con dos partes, la que establece los conceptos que se emplearán y la que los usa. Primero se enfocan y modelan los procesos de reclamaciones de accidentes y enfermedades como procesos estocásticos para destacar su naturaleza aleatoria en el tiempo (§ 3.1), agrupándolos para su estudio en sistemas (§3.4), definiendo propiedades para su análisis y comparación con los mismos procesos en diferentes etapas o con otros procesos del mismo tipo de pólizas (§ 4.1, § 4.2), empleando conceptos derivados de las cadenas de Markov (§ 3.3), estableciendo los estados del proceso (§ 3.2) y su clasificación (§ 3.8), las probabilidades iniciales (§ 3.5), la matriz de probabilidades de transición para una (§ 3.6) o más etapas (§ 3.7) y la estimación de las probabilidades de la matriz (§ 3.9).

En la parte final se establecen propiedades de las primeras etapas y propiedades límite para los procesos de reclamaciones (§ 4.1, § 4.2), se definen las condiciones de ciertos tipos de pólizas y se procede a mostrar primero los resultados de los cálculos de sus primas y reservas con las probabilidades iniciales y de transición (§ 4.3, § 4.4) y después justificar las fórmulas de cálculo.

Es importante aclarar que los resultados obtenidos aquí no son aplicables a cualquier conjunto de pólizas, ya que no obstante, de que las estimaciones provienen de datos reales, cada cartera genera sus propios procesos aleatorios. Para los cálculos de las primas y reservas se usaron los costos promedio por reclamación durante el periodo de estudio 1986-1987, mereciendo un estudio aparte, la distribución de los mismos y su variación, pero que no es el propósito del presente trabajo.

Índice General

I. Introducción

§ 1.1 Antecedentes

A partir de la década de los 90's se han diversificado y especializado las antiguas pólizas de accidentes y enfermedades con la introducción en el mercado asegurador de pólizas contra accidentes en viajes, familiares, júnior, larga dependencia, escolar, para convenciones, etc[1]. Planes base, planes personalizados (combinando las opciones de sumas aseguradas, deducibles y coaseguros), planes en dólares[2]. También han surgido otras formas de protección como las que ofrecen las Instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES)[3], que tienen como objetivo "prestar servicios para prevenir o restaurar la salud del asegurado en forma directa, con recursos propios, es decir, con sus propias instalaciones; mediante terceros, red de médicos prestadores de servicios; o en combinación de ambos, a través de acciones que se realicen en su beneficio".

Actualmente se utilizan conceptos de cadenas de Markov para estudiar la evolución en la salud de pacientes con padecimientos clasificados dentro de cierto grupo de enfermedades y su respuesta a tratamientos específicos. Estableciendo como *estados* de la cadena *grados de padecimiento* y la *transición* de los pacientes entre estos estados, correspondiendo al mejoramiento o disminución de su salud[4].

§ 1.2 Notación

La notación y presentación de los temas y conceptos se ha basado principalmente en la contenida en Bath (1984). Los textos de Cox & Miller (1965) y Chung (1975) son de gran apoyo a la hora de esclarecer conceptos. En ocasiones se trató de establecer la referencia más clara o sencilla para alguna definición o resultado de la teoría, por lo que se mencionan otras fuentes. Para profundizar en los conceptos no hay que perder de vista los libros clásicos Feller (1986), Kemeny & Snell (1960). Los textos de Taylor & Karlin (1975,1998) pueden aportar mucho a los lectores de nivel de licenciatura. Los textos de Grimmet & Stirzaker (2001) plantean y resuelven una gran cantidad de problemas. Las demás referencias se revisaron rápidamente, obteniéndose como un servicio al lector de la facultad principalmente las claves bibliográficas de la biblioteca, para poder recurrir a ellas en un momento de interés en los temas tratados. La notación básica presentada en el texto es la siguiente:

- $\{\mathbf{R}_t, t=0,1,...\}$, $\{\mathbf{R}_t\}$, o simplemente $\mathbf{R}_t$ si es claro en el contexto, representará a un proceso o cadena de reclamaciones en la etapa t.
- $\mathbf{p}_i$ indica la probabilidad de que el proceso inicie en el estado i.
- $\mathbf{P}_{ij}$ es la probabilidad que el proceso aleatorio pase del estado **i** al estado **j** en una etapa.

---

[1] [http://seguros.ing-comercialamerica.com/], Alfa Medical [http:// www.seguros-monterrey.com.mx/].
[2] [OCB, Seguros http://at.com.mx/ocb/].
[3] [http://www.condusef.gob.mx /informacion_sobre/ises/].
[4] [Dra. Ma. Cristina Gutiérrez (2004) Profra. de Teoría de Riesgo y Directora de Políticas de Aseguramiento en Salud, Secretaría de Salud]

- $p^{(k)}_i$ es la probabilidad no condicional de que el proceso se encuentre en el estado **i** al terminar la etapa k. Para k=1,2,3,...
- $\mathbf{P^{(k)}_{ij}}$ es la probabilidad que el proceso pase del estado **i** al estado **j** en k etapas.
- **SA** la suma asegurada de una póliza de accidentes y enfermedades.
- $C^{(n)}_{ij}$ es el costo a pagar al final de la etapa **n**, por la transición de **i** a **j**, para $i<j$.
- g es la tasa de rendimiento mensual.
- **h** la tasa inflacionaria mensual.
- $V=1/(1+\mathbf{g})$, el valor presente de $1 en una etapa (mes).
- **PN** es la prima neta de riesgo única a pagar al contratar la póliza.
- **V** reserva

II. Un ejemplo práctico de cálculo de primas y reservas

§ 2.1 Cálculo de primas

Un método para calcular primas que se ha usado en la práctica, se basa en los datos anuales de cantidad de asegurados, número de reclamaciones e importes reclamados, distribuidos por grupos de edades quinquenales y por sexo. En la tabla 2.1.1 se muestran los datos correspondientes al año de 1986 para una cartera de pólizas.

Grupos de Edades	**Número de Asegurados**		**Número de Reclamaciones**		**Importes Reclamados (en miles de pesos)**	
	Hombres	**Mujeres**	**Hombres**	**Mujeres**	**Hombres**	**Mujeres**
(0-19)	8599		288		106,449	
(20-24)	1243	1432	36	66	9,331	20,265
(25-29)	1246	1615	25	76	8,961	34,753
(30-34)	1555	1641	55	96	27,389	52,378
(35-39)	1528	1478	53	88	27,190	39,698
(40-44)	1180	1038	37	63	18,652	29,246
(45-49)	860	701	31	53	17,619	22,806
(50-54)	579	547	59	22	25,370	34,115
(55-59)	386	353	27	20	21,876	10,671
(60-64)	241	169	24	20	19,204	13,282
(65-69)	40	27	8	0	4,681	0

Tabla 2.1.1 *Resumen de datos de una cartera de pólizas. 1986.*

El procedimiento para efectuar los cálculos se muestra más adelante, para el grupo de edades de 20 a 24 años, hombres y mujeres. Estos datos arrojaron los resultados finales que se muestran a continuación (tabla 2.1.2):

Debido a que las primas obtenidas corresponden a un conjunto de pólizas con diferentes sumas aseguradas, diversos niveles de deducibles, coaseguros y coberturas limitadas para algunos conceptos de gastos médicos, como la cesárea, es necesario determinar lo que se conoce como el *plan básico* del seguro, que viene a ser aproximadamente un plan con condiciones promedio. En el ejemplo desarrollado, las condiciones principales promedio resultaron ser: suma asegurada por \$ 5,380,000, deducible \$ 17,700 y coaseguro del 25%.

Grupos de Edades	Hombres	Mujeres	Grupos de Edades	Hombres	Mujeres
(0-19)	$ 7,008	--------	**(45-49)**	$ 38,996	$ 61,507
(20-24)	12,339	$ 19,610	**(50-54)**	44,327	69,886
(25-29)	17,670	27,989	**(55-59)**	49,658	78,265
(30-34)	23,002	36,369	**(60-64)**	54,989	86,646
(35-39)	28,333	44,748	**(65-69)**	60,321	95,025
(40-44)	33,664	53,127			

Tabla 2.1.2 *Primas netas anuales correspondientes a un conjunto de pólizas de accidentes y enfermedades.* 1986.

La ventaja principal de esta forma de calcular las primas se basa en su relativa sencillez, al basar los cálculos en los importes acumulados por las reclamaciones durante el año, para obtener primas que se esperan sean suficientes para soportar la siniestralidad del año siguiente. Es notable que con relativamente pocos datos se puedan calcular las primas. Sin embargo, su desventaja principal consiste en que éstas se ajustan cada año, esperando que soporte la siniestralidad del siguiente, pero hacer de lado la naturaleza aleatoria de las reclamaciones, basándose en la suma de los importes reclamados y no en los procesos mismos que originan las reclamaciones. A través de las secciones del capítulo III se van a introducir los conceptos que permitirán un conocimiento más adecuado de los *procesos de reclamaciones*, se definirán los *estados* posibles de los mismos, sus *propiedades* y la estimación de las *probabilidades de transición* entre los estados, que nos permitan respuestas a interrogantes interesantes, tales como:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un asegurado que acaba de contratar una póliza, reclame por primera vez durante el próximo mes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un asegurado reclame durante todos los meses de cobertura?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un asegurado no reclame en los primeros seis meses?
- Una vez que un asegurado presentó una reclamación, digamos en el tercer mes: ¿Con qué probabilidad reclamará al menos una vez a partir del cuarto mes y hasta terminar su cobertura?
- ¿Con que probabilidad no reclamará nunca?
- ¿Cuántas veces reclamará en promedio durante su cobertura?

En el capítulo IV se va a mostrar cómo se pueden definir nuevos planes de seguro, al establecer ciertas condiciones para las pólizas, con su cálculo de primas y reservas.

Detalle del ajuste de primas

Primer paso. Las primas brutas resultaran de dividir la suma de los importes reclamados entre el número de asegurados, para cada grupo de edades. Por ejemplo, con las cantidades correspondientes al segundo grupo de edades, el (20-24), se tiene para:

Hombres: 9,331,000/1243 = \$ 7,507

Mujeres: 20,265,000/1432 = 14,152.

Segundo paso. Una vez que se han obtenido las primas brutas, se transforman para que sean consistentes entre sí, de tal forma que a edades mayores correspondan primas mayores. En la práctica es frecuente ajustar los datos con una función lineal, por lo que para el ejemplo desarrollado se usó un ajuste por mínimos cuadrados de la función:

$$Yi = \mathbf{a} + \mathbf{b}Xi$$

Donde Y corresponde a las primas brutas y X toma los valores 1, 2,...,11; para los grupos de edades (0-19), (20-24),..., (65-69), respectivamente. Para las estimaciones de los coeficientes de la ecuación, **a** y **b**, se usaron sólo las primeras ocho primas de los hombres y de la segunda a la octava prima, en el caso de las mujeres, debido a que las primas excluidas no presentan un comportamiento lineal respecto a las demás.

Los coeficientes estimados son:

	a	**b**
Hombres	1164.335	3702.281
Mujeres	1979.543	5819.072

Así se tiene que las primas ajustadas del grupo (20-24) son para:

Hombres: \$ 1164.335 + 3702.281(2) = \$ 8,569

Mujeres: 1979.543 + 5819.072(2) = 13,618

Tercer paso. Las primas ajustadas se ponderan con la inflación esperada en los gastos médicos durante el año siguiente; que para el caso se consideró de un 100%, doblando las primas.

Para hombres: 2 x \$ 8,569 = \$ 17,138.

Mujeres: 2 x 13,618 = 27,236

Cuarto paso. Después a cada prima se le aplica un factor de descuento, debido a que se recuperan ciertas cantidades por deducibles y coaseguros contratados. Para obtener el factor de descuento mencionado, al total reclamado en el año se le resta la cantidad total recuperada por deducibles y al resultado obtenido se le aplica un descuento por coaseguro. Se tiene:

Total reclamado en 1986:	\$ 543,936,000.
Deducibles:	— 20,246,471.

Diferencia:	\$ 523,689,529
— 25% Coaseguro:	— 30,922,382

Pagado en 1986: $ 392,767,147.

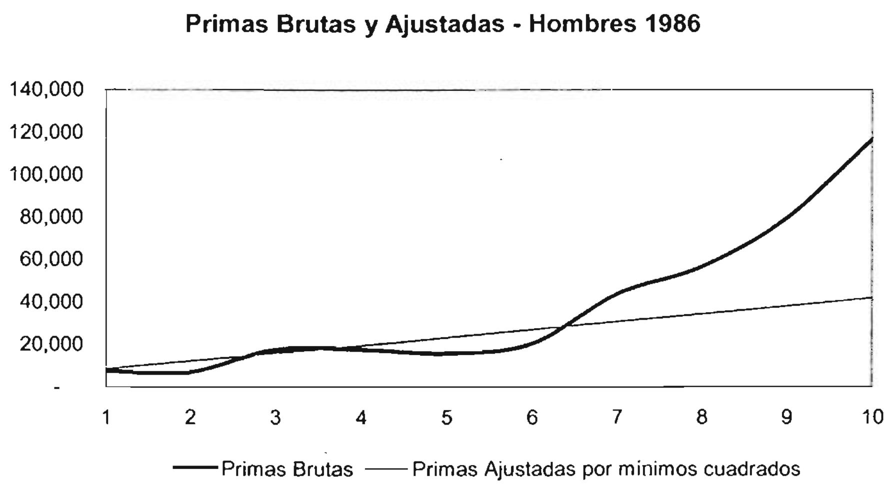
Por lo que el factor para aplicar a las primas del paso anterior resulta del cociente:

Factor = 392,767,147/543,936,000 = 0.72

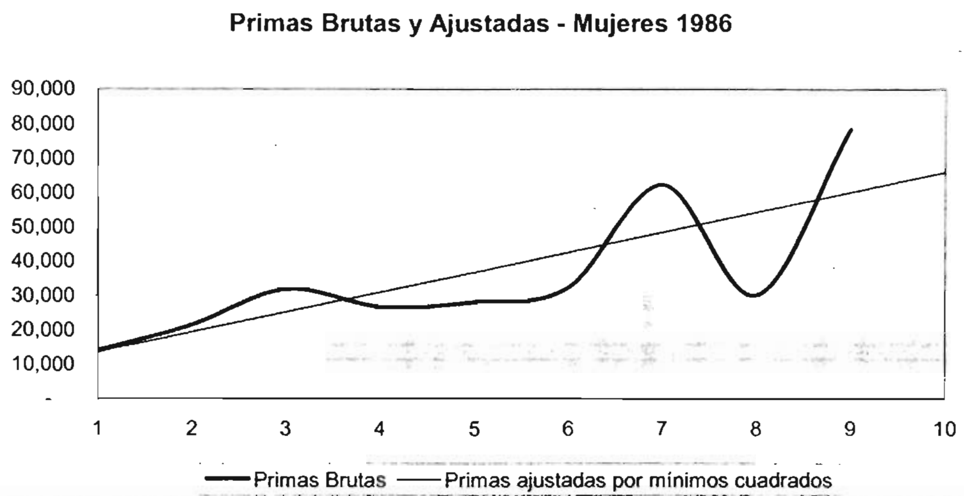
Continuando con el ejemplo del grupo (20-24), las primas resultantes son llamadas primas netas:

Para hombres:	$ 17,138 x 0.72 =	$ 12,339
Mujeres:	27,236 x 0.72 =	19,610

Las siguientes gráficas muestran la relación de las primas brutas con las primas ajustadas, para hombres (Gráfica 2.1.1) y mujeres (Gráfica 2.1.2).



Gráfica 2.1.1 Primas brutas y ajustadas. Hombres 1986



Gráfica 2.1.2 Primas brutas y ajustadas. Mujeres 1986

§ 2.2 Cálculo de reservas

Un método comúnmente usado para constituir las reservas de los seguros contra accidentes y enfermedades en las instituciones privadas, consiste simplemente en incrementar las reservas con los montos pagados a los asegurados durante un periodo específico, pudiendo ser diariamente, tratando con ello de mantener un nivel de reserva. Esta forma es sencilla de operar, no requiriendo personal calificado para llevarse a cabo. Empero, la reserva debe pronosticarse para pagar las reclamaciones futuras y constituirse desde el alta de cada póliza o grupo de pólizas.

III. Metodología propuesta

En las siguientes secciones se establecen los conceptos e ideas que fundamentan los conceptos que se emplearán en los siguientes capítulos del trabajo.

§ 3.1 El proceso estocástico de las reclamaciones por accidentes y enfermedades

Durante la cobertura de su póliza un asegurado puede reclamar en varias ocasiones, debido a diversas causas de entre las que se pueden mencionar las siguientes:

- Por padecer una o varias enfermedades.
- Por sufrir un accidente.
- La persistencia de su enfermedad.
- Complicaciones derivadas de un accidente.
- Cuando el asegurado presenta sus gastos erogados en partes.

Así se observa por ejemplo que una evolución de reclamaciones de un asegurado desde el inicio de la vigencia de su póliza puede ser la siguiente: Hasta el tercer mes de iniciada su cobertura presenta su primera reclamación por una enfermedad. Posteriormente, en el séptimo mes se le paga la segunda reclamación por la misma enfermedad; y en el siguiente mes reclama por tercera y última vez por una enfermedad diferente.

Podría suceder también que otra póliza presentara el siguiente desarrollo dentro del mismo periodo de cobertura: Un asegurado de ésta sufre un accidente en el primer mes de vigencia y se le pagan en una sola reclamación todos los gastos erogados por ello, no reclamando más.

Como las situaciones anteriores, se pueden presentar otras, que pueden variar aleatoriamente en número, dentro de un periodo determinado. Luego así, el número de reclamaciones de un asegurado de una póliza de la cartera se va a representar como una *familia de variables aleatorias* $\{\mathbf{R}_t, t=0,1,...\}$ *indexadas por el parámetro de tiempo t*, y esto es precisamente un *proceso estocástico, aleatorio o probabilístico*[1].

Al proceso aleatorio $\{\mathbf{R}_t, t=0,1,...\}$ se le denominará alternativamente aquí *proceso de reclamaciones*; donde $\mathbf{R}_0$ corresponderá con el inicio de la cobertura de una póliza.

Si desde el inicio de su cobertura hasta un momento discreto y fijo $\mathbf{t}$, un asegurado ha presentado $\mathbf{R}_t$ reclamaciones por accidentes o enfermedades, para otro momento discreto posterior $\mathbf{u}$, digamos, el número de reclamaciones pudo haber aumentado a $\mathbf{R}_u$. Luego el proceso de reclamaciones *acumuladas* al momento $\mathbf{u}$, tiene la propiedad siguiente:

$$\boxed{\mathbf{R}_u \geq \mathbf{R}_t, \text{ si } \mathbf{u} > \mathbf{t}} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

Esta es la *propiedad fundamental* de los procesos de reclamaciones que se tratan en el presente trabajo.

[1] [Bhat (1984) 2.1 pp. 9]

§ 3.2 **Los estados de los procesos de reclamaciones**

Si un asegurado ha presentado en total **r** reclamaciones durante el periodo de tiempo comprendido desde el inicio de su cobertura hasta un momento discreto **t**, por enfermedades o accidentes, se dice que su proceso estocástico se *encuentra* o que *ocupa el estado* **r**, en el *parámetro discreto de tiempo* **t**, así:

$$\boxed{R_t = r, \text{ para } t=0,1,\ldots; \text{ Donde } r \in a\ S} \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Y S es el conjunto de estados posibles del proceso, $S = \{0,1,2,\ldots,m\} \subseteq \{0,1,2,\ldots\}$, para algún entero positivo **m**[1].

De manera ilustrativa, suponga que la unidad de tiempo es un mes y que un asegurado ha reclamado en total 9 veces por enfermedad y 2 por accidente, desde el inicio de la cobertura de su póliza hasta terminado el *octavo* mes, se tiene entonces que:

$\mathbf{R_8 = 11}$.

Si otro asegurado reclamó en 3 ocasiones hasta el *doceavo* mes de su cobertura, por enfermedad, se puede anotar que: $\mathbf{R_{12} = 3}$.

§ 3.3 **La propiedad markoviana**

Si un proceso de reclamaciones $\{\mathbf{R_t}\}$ ocupa el estado **r**, en el momento discreto actual **t** esto es, si $\mathbf{R_t = r}$, entonces, para toda **u>t**, por (3.1.1) y (3.2.1):

$$\boxed{R_u = s, \text{ Y } s \text{ es uno y sólo un entero de } \{r, r+1,\ldots, m\} \subset S} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

En un proceso markoviano, si se conoce el estado del mismo para cualquier valor específico del parámetro de tiempo t, esta información es suficiente para predecir la conducta del proceso más allá de ese punto[2].

Las cadenas de Markov

Las clases de procesos de Markov con parámetro de tiempo discreto y con un conjunto discreto de estados, se conocen como *cadenas de Markov*. Así se puede definir una cadena de Markov como una sucesión de variables aleatorias discretas $\mathbf{R_0}$, $\mathbf{R_1}$,... con la propiedad de que la distribución condicional de $\mathbf{R_{n+1}}$ dadas $\mathbf{R_0}$, $\mathbf{R_1}$,... $\mathbf{R_n}$ depende sólo del valor de $\mathbf{R_n}$ y no de $\mathbf{R_0}$, $\mathbf{R_1}$,... $\mathbf{R_{n-1}}$, esto es para cualquier conjunto de valores **g, h,..., r,** s elementos de S[3]:

$$\mathbf{P[R_{n+1}=s|R_0=g, R_1=h,\ldots,R_n=r] = P[R_{n+1}=s|R_n=r]} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

En el presente trabajo se usará alternativamente proceso de reclamaciones y *cadena de reclamaciones*.

[1] [Bhat (1984) 3.1 pp. 33]
[2] [Bhat (1984) 2.3 pp. 15]
[3] [Cox (1965) 3.1 pp. 76]

El sentido de que los procesos de reclamaciones se pueden tratar como cadenas de Markov, reside en el hecho de que toda vez que se alcanzó el estado r, el proceso sólo puede pasar en el futuro, a un estado mayor o igual a r, como se estableció en (3.3.1). Entonces en esa etapa el estado del proceso sólo depende de r.

