



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS CURVAS DE VELOCIDAD CERO  
DE LA LUNA

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
F Í S I C A  
P R E S E N T A :  
ALEJANDRA FLORES RUIZ



DIRECTORA DE TESIS: DRA. JULIA ESPRESATE EIBENSCHUTZ

2005



m344500



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE TUCUMÁN

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAN a digitalizar en formato electrónico e imprimir el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Alejandra Flores Ruíz  
FECHA: 25 Mayo / 2009  
FIRMA: Flores Ruíz

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Las Curvas de Velocidad Cero de la Luna"

realizado por Flores Ruíz Alejandra

con número de cuenta 09550452-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dra. Julia Espresate Eibenschutz

*Julia Espresate E.*

Propietario

M. en C. Mirna Villavicencio Torres

*Mirna Villavicencio Torres*

Propietario

Dr. Juan Manuel Lozano Mejía

*Juan Manuel Lozano Mejía*

Suplente

M. en C. Christine Allen Armiño

*Christine A. Allen*

Suplente

Dr. Ramiro García García

*Ramiro García García*

Consejo Departamental de Física

*Alicia Zarzosa Pérez*  
M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

## Agradecimientos

Mamá te dedico esta tesis, tu fuiste una parte muy importante en cada uno de mis sueños; gracias por el tiempo que me brindaste, tu apoyo incondicional, tu paciencia y sobre todo por tu amor.

Gracias a mi familia y a todos mis amigos por su apoyo y cariño.

Julia, eres una gran maestra así como una gran asesora, gracias.

También gracias a mis profesores por su dedicación y enseñanzas.

# INDICE

<b>INDICE</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO 1</b>	<b>2</b>
1.1 Introducción.	2
1.2 Desarrollo.	3
1.3 Constante de Jacobi y Problema de 3 cuerpos.	4
<b>CAPITULO 2</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción.	9
2.2 Análisis geométrico.	9
2.3 Análisis matemático.	13
<b>CAPITULO 3</b>	<b>17</b>
3.1 Introducción.	17
3.2 Cálculo de la constante de Jacobi de la Luna.	17
3.3 Resultados.	20
<b>CAPITULO 4</b>	<b>26</b>
4.1 Introducción.	26
4.2 Cálculo de la constante de Jacobi de un planeta extrasolar.	26
4.3 Resultados.	28
<b>CAPITULO 5</b>	<b>31</b>
5.1 Conclusiones	31
<b>APENDICE A</b>	<b>33</b>
Desarrollo capítulo1.	33
<b>APENDICE B</b>	<b>35</b>

Método de resolución de ecuaciones de tercer grado.	35
<b>APENDICE C</b>	<b>36</b>
Constantes y datos astronómicos.	36
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	<b>37</b>

# CAPITULO 1

## 1.1 INTRODUCCION

En 1878 G.W. Hill desarrolló la "Teoría del movimiento de la Luna" tomando en cuenta no sólo la presencia de la Tierra, sino también las perturbaciones del Sol. Hasta ese momento hubo varios intentos por describir el movimiento de la Luna sin demasiado éxito. Una de los problemas más difíciles era explicar el movimiento del perigeo lunar (Danby, p. 384). Sabiendo que las perturbaciones del Sol podían causar cambios en el semieje mayor de la órbita lunar así como en el momento angular, Hill se propuso calcular si la Luna podía emigrar a órbitas más alejadas de la Tierra indefinidamente (debido a las perturbaciones solares). Para estimar la viabilidad de dicha situación, Hill utilizó el llamado formalismo del problema circular plano restringido de 3 cuerpos (PPCR3C) que consiste en lo siguiente: Dos cuerpos masivos en órbita circular alrededor de su centro de masa y una partícula prueba sujeta a las fuerzas gravitacionales de los dos cuerpos masivos. Sin embargo, la partícula prueba no ejerce fuerza alguna sobre los otros dos cuerpos de manera que la trayectoria de estos es conocida en todo instante de tiempo. Las tres órbitas son coplanares. Jacobi demostró que bajo estas suposiciones existe una constante de movimiento para la partícula prueba llamada, la constante de Jacobi. Y que depende solamente del cociente de las masas de los cuerpos masivos y de las coordenadas de posición y velocidad de la partícula. Resulta ser, que esta constante de movimiento restringe el espacio sobre el cual puede moverse la partícula de prueba. Así, para diferentes valores de la constante el espacio permitido es diferente. Las fronteras que separan las regiones permitidas de las prohibidas son curvas en el plano llamadas Curvas de velocidad cero. Es decir, la partícula podrá moverse en cualquier región permitida, pero no puede cruzar una curva de velocidad cero. Más adelante se demostrará que si la partícula cruzara la curva de velocidad cero, esto implicaría que la magnitud de su velocidad es imaginaria lo cual no tiene sentido físico.

Siguiendo este formalismo, Hill calculó el valor de la constante de Jacobi suponiendo que la Luna era la partícula prueba y la tierra y el Sol, los dos cuerpos masivos. Al obtener las curvas de velocidad cero, demostró que en efecto existe un límite superior (una curva de

velocidad cero) para la distancia Tierra-Luna. Lo cual descarta la posibilidad de que la Luna se aleje indefinidamente de la Tierra.

Esta tesis consiste en rehacer los cálculos de Hill y obtener las curvas de velocidad cero de la Luna. En el primer capítulo se desarrolla el formalismo general para el PPCR3C y se obtiene la expresión para la constante de Jacobi. En el Capítulo II se hace un análisis geométrico y analítico de dicha expresión ilustrando con algunos ejemplos. Para un cociente de masas arbitrario pero fijo. En el Capítulo III se aplica el formalismo al caso Lunar. Es decir, se calcula el valor de su constante de Jacobi y se obtienen las curvas de velocidad cero. En el capítulo IV se aplicó el mismo método de obtención de curvas de velocidad cero, a un planeta extrasolar. El capítulo V enlista las conclusiones de este trabajo.

## 1.2 DESARROLLO

La pregunta fundamental de esta tesis es si la Luna puede escapar del campo gravitacional terrestre. En el PPCR3C se sabe que ocurren atrapamientos temporales en órbitas alrededor de  $m_2$ ; por ejemplo ciertos cometas alrededor de Júpiter.

Si los dos cuerpos masivos tienen diferente masa entonces al que tiene mayor masa se le llama cuerpo primario y al otro se le llama secundario.

Se toma como origen el centro de masa de  $m_1$  (por ejemplo, el Sol) y  $m_2$  (por ejemplo, la Tierra). Es conveniente definir un sistema de ejes Cartesianos que rote con la misma velocidad angular que tienen  $m_1$  y  $m_2$  y tales que, tanto  $m_1$  como  $m_2$  están sobre la abscisa. En este sistema las coordenadas de los tres cuerpos son:  $(\alpha_1, 0)$  y  $(\alpha_2, 0)$  para  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, y  $(\alpha, \beta)$  para la partícula prueba.

Definimos la unidad de masa como  $m_1 + m_2 = 1$  y la cantidad:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.2.1)$$

De manera que en estas nuevas unidades las masas quedan definidas como:

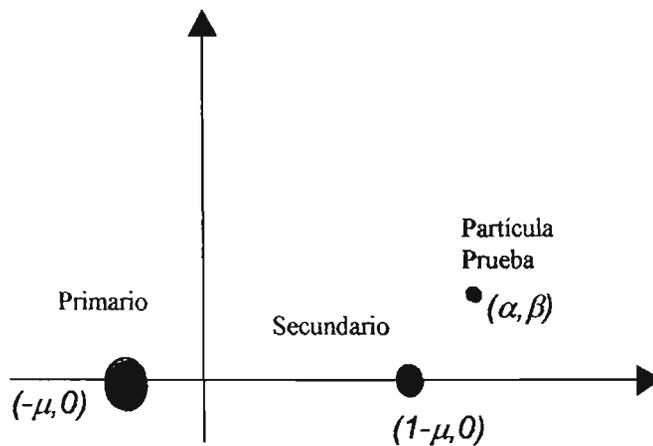
$$m_1 = 1 - \mu \text{ y } m_2 = \mu .$$

Se define el valor absoluto de la distancia  $D$ , entre el primario y el secundario como la unidad de distancia, es decir:

$$D = |\alpha_2 - \alpha_1| = 1 \quad (1.2.2)$$

donde:  $\alpha_1$  es la distancia del primario al origen y  $\alpha_2$  es la distancia del secundario al origen.

Como el origen es el centro de masa, las coordenadas para los cuerpos primario y secundario son entonces:  $(-\mu, 0)$  y  $(1-\mu, 0)$  respectivamente (figura 1.2.1).



