UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA. APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA EN SEXTO GRADO DE PRIMARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

MARY ANNA CÁZAREZ ÁVILA

DIRECTORA DE TESIS: M. en C. NORMA PATRICIA MARTINEZ FALCÓN

ASESORA DE TESIS: MAT. JULIETA DEL CARMEN VERDUGO DIAZ

2005

VNIVERSIDAD NACIONAL AVENIDA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"La enseñanza de las fracciones en la educación básica. Aplicación y análisis de una situación didáctica en sexto grado de primaria".

realizado por Mary Anna Cázarez Ávila

con número de cuenta 09661338-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Norma Patricia Martínez Falcón	
Asesora de Tesis Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz	
Propietario	M. en C. Marina Kriscautzky Laxague	
Suplente	M. en C. Mónica Leñero Padierna	
Suplente	M. en C. María del Pilar Martínez Téllez	Pilar Martínez T.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mis padres,
como una sencilla muestra
de agradecimiento a todos sus esfuerzos
para que sus hijos lleguen hasta donde ellos quieran.

A G R A D E C I M I E N T O S

A Dios, que me ha prestado vida para llegar a este momento, y que me ha permitido y otorgado todo lo necesario para alcanzar las metas fijadas.

A mis hermanos, por su fraternidad, cariño y apoyo demostrado en todo momento difícil. ¡Gracias por todo!

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme abierto sus puertas para realizar mis estudios en Matemáticas; a la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico y al Instituto de Matemáticas por el apoyo otorgado para la elaboración del presente trabajo.

A los maestros, por haberme dotado de las herramientas necesarias, por sus consejos, orientación y motivaciones para seguir adelante con mi proyecto profesional.

A mi Directora de Tesis M. en C. Norma Patricia Martínez Falcón, a mi Asesora de Tesis Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz, a las sinodales M. en C. Marina Kriscautzky Laxague, M. en C. María del Pilar Martínez Téllez, M. en C. Mónica Leñero Padierna por su tiempo, paciencia e interés para que realizara un buen trabajo que justificara el nivel académico correspondiente.

A mis compañeros de estudio, por todos los gratos momentos que pasamos adentro y afuera de aulas; y a mis compañeros de proyecto por todo su apoyo moral recibido en todo momento para salir adelante con todos mis compromisos de tipo profesional.

A todas aquellas personas que en una u otra forma también participaron con sus conocimientos, experiencias y por su valioso tiempo dedicado. ¡Muchas gracias por todo!

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde 1993 se realizaron algunas modificaciones al plan y programa de estudio de educación básica. A pesar de los cambios curriculares (que van encaminados a que el alumno no tenga que aprender demasiados temas en poco tiempo o que se le presenten en orden más conveniente) y de las modificaciones al método de enseñanza del profesor, así como a los libros de texto (que van encaminados a un proceso de aprendizaje mejor), hay todavía algunos contenidos de matemáticas que siguen siendo un problema tanto para los alumnos como para los maestros. Uno de estos contenidos corresponde al estudio de las fracciones.

De tercero a sexto grado de primaria se estudian varios significados de las fracciones, como son: las fracciones en el reparto, en la medición, en los decimales, las fracciones como operadores multiplicativos y como resultado de una división.

Sin embargo, el concepto de fracción puede ser abordado desde otras perspectivas que ayuden a ampliar los contextos en lo que el número racional adquiere significado.

En este trabajo consideramos que una actividad realizada en computadora podría constituir una forma interesante de trabajar el tema de las fracciones, si ésta es diseñada con ciertas características. Se hizo la revisión de los distintos significados de la fracción que se trabajan en la primaria y se desarrolló un juego interactivo sobre fracciones para "Matechavos"* con el fin de evaluarlo en forma directa con los niños.

* "Matechavos" es una de las secciones de PUEMAC (Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, http://puemac.matem.unam.mx) desarrollado por el Instituto de Matemáticas y Computo para Niños de DGSCA, ambas instituciones de la UNAM. PUEMAC está bajo la coordinación de la M. en C. Mónica Leñero Padierna.

"A romper globos"** simula un juego de feria en donde se rompen globos con dardos. Los globos aparecen aleatoriamente en una recta que mide una o dos unidades. Los niños tienen que calcular las fracciones en donde están los globos para lanzar los dardos y romperlos. El juego tiene tres niveles de dificultad que están determinados por: el número de unidades que mide la recta donde aparecen los globos y las fracciones que pueden ser utilizadas para romperlos.

Si al lanzar el niño un dardo rompe un globo, se le proporciona una validación visual de que su resultado fue correcto. Si falla al lanzar un dardo, sabe que no atinó a romper el globo, pues el dardo lanzado queda clavado indicando la fracción que éste representa. Esto puede servir como una orientación para saber en qué fracción se deberán lanzar los siguientes dardos.

La presente tesis tiene como un propósito estudiar la forma en que los niños resuelven el juego "A romper globos" y qué ventajas proporcionaría a la enseñanza de las fracciones. Las bases que tendremos para esto son señalar las diferentes interpretaciones y características de las fracciones, las características de la enseñanza de las fracciones según el sistema de enseñanza de las matemáticas en educación básica y una generalización de situaciones didácticas que trabajan los niños de primaria para el estudio de este tema.

En el primer capítulo se presentan algunas interpretaciones y características de los números racionales, que se deben tener presentes en todo momento, al mismo tiempo se resaltan algunos errores en la enseñanza de los números racionales.

En el segundo capítulo, se toma como marco global la enseñanza de las matemáticas en la educación básica que se fundamenta en tres elementos importantes: las situaciones didácticas, el enfoque didáctico y el papel del

** Idea original: David Block Sevilla y Patricia Martínez Falcón; Programación: Gildardo Bautista García Cano; Diseño: Cecilia Soto Ruíz.

maestro, los cuales constituyen el modelo actual de enseñanza de las matemáticas dentro de las escuelas primarias.

En el tercer capítulo se muestran situaciones didácticas que se trabajan en la educación primaria, para el estudio de distintos significados de las fracciones. Para tal estudio se usan distintos materiales de trabajo: libro de matemáticas, el libro del maestro y ficheros, los cuales también se mencionan en ese capítulo.

En el cuarto capítulo se presentan y analizan los resultados de la experimentación de la nueva situación didáctica "A romper globos", en la cual se ponen en juego varias características de las fracciones como son: ubicación de una fracción en la recta, fracciones equivalentes, comparación de fracciones, fracciones propias e impropias, entre otras. Tal experimentación se aplicó a 10 niños de sexto grado de primaria, y a pesar de que la muestra puede ser considerada pequeña los resultados que se obtuvieron no son ajenos a la realidad, estos resultados además de poner en evidencia algunos problemas con el concepto de fracción en los niños, también muestran que jugar "A romper globos" enriquece y fortalece en los niños el significado de fracción.

Este trabajo se presentó en el XXXIII Congreso Nacional de Matemáticas y en el XX Simposio Internacional de Computación en la Educación, ante una audiencia de maestros de primaria y secundaria, así como pedagogos y matemáticos interesados en el tema. Las preguntas formuladas por el público en general se contestaron satisfactoriamente y las críticas fueron favorables hacia el presente trabajo.

CAPÍTULO 1. LA FRACCIÓN: UNA EXPRESIÓN DIFÍCIL DE INTERPRETAR.

La fracción es un concepto que, para los niños, implica más dificultades de las que comúnmente suponemos, por lo que la enseñanza de ésta preocupa no sólo a los maestros sino también a los investigadores y ha sido objeto de estudio desde los setentas.

Las investigaciones del proceso de aprendizaje del niño en el tema de fracciones inician desde los pocos conocimientos previos que adquieren cuando empiezan a estudiar este tema en la escuela, hasta el conocimiento de caracter algebraico del conjunto de los números racionales (Block, 2001; Dávila, 1991; Vergnaud, 1991; Mancera, 1991; Brousseau, 1982). El aprendizaje de las propiedades de los números racionales requiere del estudio de diversos contextos relacionados con cada una de sus interpretaciones y características, para que el alumno pueda comprender éstas por separado hasta llegar a una comprensión global abstracta de los números racionales. Por lo tanto, las interpretaciones y características de los números racionales se deben tener muy presentes para poder comprender los problemas en la enseñanza de las fracciones, así como para pensar en nuevas situaciones de enseñanza. En este capítulo mencionaremos en primer lugar las interpretaciones de la fracción y después sus características.

1.1 INTERPRETACIONES DE LA FRACCIÓN

1.1.1 LA FRACCIÓN COMO COCIENTE

El resultado de sumar o multiplicar dos números naturales es un número natural; pero la solución de restar o dividir dos números naturales, no siempre es un número natural. Pero el resultado de restar $a-b$ pertenezca a los números naturales ($\mathbb{N}$) "a debe ser mayor que b", por ejemplo 15 – 8. Para que el resultado de dividir a entre b pertenezca a los números naturales "a debe ser múltiplo de b en donde a y b pertenecen a los números naturales" (ver apéndice).

En el caso de los números enteros ($\mathbb{Z}$) (que se generan a partir de los números naturales como $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})\cup\{0\}$, $\mathbb{N}$ pertenece a $\mathbb{Z}$), el resultado de restar dos números enteros es un número entero, pero el resultado al dividirlos no siempre es un número entero. Para que el resultado de una división entre dos números enteros (a y b) pertenezca a los números enteros, b debe ser distinto de cero y a debe ser múltiplo de b (por ejemplo a = 56 y b = 8), en donde a y b pertenecen a los números enteros.

Ahora, si al dividir dos números enteros (a y b) donde a no es múltiplo de b, el resultado pertenece a los números racionales, los cuales se generan a partir de los números enteros como:

$\mathbb{Q}=\frac{a}{b}$ tal que a,b pertenecen al conjunto de los números enteros y b es distinto de cero.

Donde $\mathbb{Z}$ pertenece a $\mathbb{Q}$ (ver apéndice).

En el caso de los números racionales el resultado que se obtiene al dividir dos números racionales es un número racional (Ver apéndice).

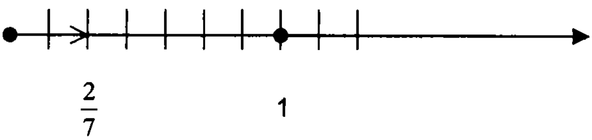
El uso de números enteros permite resolver problemas de restar que los números naturales no lo hacen; el uso de los números racionales permite resolver problemas de división que los números enteros no, en ellos cualquier ecuación multiplicativa $b \cdot x = a$ tiene solución como $x=\frac{a}{b}$ si b es distinto de cero.

En la escuela primaria usualmente se introduce el tema de fracciones de la siguiente manera:

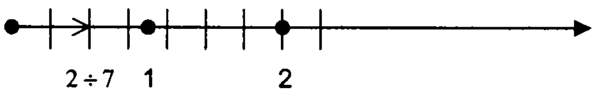
Ante la insuficiencia del uso de los números naturales para expresar las partes de un todo surge la invención de las fracciones. Las fracciones se ejemplifican a través del modelo de reparto (parte-todo), en donde se trata a las fracciones como *el cociente entre dos naturales expresado como* $x = \frac{a}{b}$ (a y b se definen como números naturales porque en la primaria no se enseñan los números negativos).

En esta definición se comete un grave error: Interpretar la fracción como el resultado de una división de números naturales. En la escuela se cae en el error de reducir el cociente a números decimales, por ejemplo al buscar una aproximación de $\frac{2}{7}$ con la notación decimal, se suele dividir 2 entre 7.

Sin embargo $\frac{2}{7}$ significa una unidad dividida en 7 partes de las cuales se toman 2.



En cambio $2 \div 7$ significa dos unidades que se dividen entre 7.



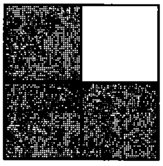
Es claro que $\frac{2}{7} = 2 \div 7$, pues representan al mismo número, pero $\frac{2}{7}$ implica que el alumno conozca el fraccionamiento de la unidad en 7 partes (los séptimos, en este caso). Al relacionar $\frac{2}{7}$ con $2 \div 7$ el niño no adquiere el conocimiento abstracto de $\frac{1}{n}$ como una enésima parte de un entero, pues se establece, en ciertas circunstancias y de manera no explícita, una equivalencia entre una séptima parte de dos enteros igual a dos séptimas partes de un entero $\frac{1}{7}(2) = \frac{2}{7}(1)$.

1.1.2 LA FRACCION COMO PARTE DE UNA FIGURA

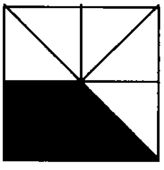
En términos generales, en la escuela se introduce el significado de la fracción como representación de un entero que se divide en "x" número de partes, de las cuales se toma siempre un número "y" menor a éste. Para tal interpretación se trabaja con ejercicios que consisten en iluminar una fracción dentro de un entero ya dividido. Los errores más frecuentes al resolver estos ejercicios en la escuela son que:

- *Los alumnos sólo se fijan en el número de partes (numerador) que deben iluminar, sin que para ellos tenga significado el número total de partes en el entero (denominador).* La fracción es percibida como una pareja de números naturales desvinculados, es decir, sin ninguna relación entre sí.

Ante la indicación, por ejemplo, de iluminar $\frac{3}{4}$ de un cuadrado dividido en cuartos, el alumno haría lo siguiente:



Sin embargo, ante la misma indicación en un cuadrado dividido en octavos la respuesta podría ser:



Esto es, por supuesto, incorrecto y evidencia el problema mencionado.

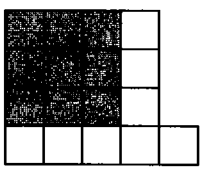
En este caso el entero está dividido en octavos, pero los alumnos no toman en cuenta este aspecto y marcan $\frac{3}{8}$ en vez de $\frac{6}{8}$.

Este error se hace evidente al complicar los ejercicios de este tipo, como en la segunda divisi6n del cuadrado, en octavos, donde el número de divisiones del entero es mayor que el denominador en la fracción.

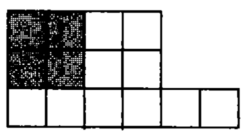
Para que el niño interprete ciertas fracciones en unidades con un número de divisiones mayor que el denominador, es necesario que maneje la equivalencia entre fracciones (la cual se menciona en el apartado 1.2.1).

- Los alumnos invierten los términos de la fracción cuando el numerador es mayor que el denominador. Por ejemplo, cuando se pide a los alumnos que representen gráficamente las fracciones $\frac{17}{9}$ y $\frac{14}{4}$ suelen hacer lo siguiente:

$\frac{17}{9}$



$\frac{14}{4}$



En este caso el numerador es mayor que el denominador y de acuerdo con la representación que dan de las fracciones, los alumnos demuestran que tienen dificultad para comprender que el todo repartido puede estar conformado por más de una unidad (más de *n* enésimos, más de 9 novenos para el caso de $\frac{17}{9}$), que es lo mismo que decir $\frac{m}{n}$ tal que *m* es mayor que *n*. Esto demuestra que los niños no tienen siquiera el conocimiento abstracto de $\frac{1}{n}$ como una enésima parte de "un entero" (para el caso $\frac{14}{4}$ no identifican a cada cuadrito de la figura como $\frac{1}{4}$), por lo que interpretan la fracción $\frac{17}{9}$ como $\frac{9}{17}$, es decir un entero que se divide en 17 partes de las cuales se toman 9. Hacen lo mismo con la fracción $\frac{14}{4}$ convirtiéndola en $\frac{4}{14}$.

1.1.3 LA FRACCION COMO DECIMAL.

La interpretación de la fracción como división, se utiliza para convertir la fracción a números decimales, en donde se consideran al numerador y al denominador como unidades que se dividen entre sí para obtener un número que representa la misma cantidad. Por ejemplo:

$$.75 = \frac{75}{100}$$

En este caso la explicación se limita a mostrar la forma en que se representa el decimal en forma de fracción. Si el número a representar es .7, se dice que éste es igual a $\frac{7}{10}$ porque el 7 ocupa el lugar de los décimos, o si el número a representar es .07, entonces es igual a $\frac{7}{100}$ porque el 7 ocupa el lugar de los centésimos y así sucesivamente.

Hasta aquí la explicación es correcta, pero al generalizar tal interpretación ocurren errores como afirmar que:

$$\frac{1}{3} = .33 = \frac{33}{100}$$

$\frac{1}{3}$ no es equivalente a ninguna fracción decimal, porque 3 no es divisor de ninguna potencia de 10. Esta fracción, $\frac{1}{3}$, sólo puede ser aproximada con fracciones decimales: 0.33 ó 0.333

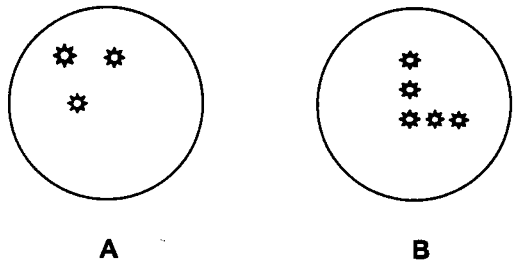
La generalización lleva a cometer errores como el anterior, generados por falta de un trabajo que lleve a los alumnos a diferenciar entre las fracciones decimales y las que no lo son.

1.1.4 LA FRACCIÓN COMO PROPORCIONALIDAD Y RAZÓN

Después de las interpretaciones de la fracción ya vistas podemos mencionar que las fracciones son usadas en situaciones de comparación de una "parte" a en relación con un "todo" b (parte-todo), pero otra interpretación de la fracción se presenta cuando la comparación consiste en relacionar una parte a con una parte b (o un todo a con un todo b), a la cual se le asigna el nombre de razón y se expresa como: *la razón entre a y b es* $\frac{a}{b}$ ó a:b. En esta interpretación de la fracción se relacionan multiplicativamente dos números y se expresa así una comparación entre ellas, es decir, las fracciones son utilizadas como un "índice comparativo" entre dos cantidades. Para este caso no existe una unidad (un todo) como se presenta en las demás interpretaciones de la fracción, por lo que la comparación puede ser bidireccional, es decir la comparación inversa de la razón entre a y b es la razón entre b y a, la cual se representa como $\frac{b}{a}$ ó b:a.

Ahora mencionaremos algunos ejemplos de esta interpretación:

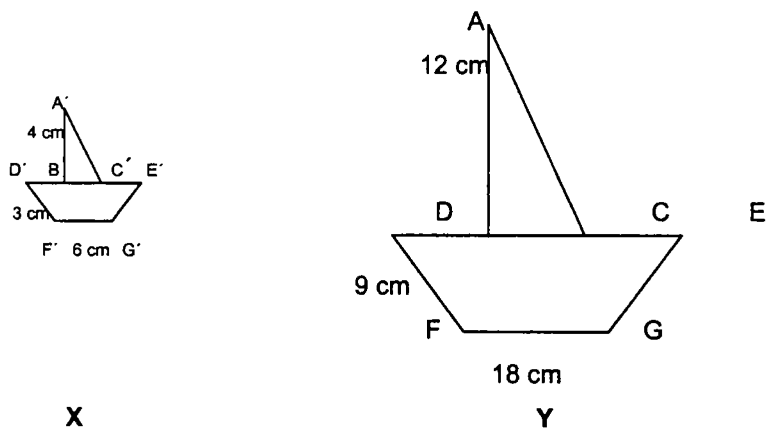
Ejemplo 1.-



La relación del conjunto A con respecto a B es de $\frac{3}{5}$: (3:5), esto es, por cada tres elementos que tiene el conjunto A, el conjunto B tiene 5 elementos.

La relación del conjunto B con respecto a A es de $\frac{5}{3}$: (5:3), esto es por cada 5 elementos que tiene el conjunto B, el conjunto A tiene 3 elementos.

Ejemplo 2.-



La relación del barco X con respecto al Y es de $\frac{1}{3}$: (1:3), esto es, el barco chico es 3 veces más pequeño que el grande.

La relación del barco Y con respecto al X es de $\frac{3}{1}$: (3:1), esto es, el barco grande es 3 veces más grande que el chico.

En esta interpretación el alumno puede ver la relación entre a y *b* pero no ve la fracción como un número, por lo que se repite el error que se mencionó anteriormente: *la fracción es percibida como una pareja de números desvinculados*, ya que a y *b* corresponden a distintas partes o conjuntos.

La "razón" es también definida como el cociente común en la relación entre magnitudes o coeficiente de proporcionalidad, un ejemplo lo tenemos al comparar longitudes, como en el caso de los barcos, en donde la razón entre ellos es de $\frac{1}{3}$ ó $\frac{3}{1}$ según sea la dirección de comparación. La proporcionalidad también se trabaja en esta interpretación de la fracción y se menciona en el apartado 1.2.3 en el caso de multiplicación.

En la escuela primaria se trabaja la razón en situaciones de proporcionalidad, por lo que en el capítulo 3 se abordan los ejercicios de razón y proporcionalidad al mismo tiempo.

1.2 CARACTERÍSTICAS DE LA FRACCIÓN

1.2.1 EQUIVALENCIA.

Una de las características de los números racionales es que existe equivalencia entre ellos; cuando dos números racionales son solución de la misma ecuación multiplicativa son equivalentes. Por ejemplo:

sea $bx = a$ una ecuación multiplicativa y su solución $x=\frac{a}{b}$.

$x = \frac{c}{d}$ es otra solución de la ecuación si y sólo si $b(\frac{c}{d}) = a$, y esto pasa si y sólo si $bc = ad$ (ya que d es distinto de cero y mayor que cero, porque d pertenece al conjunto de los números naturales), es decir $\frac{a}{b}$ equivale a $\frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = cb$.

Hay infinidad de fracciones que definen un mismo racional, ya que a partir de una fracción, por ejemplo $\frac{2}{4}$, se pueden multiplicar ambos términos (numerador y denominador) por un solo número, obteniendo fracciones equivalentes, por ejemplo $\frac{2}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{8}$, $\frac{2}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{20}$, etc. A este proceso se le denomina amplificación.

También existe otro procedimiento llamado simplificación (proceso inverso al de amplificación) que consiste en dividir entre un número distinto de cero ambos términos de la fracción. Por ejemplo, a partir de la fracción $\frac{30}{90}$ se pueden obtener las siguientes fracciones equivalentes aplicando la división en el numerador y el denominador: al dividirla entre 2 se obtiene $\frac{15}{45}$, entre 10 se obtiene $\frac{3}{9}$, entre 5 se obtiene $\frac{6}{18}$, entre 30 se obtiene $\frac{1}{3}$; etc.

Cabe señalar que existen fracciones con la propiedad de generar todas las fracciones equivalentes a ella por amplificación. Tales fracciones reciben el nombre de fracciones irreducibles, y tienen las siguientes características:

- El numerador es distinto de cero, el denominador es positivo y el divisor común mayor entre su numerador y denominador es 1 (numerador y denominador son primos relativos).
- El numerador es cero y el denominador es igual a 1.

Esta propiedad resulta cómoda pues permite elegir una fracción que represente a toda una familia de fracciones equivalentes y en particular a los enteros.
Podemos mencionar también que las familias de fracciones que representan los números enteros son las fracciones irreducibles de denominador 1.