§ 3.4 El sistema de reclamaciones

Para considerar las realizaciones de reclamaciones de una cartera o grupo de pólizas como de un mismo proceso estocástico, deberán proceder de riesgos similares para formar un *sistema de reclamaciones*.

Si se observa el sistema de reclamaciones en etapas sucesivas, se apreciará una rica dinámica de cambio entre los estados, encontrando por ejemplo que de $N^{(0)}{}_0$ recién asegurados que se encuentran en el estado **0**, al final de la primera etapa: $N^{(1)}{}_{00}$ asegurados siguen en el estado **0**, esto es, no han reclamado aún, $N^{(1)}{}_{01}$ asegurados han pasado al estado **1**, es decir han hecho una reclamación, $N^{(1)}{}_{02}$ asegurados han hecho dos reclamaciones, es decir ocupan el estado **2**,..., y $N^{(1)}{}_{0m}$ asegurados están en el estado **m**. De forma análoga, después de n etapas se tendría que: $N^{(n)}{}_{00}$ pólizas siguen en el estado **0**, $N^{(n)}{}_{01}$ asegurados han pasado al estado **1**, $N^{(n)}{}_{02}$ pólizas ocupan el estado **2**,..., y $N^{(n)}{}_{0m}$ pólizas están en el estado **m**. Por otro lado, si al inicio del periodo de las observaciones hay $N^{(0)}{}_1$ procesos en el estado **1**, al final de la etapa n: $N^{(n)}{}_{11}$ pólizas siguen en el estado **1**, $N^{(n)}{}_{12}$ pólizas hicieron una reclamación, pasando al estado **2**, ..., y $N^{(n)}{}_{1m}$ pólizas alcanzaron el estado **m**. Y así sucesivamente. En la sección § 3.9 se verá como se aprovechan los números $N^{(k)}{}_{i,j}$, (donde la notación anterior expresa que el proceso se encontraba en un momento dado en el estado i y ha pasado al estado j, después de transcurrir k etapas consecutivas) para estimar las probabilidades de transición entre los estados, pero antes es necesario contar con otras definiciones.

§ 3.5 Las probabilidades iniciales

La probabilidad de que un proceso estocástico se encuentre en el estado **i**, al inicio de las observaciones, se va a denotar como $\mathbf{p_i}$, así[1]:

$$\boxed{\mathbf{p_i = P[R_0 = i]}} \qquad \mathbf{(3.5.1)}$$

Y como al inicio, el proceso se encuentra necesariamente en alguno de los estados posibles:

$$\boxed{\mathbf{p_0 + p_1 + \cdots + p_m = 1}} \qquad \mathbf{(3.5.2)}$$

Luego el vector fila de probabilidades iniciales es:

$$\boxed{\mathbf{p = [p_0, p_1, ..., p_m]}} \qquad \mathbf{(3.5.3)}$$

[1] [Chung (1975) 8.3 pp. 253]

§ 3.6 Las probabilidades de transición de una etapa

Se fijan una serie de *etapas sucesivas a intervalos iguales de tiempo*, registrando el estado alcanzado por un proceso al final de cada una de ellas, formando una *cadena de reclamaciones*. Si la cadena se encuentra en el estado **i**, al finalizar la etapa **n**, la probabilidad de pasar de **i** a **j** (que puede significar permanecer en el mismo estado **i**), exactamente durante una etapa, se va a denotar como $\mathbf{P_{ij}}$, y para toda etapa **n** = 0,1,2,...:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{P_{ij}} &= \mathbf{P[R_{n+1}=j|R_n=i]}\,, \quad \text{para } \mathbf{i \leq j} \\ &= 0, \text{ en otro caso.} \end{aligned}} \tag{3.6.1}$$

Entonces el proceso de reclamaciones corresponde a un proceso markoviano con probabilidades de transición *estacionarias* (*homogéneas en el tiempo*), cada una de las cuales no cambia, independientemente de la etapa que se trate.

La matriz **P** formada con las entradas $\mathbf{P_{ij}}$ se llamará la matriz de *probabilidades de transición de una etapa*[1] (m.p.t.). Luego: $\mathbf{P} = [\mathbf{P_{ij}}]$.

$$\text{Donde } \mathbf{P_{ij}} \geq 0 \tag{3.6.2}$$

Cuando $\mathbf{i \leq j}$ y $\mathbf{P_{ij}} = 0$, en otro caso.

Y así **P** es una matriz *triangular superior*, en la cual todos los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros.

Y además: $$\textstyle\sum_j \mathbf{P_{ij}} = 1, \text{ con } \mathbf{i \leq j};\ \mathbf{i,j} \in S \tag{3.6.3}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P_{01}} & \mathbf{P_{02}} & \cdots & \mathbf{P_{0,m-1}} & \mathbf{P_{0m}} \\ 0 & \mathbf{P_{11}} & \mathbf{P_{12}} & \cdots & \mathbf{P_{1,m-1}} & \mathbf{P_{1m}} \\ 0 & 0 & \mathbf{P_{22}} & \cdots & \mathbf{P_{2,m-1}} & \mathbf{P_{2m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P_{m-1,m-1}} & \mathbf{P_{m-1,m}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{P_{mm}} \end{bmatrix} \tag{3.6.4}$$

Como la matriz **P** cumple con las propiedades (3.6.2) y (3.6.3), se dice que es una *matriz estocástica*. Así cualquier cadena de Markov homogénea tiene asociada una matriz estocástica de probabilidades de transición y cualquier matriz estocástica define una cadena de Markov homogénea[2].

Ahora supóngase que un proceso de reclamaciones inicia en el estado $\mathbf{j_0}$ con probabilidad $\mathbf{p_{j0}}$. Resulta interesante calcular la probabilidad del arreglo de estados $(\mathbf{j_0,j_1,j_2,\ldots,j_{n-1},j_n})$, representando los resultados del proceso en n etapas sucesivas. Con tal arreglo se indica que el proceso inicia en el estado $\mathbf{j_0}$, después al finalizar la primera etapa el proceso pasa

[1] [Cox (1965) 3.3 pp. 84]
[2] [Idem pp.85]

al estado j_1, mientras que al terminar la segunda etapa se encuentra en el estado j_2 y así sucesivamente, hasta que al final de la etapa n, el proceso ocupa el estado j_n. Luego entonces se va a tener que:

$$\boxed{P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n) = p_{j_0} P_{j_0 j_1} \ldots P_{j_{n-2} j_{n-1}} P_{j_{n-1} j_n};} \qquad \textbf{(3.6.5)}$$

Por la fórmula de la probabilidad condicional la:

$$P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n) = P(j_n \mid j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})\, P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$$

Análogamente:

$$P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}) = P(j_{n-1} \mid j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-2})\, P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-2})$$

Si se sustituye en la ecuación anterior:

$$P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n) = P(j_n \mid j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})\, P(j_{n-1} \mid j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-2})\, P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}).$$

Pero, por la propiedad markoviana, que se ha supuesto en (3.3.2), cada probabilidad condicional se reduce, quedando:

$$P(j_n \mid j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}) = P(j_n \mid j_{n-1}),$$

$$P(j_{n-1} \mid j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}) = P(j_{n-1} \mid j_{n-2}),$$ y entonces:

$$P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n) = P(j_n \mid j_{n-1})\, P(j_{n-1} \mid j_{n-2})\, P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}).$$

Si se continúa iterando, se transforma la probabilidad no condicional del lado izquierdo por su producto equivalente de probabilidades condicionales del lado derecho, teniendo finalmente la forma:

$$P(j_0 j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n) = P(j_n \mid j_{n-1})\, P(j_{n-1} \mid j_{n-2}) \cdots P(j_1 \mid j_0)\, p_{j_0}$$

Si se escribe la probabilidad anterior para el proceso de reclamaciones en forma explícita:

$$P[R_0=j_0, R_1=j_1, \ldots, R_{n-1}=j_{n-1}, R_n=j_n] =$$

$$P[R_n = j_n \mid R_{n-1}=j_{n-1}]\, P[R_{n-1} = j_{n-1} \mid R_{n-2}=j_{n-2}] \ldots P[R_2 = j_2 \mid R_1=j_1]\, P[R_1 = j_1 \mid R_0=j_0]\, p_{j_0}$$

Y si se aprovechan las notaciones introducidas en (3.6.1):

$$P[R_0=j_0, R_1=j_1, \ldots, R_{n-1}=j_{n-1}, R_n=j_n] = P_{j_{n-1} j_n} P_{j_{n-2} j_{n-1}} \ldots P_{j_0 j_1} p_{j_0};$$

Invirtiendo el orden de los factores[1]:

$$P[R_0=j_0, R_1=j_1, \ldots, R_{n-1}=j_{n-1}, R_n=j_n] = p_{j_0} P_{j_0 j_1} \ldots P_{j_{n-2} j_{n-1}} P_{j_{n-1} j_n}; \qquad \blacktriangleleft$$

Asi se ha visto que la distribución conjunta de probabilidades de la cadena de reclamaciones, en etapas sucesivas, sólo *depende de las probabilidades iniciales y de las probabilidades de transición de una etapa*[2].

Ejemplos. Con un propósito introductorio a los conceptos expuestos, se retoman algunas de las preguntas planteadas al final de la sección § 2.1 en los siguientes ejemplos, basando los cálculos en la m.p.t. de una etapa con tres estados únicamente, puesta en forma tabular y señalando los mismos:

[1] [Chung (1975) 8.3 pp. 254]
[2] [Feller (1986) 15.1 pp. 375-376]

Estado	0	1	2
0	0.90	0.05	0.05
1	0	0.80	0.20
2	0	0	1

Matriz de probabilidades de transición para los ejemplos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un asegurado que acaba de contratar una póliza, reclame por primera vez durante el próximo mes?

Aquí se tiene que $\mathbf{p_0} = 1$ y así:

$$\mathbf{P[R_1 = 1| R_0 = 0] = p_0 P_{01}}$$
$$= 1 \text{ x } 0.05 = 0.05$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un asegurado no reclame en los primeros seis meses?

En este caso, se trata de calcular la probabilidad del arreglo (0,0,0,0,0,0,0), por (3.6.5):

$$\mathbf{P}(0,0,0,0,0,0,0) = \mathbf{p_0 P_{00} P_{00} P_{00} P_{00} P_{00} P_{00}}$$
$$= 1 \text{ x } (0.9)^6$$
$$= 0.53;$$

O sea que según la matriz de probabilidades, al rededor de la mitad de los procesos no reclamará en los primeros seis meses y en consecuencia también la otra mitad habrá presentado por lo menos una reclamación.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un asegurado reclame durante todos los meses de cobertura?. Dado que la m.p.t. es de tres estados, no puede reclamar teóricamente más de dos veces, como se verá enseguida. Entonces supóngase una cobertura de 2 meses, así se necesita calcular la probabilidad siguiente:

$$\mathbf{P}(0,1,2) = \mathbf{P_{01} P_{12}} = 0.05 \text{ x } 0.2 = 0.01$$

Como se mencionaba, observe que para reclamar cada uno de los seis meses siguientes: $\mathbf{P}(0,1,2,3,4,5,6) = 0$, ya que a pesar de que se "esta reclamando" cada mes, el proceso no puede pasar al estado 3 ya que sólo hay tres estados: **0**, **1**, **2**, por lo tanto en particular $\mathbf{P_{23}} = 0$.

d) Si el proceso de reclamaciones inicia con las probabilidades siguientes:

$p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.4$ y $p_2 = 0.1$, la probabilidad de que el proceso de reclamaciones se encuentre en el estado **2**, al finalizar la etapa 1 es:

$$\mathbf{P[R_1=2] = p_0 P_{02} + p_1 P_{12} + p_2 P_{22}}$$
$$= 0.5\text{x}0.05 + 0.4\text{x}0.2 + 0.1\text{x}1$$
$$\mathbf{P[R_1=2]} = 0.205$$

Y esto nos dice que alrededor del 20.5% de los procesos, distribuidos según $\mathbf{p_0}$, $\mathbf{p_1}$, y $\mathbf{p_2}$ ya habrán reclamado dos veces al terminar la primera etapa. Aunque es oportuno aclarar que únicamente el 10.5% reclamó en el último mes, ya que al inicio del mes había procesos que ya contaban con dos reclamaciones y no reclamaron durante el mes.

e) Calcular la probabilidad del arreglo **(0,0,1,1,1,2)**, con $p_0 = 0.5$:

$$\mathbf{P}(0,0,1,1,1,2) = \mathbf{p_0\, P_{00}\, P_{01}\, P_{11}\, P_{11}\, P_{12}}$$

$$= 0.5 \times 0.9 \times 0.05 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.2$$

$$\mathbf{P}\,(0,0,1,1,1,2) = 0.00288$$

§ 3.7 Probabilidades de ordenes mayores

A una sucesión particular de estados, en etapas consecutivas, se le llamará una *realización o trayectoria*[1].

Así por ejemplo la realización **(1,2,3)** significa que el proceso inició en el estado **1**, pasó del estado **1** al **2** al finalizar la primera etapa y del estado **2** al **3** en la segunda etapa. En particular, la realización **(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,2)** quiere expresar que el proceso de reclamaciones inicia en el estado **0**. Se mantuvo en este estado las cinco primeras etapas; pasando al estado **1** en la sexta, esto es, reclamando por primera vez en el proceso; permaneciendo ahí durante cuatro etapas más y ocupando el estado **2** en la última y onceava etapa observada. Por las probabilidades de transición de una etapa, la probabilidad de una realización tal, sería:

$$\mathbf{p_0\, P(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,2) = p_0\, (P_{00})^5\, P_{01}\, (P_{11})^4\, P_{12}}.$$

Ahora supóngase que el proceso inicia en el estado 2 y que se desea calcular la probabilidad de pasar del estado **2** al **3** en *dos* etapas. Luego sería necesario calcular las probabilidades de las siguientes realizaciones: (2,2,3) y (2,3,3), esto es:

$$[\mathbf{P(2,2,3) + P(2,3,3)}] = [\mathbf{P_{22}\, P_{23} + P_{23}P_{33}}].$$

En general, supóngase que el proceso inicia en el estado i con probabilidad 1, si se desea calcular la probabilidad de pasar del estado **i** al **j** con i, j fijos, en las siguientes dos etapas consecutivas, se calculan primero las probabilidades de cada una de las realizaciones **(i,k,j)**, ya que el proceso parte del estado **i** y pasa a un estado intermedio **k**, en una etapa y después pasa de **k** a **j** en la siguiente, donde $\mathbf{i \le k \le j}$, y después se suman las probabilidades, esto es:

$$\mathbf{P[R_{n+2}=j|R_n=i]} = \sum_{k=i}^{j} \mathbf{P_{ik}\, P_{kj}}$$

Pero la suma anterior corresponde al producto matricial de la i-ésima fila de **P** por la j-ésima columna de sí misma. Dada **P** si se denota como $\mathbf{P}^{(2)}_{ij}$ al elemento ubicado en la fila i y la columna j de $\mathbf{P}^2$, entonces:

$$\mathbf{P}^{(2)}_{ij} = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P_{ik}\, P_{kj}}$$

[1] [Cox (1965) 1.1 pp. 3]

Pero $P_{ik} = 0$, según las relaciones dadas en (3.6.2), si $\mathbf{i} > \mathbf{k}$, y también para $\mathbf{k} > \mathbf{j}$. Entonces los productos de probabilidades pueden contribuir a la suma anterior siempre y cuando: $\mathbf{i} \leq \mathbf{k}$ y $\mathbf{k} \leq \mathbf{j}$. Por lo tanto:

$$\mathbf{P}^{(2)}_{ij} = \sum_{k=i}^{j} \mathbf{P}_{ik}\, \mathbf{P}_{kj}$$

O bien: $\mathbf{P}^{(2)}_{ij} = \mathbf{P}[\mathbf{R}_{n+2}=\mathbf{j}|\mathbf{R}_n=\mathbf{i}]$

Por lo que en particular $\mathbf{P}^2$ va a proporcionar las probabilidades de transición en dos etapas consecutivas entre los estados del proceso de reclamaciones.
Por inducción sobre k, resultaría que:

$$\mathbf{P}[\mathbf{R}_{n+k}=\mathbf{j}|\mathbf{R}_n=\mathbf{i}] = \mathbf{P}^{(k)}_{ij} \qquad \textbf{(3.7.1)}$$

Para ello, sea: $\mathbf{P}^{(1)}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}$

Se ha visto que: $\mathbf{P}[\mathbf{R}_{n+2}=\mathbf{j}|\mathbf{R}_n=\mathbf{i}] = \mathbf{P}^{(2)}_{ij}$

Suponga (3.7.1) cierto para k, entonces:

$\mathbf{P}[\mathbf{R}_{n+k}=\mathbf{j}|\mathbf{R}_n=\mathbf{i}] = \mathbf{P}^{(k)}_{ij}$, donde $\mathbf{P}^k = [\mathbf{P}^{(k)}_{ij}]$, es la k-ésima potencia de $\mathbf{P}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\mathbf{R}_{n+k+1}=\mathbf{j}|\mathbf{R}_n=\mathbf{i}] &= \sum_{r=i}^{j} \mathbf{P}^{(k)}_{ir}\, \mathbf{P}_{rj} \\ &= (\mathbf{P}^k\mathbf{P})_{ij} \\ &= \mathbf{P}^{(k+1)}_{ij}\end{aligned}$$

Donde la probabilidad anterior es el elemento ubicado en la fila i y columna j de la (k+1)-ésima potencia de **P**, y así se vio que:

$$\mathbf{P}^{k+1} = [\mathbf{P}^{(k+1)}_{ij}]. \qquad \textbf{(3.7.2)}$$

Es importante mencionar que $\mathbf{P}^k$ es también una matriz estocástica, ya que independientemente de la distribución inicial de probabilidades, **p**, si la cadena se encuentra en el estado **i** en la etapa **n**, exactamente después de transcurrir **k** etapas, esto es, en la etapa (**n+k**), el proceso puede permanecer en el estado **i** con probabilidad $\mathbf{P}^{(k)}_{ii}$, ó haber pasado a uno y sólo un estado $\mathbf{j} > \mathbf{i}$, con probabilidad $\mathbf{P}^{(k)}_{ij}$, por lo que:

$$\boxed{\sum_{j=i}^{m} \mathbf{P}^{(k)}_{ij} = 1;\ \text{para } k=1,2,.}$$

Donde $\mathbf{P}^{(k)}_{ij} \geq 0$, si $\mathbf{i} \leq \mathbf{j}$;

$= 0$, en otro caso. **(3.7.3)**

Otra fórmula para calcular la probabilidad de pasar del estado **i** al estado **j** en **(u+v)** etapas, lo proporciona la ecuación de *Chapman-Kolmogorov* para las cadenas finitas de Markov[1]:

$$\boxed{\mathbf{P}^{(u+v)}_{ij} = \sum_{r=i}^{J} \mathbf{P}^{(u)}_{ir}\, \mathbf{P}^{(v)}_{rj}} \qquad \mathbf{(3.7.4)}$$

Una forma de interpretar la ecuación anterior es la siguiente. El proceso pasa en **u** etapas del estado **i** a un estado intermedio fijo **r**, con probabilidad $\mathbf{P}^{(u)}_{ir}$, para después ocupar el estado **j** al transcurrir **v** etapas más, con probabilidad $\mathbf{P}^{(v)}_{rj}$, luego **i** pasa a **j** en **(u+v)** etapas con probabilidad $\mathbf{P}^{(u)}_{ir}\, \mathbf{P}^{(v)}_{rj}$.

En (3.5.3) se definió el vector de probabilidades iniciales **p**. Pero, en ocasiones es necesario conocer la probabilidad *no condicional* de que el proceso se encuentre en un estado específico **i**, en una etapa dada **k**, es decir se desea poder calcular[2]:

$$\mathbf{p}^{(k)}_i = \mathbf{P}[\mathbf{R}_k = \mathbf{i}], \text{ para } k=1,2,\ldots \qquad \mathbf{(3.7.5)}$$

Y el vector de probabilidades no condicionales en la etapa k se calcula con **p** y la k-ésima potencia de **P**, donde se consideraría que $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(0)}$:

$$\boxed{\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}\mathbf{P}^k, \text{ para } k=1,2,\ldots} \qquad \mathbf{(3.7.6)}$$

Ejemplos. Usando la matriz de los ejemplos de la sección § 3.6:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La segunda potencia de **P** es:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.085 & 0.105 \\ 0 & 0.64 & 0.36 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mientras que la cuarta potencia de **P** es $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^4$:

[1] [Feller (1986) 15.3 pp. 383]
[2] [Bhat (1984) 3.2 pp. 38]

$$\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.6561 & 0.12325 & 0.22065 \\ 0 & 0.4096 & 0.5904 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y como: $\mathbf{P}^2 \text{ x } \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^{2+4} = \mathbf{P}^6$, entonces:

$$\mathbf{P}^6 = \begin{bmatrix} 0.531441 & 0.134649 & 0.333910 \\ 0 & 0.262144 & 0.737856 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Suponga que la cadena de reclamaciones se encuentra en el estado **1**, en una etapa determinada. La probabilidad que se haya pagado exactamente una reclamación más, al terminar las siguientes seis etapas, según los datos de $\mathbf{P}^6$ es:

$$\mathbf{P}^{(6)}{}_{12} = 0.737856.$$

Comparando las probabilidades de pasar del estado **1** al **2** en 2 etapas contra la correspondiente a 6 etapas, se aprecia un incremento mayor al doble en esta última, considerando la razón 0.737856/0.36 = 2.0496.