**Figura 1.2.1.** Posición de los tres cuerpos; donde el primario tiene como coordenadas  $(-\mu, 0)$ , el secundario  $(1-\mu, 0)$  y el de prueba  $(\alpha, \beta)$ .

## 1.2 CONSTANTE DE JACOBI

Para cualquier tiempo  $t$ ,  $m_1$  y  $m_2$  están fijas sobre el eje  $X$  y por tanto, los ejes van a rotar con una velocidad angular constante. Se expresa esta velocidad angular  $\omega$  de la siguiente forma:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{|\alpha_2 - \alpha_1|^3}} \quad (1.3.1)$$

donde:  $\omega$  es la velocidad angular de los ejes y  $G$  es la constante de gravitación universal; y  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  no están normalizadas.

Finalmente se define la unidad de tiempo,  $k$ ,  $k = \frac{1}{\omega} = 1$ , por lo tanto:

$$\omega = 1. \quad (1.3.2)$$

Dado que las condiciones iniciales estarán dadas en el sistema rotante, para obtener las ecuaciones de movimiento de la partícula prueba se les aplicará a las coordenadas la inversa de la matriz de rotación  $\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$ . Sean  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x, y)$  las coordenadas en el sistema rotante de cada uno de los cuerpos, entonces las coordenadas en el sistema no rotante se escriben de la siguiente manera:

$$(\alpha_1, 0) = (x_1 \cos(\omega t) - y_1 \sin(\omega t), x_1 \sin(\omega t) + y_1 \cos(\omega t)) ,$$

$$(\alpha_2, 0) = (x_2 \cos(\omega t) - y_2 \sin(\omega t), x_2 \sin(\omega t) + y_2 \cos(\omega t)) ,$$

$$(\alpha, \beta) = (x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t), x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t)) ;$$

sustituyendo las condiciones (1.3.2) y que  $y_1 = 0$  y  $y_2 = 0$  en las anteriores ecuaciones, se tiene que las coordenadas de los tres cuerpos se pueden escribir de la siguiente manera:

$$(\alpha_1, 0) = (x_1 \cos(t), x_1 \sin(t)) \quad (1.3.3)$$

$$(\alpha_2, 0) = (x_2 \cos(t), x_2 \sin(t)) \quad (1.3.4)$$

$$(\alpha, \beta) = (x \cos(t) - y \sin(t), x \sin(t) + y \cos(t)) \quad (1.3.5)$$

En un sistema inercial con el mismo origen que el anterior,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son funciones del tiempo, por lo tanto las ecuaciones diferenciales por componentes para el movimiento del tercer cuerpo, serían:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(\alpha-\alpha_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\alpha-\alpha_2)}{r_2^3} \quad (1.3.6)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(\beta-\beta_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\beta-\beta_2)}{r_2^3} \quad (1.3.7)$$

donde:  $r_1$  y  $r_2$  se definen como las distancias del cuerpo primario y el secundario a la partícula prueba respectivamente, es decir:  $r_1 = \sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2 + (\beta-\beta_1)^2}$  y  $r_2 = \sqrt{(\alpha-\alpha_2)^2 + (\beta-\beta_2)^2}$ .

Ahora se procederá a calcular la primera y segunda derivada respecto al tiempo de  $\alpha$  de la ecuación (1.3.5). Al factorizar  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$  se obtiene:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dy}{dt}\right) - x \right) \cos(t) - \left( \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dx}{dt}\right) - y \right) \sin(t) \quad (1.3.8)$$

Ya que tanto en la ecuación (1.3.6) como en la (1.3.8) se encuentra el término  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$  se pueden igualar, y entonces se obtiene:

$$-\frac{(1-\mu)(\alpha-\alpha_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\alpha-\alpha_2)}{r_2^3} = \left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dy}{dt}\right) - x \right) \cos(t) - \left( \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dx}{dt}\right) - y \right) \sin(t) \quad (1.3.9)$$

Usando el procedimiento análogo se obtiene de la ecuación (1.3.5) la segunda derivada de  $\beta$ :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \left( \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dx}{dt}\right) - y \right) \cos(t) + \left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dy}{dt}\right) - x \right) \sin(t) \quad (1.3.10)$$

Igualando la ecuación (1.3.7) con la (1.3.10) y factorizando los términos  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$  se tiene:

$$-\frac{(1-\mu)(\beta-\beta_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\beta-\beta_2)}{r_2^3} = \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \left( \frac{dx}{dt} \right) - y \right) \cos(t) + \left( \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \left( \frac{dy}{dt} \right) - x \right) \sin(t) . \quad (1.3.11)$$

Después de multiplicar las ecuaciones (1.3.10) y (1.3.11) por  $\cos(t)\sin(t)$  y de sumarlas (ver detalle en el apéndice A, ecuaciones (A.9) y (A.14)), resultan las siguientes ecuaciones:

$$-\left( \frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^3} + \frac{\mu(x-x_2)}{r_2^3} \right) = \left( \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \left( \frac{dy}{dt} \right) - x \right) , \quad (1.3.12)$$

$$-\left( \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3} \right) = \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \left( \frac{dx}{dt} \right) - y \right) . \quad (1.3.13)$$

Las ecuaciones (1.3.12) y (1.3.13) se pueden escribir como el gradiente de una función a la cual se le llamará  $U$ . Esto sucede porque el cambio de  $U$  es con respecto a la posición, para comprobarlo se calcularán las derivadas de  $U$ .

Se define  $U$  como:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} , \quad (1.3.14)$$

entonces la derivada parcial con respecto a  $x$  de la ecuación (1.3.14) es la siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-x_2)}{r_2^3} , \quad (1.3.15)$$

y la derivada parcial con respecto a  $y$  de la ecuación (1.3.14) es la siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} ; \quad (1.3.16)$$

se puede ver que las derivadas parciales de  $U$  son idénticas al lado derecho de las ecuaciones (1.3.12) y (1.3.13) respectivamente. Por lo tanto, dichas ecuaciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} , \quad (1.3.17)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} , \quad (1.3.18)$$

donde:  $U$  es la pseudo-energía potencial de la partícula prueba.

Si multiplicamos la ecuación (1.3.17) por  $2 \frac{dx}{dt}$  y a la ecuación (1.3.18) por  $2 \frac{dy}{dt}$ , y se suman se obtiene:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \left( \frac{dy}{dt} \right) \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) . \quad (1.3.19)$$

Integrando la ecuación (1.3.19) respecto al tiempo se obtiene:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + c_1 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + c_2 = 2U + c_3 , \quad (1.3.20)$$

Donde  $c_1$  es la velocidad inicial en el eje  $X$ ,  $c_2$  es la velocidad inicial en el eje  $Y$  y  $c_3$  es la pseudo-energía potencial inicial en el sistema rotante.

Sustituyendo la ecuación (1.3.14) en la (1.3.20) se tiene:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = x^2 + y^2 + 2 \frac{(1-\mu)}{r_1} + 2 \frac{\mu}{r_2} + c_3 - c_2 - c_1 , \quad (1.3.21)$$

Se define:  $C = c_3 - c_2 - c_1$ , entonces la velocidad  $v^2$  es:

$$v^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = x^2 + y^2 + 2 \frac{(1-\mu)}{r_1} + 2 \frac{\mu}{r_2} - C , \quad (1.3.22)$$

y  $C$  es llamada constante de Jacobi. Si se da el valor de  $\mu$ , y la posición y velocidad de la partícula prueba, de la ecuación (1.3.22) se obtendrá el valor de  $C$ , es decir, la trayectoria de la partícula prueba será tal que sus posiciones y sus velocidades deben satisfacer la ecuación (1.3.22) para todo tiempo  $t$ , donde obviamente el valor de  $C$  no cambia.

## CAPITULO 2

### 2.1 INTRODUCCION

Una vez establecido el valor de la constante de Jacobi se podrán establecer las zonas permitidas para el movimiento de la partícula prueba. Entonces se podrán obtener las curvas o isocontornos de velocidad ya que el problema se desarrolló en dos dimensiones. Si se hiciera en tres dimensiones serían isosuperficies para distintas velocidades del tercer cuerpo; un caso particular es elegir la velocidad de la partícula prueba como cero, con esto se calcularán las curvas de velocidad cero. Sustituyendo  $v = 0$  en la ecuación (1.3.22) se tiene:

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{(1-\mu)}{r_1} + 2 \frac{\mu}{r_2} - C = 0, \quad (2.1.1)$$

Con la ecuación (2.1.1) no es obvio cómo se pueden obtener las curvas de velocidad cero, ya que dependen de  $x$  y de  $y$  simultáneamente; se puede, con un programa matemático obtener los isocontornos de dicha ecuación o hacer un análisis matemático de dicha ecuación, se hará primero el análisis matemático para después verificar con el programa Mathematica dichos resultados.