Usando la notación anterior, los números enteros corresponden a las familias representadas por $\frac{a}{1}$ con a entero (Ver apéndice).

En la escuela, la experiencia con la equivalencia de fracciones se plantea a través de los procesos de amplificación y simplificación de una fracción, pero el niño no adquiere el significado de equivalencia.

El error que sobresale al trabajar la equivalencia de fracciones con los alumnos es que los alumnos ven a la fracción $\frac{a}{b}$ como dos números independientes uno del otro: a y b, y al buscar la equivalencia entre fracciones comparan a través de las propiedades de los números naturales (tales propiedades se anexan en el apéndice).

Este error sigue influyendo en que los alumnos, además de creer que las fracciones son sólo una división de números naturales, tengan una mala visión de equivalencia, y agregaremos, una mala visión de orden (tal objeto <<orden>> se menciona en el siguiente apartado 1.2.2), pues este error es más evidente al trabajar con el orden de los números racionales.

Para que el niño comprenda el significado de equivalencia de fracciones, además de usar la amplificación y simplificación, también podría realizar actividades sobre una recta o un pastel. En el capítulo 3 veremos cómo se propone a los niños de educación básica trabajar con la equivalencia de fracciones.

1.2.2 ORDEN DE FRACCIONES.

Por medio de la adición de números racionales positivos es posible decidir, dados dos números racionales distintos, cuál es el mayor. Diremos que un número racional r_1 es mayor que un número racional r_2 ($r_1>r_2$) si existe un número racional positivo r_3 tal que $r_1 = r_2 + r_3$; también podemos decir que r_2 es menor que r_1.

Se puede decir que dados dos números racionales $r_1=\frac{a}{b}$ y $r_2=\frac{c}{d}$, para el caso particular que se estudia en la primara, fracciones con denominadores positivos, se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

1) $\mathbf{r_1 = r_2}$, si y solo si $r_1 = r_2 + 0$, esto pasa si y sólo si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ sí y sólo sí $ad = cb$ *(esto multiplicando la ecuación* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *por bd:* $\frac{a}{b}(bd)=\frac{c}{d}(bd)$)

2) $\mathbf{r_1 > r_2}$ si y sólo si $r_1 = r_2 + r_3$, es decir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{n_1}{n_2}$ sí y sólo sí

$ad = cb + \underbrace{\frac{n_1}{n_2}bd}_{\text{positivo}}$ si y sólo si $ad > cb$.

(esto multiplicando la ecuación $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} + \frac{n_1}{n_2}$ *por bd:*

$\frac{a}{b}(bd)=\frac{c}{d}(bd)+\frac{n_1}{n_2}(bd)$)

3) $\mathbf{r_1 < r_2}$ si y sólo si $r_1 + r_3 = r_2$ si y sólo si $\frac{a}{b}+ \frac{n_1}{n_2} = \frac{c}{d}$ esto pasa sí y sólo sí $ad + \underbrace{\frac{n_1}{n_2}bd}_{\text{positivo}} = cb$ si y sólo si $ad < cb$.

(esto multiplicando la ecuación $\frac{a}{b}+\frac{n_1}{n_2}=\frac{c}{d}$ *por bd:*
$\frac{a}{b}(bd)+\frac{n_1}{n_2}(bd)=\frac{c}{d}(bd)$)

Con base en lo anterior, resulta que la relación de orden entre los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se encuentra en la relación de orden entre ad y cb. Así que el orden en los números racionales no es aprendido de memoria como ocurre para ordenar los números naturales o el alfabeto. Pero en la enseñanza es difícil pedir al niño usar $r_1 = r_2 + r_3$ porque apenas está conociendo los números racionales, no se le puede pedir que suponga que existe r_3 que pertenece a los números racionales tal que $r_1 = r_2 + r_3$, además el niño al no tener una visión de los números racionales no se imagina que exista una relación de orden. De la misma forma ocurre con la notación "$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = cb$" para la comparación de fracciones ($\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > cb$), es difícil meter tal notación para la enseñanza del orden entre fracciones en la escuela primaria pues los alumnos no saben despejar coeficientes en las ecuaciones multiplicativas.

Al no contar el alumno con tales "herramientas", es incapaz de ordenar un par de fracciones, lo que hace evidente, una vez más, el error que ya anteriormente se ha mencionado: Ven a la fracción $\frac{a}{b}$ como dos números independientes uno del otro, por lo tanto comparan las fracciones a través de las propiedades de los números naturales. Así que cuando se les solicita que realicen comparaciones entre fracciones, establecen las siguientes relaciones:

a) $\frac{3}{8}>\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{2}<\frac{7}{20}$

En el caso a) comparan los numeradores (el 3 con el 3) y los denominadores (el 8 con el 5); como los numeradores son iguales, centran su atención en los denominadores, dado que el 8 es mayor que 5, concluyen que $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{3}{5}$.

En el caso b), comparan de la misma manera resultando $\frac{1}{2}$ menor que $\frac{7}{20}$.

Una forma de corregir este tipo de error al ordenar fracciones podría ser usar como herramienta de comprobación la representación de las fracciones, en una recta o en pasteles, como se mencionó en la equivalencia de fracciones. En el capítulo 3 veremos cuáles son los ejercicios que se proponen al alumno de educación básica para aprender el orden entre fracciones.

Cabe mencionar, que al ordenar los números racionales se descubre la propiedad de la "densidad" de éstos, la cual significa que: dados dos números racionales cualesquiera, siempre existe otro número racional entre ambos. Por lo que se puede decir que no existe el "siguiente de" un número racional. Tal afirmación podemos comprobarla así:

Dados dos números racionales distintos, $\alpha > \beta$ siempre existe otro número racional γ tal que $\alpha > \gamma > \beta$

Para ello, si $\alpha = \frac{a}{b}$ y $\beta = \frac{c}{d}$, con b y d positivos distintos de cero, basta con tomar

$$\gamma = \frac{a+c}{b+d}$$

Así pues, entre cualesquiera dos números racionales siempre está la semisuma (o promedio) de ambos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso. Tal propiedad no ocurre para el conjunto de los números naturales.

1.2.3 OPERACIONES CON FRACCIONES.

En los números racionales se definen las operaciones de suma, resta, producto y división, donde el resultado en estas operaciones de cualesquiera dos números racionales es un número racional (tal afirmación de formaliza en el apéndice):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

En el aprendizaje de las operaciones con fracciones en la escuela primaria, se encuentra frecuentemente el error de seguir trasladando a los números racionales las mismas reglas aplicables a los números naturales, por ejemplo, los niños resuelven la suma de fracciones sumando por separado numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3+3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$$

La forma correcta de resolver la suma o resta de dos fracciones con igual denominador, es sumando sólo los numeradores. Para resolver la suma o resta de dos fracciones con diferente denominador, se debe obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores para convertir las fracciones en juego a fracciones equivalentes siendo ahora el mínimo común múltiplo obtenido el denominador (en el apéndice se muestra formalmente la solución de sumas y restas de fracciones).

Una de las consecuencias de trasladar las propiedades de los números naturales a las fracciones, es la de esperar ciertas magnitudes en los resultados. Por ejemplo, al multiplicar dos números naturales, el producto siempre es mayor que los factores. Con las fracciones no siempre sucede así, pues el producto de $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ a veces es menor que los factores, por ejemplo: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

En cuanto a la división, con los números naturales el resultado que se obtiene siempre es menor o igual que el dividendo. Al trasladar esta regla a las fracciones los alumnos piensan que el cociente es menor que el dividendo, lo cual tampoco sucede siempre, por ejemplo: $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

En general, las operaciones de multiplicación y división se usan para resolver dos tipos de problemas:

- Aquellos en los que se multiplican dos medidas.
- Y en los que se establece una relación de proporcionalidad entre dos medidas.

Sin embargo, en la actualidad, en la escuela primaria sólo se trabaja la multiplicación de una fracción por un número natural, la cual se pone en práctica al representar la suma de fracciones iguales, que también se puede resolver multiplicando la fracción por el número de veces que se suma la fracción (número natural por la fracción). Esta operación está envuelta en los problemas en los que se establece una relación de proporcionalidad entre dos medidas, en la cual cada uno de los factores de la multiplicación juega un papel distinto, uno es la medida base (multiplicando) y el otro indica el número de veces que se considera esa medida. Por ejemplo:

El lado a de una figura mide $\frac{3}{4}$ de centímetro. Si se hace una copia cuyos lados sean cinco veces los de la original, ¿cuánto medirá el lado a de la copia? Este problema se resuelve con la multiplicación 5 x $\frac{3}{4}$ donde $\frac{3}{4}$ representa una medida. Es el multiplicando. El 5 indica el número de veces que se considera esa *medida. La multiplicación que se obtiene es bastante sencilla debido a que se puede interpretar como una suma repetida; 5 veces $\frac{3}{4}$ es igual a $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$*

En este caso, el producto de un número natural por una fracción se resuelve con las propiedades de los números naturales en la multiplicación. Pero tal traslación de propiedades, no es del todo válida, ya que responde a situaciones completamente diferentes, pues cuando el multiplicador es una fracción se obtiene un problema que encierra nuevas dificultades. Por ejemplo: el lado de una figura mide 5 cm. Si se hace una copia cuyos lados sean $\frac{3}{4}$ de la figura original, ¿cuánto medirá ese lado?

Este caso da lugar al significado de las fracciones como operadores multiplicativos, que se presenta en problemas con expresiones como "$\frac{6}{2}$ de 12 kilómetros", ó "$\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros" y se resuelven con la multiplicación.

Una razón que dificulta asociar las expresiones anteriores con multiplicaciones es que no solemos decir "$\frac{3}{4}$ veces 12 kilómetros", esta expresión implica una multiplicación, en cambio la expresión que se usa es "$\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros", la cual podría sugerir una resta, y no una multiplicación, pues se podría interpretar como que de los 12 kilómetros sólo recorrería $\frac{3}{4}$ de los 12 kilómetro. Además, cuando una fracción juega el papel de operador multiplicativo, la multiplicación ya no puede interpretarse como una suma repetida, como se hacía con los números naturales.

La multiplicación de $\frac{3}{4}$ x 12 kilómetros, interpretada como $\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros, se puede calcular dividiendo 12 entre cuatro y multiplicando lo que resulte por tres: $(12 \div 4)x3 = 9$

Es decir, aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una cantidad, equivale a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad.

La fracción como operador multiplicativo no es fácil de enseñar en contextos significativos, por lo que en los mismos libros de texto del maestro se destaca que no es conveniente formalizar desde el principio las expresiones del tipo "$\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros" como multiplicaciones de fracciones. Deben plantearse en cambio variadas situaciones en las que las fracciones se alternen con los números naturales en el papel de operadores multiplicativos. En el capítulo 3 se muestran algunas situaciones planteadas a alumnos de educación básica en relación con este significado.

En este apartado enumeramos los errores que los alumnos cometen al trabajar operaciones con fracciones, una buena idea a proponer, para que los alumnos no cometan los errores ya mencionados o no olviden las características de los números racionales, es usar como herramienta la representación de los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en la recta y posteriormente el resultado de la operación entre ellos.

En este capitulo se han mostrado algunas de las interpretaciones y características de las fracciones que se trabajan en la escuela primaria. En el capítulo 3 mostraremos algunos ejemplos de lecciones en donde se abordan estas interpretaciones. Además, hemos considerado la conveniencia de visualizar las características: orden y equivalencia, en una recta, al mismo el alumno adquiera el conocimiento abstracto de éstas. Tal propuesta ha sido trabajada con 10 niños de sexto de primaria por medio del diseño de la situación didáctica "A romper globos", que se presentará en el cuarto capítulo así como las observaciones de los resultados obtenidos.

En el siguiente capítulo se presentará la propuesta de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria que sustenta el plan y programa de estudio vigente en la educación básica, y que sustenta el diseño de la situación "A romper globos", objeto de estudio de esta tesis.

CAPÍTULO 2. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se ha basado en que el alumno aplique un modelo de solución a un problema diseñado por el maestro o los libros de texto. Con este mecanismo, el proceso de enseñanza no permite la búsqueda y construcción de soluciones o aprendizaje nuevo, sino que se limita a situaciones en las que se aplica un conocimiento que ya se posee.

Por otra parte, en la enseñanza de las matemáticas existen las situaciones didácticas, el enfoque didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje y el rol que juega el maestro. En el desarrollo del presente capítulo se pretende explicar cómo estos tres elementos conforman el mecanismo didáctico de las matemáticas que se sigue en la escuela primaria.

2.1 LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas es la situación didáctica, definida por Brousseau (1982) como "un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución" (Parra, C. e I. Saíz (1994) Pág. 42).

Uno de los propósitos de la didáctica de las matemáticas es analizar las características de una situación para la enseñanza de un concepto específico, la manera como evolucionan los conocimientos los alumnos y las variantes que se pueden generar para profundizar en dicho conocimiento

Las características que facilitan el análisis de las situaciones didácticas, definidas por Gálvez (1985), son:

- "Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción de los alumnos con el medio físico. Los alumnos interactúan con el medio físico, toman decisiones para organizar su actividad de resolución del problema planteado" (Idem, Pág. 43). Así los alumnos tienen la oportunidad de usar sus conocimientos previos a partir de las características del problema.

  Por ejemplo, para resolver un problema de reparto (12 galletas entre 3 niños) puede haber diferentes procedimientos: dibujar las doce galletas y los 3 niños para relacionarlos, hacer el reparto uno a uno; hacer una suma iterada del reparto (3+3+3+3); encontrar un número que multiplicado por 3 da 12.

- "Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar" (Ibídem). En esta situación el alumno expresará el resultado que obtuvo frente a un problema después de la situación de acción que llevó a cabo.

  Aquí se trata de que los niños expliquen lo más claramente posible el proceso que llevaron a cabo. Esto implica reconstruir su estrategia para comunicarla a los demás.

- "Las situaciones de validación, en donde se trata de convencer a los interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones" (Ibídem). El alumno no sólo expresará el resultado que obtuvo, sino que además expresará el procedimiento utilizado con el fin de convencer a sus compañeros que sus resultados son correctos.

Este es un proceso que se da colectivamente. Se presentan los diferentes procedimientos y los niños comentan cual les pareció más claro, más rápido, más económico. El profesor ayuda a validar algunos procedimientos más que otros, porque se trata de que los niños evolucionen sus conocimientos. Así pues, en un primer momento el profesor puede aceptar que los niños interpreten por medio de dibujos su respuesta (si en el caso de reparto resolvieron el problema dibujando las galletas y los niños), pero después puede favorecer otro método (por ejemplo la suma iterada y la multiplicación) y pedir a los niños que lo usen en otros problemas. En conclusión se pueden restringir los procedimientos, hasta que los alumnos descubren que el algoritmo usual es el más creativo.

- "Las situaciones de institucionalización tienen la intención de que los alumnos asuman el significado, socialmente establecidas de un conocimiento que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y validación". En todo momento el docente debe llevar el control de las situaciones, pero es en esta situación de manera muy especial en donde el docente interviene para darle peso a uno de los procedimientos sobre los demás que usaron los alumnos para resolver la situación que se les planteó. De esta forma el docente hace ver que lo que el alumno aprendió es un conocimiento específico.

Este proceso se da de manera colectiva. El maestro es el encargado de favorecer uno de los procedimientos. En el caso de la división se propone favorecer la multiplicación en un primer momento y después el algoritmo de la división. Al maestro le toca decir en distintos momentos que lo que están haciendo los niños es dividir aunque usen la multiplicación.

El análisis de una situación se lleva a cabo a partir de identificar las variables didácticas que pueden utilizarse para trabajar un concepto de matemáticas. Dichas variables son determinantes para propiciar la aparición o evolución del conocimiento que se quiere enseñar e influyen en los procedimientos que los niños pondrán en juego en la solución de problemas.

Por ejemplo, al enseñar la división, los niños generan procedimientos elementales como dibujar lo que se va a repartir y hacer el reparto uno a uno.

La variable numérica (cantidad a repartir) puede ser útil para invalidar este procedimiento y favorecer que los niños construyan otra estrategia, por ejemplo la suma iterada, después la multiplicación y al final del proceso el algoritmo usual. (Martínez, P. 1997).

De esta manera se trata de que los niños construyan el significado de la división de distintas formas.

En relación con lo anterior G. Brousseau (1982) dice que: "El sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática y no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, y de formulaciones que retoma" (Op. Cit., Pág. 52).

Uno de los principales problemas en la enseñanza de las matemáticas es el manejo del lenguaje matemático ó el desconocimiento de su significado. Los estudios en didáctica de las matemáticas con orientación constructivista plantean una relación distinta: "Los conocimientos matemáticos en esencia son herramientas que se crean y evolucionan frente a la necesidad de resolver ciertos problemas" (Block, D. (1996) Pág. 22).

Esto quiere decir que los problemas son los que les han dado origen y sentido a las matemáticas. Por medio de resolver problemas se logra uno de los objetivos esenciales de la enseñanza de las matemáticas: que el conocimiento matemático tenga significado para los niños a partir de enseñarles con situaciones contextualizadas y significativas para ellos.

Una manera de superar la complejidad de la enseñanza de las matemáticas es dar mayor importancia a los problemas que pueden ser resueltos por diversos procedimientos. Se piensa que esto ya se hace en la enseñanza a través de los problemas propuestos para tal fin. Lamentablemente no es así, ya que los problemas siguen planteándose después de enseñar el contenido matemático, es decir, el contenido se enseña sin problemas que le den sentido. Además, los alumnos tienden a buscar palabras claves dentro de ellos que les indiquen cómo resolverlos (por ejemplo, al leer el problema: *Juanita repartió 10 galletas*, se asume un problema de división), provocando sólo la ejercitación de los algoritmos aprendidos sin existir un razonamiento.

2.2 EL ENFOQUE DIDÁCTICO DE LAS MATEMÁTICAS

Uno de los objetivos del plan y programas de estudio de educàción primaria es estimular las habilidades que son necesarias en el proceso enseñanza-aprendizaje de manera permanente, por esta razón, se ha intentado que en todo momento la adquisición de los conocimientos esté asociada con el ejercicio de las habilidades intelectuales y del razonamiento. Con ello "se pretende superar la antigua disyuntiva que se daba entre la enseñanza informativa o enseñanza formativa, bajo la tesis de que no existe una sólida adquisición de conocimientos sin que exista la reflexión sobre su sentido, así como tampoco es posible que se desarrollen las habilidades intelectuales si éstas no se ejercen con relación a los conocimientos fundamentales"
(Portal S.E.P. (2003) www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_112_introducción).

A la escuela primaria se asignan múltiples tareas. No sólo se espera que se enseñen conocimientos, sino también que se realicen otras complejas funciones sociales y culturales. Ante esas demandas, es indispensable aplicar criterios selectivos y establecer prioridades, bajo el principio de que la escuela debe asegurar en primer lugar el dominio de la lectura y la escritura, la formación matemática elemental y la destreza en la selección y el uso de la información.

Además, se establece que a la enseñanza de las matemáticas se le dedique una cuarta parte del tiempo de trabajo escolar a lo largo de los seis grados que conforman la educación primaria.

El enfoque adoptado para la enseñanza de las matemáticas le da énfasis a la formación de habilidades para resolver problemas y desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas.

Este enfoque implica cambios como eliminar el contenido de las nociones de lógica de conjuntos y organizar la enseñanza con base en las siguientes líneas temáticas: los números, sus relaciones y las operaciones que se realizan con ellos; la medición, la geometría, los procesos de cambio, el tratamiento de información y el trabajo sobre predicción y azar.

Específicamente, en los programas de estudio se propone desarrollar de:

- La capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.
- La capacidad de anticipar y verificar resultados.
- La capacidad de comunicar e interpretar información matemática.
- La imaginación espacial.
- La habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones.
- La destreza en el uso de algunos instrumentos de medición, dibujo y cálculo.
- El pensamiento abstracto a través de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

  (Portal S.E.P. (2003) www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_121_matematicas).

Se considera que estos propósitos pueden lograrse al diseñar situaciones didácticas lo suficientemente amplias e interesantes para que los alumnos pongan en juego los conocimientos previos que tienen y aprendan nuevos.

Desde hace muchos años los investigadores han buscado en la historia de la enseñanza de las matemáticas el por qué del alto número de fracasos en las matemáticas, éstos coinciden en que probablemente la causa más importante radica en la separación entre el contenido matemático escolar y los problemas que logran resolver los alumnos con éste.

2.3 EL PAPEL DEL MAESTRO EN LA ENSEÑANZA

En el enfoque constructivista propicia que el profesor tenga un papel de guía en el proceso de aprendizaje. Así pues toca al profesor establecer las condiciones favorables para la enseñanza:

1) Plantear actividades y problema que se presenten de formas diversas: con material concreto, con tablas, con gráficos, con texto, entre otros, de tal manera que se propicie el uso de distintos recursos para encontrar la solución.
2) Usar situaciones problemáticas que den lugar a diferentes procedimientos. Se trata de favorecer que los niños usen distintos recursos para resolver un problema antes de usar el algoritmo usual.
3) Proponer actividades en las que se propicie hacer estimaciones y cálculos mentales antes de resolver un problema. Esta tarea les ayuda a ubicar el resultado en un rango y a encontrar errores si el resultado que obtienen esta fuera del rango de las estimaciones.
4) Favorecer el trabajo en equipo para que los alumnos encuentren juntos el resultado de un problema o intercambien sus estrategias.
5) Provocar una confrontación colectiva de resultados donde los alumnos muestren las distintas manera como encontraron el resultado a un problema.
6) Pedir en algún momento que traten de usar ciertos procedimientos, con el fin de que los niños abandonen procedimientos poco sistemáticos.

Al plantearse un problema en la escuela primaria deberán considerarse tres funciones fundamentales que son:

1ª. Un problema se plantea con el fin de motivar nuevos aprendizajes y habilidades. Por ejemplo, si los alumnos de sexto grado ya resuelven problemas de suma y resta de fracciones con igual denominador, el profesor puede plantearles un problema de suma de fracciones con diferente denominador, pero sin exigir alguna forma en particular para resolverlo; por el contrario, el profesor deberá promover que los alumnos busquen y desarrollen diferentes estrategias de solución, y que representen gráficamente la respuesta y los procedimientos utilizados.

Es muy importante, al presentar o redactar un problema, que el maestro tenga muy claro cuál es el objetivo que se persigue. Por otro lado, el profesor debe asegurar que el problema:

- Responda a una necesidad o interés del niño.
- Despierte el interés de búsqueda para resolverlo.
- Se utilicen conceptos matemáticos para resolverlo.
- Pueda expresarse en algún tipo de lenguaje (aritmético, geométrico, gráfico, entre otros) y si es posible se traduzca de uno a otro.
- Su grado de dificultad no sea tan grande como para desanimar a los alumnos.
- Permita al niño tener la libertad de elegir distintas alternativas de acción para resolver el problema (S.E.P. (1998) Libro para el maestro. Págs. 13 y 14).