Si se calcula únicamente $\mathbf{P}^{(12)}{}_{12}$, multiplicando la fila del estado **1** por la columna del estado **2** de $\mathbf{P}^6$ misma, esta es la probabilidad de pasar del estado **1** al **2** en doce etapas:

$$\mathbf{P}^{(12)}{}_{12} = 0 \text{ x } 0.333910 + 0.262144 \text{ x } 0.737856 + 0.737856 \text{ x } 1$$

$$\mathbf{P}^{(12)}{}_{12} = 0.931238$$

Se aprecia que es muy probable que se haya reclamado nuevamente en 12 etapas.

Ejemplo. Supóngase el vector de probabilidades iniciales $\mathbf{p} = [0.5, 0.3, 0.2]$; por (3.7.6) las probabilidades en la sexta etapa son:

$$\mathbf{p}^{(6)} = \mathbf{p}\mathbf{P}^6$$

$$\mathbf{p}^{(6)} = [0.5, 0.3, 0.2] \begin{bmatrix} 0.531441 & 0.134649 & 0.333910 \\ 0 & 0.262144 & 0.737856 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde: $\mathbf{p}^{(6)}{}_0 = 0.5\text{x } 0.531441 + 0.3\text{x}0 + 0.2\text{x}0 = 0.2657205$

$\mathbf{p}^{(6)}{}_1 = 0.5\text{x } 0.134649 + 0.3\text{x}0.262144 + 0.2\text{x}0 = 0.1459677$

$\mathbf{p}^{(6)}{}_2 = 0.5\text{x } 0.333910 + 0.3\text{x}0.737856 + 0.2\text{x}1 = 0.5883118$

Luego:

$$p^{(6)} = [0.2657205, 0.1459677, 0.5883118].$$

Así se tendría por (3.7.5), que la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado **1**, en la sexta etapa, es:

$$P[R_6 = 1] = 0.1459677.$$

§ 3.8 Clasificación de los estados

Para caracterizar la naturaleza de los estados y comprender mejor la evolución de un proceso de reclamaciones, se clasificarán aquellos en *transitorios* y *recurrentes*.

> Se dice que un estado **i** es *transitorio* si y sólo si, iniciando en el estado **i**, hay una *probabilidad positiva* de que el proceso *salga y no regrese* eventualmente a este estado[1].

(3.8.1)

Pero precisamente, ésta es una de las características de la mayoría de los estados de los procesos de reclamaciones que se están estudiando, ya que como se estableció en (3.1.1), las reclamaciones se van acumulando, no pudiendo disminuir su número. Es decir, la primera vez que el proceso de reclamaciones deja el estado **i** no regresa a **i** jamás.

Los estados transitorios **i**, para los cuales $P_{ii}=0$ se les va a llamar estados *fugases*[2].

> Un estado **i** es *recurrente* si y sólo si, iniciando en el estado **i**, aunque salga de **i**, el regreso eventual a este estado es cierto[3].

(3.8.2)

> Se dice que un estado **i** es *absorbente* cuando el proceso, una vez que ha ocupado este estado, permanece en él etapa tras etapa[4]. Lo que va a implicar que: $P_{ii}=1$.

(3.8.3)

Desde luego que *todo estado absorbente es recurrente.*

En los procesos de reclamaciones, originalmente (ver la sección § 3.10), el único estado absorbente es el último, y como se definió en (3.2.1) este es **m**. Y así, en la m.p.t. de una etapa: $P_{mm}=1$.

Proposición 3.1

En la matriz de probabilidades de transición de una etapa del proceso de reclamaciones, si $P_{ii}<1$ entonces **i** es un estado transitorio.

---

[1] [Bhat (1984) 3.3 pp. 43].
[2] [En base a la clasificación de Cox D.R. & Miller H.D. (1965) 3.4 pp.91].
[3] [Idem, pp. 43].
[4] [Idem, pp. 45].

Prueba: Sea $P_{ii}<1$. Luego por (3.6.2) y (3.6.3) existe por lo menos un estado $j > i$ tal que $P_{ij}>0$, y entonces tarde o temprano el proceso de reclamaciones, sin limitaciones de cobertura, pasará al estado **j**. Ya que por (3.7.3) $P^{(r)}_{ji} = 0$, para toda r = 1, 2,.... ◄

§ 3.9 Inferencia estadística

Para propósitos de *inferencia estadística* una cadena de Markov puede observarse de dos formas[1]:

(1) Con una observación de una cadena de gran tamaño, o

(2) Con observaciones de un gran número de realizaciones de la misma cadena.

Por la naturaleza y dinámica de las reclamaciones, una observación, aún muy grande, sería insuficiente para realizar estimaciones, ya que casi todos los estados son transitorios. Entonces es necesario adoptar el segundo enfoque, considerando que todas las realizaciones corresponden al mismo sistema.

Para efectos de estimar las probabilidades P_{ij} de la m.p.t. **P**, se registran **N** realizaciones de las cadenas del sistema de reclamaciones, para obtener **n** transiciones entre los estados, donde el estado mayor será el máximo alcanzado en cualquier realización, esto es, $m = \max(m_k)$, para k=1,2,...,N; y m_k es el último estado alcanzado por la k-ésima realización.

Se van a registrar todas las transiciones n_{ij} del estado **i** al **j**, de los procesos de todos los asegurados del sistema de reclamaciones, en la forma que se muestra en la tabla 3.9.1.

Para cada estado **i** se realiza la suma:

$$\boxed{n_i = \sum_{j=i}^{m} n_{ij}} \qquad \textbf{(3.9.1)}$$

Estado	**0**	**1**	**2**	**...**	**m-1**	**m**	**Suma**
0	n_{00}	n_{01}	n_{02}		$n_{0,m-1}$	n_{0m}	n_0
1	0	n_{11}	n_{12}		$n_{1,m-1}$	n_{1m}	n_1
2	0	0	n_{22}		$n_{2,m-1}$	n_{2m}	n_2
...	...	...	...	...	...	...	...
m-1	0	0	0		$n_{m-1,m-1}$	$n_{m-1,m}$	n_{m-1}
m	0	0	0		0	$n_{m,m}$	n_m

Tabla 3.9.1 *Transiciones entre los estados de un sistema de reclamaciones.*

[1] [Bhat (1984) 5.4 pp. 137]

Para un estado inicial **i** y un número de ensayos n_i, el arreglo de transiciones:

$(n_{ii}, n_{i,i+1},...,n_{i,m})$, se puede considerar como una muestra de tamaño n_i de una distribución multinomial con probabilidades $(\mathbf{P_{ii}}, \mathbf{P_{i,i+1}},...,\mathbf{P_{im}})$ tales que[1]:

$$\boxed{\sum_{j=i}^{m} \mathbf{P_{ij}} = 1} \tag{3.9.2}$$

Entonces, las probabilidades de transición de una etapa se estiman con las fórmulas siguientes[2]:

$$\boxed{\mathbf{P_{ii} = n_{ii}/n_i}} \tag{3.9.3}$$

De manera similar se pueden derivar las estimaciones de otros elementos[1]:

$$\boxed{\mathbf{P_{ij} = n_{ij}/n_i}, \text{ para } \mathbf{i,j = 0,1,...,m;}} \tag{3.9.4}$$

[1] [Bhat (1984) 5.4 pp. 138]
[2] [Bhat (1984) 5.4 pp. 140]

Estado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Suma
0	29361	61	13																**29435**
1		3393	57	6	1														**3457**
2			505	12	1														**518**
3				88	3	1													**92**
4					4	6													**10**
5						41	2												**43**
6							3	2	0	1									**6**
7								5	1										**6**
8									0	1									**1**
9										0	1	1							**2**
10											0	1							**1**
11												0	1	1					**2**
12													0	1					**1**
13														0	1				**1**
14															0	1			**1**
15																0	1		**1**
16																	0	1	**1**
17																		3	**3**

Tabla 3.9.2 *Transiciones por reclamaciones.* Hombres 1986-1987.

Estado	0	1	2	3	4	5	6	Suma
0	171809	494	19	3	1			**172326**
1		4738	55	3				**4796**
2			550	12	1			**563**
3				96	5			**101**
4					38	2		**40**
5						3	1	**4**
6							3	**3**

Tabla 3.9.3 *Transiciones por reclamaciones.* Mujeres 1986-1987.

Estimación de la matriz de probabilidades de transición del proceso de reclamaciones

Para el desarrollo del presente trabajo se registraron las *realizaciones* de un sistema de reclamaciones durante el periodo 1986-1987, separando los datos por sexo únicamente. En todas ellas, el número de etapas observadas excedió al número de estados alcanzados, teniendo un tamaño promedio de 21 etapas, por realización. Las etapas corresponden a los meses del calendario, debido a que tales unidades permitieron registrar las transiciones con cierto detalle, aunque no en todos los casos sería necesariamente adecuado.

Por ejemplo, si en una recopilación de datos la mayoría de los estados resultaran fugaces, lo que significaría que ocurre una transición, por lo menos, dentro de cada etapa, se podría ampliar el tamaño de éstas a trimestres, semestres ó años y poder registrar probabilidades positivas de permanencia en los estados. O en forma contraria, si se tuvieran muy pocas transiciones entre los estados se pueden reducir entonces los tamaños de las etapas a quincenas, semanas o hasta en días, para incrementar de esta forma el número de transiciones. Sin embargo, es importante notar que, al cambiar y fijar la magnitud de las etapas se originan cambios en las probabilidades de transición.

Las transiciones por reclamaciones se muestran en las tablas 3.9.2 y 3.9.3.

Para el caso de los varones en la tabla 3.9.2 se pueden apreciar, entre otras cosas, que de las 29435 transiciones de procesos que se encontraron en el estado **0** en cualquier mes, durante el siguiente, hubo 29361 que no reclamaron; 61 asegurados hicieron su primera reclamación y 13 efectuaron la primera y segunda reclamaciones en el transcurso del mes. Para el estado **1** se observó que de las 3457 transiciones de procesos, durante el siguiente mes, 57 hicieron su segunda reclamación, 6 hicieron la segunda y tercera reclamación y una presentó de la segunda a la cuarta reclamación. De los 518 que se encontraban en el estado **2**, 505 no reclamaron, 12 hicieron una reclamación y sólo uno reclamó dos veces para llegar a la cuarta reclamación, en el transcurso del mes. Se aprecia también que a partir del estado **8** todos los estados son fugaces, es decir, en todos los procesos se reclamó por lo menos una vez más en una etapa, con excepción del último estado observado, el **17**, que viene a ser el estado absorbente original **m** definido en (3.2.1).

Las transiciones de mujeres (tabla 3.9.3) no originaron a estados fugaces, y además alcanzaron un número menor de estados que los correspondientes a los hombres (tabla 3.9.2), **7** contra 18, respectivamente. De las 172326 transiciones de procesos de reclamaciones que se encontraron en el estado **0**, en el transcurso del siguiente mes, 171809 no reclamaron, 494 presentaron una reclamación, 19 reclamaron dos veces, 3 reclamaron tres veces y uno reclamó cuatro veces, siendo esto último significativo, comparado con el proceso de reclamaciones de los hombres que apenas alcanzan el segundo estado en el primer mes. Volviendo a la tabla 3.9.3, de las 4796 transiciones de procesos en el estado **1**, en un mes 4738 permanecieron sin reclamar, 55 pasaron al estado **2** (reclamando una vez), y 3 terminaron en el estado **3** (reclamando dos veces). Se aprecia también que del estado **2** al **5** se reclama al menos una vez, claro en el transcurso de la siguiente etapa. Terminando con el estado **6**, el estado absorbente original **m** para las mujeres.

Las matrices de *probabilidades de transición de una etapa* se muestran en seguida, en las tablas 3.9.4 para hombres y 3.9.5 para mujeres.

Dado que la tabla 3.9.4 representa a una matriz de 18 estados, y que además en la práctica puede haber un número mayor de ellos, toda vez que se han registrado las realizaciones de los procesos estocásticos, es necesario encontrar una forma de reducir el orden de tales matrices, afectando lo menos posible los resultados y permitiendo un cálculo más sencillo de probabilidades de transición de órdenes mayores, así como obtener resultados de algunas propiedades del sistema de reclamaciones, los cuales se establecerán más adelante en las secciones § 4.1 y § 4.2.

Pruebas de hipótesis

Hay varios problemas de pruebas de hipótesis relacionados con las cadenas de Markov, de entre los principales se encuentran[1]:

1. Pruebas para una matriz de probabilidades de transición particular.
2. Pruebas para la homogeneidad de una matriz de probabilidades de transición.
3. Pruebas para el orden de una cadena de Markov.
4. Pruebas para la dependencia Markoviana de primer orden.

En aplicaciones reales serían importantes y convenientes realizar tales pruebas, sin embargo el trabajo se desviaría hacia tales efectos considerablemente, siendo que se pretende enfocar la utilidad de los conceptos tratados para conocer mejor *la naturaleza de los procesos de reclamaciones* y mostrar cómo se pueden *calcular primas y reservas*, para pólizas con condiciones generales. El estudioso puede consultar la referencia al pie para mayores detalles.

[1] [Bhat (1984) 5.4 pp. 140]

Estado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0.99749	0.00207	0.00044															
1		0.98148	0.01649	0.00174	0.00029													
2			0.97490	0.02317	0.00193													
3				0.95652	0.03261	0.01087												
4					0.4	0.6												
5						0.95349	0.04651											
6							0.5	0.33333	0	0.16667								
7								0.83333	0.16667									
8									0	1								
9										0	0.5	0.5						
10											0	1						
11												0	0.5	0.5				
12													0	1				
13														0	1			
14															0	1		
15																0	1	
16																	0	1
17																		1

Tabla 3.9.4 *Matriz de probabilidades de transición de una etapa.* Hombres 1986-1987.

Estado	0	1	2	3	4	5	6
0	0.99699	0.00287	0.00011	0.00002	0.00001		
1		0.98790	0.01147	0.00063			
2			0.97691	0.02131	0.00178		
3				0.9505	0.0495		
4					0.95	0.05	
5						0.75	0.25
6							1

Tabla 3.9.5 *Matriz de probabilidades de transición de una etapa.* Mujeres 1986-1987

§ 3.10 La forma canónica de la matriz de probabilidades de transición[1]

Para estar en posibilidad de reducir el número de estados de una matriz estocástica original se necesita identificar uno de dos casos excluyentes: cuando la matriz tiene estados fugaces y cuando no los tiene. Contar con la forma canónica de la m.p.t. permite trabajar con estados más allá del último obtenido en las realizaciones.

Primer caso: *La matriz tiene estados fugaces.*

Al primer estado fugaz se le identificará como **f**. Entonces la matriz de probabilidades compactada tendrá dos estados recurrentes: **f** y **(f+1)**, y f estados transitorios, desde el estado **0** hasta el estado **(f—1)**, formando dos clases excluyentes de estados: la clase de estados recurrentes $\mathbf{T}^{\mathbf{C}}$, y la clase de estados transitorios **T, **respectivamente.

Las probabilidades de los estados recurrentes **f** y **(f+1)** serán:

$$\boxed{P_{f,f+1} = P_{f+1,f} = 1} \qquad \mathbf{(3.10.1)}$$

Forzando transiciones inmediatas de una etapa a la siguiente entre ellos. Este ajuste se relaciona con el "aceleramiento" de los procesos hacia transiciones a estados mayores, toda vez que se ha alcanzado el estado **f**.

En términos prácticos esto quiere decir que aquellas personas que han reclamado hasta llegar a niveles de estados fugaces, seguirán reclamando muy probablemente hasta los límites del plazo de cobertura de la póliza o hasta el agotamiento de la suma asegurada.

Segundo caso: *La matriz no tiene estados fugaces.*

En esta situación por consistencia con el primer caso, el estado **f** viene a ser el último, luego entonces **f=m**. Agregando el estado (**f**+1) con las probabilidades dadas en (3.10.1).

Ya que se identificó **f** y se procedió en consecuencia como se señala en ambos casos, a partir de aquí se formará la m.p.t. en su *forma canónica*, destacando la naturaleza de los estados, agrupándolos por clases. Esto nos permite, generalmente con mayor facilidad, calcular algunos resultados importantes de los procesos de reclamaciones, así como el cálculo de probabilidades de órdenes mayores.

La forma canónica de la m.p.t. **P**, reducida o extendida, es también una matriz estocástica, y se forma reacomodando los estados, poniendo primero los dos estados recurrentes **f** y **f**+1, y después los estados transitorios, en el orden original, de tal manera que se tenga una partición con las siguientes matrices:

$\mathbf{P_1}$, es la matriz asociada a los estados recurrentes **f** y **f**+1, con las probabilidades dadas en (3.10.1). **Q** es la matriz que se forma con las probabilidades de los estados transitorios desde el estado **0** hasta el estado **f—1** y **R** corresponde con las probabilidades de transiciones de los estados transitorios a los estados recurrentes, como se define en (3.10.3).

---

[1] [Bhat (1984) 3.4 pp. 48]

Explícitamente:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{cc} f & f+1 \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} f \\ f+1 \end{array} \qquad \mathbf{(3.10.2)}$$

$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_{if}]$, donde $\mathbf{r}_{if} = \mathbf{P}_{if} + \mathbf{P}_{i,f+1} + \cdots + \mathbf{P}_{im}$, donde la suma se realiza con las probabilidades originales definidas en (3.6.4), para $\mathbf{i} \in \mathbf{T}$. **(3.10.3)**

$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_{ij}]$, donde $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}$; para $\mathbf{i,j} \in \mathbf{T}$. **(3.10.4)**

Luego la matriz en su forma canónica y en notación particionada es[1]:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array}\right] \qquad \mathbf{(3.10.5)}$$

Los órdenes de las matrices son los siguientes:

P es cuadrada de orden f+2, $\mathbf{P}_1$ es de 2x2, **0** es una matriz de ceros de orden 2xf, **R** es de fx2 y **Q** es una matriz cuadrada de orden f.

Obsérvese que la matriz **Q** es *subestocástica*[2] desde que:

$\mathbf{q}_{ii} + \mathbf{q}_{i,i+1} + \ldots + \mathbf{q}_{i,f-1} < 1$, para al menos un estado $\mathbf{i} \in \mathbf{T}$.

Revisando la matriz de la tabla 3.9.4, se aprecia que $\mathbf{P}_{ii}=0$, para **i**=8,9,...,16; Entonces el primer estado fugaz es el **8**, luego: **f** = 8, correspondiendo con el primer caso. Así, las matrices definidas en (3.10.2), (3.10.3) y (3.10.4) y que forman la m.p.t. en su forma canónica, para *hombres* son:

$$\mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]_{2x2} \qquad \mathbf{0} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{2x8} \qquad \mathbf{(3.10.6)}$$

---

[1] [Bhat (1984) 3.4 pp. 50]

[2] [Bhat (1984) 4.1 pp. 71]

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.16667 & 0 \\ 0.16667 & 0 \end{bmatrix}_{8x2} \qquad \textbf{(3.10.7)}
$$

Y la matriz **Q** de estados transitorios, para *hombres* es (todas las entradas vacías representan 0):

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.99749 & 0.00207 & 0.00044 & & & & & \\ & 0.98148 & 0.01649 & 0.00174 & 0.00029 & & & \\ & & 0.97490 & 0.02317 & 0.00193 & & & \\ & & & 0.95652 & 0.03261 & 0.01087 & & \\ & & & & 0.4 & 0.6 & & \\ & & & & & 0.95349 & 0.04651 & \\ & & & & & & 0.5 & 0.33333 \\ & & & & & & & 0.83333 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.10.8)}
$$

Integrando la matriz **P** como se indica en (3.10.5), se presenta a continuación en la tabla 3.10.1.

Estado	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	Suma
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0.99749	0.00207	0.00044	0	0	0	0	0	**1**
1	0	0		0.98148	0.01649	0.00174	0.00029	0	0	0	**1**
2	0	0			0.97490	0.02317	0.00193	0	0	0	**1**
3	0	0				0.95652	0.03261	0.01087	0	0	**1**
4	0	0					0.4	0.6	0	0	**1**
5	0	0						0.95349	0.04651	0	**1**
6	0.16667	0							0.5	0.33333	**1**
7	0.16667	0								0.83333	**1**

Tabla 3.10.1 P, *Forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de una etapa.* Hombres 1986 - 1987.

Para el caso de las *mujeres*, la matriz mostrada en la tabla 3.9.5 no presenta estados fugaces, desde que $P_{ii}>0$ para toda i. Por lo que corresponde al *segundo caso* mencionado en la forma canónica. Entonces **f = 6.** La matriz en su forma canónica se presenta en la tabla 3.10.2.

Las matrices $\mathbf{P_1}$, **0** para las *mujeres* son:

$$\mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x6} \qquad \textbf{(3.10.9)}$$

Y las matrices **R** y **Q** para las *mujeres* son:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}_{6x2} \qquad \textbf{(3.10.10)}$$

$$
Q = \begin{bmatrix}
0.99699 & 0.00287 & 0.00011 & 0.00002 & 0.00001 & \\
 & 0.98790 & 0.01147 & 0.00063 & & \\
 & & 0.97691 & 0.02131 & 0.00178 & \\
 & & & 0.95050 & 0.04950 & \\
 & & & & 0.95000 & 0.05000 \\
 & & & & & 0.75000
\end{bmatrix}_{6\times 6} \qquad \textbf{(3.10.11)}
$$

Estado	6	7	0	1	2	3	4	5	Suma
6	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**
7	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0.99699	0.00287	0.00011	0.00002	0.00001	0	**1**
1	0	0		0.98790	0.01147	0.00063	0	0	**1**
2	0	0			0.97691	0.02131	0.00178	0	**1**
3	0	0				0.95050	0.04950	0	**1**
4	0	0					0.95000	0.05000	**1**
5	0.25	0						0.75000	**1**

Tabla 3.10.2 P, *Forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de una etapa.* Mujeres 1986-1987.

Para aplicaciones posteriores es necesario calcular las potencias de **P**, en su forma canónica, por lo que se introducen las fórmulas siguientes[1]:

$$
\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1{}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_n & \mathbf{Q}^n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.10.12)}
$$

Donde:

$$
\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}, \text{ y } \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1}\, \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}^{n-1}\, \mathbf{R}; \qquad \textbf{(3.10.13)}
$$

y $\mathbf{P}_1$, **R** y **Q**, se definieron en (3.10.2), (3.10.3) y (3.10.4), respectivamente.