### 2.2 ANALISIS GEOMETRICO

La ecuación (2.1.1) se puede reescribir de la siguiente forma:

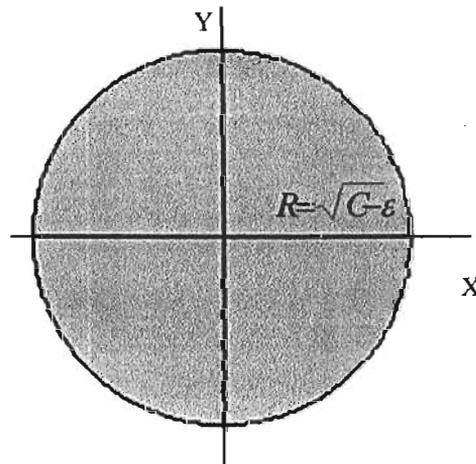
$$\frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \frac{C}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad (2.2.1)$$

donde:  $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}$  que es la distancia del cuerpo primario a la partícula, y  $r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}$  es la distancia del cuerpo secundario a la partícula .

Si  $x$  y  $y$  son muy grandes, los términos donde aparecen en el denominador tenderán a una cantidad muy pequeña a la cual se le llamará  $\varepsilon$ , al sustituirla en la ecuación (2.2.1) se tiene:

$$x^2 + y^2 = C - \varepsilon, \quad (2.2.2)$$

la ecuación (2.2.2) corresponde a un círculo, con radio  $R = \sqrt{C - \varepsilon}$  y con centro en el origen (figura 2.2.1). Justo en el perímetro de este círculo la velocidad de la partícula es cero, fuera de este perímetro las  $x$  y las  $y$  no satisfacen la ecuación (2.2.2) para una  $C$  fija. Fuera del círculo no existe ninguna combinación de  $x$  y de  $y$  que satisfaga la ecuación (2.1.1), salvo que una de ellas tenga un valor imaginario.



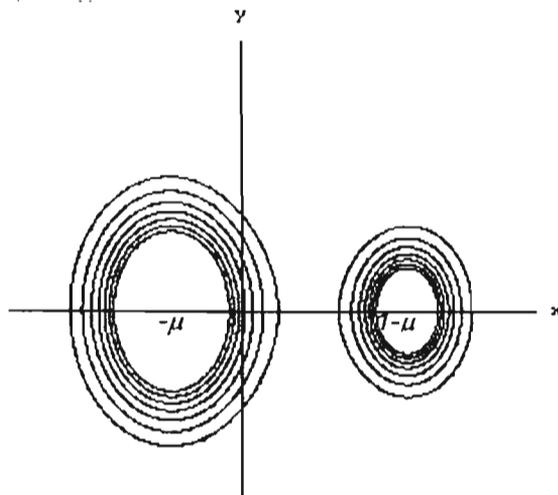
**Figura 2.2.1.** La zona sombreada es la zona permitida para la partícula prueba cuando  $x$  y  $y$  son muy grandes.

Si se reacomoda la ecuación (2.2.1) de la siguiente manera se obtiene:

$$\frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \frac{C}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad (2.2.3)$$

En donde la ecuación (2.2.3) da las curvas equipotenciales. Ahora vamos a variar el valor de  $C$ , sin cambiar las condiciones iniciales de la partícula sino solamente el cociente de masas.

Si  $C$  es mayor que 4, las curvas serán dos óvalos, uno con centro en  $-\mu$  y el otro en  $1-\mu$  (figura 2.2.2).



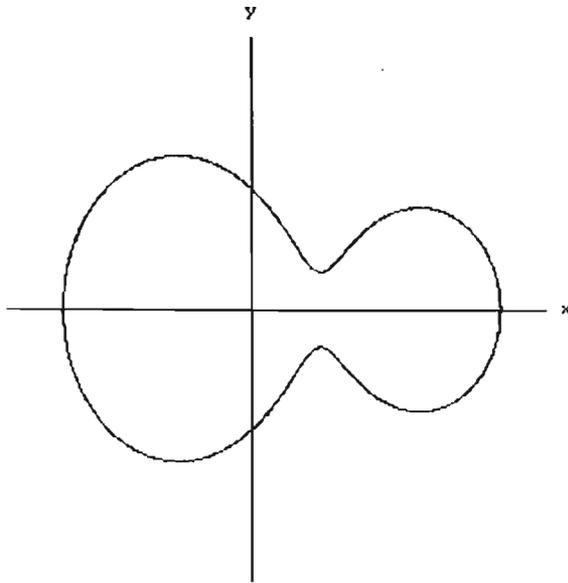
**Figura 2.2.2.** Curvas de velocidad cero con centro en el cuerpo primario  $(-\mu,0)$  y en el secundario  $(1-\mu,0)$ , donde  $C > 4$ .

Para una  $C$  mayor que 4, si la partícula empieza en una órbita alrededor de  $m_1$  nunca podrá orbitar alrededor de  $m_2$ , así como si empieza alrededor de  $m_2$  nunca podrá abandonar dicho óvalo, y se moverá siempre dentro del óvalo correspondiente.

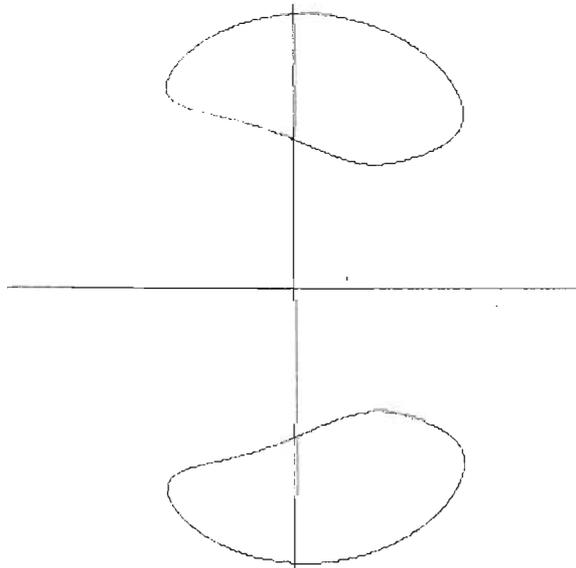
Si  $C$  es menor que 3.6 y mayor que 3.3 los óvalos se juntan, dejando de ser dos figuras y formando sólo una, de manera que la partícula puede moverse libremente entre ambos cuerpos. Es en este tipo de figuras donde están permitidos los atrapamientos temporales (Figura 2.2.3). En la figura anterior puede decirse que los atrapamientos son para siempre.

En el caso de que  $C$  sea menor que 3.3 y mayor o igual que 2.8 las curvas de velocidad cero se vuelven dos figuras, (Figura 2.2.4). Como se puede observar, a medida que crece  $C$  las superficies limitadas por las curvas de velocidad cero decrecen.

Cabe mencionar que los intervalos antes mencionados fueron calculados con la ecuación (2.2.1) donde  $\mu=0.3$  y  $1-\mu=0.7$ .



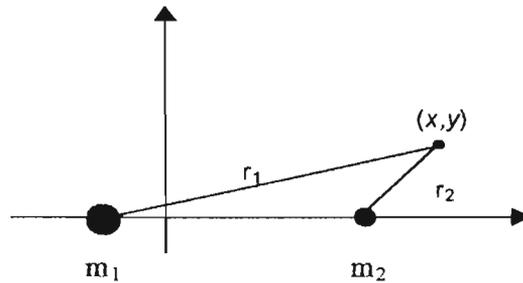
**Figura 2.2.3.** Curva de velocidad cero con centro en el cuerpo primario  $(-\mu, 0)$  y en el secundario  $(1-\mu, 0)$ , donde  $C \in [3.3, 3.6]$ .