2ª. Interpretación del enunciado de un problema. Esta situación se presenta con la intervención del maestro, pues él junto con los alumnos debe analizar el problema a resolver, estudiando los elementos implicados en él.

3ª. Comunicación y validación de los procedimientos y de los resultados. Cuando los alumnos llegan a la solución de un problema, probablemente sólo les interesa comunicar el resultado y saber si es el correcto o no.

El maestro debe motivar a los alumnos para que expliquen el método que utilizaron y, además, que escuchen y reflexionen sobre los razonamientos expresados por otros compañeros para mejorar sus procedimientos.

Explicar los procedimientos empleados permite al alumno que él sea quien convenza a los otros compañeros de su validez, sin tener que esperar que el maestro apruebe sus resultados. Esto contribuye a fortalecer la seguridad del alumno.

El maestro también deberá tener en cuenta que no todas las respuestas serán correctas. Por lo tanto, es necesario analizar los procedimientos que llevan a una solución así como los procedimientos que no la encontraron o los que no concluyen. Esta tarea es de naturaleza formativa, pone en claro el origen del error, lo cual es útil pues de esta manera el alumno sabrá el por qué con determinados procedimientos no es posible resolver el problema.

Eso se puede lograr si el maestro crea un clima para que los niños expliquen la lógica de sus estrategias e identifiquen sus errores y los corrijan. Este proceso puede ayudar mucho a disminuir la frustración que genera el no resolver correctamente un problema matemático.

Este panorama hace valorar los elementos vistos en este capítulo implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En el siguiente capítulo se presentarán <u>situaciones didácticas</u> que se manejan para la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria y que fueron generadas a partir de las características que se han mencionado a lo largo de este capítulo.

CAPÍTULO 3. SITUACIONES DIDÁCTICAS QUE SE MANEJAN EN LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA.

Las matemáticas en términos generales, permiten resolver problemas en diversos ámbitos, como el científico, el técnico, el artístico y la vida cotidiana. Todos los días las personas construyen conocimientos fuera de la escuela que les permiten hacer frente a dichos problemas y esos conocimientos no son suficientes para actuar eficazmente en la práctica diaria que se vive.

El éxito en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas depende, en buena medida, del diseño y aplicación de las actividades didácticas que promueven la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas y de la retroalimentación que se tenga con los otros sobre dicha disciplina. Es decir, el diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista sobre las matemáticas ayudan al proceso enseñanza-aprendizaje y a la construcción de conocimientos; así, tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro.

En esas actividades las matemáticas serán para el niño herramientas prácticas que le permitirán resolver las situaciones problemáticas que se le planteen.

Aunque la aplicación de todo lo anterior en la enseñanza de las matemáticas en educación primaria parezca la fórmula secreta para la comprensión de distintos conceptos matemáticos, aún no se cumple. Una muestra es que para la mayoría de los niños las matemáticas siguen siendo su "coco" y los docentes, en general, coinciden que la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina no es sencilla, sobre todo en algunos contenidos como las fracciones.

3.1 LAS FRACCIONES COMO CONTENIDO EN LA ESCUELA PRIMARIA

Como parte de los cambios de los planes y programas de trabajo en los contenidos del área de matemáticas, se aplazó la introducción de las fracciones hasta el tercer grado y la multiplicación y división con fracciones pasó a la secundaria.

Lo anterior se basa en la dificultad que tienen los niños para comprender las fracciones y sus operaciones en los grados que se proponían anteriormente. A cambio de ello, se propone un trabajo más intenso sobre los diferentes significados de la fracción, desde tercero a sexto grado.

La gran mayoría de profesores comparte la idea de que existen muchas dificultades para que los niños aprendan las fracciones, por lo que se aconseja la manipulación de diferentes objetos y formas circunstanciales para que, en los diferentes contextos, se pueda estructurar el concepto de fracción.

Sin embargo, al usar la estrategia mencionada, surge la paradoja de que siendo la riqueza de significados uno de los aspectos más relevantes de este tema, sea también causa de sus dificultades en el aprendizaje de los alumnos. Por ejemplo, un número concreto como $\frac{3}{4}$ (que equivale a 0.75 o al 75% o 750 g) puede ser interpretado de distintas formas, que tienen una aplicación directa en la vida cotidiana, aunque no todas las representaciones se prestan de igual forma para ilustrar todos los aspectos en los que surgen estos conceptos.

En la escuela las fracciones se presentan de tercero a sexto grado de primaria, de la siguiente manera:

Tercer grado

1. Introducción de la noción de fracción en casos sencillos (por ejemplo, medios, cuartos y octavos) mediante actividades de reparto y medición de longitudes.
2. Comparación de fracciones sencillas representadas con material concreto, para observar la equivalencia entre las fracciones.
3. Representación convencional de las fracciones.
4. Planteamiento y solución de problemas que impliquen suma de fracciones sencillas, mediante manipulación de material.

5. Solución de problemas sencillos que impliquen la medición de longitudes utilizando el medio metro y el cuarto de metro.
6. Medición del peso y la capacidad utilizando el kilo, el medio kilo, el cuarto de kilo, el litro, el medio litro y el cuarto de litro.

Cuarto grado

1. Fraccionamiento de longitudes para introducir nuevas fracciones (por ejemplo tercios, quintos y sextos)
2. Diversos recursos para encontrar la equivalencia entre algunas fracciones.
3. Fracciones con denominador 10, 100 y 1000
4. Comparación de fracciones manteniendo constante el numerador o el denominador.
5. Ubicación de fracciones en la recta numérica.
6. Planteamiento y solución de problemas que impliquen suma y resta de fracciones con denominadores iguales.
7. Algoritmo convencional de la suma y la resta de fracciones con igual denominador.
8. Procesos de cambio. Problemas sencillos que introduzcan al alumno a la elaboración de tablas de variación proporcional.

Quinto grado.

1. Fraccionamiento de longitudes para introducir nuevas fracciones (por ejemplo séptimos y novenos)
2. Uso de diversos recursos para mostrar la equivalencia de algunas fracciones.
3. Planteamiento y solución de problemas con fracciones cuyos denominadores sean 10, 100 y 1000.
4. Actividades para introducir las fracciones mixtas.
5. Ubicación de fracciones en la recta numérica.

6. Planteamiento y solución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores iguales y diferentes, mediante la equivalencia de fracciones.
7. Algoritmo de la suma y de la resta de fracciones utilizando equivalencias.
8. Empleo de la fracción como razón y como división, en situaciones sencillas.
9. Cálculo de porcentajes mediante diversos procedimientos.
10. Construcción de figuras a escala (casos sencillos).
11. Procesos de cambio.
    - Elaboración de tablas de variación proporcional y no proporcional para resolver problemas.
    - Relaciones entre los datos de una tabla de proporcionalidad directa.
    - Elaboración de gráficas de variación proporcional y no proporcional.
    - Planteamiento y solución de problemas de porcentaje.

Sexto grado.

1. Ubicación de fracciones en la recta numérica.
2. Equivalencia y orden entre las fracciones.
3. Planteamiento y solución de problemas de suma y resta de fracciones mixtas.
4. Conversión de fracciones mixtas a impropias y viceversa.
5. Simplificación de fracciones.
6. Planteamiento y solución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores distintos mediante el cálculo del denominador común.
7. Procesos de cambio.
    - Planteamiento y solución de problemas que impliquen la elaboración de tablas y gráficas de variación proporcional y no proporcional.

- Análisis de las tendencias en tablas de variación proporcional y no proporcional.
- Relación entre situaciones de variación y las tablas y gráficas correspondientes.
- El valor unitario como procedimiento para resolver ciertos problemas de proporcionalidad.
- Los productos cruzados como método para comprobar si hay o no proporcionalidad.
- Planteamiento y solución de problemas de porcentaje.

En la enseñanza de las matemáticas en educación primaria, para que el alumno tenga la capacidad de relacionar la adquisición del concepto de fracción y desarrollar las habilidades para interpretar y utilizar su lenguaje formal, es necesario introducirlo en diferentes significados de las fracciones a partir de situaciones didácticas con material de enseñanza actualizado.

Los materiales de trabajo

En la enseñanza de las matemáticas en educación básica existen diversos materiales que sirven de apoyo en la exposición del tema de las fracciones: el libro de texto (material que se entrega a los alumnos al iniciar el ciclo escolar), el libro del maestro, el avance programático y el fichero de actividades.

Libro de texto

Es una herramienta de trabajo para el niño, que tiene como función principal apoyar la construcción de conocimientos propuesto por cada lección del libro por medio del descubrimiento, la reflexión y la interacción con el material, sus compañeros y maestros. Éste también ayuda al maestro en la planeación de la clase próxima inmediata al brindarle ejercicios listos y a la mano que pueden utilizar en cualquier momento.

Libro del maestro

Es un recurso práctico que sirve al maestro para apoyar el trabajo en el salón de clases, en el que se explica el enfoque sobre el que descansa el libro de texto y la metodología que se considera adecuada para realizar las diversas actividades del programa de estudio.

Avance programático

Es un recurso que auxilia al maestro a plantear y organizar una secuencia de actividades que permiten controlar las lecciones de los libros de texto y las fichas de actividades, destacando en cada caso los contenidos que se están trabajando.

Fichero de actividades

El fichero contiene, como su nombre lo indica, una serie de fichas con actividades didácticas que sirven para trabajar los diversos contenidos de matemáticas. La mayoría de estas actividades pueden ser planteadas antes de impartir ciertas lecciones del libro de texto y otras presentarse de manera indistinta.

El presente capítulo tiene como fin el análisis de los libros de texto y los ficheros de actividades, ya que dicho material constituye el principal apoyo del maestro para que los alumnos aprendan matemáticas.

Las actividades que se plantean en los ficheros tienen gran relación con los ejercicios presentados en los libros.

Es factible que primero se trabajen los contenidos con material concreto y después con el libro de texto, ya que al realizar previamente las actividades con este material, se permite al alumno comprender y resolver los ejercicios del libro con mayor facilidad. También hay que señalar que con una misma ficha se puede trabajar en distintas ocasiones, con el fin de que los alumnos mejoren las estrategias para resolver los problemas.

En las fichas se pueden identificar de manera práctica los elementos que la forman, como son: objetivo, material, eje temático, organización del grupo y las diversas versiones de la actividad.

En los ficheros de actividades didácticas y en los libros de lecciones de matemáticas (desde tercero hasta sexto grado), se hace uso de las fracciones para cuantificar resultados de medición y se trabajan usando distintos segmentos como unidad de medida, que puede ser arbitraria y convencional para medir distancia, tiempo, volumen, área, masa. Como segmentos de unidad de medida arbitraria en las situaciones didácticas se usan: galletas, barras de chocolate, una tira de papel, el tamaño de un terreno. Como unidades convencionales se usan el litro, la hora, el metro y el kilogramo, por mencionar algunos.

A continuación proporcionaré algunos ejemplos de lecciones y de fichas de trabajo sobre las diferentes actividades que se trabajan con fracciones en la escuela primaria.

3.1.1 LAS FRACCIONES EN EL REPARTO

El reparto está inmerso en numerosas situaciones. Los niños se inician en esta actividad fuera de la escuela, ya que desde pequeños realizan repartos de frutas y dulces asignando un nombre y un significado a los resultados de sus repartos.

En las actividades que se usan las fracciones con este significado existen dos formas de hacer un reparto: de manera equitativa o de manera exhaustiva, es decir, controlando que todas las partes sean iguales o que además de ser iguales no sobre nada de lo que se reparte.

Existen numerosas actividades que se tratan en los libros de texto, relacionadas con las dos maneras de realizar el reparto, considerando distintas variables como son:

- Cantidades discretas (por ejemplo una cantidad de personas, de sillas, de dinero, entre otras).

- Cantidades continuas (por ejemplo superficie, peso, capacidad).
- Cantidades menores o mayores que un entero. Considerando que el "todo" que se reparte está formado a veces por un sólo elemento y a veces por varios.

A partir de tercero en la ficha "Repartos I" (Tercer grado, ficha 4, bloque I) se realizan, en primer lugar, actividades de medición en las situaciones de reparto. La primera vez que los niños fraccionan segmentos usan unidades de medida arbitrarias como una galleta, un pedazo de listón y un caramelo.

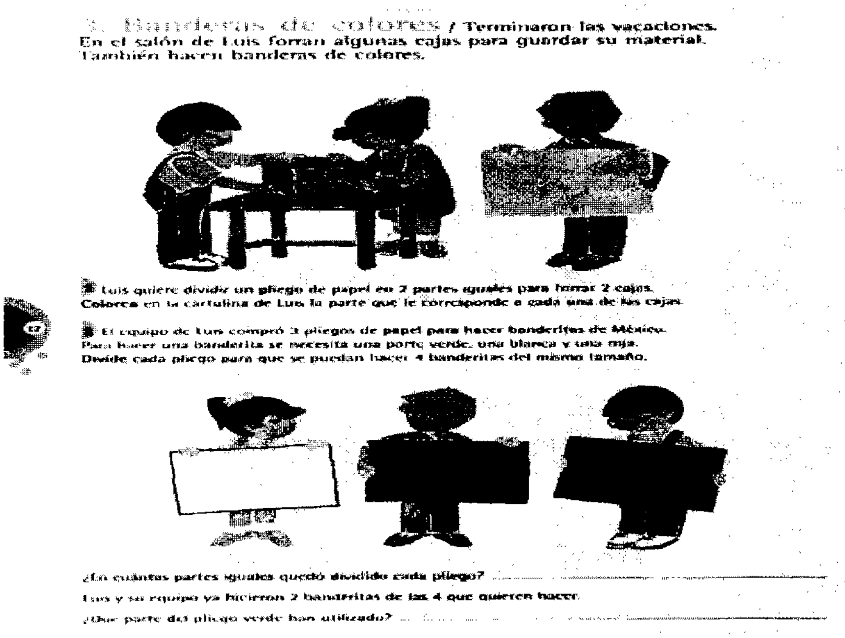
En estas situaciones didácticas se reparte una sola unidad en 2, en 4 y en 8 partes, así los alumnos utilizan las fracciones para expresar oralmente los resultados de algunos problemas de reparto que les son planteados.

Las situaciones de reparto se complican más adelante, al aumentar el número de unidades a repartir y los niños entre los cuales se hacen los repartos. En la ficha "Repartos II" (Tercero grado, ficha 18, bloque II) se presenta por ejemplo: dos galletas, tres barras de chocolate, tres pasteles, cuatro caramelos, que se reparten entre 4, 2 y 8 niños. El alumno resuelve varios problemas a partir de la pregunta ¿Cuánto le tocó a cada niño? con el propósito de que utilice fracciones con numerador mayor que uno para expresar resultados de reparto ($\frac{2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$)

En el libro de tercero hay ejercicios para introducir al alumno a actividades de medición con fracciones, como la lección "Banderas de colores" (Tercer grado, lección 3, bloque I) en donde se le pide que llegue a la expresión "mitad" en la división de objetos. Para esto, en la primera página de la lección, la tarea es que los niños dividan un pliego de papel en dos partes iguales, de tal manera empezar a poner en práctica que los niños representen ½ en un entero.

En el siguiente ejercicio la variable didáctica es aumentar el número de enteros y el número de divisiones a cada entero. Se les propone utilizar 3 pliegos de papel para hacer 4 banderas de México y se les indica que supongan que ya hicieron 2 banderas. Se les pregunta *¿qué parte del pliego verde han utilizado?.* Con este problema expuesto se busca que el niño logre visualizar que, independientemente de en cuántas partes esté dividido un entero, puede aún representar ½ en el entero.

Para resolver cada una de las tareas se muestra a los niños ilustraciones a colores.



Las siguientes tareas en la misma lección consisten en hacer banderas de distintos tamaños, con los tres pliegos de papel y los dividen en 2, en 3, en 4 o en 8 partes dependiendo del número de banderas que hagan. Los niños buscan diferentes formas de cortar de igual tamaño los pliegos. Notemos que el número de banderas que les piden es menor y mayor al número de pliegos que tienen.

Otra lección es "Un paseo en el zoológico" (Tercer grado, lección 22, Bloque II), Ésta tiene en particular que el reparto al principio no es exhaustivo, pero sí equitativo.

El ejercicio se resuelve con ayuda de la ilustración que se encuentra en la misma lección.

Con base en la ilustración contesta las siguientes preguntas.

¿Cuántas mandarinas les dieron por un kilo? ______

¿Qué cuesta más, una paleta o un taco de pollo? ______

Con el jugo que tenía el frasco, se llenaron los 4 vasos y no sobró nada.

¿Qué parte del jugo pusieron en cada vaso? ______

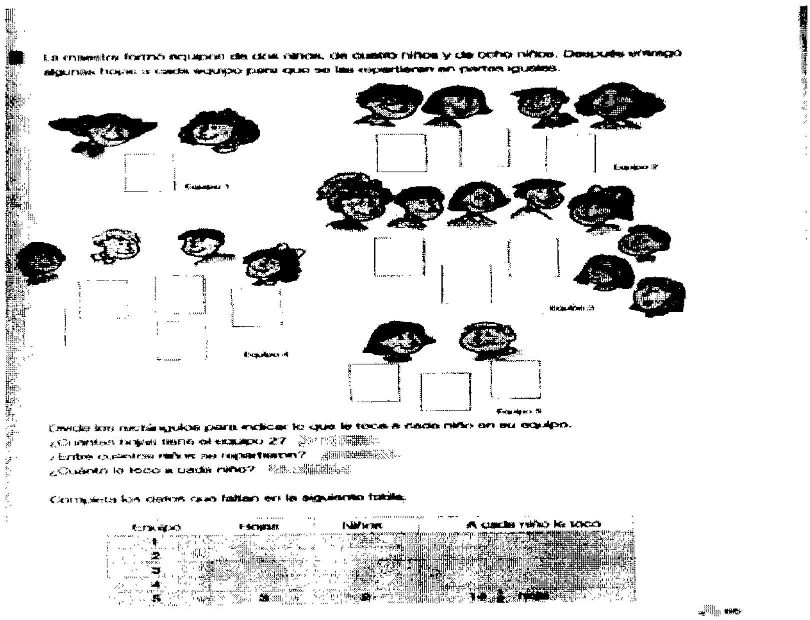
¿Qué parte del jugo se usó para llenar 2 vasos? ______

Las preguntas de los ejercicios están relacionadas con la ilustración, por lo tanto para contestarlas deben usarla como ayuda. Por ejemplo en la ilustración se muestran 4 niños repartiéndose alimentos. Para las mandarinas, se le pregunta a los alumnos *¿Cuántas mandarinas le tocaron a cada niño, si se las repartieron en partes iguales?* Los alumnos deben contestar: *2 mandarinas*, aparte se les indica que sobró una mandarina, lo que conduce a la siguiente observación y problema a resolver, *"La mandarina que sobró se la repartieron en partes iguales ¿qué parte de la mandarina le tocó a cada niño?"*. Así se pretende que los niños se den cuenta de la eficiencia de las fracciones para representar el resultado de un reparto.

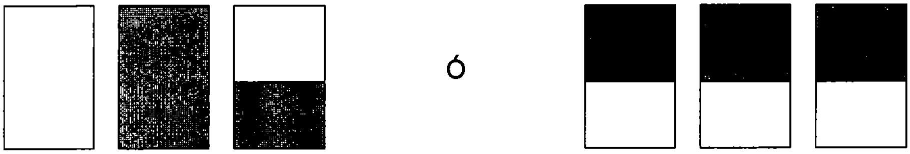
Este mismo tipo de actividades se proponen en cuarto grado en la ficha "El patio de doña Martha" (Cuarto grado, ficha 11, bloque II), pero cabe destacar que en este grado el contexto del planteamiento de problemas cambia, así que en vez de preguntar: *¿Cuánto le tocó a cada niño?,* se pregunta: *¿qué fracción le corresponde a cada uno?.* En esta misma ficha Doña Martha quiere que sus dos hijos le ayuden a barrer el patio de su casa, *¿qué fracción del patio le corresponde barrer a cada uno?.* Si doña Martha tuviera tres hijos *¿qué fracción del patio le corresponde barrer a cada uno?.* Así el niño utiliza diferentes fracciones para resolver problemas que impliquen partición.

En el libro de cuarto en la lección "Tarjetas de papel" (Cuarto grado, lección 9, bloque II) en el ejercicio 4 se encuentra una situación de reparto expuesta como: *La maestra formó equipos de dos niños, de cuatro niños y de ocho niños. Después entregó algunas hojas a cada equipo para que se las repartieran en partes iguales.*

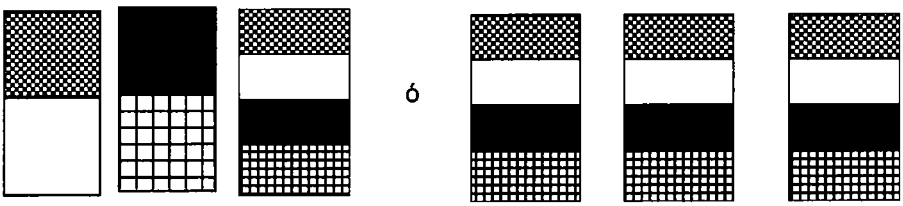
Ésta se muestra al alumno con una ilustración:



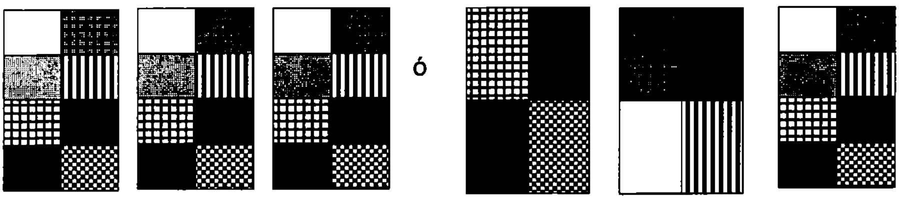
Analizando el ejercicio y la ilustración notamos que se repite la cantidad de hojas a repartir variando sólo el número de niños a quien se reparte, de esta manera el niño encontrará diferentes formas de reparto, por ejemplo: en el caso de repartir 3 hojas entre 2 niños, se pueden hacer los siguientes repartos:



En el caso de repartir 3 hojas entre 4 niños, se pueden hacer los siguientes repartos:



En el caso de repartir 3 hojas entre 8 niños, se puede hacer los siguientes repartos:



En el fichero de quinto se encuentran estas mismas situaciones didácticas, pues el alumno utiliza las fracciones como resultado de un reparto, pero el planteamiento de problemas es diferente: en lugar de pedir al niño que diga el resultado exacto del reparto se le pide que diga si es mayor o menor que un entero. Por ejemplo en la ficha "Repartimos pasteles" (Quinto grado, ficha 6, bloque I) al repartir 4 pasteles entre 5 niños o repartir 7 pasteles entre 6 niños, que a todos les toque igual y no sobre nada, la pregunta a contestar es: *¿le toca más de un pastel a cada niño o menos de un pastel?*, con lo que se pretende usar fracciones impropias.