[1] [Bhat (1984) 3.4 pp. 50]

Calculando $\mathbf{P}^n$ para *hombres*, para n= 2,4,6,12, se presentan varias tablas:

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9949863	0.0040965	0.0009020	0.0000138	0.0000014	0	0	0
1	0	0		0.9633030	0.0322607	0.0037542	0.0004892	0.0001929	0	0
2	0	0			0.9504300	0.0447510	0.0034091	0.0014099	0	0
3	0	0				0.9149305	0.0442361	0.0403278	0.0005056	0
4	0	0					0.1600000	0.8120940	0.0279060	0
5	0.0077518	0						0.9091432	0.0676018	0.0155032
6	0.1388911	0.1666700							0.2500000	0.4444389
7	0.1388911	0.1666700								0.6944389

Tabla 3.10.3 $\mathbf{P}^2$, *Forma canónica de la m.p.t. de dos etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9899977	0.0080221	0.0018869	0.0000821	0.0000073	0.0000039	0	0
1	0.0000015	0		0.9279525	0.0617384	0.0084950	0.0008256	0.0009554	0.0000286	0.0000030
2	0.0000109	0			0.9033172	0.0834767	0.0057652	0.0071950	0.0002131	0.0000219
3	0.0003828	0.0000843				0.8370978	0.0475507	0.1094848	0.0045497	0.0008499
4	0.0101711	0.0046511					0.0256000	0.8682447	0.0663405	0.0249926
5	0.0263419	0.0138511						0.8265413	0.0783602	0.0549055
6	0.2353425	0.2824121							0.0625000	0.4197454
7	0. 2353425	0.2824121								0.4822454

Tabla 3.10.4 $\mathbf{P}^4$, *Forma canónica de la m.p.t. de cuatro etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9850341	0.0117832	0.0029451	0.0002033	0.0000165	0.0000169	0.0000005	0.0000004
1	0.0000133	0.0000053		0.8938995	0.0886143	0.0140189	0.0011723	0.0021477	0.0000991	0.0000296
2	0.0000993	0.0000391			0.8585398	0.1167997	0.0076946	0.0158632	0.0007428	0.0002215
3	0.0019815	0.0009843				0.7658863	0.0446380	0.1719113	0.0102890	0.0043096
4	0.0295869	0.0198736					0.0040960	0.8101483	0.0759945	0.0603007
5	0.0512585	0.0360625						0.7514443	0.0754658	0.0857689
6	0.3023221	0.3627879							0.0156250	0.3192650
7	0.3023221	0.3627880								0.3348900

Tabla 3.10.5 P^6, *Forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de seis etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000025	0.0000016	0.9702919	0.0221400	0.0064740	0.0008650	0.0000619	0.0001500	0.0000085	0.0000046
1	0.0002455	0.0001748		0.7990560	0.1552910	0.0336190	0.0023603	0.0082990	0.0005514	0.0004030
2	0.0017485	0.0012628			0.7370910	0.1897320	0.0118513	0.0518520	0.0036330	0.0028294
3	0.0180450	0.0141207				0.5865820	0.0343705	0.2970100	0.0244066	0.0254652
4	0.1124400	0.0986170					0.0000168	0.6121000	0.0626372	0.1141890
5	0.1385210	0.1216553						0.5646690	0.0578875	0.1172673
6	0.4035667	0.4842820							0.0002441	0.1119072
7	0.4035667	0.4842820								0.1121513

Tabla 3.10.6 P^{12}, *Forma canónica de la m.p.t. de doce etapas.* Hombres 1986 - 1987.

Ahora se procede a calcular P^n para *mujeres*, también para n= 2,4,6,12. (Todas las entradas vacías son 0):

Estado	6	7	0	1	2	3	4	5
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9939891	0.0056966	0.0002500	0.0000431	0.0000207	0.0000005
1	0	0		0.9759464	0.0225364	0.0014656	0.0000516	0
2	0	0			0.9543531	0.0410731	0.0044847	0.0000891
3	0	0				0.9034502	0.0940748	0.0024750
4	0.0125000	0					0.9025000	0.0850000
5	0.1875000	0.2500000						0.5625000

Tabla 3.10.7 P^2, *Forma canónica de la m.p.t. de dos etapas.* Mujeres 1986-1987.

Estado	6	7	0	1	2	3	4	5
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0.0000004	0.0000001	0.9880143	0.0112219	0.0006155	0.0001004	0.0000447	0.0000027
1	0.0000006	0		0.9524714	0.0435020	0.0036801	0.0003359	0.0000100
2	0.0000728	0.0000224			0.9107898	0.0763057	0.0121914	0.0006179
3	0.0016400	0.0006187				0.8162223	0.1698944	0.0116246
4	0.0397188	0.0212500					0.8145062	0.1245250
5	0.2929688	0.3906250						0.3164062

Tabla 3.10.8 P^4, *Forma canónica de la m.p.t. de cuatro etapas.* Mujeres 1986-1987.

Estado	6	7	0	1	2	3	4	5
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0.0000014	0.0000009	0.9820754	0.0165803	0.0010873	0.0001750	0.0000736	0.0000061
1	0.0000067	0.0000026		0.9295610	0.0629815	0.0065075	0.0008936	0.0000471
2	0.0003410	0.0001769			0.8692151	0.1063474	0.0222658	0.0016538
3	0.0059431	0.0035248				0.7374164	0.2301157	0.0230000
4	0.0732485	0.0523813					0.7350919	0.1392783
5	0.3522949	0.4697266						0.1779785

Tabla 3.10.9 $\mathbf{P}^6$, *Forma canónica de la m.p.t. de seis etapas.* Mujeres 1986-1987.

Estado	6	7	0	1	2	3	4	5
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0.0000120	0.0000092	0.9644721	0.0316955	0.0030572	0.0005244	0.0002057	0.0000239
1	0.0001552	0.0001079		0.8640837	0.1132896	0.0175458	0.0043873	0.0004305
2	0.0034831	0.0026485			0.7555349	0.1708611	0.0601934	0.0072790
3	0.0352844	0.0289817				0.5437826	0.3388471	0.0531042
4	0.1761599	0.1563091					0.5403601	0.1271709
5	0.4149959	0.5533278						0.0316763

Tabla 3.10.10 $\mathbf{P}^{12}$, *Forma canónica de la m.p.t. de doce etapas.* Mujeres 1986-1987.

IV. Aplicación de la metodología

§ 4.1 Propiedades de las primeras etapas

Para iniciar el estudio de la evolución de los sistemas de reclamaciones, se obtienen algunos resultados, que entre otras cosas permiten comparar los procesos de reclamaciones de hombres y mujeres, asi como contestar interrogantes, tales como: ¿Cuál es el valor esperado de los estados del sistema en la etapa doce? O dicho de otra manera. ¿cuál es el estado esperado, en los próximos 12 meses?, y ¿cuál seria su varianza?

Tomando las probabilidades de la m.p.t. en su forma canónica (3.10.5), supóngase que el proceso inicia en el estado i con probabilidad 1, luego el estado esperado al finalizar la etapa 12, para *hombres* es:

$$E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=i) = i\ \mathbf{P}^{(12)}_{ii} + (i+1)\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,i+1} + (i+2)\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,i+2} + \cdots + f\ \mathbf{P}^{(12)}_{if} + (f+1)\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,f+1} \qquad \mathbf{(4.1.1)}$$

Ejemplo. Si el proceso inicia en el estado 0, y como **f**=8 para *hombres*, se toman las probabilidades de la tabla 3.10.6, y entonces por (4.1.1):

$$E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=0) = 0\ \mathbf{P}^{(12)}_{00} + 1\ \mathbf{P}^{(12)}_{01} + 2\ \mathbf{P}^{(12)}_{02} + 3\ \mathbf{P}^{(12)}_{03} + 4\ \mathbf{P}^{(12)}_{04} + 5\ \mathbf{P}^{(12)}_{05} + 6\ \mathbf{P}^{(12)}_{06} + 7\ \mathbf{P}^{(12)}_{07} + \cdots + 8\ \mathbf{P}^{(12)}_{08} + 9\ \mathbf{P}^{(12)}_{09}$$

$$= 0x0.9702919 + 1x0.0221400 + 2x0.0064740 + 3x0.0008650 + 4x0.0000619 + 5x0.0001500 + 6x0.0000085 + 7x0.0000046 + 8x0.0000025 + 9x0.0000016$$

$$= 0.02214 + 0.012948 + 0.002595 + 0.0002476 + 0.00075 + 0.000051 + 0.322 + 0.00002 + 0.0000144$$

$$\boxed{E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=0) = 0.0387982.}$$

Ejemplo. Como en el ejemplo anterior, el estado esperado para *mujeres*, al finalizar la etapa 12, bajo las mismas hipótesis, con las probabilidades de la tabla 3.10.10 y siguiendo la fórmula (4.1.1) es:

$$E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=0) = 0\ \mathbf{P}^{(12)}_{00} + 1\ \mathbf{P}^{(12)}_{01} + 2\ \mathbf{P}^{(12)}_{02} + 3\ \mathbf{P}^{(12)}_{03} + 4\ \mathbf{P}^{(12)}_{04} + 5\ \mathbf{P}^{(12)}_{05} + 6\ \mathbf{P}^{(12)}_{06} + 7\ \mathbf{P}^{(12)}_{07}$$

$$= 0x0.9644721 + 1x0.0316955 + 2x0.0030572 + 3x0.0005244 + 4x0.0002057 + 5x\ 0.0000239 + 6x0.0000120 + 7x0.0000092$$

$$= 0.0316955 + 0.0061144 + 0.0015732 + 0.0008228 + 0.0001195 + 0.000072 + 0.0000644$$

$$\boxed{E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=0) = 0.0404618}$$

Aunque las cantidades son pequeñas, dado que los procesos de reclamaciones parten del estado inicial **0**, se puede apreciar que el estado esperado es ligeramente mayor para mujeres que para hombres, a pesar de que las mujeres alcanzaron menos estados. Significando esto que los procesos de reclamaciones de mujeres alcanzan estados mayores más rápido, en un periodo de 12 meses.

Ejemplo. Supóngase ahora que la cadena de reclamaciones se encuentra en el estado **1** con probabilidad 1, al inicio de las observaciones. Luego el *estado esperado* al finalizar la etapa 12, según la fórmula (4.1.1) y las probabilidades de la tabla 3.10.6, para *hombres* es:

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{1}) &= 1\ \mathbf{P}^{(12)}_{11} + 2\ \mathbf{P}^{(12)}_{12} + 3\ \mathbf{P}^{(12)}_{13} + 4\ \mathbf{P}^{(12)}_{14} + 5\ \mathbf{P}^{(12)}_{15} + 6\ \mathbf{P}^{(12)}_{16} + 7\ \mathbf{P}^{(12)}_{17} \\
&\quad + 8\ \mathbf{P}^{(12)}_{18} + 9\ \mathbf{P}^{(12)}_{19}. \\
&= 1\text{x}0.7990560 + 2\text{x}0.1552910 + 3\text{x}0.0336190 + 4\text{x}0.0023603 + \\
&\quad 5\text{x}0.0082990 + 6\text{x}0.0005514 + 7\text{x}0.0004030 + 8\text{x}0.0002455 + \\
&\quad 9\text{x}0.0001748 \\
&= 0.799056 + 0.310582 + 0.100857 + 0.0094412 + 0.041495 + 0.0033084 \\
&\quad + 0.002821 + 0.001964 + 0.0015732
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{1}) = 1.2710978}$$

Ejemplo. Siguiendo las probabilidades de la tabla 3.10.10, se calcula el *estado esperado* para *mujeres*:

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{1}) &= 1\ \mathbf{P}^{(12)}_{11} + 2\ \mathbf{P}^{(12)}_{12} + 3\ \mathbf{P}^{(12)}_{13} + 4\ \mathbf{P}^{(12)}_{14} + 5\ \mathbf{P}^{(12)}_{15} + 6\ \mathbf{P}^{(12)}_{16} + \\
&\quad 7\ \mathbf{P}^{(12)}_{17} \\
&= 1\text{x}0.8640837 + 2\text{x}0.1132896 + 3\text{x}0.0175458 + 4\text{x}0.0043873 + \\
&\quad 5\text{x}0.0004305 + 6\text{x}0.0001552 + 7\text{x}\ 0.0001079 \\
&= 0.8640837 + 0.2265792 + 0.0526374 + 0.0175492 + 0.0021525 + \\
&\quad 0.0009312 + 0.0007553
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{1}) = 1.1646885}$$

Luego se tiene que el estado esperado de los hombres comparado con el de las mujeres resultó mayor, siendo 1.2710978 contra 1.1646885, respectivamente. Al contrario de lo que sucede a partir del estado **0**, queriendo decir con esto que se espera que los procesos de hombres reclamen más rápido a partir de que presentaron la primera reclamación, en el lapso de doce meses. Sin embargo es necesario conocer algo sobre la variación de las reclamaciones, para tener una idea más precisa sobre el proceso, y por ello se procede a calcular su varianza.

Para obtener la varianza en doce etapas, se calcula primero la esperanza del cuadrado de los estados de un proceso de reclamaciones. Si el proceso inicia en el estado **i**, entonces:

$$E(\mathbf{R}^2_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{i}) = i^2\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,i} + (i+1)^2\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,i+1} + (i+2)^2\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,i+2} + \cdots + f^2\ \mathbf{P}^{(12)}_{if} + (f+1)^2\ \mathbf{P}^{(12)}_{i,f+1} \quad \mathbf{(4.1.2)}$$

Denotando:

$$\boxed{E(\mathbf{R}^2_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{i}) = x^2_{i,12}} \quad \mathbf{(4.1.3)}$$

Ejemplo. Si se parte del estado **1**, según (4.1.2) y (4.1.3), para hombres se tiene:

$x^2_{1,12} = 1^2x0.7990560 + 2^2x0.1552910 + 3^2x0.0336190 + 4^2x0.0023603 + 5^2x0.0082990 + 6^2x0.0005514 + 7^2x0.0004030 + 8^2x0.0002455 + 9^2x0.0001748$

$x^2_{1,12} = 0.7990560 + 4x0.1552910 + 9x0.0336190 + 16x0.0023603 + 25x0.0082990 + 36x0.0005514 + 49x0.0004030 + 64x0.0002455 + 81x0.0001748$

$x^2_{1,12} = 0.799056 + 0.621164 + 0.302571 + 0.0377648 + 0.207475 + 0.0198504 + 0.019747 + 0.015712 + 0.0141588.$

$x^2_{1,12} = 2.037499$

Entonces, si se denota también que:

$$\boxed{E(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{i}) = x_{i,12}}$$

La varianza sería calcula con la siguiente fórmula:

$$\boxed{Var(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=\mathbf{i}) = x^2_{i,12} - (x_{i,12})^2} \quad \mathbf{(4.1.4)}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$Var(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=1) = 2.037499 - (1.2710978)^2$$
$$= 2.037499 - 1.615690$$

$$\boxed{Var(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=1) = 0.421809} \quad \mathbf{(4.1.5)}$$

Ejemplo. Aplicando la fórmula (4.1.2) y con la notación introducida en (4.1.3) , para i=1, en el caso de *mujeres* se tiene:

$x^2_{1,12} = 1^2x0.8640837 + 2^2x0.1132896 + 3^2x0.0175458 + 4^2x0.0043873 + 5^2x0.0004305 + 6^2x0.0001552 + 7^2x0.0001079$

$x^2_{1,12} = 1.5669879$

Aplicando (4.1.4), la varianza para el proceso de reclamaciones de *mujeres* es:

$$Var(\mathbf{R}_{12}|\ \mathbf{R}_0=1) = 1.5669879 - (1.1646885)^2$$

$$\boxed{Var(\mathbf{R}_{12} \mid \mathbf{R}_0=1) = 0.2104886}$$

Como se puede apreciar por los resultados anteriores, el proceso de reclamaciones de *hombres* pasa en promedio a estados mayores, partiendo del estado **1**, ligeramente más rápido y con una varianza más grande, si comparamos los resultados de (4.1.5) y (4.1.6).

Sin embargo, prácticamente se esperan las mismas reclamaciones en las primeras etapas, para los procesos de ambos sexos. Luego entonces, ¿en qué etapa se esperarían diferencias mayores, si las hay? Ahora, como no es práctico revisar etapa por etapa, es necesario contar con una herramienta que permita estudiar estos valores en el límite, la cual se desarrollará en la siguiente sección.

§ 4.2 Propiedades límite de las cadenas de reclamaciones

Utilizando nuevamente la *forma canónica* de la m.p.t. definida en (3.10.5), y utilizando **Q**, la matriz correspondiente a las probabilidades de los estados transitorios, de (3.10.4), se establecen algunos resultados límite, que permiten conocer mejor la evolución de los procesos de reclamaciones.

Como se ha hecho, a las matrices se les va a indicar con letras mayúsculas, y al mismo tiempo con uno de sus elementos encerrado entre paréntesis cuadrados.

Sea **I** la matriz identidad del mismo orden que **Q**. Para cualquier proceso de reclamaciones, la matriz **I−Q** tiene una inversa, y ésta es[1]:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

La matriz fundamental

Cada matriz de probabilidades de transición de una etapa, en su forma canónica, va a tener asociada una matriz fundamental[1] **M**, la cual proporciona los m*eses esperados en estados transitorios*:

$$\boxed{\mathbf{M} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}} \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

[1] [Bhat (1984) 4.1 pp. 71]

Ejemplo. Cálculo de la matriz fundamental de los procesos de reclamaciones

a) La matriz **Q**, de estados transitorios, para *hombres*, es:

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
0.99749 & 0.00207 & 0.00044 & & & & & \\
 & 0.98148 & 0.01649 & 0.00174 & 0.00029 & & & \\
 & & 0.97490 & 0.02317 & 0.00193 & & & \\
 & & & 0.95652 & 0.03261 & 0.01087 & & \\
 & & & & 0.4 & 0.6 & & \\
 & & & & & 0.95349 & 0.04651 & \\
 & & & & & & 0.5 & 0.33333 \\
 & & & & & & & 0.83333
\end{bmatrix}
$$

Entonces **I—Q** en forma tabular es:

0.00251	−0.00207	−0.00044	0	0	0	0	0
0	0.01852	−0.01649	−0.00174	−0.00029	0	0	0
0	0	0.0251	−0.02317	−0.00193	0	0	0
0	0	0	0.04348	−0.03261	−0.01087	0	0
0	0	0	0	0.6	−0.6	0	0
0	0	0	0	0	0.04651	−0.04651	0
0	0	0	0	0	0	0.5	−0.33333
0	0	0	0	0	0	0	0.16667

Tabla 4.2.1 La matriz **I—Q** Hombres.

Invirtiendo **I—Q** y presentándola en forma tabular, según (4.2.2) se tiene:

Estado i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Suma**
0	398	45	36	21	1	22	2	4	529
1		54	36	21	1	22	2	4	140
2			40	21	1	22	2	4	90
3				23	1	22	2	4	52
4					2	22	2	4	30
5						22	2	4	28
6							2	4	6
7								6	6

Tabla 4.2.2 *Matriz fundamental. Meses esperados en estados transitorios (columna) habiendo iniciado en el estado i (fila)***.** Hombres

b) La matriz de estados transitorios, correspondiente a las *mujeres*, es:

$$
Q = \begin{bmatrix}
0.99699 & 0.00287 & 0.00011 & 0.00002 & 0.00001 & \\
 & 0.98790 & 0.01147 & 0.00063 & & \\
 & & 0.97691 & 0.02131 & 0.00178 & \\
 & & & 0.95050 & 0.04950 & \\
 & & & & 0.95000 & 0.05000 \\
 & & & & & 0.75000
\end{bmatrix}
$$

Luego **I—Q**, también en forma tabular, es:

0.00301	-0.00287	-0.00011	-0.00002	-0.00001	0
0	0.0121	-0.01147	-0.00063	0	0
0	0	0.02309	-0.02131	-0.00178	0
0	0	0	0.0495	-0.0495	0
0	0	0	0	0.05	-0.05
0	0	0	0	0	0.25

Tabla 4.2.3 La matriz **I—Q** Mujeres.

$(I-Q)^{-1}$ es:

Estado i	0	1	2	3	4	5	Suma
0	332	79	41	19	20	4	497
1		83	41	19	20	4	167
2			43	19	20	4	86
3				20	20	4	44
4					20	4	24
5						4	4

Tabla 4.2.4 *Matriz fundamental. Meses esperados en estados transitorios.* Mujeres

De los resultados límite mostrados en las tablas 4.2.2 y 4.2.4, se puede apreciar entre otras cosas, que para las pólizas nuevas, los procesos de hombres permanecen más tiempo sin hacer la primera reclamación, comparados con los de mujeres: 398 vs. 332 meses, respectivamente. Pero toda vez que reclaman una vez los hombres, el número de meses esperados sin reclamar es menor que el correspondiente a las mujeres, ya que si se checa la fila 1 de cada tabla, los meses esperados totales son: 140 vs. 167, respectivamente. También se aprecia que las permanencias en los estados de los procesos de reclamaciones de mujeres se van reduciendo más uniformemente, en comparación con los correspondientes a los hombres, ya que éstos oscilan en sus permanencias.

Aplicaciones de la matriz fundamental

Algunas propiedades interesantes de las cadenas de reclamaciones se pueden expresar en términos de matrices que dependen de **M**.

Para contar con una interpretación probabilística de la matriz fundamental **M**, se presentan los siguientes teoremas, propuestos por Kemeny & Snell (1960).

Sea $\mathbf{S}_{ij}$ (con **i**, **j** estados transitorios) la variable aleatoria que mide el número de veces que el proceso visita **j**, antes de que entre en un estado recurrente, eventualmente, habiendo iniciado en el estado **i**.