**Figura 2.2.4.** Curva de velocidad cero donde  $C \in [2.8, 3.3)$ .

## 2.3 ANALISIS MATEMATICO

Para verlo más claramente se necesitan expresiones en las que, en base a valores para  $r_1$  y  $r_2$  y su definición se puedan graficar las  $x$  y  $y$  que satisfacen la ecuación (2.1.1), (Moulton, pág. 157). De la figura 2.3.1 se obtienen las siguientes relaciones:



**Figura 2.3.1.** Distancia del cuerpo primario  $m_1$  y el secundario  $m_2$  a la partícula prueba.

$$y^2 = r_1^2 - (x + \mu)^2, \quad (2.3.1)$$

$$y^2 = r_2^2 - (x - (1 - \mu))^2. \quad (2.3.2)$$

Despejando e igualando el término lineal de  $x$  de las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) se obtiene:

$$\frac{r_1^2 - x^2 - y^2 - \mu^2}{\mu} = \frac{-r_2^2 + x^2 + y^2 + (1 - \mu)^2}{1 - \mu}; \quad (2.3.3)$$

multiplicando la ecuación (2.3.3) por  $\mu(1 - \mu)$ , al factorizar de ambos lados  $\mu$  se obtiene:

$$r_1^2 - x^2 - y^2 - \mu^2 - \mu(r_1^2 - x^2 - y^2 - \mu^2) = \mu(-r_2^2 + x^2 + y^2 + (1 - \mu)^2). \quad (2.3.4)$$

Por comodidad se despeja  $x^2 + y^2$  de la ecuación anterior, con lo cuál se obtiene:

$$x^2 + y^2 = r_1^2(1 - \mu) + \mu r_2^2 - \mu(1 - \mu). \quad (2.3.5)$$

Al sustituir la ecuación (2.3.5) en la (2.2.1) y reacomodar los términos se tiene:

$$(1-\mu)\left(\frac{r_1^3+2}{r_1}\right)+\mu\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right)=C+\mu(1-\mu); \quad (2.3.6)$$

se define  $C' = C + \mu(1-\mu)$ , al sustituirlo en la ecuación (2.3.6), y manipulándola, se obtiene:

$$r_1^3 + \left(\frac{\mu}{(1-\mu)}\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right) - \frac{C'}{(1-\mu)}\right)r_1 + 2 = 0. \quad (2.3.7)$$

La ecuación (2.3.7) es una cúbica en su forma canónica, es decir:  $r_1^3 + b_1r_1^2 + b_2r_1 + b_3 = 0$

donde:  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right) - \frac{C'}{1-\mu}$  y  $b_3 = 2$  esta ecuación se puede resolver con teoría

de ecuaciones (expuesta en el Apéndice B).

Las raíces de la ecuación (2.3.7) están dadas por las ecuaciones (B.5), (B.6) y (B.7) y son las siguientes:

$$r_{11} = 2\sqrt{-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right) - \frac{C'}{1-\mu}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right), \quad (2.3.8)$$

$$r_{12} = 2\sqrt{-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right) - \frac{C'}{1-\mu}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ\right), \quad (2.3.9)$$

$$r_{13} = 2\sqrt{-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right) - \frac{C'}{1-\mu}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ\right); \quad (2.3.10)$$

donde:  $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{\mu}{3(1-\mu)}\left(\frac{r_2^3+2}{r_2}\right) - \frac{C'}{3(1-\mu)}\right)^3}}$ .

Si ahora se sustituye  $b_1$  y  $b_3$  en la definición de discriminante (B.2), se tiene que:

$D = b_2^3 + 27$ , para que la ecuación cúbica tenga tres raíces reales y distintas, se requiere  $D < 0$ ;

despejando  $b_2$  de la expresión para  $D$  se obtiene que  $b_2 + 3 < 0$ . El valor máximo para la

desigualdad anterior es cuando está igualada a cero, es decir:

$$b_2 + 3 = 0 ; \quad (2.3.11)$$

sustituyendo el valor de  $b_2$  en la ecuación (2.3.11) se tiene:

$$\frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{r_2^3 + 2}{r_2} \right) - \frac{C'}{1-\mu} + 3 = 0 ; \quad (2.3.12)$$

esta ecuación está formada por otra ecuación cúbica pero de  $r_2$  así que se procederá a resolver de la misma manera que se hizo con la ecuación (2.3.7). Reescribiendo la ecuación anterior se tiene:

$$r_2^3 + \left( 3 \frac{1-\mu}{\mu} - \frac{C'}{\mu} \right) r_2 + 2 = 0 . \quad (2.3.13)$$

La ecuación anterior tiene como coeficientes:  $b'_1 = 0$ ,  $b'_2 = 3 \frac{(1-\mu)}{\mu} - \frac{C'}{\mu}$  y  $b'_3 = 2$ ; de manera análoga se pide que el discriminante de la ecuación (2.3.13) sea menor que cero para obtener tres raíces reales y distintas, si con los coeficientes de la ecuación (2.3.13) se expresa el discriminante se tiene que  $b'_2 + 3 < 0$ , el límite de esta relación es cuando:

$$b'_2 + 3 = 0 ; \quad (2.3.14)$$

ahora al sustituir en la ecuación (2.3.14) el valor de  $b'_2$  se tiene:

$$\frac{3(1-\mu)}{\mu} - \frac{C'}{\mu} + 3 = 0 , \quad (2.3.15)$$

A diferencia de lo obtenido a partir de la ecuación cúbica en  $r_1$  aquí se obtiene una condición sobre el valor de  $C$ . Despejando  $C'$  de la ecuación anterior se obtiene que  $C' = 3$ . Por lo tanto el mínimo valor que tomará la constante de Jacobi (para obtener 3 raíces reales distintas) estará dado por  $C = 3 - \mu(1 - \mu)$ .

Así, las raíces de la ecuación (2.3.13) son las siguientes:

$$r_{21} = 2\sqrt{-\left(\frac{1-\mu}{\mu} - \frac{C'}{3\mu}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right), \quad (2.3.16)$$

$$r_{22} = 2\sqrt{-\left(\frac{1-\mu}{\mu} - \frac{C'}{3\mu}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ\right), \quad (2.3.17)$$

$$r_{23} = 2\sqrt{-\left(\frac{1-\mu}{\mu} - \frac{C'}{3\mu}\right)} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ\right); \quad (2.3.18)$$

donde:  $\cos(\varphi) = 1 / \sqrt{-\left(\frac{1-\mu}{\mu} - \frac{C'}{3\mu}\right)^3}$ .

Teniendo las condiciones iniciales del problema, las raíces de  $r_1$  y las de  $r_2$ , las cuales son constantes, se podrán graficar las curvas. Así se tiene un sistema de dos ecuaciones para obtener el conjunto de las  $(x, y)$  en donde se pueda mover la partícula prueba. Cabe hacer notar que si alguna de las raíces es negativa no se debe tomar en cuenta ya que tanto  $r_1$  como  $r_2$  son distancias y no pueden ser negativas.

## CAPITULO 3

### 3.1 INTRODUCCION

Calcular la constante de Jacobi de un cuerpo celeste es útil en varias formas; para empezar es una característica única de ese cuerpo, y esto hace posible identificarlo, un ejemplo son los cometas (criterio de Tisserand).

Para saber si la Luna iba a dejar o no de estar atada gravitacionalmente a la Tierra, en 1878, Hill calculó la constante de Jacobi de la Luna, y encontró las curvas de velocidad cero del sistema Sol - Tierra - Luna, encontrando así las zonas prohibidas y permitidas para la Luna.

Siguiendo las ecuaciones de los capítulos anteriores se realizará el cálculo de las curvas de velocidad cero para el sistema Sol-Tierra-Luna, donde la Luna es la partícula prueba. Para establecer así las zonas prohibidas y las permitidas de la misma, lo primero que se hará es calcular la constante de Jacobi de la Luna.

### 3.2 CALCULO DE LA CONSTANTE DE JACOBI

Se identifica en el sistema cada componente; el Sol será el cuerpo primario, el cual tendrá como masa  $m_1 = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ . la Tierra es el cuerpo secundario con masa  $m_2 = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$ . recordando que  $m_1 = 1 - \mu$  y  $m_2 = \mu$ , la suma de estas dos cantidades va a ser nuestra unidad de masa:

$$m_1 + m_2 = 1.989005974 \times 10^{30} \text{ kg.} \quad (3.2.1)$$

eso implica que los valores de  $1 - \mu$  y de  $\mu$  son los siguientes:

$$1 - \mu = 0.9999969965, \quad (3.2.2)$$

$$\mu = 3.003510335 \times 10^{-6} .$$

Ahora se calcularán las coordenadas de los cuerpos primario  $(\alpha_1, 0)$  y secundario  $(\alpha_2, 0)$ ; en la ecuación  $|\alpha_2 - \alpha_1| = 1$ ,  $\alpha_1$  es la distancia del centro de masa al Sol (cuerpo primario),  $\alpha_2$  es la distancia del centro de masa a la Tierra (cuerpo secundario), así que la unidad de distancia es una unidad astronómica, que es  $UA = 149.598 \times 10^6 \text{ Km}$ .