La siguiente actividad en situaciones de reparto en el fichero de quinto es la ficha "Descubre lo que falta" (Quinto grado, ficha 18, bloque II) que sigue en el contexto de repartir pasteles entre niños, pero el problema planteado es tratar de aumentar la cantidad de pasteles y el número de niños (ver tabla 1), con la condición de que siempre le toquen $\frac{5}{4}$ de pastel a cada niño, la situación se complica pues los alumnos utilizarán la equivalencia de fracciones en la solución de un problema de reparto.

pasteles	5		20		30		75			55
niños	4	8		10		12		1	2	

Tabla 1

En el libro de quinto en la lección "Reparto de galletas" (quinto grado, lección 31, bloque II) hay situaciones de reparto de unidades pero se complica al hacer uso de las fracciones para representar proporcionalidad y equivalencia. Por ejemplo, en el ejercicio 1 se soluciona el siguiente problema para que el alumno exprese proporcionalidad con base en el resultado de un reparto:

Se realiza una repartición de galletas. Si son 8 niños ¿cuántas galletas se necesitan para que a cada niño le toque ½ galleta? Y para que les toque ¼ de galleta, ¿cuántas se necesitan?

En los ejercicios 4 y 5 se presenta otro tipo de problema a resolver en el cual el alumno debe encontrar la relación entre el número de objetos repartidos, el número de personas entre las que se reparten estos objetos y el resultado del reparto. De esta manera se pretende que el alumno encuentre la equivalencia de fracciones con base en el resultado de un reparto. Por ejemplo:

Rodrigo repartió algunas galletas entre sus amigos. A cada niño le tocó ¾ de galleta. ¿Cuántas galletas pudo haber repartido Rodrigo y cuántos niños pueden ser?

Juan dijo que eran 3 galletas y 4 niños. Pablo dijo que eran 6 galletas y 8 niños. ¿Quién de los dos tiene razón?

A Juan le tocó $\frac{2}{3}$ de galleta y a María $\frac{4}{6}$ de galleta. ¿A quién le tocó más? ¿Por qué?

En el libro y el fichero de sexto ya no se presentan situaciones de reparto, pero se trabajan otro tipo de actividades en donde se relaciona la medición con las fracciones en otros contextos, como se verán más adelante.

3.1.2 LA EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

El tema de la equivalencia de fracciones se trabaja desde tercer grado de primaria. En las situaciones de reparto equitativo y exhaustivo de unidades se pueden realizar y comparar distintas particiones, dando lugar a obtener expresiones distintas para cuantificar el resultado de un reparto (por ejemplo $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$), así como las comparaciones de los repartos que se dan a partir de sus datos (por ejemplo 2 pasteles y 4 niños es equivalente a 4 pasteles y 8 niños).

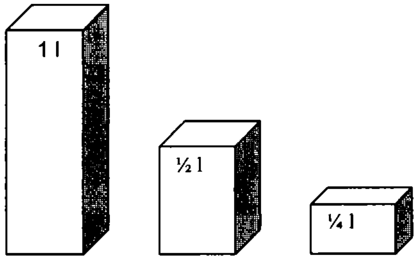
Al comparar fracciones se pueden encontrar distintas características que se dan entre ellas, como pueden ser:

- La primera fracción es mayor que la segunda.
- La primera fracción es menor que la segunda.
- La primera fracción es equivalente con la segunda.

La comparación de fracciones es la actividad con la que más se trabaja en la escuela primaria, ya que con ella se puede mostrar gráficamente la equivalencia de fracciones y el orden.

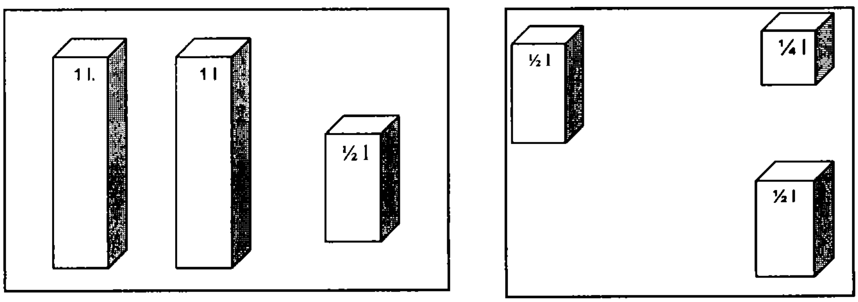
En las fracciones se trabajan también situaciones de medición de distintos segmentos con una unidad de medida arbitraria o convencional y al final se comparan las fracciones resultantes.

Para este tipo de situaciones mencionaremos la ficha "Fracciones de un litro" (Tercer grado, actividad 59, bloque V) en la cual se muestran, en forma de bloques, recipientes de distinto volumen. Se pretende que en la actividad el alumno compare fracciones por el tamaño que representan los envases.

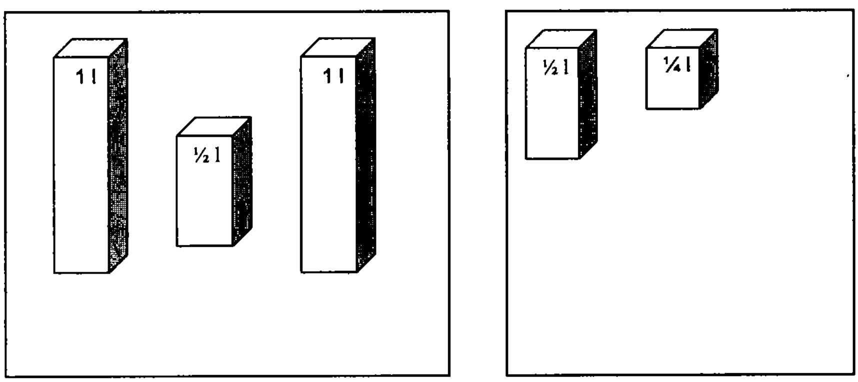


Los cuadros que se muestran a continuación son conjuntos de diferentes recipientes (ilustraciones A y B); en el cuadro de la derecha deberán dibujar los envases que faltan para que haya la misma cantidad que en el de la izquierda. De esta forma el alumno podrá comparar el número de fracciones en un cuadro con relación al otro, obteniendo una equivalencia entre ellos.

A



B



En el libro de matemáticas de tercero se propone la lección "Miel y fruta seca" (Tercer grado, lección 58, bloque IV) en la cual se comparan fracciones como cantidades de capacidad en litros.

En el ejercicio 4, se muestran dos personas señalando recipientes de distinto tamaño con la cantidad de ¾ y ½ litro de miel que compró cada uno y se pide resolver el problema: *¿quién compró más miel, el señor o la señora?*

En la siguiente ilustración se presenta a dos niños que tienen la misma cantidad de miel en distintas distribuciones, uno de ellos tiene 2 envases de ¼ de litro y el otro un envase de ½ litro y se pide escoger la interpretación correcta de la cantidad total de miel que tiene cada uno ya sea por medio de la comparación entre el número de frascos o por la cantidad total de miel.

En el ejercicio 5 de la misma lección las preguntas a resolver son:

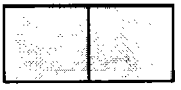
¿Es lo mismo ½ docena de nueces que docena y ½ de nueces?¿Por qué?

¿Qué crees que pesa más, ½ kilo de nueces o ½ kilo de piñones?

¿Qué crees que pesa más, ½ kilo de pistaches o ¾ de kilo de pistaches?

Es importante que el niño reflexione frente a estas preguntas para comprender el tema de equivalencia.

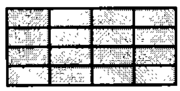
En el fichero de cuarto grado, en la actividad "Rectángulos de colores" (Cuarto grado, actividad 22, bloque III) se muestran cinco rectángulos de papel. Se propone un juego: primero se pide a los alumnos que doblen un rectángulo en dos partes iguales, lo corten y pinten de azul cada una de las partes.



El segundo rectángulo tiene que doblarse y partirse en cuatro partes iguales, y pintarse de rojo.

El tercer rectángulo se corta en 8 partes iguales y se pintan de verde.

El cuarto se corta en 16 partes iguales y se pintan de amarillo.



El quinto rectángulo se deja completo para que puedan usarlo de muestra.

En el centro de la mesa se colocan las 30 partes revueltas y se toma el rectángulo completo.

La actividad inicia cuando un niño elige una parte y la coloca frente sus compañeros sobre el rectángulo completo, un siguiente niño elige otra parte y la pone junto a la primera para ir llenando el rectángulo, el que sigue hace lo mismo y así hasta que lo completen. Después de haber jugado varias veces, se plantean preguntas como las siguientes:

¿Una figura roja, qué parte del rectángulo es?

¿Cuántas partes rojas se necesitan para formar un rectángulo? ¿por qué?

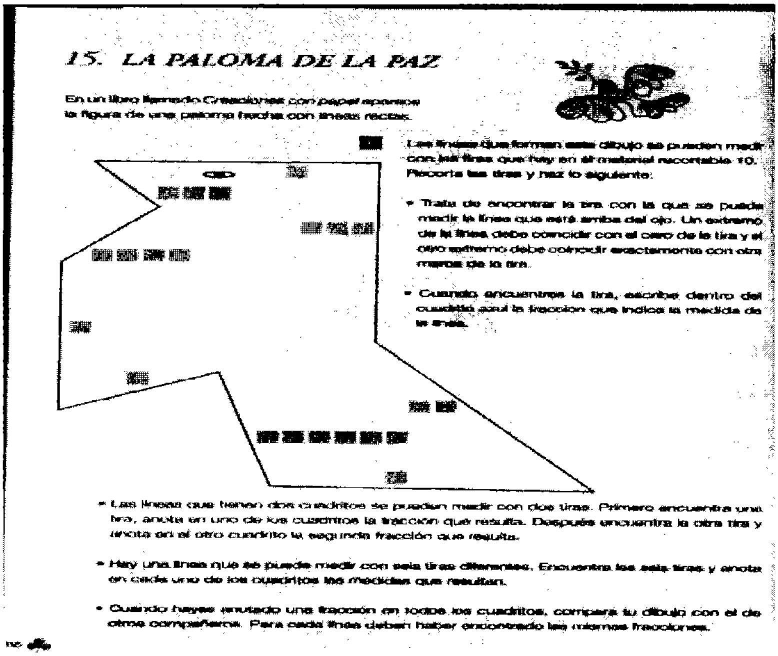
¿Cuántas partes rojas se necesitan para cubrir una azul?

¿De qué color es la figura que representa la mitad de una verde?

De esta forma los alumnos logran comparar fracciones e identifican su equivalencia.

En el libro de cuarto en la lección "La paloma de la paz" (Cuarto grado, lección 15, bloque 3) se les pide medir líneas rectas de una figura, con ciertas tiras propuestas disponibles en el material recortable ubicado al final del mismo libro de cuarto grado. Las tiras que se presentan son:

Las líneas a medir son de la siguiente figura:


15. LA PALOMA DE LA PAZ

La actividad a realizar es medir con diferentes tiras una línea recta y escribir las medidas resultantes, para resolver los siguientes ejercicios:

2. Observa las fracciones que escribió Sonia en una de las líneas que forman el pico de la paloma: $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{12}$

¿Son las mismas fracciones que tú escribiste?

Si no son las mismas, usa las tiras otra vez para ver si Sonia tiene razón.

Comenta con tus compañeros y con tu maestro por qué las cuatro fracciones que escribió Sonia indican la medida de la misma línea.

3. Para medir una de las líneas que forman la cola de la paloma, Yoatzin usó las tiras de quintos y décimos.

¿Cuánto mide la línea, si la mides con la tira dividida en quintos?

¿Cuánto mide la línea, si la mides con la otra tira dividida en décimos?

¿Es cierto que $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$*? ¿Por qué?*

4. Toma tus tiras y contesta:

> *Si una línea mide* $\frac{2}{5}$*, ¿cuántos décimos mide la misma línea?*
>
> *Si una línea mide* $\frac{3}{5}$*, ¿cuántos décimos mide la misma línea?*
>
> *Si una línea mide* $\frac{7}{5}$*, ¿cuántos décimos mide la misma línea?*

Estos ejercicios son muy prácticos ya que el niño visualiza el tamaño de las distancias entre fracciones y ubica de la misma manera las fracciones equivalentes.

En el fichero de quinto grado en la actividad "Localizando números" (Quinto grado, ficha 67, bloque V), se propone un ejercicio para encontrar fracciones equivalentes con ayuda de la recta numérica. Se dice a los alumnos que se llevará a cabo una carrera de robots, para cada robot se usa una pista diferente que será una recta numérica y se indica la distancia que recorre un robot.

A llega a 8 en 3 saltos

B llega a 12 en 5 saltos

C llega a 4 en 2 saltos

D llega a 7 en 4 saltos

E llega a 12 en 4 saltos

F llega a 8 en 10 saltos

G llega a 14 en 8 saltos

H llega a 12 en 6 saltos

I llega a 18 en 9 saltos

J llega a 4 en 5 saltos

K llega a 7 en 7 saltos

L llega a 16 en 16 saltos

Después de que los robots hayan hecho su recorrido se les hacen las siguientes preguntas:

¿Hay robots que tienen pasos de igual longitud?

Indica cuáles son.

¿A qué número llega cada robot con 10 pasos?

Ordena los robots comenzando por el que tiene el paso más largo hasta llegar al que tiene el paso más corto.

También se les pide que busquen en las diferentes pistas de los robots:

Fracciones equivalentes a números naturales (deben indicar qué número natural representa en cada caso).

Fracciones equivalentes entre sí.

Fracciones mayores que la unidad.

En el libro de matemáticas de quinto grado una de las lecciones que trabajan fracciones equivalentes es "La escuela de Pablo" (Quinto grado, lección 33, bloque II), proponiendo a los niños resolver los siguientes ejercicios:

1. Pablo y Juan viven en lugares distintos, pero cada uno de ellos tiene que recorrer un kilómetro para ir de su casa a la escuela. Salen de sus casas y cuando se cruzan Pablo ha recorrido $3/5$ y Juan ha recorrido $6/10$ del camino. ¿Quién de los dos está más lejos de su casa?

2. En el grupo de Pablo hay 32 alumnos, $5/8$ del total son mujeres y $10/16$ del total usan lentes. ¿Quiénes son más, las mujeres o los que usan lentes?

3. Juan ha resuelto $1/3$ de las lecciones de matemáticas, Pablo ha resuelto $2/6$. ¿Quién ha resuelto más lecciones?

4. El salón de Pablo es rectangular. El piso está cubierto con mosaicos de tres colores, $3/9$ del total son verdes, $6/18$ son naranjas y $9/27$ son rojos. ¿De qué color hay más mosaicos?

5. Pablo y Juan compraron lápices de igual tamaño. Pablo ha gastado $2/3$ de su lápiz y Juan ha gastado $3/4$. ¿A quién le queda el lápiz más largo?

6. Encierra en un círculo las fracciones que son equivalentes a 1/3.

$\frac{5}{30}$ $\frac{6}{24}$ $\frac{7}{21}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{10}{60}$ $\frac{10}{30}$ $\frac{4}{24}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{6}$

En este grado el alumno se enfrenta a problemas donde ejercita el concepto de fracciones equivalentes.

En el fichero de sexto una de las actividades propuestas es "¡siempre nos toca lo mismo!" (Sexto grado, ficha 24, bloque III), en la cual el objetivo es que el alumno deduzca el procedimiento para obtener fracciones equivalentes en la solución de problemas de reparto. La actividad a realizar es:

Se organiza a los alumnos en equipos de tres o cuatro integrantes y se plantean los siguientes problemas:

1.- Se reparten dos litros de leche entre cinco niños, de manera que a todos les toca lo mismo y no sobra leche, ¿cuánto se repartió a cada niño?

a. Si se reparten cuatro litros de leche y a cada niño le toca $\frac{2}{5}$ de litro, ¿a cuántos niños se les reparte?

b. Si se reparten cuatro litros de leche entre cinco niños, ¿cuánto le toca a cada uno? ¿a cada niño le toca lo mismo que en el problema 1? ¿qué debería suceder para que cada niño reciba la misma cantidad de leche del problema 1?.

c. ¿Cuántos litros de leche se necesitan repartir para que 15 niños reciban la misma cantidad que en el problema 1?

d. Completar la tabla siguiente para que cada niño reciba la misma cantidad de leche.

litros de leche	2		6	8		12	
números de niños	5	10			25		35

Después de que los niños resuelven cada problema, el maestro pide que expliquen cómo hicieron y comparen los resultados obtenidos.

En el libro de sexto de matemáticas una de las lecciones presentadas al niño con el tema de equivalencia de fracciones es "Listones para los moños" (Sexto grado, lección 8, bloque I). El objetivo es que por medio de reparticiones, el alumno deduzca el procedimiento para obtener fracciones equivalentes, los ejercicios son:

1. Calcula el resultado del siguiente problema. Se usan 8 metros de listón para hacer 7 moños iguales, ¿cuántos metros de listón se usan para cada moño?

2. El listón del moño A mide $^3/_5$ de metro y el moño B mide $^6/_{10}$ de metro. ¿Qué moño es más grande? ¿Cómo lo supiste?

3. Anota los números que faltan en la siguiente tabla, considerando que en todos los casos un moño ocupa $^3/_5$ de metro.

metros	3	6		18		27			
moños	5		20		35		55	1	2

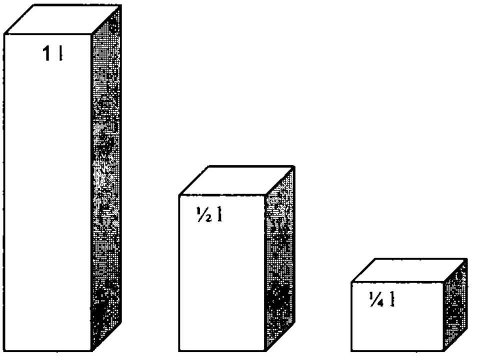
4. Un carrete de listón contenía 5 metros y se cortaron tramos iguales de $^3/_4$ de metro.
¿Cuántos tramos se cortaron?
¿Cuánto sobró?
De otro carrete se cortaron siete tramos iguales de $^4/_5$ de metro cada uno y sobró $^2/_5$ de metro.
¿Cuántos metros contenía el carrete?

En suma, podemos decir que el maestro debe proponer diferentes situaciones de comparación que vayan desde las simples comparaciones multiplicativas, dobles, triples, a las comparaciones entre dos cantidades que puedan representarse por medio de una fracción, como se muestran en los ejemplos anteriores. Cuando la fracción surge de la comparación de dos cantidades se llama "razón".

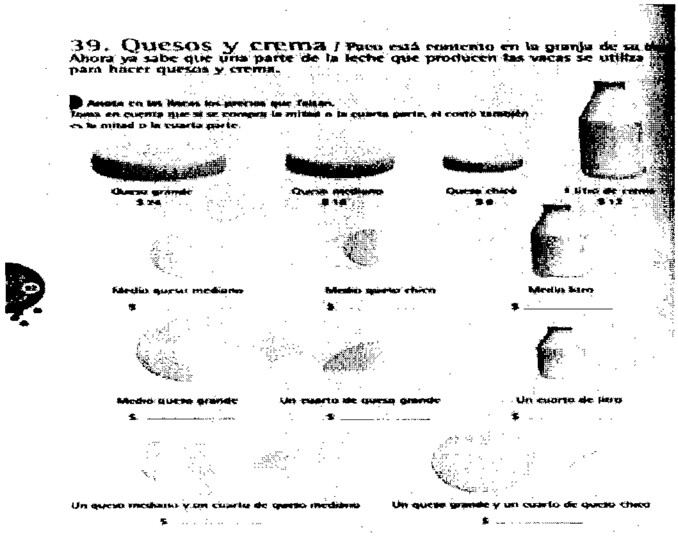
3.1.3 LA FRACCIÓN COMO RAZÓN Y PROPORCIONALIDAD

Las fracciones en la medición también se estudian en situaciones de proporcionalidad que se refieren a actividades que involucran con "proporciones" y "razones" entre valores, éstas se presentan desde el fichero de tercero y se relacionan en conceptos de "razón", "proporcionalidad" y "escala" en las cuales usan unidades de medida convencionales.

De nuevo mencionaremos la ficha "Fracciones de un litro" (Tercer grado, ficha 59, bloque V) pues con este ejercicio, además de que se pretende que los alumnos utilicen las fracciones para expresar medidas de capacidad y encontrar equivalencias, podemos agregar que el alumno podrá observar que un medio y un cuarto, son proporcionales a un entero.



En el libro de lecciones de tercero la situación de proporcionalidad que se realiza es "Quesos y crema" (Tercer grado, lección 39, bloque III) la cual presenta tamaños proporcionales de objetos como quesos y envases de crema, los cuales tienen diferentes precios. El ejercicio a realizar es dar el precio a las diferentes partes de quesos y diferentes medidas de crema con relación a los precios ya dados.



En los ficheros de cuarto, quinto y sexto grado, los alumnos resuelven problemas en donde elaboran y analizan tablas de proporcionalidad, pero con alguna variable didáctica como el trabajar con fracciones mixtas, fracciones decimales, porcentajes.

En la Ficha "¿Cómo se relacionan?" del fichero de cuarto (Cuarto grado, ficha 39, bloque V) se completa una tabla de variación donde se relacionan en forma proporcionalmente directa el tiempo y la distancia. El planteamiento del problema ayudará a llenar la tabla: *En la central camionera hay una tabla como la que se muestra (ver tabla 2), en la cual se indica el tiempo que tardan los camiones en recorrer ciertas distancias. Traten de encontrar los datos que faltan para completar la tabla.*

La variable en esta actividad es que se trabaja con fracciones mixtas.

Tiempo (horas)	1	$1\frac{1}{2}$	2			6	3		10	
Distancia (kilómetros)			160	200	180			400		440

Tabla 2

En el libro de cuarto en la lección "Los quelites" (Cuarto grado, lección 8, bloque V) los alumnos deberán calcular la cantidad de alimentos para 3 y 12 raciones a partir de la información que se les da para 6 raciones. Para realizar la actividad se muestran varias tablas de proporcionalidad para llenar, en donde la información que se les da es entera y fraccionaria.

El fichero de quinto tiene la particularidad de que además de proporcionar actividades para elaborar y analizar tablas de variación, se proponen actividades en donde los alumnos utilizan la noción de fracción como razón, porcentaje y escala en la solución de problemas de proporcionalidad.

En la ficha "Porcentaje" del fichero de quinto (Quinto grado, ficha 21, bloque II) los alumnos resuelven problemas de porcentaje expresado como fracción y resuelven problemas de proporcionalidad. Uno de los ejercicios planteados es completar una tabla (ver Tabla 3) con valores proporcionales dándoles la información: *La población de niños menores de 16 años en una ciudad es de 4600.*

%	FRACCION	POBLACION
	1	4,600
	$\frac{1}{2}$	
25		
	$\frac{1}{8}$	
		460

Tabla 3

Y se les plantean varias preguntas:

¿Qué fracción de la población total representa el 25%? ¿A cuántos niños corresponde?
¿Qué fracción del total representan 460 niños? ¿Qué porcentaje le corresponde?