Si se pone:

$$\boxed{\mu_{ij} = E[\mathbf{S}_{ij}]}$$

Entonces:

$$\boxed{[\mu_{ij}] = \mathbf{M}}$$

La fórmula anterior establece que la media del total de etapas que el proceso ocupa un estado transitorio es finita y que estas medias están dadas por **M**[1]. Sean M_2 y M_D definidas a continuación:

$$\mathbf{M}_2 = [(\mu_{ij})^2] \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

$$\mathbf{M}_D = [d_{ij}], \text{ donde } d_{ij} = m_{ij}, \text{ si } \mathbf{i}=\mathbf{j}, \text{ y } d_{ij} = 0, \text{ en otro caso.} \qquad \textbf{(4.2.4)}$$

Esto es, $\mathbf{M}_D$ es la matriz que se forma con la diagonal principal de **M**.

La varianza de $\mathbf{S}_{ij}$ esta dada por[2]:

$$\boxed{[\mathrm{var}(\mathbf{S}_{ij})] = \mathbf{M}(2\mathbf{M}_D - \mathbf{I}) - \mathbf{M}_2} \qquad \textbf{(4.2.5)}$$

Ejemplo. Los cálculos para hombres se muestran a continuación.

796	0	0	0	0	0	0	0
0	107	0	0	0	0	0	0
0	0	79	0	0	0	0	0
0	0	0	45	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0
0	0	0	0	0	42	0	0
0	0	0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	0	0	0	11

Tabla 4.2.5 $2\mathbf{M}_D-\mathbf{I}$. Hombres.

317057	4764	2851	949	3	903	6	44
	5777	2791	948	3	903	6	44
		3135	955	3	903	6	44
			1035	3	903	6	44
				4	903	6	44
					903	6	44
						6	44
							66

Tabla 4.2.6 $\mathbf{M}(2\mathbf{M}_D-\mathbf{I})$. Hombres

[1] [Bhat (1984) 4.1 pp. 72]
[2] [Bhat (1984) 4.1 pp. 73]

Estado i	0	1	2	3	4	5	6	7
0	158329	2781	1538	504	1	441	2	28
1		2862	1533	504	1	441	2	28
2			1547	505	1	441	2	28
3				506	1	441	2	28
4					1	441	2	28
5						441	2	28
6							2	28
7								30

Tabla 4.2.7 [$\mathbf{M(2M_D-I) - M_2}$] *Varianza de la matriz fundamental.* Hombres

Estado i	0	1	2	3	4	5	6	7	Suma
0	398	53	39	22	1	21	1	5	540
1		53	39	22	1	21	1	5	142
2			39	22	1	21	1	5	89
3				22	1	21	1	5	50
4					1	21	1	5	28
5						21	1	5	27
6							1	5	6
7								5	5

Tabla 4.2.8 *Desviación estándar de la matriz fundamental.* Hombres

Ejemplo. Ahora los cálculos para la varianza de *mujeres* son:

663	0	0	0	0	0
0	164	0	0	0	0
0	0	86	0	0	0
0	0	0	39	0	0
0	0	0	0	39	0
0	0	0	0	0	7

Tabla 4.2.9 ($\mathbf{2M_D-I}$). Mujeres.

220416	12946	3487	736	780	28
	13578	3515	738	780	28
		3708	735	780	28
			796	780	28
				780	28
					28

Tabla 4.2.10 $M(2M_D-I)$. Mujeres

Estado i	0	1	2	3	4	5
0	110042	6737	1828	387	380	12
1		6747	1830	387	380	12
2			1832	387	380	12
3				388	380	12
4					380	12
5						12

Tabla 4.2.11 $[M(2M_D-I) - M_2]$ *Varianza de la matriz fundamental.* Mujeres

Estado i	0	1	2	3	4	5	Suma
0	332	82	43	20	19	3	499
1		82	43	20	19	3	167
2			43	20	19	3	85
3				20	19	3	42
4					19	3	22
5						3	3

Tabla 4.2.12 *Desviación estándar de la matriz fundamental.* Mujeres

Si el análisis parte del estado 0, en las tablas 4.2.8 (hombres) y 4.2.12 (mujeres) se observa que la primera presenta mayor variación, teniendo una desviación estándar total de 540 meses vs. 499, respectivamente. Para el estado 1 la variación es menor para los procesos de hombres comparados con los de mujeres, 142 vs.167, siendo muy similares en el caso del estado 2, 89 vs. 85, respectivamente. Así, la diferencia significativa resulta de que los hombres presentan mayor variación para comenzar a reclamar.

La matriz fundamental proporciona información sobre la naturaleza del sistema de reclamaciones, al mismo tiempo que permite comparar un sistema con otro, o el mismo sistema en épocas diferentes con estimaciones de probabilidades también diferentes, lo que viene a ser relevante para establecer procedimientos de revisión o de control a los mismos y no sólo preocuparse por los costos que originan las transiciones.

§ 4.3 Cálculo de primas

Para calcular cada prima de riesgo, es decir la prima requerida para cubrir el costo esperado de las reclamaciones, excluyendo gastos, ganancias o desviaciones adversas[1] y reservas para estos seguros, es necesario estar conscientes de los datos que permitieron las estimaciones, ya que las probabilidades de transición corresponden a una cartera de pólizas o grupo de pólizas con riesgos similares. Al establecer las condiciones de nuevas pólizas, éstas deberán ser consistentes con aquellas que generaron las realizaciones de los procesos. Por otro lado, es importante mencionar que los costos se originan al ocurrir en algunos momentos dados de la cobertura, las transiciones de un estado a los estados mayores. Para los cálculos de las primas se definen condiciones generales de las pólizas y condiciones específicas por tipo. Se presentan primero los resultados de los cálculos, su detalle y después la justificación de las fórmulas empleadas. Como se necesitan varias potencias de la m.p.t. de una etapa, $\mathbf{P}^k$, se calculan las que se necesiten, completando las que se obtuvieron en la sección § 3.10.

Condiciones, notación y parámetros generales:

1. Al asegurado se le pagarán reclamaciones por accidentes y enfermedades a él ocurridos, hasta un límite de **SA** $\leq$ \$ 5380,000.

2. $P^{(n)}_{ij}$ es la probabilidad de transición (de la m.p.t. en su forma canónica) del estado **i** al **j** en **n** etapas sucesivas.

3. $C^{(n)}_{ij}$ es el costo a pagar al final de la etapa **n**, por la transición de **i** a **j**.

4. **g** es la tasa de rendimiento mensual.

5. **h**, la tasa inflacionaria mensual.

6. $V=1/(1+g)$, el valor presente de \$1 en una etapa (mes).

7. **PN** es la prima de riesgo única (p.n.u.), a pagar al contratar la póliza.

8. **Coaseguro.** A cada reclamación a pagar, la Cía. Aseguradora descontará un coaseguro del **100c%** por monto reclamado.

9. Plazo de cobertura del seguro a **n** meses.

En la tabla 4.3.1 se muestra el valor presente al 31 de diciembre de 1986, de los costos promedio (en miles de pesos) registrados en el periodo 1986-1987, para reclamaciones de hombres y de mujeres, de un conjunto de pólizas, desde el inicio de la cobertura.

Pólizas Tipo A. Básicas

Se agregan las condiciones siguientes a las condiciones generales:

A.1 Hipótesis de pago: todas las reclamaciones se pagan al final de n meses, el plazo del seguro.

A.2 Los asegurados pueden reclamar en cualquier momento dentro de la cobertura del seguro.

[1] [Daykin (1994) 3.2 pp 60]

Estado j	Hombres	Mujeres
1	\$ 485.540	\$ 521.611
2	647.869	668.710
3	1,355.541	849.559
4	1,607.305	895.283
5	1,642.305	961.792
6	1,801.904	1,015.648
7	2,121.818	1,069.504
8	2,440.271	-----------
9	2,758.724	------------

Tabla 4.3.1 *Costos promedio por las transiciones del estado 0 a j.* Al 31/12/1986

Para el cálculo de la p.n.u. a cobrar al contratar la póliza, se aplica la fórmula siguiente:

$$\boxed{\mathbf{PN_A = (1-c)\, V^n \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}_{0j}\, P^{(n)}_{0j}}} \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

Los costos al final de **n** meses son calculados por la fórmula siguiente:

$$\boxed{C^{(n)}_{0j} = (1+h)^n\, C_{0j}} \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

Donde C_{0j} se toma de la tabla 4.3.1

Ejemplo. Cálculo de la p.n.u. para *hombres* para las pólizas tipo A.

Sean el plazo del seguro n =12 meses, h =5%, g =6% y c =10% de coaseguro.

Los resultados finales de los cálculos dados en (4.3.3) y (4.3.4) y desarrollados más adelante son los siguientes:

PN_A = \$ 13,363.49, para hombres. Y:

PN_A = \$ 15,593.95, para mujeres.

Por lo que se puede apreciar que para el tipo de pólizas A, resultó algo mayor la p.n.u. de mujeres.

El detalle de los cálculos para hombres se da a continuación.

Si se aplica la fórmula (4.3.1), tomando las probabilidades de la tabla 3.10.6 y los costos de la tabla 4.3.1:

$$PN_A = (1-0.10)\, V^{12} \sum_{j=1}^{9} C^{(12)}{}_{0j}\, P^{(12)}{}_{0j}$$

Aplicando (4.3.2), sustituyendo valores y calculando:

$$PN_A = 0.9\,(0.5) \sum_{j=1}^{9} (1+0.05)^{12}\, C_{0j}\, P^{(12)}{}_{0j}$$

Sacando de la suma el valor constante:

$$PN_A = 0.45\,(1.8) \sum_{j=1}^{9} C_{0j}\, P^{(12)}{}_{0j}$$

$$PN_A = 0.45\,(1.8)\ \{ C_{01}\, P^{(12)}{}_{01} + C_{02}\, P^{(12)}{}_{02} + C_{03}\, P^{(12)}{}_{03} + C_{04}\, P^{(12)}{}_{04} + C_{05}\, P^{(12)}{}_{05} + C_{06}\, P^{(12)}{}_{06} + C_{07}\, P^{(12)}{}_{07} + C_{08}\, P^{(12)}{}_{08} + C_{09}\, P^{(12)}{}_{09} \}$$

$$PN_A = 0.81\ \{ 485540(0.02214) + 647869(0.006474) + 1355541(0.000865) + 1607305(0.0000619) + 1642305(0.00015) + 1801904(0.0000085) + 2121818(0.0000046) + 2440271(0.0000025) + 2758724(0.0000016) \}$$

$$PN_A = 0.81\ \{ 10749.86 + 4194.30 + 1172.54 + 99.49 + 246.35 + 15.32 + 9.76 + 6.10 + 4.41 \}$$

$$PN_A = 0.81\ (16498.13) = \$\ 13{,}363.49 \qquad (4.3.3)$$

Obsérvese que la máxima cantidad reclamada es C_{09} = 2758,724 < 5380,000.

Ejemplo. Para el cálculo de la p.n.u. se toman las probabilidades de la tabla 3.10.10. Así se tiene que para *mujeres*:

$$PN_A = (1-0.10)\, V^{12} \sum_{j=1}^{7} C^{(12)}{}_{0j}\, P^{(12)}{}_{0j}$$

$$PN_A = 0.9\,(0.5) \sum_{j=1}^{7} (1+0.05)^{12}\, C_{0j}\, P^{(12)}{}_{0j}$$

$$PN_A = 0.45\,(1.8) \sum_{j=1}^{7} C_{0j}\, P^{(12)}{}_{0j}$$

$$PN_A = 0.81\{521611(0.0316955) + 668710(0.0030572) + 849559(0.0005244) + 895283(0.0002057) + 961792(0.0000239) + 1015648(0.000012) +$$

$1069504(0.0000092)\}$

$\mathbf{PN_A} = 0.81\{16532.72 + 2044.38 + 445.51 + 184.16 + 22.99 + 12.19 + 9.84\}$

$\mathbf{PN_A} = 0.81\ (19251.79) = \$\ 15{,}593.95$ **(4.3.4)**

Pólizas Tipo A. Justificación de la fórmula de cálculo de la prima

Por la condición A.2 cada asegurado puede hacer una reclamación en cualquier momento dentro de la cobertura de su póliza, pero para la Cía. Aseguradora es una erogación hasta el final del plazo del seguro (por A.1). Luego:

La probabilidad de que un asegurado haga una reclamación en n meses es $\mathbf{P^{(n)}_{01}}$, y se le pagarían $C^{(n)}_{01}$ pesos. Así el costo esperado a pagar en ese momento es por: $C^{(n)}_{01}\ \mathbf{P^{(n)}_{01}}$. Análogamente:

Reclama dos veces con probabilidad $\mathbf{P^{(n)}_{02}}$, con un costo de $C^{(n)}_{02}$ pesos. Y su costo esperado es por: $C^{(n)}_{02}\ \mathbf{P^{(n)}_{02}}$. Y debido a la forma canónica, el asegurado puede reclamar hasta f+1 veces, con probabilidad $\mathbf{P^{(n)}_{0,f+1}}$. Con un costo esperado de $C^{(n)}_{0,f+1}\ \mathbf{P^{(n)}_{0,f+1}}$.

Entonces la suma de los costos esperados a pagar en n meses es:

$$C^{(n)}_{01}\ \mathbf{P^{(n)}_{01}} + C^{(n)}_{02}\ \mathbf{P^{(n)}_{02}} + \cdots + C^{(n)}_{0,f+1}\ \mathbf{P^{(n)}_{0,f+1}} = \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}_{0j}\ \mathbf{P^{(n)}_{0j}}$$

Trayendo a valor presente el costo esperado total, n meses, se tendría igualando a C:

$$C = V^n \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}_{0j}\ \mathbf{P^{(n)}_{0j}}$$

Y finalmente se se aplica el coaseguro queda la fórmula (4.3.1):

$$\boxed{\mathbf{PN_A} = (1-c)\ V^n \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}_{0j}\ \mathbf{P^{(n)}_{0j}}}$$

Pólizas Tipo B. Con este tipo de pólizas se pretende mostrar que se pueden desarrollar nuevos planes de seguro.

Las condiciones adicionales a las generales para este tipo de pólizas son las siguientes:

B.1 Hipótesis de pago: todas las reclamaciones se pagan al final del plazo del seguro.

B.2 El asegurado podrá reclamar durante **n** meses, siempre y cuando la primera reclamación sea presentada en los primeros **m** meses de vigencia, para **0 < m < n.**

La fórmula proporcionada para calcular las primas de riesgo de este tipo de pólizas se justifica más adelante, siendo:

$$\boxed{PN_B = (1-c)\, V^n \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}_{0j}\, (P^{(n)}_{0j} - P^{(m)}_{00}\, P^{(n-m)}_{0j})}$$

(4.3.5)

Ejemplo. Cálculo de la p.n.u. para *hombres* y *mujeres*.

Para los parámetros: n=12, m=6, c=10%, h=5% y g=6%. Aplicando (4.3.5) y tomando las probabilidades de las tablas 3.10.5, 3.10.6, 3.10.9 y 3.10.10:

Los resultados de las primas son:

PN_B = $ 7,011.69, para hombres. Y PN_B = $ 7,958.61, para mujeres.

Se puede apreciar que para el tipo de pólizas B, nuevamente resultó mayor la p.n.u. para mujeres. Observe también que las primas de las pólizas tipo A son casi el doble de las primas tipo B. Ya que checando las de mujeres: (15,593.95/7,958.61) = 1.96

Si se compara el Plan B vs. El tipo A, se tendrían:

Beneficios para los asegurados:

- La p.n.u. es más barata.
- Cumpliendo la condición de reclamar dentro de los primeros **m** meses, el asegurado cuenta con la misma protección en todo el plazo del seguro.

Beneficios para la Cía. Aseguradora:

- Un plan más económico atraerá a más asegurados y en consecuencia se esperarían más ventas.
- Las pólizas tipo B de los asegurados que no hayan presentado al menos una reclamación en los primeros m meses caducan transcurrido este plazo, no habiendo más obligación para la compañía.

Ahora el detalle de los cálculos para hombres es el siguiente:

$$PN_B = (1-0.10)\, V^{12} \sum_{j=1}^{9} C^{(12)}_{0j}\, (P^{(12)}_{0j} - P^{(6)}_{00}\, P^{(12-6)}_{0j})$$

Sustituyendo valores y aprovechando la fórmula para calcular los costos, dada en (4.3.2):

$$PN_B = 0.9\,(1.06)^{-12} \sum_{j=1}^{9} (1.05)^{12} C_{0j}\, (P^{(12)}_{0j} - P^{(6)}_{00}\, P^{(6)}_{0j})$$

$$PN_B = 0.9\,(0.50) \sum_{j=1}^{9} (1.8)\, C_{0j}\, (P^{(12)}_{0j} - P^{(6)}_{00}\, P^{(6)}_{0j})$$

PN_B = (0.45) (1.8) {

485540[0.02214–(0.9850341)(0.0117832)] +

647869[0.006474–(0.9850341)(0.0029451)] +

1355541[0.000865–(0.9850341)(0.0002033)] +

1607305[0.0000619–(0.9850341)(0.0000165)] +

1642305[0.00015–(0.9850341)(0.0000169)] +

1801904[0.0000085–(0.9850341)(0.0000005)] +

2121818[0.0000046–(0.9850341)(0.0000004)] +

2440271[0.0000025–(0.9850341)(0)] +

2758724[0.0000016–(0.9850341)(0)] }

PN_B = (0.81) {5114.26 + 2314.82 + 901.09 + 73.37 + 219.01 + 14.43 + 8.92 + 6.10 + 4.41}

PN_B = (0.81) {8656.41} = $ 7,011.69

Cálculo de la p.n.u. para mujeres:

Con los mismos parámetros: n=12, m=6, c=10%, h=5% y g=6%:

$$PN_B = 0.9\,(0.50) \sum_{j=1}^{7} (1.8)\, C_{0j}\, (P^{(12)}_{0j} - P^{(6)}_{00}\, P^{(6)}_{0j})$$

PN_B = (0.81) {

521611[0.0316955 –(0.9820754)(0.0165803) +

668710[0.0030572 –(0.9820754)(0.0010873)] +

849559[0.0005244 –(0.9820754)(0.0001750)] +

$$895283[0.0002057 - (0.9820754)(0.0000736)] +$$
$$961792[0.0000239 - (0.9820754)(0.0000061)] +$$
$$1015648[0.0000120 - (0.9820754)(0.0000014)] +$$
$$1069504[0.0000092 - (0.9820754)(0.0000009)] \}$$

$$\mathbf{PN_B} = (0.81)\ \{8039.27 + 1330.32 + 299.50 + 119.45 + 17.23 + 10.79 + 8.89\}$$

$$\mathbf{PN_B} = (0.81)\ \{9825.45\} = \$\ 7{,}958.61$$

Pólizas Tipo B. Justificación de la fórmula de cálculo de la prima.

B.1 Hipótesis de pago: todas las reclamaciones se pagan al final del plazo del seguro.

B.2 El asegurado podrá reclamar durante **n** meses, siempre y cuando la primera reclamación sea presentada en los primeros **m** meses de vigencia, para $\mathbf{0 < m < n}$.

Para calcular la p.n.u. del seguro es necesario determinar la probabilidad de que se reclame al menos una vez dentro de los primeros m meses (B.2):

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}],\ \text{con } \mathbf{i}\geq 1,\ \mathbf{i}\leq\mathbf{j}\leq f+1,\ 0<m<n.$$

Aplicando la ecuación de Chapman-Kolmogorov para las cadenas finitas de Markov[1], dada en (3.7.4), con u=m y v=n—m:

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}] = \mathbf{p_0} \sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{0i}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{ij}};$$

Donde $\mathbf{p_0} = 1$ ya que se parte del inicio de la cobertura para incluir todo el periodo de cobertura..

Ahora, como el asegurado puede reclamar 1, 2,..., j veces en n meses, sujeto a que haya reclamado al menos i veces en m meses, por lo que es necesario realizar la suma para los estados intermedios **i**:

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}] = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{0i}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{ij}}$$

Si se agrega a ambos lados de la igualdad $\mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{00}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{0j}}$:

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}] + \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{00}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{0j}} = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{0i}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{ij}} + \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{00}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{0j}}$$

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}] + \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{00}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{0j}} = \sum_{i=0}^{j} \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{0i}}\ \mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{ij}}$$

[1] [Bhat (1984) 2.3 pp. 38]

Aplicando nuevamente la ecuación de Chapman-Kolmogorov, dada en (3.7.4), a la suma del lado derecho queda:

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}] + \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{00}}\,\mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{0j}} = \mathbf{P}^{(m+n-m)}_{\mathbf{0j}}$$

Y finalmente:

$$\mathbf{P}[R_0=\mathbf{0},R_m=\mathbf{i},R_n=\mathbf{j}] = \mathbf{P}^{(n)}_{\mathbf{0j}} - \mathbf{P}^{(m)}_{\mathbf{00}}\,\mathbf{P}^{(n-m)}_{\mathbf{0j}}$$

Y como al final de los n meses se pueden pagar desde una hasta f+1 reclamaciones la fórmula de cálculo de la p.n.u. para las pólizas tipo B es, aplicando los costos esperados promedio y trayendo a valor presente:

$$\mathbf{PN_B} = (1-c)\, V^n \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}_{\mathbf{0j}}\,(P^{(n)}_{\mathbf{0j}} - P^{(m)}_{\mathbf{00}}\,P^{(n-m)}_{\mathbf{0j}})$$

Pólizas Tipo C

Las condiciones específicas son las siguientes:

C.1 Hipótesis de pago: todas las reclamaciones se pagan al final de cada mes de cobertura.

C.2 El asegurado puede reclamar en cualquier mes de cobertura.