Por haber escogido el centro de masa como origen y por estar normalizadas las masas, las coordenadas del Sol y de la Tierra con respecto al centro de masa son:

$$\alpha_1 = -\mu = -3.003510335 \times 10^{-6} , \tag{3.2.3}$$

$$\alpha_2 = 1 - \mu = 0.9999969965 .$$

Para calcular la velocidad angular del sistema Sol - Tierra, se usará la ecuación (1.3.1), los resultados de las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.3) junto con el valor de  $G = 6.668 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg} \cdot \text{s}^2}$  se sustituyen en la ecuación (1.3.1), con lo cual la velocidad angular

es:  $\omega = 1.990339483 \times 10^{-7} \text{ k s}^{-1}$ , la expresión anterior está igualada a 1, esto hace que  $k$ , tenga el siguiente valor:

$$k = 5.024268518 \times 10^6 \text{ s} . \tag{3.2.4}$$

Las coordenadas del tercer cuerpo están dadas por las ecuaciones:

$$x = \alpha_2 + a \cos(\theta) , \tag{3.2.5}$$

$$y = a \sin(\theta) ; \tag{3.2.6}$$

donde  $a$  es la distancia de la Tierra a la Luna,  $a = 384400 \text{ Km}$  aunque para los cálculos se usará normalizada, es decir,  $a = 2.569553069 \times 10^{-3}$ , y  $\theta$  es el ángulo que hace la Luna con el eje X. Se elige  $\theta = 0$  en  $t=0$  y por lo tanto las coordenadas de la Luna son  $(1.00256655, 0)$ .

Para obtener la velocidad basta derivar la posición con respecto al tiempo (ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6)), y se obtiene:

$$\frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -a \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} , \quad (3.2.7)$$

$$\frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = a \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} , \quad (3.2.8)$$

donde:  $\frac{d\theta}{dt}$  está dada por:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{Gm_2}{a^3}} ; \quad (3.2.9)$$

Al sustituir los valores se obtiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = 13.30540744; \quad (3.2.10)$$

donde dicha velocidad ya está normalizada. Entonces al sustituir el valor de  $a$  y el resultado (3.2.10) en las ecuaciones (3.2.7) y (3.2.8) se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = 0 , \quad (3.2.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3.418895052 \times 10^{-2} .$$

Y estas son las componentes de la velocidad inicial. Para calcular la constante de Jacobi sólo falta calcular  $r_1$  y  $r_2$  los cuales están dados por las ecuaciones:  $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}$  y  $r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}$ ; al sustituir los valores de  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $y$  se obtiene:

$$r_1 = 1.002569554 , \quad (3.2.12)$$

$$r_2 = 2.5695535 \times 10^{-3} .$$

Si en la ecuación (1.3.22) se despeja  $C$  y se sustituyen todos los resultados obtenidos anteriormente se obtiene que el valor de la constante de Jacobi de la Luna es:

$$C = 3.001176643. \quad (3.2.13)$$

### 3.3 RESULTADOS

Una vez que se ha calculado la constante de Jacobi, se pueden ahora obtener las zonas permitidas usando las ecuaciones cúbicas acopladas expuestas en el capítulo anterior, se observa que el valor de dicha constante se encuentra arriba del mínimo límite predicho para obtener raíces reales.

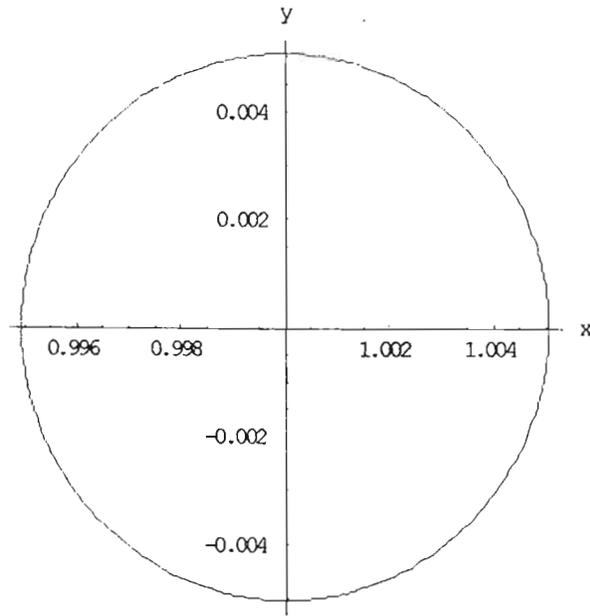
Primero se deben encontrar los valores de las constantes en la ecuación (2.3.13) para poderla resolver, al sustituir el valor de  $\mu$  y  $C$  se tiene que  $C'=3.001179647$ ; sustituyendo estos valores, la ecuación (2.3.13), se puede expresar de la siguiente forma:

$$r_2^3 - 395.7559r_2 + 2 = 0, \quad (3.3.1)$$

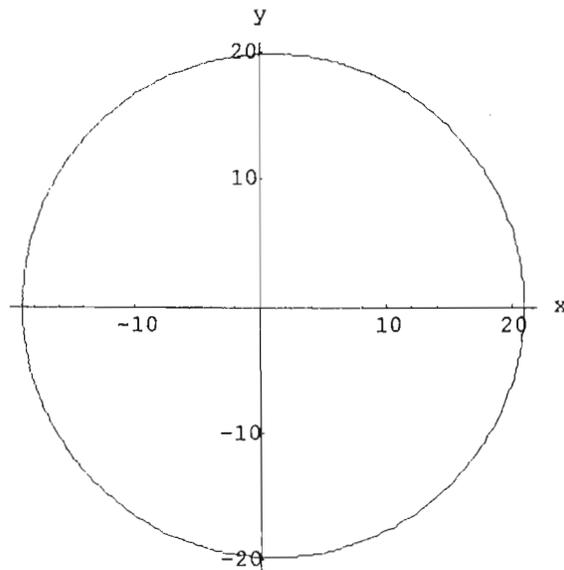
las raíces de la ecuación (3.3.1), son las siguientes:

$$\begin{aligned} r_{21} &= 5.0536205 \times 10^{-3}, \\ r_{22} &= 19.89108726, \\ r_{23} &= -19.89614088; \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

de las tres raíces, puesto que no tiene sentido una distancia negativa sólo se ocuparán las dos que sean positivas es decir  $r_{21}$  y  $r_{22}$ . Estas raíces dan el radio de dos círculos, ambos con centro en  $(1-\mu, 0)$ .



**Figura 3.3.1.** Círculo de radio  $r_{21}=5.0536205 \times 10^{-3}$  y centro en  $(1-\mu, 0)$ .



**Figura 3.3.2.** Círculo de radio  $r_{22}=19.89108726$  y centro en  $(1-\mu, 0)$ .

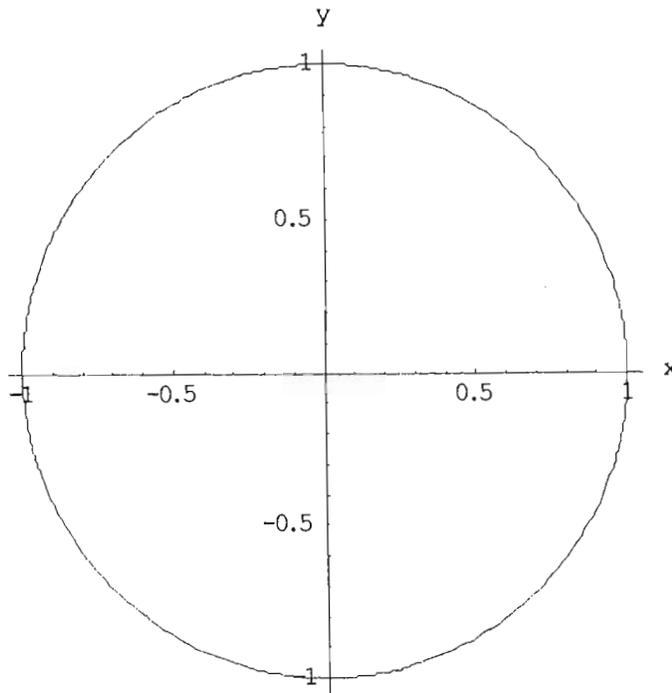
Al sustituir  $r_{21}$  y  $r_{22}$  en la ecuación (2.3.7) resultan dos ecuaciones cúbicas iguales, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$r_1^3 - 3r_1 + 2 = 0, \quad (3.3.3)$$

al resolver la ecuación (3.3.3) se obtienen las siguientes raíces:

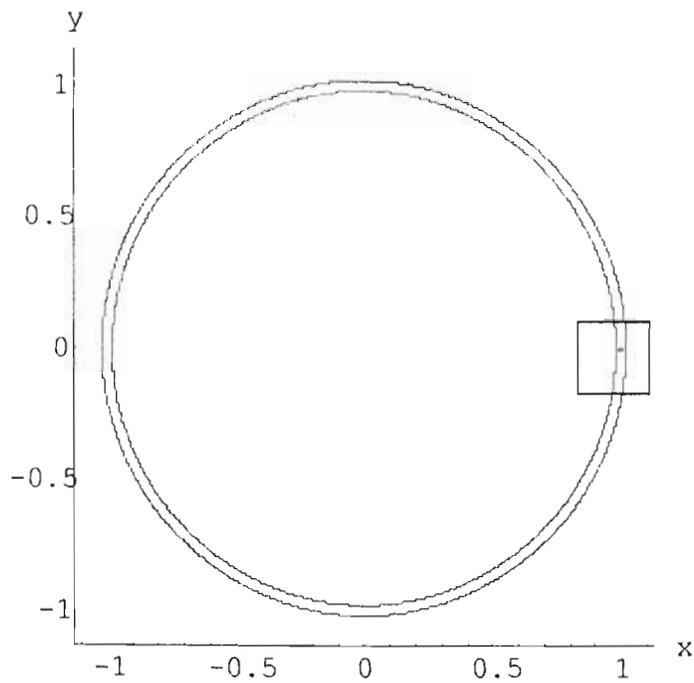
$$\begin{aligned} r_{11} &= 1, \\ r_{12} &= 1, \\ r_{13} &= 1. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Estas raíces dan el radio de un círculo con centro en  $(-\mu, 0)$ .