De esta forma presentan la relación de equivalencia entre los porcentajes y las fracciones.

En el libro de quinto, en la lección "Descuentos y regalos" (Quinto grado, lección 57, bloque IV) se introduce el concepto de porcentaje, indicando con un ejemplo qué parte de un entero corresponde al porcentaje:

El 25% de 100 es lo mismo que la cuarta parte de 100.

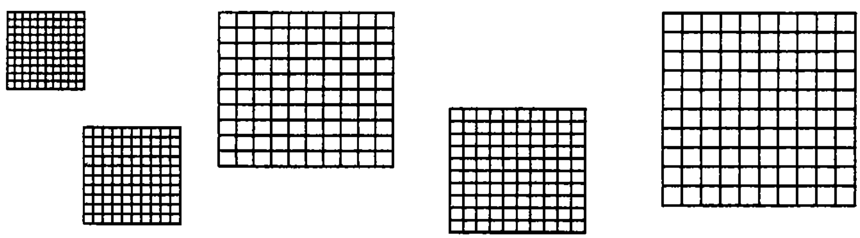
El 50% de 100 es lo mismo que la mitad de 100.

El 10% de 100 es lo mismo que la décima parte de esa cantidad.

Otra actividad en el fichero es "El 20 por ciento" (Quinto grado, ficha 20, bloque II) que plantea una situación para comenzar la actividad:

Cinco agricultores decidieron dedicar 20 por ciento de su parcela para un cultivo experimental.

Se pide a los alumnos dividir los lados de cada parcela en diez partes iguales, trazar líneas de un lado a otro y colorear 20 de los 100 cuadritos que resultan.



Se les explica que la parte que colorearon se puede expresar como "20 de cada 100", es decir $\frac{20}{100}$, o como "20 por ciento" y se escribe simbólicamente de esta manera: 20%. Al colorear el 20 por ciento de las parcelas de distintos tamaños, los alumnos pueden observar que el tamaño de las partes dedicadas al cultivo experimental es proporcional al tamaño de las parcelas. En esta actividad el alumno identifica el porcentaje como fracción con denominador 100.

En este mismo contexto, en el libro de quinto en la lección "El costo de los boletos" (Quinto grado, lección 82, bloque V) se resuelven problemas que implican cálculo de porcentajes. En el primer ejercicio de la lección los alumnos tienen que llenar una tabla (ver Tabla 4), en donde se espera que encuentren expresiones equivalentes a las que se les muestran relacionando las fracciones con el porcentaje.

30 por ciento		$^{30}/_{100}$	$^{3}/_{10}$	.30
	75%			.75
		$^{45}/_{100}$	$^{9}/_{20}$	
40 por cierto				
				.80

Tabla 4

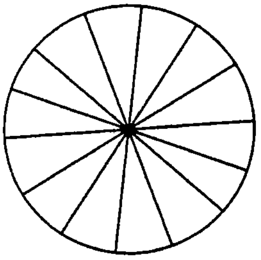
La siguiente ficha que tomaremos como ejemplo de proporcionalidad es "La fracción como razón" (Quinto grado, ficha 34, bloque III) en donde se presentan los siguientes problemas a resolver:

El grupo A tiene 14 alumnos y reprobaron 7. El grupo B tiene 50 alumnos y reprobaron 10. ¿En qué grupo reprobaron más alumnos? ¿Qué parte del grupo A reprobó?

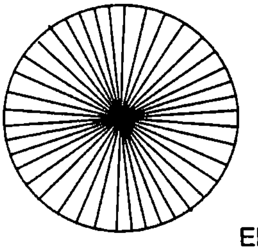
El grupo C tiene 40 alumnos y reprobaron 8. ¿Reprueban más niños en el grupo B o en el C?

En el grupo D reprobó $\frac{1}{10}$ del grupo. En el grupo E reprobaron $\frac{2}{5}$ del grupo. ¿En qué grupo reprobaron más alumnos?

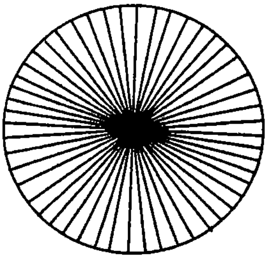
Se recuerda que en el grupo A hay 14 alumnos, por lo tanto un alumno representa $\frac{1}{14}$ del grupo y 7 alumnos representan 7 veces más: $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Se pide que representen la parte que reprobó en los grupos B y C como se muestra en la siguiente página (la superficie de cada círculo representa al grupo completo).



El grupo A tiene 14 alumnos y reprobaron 7.



El grupo C tiene 40 alumnos y reprobaron 8.



El grupo B tiene 50 alumnos y reprobaron 10.

Hay muchas situaciones en donde lo que interesa de una cantidad es *qué* parte representa de otra cantidad y no tanto conocer el número de elementos. Las fracciones permiten expresar esta relación entre una parte y el todo.

En el libro de quinto, en la lección "La tienda de pinturas" (Quinto grado, lección 64, bloque IV), para abordar las fracciones como relaciones o razones se plantea el ejercicio de mezclar 3 litros de pintura blanca y 5 litros de pintura verde para obtener un solo color en un total de 8 litros de pintura.

De acuerdo con el total de litros en la mezcla el alumno contestará qué fracción de la mezcla es pintura blanca y qué fracción de la mezcla es pintura verde; al mismo tiempo se propone obtener 20 litros de pintura del mismo color, por lo que se tendrá que averiguar cuántos litros de pintura blanca y pintura verde utilizarán y qué fracción de la mezcla le corresponde a cada color de pintura; después se propone utilizar sólo un litro de pintura verde y obtener el mismo color de mezcla, por lo que corresponde al alumno asignar la cantidad de pintura blanca que se utilizará. Para lograrlo usará las fracciones como razón del número de litros de pinturas que se usaron para la primera mezcla.

Fracciones como cocientes y razones

LECCIÓN 64

La tienda de pinturas

Raúl trabaja en una tienda de pinturas. Muchas veces tiene que mezclar dos o más colores para obtener nuevos colores.

1. Raúl mezcló en una cubeta, para pintar su cuarto, las siguientes cantidades de pintura.

3 litros de pintura blanca **5 litros de pintura verde**

¿De qué color crees que es la mezcla? ______

¿Cuántos litros de mezcla hay en la cubeta? ______

¿Qué fracción de la mezcla es pintura blanca? ______

¿Qué fracción de la mezcla es pintura verde? ______

¿Qué resultado obtienes al sumar la fracción de pintura blanca con la fracción de pintura verde? ______

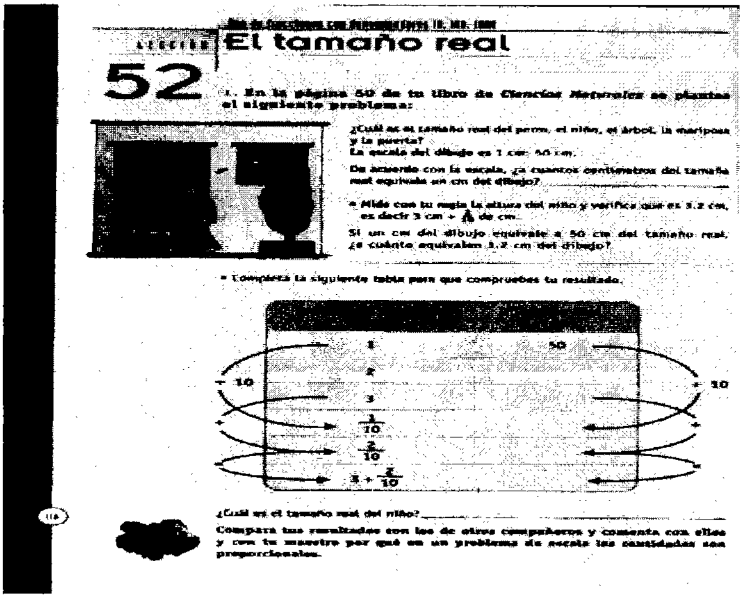
¿Por qué crees que se obtiene ese resultado? ______

Coméntalo con tus compañeros y tu maestro.

Raúl dice que el resultado que se obtiene es 1. René dice que es [illegible] y Cristina dice que es [illegible]. ¿Quién tiene razón?

Una actividad más en el fichero de quinto grado es "Rompecabezas (II)" (Quinto grado, ficha 59, bloque IV). La actividad consiste en hacer un rompecabezas a partir de otro, pero que sea más chico, de manera que una de las partes del rompecabezas que mide de un lado 4 centímetros debe medir 2 centímetros en el nuevo rompecabezas. Así, los alumnos utilizarán la fracción como razón al construir un rompecabezas a escala.

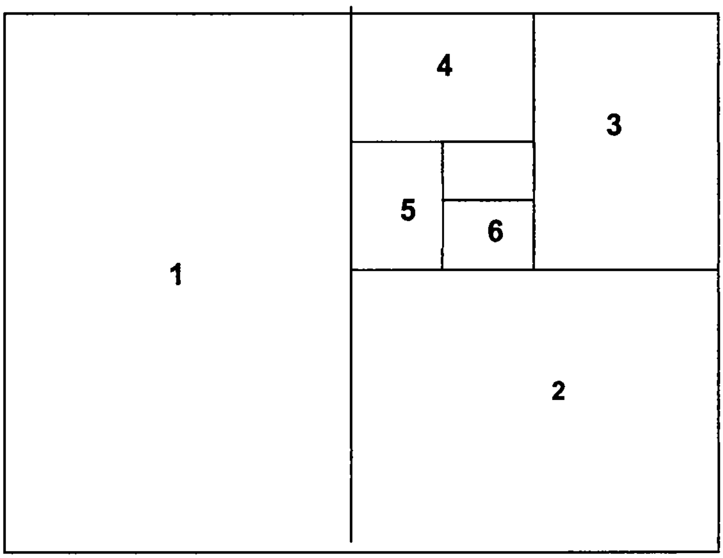
En el libro de quinto, en la lección "El tamaño real" (Quinto grado, lección 52, bloque III) se muestra un dibujo a escala de 1 cm : 50 cm. Se explica en la lección que dicha escala también se puede expresar con la fracción $\frac{1}{50}$, lo que significa que las medidas del dibujo están reducidas 50 veces de su tamaño real o bien, que el tamaño real es 50 veces la medida del dibujo.



El tamaño real

52

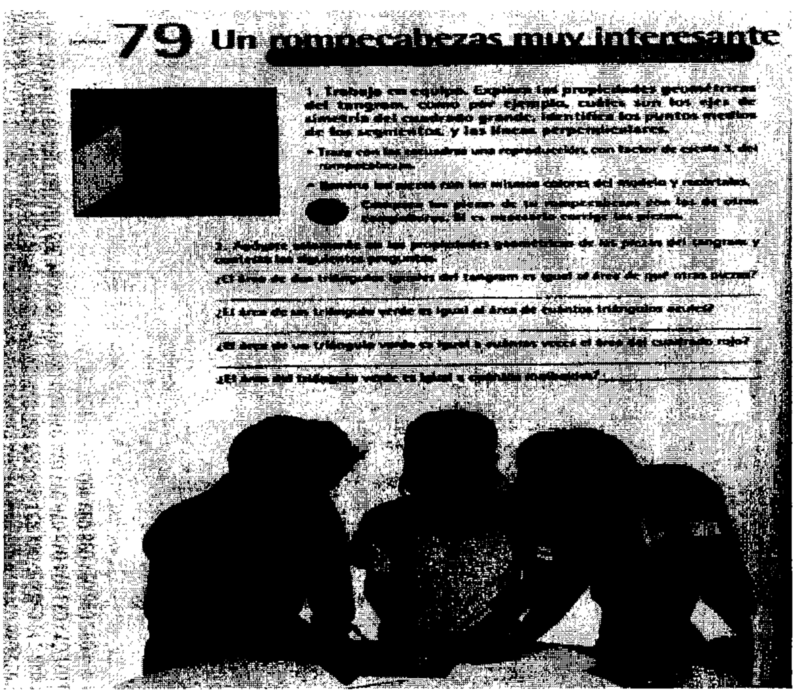
En el fichero de sexto, en la ficha “Los rectángulos” (Sexto grado, ficha 14, bloque II) los alumnos identifican la relación de proporcionalidad que hay en los lados de diversos rectángulos. Se les entrega una copia del dibujo que se muestra:



Y se les pide realizar las siguientes actividades:

- *Reproducir el dibujo en una hoja de papel al doble de sus dimensiones. Si en la reproducción el largo y el ancho del rectángulo que encierra todo el dibujo miden 24 y 20 cm, respectivamente, ¿cuánto miden el largo y el ancho del rectángulo 2?¿en qué rectángulo el largo y el ancho miden la mitad del largo y del ancho del rectángulo 2?*
- *Enumerar los rectángulos cuyos largo y ancho aumentan o disminuyen de manera proporcional al rectángulo inicial.*
- *Enumerar los rectángulos cuyos largo y ancho son proporcionales al rectángulo.*
- *Calcular para cada uno de los rectángulos el cociente entre el largo y el ancho, ¿cuántos resultados diferentes hay?*

En el libro de matemáticas de sexto, en la lección "Un rompecabezas muy interesante" (Sexto grado, lección 79, bloque V) los alumnos exploran las propiedades geométricas del tangram. Se les pide que realicen una reproducción a escala del rompecabezas con factor de escala 3.


79 Un rompecabezas muy interesante

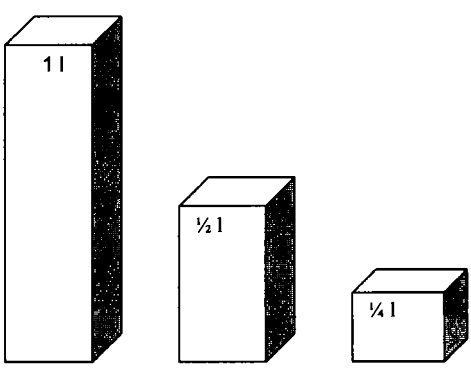
Con frecuencia se utiliza el término razón para expresar la comparación multiplicativa entre dos cantidades. Las aplicaciones más frecuentes del uso de la razón son las escalas y el tanto por ciento. La construcción de croquis o figuras a escala son situaciones en las que el alumno puede observar, a través del dibujo, la relación entre las medidas de la figura original y la que se realizó a escala. Por ejemplo, si se construye un cuadrado cuyos lados miden el doble que el cuadrado original, puede decirse que la escala que se utilizó es de 2 a 1.

3.1.4 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Para desarrollar la suma y la resta de fracciones el maestro debe presentar una variedad de problemas. Por ejemplo, aquellos problemas en los que se calculó el resultado de unir dos longitudes expresadas en fracciones de metro o la capacidad de un recipiente al que se vació el contenido de dos o más recipientes, expresados en fracciones de litro, o calcular qué fracción de litro queda en un recipiente cuando se le quita una cantidad expresada en fracción.

En tercer grado como uno de los últimos temas con relación a las fracciones, se trabaja una aproximación a la suma de fracciones mediante el cálculo mental.

En el fichero la actividad que se presenta para esta situación es “Fracciones de un litro” (Tercer grado, ficha 59, bloque V).

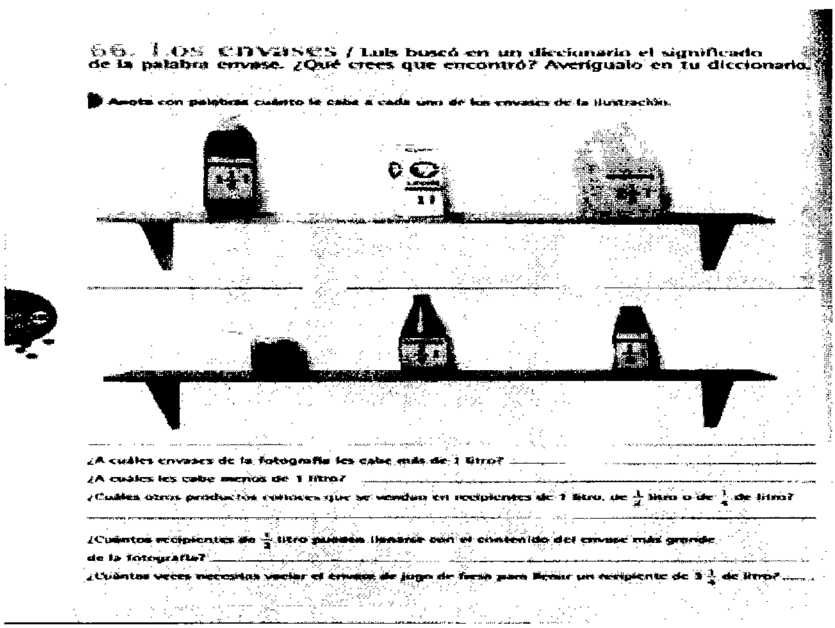


En ésta, los alumnos tendrán que resolver los siguientes problemas propuestos: Toño consiguió tres envases de jugo de las siguientes medidas: 1 litro, ½ litro y ¼ de litro (en el pizarrón se dibujan los envases procurando que se vean proporcionales, de acuerdo con su capacidad). Escribe dos maneras diferentes en que Toño puede medir 1 ½ litros de agua, usando los envases de ½ litro y ¼ de litro.

b. ¿Cómo podrías medir 3 litros de agua utilizando los tres envases?
c. ¿Cómo podrías llenar el envase de 1 litro utilizando los otros dos envases?

Además de que en esta ficha se propone a los alumnos utilizar fracciones para expresar medidas de capacidad y encontrar equivalencias (como se mencionó en la página 55), también se usa para que los niños hagan operaciones de sumas con fracciones.

En el libro de tercero, la lección que se propone es "Los envases" (Tercer grado, lección 66, bloque IV) los ejercicios a resolver se complementan con ilustraciones:


66. Los envases / Luis buscó en un diccionario el significado de la palabra envase. ¿Qué crees que encontró? Averígualo en tu diccionario.

Anota con palabras cuánto le cabe a cada uno de los envases de la ilustración.

¿A cuáles envases de la fotografía les cabe más de 1 litro?

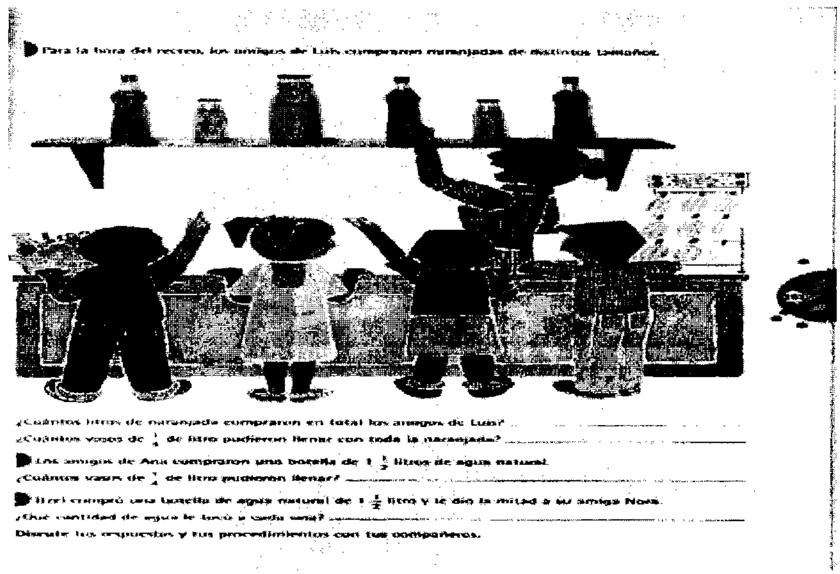
¿A cuáles les cabe menos de 1 litro?

¿Cuáles otros productos conoces que se venden en recipientes de 1 litro, de $\frac{1}{2}$ litro o de $\frac{1}{4}$ de litro?

¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{2}$ litro pueden llenarse con el contenido del envase más grande de la fotografía?

¿Cuántas veces necesitas vaciar el envase de jugo de fresa para llenar un recipiente de 3 $\frac{1}{4}$ de litro?

¿Cuántos recipientes de ½ litro pueden llenarse con el contenido del envase más grande de la fotografía?
¿Cuántas veces necesitas vaciar el envase de jugo de fresa para llenar un recipiente de 3 ¼ de litro?



¿Cuántos litros de naranjada compraron en total los amigos de Luis?
¿Cuántos vasos de ¼ de litro pudieron llenar con toda la naranjada?

Los amigos de Ana compraron una botella de 1 ½ litros de agua natural.
¿Cuántos vasos de ¼ de litro pudieron llenar?

Itzel compró una botella de agua natural de 1 ½ litro y le dio la mitad a su amiga Nora.
¿Qué cantidad de agua le tocó a cada una?

En cuarto grado se empiezan a formalizar estas operaciones. Los niños usan lenguaje matemático para realizarlas.

En el fichero de cuarto grado en la actividad "La tiendita" (Cuarto grado, actividad 26, bloque III) se propone como material una balanza y tres pesas de plastilina de 1 kilogramo, tres de ½ y tres de ¼ de kilogramo para resolver un problema de suma de fracciones como:

Armando pesó una gallina en una balanza. Para hacerlo usó pesas de 1 kg, de ½ kg, de ¼ de kg y de 1g. La balanza quedó en equilibrio con las pesas: 2 de 1 kg, 1 de ½ kg, y 1 de ¼ kg . Armando quiere saber cuánto pesa la gallina.

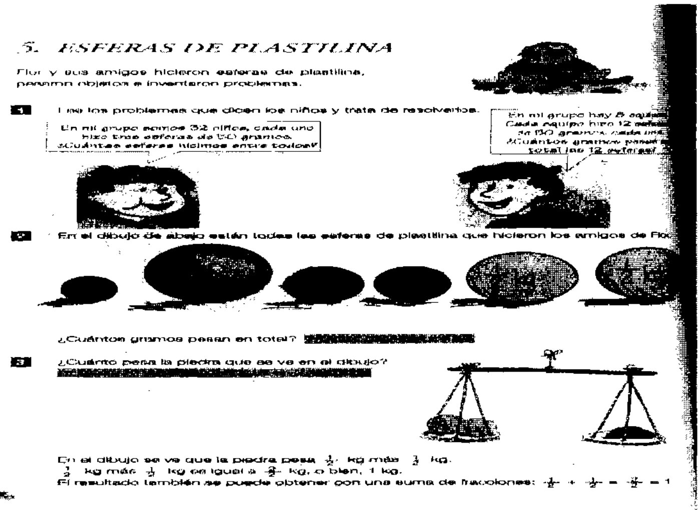
¿Cuánto pesa la gallina?

¿La gallina pesa más de dos kilos o pesa más de tres kilos?

Armando quiere cambiar en la balanza las pesas de ½ kg, ¼ de kg y las de 1 kg por pesas de un gramo.

¿cuántos gramos debe poner Armando en la balanza en lugar de las dos pesas de 1 kg, la de ½ kg y de ¼ de kg?