Para calcular la prima de este tipo de seguro, se necesitan conocer las matrices de probabilidades de transición $\mathbf{P}^k$, los costos $C^{(k)}\mathbf{ij}$, para i<j y las *probabilidades no condicionales* de que el proceso de reclamaciones se encuentre en el estado **i**, $\mathbf{p}^{(k)}_{\mathbf{i}}$, definidas en (3.7.5) y cuya fórmula de cálculo se estableció en (3.7.6), al final de cada mes k =1,2,...;. En § 3.10 se calculó $\mathbf{P}^n$, para n=1,2,4,6, y 12; por lo que es necesario completar los valores de las potencias de **P**, para n=3,5,7,8,9,10,11. Estas son mostradas en las tablas 4.3.2 a la 4.3.8 para *hombres*. Y de la tabla 4.3.9 a la 4.3.15 para *mujeres*. Mientras que los vectores de probabilidades del proceso de reclamaciones para la etapa k, $\mathbf{p}^{(k)}$, se muestran en la tabla 4.3.16 para *hombres* y en la tabla 4.3.17 para *mujeres*.

Ejemplo. Cálculo de la p.n.u. para pólizas tipo C.

Se usarán las fórmulas reportadas en (4.3.11), (4.3.12), (4.3.14) para integrar (4.3.15), fundamentadas en la fórmula siguiente, que se reporta en (5.3.10):

$$\boxed{\mathbf{PN_C} = (1-c)\,\{\,(1-d)\sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}C_{0j}} + \sum_{n=1}^{k-1} (1-d)^{n+1} \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p}^{(n)}_{\mathbf{i}} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}C_{i,j}}\,\}}$$

Donde: $\mathbf{C_{i,j}} = \mathbf{C_{0j}} - \mathbf{C_{0i}}$, para i<j.

= 0, en otro caso.

a) Para *Hombres*: El resultado de los cálculos es: $\mathbf{PN_C}$ = \$ 13,961.63

b) Y para *Mujeres*: La prima es: $\mathbf{PN_C}$ = \$ 16,299.14

Nuevamente las primas de las pólizas tipo C resultaron más económicas para hombres que para mujeres, Además estos importes son comparables con los correspondientes a los obtenidos para las pólizas tipo A, que resultaron ser $13,363.49 para hombres y $15,593.95 para mujeres. Por lo que se aprecia el valor de la fórmula para pólizas tipo A por su sencillez.

Ejemplo. Detalle de los cálculos de las primas para pólizas tipo C.

a) Para *Hombres*:

Primero se calcularán los valores Ci mediante las fórmulas definidas en (4.3.11) y (4.3.12). Y tomando las probabilidades de la tabla 3.10.1 y los costos de la tabla 4.3.1:

$$C_0 = \sum_{j=1}^{9} P_{0j} C_{0j}$$

$$C_0 = 0.00207(485540) + 0.00044(647869) = 1005.07 + 285.06$$

$$C_0 = 1290.13$$

$$C_1 = \sum_{j=2}^{9} P_{1j} C_{1j}$$

$$C_1 = 0.01649(647869-485540) + 0.00174(1355541-485540) +$$
$$0.00029(1607305-485540)$$

$$C_1 = 0.01649(162329) + 0.00174(870001) + 0.00029(1121765)$$

$$C_1 = 2676.81 + 1513.80 + 325.31$$

$$\mathbf{C_1} = 4515.92$$

Análogamente:

$$C_2 = \sum_{j=3}^{9} P_{2j} C_{2j}$$

$$C_2 = 0.02317(1355541-647869) + 0.00193(1607305-647869)$$

$$C_2 = 0.02317(707672) + 0.00193(959436)$$

$$C_2 = 16396.76 + 1851.71$$

$$C_2 = 18248.47$$

$$C_3 = \sum_{j=4}^{9} P_{3j} C_{3j}$$

$$C_3 = 0.03261(1607305-1355541) + 0.01087(1642305-1355541)$$

$C_3 = 0.03261(251764) + 0.01087(286764)$

$C_3 = 8210.02 + 3117.12$

$C_3 = 11327.15$

$$C_4 = \sum_{j=5}^{9} P_{4j}\, C_{4j}$$

$C_4 = 0.6(1642305-1607305)$

$C_4 = 0.6(35000) = 21000$

$$C_5 = \sum_{j=6}^{9} P_{5j}\, C_{5j}$$

$C_5 = 0.04651(1801904-1642305)$

$C_5 = 0.04651(159599) = 7422.95$

$$C_6 = \sum_{j=7}^{9} P_{6j}\, C_{6j}$$

$C_6 = 0.33333(2121818-1801904) + 0.16667(2440271-1801904)$

$C_6 = 0.33333(319914) + 0.16667(638367)$

$C_6 = 106636.93 + 106396.63 = 213033.56$

$$C_7 = \sum_{j=8}^{9} P_{7j}\, C_{7j}$$

$C_7 = 0.16667(2440271-2121818)$

$C_7 = 0.16667(318453) = 53076.56$

$C_8 = \mathbf{P_{89}}\, C_{89} = 1(2758724-2440271)=318453$

Para continuar con el cálculo de $\mathbf{PN_C}$, se presentan datos en la tablas 4.3.18(a,b,c,d), para *hombres*. La suma de la columna de los productos corresponde con los costos esperados D_k, que resultan de aplicar (4.3.14).

Continuando con el cálculo de p.n.u. de las pólizas tipo C:

Con los parámetros: n= 12, m=6, c=10%, h=5% y g=6%, se tiene:

$1-d = (1.05)V=(1.05)/(1.06);$

$1-d = 0.990566.$

Aplicando la fórmula para calcular $\mathbf{PN_C}$ definida en (4.3.15):

$$PN_C = (1-0.10)\{(0.990566)(1290.13) + \sum_{n=1}^{11}(0.990566)^{n+1} D_n\}$$

$$PN_C = 0.9\{1277.96 + (0.990566)^2 D_1 + (0.990566)^3 D_2 + (0.990566)^4 D_3 + (0.990566)^5 D_4 + (0.990566)^6 D_5 + (0.990566)^7 D^6 + (0.990566)^8 D_7 + (0.990566)^9 D_8 + (0.990566)^{10} D_9 + (0.990566)^{11} D_{10} + (0.990566)^{12} D_{11}\}$$

$$PN_C = 0.9\{1277.96 + (0.990566)^2 (1304.27) + (0.990566)^3(1318.81) + (0.990566)^4 (1333.72) + (0.990566)^5 (1349.00) + (0.990566)^6 (1364.66) + (0.990566)^7 (1380.68) + (0.990566)^8 (1397.05) + (0.990566)^9 (1413.82) + (0.990566)^{10} (1{,}431.00) + (0.990566)^{11} (1450.72) + (0.990566)^{12} (1{,}469.52)\}$$

$$PN_C = 0.9\{1277.96 + 1279.78 + 1289.84 + 1284.10 + 1286.56 + 1289.21 + 1292.04 + 1295.03 + 1298.21 + 1301.59 + 1307.08 + 1311.52\}$$

$$PN_C = 0.9\{15{,}512.92\} = \$\ 13{,}961.63$$

b) El caso para *Mujeres*.

Calculando los valores **Ci** por (4.3.11) y (4.3.12). Con las probabilidades de la tabla 3.10.2 y la tabla de costos 4.3.1:

$$C_0 = \sum_{j=1}^{7} P_{0j} C_{0j}$$

$$C_0 = 0.00287(521611) + 0.00011(668710) + 0.00002(849559) + 0.00001(895283)$$

$$C_0 = 1497.02 + 73.56 + 16.99 + 8.95$$

$$C_0 = 1596.53$$

$$C_1 = \sum_{j=2}^{7} P_{1j} C_{1j}$$

$$C_1 = 0.01147(668710-521611) + 0.00063(849559-521611)$$

$$C_1 = 0.01147(147099) + 0.00063(327948)$$

$$C_1 = 1687.23 + 206.61 = 1893.84$$

Análogamente:

$$C_2 = \sum_{j=3}^{7} P_{2j} C_{2j}$$

$C_2 = 0.02131\,(849559—668710) + 0.00178(895283—668710)$

$C_2 = 0.02131\,(180849) + 0.00178(226573)$

$C_2 = 3853.89 + 403.30$

$C_2 = 4257.19$

$$C_3 = \sum_{j=4}^{7} \mathbf{P_{3j}}\, C_{3j}$$

$C_3 = 0.04950(895283—849559)$

$C_3 = 0.04950(45724)$

$C_3 = 2263.34$

$$C_4 = \sum_{j=5}^{7} \mathbf{P_{4,j}}\, C_{4,j}$$

$C_4 = 0.05(961792—895283)$

$C_4 = 0.05(66509) = 3325.45$

$$C_5 = \sum_{j=6}^{7} P_{5j}\, C_{5j}$$

$C_5 = 0.25(1015648—961792)$

$C_5 = 0.25(53856) = 13464$

$C_6 = \mathbf{P_{6,7}}\, C_{6,7}$

$C_6 = 1(1069504—1015648) = 53856$

Para el cálculo de $\mathbf{PN_C}$, se agrupan los datos en la tabla 4.3.19 (a,b,c,d), para *mujeres*. Donde, como en el caso hecho para hombres, la suma de la columna de los productos corresponde con los costos esperados D_k, que resultan de aplicar (4.3.14).

$$\mathbf{PN_C} = 0.9\ \{\ (0.990566)\ (1596.53)\ +\ (0.990566)^2 D_1 + (0.990566)^3 D_2 + (0.990566)^4 D_3 + (0.990566)^5 D_4 + (0.990566)^6 D_5 + (0.990566)^7 D_6 + (0.990566)^8 D_7 + (0.990566)^9 D_8 + (0.990566)^{10} D_9 + (0.990566)^{11} D_{10} + (0.990566)^{12} D_{11}\ \}$$

$$\mathbf{PN_C} = 0.9\ \{\ 1581.47\ +\ (0.990566)^2 (1597.71) + (0.990566)^3(1598.96) + (0.990566)^4 (1600.29) + (0.990566)^5 (1{,}601.70) + (0.990566)^6 (1{,}603.18) + (0.990566)^7 (1{,}604.74) + (0.990566)^8 (1{,}606.38) + (0.990566)^9 (1{,}608.09) + (0.990566)^{10} (1{,}609.87) + (0.990566)^{11} (1{,}611.73) + (0.990566)^{12} (1{,}613.67)\ \}$$

$PN_C = 0.9 \{ 1581.47 + 1567.71 + 1554.13 + 1540.75 + 1527.56 + 1514.55 +$
$1501.72 + 1489.07 + 1476.59 + 1464.28 + 1452.14 + 1440.18 \}$

$PN_C = 0.9 \{18{,}110.15\} = \$ 16{,}299.14$

A continuación se presentan las tablas que complementaron los cálculos.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.9924889	0.0060803	0.0013847	0.0000412	0.0000039	0.0000010	0.0000000	0.0000000
1	0.0000015	0		0.9279527	0.0617384	0.0084950	0.0008256	0.0009554	0.0000286	0.0000030
2	0	0			0.9265742	0.0648267	0.0046573	0.0038762	0.0000656	0
3	0.0000843	0				0.8751493	0.0475303	0.0749391	0.0021285	0.0001685
4	0.0046511	0					0.0640000	0.8703235	0.0517235	0.0093019
5	0.0138511	0.0077518						0.8668589	0.0760851	0.0354530
6	0.2824121	0.1388911							0.1250000	0.4536968
7	0.2824121	0.1388911								0.5786968

Tabla 4.3.2 P^3, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de tres etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000000	0	0.9875128	0.0099228	0.0024074	0.0001362	0.0000115	0.0000090	0.0000002	0.0000000
1	0.0000133	0.0000053		0.8938994	0.0886144	0.0140189	0.0011723	0.0021477	0.0000991	0.0000296
2	0.0000391	0.0000109			0.8806439	0.1007770	0.0067717	0.0112269	0.0004412	0.0000893
3	0.0009842	0.0003828				0.8007008	0.0463180	0.1420224	0.0073670	0.0022248
4	0.0198736	0.0101711					0.0102400	0.8432227	0.0735523	0.0429403
5	0.0360625	0.0263419						0.7880989	0.0776225	0.0718742
6	0.3627880	0.2353425							0.0312500	0.3706196
7	0.3627880	0.2353425								0.4018696

Tabla 4.3.3 P^5, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de cinco etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000001	0.0000000	0.9825617	0.0136040	0.0034989	0.0002832	0.0000223	0.0000283	0.0000010	0.0000006
1	0.0000478	0.0000267		0.8610961	0.1130596	0.0201478	0.0015471	0.0037673	0.0002098	0.0000979
2	0.0001998	0.0000993			0.8369905	0.1316136	0.0085436	0.0210118	0.0011092	0.0004322
3	0.0034174	0.0019815				0.7325856	0.0428307	0.1990237	0.0131401	0.0070209
4	0.0425899	0.0295869					0.0016384	0.7749261	0.0756773	0.0755816
5	0.0629355	0.0512585					.	0.7164948	0.0726826	0.0966288
6	0.4186041	0.3023221							0.0078125	0.2712614
7	0.4186041	0.3023221								0.2790739

Tabla 4.3.4 P^7, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de siete etapas*. Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000002	0.0000001	0.9800954	0.0153860	0.0040678	0.0003757	0.0000288	0.0000437	0.0000018	0.0000005
1	0.0000478	0.0000267		0.8610958	0.1130597	0.0201478	0.0015471	0.0037673	0.0002098	0.0000979
2	0.0003562	0.0001999			0.8159820	0.1452841	0.0093248	0.0265914	0.0015319	0.0007299
3	0.0053417	0.0034174				0.7007327	0.0410219	0.2234288	0.0158267	0.0102308
4	0.0547972	0.0425899					0.0006554	0.7398672	0.0738804	0.0882099
5	0.0794776	0.0629355						0.6831705	0.0696655	0.1047509
6	0.3488353	0.4186041							0.0039063	0.2286544
7	0.3488353	0.4186041								0.2325606

Tabla 4.3.5 P^8, forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de ocho etapas. Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000005	0.0000002	0.9776354	0.0171298	0.0046506	0.0004804	0.0000361	0.0000630	0.0000029	0.0000011
1	0.0001197	0.0000780		0.8294962	0.1352349	0.0267261	0.0019455	0.0058195	0.0003605	0.0002196
2	0.0005768	0.0003562			0.7955008	0.1578734	0.0100425	0.0325287	0.0020027	0.0011188
3	0.0077603	0.0053417				0.6702649	0.0392596	0.2452673	0.0183050	0.0138011
4	0.0696055	0.0547972					0.0002621	0.7058492	0.0713514	0.0981345
5	0.0920054	0.0794776						0.6513963	0.0666070	0.1105137
6	0.4573650	0.3488353							0.0019531	0.1918466
7	0.4573650	0.3488353								0.1937997

Tabla 4.3.6 P^9, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de nueve etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000010	0.0000005	0.9751815	0.0186689	0.0053767	0.0006253	0.0000457	0.0000934	0.0000048	0.0000020
1	0.0001818	0.0001231	0	0.7990562	0.1572502	0.0326867	0.0023093	0.0075868	0.0004870	0.0003189
2	0.0008765	0.0005768	0	0	0.7755337	0.1694409	0.0107005	0.0387574	0.0025143	0.0015999
3	0.0106929	0.0077603	0	0	0	0.6411218	0.0375612	0.2647015	0.0205599	0.0176025
4	0.0830455	0.0696055	0	0	0	0	0.0001049	0.6731774	0.0685048	0.1055620
5	0.1089983	0.0920054	0	0	0	0	0	0.6210998	0.0635999	0.1142965
6	0.3811359	0.4573650	0	0	0	0	0	0	0.0009766	0.1605226
7	0.3811359	0.4573650	0	0	0	0	0	0	0	0.1614991

Tabla 4.3.7 P^{10}, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de diez etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000017	0.0000010	0.9727338	0.0202761	0.0060300	0.0007659	0.0000551	0.0001260	0.0000069	0.0000034
1	0.0003052	0.0002181		0.7697332	0.1764988	0.0393604	0.0027109	0.0100016	0.0006732	0.0004986
2	0.0012625	0.0008765			0.7560678	0.1800427	0.0113025	0.0452169	0.0030598	0.0021714
3	0.0141209	0.0106929				0.6132458	0.0359314	0.2818959	0.0225913	0.0215219
4	0.0986172	0.0830455					0.0000419	0.6419309	0.0655619	0.1108027
5	0.1216554	0.1089983						0.5922125	0.0606873	0.1164464
6	0.4842820	0.3811359							0.0004883	0.1340938
7	0.4842820	0.3811359								0.1345821

Tabla 4.3.8 P^{11}, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de once etapas.* Hombres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000001	0	0.9909972	0.0084804	0.0004189	0.0000698	0.0000322	0.0000014
1	0	0		0.9641374	0.0332101	0.0024881	0.0001617	0.0000026
2	0.0000223	0			0.9323171	0.0593772	0.0079923	0.0002911
3	0.0006188	0				0.8587294	0.1340918	0.0065600
4	0.0212500	0.0125000					0.8573750	0.1088750
5	0.3906250	0.1875000						0.4218750

Tabla 4.3.9 P^3, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de tres etapas.* Mujeres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000008	0.0000004	0.9850404	0.0139217	0.0008387	0.0001354	0.0000584	0.0000043
1	0.0000025	0.0000006		0.9409465	0.0534224	0.0050250	0.0005787	0.0000243
2	0.0001767	0.0000728			0.8897597	0.0919375	0.0169802	0.0010730
3	0.0035249	0.0016400				0.7758193	0.2018027	0.0172132
4	0.0523813	0.0397188					0.7737809	0.1341191
5	0.4697266	0.2929688						0.2373047

Tabla 4.3.10 P^5, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de cinco etapas*. Mujeres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000023	0.0000014	0.9791194	0.0191982	0.0013604	0.0002196	0.0000903	0.0000083
1	0.0000143	0.0000067		0.9183133	0.0721893	0.0081131	0.0012831	0.0000800
2	0.0005902	0.0003410			0.8491449	0.1196062	0.0279639	0.0023537
3	0.0092749	0.0059433				0.7009143	0.2551120	0.0287558
4	0.0872008	0.0732485					0.6983373	0.1412133
5	0.5142212	0.3522949						0.1334839

Tabla 4.3.11 P^7, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de siete etapas*. Mujeres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0.0000035	0.0000023	0.9761723	0.0217759	0.0016569	0.0002694	0.0001089	0.0000107
1	0.0000267	0.0000143		0.9072018	0.0810556	0.0098284	0.0017491	0.0001242
2	0.0009294	0.0005902			0.8295381	0.1317809	0.0339977	0.0031634
3	0.0131322	0.0092749				0.6662188	0.2770516	0.0343225
4	0.1085519	0.0872008					0.6634203	0.1408269
5	0.3856659	0.5142212						0.1001129

Tabla 4.3.12 P^8, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de ocho etapas.* Mujeres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000050	0.0000035	0.9732340	0.0243141	0.0019758	0.0003246	0.0001295	0.0000135
1	0.0000453	0.0000267		0.8962246	0.0895896	0.0116407	0.0022924	0.0001806
2	0.0013810	0.0009294			0.8103840	0.1429352	0.0402975	0.0040725
3	0.0178555	0.0131322				0.6332410	0.2961769	0.0395944
4	0.1224076	0.1085519					0.6302493	0.1387912
5	0.5392494	0.3856659						0.0750847

Tabla 4.3.13 P^9, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de nueve etapas.* Mujeres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0.0000069	0.0000050	0.9703045	0.0268130	0.0023161	0.0003854	0.0001524	0.0000166
1	0.0000719	0.0000453	0	0.8853803	0.0978007	0.0135383	0.0029135	0.0002501
2	0.0019476	0.0013810	0	0	0.7916723	0.1531292	0.0468004	0.0050692
3	0.0230308	0.0178555	0	0	0	0.6018956	0.3127135	0.0445047
4	0.1432496	0.1224076	0	0	0	0	0.5987369	0.1356058
5	0.4044370	0.5392494	0	0	0	0	0	0.0563135

Tabla 4.3.14 P^{10}, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de diez etapas*. Mujeres 1986 - 1987.

i	6	7	0	1	2	3	4	5
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0000091	0.0000068	0.9673839	0.0292734	0.0026769	0.0004520	0.0001776	0.0000201
1	0.0001079	0.0000719		0.8746672	0.1056978	0.0155101	0.0036121	0.0003332
2	0.0026484	0.0019475			0.7733925	0.1624198	0.0534495	0.0061420
3	0.0289817	0.0230308				0.5721017	0.3268716	0.0490142
4	0.1563090	0.1432496					0.5688000	0.1316412
5	0.5533278	0.4044371						0.0422351

Tabla 4.3.15 P^{11}, *forma canónica de la matriz de probabilidades de transición de once etapas*. Mujeres 1986 - 1987.

	Estados del proceso									
Etapa	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
k										
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.9974900	0.0020700	0.0004400	0	0	0	0	0	0	0
2	0.9949863	0.0040965	0.0009020	0.0000138	0.0000014		0	0	0	0
3	0.9924889	0.0060803	0.0013847	0.0000412	0.0000039	0.0000010	0	0	0	0
4	0.9899977	0.0080221	0.0018869	0.0000821	0.0000073	0.0000039	0	0	0	0
5	0.9875128	0.0099228	0.0024074	0.0001362	0.0000115	0.0000090	0.0000002	0	0	0
6	0.9850341	0.0117832	0.0029451	0.0002033	0.0000165	0.0000169	0.0000005	0.0000004	0	0
7	0.9825617	0.0136040	0.0034989	0.0002832	0.0000223	0.0000283	0.0000010	0.0000006	0.0000001	0
8	0.9800954	0.0153860	0.0040678	0.0003757	0.0000288	0.0000437	0.0000018	0.0000005	0.0000002	0.0000001
9	0.9776354	0.0171298	0.0046506	0.0004804	0.0000361	0.0000630	0.0000029	0.0000011	0.0000005	0.0000002
10	0.9751815	0.0186689	0.0053767	0.0006253	0.0000457	0.0000934	0.0000048	0.0000020	0.0000010	0.0000005
11	0.9727338	0.0202761	0.0060300	0.0007659	0.0000551	0.0001260	0.0000069	0.0000034	0.0000017	0.0000010
12	0.9702919	0.0221400	0.0064740	0.0008650	0.0000619	0.0001500	0.0000085	0.0000046	0.0000025	0.0000016

Tabla 4.3.16 *Vectores de probabilidades no condicionales del proceso de reclamaciones por etapas.* Hombres 1986 - 1987.