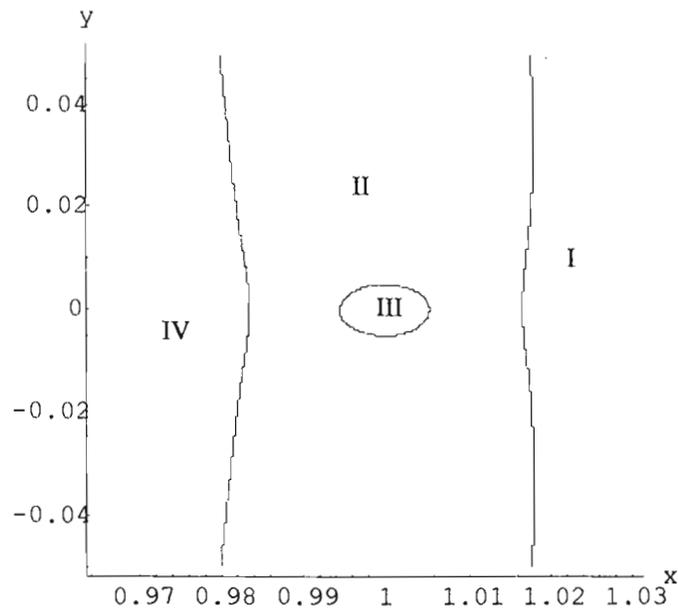
**Figura 3.3.3.** Círculo de radio  $r_{11}=1$  y centro en  $(-\mu, 0)$  donde  $r_{11}=r_{12}$ .

Al observar estas gráficas, no se puede establecer una zona prohibida o permitida, por lo que se obtendrán los isocontornos en el plano X-Y de la ecuación (2.1.1).

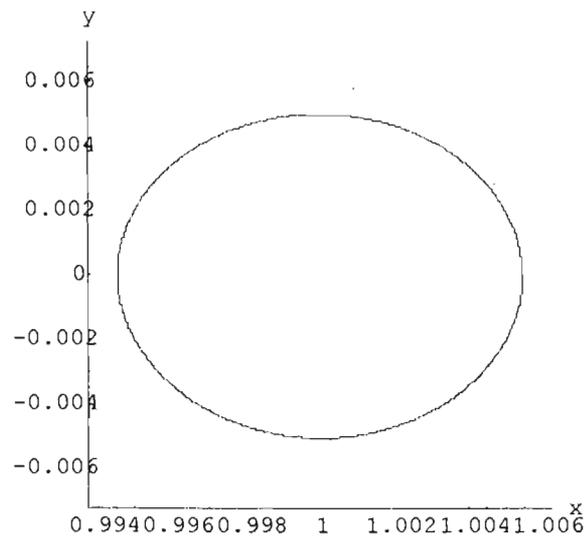


**Figura 3.3.4.** Curvas de velocidad cero de la Luna de la ecuación 2.1.1, donde  $C' = 3.001179647$ .

Al observar el recuadro de la figura (3.3.4) se observa lo siguiente:



**Figura 3.3.5.** Detalle del recuadro de la figura 3.3.4, donde se pueden definir cuatro zonas.



**Figura 3.3.6.** Ampliación de la zona II, de la figura 3.3.6, es un óvalo con centro en  $(1-\mu,0)$ , el eje mayor es equivalente a 1,645,578 Km.

En la figura 3.3.4. y 3.3.5. se observan cuatro zonas, la zona I no está limitada por ninguna curva, la zona II es la que esta entre los dos círculos concéntricos exceptuando el ovalo centrado en la Tierra (zona III) y la zona IV tiene como centro al Sol y esta limitado por el círculo interno. Dado que las curvas de velocidad cero son siempre fronteras entre zonas prohibidas y permitidas y hemos colocado a la Luna en la zona III, forzosamente la zona II es prohibida mientras que la I y la IV son permitidas.

# CAPITULO 4

## 4.1 INTRODUCCION

Con el mismo método empleado en el capítulo 3 para obtener las curvas de velocidad cero de la Luna, se calculan ahora las curvas de velocidad cero para un planeta extrasolar, que se encuentra en un sistema binario (16 Cygnus A y B). Donde supongo que el planeta extrasolar es la partícula prueba.

## 4.2 CALCULO DE LA CONSTANTE DE JACOBI

Se identifica en el sistema cada componente; la estrella Cyg A será el cuerpo primario, y tiene una masa observada de  $m_1=2.08845 \times 10^{30}$  Kg. Cyg B será el cuerpo secundario cuya masa es de  $m_2=2.00889 \times 10^{30}$  Kg recordando que  $m_1 = 1 - \mu$  y  $m_2 = \mu$ , la suma de estas dos cantidades va a ser nuestra unidad de masa:

$$m_1+m_2=4.09734 \times 10^{30} \text{ Kg} \quad (4.2.1)$$

eso implica que los valores de  $1 - \mu$  y de  $\mu$  son los siguientes:

$$1-\mu=0.50971 \quad , \quad (4.2.2)$$

$$\mu=0.49029 \quad .$$

Suponiendo que el planeta es la partícula prueba, la unidad de distancia es la distancia que hay entre las dos estrellas es decir, 850 UA (Udry et al).

Los elementos orbitales del planeta reportados son:

$$\begin{aligned} \text{Semieje} &= 1.67 \text{ UA} \\ \text{Excentricidad} &= 0.63 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Las coordenadas normalizadas de los cuerpos primario  $(x_1, y_1)$  y secundario  $(x_2, y_2)$  en el sistema rotante con origen en el CM de  $m_1$  y  $m_2$  son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\mu = -0.49029 \quad , \\
 y_1 &= 0 \quad , \\
 x_2 &= 1 - \mu = 0.50971 \quad , \\
 y_2 &= 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.4}$$

Además la distancia entre la partícula prueba y Cyg B, que es la estrella a la que orbita es:

$$d = 0.73 \times 10^{-3} \quad . \tag{4.2.5}$$

Las coordenadas del planeta extrasolar en el sistema rotante y adimensionalizadas son:

$$\begin{aligned}
 x &= 0.51044 \quad ; \\
 y &= 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.6}$$

Para calcular la velocidad angular de este sistema binario se usa la ecuación (1.3.1) y se obtiene:  $\omega = 1.15273 \times 10^{-11} \text{ k s}^{-1}$ , se iguala  $\omega = 1$  y se obtiene:

$$k = 8.67483 \times 10^{10} \text{ s} \tag{4.2.7}$$

La velocidad de la partícula prueba es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= 0 \quad , \\
 \frac{dy}{dt} &= 0.73 \times 10^{-3} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.8}$$

Y estas son las componentes de la velocidad inicial. Para calcular la constante de Jacobi sólo falta calcular  $r_1$  y  $r_2$  los cuales están dados por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} \quad , \\
 r_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.9}$$

al sustituir los valores de  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $y$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1.00073 \quad , \\
 r_2 &= 0.73 \times 10^{-3} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.10}$$

Al despejar  $C$  de la ecuación (1.3.22) y sustituir todos los resultados obtenidos anteriormente se obtiene que el valor de la constante de Jacobi del planeta es:

$$C = 1344.5395 \quad (4.2.11)$$

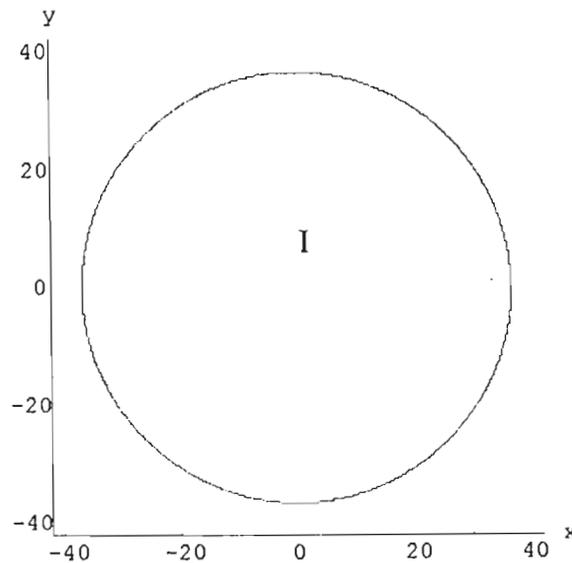
Como se puede observar, el valor de  $C$  es muy grande, de la ecuación (1.3.22) se observa el término siguiente:

$$2\mu/r_2 = 1343.26027 \quad ; \quad (4.2.12)$$

el cual, se hace grande puesto que  $r_2$  es del orden de  $10^{-3}$ .