En el libro de cuarto grado en la lección "Esferas de plastilina" (Cuarto grado, lección 5, bloque IV) los niños usan procedimientos informales para la suma de fracciones, como es el observar ilustraciones de balanzas en equilibrio usando diferentes pesas de ½ kg, ¼ kg, ¾ kg.


5. ESFERAS DE PLASTILINA

Flor y sus amigos hicieron esferas de plastilina, pesaron objetos e inventaron problemas.

1 Lee los problemas que dicen los niños y trata de resolverlos.

En mi grupo somos 32 niños, cada uno hizo tres esferas de 50 gramos. ¿Cuántas esferas hicimos entre todos?

2 En el dibujo de abajo están todas las esferas de plastilina que hicieron los amigos de Flor.

¿Cuántos gramos pesan en total?

3 ¿Cuánto pesa la piedra que se ve en el dibujo?

En el dibujo se ve que la piedra pesa $\frac{1}{2}$ kg más $\frac{1}{2}$ kg.

$\frac{1}{2}$ kg más $\frac{1}{2}$ kg es igual a $\frac{2}{2}$ kg, o bien, 1 kg.

El resultado también se puede obtener con una suma de fracciones: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Además, éstas se usan para que los niños resuelvan ejercicios como:

Ejercicio 4.- Observa las pesas que usó Juan para pesar la fruta.

¿Cuántas esferas de $1/4$ de kg pesan lo mismo que una esfera de $1/2$ kg?

Si Juan usara sólo esferas de $1/4$ de kg, ¿cuántas tendría que poner en el platillo?

Usando la suma de fracciones se tiene:

$1/2 + 1/4 =$

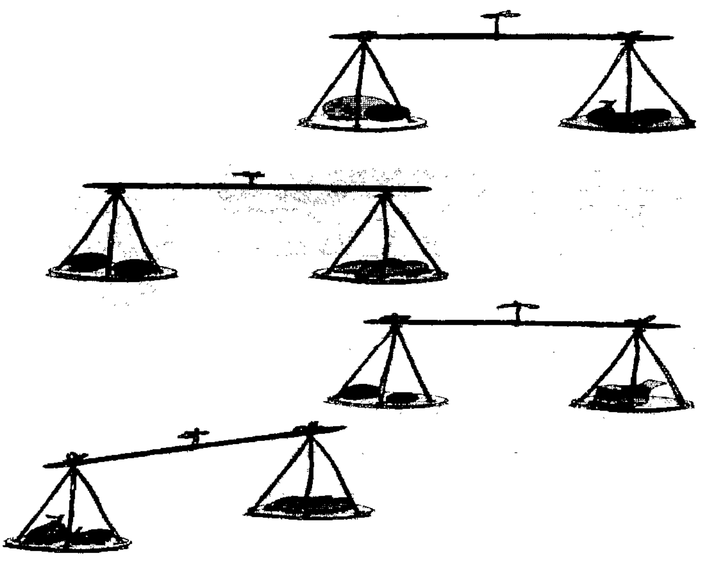
Ejercicio 5.- ¿Cuánto pesan los zapatos de Ramón? Escribe la suma de fracciones que corresponde a este problema.

Ejercicio 7.- Juan y Ramón comparan el peso de la fruta con el peso de los zapatos. ¿Qué pesa más?

¿Cuál esfera tiene que poner en el platillo para que la balanza se equilibre?

Observa que:

Peso de los zapatos	*más*	*peso de la esfera*	*es igual a*	*peso de la fruta*
$2/4$	$+$	$1/4$	$=$	$3/4$
Peso de la fruta	*menos*	*peso de los zapatos*	*es igual a*	*peso de la fruta*
$3/4$	$-$	$2/4$	$=$	$1/4$



En quinto grado la variable en las operaciones con fracciones es que los alumnos utilicen la equivalencia de fracciones al resolver problemas de suma y resta.

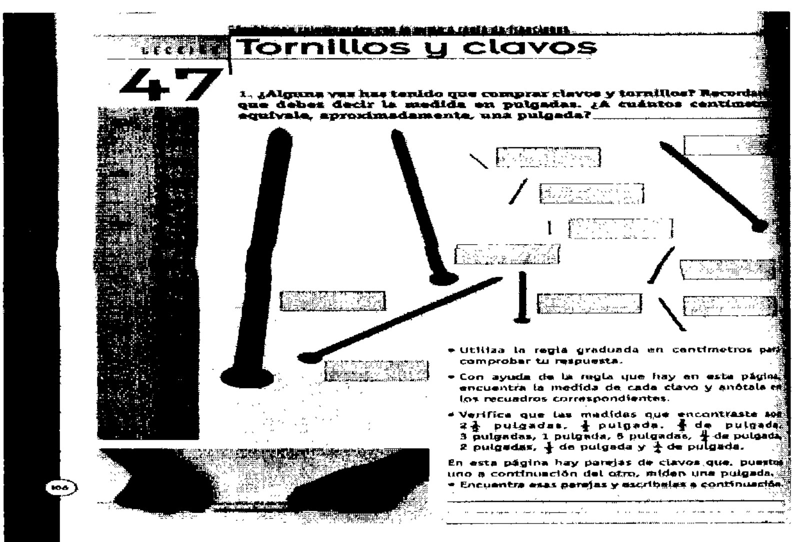
En el fichero de quinto grado, en la actividad “Sumemos fracciones” (Cuarto grado, ficha 69, bloque V), hay una serie de ejercicios a resolver como:

1. Elías tenía una bolsa con 24 canicas. Le dio la mitad ($\frac{1}{2}$) a Eduardo y un tercio ($\frac{1}{3}$) a David ¿qué parte de las canicas regaló Elías?¿qué parte conservó?

2. De la casa a la escuela recorro ¾ de kilómetro; si voy por el mercado recorro $\frac{2}{5}$ de kilómetro. ¿Cuál de los dos recorridos es el más corto? Calcular la diferencia entre ambos.

3. Ana se comió 3/8 de galletas y Nina $\frac{2}{8}$. ¿Qué parte de las galletas se comieron? Y si quedan siete galletas, ¿cuántas había al principio?

En el libro de quinto, en la lección “Tornillos y clavos” (Quinto grado, lección 47, bloque III), se propone resolver operaciones algebraicas con fracciones. Se ilustran diferentes tamaños de clavos usando como unidad de medida la pulgada por lo que se clasifican en 2 ½ pulgadas, ½ pulgada, $\frac{2}{3}$ de pulgada, 3 pulgadas, 1 pulgada, 5 pulgadas, ¾ de pulgada, 2 pulgadas, $\frac{1}{3}$ de pulgada y ¼ de pulgada.

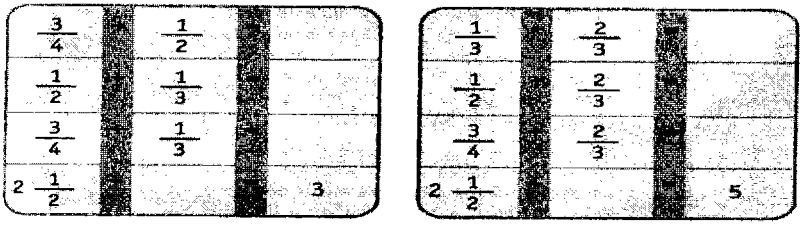


Estos se usan para resolver los siguientes ejercicios:

En esta página hay parejas de clavos que, puestos uno a continuación del otro, miden una pulgada. Encuentra esas parejas y escríbelas a continuación.

Hay otros dos clavos que unidos de cabo a cabo miden $\frac{3}{4}$ *de pulgada. ¿Cuáles son las medidas de estos dos clavos?*

En la siguiente página de la misma lección se propone una serie de operaciones con fracciones a resolver:



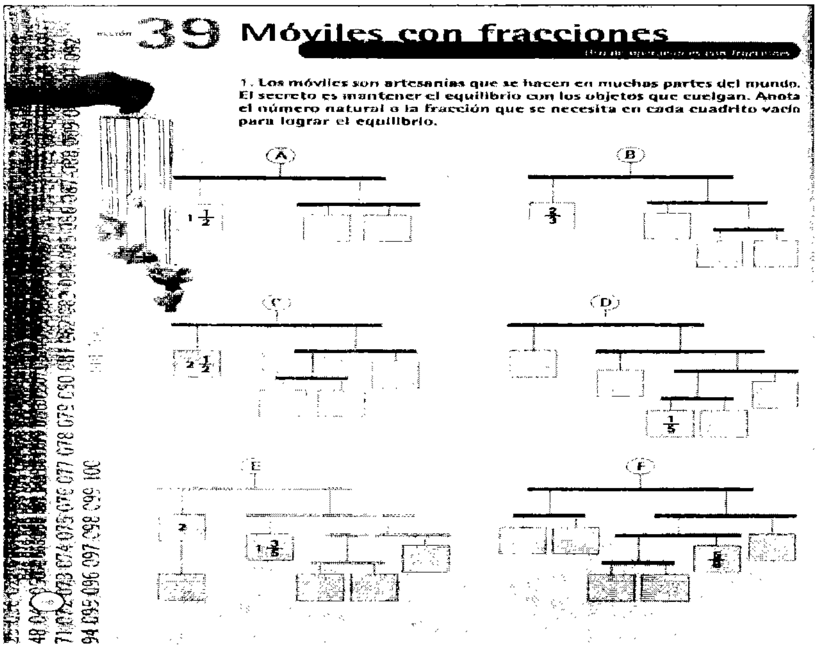
En sexto grado los problemas a resolver por los niños se complican.

En el fichero de sexto grado en la actividad "Suma y resta de fracciones" (Sexto grado, ficha 39, bloque V) se proponen problemas a resolver como:

1. El fin de semana Carlos y su papá subieron a la montaña que está a un costado del pueblo en donde viven. Tardaron $2\frac{3}{4}$ *horas para llegar a la cima de montaña; descansaron media hora y descendieron en* $1\frac{3}{4}$ *horas. Calcular la duración de la excursión.*

2. Se pide a los alumnos que dibujen en su cuaderno una banda llamada U de 15 centímetros. Luego construyen una banda en la que la medida es igual a $\frac{5}{3}$ *de la banda U y otra igual a* $\frac{6}{5}$ *de la banda U. Unen con cinta adhesiva ambas bandas e indican su medida con respecto a la banda U.*

En el libro de sexto grado, la lección que se propone es "Móviles con fracciones" (Sexto grado, lección 39, bloque III). El reto es mantener el equilibrio en los móviles que se le muestran al niño en la lección, anotando el número natural o fracción que se necesita en cada cuadrito vacío.



El uso de operaciones con fracciones se realiza en los tres grados, pero la mayoría de los problemas que se exponen son sólo para ejercitación.

También existen situaciones didácticas en donde se realizan actividades de suma de fracciones distintas, pero con la característica de que la operación es para obtener un entero. Éstas se encuentran desde el fichero de cuarto grado hasta el de sexto grado (en el fichero de tercero no existen).

Del fichero de cuarto mencionaremos la actividad “Para uno, ¿sobra o falta?” (Cuarto grado, actividad 31, bloque IV) en donde se muestra al alumno una fracción y se le pide que diga cuánto falta o sobra para tener un entero. Para esto se utiliza un juego de tarjetas. Cada tarjeta tiene por un lado la fracción que se muestra al alumno. Del otro lado está la fracción que se tiene que sumar o restar para obtener un entero. El alumno estima el resultado y después voltea la tarjeta para verificarlo. Por ejemplo, si el lado que se muestra tiene el numero $\frac{3}{5}$, por el otro debe tener $\frac{2}{5}$, porque $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ = 1. Si por un lado dice $\frac{8}{6}$, por el otro debe decir $\frac{2}{6}$, porque $\frac{8}{6}+\frac{2}{6}$ = 1. Así el alumno puede adquirir habilidad para calcular mentalmente la fracción que sobra o falta para que el resultado sea uno.

En la actividad "Partes no iguales" del fichero de quinto (Quinto grado, actividad 10, bloque II) se da a los alumnos 15 tiras de papel y una hoja rayada. Se dice a los alumnos que cada equipo va a trabajar con un denominador distinto. Las indicaciones a seguir son dividir las tiras en dos partes diferentes tomando en cuenta el denominador que les tocó. Por ejemplo si un equipo trabaja con quintos, puede partir su tira en $\frac{1}{5}$ y $\frac{4}{5}$, ó $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, o en caso de que trabajen con cuartos, los alumnos pueden dividir la tira de la siguiente manera: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$.

En el fichero de sexto, en la ficha "Iguales pero diferentes" (Sexto grado, ficha 23, bloque III) se proponen actividades en donde la suma de fracciones es mayor que un entero, pero se pide a los niños que identifiquen tanto el primer entero como el segundo, esto es para que los alumnos se familiaricen con el algoritmo que permite convertir una fracción impropia en una fracción mixta.

En la ficha se presentan los siguientes problemas:

1. En una tlapalería hay $\frac{5}{2}$ metros de soga. ¿Hay más o menos de un metro? ¿cuántos metros completos hay? ¿cuánto sobra?

2. Don Pedro, el lechero de la colonia Buenavista, utiliza un jarro de ¼ de litro para despachar la leche. Para tener control sobre las ventas y saber qué cantidad de leche entrega, diariamente lleva un registro de sus ventas. Éste es el registro semanal de las ventas de don Pedro:

Familia	*L*	*M*	*M*	*J*	*V*	*S*	*D*	*Total*
Ruiz	$5/4$	$5/4$	$7/4$	$4/4$	$6/4$	$8/4$	$7/4$	
Castro	$2/4$	$1/4$	$2/4$	$4/4$	$1/4$	$2/4$	$2/4$	
Vega	$8/4$	$7/4$	$8/4$	$8/4$	$6/4$	$5/4$	$3/4$	
Núñez	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	
Pasos	$5/4$	$5/4$	$4/4$	$5/4$	$5/4$	$5/4$	$5/4$	
González	$8/4$	$8/4$	$9/4$	$7/4$	$8/4$	$10/4$	$10/4$	
Total								

a. Calcular la cantidad de litros que consume cada familia por semana y completar la tabla

b. Calcular la cantidad de litros que vendió don Pedro cada día de la semana. ¿Qué día vendió más leche? ¿Cuántos litros vendió en la semana?

En todas las actividades anteriores los alumnos expresan el entero como suma de fracciones con igual denominador.

3.1.5 PARTICIONES

También existen situaciones didácticas que trabajan partes de partes, es decir división de partes de un entero, en donde se dibuja una fracción de un entero dividido en otra fracción. Éstas se presentan de modo que los alumnos establecen la medida de un segmento a partir de la comparación de éste con otros segmentos cuya medida es arbitraria o convencional.

Este tipo de actividades, en donde se ve cuántas veces cabe un pedazo en otro, se identifican desde el fichero de tercero y se realizan con material de unidades de medida arbitraria.

Por ejemplo en la ficha "Midiendo tiras" del fichero de tercero (Tercer grado, ficha 46, bloque IV) donde se trabaja con tiras de papel de colores y tamaños arbitrarios, el problema planteado es: ¿qué tira cabe 4 veces a lo largo de la tira roja?, ¿cuál cabe 2 veces a lo largo de la tira verde?, ¿cuál cabe 8 veces a lo largo de la tira blanca?, los alumnos establecen la medida de una longitud a partir de la comparación con otra longitud.

En el libro de tercero la lección a resolver es "Juguetes de madera" (Tercer grado, lección 60, bloque IV). Se muestran al alumno tiras de diferentes colores y tamaños para que resuelva problemas como los de la ficha anterior.

¿Cuál de las tiras es más larga?
¿De qué color es la tira más corta?

Hay dos tiras que son más largas que la tira roja, ¿cuáles son?

¿Cuáles tiras son más cortas que la tira roja?

¿Cuántas veces cabe la tira verde en la tira roja?

¿Es cierto que la tira roja mide lo mismo que dos tiras verdes?

¿Es cierto o no es cierto que la tira verde mide la mitad de la tira roja?

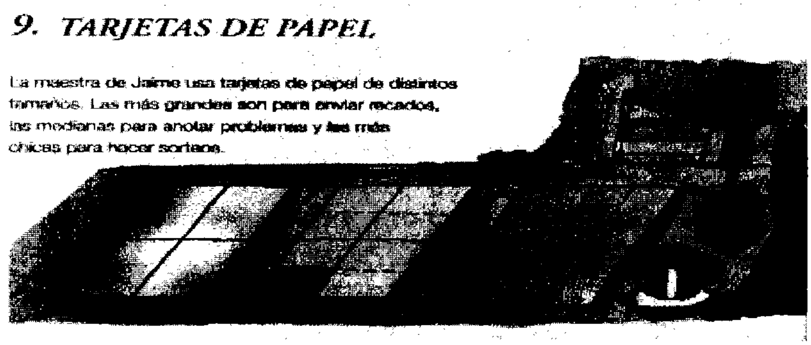
¿Por qué la tira amarilla mide la mitad de la tira verde?

En el fichero de cuarto grado, en la ficha "Rectángulos de colores" (Cuarto grado, ficha 22, bloque III) (mencionada en el apartado *"la equivalencia de fracciones")* se muestran cinco rectángulos de papel de diferente color. Después de que se realiza la actividad, se plantean preguntas como las siguientes:

¿Una figura roja, qué parte del rectángulo es? ¿Cuántas partes rojas se necesitan para formar un rectángulo? ¿Por qué? ¿Cuántas partes rojas se necesitan para cubrir una azul? ¿Cuántas partes amarillas puedo cambiar por una azul? ¿De qué color es la figura que representa la mitad de una figura verde?

De esta manera, además de mostrar gráficamente la equivalencia de fracciones, también se muestra en las partes de las fracciones el número de divisiones en las mismas.

En el libro de cuarto en la lección "Tarjetas de papel" (Cuarto grado, lección 9 bloque II) se muestran 3 hojas de papel divididas en 4, 8 y 16 partes, las cuales ayudarán a contestar problemas de medición en la lección y terminarán expresando los resultados en fracciones.



En el ejercicio 3 de la lección se pide completar las siguientes expresiones:

La tarjeta grande es $\frac{1}{4}$ de la hoja

La tarjeta mediana es _______ de la hoja.

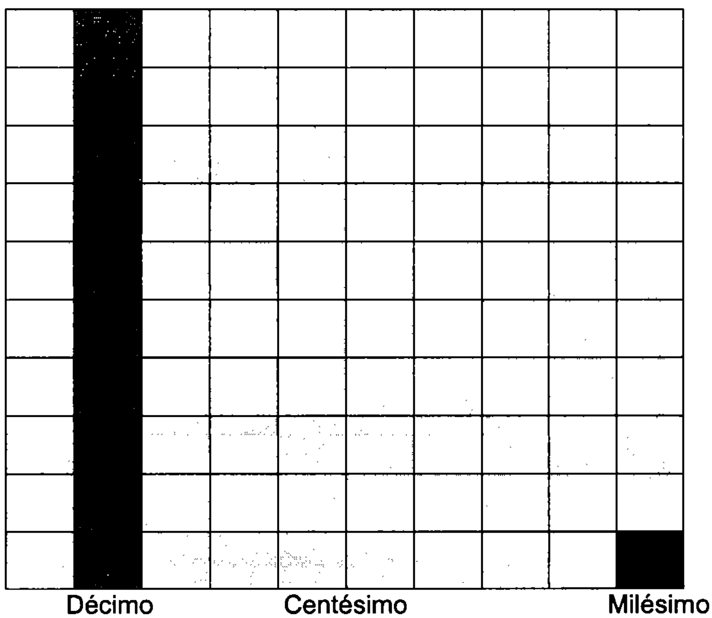
La tarjeta chica es _______ de la hoja.

Este tipo de situaciones didácticas no se proponen en los ficheros y lecciones de quinto y sexto.

En el fichero de quinto en la actividad "Decímetro, centímetros y milímetros" (Quinto grado, actividad 26, bloque I) se pide a los alumnos que dividan en 10 partes iguales una tira de cartoncillo de un metro de largo. Se les plantea la pregunta: ¿qué parte del metro representa cada uno de los segmentos? Se señala que cada segmento es la décima parte de un metro, llamado decímetro: $\frac{1}{10}$ de metro ó 0.1 de metro. Después se pide dividir un decímetro en 10 partes iguales, cada parte es la centésima parte del metro; se llama centímetro: $\frac{1}{100}$ de metro o 0.01

Por último, se divide un centímetro en 10 partes iguales, se les pregunta: ¿qué parte del metro ocupa un centímetro? ¿qué parte del metro ocupa un milímetro?. Cada uno de estos segmentos es la milésima parte del metro; se llama milímetro: $\frac{1}{1000}$ de metro ó 0.001 de metro.

En el libro de quinto, en la lección "Más sobre lo decimales" (Quinto grado, lección 35, bloque II), se trabaja la equivalencia entre fracciones con denominador 10, 100 y 1000 y su escritura utilizando el número decimal.



El alumno tendrá que contestar las siguientes preguntas con ayuda de la figura anterior llamada rectángulos-unidad:

1. Juan coloreó las cantidades siguientes en sus rectángulos-unidad:

$\frac{75}{100}$, $\frac{40}{10}$ *y* $\frac{10}{1000}$

Paula coloreó lo siguiente:

$^{4000}/_{1000}$, $^{10}/_{10}$ *y* $^{10}/_{1000}$

¿Quién coloreó más?

Rosa coloreó esto en sus rectángulos-unidad:

$^{1000}/_{1000}$, $^{50}/_{100}$ *y* $^{10}/_{10}$

Pedro coloreó esto:

$^{500}/_{1000}$, $^{10}/_{10}$ *y* $^{100}/_{100}$

¿quién coloreó menos? ¿cómo lo sabes?

2. José dijo: Yo coloreé $^{78}/_{100}$ *y* $^{10}/_{10}$. *Joel dijo: Yo coloreé* $^{80}/_{100}$, $^{2}/_{10}$ *y* $^{1500}/_{1000}$.

¿Alguien coloreó más de dos rectángulos-unidad? ¿Quién?

¿Alguien coloreó menos de un rectángulos-unidad? ¿Quién?

Representa, coloreando en tus rectángulos-unidad, un número mayor que el que representó José y un número menor que el que representó Joel.

En el fichero de sexto la actividad relacionada con partes de partes es la ficha "¡Tengo menos cifras pero soy más grande!" (Sexto grado, ficha 15, bloque III, ejercicio 2) en donde se muestran tres formas diferentes del número 7.42

$$7.42 = 7 + 0.42$$

$$7.42 = 7 + \frac{42}{100}$$

$$7.42 = 7 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100}$$

En esta actividad el niño no sólo representa los números decimales con números fraccionarios, también representa fraccionariamente la división de partes de un entero al interpretar $\frac{42}{100}$ como la suma $\frac{4}{10} + \frac{2}{100}$.