	Estados del proceso							
Etapa	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
k								
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0.9969900	0.0028700	0.0001100	0.0000200	0.0000100	-	0	0
2	0.9939891	0.0056966	0.0002500	0.0000431	0.0000207	0.0000005	0	0
3	0.9909972	0.0084804	0.0004189	0.0000698	0.0000322	0.0000014	0.0000001	0
4	0.9880143	0.0112219	0.0006155	0.0001004	0.0000447	0.0000027	0.0000004	0.0000001
5	0.9850404	0.0139217	0.0008387	0.0001354	0.0000584	0.0000043	0.0000008	0.0000004
6	0.9820754	0.0165803	0.0010873	0.0001750	0.0000736	0.0000061	0.0000014	0.0000008
7	0.9791194	0.0191982	0.0013604	0.0002196	0.0000903	0.0000083	0.0000023	0.0000014
8	0.9761723	0.0217759	0.0016569	0.0002694	0.0001089	0.0000107	0.0000035	0.0000023
9	0.9732340	0.0243141	0.0019758	0.0003246	0.0001295	0.0000135	0.0000050	0.0000035
10	0.9703045	0.0268130	0.0023161	0.0003854	0.0001524	0.0000166	0.0000069	0.0000050
11	0.9673839	0.0292734	0.0026769	0.0004520	0.0001776	0.0000201	0.0000091	0.0000068
12	0.9644721	0.0316955	0.0030572	0.0005244	0.0002057	0.0000239	0.0000119	0.0000091

Tabla 4.3.17 *Vectores de probabilidades no condicionales del proceso de reclamaciones por etapas.* Mujeres 1986 - 1987.

Estado i	C_i	$p^{(1)}_i$	$p^{(1)}_i C_i$	$p^{(2)}_i$	$p^{(2)}_i C_i$	$p^{(3)}_i$	$p^{(3)}_i C_i$
0	1290.13	0.99749	1286.89	0.9949863	1283.66	0.9924889	1280.44
1	4515.92	0.00207	9.35	0.0040965	18.50	0.0060803	27.46
2	18248.47	0.00044	8.03	0.0009020	16.46	0.0013847	25.27
3	11327.15			0.0000138	0.16	0.0000412	0.47
4	21000.00			0.0000014	0.03	0.0000039	0.08
5	7422.95					0.0000010	0.01
6	213033.56						
7	53076.56						
8	318453.00						
		D_1 =	1304.27	D_2 =	1318.81	D_3 =	1333.72

Tabla 4.3.18(a) *Probabilidades y costos esperados.* Hombres

Estado i	C_i	$p^{(4)}_i$	$p^{(4)}_i C_i$	$p^{(5)}_i$	$p^{(5)}_i C_i$	$p^{(6)}_i$	$p^{(6)}_i C_i$
0	1290.13	0.9899977	1277.23	0.9875128	1274.02	0.9850341	1270.82
1	4515.92	0.0080221	36.23	0.0099228	44.81	0.0117832	53.21
2	18248.47	0.0018869	34.43	0.0024074	43.93	0.0029451	53.74
3	11327.15	0.0000821	0.93	0.0001362	1.54	0.0002033	2.30
4	21000.00	0.0000073	0.15	0.0000115	0.24	0.0000165	0.35
5	7422.95	0.0000039	0.03	0.0000090	0.07	0.0000169	0.13
6	213033.56			0.0000002	0.04	0.0000005	0.11
7	53076.56					0.0000004	0.02
8	318453.00						
		D_4 =	1349.00	D_5 =	1364.66	D_6 =	1380.68

Tabla 4.3.18(b) *Probabilidades y costos esperados.* Hombres

Estado i	C_i	$p^{(7)}_i$	$p^{(7)}_i C_i$	$p^{(8)}_i$	$p^{(8)}_i C_i$	$p^{(9)}_i$	$p^{(9)}_i C_i$
0	1290.13	0.9825617	1267.63	0.9800954	1,264.45	0.9776354	1,261.28
1	4515.92	0.0136040	61.43	0.0153860	69.48	0.0171298	77.36
2	18248.47	0.0034989	63.85	0.0040678	74.23	0.0046506	84.87
3	11327.15	0.0002832	3.21	0.0003757	4.26	0.0004804	5.44
4	21000.00	0.0000223	0.47	0.0000288	0.60	0.0000361	0.76
5	7422.95	0.0000283	0.21	0.0000437	0.32	0.0000630	0.47
6	213033.56	0.0000010	0.21	0.0000018	0.38	0.0000029	0.62
7	53076.56	0.0000006	0.03	0.0000005	0.03	0.0000011	0.06
8	318453.00			0.0000002	0.06	0.0000005	0.16
		$D_7 =$	1397.05	$D_8 =$	1413.82	$D_9 =$	1,431.00

Tabla 4.3.18(c) *Probabilidades y costos esperados.* Hombres

Estado i	C_i	$p^{(10)}_i$	$p^{(10)}_i C_i$	$p^{(11)}_i$	$p^{(11)}_i C_i$	$p^{(12)}_i$	$p^{(12)}_i C_i$
0	1290.13	0.9751815	1,258.11	0.9727338	1,254.95	0.9702919	1,251.80
1	4515.92	0.0186689	84.31	0.0202761	91.57	0.0221400	99.98
2	18248.47	0.0053767	98.12	0.0060300	110.04	0.0064740	118.14
3	11327.15	0.0006253	7.08	0.0007659	8.68	0.0008650	9.80
4	21000.00	0.0000457	0.96	0.0000551	1.16	0.0000619	1.30
5	7422.95	0.0000934	0.69	0.0001260	0.94	0.0001500	1.11
6	213033.56	0.0000048	1.02	0.0000069	1.47	0.0000085	1.81
7	53076.56	0.0000020	0.11	0.0000034	0.18	0.0000046	0.24
8	318453.00	0.0000010	0.32	0.0000017	0.54	0.0000025	0.80
		$D_{10} =$	1,450.72	$D_{11} =$	1,469.52	$D_{12} =$	1,484.99

Tabla 4.3.18(d) *Probabilidades y costos esperados.* Hombres

Estado i	C_i	$p^{(1)}_i$	$p^{(1)}_i C_i$	$p^{(2)}_i$	$p^{(2)}_i C_i$	$P^{(3)}_i$	$p^{(3)}_i C_i$
0	1596.53	0.99699	1591.72	0.9939891	1586.93	0.9909972	1582.16
1	1893.84	0.00287	5.44	0.0056966	10.79	0.0084804	16.06
2	4257.19	0.00011	0.47	0.0002500	1.06	0.0004189	1.78
3	2263.34	0.00002	0.05	0.0000431	0.10	0.0000698	0.16
4	3325.45	0.00001	0.03	0.0000207	0.07	0.0000322	0.11
5	13464.00			0.0000005	0.01	0.0000014	0.02
6	53856.00					0.0000001	0.01
		D_1 =	1597.71	D_2 =	1598.96	D_3 =	1600.29

Tabla 4.3.19(a) *Probabilidades y costos esperados***.** Mujeres

Estado i	C_i	$p^{(4)}_i$	$p^{(4)}_i C_i$	$p^{(5)}_i$	$p^{(5)}_i C_i$	$P^{(6)}_i$	$p^{(6)}_i C_i$
0	1596.53	0.9880143	1,577.39	0.9850404	1,572.65	0.9820754	1,567.91
1	1893.84	0.0112219	21.25	0.0139217	26.37	0.0165803	31.40
2	4257.19	0.0006155	2.62	0.0008387	3.57	0.0010873	4.63
3	2263.34	0.0001004	0.23	0.0001354	0.31	0.0001750	0.40
4	3325.45	0.0000447	0.15	0.0000584	0.19	0.0000736	0.24
5	13464.00	0.0000027	0.04	0.0000043	0.06	0.0000061	0.08
6	53856.00	0.0000004	0.02	0.0000008	0.04	0.0000014	0.08
		D_4 =	1601.70	D_5 =	1603.18	D_6 =	1604.74

Tabla 4.3.19(b) *Probabilidades y costos esperados.* Mujeres

Estado i	C_i	$p^{(7)}_i$	$p^{(7)}_i\, C_i$	$p^{(8)}_i$	$p^{(8)}_i\, C_i$	$P^{(9)}_i$	$p^{(9)}_i\, C_i$
0	1596.53	0.9791194	1,563.19	0.9761723	1,558.49	0.9732340	1,553.80
1	1893.84	0.0191982	36.36	0.0217759	41.24	0.0243141	46.05
2	4257.19	0.0013604	5.79	0.0016569	7.05	0.0019758	8.41
3	2263.34	0.0002196	0.50	0.0002694	0.61	0.0003246	0.73
4	3325.45	0.0000903	0.30	0.0001089	0.36	0.0001295	0.43
5	13464.00	0.0000083	0.11	0.0000107	0.14	0.0000135	0.18
6	53856.00	0.0000023	0.12	0.0000035	0.19	0.0000050	0.27
		$D_7 =$	1606.38	$D_8 =$	1608.09	$D_9 =$	1609.87

Tabla 4.3.19(c) *Probabilidades y costos esperados.* Mujeres

Estado i	C_i	$p^{(10)}_i$	$p^{(10)}_i\, C_i$	$p^{(11)}_i$	$p^{(11)}_i\, C_i$	$p^{(12)}_i$	$p^{(12)}_i\, C_i$
0	1596.53	0.9703045	1,549.12	0.9673839	1,544.46	0.9644721	1,539.81
1	1893.84	0.0268130	50.78	0.0292734	55.44	0.0316955	60.03
2	4257.19	0.0023161	9.86	0.0026769	11.40	0.0030572	13.02
3	2263.34	0.0003854	0.87	0.0004520	1.02	0.0005244	1.19
4	3325.45	0.0001524	0.51	0.0001776	0.59	0.0002057	0.68
5	13464.00	0.0000166	0.22	0.0000201	0.27	0.0000239	0.32
6	53856.00	0.0000069	0.37	0.0000091	0.49	0.0000119	0.64
		$D_{10} =$	1611.73	$D_{11} =$	1613.67	$D_{12} =$	1615.68

Tabla 4.3.19(d) *Probabilidades y costos esperados.* Mujeres

Pólizas Tipo C. Justificación de la fórmula de cálculo de la prima

Partiendo del inicio de la cobertura, el valor esperado de los costos por las reclamaciones al finalizar el primer mes es:

$$\mathbf{P_{01}}C^{(1)}{}_{01} + \mathbf{P_{02}}C^{(1)}{}_{02} + \cdots + \mathbf{P_{0,f+1}}C^{(1)}{}_{0,f+1} = \sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(1)}{}_{0j} \qquad \mathbf{(4.3.7)}$$

Luego, al final del primer mes la cadena ocupa el estado **i**, con probabilidad $\mathbf{P[R_1 = i]}$. Luego el costo esperado al transcurrir los dos primeros meses está dado por:

$$\sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(1)}_{0j} + \mathbf{P[R_1 = 0]} \sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(2)}_{0j} + \mathbf{P[R_1 = 1]} \sum_{j=2}^{f+1} \mathbf{P_{1j}}C^{(2)}_{1j} + \cdots + \mathbf{P[R_1 = f]} \sum_{j=f+1}^{f+1} \mathbf{P_{f,j}}C^{(2)}_{f,j}$$

Si se aprovecha la notación definida en (3.7.5) y estableciendo la suma para agrupar los estados de la cadena:

$$\sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(1)}_{0j} + \mathbf{p^{(1)}_0} \sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(2)}_{0j} + \mathbf{p^{(1)}_1} \sum_{j=2}^{f+1} \mathbf{P_{1j}}C^{(2)}_{1j} + \cdots + \mathbf{p^{(1)}_f} \sum_{j=f+1}^{f+1} \mathbf{P_{f,j}}C^{(2)}_{f,j} =$$

$$\sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(1)}_{0j} + \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p^{(1)}_i} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}}C^{(2)}_{i,j}$$

De la misma forma, si se extienden las sumas hasta el k-ésimo mes, la primera aproximación a la p.n.u. es:

$$\mathbf{PN_C} = \sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(1)}_{0j} + \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p^{(1)}_i} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}}C^{(2)}_{ij} + \cdots + \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p^{(k-1)}_i} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}}C^{(k)}_{i,j}$$

Sumando desde el segundo mes las dobles sumas:

$$\mathbf{PN_C} = \sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}}C^{(1)}_{0j} + \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p^{(n)}_i} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}}C^{(n+1)}_{ij} \qquad \mathbf{(4.3.8)}$$

Luego se insertan en la fórmula (4.3.8) el término por coaseguro, el valor presente de los costos mensuales y el factor inflacionario, aprovechando la ecuación para los costos dada en (4.3.2):

$$\mathbf{PN_C} = (1-c)\ \{\sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}C_{0j}}(1+h)V + \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p^{(n)}_i} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}C_{i,j}}\,(1+h)^{n+1}V^{n+1}\ \} \qquad \mathbf{(4.3.9)}$$

Sacando los valores constantes de las sumas en la ecuación (4.3.9) y poniendo:

$1-d = V(1+h)$, la fórmula completa queda:

$$\mathbf{PN_C} = (1-c)\ \{(1-d) \sum_{j=1}^{f+1} \mathbf{P_{0j}C_{0j}} + \sum_{n=1}^{k-1} (1-d)^{n+1} \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p^{(n)}_i} \sum_{j=i+1}^{f+1} \mathbf{P_{i,j}C_{i,j}}\ \} \qquad \mathbf{(4.3.10)}$$

Donde:

$$C_{i,j} = C_{0j} - C_{0i},\ \text{para } i<j.$$
$$= 0,\ \text{en otro caso.} \qquad \textbf{(4.3.11)}$$

Y para efectos de organizar los cálculos de (4.3.10) se define:

$$C_i = \sum_{j=i+1}^{f+1} P_{i,j}\, C_{i,j}\ ;\ \text{para } i = 0,1,\dots,f. \qquad \textbf{(4.3.12)}$$

Entonces, si se sustituye (4.3.12) en (4.3.10) queda:

$$\mathbf{PN_C} = (1-c)\ \{\ (1-d)\, C_0 + \sum_{n=1}^{k-1} (1-d)^{n+1} \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p}^{(n)}{}_i\, C_i\ \} \qquad \textbf{(4.3.13)}$$

Todavía más, si denotamos:

$$D_n = \sum_{i=0}^{f} \mathbf{p}^{(n)}{}_i\, C_i, \qquad \text{para } n=1, 2,\dots, k\text{-}1; \qquad \textbf{(4.3.14)}$$

donde C_i esta definido en (4.3.12).

Sustituyendo el valor de D_n en (4.3.13), queda finalmente:

$$\mathbf{PN_C} = (1-c)\ \{\ (1-d)\, C_0 + \sum_{n=1}^{k-1} (1-d)^{n+1}\, D_n\ \} \qquad \textbf{(4.3.15)}$$

§ 4.4 Valuación de reservas

Al momento de la valuación hay: N_0 asegurados en el estado **0** —aún no han presentado reclamaciones—, N_1 en el estado 1, N_2 en el estado 2...., y N_f en el estado **f**, correspondientes a un sólo sexo.

Valuación A. Reserva para una cobertura de n meses.

Hipótesis de cálculo. Las reclamaciones se pagarán a los **n** meses.

Para calcular esta reserva se usó la fórmula presentada en (4.4.5) y que aquí se reproduce. Más adelante se verá al detalle su desarrollo.

$$V_A = (1-c)(1-d)^n \left\{ \sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (C_{0j} - C_{0i}) P^{(n)}_{ij} \right\}$$

Donde, los parámetros **c** y **d** son los que se han venido usando.

Para los ejemplos se usará la tabla siguiente, cuyos datos son arbitrarios:

Estado	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	1000	900	800	700	600	500	400	300	200

Tabla 4.4.1. *Asegurados hombres (hipotéticos) de una cartera de pólizas.*

Ejemplo. Cálculo de la reserva A para *hombres*

Sean: n=12 meses, tasa inflacionaria h=5%, g=6% de rendimiento y c=10% de coaseguro. Supóngase que N_i toma los valores dados en la tabla 4.4.1. Aplicando la fórmula (4.4.5):

$$V_A = (0.9)\, 0.990566^{12} \left\{ \sum_{i=0}^{8} N_i \sum_{j=i+1}^{9} (C_{0j} - C_{0i}) P^{(12)}_{i,j} \right\}$$

El resultado de la reserva a 12 meses es el siguiente, (en miles de pesos). El detalle de los cálculos se da a continuación:

$$V_A = \$\ 929{,}633.$$

Ejemplo. Detalle de cálculos de la reserva A, para *hombres*

Aplicando la fórmula definida en (4.4.5):

$$V_A = (1-0.10)(1-d)^{12} \left\{ \sum_{i=0}^{8} N_i \sum_{j=i+1}^{9} (C_{0j} - C_{0i}) P^{(12)}_{ij} \right\}$$

Donde:

$(1-d) = (1.05)/(1.06) = 0.990566$. Sustituyendo:

$$V_A = (0.9)\ 0.990566^{12}\ \{ \sum_{i=0}^{8} N_i \sum_{j=i+1}^{9} (C_{0j} - C_{0i})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{i,j} \}$$

Calculando los valores dados en (4.4.6) y según el número de asegurados señalados en la tabla 4.4.1:

$$v_0 = \mathbf{N_0} \sum_{j=1}^{9} (\mathbf{C_{0j}} - \mathbf{C_{00}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{0,j};$$

$$v_0 = 1000\ \{ \mathbf{C_{01}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{0,1} + \mathbf{C_{02}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{0,2} + \mathbf{C_{03}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{0,3} + \mathbf{C_{05}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{0,5} + \mathbf{C_{06}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{06} + \mathbf{C_{07}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{07} + \mathbf{C_{08}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{08} + \mathbf{C_{09}}\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{09} \}$$

$$v_0 = 1000\ \{ (485540)\ 0.0221400 + (647869)\ 0.0064740 + (1355541)\ 0.0008650 + (1607305)\ 0.0000619 + (1642305)\ 0.0001500 + (1801904)\ 0.0000085 + (2121818)\ 0.0000046 + (2440271)\ 0.0000025\ +\ (2{,}758.724)\ 0.0000016 \}$$

$$v_0 = 1000\ \{ 10749.86 + 4194.30 + 1172.54 + 99.49 + 246.35 + 15.32 + 9.76 + 6.10 + 4.41 \}$$

$v_0 = \$\ 16{,}498{,}130.$

$$v_1 = \mathbf{N_1} \sum_{j=2}^{9} (\mathbf{C_{0j}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,j};$$

$$v_1 = 900\ \{ (\mathbf{C_{02}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,2} + (\mathbf{C_{03}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,3} + (\mathbf{C_{04}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,4} + (\mathbf{C_{05}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,5} + (\mathbf{C_{06}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,6} + (\mathbf{C_{07}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,7} + (\mathbf{C_{08}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,8} + (\mathbf{C_{09}} - \mathbf{C_{01}})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{1,9} \}$$

$$v_1 = 900\ \{ (647869-485540)\ 0.1552910 + (1355541-485540)\ 0.0336190 + (1607305-485540)\ 0.0023603 + (1642305-485540)\ 0.0082990 + (1801904-485540)\ 0.0005514 + (2121818-485540)\ 0.0004030 + (2440271-485540)\ 0.0002455 + (2758724-485540)\ 0.0001748 \}$$

$$v_1 = 900\ \{ (162329)\ 0.1552910 + (870001)\ 0.0336190 + (1121765)\ 0.0023603 + (1156765)\ 0.0082990 + (1316364)\ 0.0005514 + (1636278)\ 0.0004030 + (1954731)\ 0.0002455 + (2273184)\ 0.0001748 \}$$

$v_1 = 900 \{ 25208.23 + 29248.56 + 2647.70 + 9599.99 + 725.84 + 659.42$
$+ 479.89 + 397.35 \}$

$v_1 = \$ 62,070,282.$

$$v_2 = N_2 \sum_{j=3}^{9} (C_{0j} - C_{02}) P^{(12)}_{2,j};$$

$$v_2 = 800 \{ (C_{03} - C_{02}) P^{(12)}_{2,3} + (C_{04} - C_{02}) P^{(12)}_{2,4} + (C_{05} - C_{02}) P^{(12)}_{2,5} + (C_{06} - C_{02}) P^{(12)}_{2,6} + (C_{07} - C_{02}) P^{(12)}_{2,7} + (C_{08} - C_{02}) P^{(12)}_{2,8} + (C_{09} - C_{02}) P^{(12)}_{2,9} \}$$

$$v_2 = 800 \{ (1355541-647869)\ 0.1897320 + (1607305-647869)\ 0.0118513 + (1642305-647869)\ 0.0518520 + (1801904-647869)\ 0.0036330 + (2121818-647869)\ 0.0028294 + (2440271-647869)\ 0.0017485 + (2758724-647869)\ 0.0012628 \}$$

$$v_2 = 800 \{ (707672)\ 0.1897320 + (959436)\ 0.0118513 + (994436)\ 0.0518520 + (1154035)\ 0.0036330 + (1473949)\ 0.0028294 + (1792402)\ 0.0017485 + (2110855)\ 0.0012628 \}$$

$$v_2 = 800 \{ 134268.02 + 11370.56 + 51563.50 + 4192.61 + 4170.39 + 3134.01 + 2665.59 \} = \$ 169,091,744.$$

$$v_3 = N_3 \sum_{j=4}^{9} (C_{0j} - C_{03}) P^{(12)}_{3,j};$$

$$v_3 = 700 \{ (C_{04} - C_{03}) P^{(12)}_{3,4} + (C_{05} - C_{03}) P^{(12)}_{3,5} + (C_{06} - C_{03}) P^{(12)}_{3,6} + (C_{07} - C_{03}) P^{(12)}_{3,7} + (C_{08} - C_{03}) P^{(12)}_{3,8} + (C_{09} - C_{03}) P^{(12)}_{3,9} \}$$

$$v_3 = 700 \{ (1607305-1355541)\ 0.0343705 + (1642305-1355541)\ 0.2970100 + (1801904-1355541)\ 0.0244066 + (2121818-1355541)\ 0.0254652 + (2440271-1355541)\ 0.0180450 + (2758724-1355541)\ 0.0141207 \}$$

$$v_3 = 700 \{ (251764)\ 0.0343705 + (286764)\ 0.2970100 + (446363)\ 0.0244066 + (766277)\ 0.0254652 + (1084730)\ 0.0180450 + (1403183)\ 0.0141207 \}$$

$$v_3 = 700 \{ 8653.25 + 85171.78 + 10894.20 + 19513.40 + 19573.95 + 19813.93 \}$$