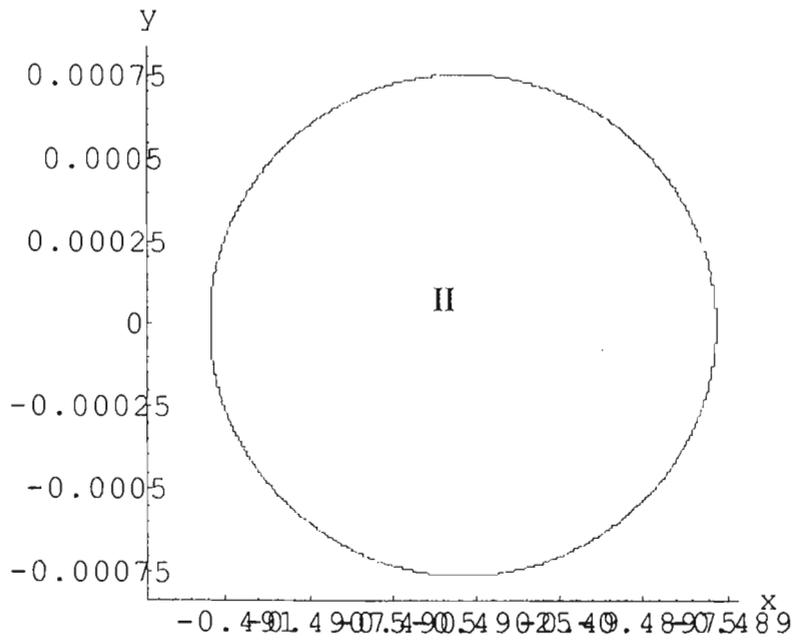
### 4.3 RESULTADOS

Las curvas de velocidad cero del planeta son las siguientes:

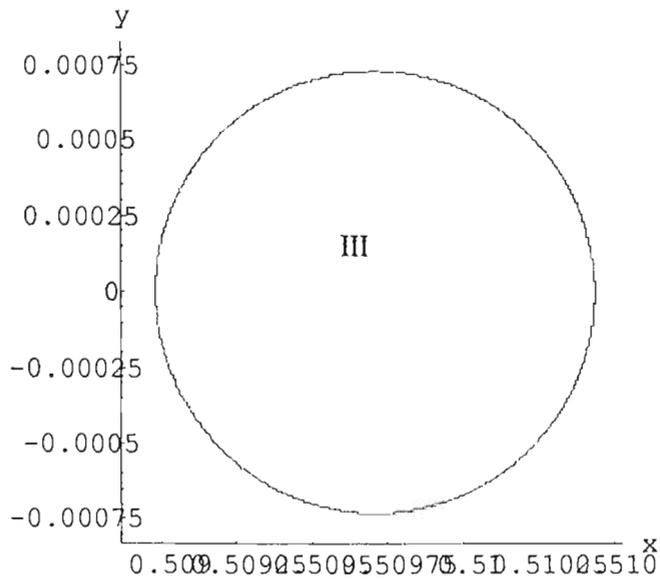


**Figura 4.3.1.** Curvas de velocidad cero del planeta donde  $C=1344.5395$ . Esta zona es prohibida.

Al cambiar la escala se observan dos óvalos muy pequeños, uno está alrededor del primario figura (4.3.2) y el otro está alrededor del secundario figura (4.3.3):



**Figura 4.3.2.** Zona permitida alrededor del cuerpo primario (Cygnus A).



**Figura 4.3.3.** Zona permitida alrededor del cuerpo secundario (Cygnus B).

En las figuras (4.3.1.), (4.3.2.) y (4.3.3) se observan tres zonas, la zona II tiene como centro al primario y la zona III al secundario, dichas zonas son permitidas, por lo tanto la zona I es prohibida; esto hace que la partícula prueba, sólo pueda orbitar alrededor de Cyg B, aunque la zona II también es permitida, la partícula no puede cruzar las fronteras, quedando restringida a la zona II. La zona I es un círculo, con un radio de 30837.2093 UA. Los ejes de la zona II miden: eje mayor (vertical) 1.37366 UA, eje menor (horizontal) 1. 29018 UA; y los ejes de la zona III son: eje mayor (vertical) 1.26556 UA, eje menor (horizontal) 1.2423 UA.

Las zonas I y II son pequeñas, hay que recordar que mientras más grande es C más pequeñas son las áreas permitidas.

# CAPITULO 5

## 5.1 CONCLUSIONES

En el problema plano circular restringido de tres cuerpos, sólo existe una constante de movimiento (llamada constante de Jacobi) que depende exclusivamente del cociente de masas de los cuerpos primario y secundario (Sol y Tierra, respectivamente) y de las coordenadas de posición y velocidad de la partícula prueba (Luna).

Dadas la posición y la velocidad iniciales de la Luna, se puede calcular el valor de su Constante de Jacobi. Esto permite calcular cuáles zonas del plano orbital de los tres cuerpos puede visitar la Luna y cuáles no. A las fronteras que separan estas zonas se les denomina curvas de velocidad cero y son tales que, la partícula no puede atravesarlas bajo ninguna circunstancia, ya que del lado prohibido su velocidad sería forzosamente imaginaria.

Dada  $\mu$  para el sistema Tierra-Sol y las condiciones iniciales de posición y velocidad de la Luna, dadas en el capítulo 3, se obtuvo que la constante de Jacobi de la Luna es:  $C=3.01176643$ . Al sustituir dicho valor en la ecuación (2.1.1) se obtuvieron los isocontornos mostrados en las figuras (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6). En las figuras (3.3.4), (3.3.5), se observan cuatro zonas, donde la última frontera es la que hay entre la zona I y la zona II; como en la zona III se ha colocado a la Luna, esta zona es permitida, así como las zonas I y IV, por lo que única zona prohibida es la zona II.

Al analizar las dimensiones del óvalo de la figura (3.3.6), se tiene que el eje mayor de la zona III tiene una longitud de  $11 \times 10^{-3}$  que equivale a 1,645,578 Km., el eje menor tiene una longitud de  $10 \times 10^{-3}$  que equivale a 1,495,980 Km. Los resultados obtenidos implican que aunque la Luna se aleje de la Tierra siempre va a estar gravitacionalmente atada a ella y no puede violar dicha frontera. Cabe recordar que estos resultados son sólo una aproximación, debido a las suposiciones hechas al principio de este trabajo, como por ejemplo que las órbitas de los tres cuerpos son coplanares y que la excentricidad de la órbita lunar es cero al inicio.

Al calcular la constante de Jacobi del planeta extrasolar, se obtuvo  $C=1344.5395$ . Se obtuvieron tres zonas (figuras (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3)); la zona I, que es prohibida, y las zonas II y III que son permitidas. Dado que el planeta fue colocado en la zona III, nunca podrá orbitar a las dos estrellas, sólo orbitará a (Cyg B). Esto significa que su órbita es de tipo "S" es decir, orbita a la estrella secundaria del sistema binario. Además utilizando el criterio de estabilidad para órbitas en sistemas binarios, dado por Harrington (1975), Szebehely (1980) y Dvorak (1984), en el escenario del problema restringido de 3 cuerpos, la órbita de este planeta extrasolar es estable, ya que la distancia del planeta a Cyg B es menor que  $\frac{1}{4}$  de la distancia entre las dos estrellas.