En el libro de sexto, la lección "El peso de las sustancias" (Sexto grado, lección 33, bloque 2) se relaciona con la actividad del fichero mencionado en el aspecto de sumar decimales, como se verá en el siguiente ejercicio:

Número	Parte entera	Parte Decimal	Entero siguiente	Diferencia entre el número y el entero siguiente
1.00				
0.68				
13.60	13	60 centésimos	14	40 centésimos
0.9				
1.835				
1.03				
0.9				
1.835				
1.03				
0.26				
8.96				
2.89				
19.31				
7.85				
11.34				

Al completar la tabla como el ejemplo lo indica, el alumno estará sumando milésimos con centésimos, décimos con centésimos, etc. Así también se pretende lograr representar partes de partes y al sumarlas representar un entero.

3.1.6 UBICAR FRACCIONES EN SUPERFICIES Y MODELOS LINEALES

Las fracciones en la medición están involucradas también en situaciones didácticas en las que se pide a los niños que ubiquen una fracción determinada en segmentos de distintas medidas o sin medidas.

En el fichero de tercero se comparan diferentes formas gráficas de reparto, por ejemplo en la ficha "Partes y dobleces" (Tercer grado, ficha 8, bloque I, II) se realiza el reparto de un pastel entre dos niños del cual resultarán diferentes formas de reparto, el alumno las comparará mediante preguntas como: *¿a cada niño le tocó la misma cantidad de pastel? ¿Sobró pastel? ¿Cuánto le tocó a cada niño?*

Es probable que para repartir el pastel algunos niños corten la hoja por la mitad y que otros hagan más cortes, obteniendo pedazos como los que se muestran en la figura 3. El objetivo es que el alumno se percate de que existen diferentes maneras para repartir una unidad entre dos y que las fracciones ($\frac{1}{2}$) pueden obtenerse mediante distintas particiones.

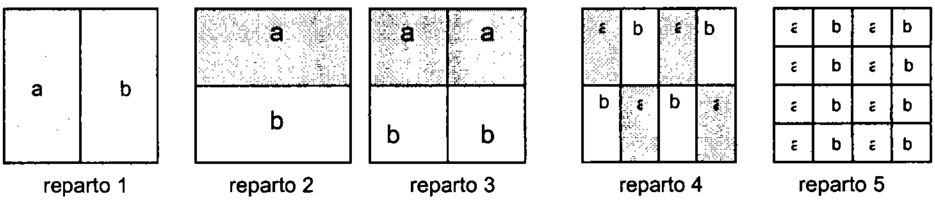
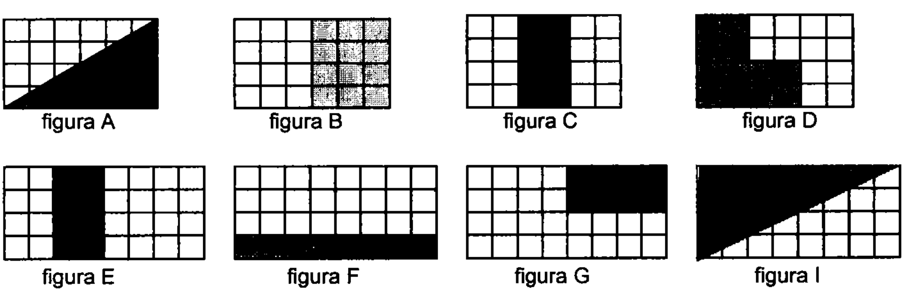


Figura 3

En la ficha "Dibujos para una misma fracción" (Tercer grado, ficha 31, bloque III) se trabaja con más particiones gráficas en las cuales se ubican diferentes fracciones ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$) y la cantidad de cuadritos que representan en diferentes arreglos rectangulares como los que se presentan en las siguientes figuras.



En esta actividad se pretende que el alumno observe de cuántas maneras puede representar gráficamente una misma fracción. Por ejemplo, para representar ½ se pueden usar las figuras A, B, D, I; para representar $\frac{1}{4}$ se pueden usar las figuras E, F, G; para representar $\frac{1}{3}$ se usará la figura C.

En el libro de matemáticas de tercero, en la lección "Las trenzas de Mónica", hacen uso de las fracciones para expresar medidas de longitud. En los ejercicios de la lección se trabaja con énfasis la noción de mitad exponiendo un problema a resolver:

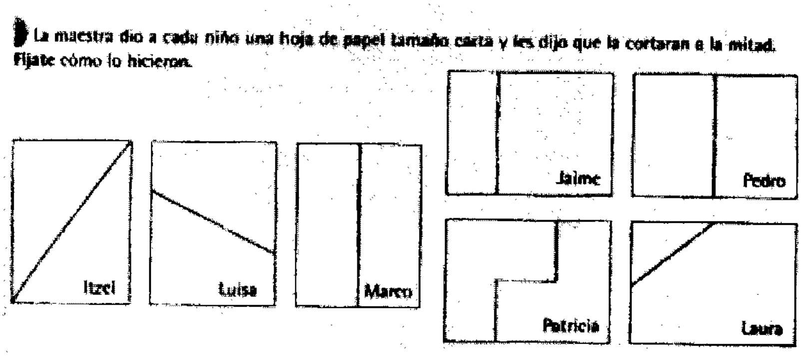
Mónica compró un metro de listón para sus 2 trenzas ¿en cuántas partes iguales tuvo que cortar el metro de listón?¿Qué cantidad usó para cada trenza?

Itzel se quiere hacer 2 trenzas porque va a salir en un bailable. Compró 3 metros del listón con los colores de la bandera ¿qué cantidad de listón usó Itzel para cada trenza?

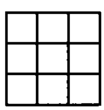
Rosa compró un metro de listón para hacer 4 moños iguales ¿qué parte del metro de listón usó para cada moño? ¿Cuánto listón usó para 2 moños?

Se observa que para el problema de Itzel se aumenta el número de listones obteniendo como respuesta: "la mitad". De la misma manera ocurre en el problema de Rosa, pues se aumenta el número de partes a dividir pero conduciendo al niño a la noción de mitad con la pregunta *¿cuánto listón usó para 2 moños?*

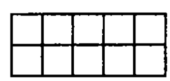
En los siguientes ejercicios de la misma lección se trabaja gráficamente la noción de mitad, mostrando al alumno las distintas formas de obtener la mitad de una misma figura. Además se muestra al alumno la mitad de figuras de distinto tamaño, de modo que él observe que la mitad de objetos diferentes, significa lo mismo. El ejercicio 3 dice "La maestra dio a cada niño una hoja de papel tamaño carta y les dijo que la cortaran a la mitad. Fíjate como lo hicieron." En el cual el alumno tendrá que identificar cuales no representan un medio (Jaime y Laura).



En el fichero de cuarto, en la ficha "El patio de doña Martha" (Quinto grado, ficha 11, bloque II) se usan como segmentos figuras cuadradas, una con 9 partes que hay que dividir entre dos y otra con 10 partes que hay que dividir entre 3 . En las figuras se ubican diferentes fracciones ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$), así los alumnos fraccionan una misma unidad de diferentes formas.



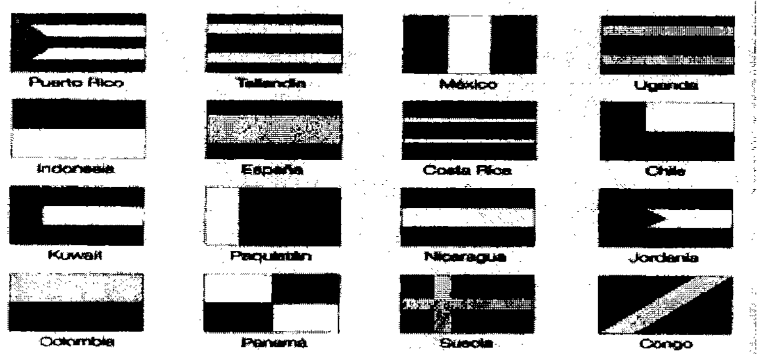
. dividir en 2 partes



dividir en 3 partes

Esta actividad puede parecer similar a la que se presentó en esta misma situación didáctica del fichero de tercero (Tercer grado, ficha 31, "Dibujos para una misma fracción", bloque III) pero en este caso el número total de cuadros, que están dentro del cuadrado a dividir entre dos, es nueve. O el número total de cuadros a dividir entre tres, son 10. Es decir, aunque numéricamente el alumno pueda representar el reparto como $\frac{9}{2}$ o $\frac{10}{3}$ según corresponda, gráficamente se le puede dificultar pues se tiene un numerador no divisible por el denominador.

En el libro de cuarto, en la lección "El día de la ONU" (Cuarto grado, lección 1, bloque II) se muestran banderas de distintos países del mundo con la particularidad de que éstas son trazadas por líneas, este detalle se aprovecha para que el alumno pueda ubicar las fracciones correspondientes a las partes de cada bandera.



Todas las banderas aparecen sin escudo porque no las han terminado.

Sonia dice que todas las banderas divididas en tres partes, están divididas en tercios.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Sonia?

¿Es cierto que la bandera de Chile está dividida en tercios? ¿Por qué?

Para realizar el ejercicio, además de mostrarles las distintas banderas, se le pide completar una tabla en la cual deberán señalar qué tipo de parte (mitades, tercios, cuartos, quintos o sextos) corresponde a cada bandera.

País	Mitades	Tercios	Cuartos	Quintos	Sextos
Puerto Rico	no	No	no	no	no
Tailandia					
México					
Uganda					
Indonesia					
España					
Costa Rica					
Chile					
Kuwait					
Paquistán					
Nicaragua					
Jordania					

Colombia					
Panamá					
Suecia					
Congo					

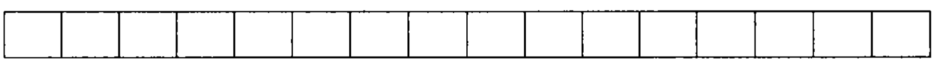
¿Es cierto que la parte blanca de Paquistán es ¼ ? ¿Por qué?

¿Qué fracción de la bandera de Chile está coloreada de rojo?

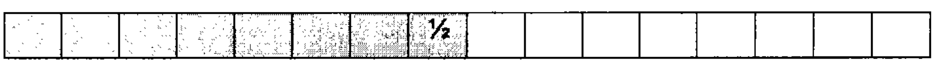
¿Qué fracción de la misma bandera tiene color blanco?

¿Y qué fracción tiene color azul?

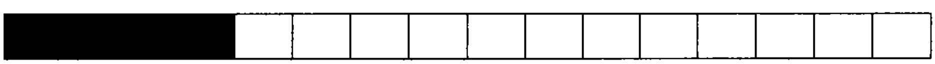
Otra lección a mencionar es "La tienda del pueblo" (Cuarto grado, lección 4, bloque I), en el ejercicio 6 se muestra una tira dividida en 16 partes iguales, se propone colorear de rojo ½ de la tira, de azul ¼ de la tira, de verde $1/8$ de la tira y de amarillo $1/16$ de la tira.



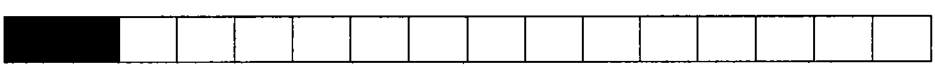
Se colorea ½ de la tira:



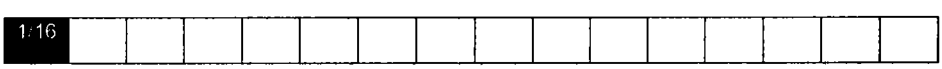
Se colorea ¼ de la tira:



Se colorea $1/8$ de la tira:



Se colorea $1/16$ de la tira:



La pregunta a contestar en este ejercicio es ¿qué parte quedó sin colorear?. Y al ubicar las anteriores medidas en una sola tira (una sobre otra) (no unidas), se obtiene la mitad de la tira sin colorear:

En esta actividad se señala la subdivisión de las partes de una unidad, siendo éstas de gran ayuda para establecer la equivalencia de fracciones como la relación de orden entre ellas; en este caso, el uso de la recta numérica constituye una representación muy útil de los números para estudiar algunas de sus propiedades, especialmente las que tienen que ver con el orden. Este tema se ve a partir de quinto grado.

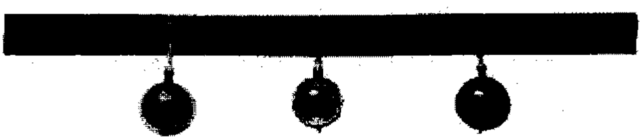
En el fichero de quinto hay diversas actividades para desarrollar esta situación didáctica, en la cual se seleccionan segmentos como fracciones de unidades de medida como el metro o la recta numérica. Por ejemplo en la ficha "Midiendo con fracciones de metro" (Quinto grado, ficha 5, bloque I) se trabaja con 6 tiras que miden un metro, una se divide por la mitad, se corta y se escribe en cada mitad su longitud ($\frac{1}{2}$ metro). De la misma manera se fraccionan las demás tiras de un metro en cuartos, octavos, tercios, sextos y quintos. Posteriormente se traza una línea que mida más de un metro y menos de dos, como es: 1.50 m, 1.75 m, 1.25 m, 1.70 m, 1 metro más $\frac{2}{3}$ de metro y 1 metro más $\frac{1}{3}$ de metro. Se estima cuánto miden las líneas y se comprueba midiéndolas usando las tiras fraccionadas, para obtener respuestas como: tal línea mide 1 metro más un cuarto o cinco cuartos. Esta actividad, además de lograr que el alumno ubique una fracción determinada en segmentos, introduce al alumno a la suma de enteros con fracciones.

Otra actividad que se tomará como ejemplo de fracciones de medida de la recta numérica en el fichero de quinto es "Localizando números" (Quinto grado, ficha 67, bloque V). Se le pide al alumno que escriba una fracción con denominador 3 comprendida entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, otra con denominador 6 comprendida entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$, dos fracciones entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{8}{3}$, se pide que representen las fracciones en la recta numérica y también se logra que el alumno obtenga una lista de orden de números fraccionarios.

En el fichero de quinto en la actividad “Con una hoja rayada” (quinto grado, ficha 9, Bloque II) se pide a los niños que tracen líneas rectas de igual medida, a las que les pone el número 0 al principio y el número 1 al final. Los niños dividen la distancia de cero a uno en seis, en siete, en nueve y en diez partes iguales, usando una hoja rayada. Se anotan en el pizarrón las siguientes fracciones: $\frac{1}{6}, \frac{3}{7}, \frac{9}{9}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}$. Se le pide al niño que en primer lugar trate de ordenarlas de la más grande a la más chica; en segundo, ubique las fracciones en la recta que les corresponde y, en tercero, verifique si el orden que estableció es correcto o no.

En estas actividades, además de comparar fracciones resultantes y encontrar su equivalencia, los niños también logran obtener una relación de orden entre ellas.

En el libro de quinto en la lección “Adornos con listones” (Quinto grado, lección 14, bloque I) se marca un listón con esferas colgando, se indica que el listón es una unidad para preguntar ¿qué fracción es cada parte?



Con la ayuda de la ilustración el alumno sabrá de qué manera están colocadas las esferas. Se le hacen preguntas para diferentes listones con esferas a diferentes distancias como: ¿qué fracción le corresponde a la esfera verde? ¿Qué fracción es cada parte?, o indicaciones como: Pinta de color rojo la esfera que está a $^{3}/_{4}$ del extremo izquierdo ó pinta de color azul la esfera que esté a $^{3}/_{5}$ del extremo izquierdo.

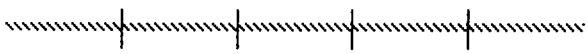
En el fichero de sexto en la primera actividad de la ficha “Iguales pero diferentes” (Sexto grado, ficha 22, bloque III) se pide a los alumnos resolver un problema de fracciones como resultado de medición, pero con sus propios procedimientos.

1.- En una tlapalería hay $^{5}/_{2}$ *metros de soga. ¿Hay más o menos de un metro?*

¿cuántos metros completos hay? ¿cuánto sobra?

Después de que los alumnos terminen de resolver el problema, uno de ellos pasa al pizarrón a explicar como lo resolvió. A continuación el maestro les presenta el siguiente procedimiento para resolver el problema.

La siguiente ilustración representa los $\frac{5}{2}$ metros de soga. Como se observa, hay dos metros completos y sobra $\frac{1}{2}$ metro, por tanto hay $2\frac{1}{2}$ metros de soga.



En esta actividad los alumnos convierten una fracción impropia en una fracción mixta y viceversa, con la característica de poder resolver el problema usando un modelo lineal.

En el libro de sexto en la lección "Listones para los moños" (Sexto grado, lección 8, bloque I), en el ejercicio 5 se muestran carretes de listones, de los cuales se harán moños iguales, sin que sobre listón, éstos se indican a continuación:

5 metros para 3 moños.	4 metros para 7 moños.
10 metros para 7 moños.	8 metros para 7 moños.
6 metros para 7 moños.	3 metros para 3 moños.
10 metros para 6 moños.	

Se señala que hay dos moños que ocuparán la misma cantidad de listón, se pide a los alumnos que expresen con fracciones tales medidas, además de representarlas en una recta como la que sigue:

En este ejercicio se pretende que el alumno ponga en práctica la equivalencia y el orden entre números fraccionarios y use la recta numérica para representarlos.

Las situaciones didácticas para el uso de fracción presentadas en la escuela primaria están asociadas a contextos tan diversos como las unidades del sistema métrico decimal (medio kilo, tres cuartos de litro, etc.), períodos temporales (un cuarto de hora, media hora, etc..) o situaciones de reparto o descuento (la tercera parte de la ganancia). Éstas cumplen con el objetivo de presentar un reto a los niños para que éstos puedan generar sus propios recursos, a fin de resolver los problemas planteados a partir de lo que ya saben y que sus recursos, informales al principio, evolucionen poco a poco con la experiencia en la solución de los problemas, mediante la tarea involucrada en las actividades, como comparar sus resultados con sus compañeros y/o resolverlos con la ayuda del maestro.

Como hemos visto, las fracciones se trabajan a partir de tercer grado de primaria, abarcando los distintos significados de éstas. Las situaciones se van complicando añadiendo variables didácticas en los grados superiores. Esto se ve claramente cuando al resolver las primeras situaciones de reparto el "todo" a repartir es un solo elemento y la variable didáctica en el grado posterior es aumentar el número de elementos y/o el número en que se divide. Podemos mencionar que las situaciones de reparto son particularmente importantes porque propician en los niños el desarrollo de las habilidades de subdivisión en partes iguales y de manera exhaustiva. Además, éstas están relacionadas con actividades que permiten cuantificar de manera implícita (por ejemplo oralmente, la "mitad" del entero es igual a ½ del entero) la fracción resultante de un reparto.

Como ya mencionamos, a la variedad de actividades que se presentan en las situaciones didácticas se agrega la característica de manejar variables didácticas cuantitativas como son: continuas (como la división de superficies) y discretas (como el reparto de pasteles).

Otras de las situaciones didácticas que se presentan son las que desarrollan la acción de comparar, las cuales son de ayuda ya que en éstas se define la construcción de equivalencia y orden entre las fracciones.

El uso de modelos de apoyo (región, segmentos, recta numérica, tablas de razones...) sirve de "puente" para la solución de diferentes situaciones problemáticas en diferentes contextos.

De este resumen de ejercicios que se desarrollan en la escuela primaria para la noción de fracción, podemos apreciar que hay un real esfuerzo por abordar todos los contextos en los que se encuentra la misma y presentarlos a los alumnos como problemas a resolver.

Debemos señalar que el contexto en el que se ordenan las fracciones y se ubican en la recta es el menos trabajado en los materiales que analizamos.

De esto podemos señalar que la sugerencia expuesta en el capítulo 1, la cual señala la conveniencia de visualizar en una recta las propiedades de los números racionales, puede ser considerada como un problema interesante porque enfrenta a los niños a resolver una nueva situación didáctica como es el ubicar fracciones en una recta, así como poner en juego algunas características de éstas.

Por esta razón, se desarrolló y puso a prueba el juego "A romper globos", el cual se describirá en el capítulo 4. Dicho juego fue diseñado teniendo en cuenta las características que debe cumplir una situación didáctica, así como el enfoque didáctico de la enseñanza de las matemáticas y la importancia del docente, todo esto ya mencionado en el capítulo 2.

CAPÍTULO 4. "A ROMPER GLOBOS". ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

A pesar de que existen muchos sitios en internet sobre matemáticas, la mayoría están formados por actividades de ejercitación de operaciones. El propósito del Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC), específicamente de la sección *MATECHAVOS*[1] (http://www.puemac.matem.unam.mx), es aprovechar el medio para plantear actividades ***interactivas*** en las que se pongan en juego los conocimientos escolares de manera informal.

Las actividades están diseñadas con un concepto de interacción que enfrenta a los niños se enfrentan a retos, que los lleva a tomar decisiones que tienen efectos sobre lo que sucede en la pantalla. Tales efectos permiten reflexionar sobre lo decidido, reconsiderar y desarrollar nuevas estrategias.

El propósito de este sitio es proporcionar a los niños un espacio en Internet donde puedan "hacer matemáticas", es decir, donde encuentren situaciones desafiantes que puedan ser resueltas de diversas maneras y que permitan descubrir el significado de algunas herramientas matemáticas, a través de la formulación de hipótesis y su verificación. Las matemáticas se desarrollan mediante el uso de ideas y conceptos conocidos, para desarrollar otros. Los estudiantes deberán aprender a observar, generalizar, hacer hipótesis y probarlas basándose en información conocida y desarrollando nuevas herramientas si así se requiere.

El personal académico responsable de esta sección se ha preocupado porque todos los juegos que se presentan tengan características similares:

- *Pueden ser resueltos a través de diferentes estrategias.*

---

[1] "Matechavos" es una de las secciones de PUEMAC (Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, http://puemac.matem.unam.mx) desarrollado por el Instituto de Matemáticas y Computo para Niños de DGSCA, ambas instituciones de la UNAM. PUEMAC está bajo la coordinación de la M. en C. Mónica Leñero Padierna.

- *Son interactivos, porque proporcionan una validación visual de las acciones de los niños.*
- *Pueden ser jugados varias veces y en distintos momentos hasta encontrar la estrategia para ganar siempre.*
- *Pueden ser jugados por niños de diferentes edades.* (M. Kriscautzky, P. Martínez, G. González; 2002).

La actividad a aplicar y analizar es el juego llamado "***A romper globos***"[2]. Con él se simula, en cierto sentido, el juego de la feria. Consiste en que el niño rompa globos con dardos. Los globos aparecen sobre una barra que mide una o dos unidades. Para reventarlos se debe estimar en qué fracción de la barra se encuentra cada uno de los globos.