$v_3 = \$ 114,534,357.$

$$v_4 = N_4 \sum_{j=5}^{9} (C_{0j} - C_{04}) P^{(12)}_{4,j};$$

$$v_4 = 600 \{ (C_{05} - C_{04}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{4,5} + (C_{06} - C_{04}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{4,6} + (C_{07} - C_{04}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{4,7} + (C_{08} - C_{04}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{4,8} + (C_{09} - C_{04}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{4,9} \}$$

$$v_4 = 600 \{ (1642305-1607305)\ 0.6121000 + (1801904-1607305)\ 0.0626372 + (2121818-1607305)\ 0.1141890 + (2440271-1607305)\ 0.1124400 + (2758724-1607305)\ 0.0986170 \}$$

$$v_4 = 600 \{ (35000)\ 0.6121000 + (194599)\ 0.0626372 + (514513)\ 0.1141890 + (832966)\ 0.1124400 + (1151419)\ 0.0986170 \}$$

$$v_4 = 600 \{ 21423.5 + 12189.14 + 58751.72 + 93658.70 + 113549.49 \}$$

$$v_4 = \$\ 179{,}743{,}530.$$

$$v_5 = N_5 \sum_{j=6}^{9} (C_{0j} - C_{05}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{5,j};$$

$$v_5 = 500 \{ (C_{06} - C_{05}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{5,6} + (C_{07} - C_{05}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{5,7} + (C_{08} - C_{05}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{5,8} + (C_{09} - C_{05}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{5,9} \}$$

$$v_5 = 500 \{ (1801904-1642305)\ 0.0578875 + (2121818-1642305)\ 0.1172673 + (2440271-1642305)\ 0.1385210 + (2758724-1642305)\ 0.1216553 \}$$

$$v_5 = 500 \{ (159599)\ 0.0578875 + (479513)\ 0.1172673 + (797966)\ 0.1385210 + (1116419)\ 0.1216553 \}$$

$$v_5 = 500 \{ 9238.79 + 56231.19 + 110535.05 + 135818.29 \}$$

$$v_5 = \$\ 155{,}911{,}660.$$

$$v_6 = N_6 \sum_{j=7}^{9} (C_{0j} - C_{06}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{6,j};$$

$$v_6 = 400 \{ (C_{07} - C_{06}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{6,7} + (C_{08} - C_{06}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{6,8} + (C_{09} - C_{06}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{6,9} \}$$

$$v_6 = 400 \{ (2121818-1801904)\ 0.1119072 + (2440271-1801904)\ 0.4035667 + (2758724-1801904)\ 0.4842820 \}$$

$$v_6 = 400 \{ (319914)\ 0.1119072 + (638367)\ 0.4035667 + (956820)\ 0.4842820 \}$$

$$v_6 = 400 \{ 35800.68 + 257623.66 + 463370.70 \}$$

$$v_6 = \$\ 302{,}718{,}016.$$

$$V_7 = 300 \{ (C_{08} - C_{07}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{7,8} + (C_{09} - C_{07}) \mathbf{P}^{(12)}{}_{7,9} \}$$

$V_7 = 300 \{ (2440271-2121818)\ 0.4035667 + (2758724-2121818)\ 0.4842820 \}$

$V_7 = 300 \{ (318453)\ 0.4035667 + (636906)\ 0.4842820 \}$

$V_7 = 300 \{ 128517.03 + 308442.11 \}$

$V_7 = \$\ 131{,}087{,}742.$

$V_8 = 200 \{ (C_{09} - C_{08})\ \mathbf{P}^{(12)}{}_{8,9} \}$

$V_8 = 200 \{ (2758724-2440271)\ 0.4035667 \}$

$V_8 = \$\ 25{,}703{,}405.$

Continuando con los cálculos dados en la fórmula (4.4.7):

$$V_A = (0.9)\ 0.990566^{12} \sum_{i=0}^{8} v_i$$

$$V_A = (0.9)\ 0.892485\ \{16{,}498{,}130 + 62{,}070{,}282 + 169{,}091{,}744 + 114{,}534{,}357 + 179{,}743{,}530 + 155{,}911{,}660 + 302{,}718{,}016 + 131{,}087{,}742 + 25{,}703{,}405\}$$

$$V_A = 0.8032365\ \{1{,}157{,}358{,}866\}$$

$$V_A = \$\ 929{,}632{,}885.$$

Redondeando a miles de pesos:

$$V_A = \$\ 929{,}633.$$

Valuación A. Justificación de la fórmula para la reserva

Como las reclamaciones se pagarán a los **n** meses, y al momento de la valuación hay: N_0 asegurados en el estado **0**, N_1 en el estado **1**, N_2 en el estado **2**,..., y N_f en el estado **f**, los costos por reclamar hasta entonces son:

$$N_0 \{ C^{(n)}{}_{01}\mathbf{P}^{(n)}{}_{01} + C^{(n)}{}_{02}\mathbf{P}^{(n)}{}_{02} + \cdots + C^{(n)}{}_{0,f+1}\mathbf{P}^{(n)}{}_{0,f+1} \} +$$
$$N_1 \{ C^{(n)}{}_{12}\mathbf{P}^{(n)}{}_{12} + C^{(n)}{}_{13}\mathbf{P}^{(n)}{}_{13} + \cdots + C^{(n)}{}_{1,f+1}\mathbf{P}^{(n)}{}_{1,f+1} \} +$$
$$\cdots + N_{f-1}\, C^{(n)}{}_{f-1,f}\mathbf{P}^{(n)}{}_{f-1,f} + N_{f-1}\, C^{(n)}{}_{f-1,f+1}\mathbf{P}^{(n)}{}_{f-1,f+1} + N_f\, C^{(n)}{}_{f,f+1}\,\mathbf{P}^{(n)}{}_{f,f+1}$$

Si se escribe con sumas abreviadas:

$$N_0 \sum_{j=1}^{f+1} C^{(n)}{}_{0j}\mathbf{P}^{(n)}{}_{0j} + N_1 \sum_{j=2}^{f+1} C^{(n)}{}_{1j}\mathbf{P}^{(n)}{}_{1j} + \cdots + N_{f-1} \sum_{j=f}^{f+1} C^{(n)}{}_{f-1,j}\mathbf{P}^{(n)}{}_{f-1,j} +$$

$$+ N_f \sum_{j=f+1}^{f+1} C^{(n)}{}_{f,j}\,\mathbf{P}^{(n)}{}_{f,j} \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

Usando la notación suma nuevamente, para agrupar los términos:

$$\sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} C^{(n)}_{ij}\mathbf{P}^{(n)}_{ij} \tag{4.4.2}$$

Si se denota con V_A, a la reserva por constituir, y se agrega el factor de descuento por coaseguro **c**, usando la fórmula dada en (4.3.2) con la tasa de inflación mensual **h** y se trae a valor presente, queda:

$$V_A = (1-c)\sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} V^n(1+h)^n C_{ij} P^{(n)}_{ij} \tag{4.4.3}$$

Pero, por (4.3.11):

$C_{i,j} = C_{0j} - C_{0i}$, $i<j$. $C_{i,j} = 0$, para $i \geq j$. Estableciendo: $1-d = V(1+h)$, sustituyendo en (4.4.3) queda:

$$V_A = (1-c)\left\{\sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (1-d)^n (C_{0j} - C_{0i})\,\mathbf{P}^{(n)}_{ij}\right\} \tag{4.4.4}$$

Donde, nuevamente los costos C_{0k} se toman de la tabla 4.3.1. Finalmente, sacando $(1-d)^n$ de las sumas, la reserva tipo A tiene la siguiente fórmula de cálculo:

$$V_A = (1-c)(1-d)^n\left\{\sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (C_{0j} - C_{0i})\,\mathbf{P}^{(n)}_{ij}\right\} \tag{4.4.5}$$

Simplificando un poco para facilitar los cálculos manuales, si se pone:

$$v_i = N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (C_{0j} - C_{0i})\,\mathbf{P}^{(n)}_{i,j}; \text{ para cada } i=0,1,\ldots,f. \tag{4.4.6}$$

Y se sustituye en (4.4.5), queda:

$$V_A = (1-c)(1-d)^n \sum_{i=0}^{f} v_i \tag{4.4.7}$$

Valuación B. Constitución de la reserva mensual

Hipótesis de cálculo. Las reclamaciones se pagarán al final del mes. Para calcular la reserva mensual se usará la fórmula dada en (4.4.12) y posteriormente se justificarán tanto los cálculos como la fórmula.

$$V_B = (1-c)\,(1-d)\,\{\sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (C_{0j} - C_{0i})\,\mathbf{P_{i,j}}\,\}$$

Donde: $(1-d) = (1+h)/(1+g)$. Y **h** es la tasa inflacionaria mensual, mientras que **g** se puede considerar como la tasa de rendimiento mensual.

Ejemplo. Cálculo de la reserva mensual para *hombres*.

Se tiene que la inflación es h=5% , con g=6% de rendimiento y c=10% de coaseguro. N_i toma los valores dados en la tabla 4.4.1.

Si se aplica la fórmula definida en (4.4.12), se tendría:

$$\boxed{V_B = (1-0.1)\,(1-d)\,\{\sum_{i=0}^{8} N_i \sum_{j=i+1}^{9} (C_{0j} - C_{0i})\,\mathbf{P_{i,j}}\,\}}$$

Mostrando el resultado de la reserva mensual en miles de pesos, su valor es:

$$\boxed{V_B = \$\ 186{,}344}$$

Obsérvese que 12x186,344 = \$ 2,236,128 es considerablemente mayor a \$ 929,633. Luego esto indica que no debe estimarse una reserva con otra.

Ejemplo. Desglose del cálculo de la reserva mensual para *hombres*.

Como anteriormente se hizo, h=5% , con g=6% y c=10% de coaseguro. N toma los valores dados en la tabla 4.4.1.

Aplicando la fórmula definida en (4.4.12):

$$V_B = (1-c)\,(1-d)\,\{\sum_{i=0}^{8} N_i \sum_{j=i+1}^{9} (C_{0j} - C_{0i})\,\mathbf{P_{i,j}}\,\}$$

Donde:

$(1-d) = 0.990566$. Sustituyendo:

$$V_B = (0.9)\ 0.990566 \sum_{i=0}^{8} v_i$$

Calculando los valores dados en (4.4.13) y según el número de asegurados señalados en la tabla 4.4.1:

$$v_0 = N_0 \sum_{j=1}^{9} (C_{0j} - C_{00})\, \mathbf{P}_{0,j};$$

$v_0 = 1000$ { (485540) 0.00207 + (647869) 0.00044 }

$v_0 = 1000$ { 1005.07 + 285.06 }

$v_0 =$ $ 1,290,130.

$$v_1 = N_1 \sum_{j=2}^{9} (C_{0j} - C_{01})\, \mathbf{P}_{1,j};$$

$v_1 = 900$ { (162329) 0.01649 + (870001) 0.00174 + (1121765) 0.00029 }

$v_1 = 900$ { 2676.81 + 1513.80 + 325.31 }

$v_1 =$ $ 4,064,327.

$$v_2 = N_2 \sum_{j=3}^{9} (C_{0j} - C_{02})\, \mathbf{P}_{2,j};$$

$v_2 = 800$ { (707672) 0.02317 + (959436) 0.00193 }

$v_2 = 800$ { 16,396.76 + 1,851.71 }

$v_2 =$ $ 14,598,777.

$$v_3 = N_3 \sum_{j=4}^{9} (C_{0j} - C_{03})\, \mathbf{P}_{3,j};$$

$v_3 = 700$ { (251764) 0.03261 + (286764) 0.01087 }

$v_3 = 700$ { 8,210.02 + 3,117.12 }

$v_3 =$ $ 7,929,004.

$$v_4 = N_4 \sum_{j=5}^{9} (C_{0j} - C_{04})\, \mathbf{P}_{4,j};$$

$v_4 = 600$ (35000) 0.6

$v_4 =$ $ 12,600,000.

$$v_5 = N_5 \sum_{j=6}^{9} (C_{0j} - C_{05})\, \mathbf{P}_{5,j};$$

$v_5 = 500 \{ (159599)x0.04651 \}$

$v_5 = \$ 3,711,475.$

$$v_6 = N_6 \sum_{j=7} (C_{0j} - C_{06})\, \mathbf{P}_{6,j};$$

$v_6 = 400 \{ (319914)\, 0.33333 + (638367)\, 0.16667 \}$

$v_6 = 400 \{ 106636.93 + 106396.63 \}$

$v_6 = \$ 85,213,425.$

$V_7 = 300 \{ (C_{08} - C_{07})\, \mathbf{P}_{7,8} + (C_{09} - C_{07})\, \mathbf{P}_{7,9} \}$

$V_7 = 300 \times (318453) \times 0.16667$

$V_7 = \$ 15,922,968.$

$V_8 = 200 \{ (C_{09} - C_{08})\, \mathbf{P}_{8,9} \}$

$V_8 = 200 \{ (2758724 - 2440271)*1 \}$

$V_8 = \$ 63,690,600.$

Continuando con los cálculos dados en la fórmula (4.4.14):

$$V_B = (0.9)\, 0.990566 \sum_{i=0}^{8} v_i$$

$$V_B = 0.8915094 \{1290130 + 4064327 + 14598777 + 7929004 + 12600000 + 3711475 + 85213425 + 15922968 + 63690600 \}$$

$V_B = 0.8915094 \{ 209020706 \}$

$V_B = \$ 186,343,924.$

Redondeando a miles de pesos:

$V_B = \$ 186,344.$

Valuación B. Justificación de la fórmula de cálculo

Hipótesis de cálculo. Las reclamaciones se pagarán al final de cada mes. Al momento de la valuación hay N_0 asegurados en el estado **0**, N_1 en el estado **1**, N_2 en el estado **2,...**, y N_f en el estado **f.**

Dada la población asegurada, los costos por reclamar en la siguiente etapa son:

$$N_0 \{ C_{01} \mathbf{P}_{01} + C_{02} \mathbf{P}_{02} + \cdots + C_{0,f+1}\mathbf{P}_{0,f+1} \} +$$
$$N_1 \{ C_{12} \mathbf{P}_{12} + C_{13} \mathbf{P}_{13} + \cdots + C_{1,f+1}\mathbf{P}_{1,f+1} \} +$$
$$\cdots + N_{f-1}\, C_{f-1,f}\, \mathbf{P}_{f-1,f} + N_{f-1}\, C_{f-1,f+1}\mathbf{P}_{f-1,f+1} + N_f\, C_{f,f+1}\, \mathbf{P}_{f,f+1}$$

Escribiendo en notación suma:

$$N_0 \sum_{j=1}^{f+1} C_{0j}\mathbf{P}_{0j} + N_1 \sum_{j=2}^{f+1} C_{1j}\mathbf{P}_{1j} + \cdots + N_f \sum_{j=f+1}^{f+1} C_{f,j}\mathbf{P}_{f,j} \qquad \textbf{(4.4.8)}$$

Más aún:

$$\sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} C_{i,j}\mathbf{P}_{i,j} \qquad \textbf{(4.4.9)}$$

Calculando el valor presente de la reserva mensual, V_B, y agregando el factor de coaseguro **c**, la tasa de inflación mensual **h**:

$$V_B = (1-c) \sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} V(1+h)C_{ij}P_{ij} \qquad \textbf{(4.4.10)}$$

Por (4.3.11): $C_{i,j} = C_{0j} - C_{0i}$, si $i<j$. Y $C_{i,j} = 0$, para $i \geq j$.

Y poniendo nuevamente: $1-d = V(1+h)$, en (4.4.10) queda:

$$V_B = (1-c) \{ \sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (1-d)(C_{0j} - C_{0i})\, \mathbf{P}_{i,j} \} \qquad \textbf{(4.4.11)}$$

$$V_B = (1-c)(1-d) \{ \sum_{i=0}^{f} N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (C_{0j} - C_{0i})\, \mathbf{P}_{i,j} \} \qquad \textbf{(4.4.12)}$$

Si se pone:

$$v_i = N_i \sum_{j=i+1}^{f+1} (C_{0j} - C_{0i})\, \mathbf{P}_{i,j}; \text{ para cada } i=0,1,...f. \qquad \textbf{(4.4.13)}$$

Sustituyendo en (4.4.12) queda:

$$V_A = (1-c)\,(1-d)\sum_{i=0}^{f} v_i \qquad \textbf{(4.4.14)}$$

V. Conclusiones

En el presente trabajo se enfocaron las reclamaciones de accidentes y enfermedades como procesos estocásticos o aleatorios que originan los asegurados en sus plazos de cobertura. Esto permite un mayor conocimiento de su evolución en el tiempo, y entre otras cosas se pueden calcular probabilidades a diferentes niveles de siniestralidad. Establecer las reclamaciones acumuladas en los meses de cobertura permitió especificar (tipificar) los procesos aleatorios como cadenas de Markov homogéneas y en consecuencia asociarles su matriz de probabilidades de transición de una etapa, entre los estados -número de reclamaciones acumuladas- de menores a mayores. Con las matrices de probabilidades de transición se obtuvieron valores que permiten caracterizar a las cadenas de Markov para su comparación o control. Otro beneficio derivado del presente estudio es la flexibilidad para poder calcular diferentes niveles de riesgo —por transiciones- en momentos discretos en el tiempo —en este caso meses- ya que se mostró que se pueden establecer grupos de condiciones para crear alternativas de coberturas de accidentes y enfermedades, y lo que es más importante poder calcular las primas de riesgo y las reservas correspondientes. Se utilizaron probabilidades asociadas a toda una población asegurada en un cierto periodo (1986-1987) diferenciándolas únicamente por sexo; sin embargo, realizar las estimaciones por grupos de edades sólo involucra mayor trabajo, ya que se aplican los mismos conceptos y fórmulas.

VI. Recomendaciones

Sería interesante trabajar con procesos estocásticos de dos estados únicamente: <<No reclamó>> y <<Reclamó>>. Luego estimar la matriz de probabilidades de permanecer en un estado ó pasar al otro, al final de cada etapa (mes). Otro enfoque podría consistir en el estudio de procesos aleatorios que involucraran diferentes tipos o grupos de enfermedades para cada asegurado, y así se estimarían las probabilidades de permanecer enfermos o aliviarse, y diferenciar las enfermedades más graves y costosas, y con esto estar en posibilidades de desarrollar pólizas con menos coberturas pero mucho más económicas; y al mismo tiempo poder crear pólizas especiales para aquellos grupos de enfermedades de mayor repercusión y ofrecerlas a personas clave de las organizaciones. Además se deberían estudiar los procesos de accidentes separados de los de enfermedades, y así contar con matrices estocásticas diferentes. Con la estimación de primas y reservas se mostró que es posible desarrollar planes con diferentes condiciones, mientras que las unidades de tiempo sean múltiplos de las etapas que permitieron las estimaciones de las probabilidades de transición.

VII. Bibliografía

Bhat, N.B. (1984). *Elements of Applied Stochastic Processes.* 2nd Ed. John Wiley & Sons. Caps. 1-5.

Brzezniak, Z. and Zastawniak (1999). *Basic Stochastic Processes.* London limited: Springer—Verlag, Cap.5. (QA274 B79)

Chung, K.L. (1975). *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes.* New York: Springer—Verlag. Cap. 8. (QA273 C944)

Cinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastic Processes.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Cap. 5 (QA274 C54).

Cox, D.R. and Miller, H.D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes.* London: Methuen. Reprinted 1972: Chapman and Hall. Caps. 1 y 3. (QA273 C653).

Daykin, C.D., Pentikäinen, T. and Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* London: Chapman & Hall. Cap. 3. (HG8781 D39).

Donald, D.W.A. *Compound Interest and Annuities-Certain.* London: William Heinemann Ltd. Caps. 1 y 2.

Feller, W. (1986). *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones.* Vol. I. México: LIMUSA, Cap. 15.

Galambos, Janos (1995). *Advanced Probability Theory.* 2nd Ed. New York: Marcel Dekker. Cap. 8, Sec. 8.5 (QA273 G343).

Gordon, Hugh (1997). *Discrete Probability.* New York: Springer—Verlag. Cap. 9. (QA273 G675).

Grimmet, G. and Stirzaker (2001). *Probability and Random Processes.* 3rd. Ed. New York: Oxford University Press. Cap.6. (QA273 G).

Grimmet, G. and Stirzaker (2001). *One Thousand Exercises in Probability.* 3rd. Ed. New York: Oxford University Press. Cap.6. (QA273 .25 G745).

Karlin, S. and Taylor,H.M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes.* 2nd. Ed. San Diego: Academic Press, Caps. I y II. (QA274 K37).

Kemeny, J.G. and Snell, J.L. (1960). *Finite Markov Chains.* New York: Van Nostrand. Reprinted 1976: Springer—Verlag.

Ross, S.M. (2002). *Probability Models for Computer Science.* San Diego, C.A. Harcour/Academic Press, Cap. 4 (QA273 R676).

Solomon, F. (1987). *Probability and Stochastic Processes.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Cap. 12 (QA274 S xx).

Taylor,H.M. and Karlin, S. (1998). *An Introduction to StochasticModeling.* 3rd. Ed. San Diego: Academic Press, Caps. III y IV. (QA274 T38).

Wittle, P. (1955). *Some Distribution and Moment Formulae for the Markov Chain.* J. Roy Stat.Soc. B 17, 235-242.