## APENDICE A

### PROCEDIMIENTO DETALLADO DE LA PAGINA 7, CAPITULO 1.

Recordando la ecuación (1.3.9) se tiene:

$$-\frac{(1-\mu)(\alpha-\alpha_1)}{r_1^3}-\frac{\mu(\alpha-\alpha_2)}{r_2^3}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}-2\left(\frac{dy}{dt}\right)-x\right)\cos(t)-\left(\frac{d^2y}{dt^2}+2\left(\frac{dx}{dt}\right)-y\right)\sin(t) . \quad (1.3.9)$$

Se le llamará  $A$  al lado izquierdo de la ecuación anterior y  $B$  al lado derecho; al multiplicar ambos lados de la ecuación por  $\cos(t)$  se tiene:

$$A_{\cos(t)}=\left(-\frac{(1-\mu)(\alpha-\alpha_1)}{r_1^3}-\frac{\mu(\alpha-\alpha_2)}{r_2^3}\right)\cos(t) , \quad (A.1)$$

$$B_{\cos(t)}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}-2\left(\frac{dy}{dt}\right)-x\right)\cos^2(t)-\left(\frac{d^2y}{dt^2}+2\left(\frac{dx}{dt}\right)-y\right)\cos(t)\sin(t) , \quad (A.2)$$

al sustituir las ecuaciones (1.3.3), (1.3.4) y (1.3.5) en la ecuación (A.1) y factorizar  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$  se tiene:

$$A_{\cos(t)}=-\left((1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3}+\mu\frac{(x-x_2)}{r_2^3}\right)\cos^2(t)-\left((1-\mu)\frac{y}{r_1^3}+\mu\frac{y}{r_2^3}\right)\cos(t)\sin(t) . \quad (A.3)$$

Del capítulo 1 se tiene que la ecuación (1.3.11) es la siguiente:

$$-\frac{(1-\mu)(\beta-\beta_1)}{r_1^3}-\frac{\mu(\beta-\beta_2)}{r_2^3}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}+2\left(\frac{dx}{dt}\right)-y\right)\cos(t)+\left(\frac{d^2x}{dt^2}-2\left(\frac{dy}{dt}\right)-x\right)\sin(t) . \quad (1.3.11)$$

Al lado izquierdo de la ecuación (1.3.11) se le llamará  $D$  y al derecho  $E$ . Se multiplicarán ambos lados por  $\sin(t)$  quedando lo siguiente;

$$D_{\sin(t)}=\left(-\frac{(1-\mu)(\beta-\beta_1)}{r_1^3}-\frac{\mu(\beta-\beta_2)}{r_2^3}\right)\sin(t) , \quad (A.4)$$

$$E_{\sin(t)}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}+2\left(\frac{dx}{dt}\right)-y\right)\cos(t)\sin(t)+\left(\frac{d^2x}{dt^2}-2\left(\frac{dy}{dt}\right)-x\right)\sin^2(t) . \quad (A.5)$$

El resultado de sustituir las ecuaciones (1.3.3), (1.3.4) y (1.3.5) en  $D_{\sin(t)}$  y de factorizar los términos  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$  es el siguiente:

$$D_{\sin(t)} = -\left( (1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \mu\frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right) \sin^2(t) - \left( (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} + \mu\frac{y}{r_2^3} \right) \cos(t)\sin(t) . \quad (\text{A.6})$$

Al sumar  $A_{\cos(t)} + D_{\sin(t)}$  y  $B_{\cos(t)} + E_{\sin(t)}$  se obtiene:

$$A_{\cos(t)} + D_{\sin(t)} = -\left( (1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \mu\frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right) , \quad (\text{A.7})$$

$$B_{\cos(t)} + E_{\sin(t)} = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x . \quad (\text{A.8})$$

Al igualar las ecuaciones (A.7) y (A.8) se tiene:

$$-\left( (1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \mu\frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x . \quad (\text{A.9})$$

Ahora se multiplicará  $A$  y  $B$  por  $-\sin(t)$ ,  $D$  y  $E$  por  $\cos(t)$ , y se sustituirán las ecuaciones (1.3.3), (1.3.4) y (1.3.5) obteniéndose:

$$A_{-\sin(t)} = \left( (1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \mu\frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right) \cos(t)\sin(t) + \left( (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} + \mu\frac{y}{r_2^3} \right) \sin^2(t) , \quad (\text{A.10})$$

$$B_{-\sin(t)} = -\left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dy}{dt}\right) - x \right) \sin(t)\cos(t) + \left( \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dx}{dt}\right) - y \right) \sin^2(t) , \quad (\text{A.11})$$

$$D_{\cos(t)} = -\left( (1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \mu\frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right) \cos(t)\sin(t) - \left( (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} + \mu\frac{y}{r_2^3} \right) \cos^2(t) , \quad (\text{A.12})$$

$$E_{\cos(t)} = \left( \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dx}{dt}\right) - y \right) \cos^2(t) + \left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dy}{dt}\right) - x \right) \cos(t)\sin(t) ; \quad (\text{A.13})$$

Al sumar las ecuaciones (A.10) y (A.12) e igualarlas con la suma de las ecuaciones (A.11) y (A.13) se obtiene:

$$-\left( (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} + \mu\frac{y}{r_2^3} \right) = \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y . \quad (\text{A.14})$$

Las ecuaciones (A.9) y (A.14) corresponden a las ecuaciones (1.3.12) y (1.3.13).

## APENDICE B

### B.1 METODO DE RESOLUCION DE ECUACIONES DE TERCER GRADO

Para resolver las ecuaciones de tercer grado que tienen la forma:

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0 \quad , \quad (\text{B.1})$$

se debe analizar que signo tiene su discriminante, ya que dependiendo del signo es el número de raíces reales y complejas, y se define de la siguiente forma:

$$D = Q^3 + R^2 \quad , \quad (\text{B.2})$$

donde  $Q$  y  $R$  están dados de la siguiente forma:

$$Q = \frac{3b_2 - b_1^2}{9} \quad , \quad (\text{B.3})$$

$$R = \frac{9b_1b_2 - 27b_3 - 2b_1^3}{54} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Si:

- i.  $D < 0$  las raíces son reales distintas,
- ii.  $D = 0$  todas son reales y al menos dos de ellas iguales,
- iii.  $D > 0$  dos de las raíces son complejas conjugadas y una es real.

Se elige el caso (i) en donde el discriminante es menor que cero, eso significa que:

$$D = Q^3 + R^2 < 0 \quad .$$

Al darse la condición anterior, las raíces de la ecuación cúbica estarán dadas por las siguientes fórmulas:

$$x_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right), \quad (\text{B.5})$$

$$x_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ\right), \quad (\text{B.6})$$

$$x_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ\right). \quad (\text{B.7})$$

donde:  $Q$  está dada por la ecuación (B.3) y  $\cos(\varphi) = \frac{-R}{\sqrt{-Q^3}}$ .

## APENDICE C

### C.1 DATOS ASTRONOMICOS Y CONSTANTES

	<b>Masa (Kg.)</b>	<b>Masa normalizada</b>	<b>Distancia (Km.)</b>	<b>Distancia normalizada</b>
LUNA	$734.9 \times 10^{20}$	$3.6948104 \times 10^{-8}$	384400 *	$2.569553069 \times 10^{-3}$
TIERRA	$5.974 \times 10^{24}$	$3.003510335 \times 10^{-6}$	$149.598 \times 10^6$ **	1
SOL	$1.989 \times 10^{30}$	0.9999969965	$149.598 \times 10^6$ **	1

\* Es la distancia de la Tierra a la Luna.

\*\* Es la distancia entre la Tierra y el Sol.

UA =  $149.598 \times 10^6$  Km.

$$G = 6.668 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg/s}^2}$$

## BIBLIOGRAFIA

- J. M. Danby, **Fundamentals of celestial mechanics.**  
Capítulo VIII; "The problem of three bodies", pág. 277 – 290  
Editorial Willmann- Bell, Inc.  
Segunda edición, 1992
- F. R. Moulton and Dover, **An introduction to celestial mechanics.**  
Capítulo 8; "The three body problem", pág. 253 – 290  
Editorial Dover Publications, Inc.1970
- Murray R. Spiegel **Manual de Fórmulas y tablas matemáticas.**  
"Soluciones de las ecuaciones algebraicas", pág. 32.  
Editorial Mc Graw-Hill 1989
- C. D.Murray and S. F. Dermott, **Solar System Dynamics**  
Capítulo 3; The restricted three-body problem, pag: 63-74  
Cambridge, university press.2001
- Cochran W., Hatzes A., Butler P. And Marcy G.,  
**The discovery of a planet companion to 16 Cyg B.**  
Astrophysical Journal, vol. 483, pág. 457  
1997
- Dvorak R., Pilat-Lohinger E., Bois E., Funk B., Freistetter F.and Kiseleva-Eggleton L.  
**Planets in Double Stars: The  $\gamma$  Cephei System.**  
Rev Mex A.A., vol. 21, pág. 222-226  
2004
- Udry S., Eggenberger A., Mayor M., Mazeh T. and Zucker S.  
**Planets in Multiple Star Systems: Properties and Detections.**  
Rev Mex A.A., vol. 21, pág. 222-226  
2004