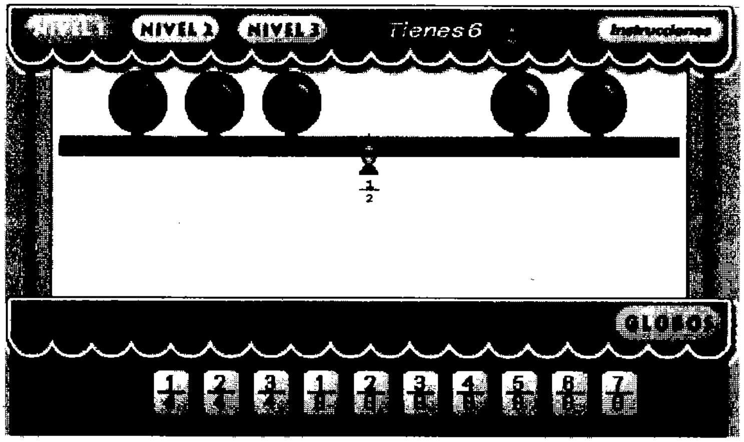
El juego tiene tres niveles de dificultad. En todos los casos aparece un botón llamado ***globos***. Al oprimir este botón se colocan aleatoriamente sobre la barra cinco globos. Para romperlos, los niños tienen que estimar en qué fracción se encuentra cada uno.

Nivel 1. En este nivel la barra mide una unidad y se pueden usar fracciones con denominadores 2, 4 y 8. El niño dispone de 7 dardos para romper los 5 globos que aparecen.

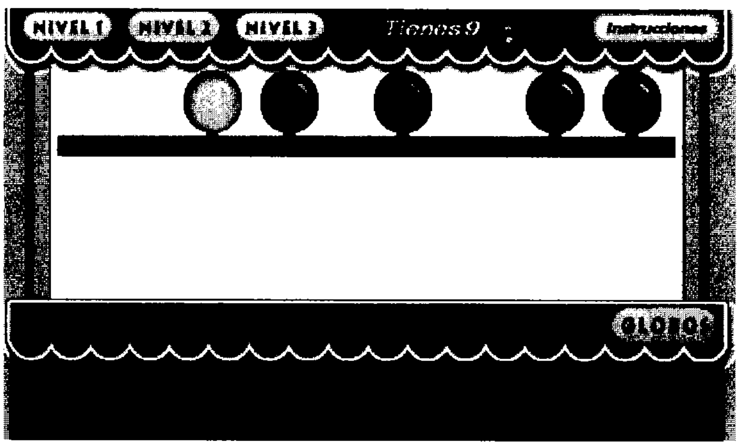
El niño "lanza" el dardo indicando en qué fracción quiere que se clave. Por ejemplo, si elige ½, haya o no un globo ahí, el dardo queda "clavado" y la fracción se escribe. Esto puede ser útil para estimar los siguientes dardos.

---

[2] Idea original: David Block Sevilla y Patricia Martínez Falcón; Programación: Gildardo Bautista García Cano; Diseño: Cecilia Soto Ruíz.

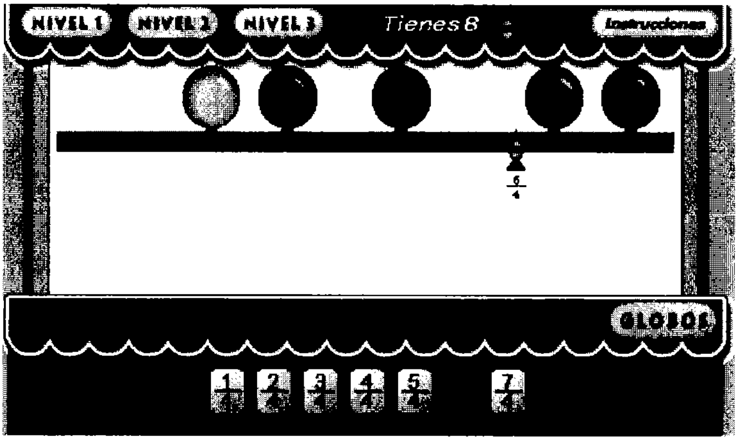


Nivel 2. En este nivel la barra donde se colocan los globos mide 2 unidades. Después de colocar los globos aparecen tres controles que representan los denominadores que pueden utilizarse: 2 ,4 y 8.

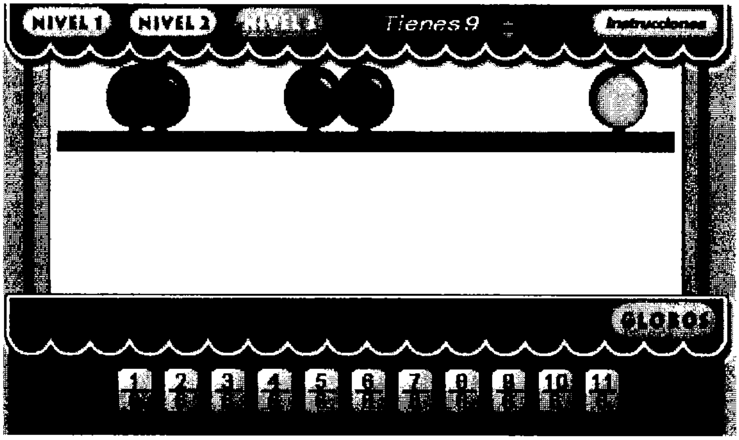


Sin embargo, dado que la barra mide 2 unidades, ahora se tienen más fracciones para elegir. Las fracciones están representadas como fracciones impropias, es decir, en lugar de aparecer la fracción $1\frac{2}{4}$, se encuentra $\frac{6}{4}$.

Los niños disponen de 9 dardos para romper los globos.



Nivel 3. En este nivel la barra mide 2 unidades. Los denominadores que pueden utilizarse son 2, 3, 4 y 6. Igual que en el nivel anterior, al oprimir uno de los controles que representan los denominadores, aparecen todas las fracciones que pueden utilizarse con dicho denominador.



El propósito de la actividad es que el niño ponga en juego algunos conceptos, operaciones y características de las fracciones:

- **Las fracciones en la recta numérica.** Los niños tienen que ubicar fracciones con distinto denominador en una recta sin numerar.

- **Relación de orden de las fracciones.** Con el juego los niños practican el orden de fracciones de menor a mayor.

- **Fracciones equivalentes.** Los niños pueden validar visualmente la equivalencia de fracciones por ejemplo, $\frac{4}{6}$ es igual a $\frac{2}{3}$.

- **Fracciones propias.** Se trabajan fracciones menores que un entero

- **Fracciones impropias.** Se pone en práctica el uso de fracciones impropias menores que dos enteros, por ejemplo para representar $1\frac{3}{4}$ se usa $\frac{7}{4}$.

- **Fracciones iguales a la unidad.** Las fracciones que representan una unidad se muestran como fracciones impropias: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$.

- **Suma y resta de fracciones.** Al ubicar varias fracciones en la recta se propicia la suma y resta de fracciones. Por ejemplo, si hay un globo a reventar en $\frac{5}{8}$ y el niño ha ubicado en la recta fracciones como $\frac{1}{8}$ y $\frac{4}{8}$, el niño podrá ubicar el globo a reventar mediante la suma de fracciones como $\frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Para llegar a la versión del juego presentada anteriormente, se llevó a cabo un proceso de experimentación que propició la realización de algunos cambios.

En la primera versión del juego se habían considerado más fracciones tomando en cuenta los planes y programas de educación primaria. Sin embargo, a partir de la experimentación con niños de sexto grado se observó que era difícil resolver con éxito la situación. Esto dio lugar a los cambios que se aprecian actualmente en el juego, con relación al tamaño de la barra donde se colocan los globos y las fracciones que pueden utilizarse.

En la tabla 1 se muestran, en términos generales, los cambios que se hicieron en cada una de las versiones del juego:

Nivel de dificultad	Primera versión	Segunda versión
Nivel I	Barra: 1 unidad Denominadores: 2, 3, 4, 8	Barra: 1 unidad Denominadores: 2, 4, 8
Nivel 2	Barra: 1 unidad Denominadores: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12	Barra: 2 unidades Denominadores: 2, 4, 8
Nivel 3	Barra: 2 unidades Denominadores: 2, 3, 4, 5, 6	Barra: 2 unidades Denominadores: 2, 3, 4, 6

Tabla 1. Características del juego en la primera y segunda versión

La primera versión del juego se experimentó con 5 niños de sexto grado de una primaria pública del D. F. Cada niño trabajó dos veces con cada nivel de dificultad. Como se puede apreciar en la tabla 2, los niños sólo pudieron resolver el nivel 1 de la actividad, pero ninguno logró romper los 5 globos en el nivel 2 ni en el nivel 3. Por otro lado, como se verá en el análisis, los globos que rompieron en estos dos niveles, estaban ubicados en fracciones relativamente fáciles de identificar.

niño	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3	
	primero	segundo	primero	segundo	primero	segundo
Luis	4	**5**	1	2	3	3
Andrea	**5**	**5**	2	2	3	4

Israel	**5**	**5**	3	3	3	3
Carlos	3	4	2	4	3	3
Andres	**5**	4	4	4	3	4

Tabla 2. PRIMERA VERSIÓN DEL JUEGO. Desempeño de los niños en la actividad, en los tres niveles de dificultad. Se indican los globos que lograron romper en cada caso.

La primera experimentación permitió observar algunos problemas del juego en dos sentidos: las variables del juego (longitud de la barra y fracciones a utilizar) y los conocimientos que tenían los alumnos sobre las fracciones.

Se hicieron modificaciones al juego y se volvió a experimentar con los mismos cinco niños y otros 5 más. Su desempeño se puede observar en la tabla 3. Si bien no fue totalmente exitoso, se aprecia que hay más niños que lograron romper todos los globos en los niveles 2 y 3.

niño	primer nivel		segundo nivel		tercer nivel	
	primero	segundo	primero	segundo	primero	segunda
Luis	**5**	**5**	**5**	3	3	2
Andrea	**5**	**5**	**5**	3	2	**5**
Israel	**5**	**5**	**5**	3	**5**	**5**
Carlos	4	**5**	4	4	3	**5**
Andrés	**5**	**5**	**5**	**5**	4	**5**
Miguel	**5**	3	3	**5**	3	3
Beto	**5**	**5**	4	**5**	4	**5**
David	**5**	**5**	3	**5**	**5**	3
Mónica	2	**5**	3	**5**	2	3
Javier	2	**5**	3	**5**	4	3

Tabla 3. SEGUNDA VERSIÓN DEL JUEGO. Desempeño de los niños en la actividad en los tres niveles de dificultad. Se indican los globos que lograron romper en cada caso

A continuación se presentará el análisis de cada uno de los niveles de dificultad, empezando por el nivel 1, que es el de menor grado. Después se habla del nivel 2, que se considera un grado de dificultad intermedio y finalmente se presenta el nivel 3, considerado de dificultad mayor.

Para cada uno de los niveles se muestra el análisis de la primera versión explicando las dificultades que tuvieron los niños; después se comentan los aspectos que se tomaron en cuenta para hacer modificaciones al juego en este nivel para crear la segunda versión y hacer una segunda experimentación. Además se muestran imágenes que representan lo que hicieron los niños en los cuales se indica el color de cada globo y, entre paréntesis, el orden en que fueron lanzados los dardos.

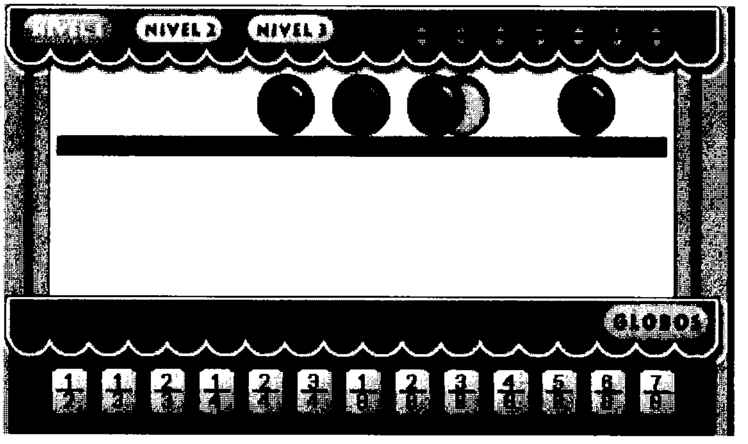
Se comenta lo que se obtuvo en la segunda experimentación con los mismos 5 primeros niños entrevistados, lo que nos permite observar la evolución de sus estrategias, además los resultados de los 5 niños que restan son muy similares a los primeros ya entrevistados.

Finalmente, se hace una reflexión sobre las dificultades que siguieron teniendo los niños en el desarrollo de la actividad, lo que lleva a pensar en qué tipo de actividades debería trabajarse más en la educación primaria con relación a las fracciones.

4.1 Primer nivel, primera versión.

Éste es considerado un nivel sencillo que se puede trabajar desde tercer grado. En la primera versión para este nivel, la barra en la parte superior de la pantalla representa un entero. Se presentan siete dardos a usar. Al aparecer los globos, simultáneamente aparece la serie de fracciones.

Las fracciones que pueden utilizarse son medios, tercios, cuartos y octavos, todas menores que un entero (fracciones propias).

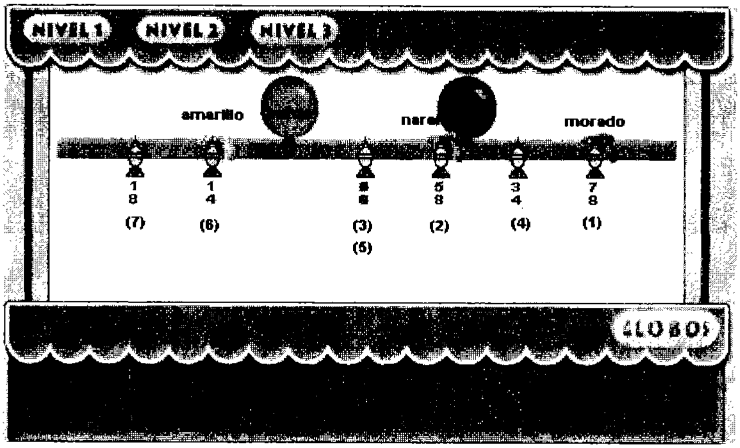


Esta versión se trabajó con 5 niños y se observaron varias dificultades para el desarrollo de la actividad, que a continuación se anuncian:

1.- Estiman la posición de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{8}$ ordenando los denominadores como números naturales. Una de las dificultades más sobresalientes es que los niños calculaban las primeras fracciones de la serie de acuerdo al orden de los números naturales en los denominadores. Veamos los siguientes casos.

Carlos

Con el sexto dardo quiere romper el globo verde y estima que está en la fracción ¼.



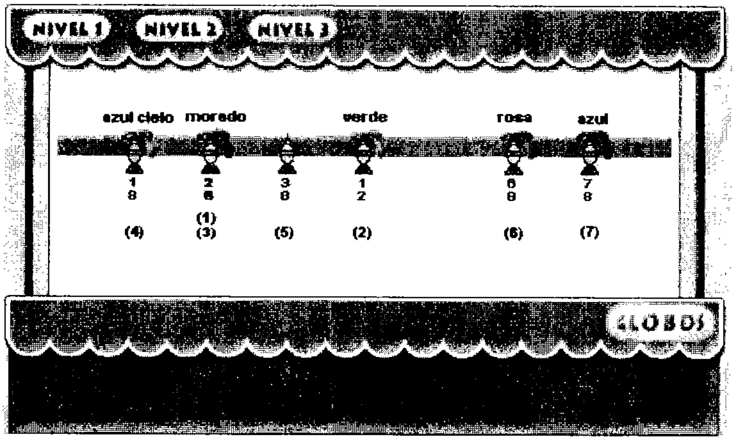
Carlos.- (...) Con ¼ sí le pego al verde (tira y le da al globo amarillo), entonces con ⅛ ... (tira el último dardo y falla)

Fue muy común que los niños que trabajaron con el juego tuvieran dificultades para ordenar fracciones. Muchos se fijaban sólo en el denominador para determinar el lugar de una fracción en la recta, como lo hace Carlos, quien pensó que ⅛ es mayor que ¼ porque 8 es mayor que 4.

Andrea

Los primeros tres tiros de Andrea son ¼ , ½ y ⅜. La fracción ⅜ se encima a la fracción ¼*, de manera que no se distinguen con claridad las 2 fracciones lanzadas.

* En la segunda versión, se logró que las fracciones equivalentes quedaran unas abajo de otras.



Para el cuarto dardo tira $\frac{1}{8}$ para el globo rosa (toma como referencia la fracción del globo verde y dice que $\frac{1}{8}$ está más a la derecha de ½). Se sorprende cuando ve $\frac{1}{8}$ en el lado izquierdo de la pantalla. Nuevamente aparece la estimación que hacen los niños fijándose en las fracciones como si fueran números naturales. Si el 8 de $\frac{1}{8}$ es mayor que el 2 de ½, entonces es una fracción más grande.

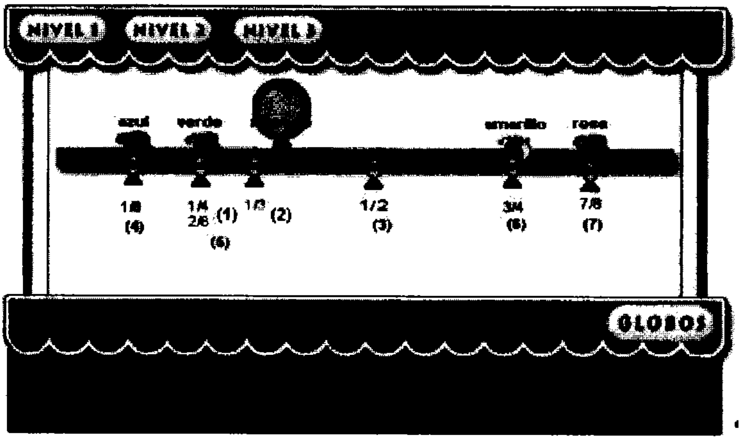
Para el quinto dardo le sucede lo mismo. Dice que $\frac{3}{8}$ debe caer más lejos que el globo rosa. Tira el dardo y falla.

Al observar la distancia entre las fracciones $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{8}$, logra estimar que aumentando 3 pedacitos del mismo tamaño puede romper el globo rosa.

Este es un ejemplo en donde un niño suma la misma fracción ubicada en la recta para poder romper un globo. Tenía $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{8}$. Con tres veces más la misma fracción llega a $\frac{6}{8}$ y logra reventar el globo rosa.

Luis

Luis en primer lugar toma $\frac{1}{4}$ y le atina al globo verde.

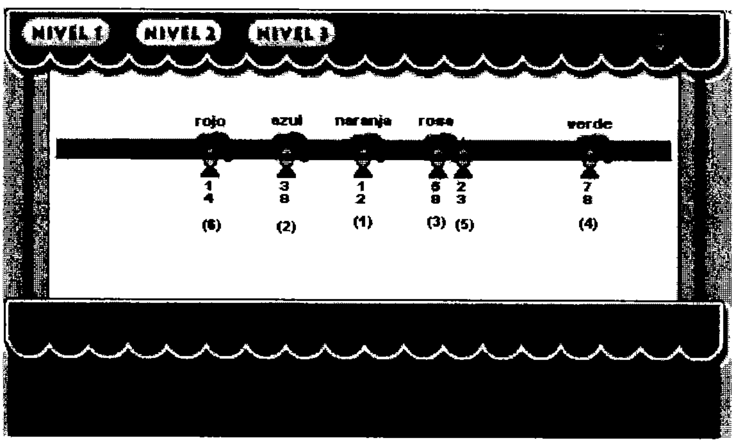


Luis.- sÍ ... ahora el globo azul está en $\frac{1}{3}$ (tira), ¡he fallado!

Como se ve nuevamente aparece la idea de que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{4}$ porque el 3 es menor que el 4.

Israel

Él ya tiró 4 dardos ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$) y solo le falta reventar el globo rojo.



Estima que con $\frac{2}{3}$ revienta el globo rojo, tira y falla.

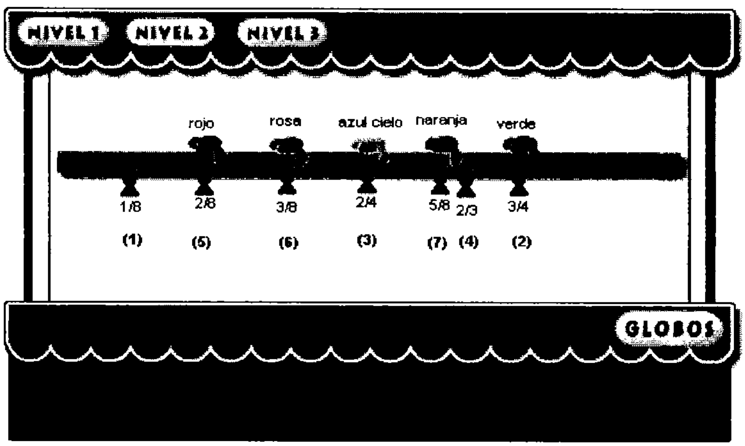
Nuevamente aparece el caso de decidir qué fracción es menor haciendo una comparación de numeradores y denominadores de manera independiente como si fueran números naturales.

Al parecer, Israel compara $\frac{3}{8}$ con $\frac{2}{3}$. En los numeradores el 2 es menor que 3, y en los denominadores el 3 es menor que el 8, por lo tanto considera que la fracción $\frac{2}{3}$ es más chica que $\frac{3}{8}$.

2. - Es difícil calcular tercios. Para todos los niños fue difícil ubicar fracciones en tercios, incluso $\frac{1}{3}$. Veamos algunos ejemplos:

Andrea

En el juego, Andrea había tirado 3 dardos ($\frac{1}{8}$, ¾ y $\frac{2}{4}$) entonces tira $\frac{2}{3}$.



Mary Anna.- ¿En cuántas partes dividiste el entero para escoger $\frac{2}{3}$?

Andrea.- en dos.

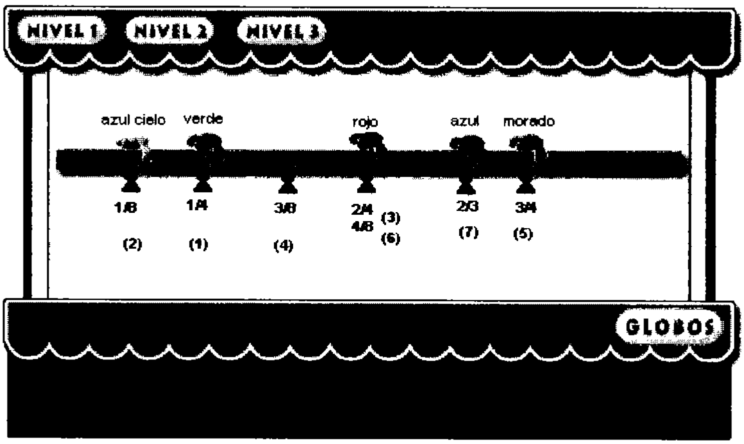
Mary Anna.- señálame cómo calculaste $\frac{2}{3}$

Andrea.- partí en dos la barra y calculé que caería allí (señala la mitad de la barra).

Como se ve, también para Andrea es difícil explicar cómo eligió una fracción con tercios. No es claro por qué estimó que $\frac{2}{3}$ caería en la mitad si de cualquier forma ya había reventado el globo que estaba en la mitad.

Luis

A Luis le queda sólo un globo por reventar, el azul. Opta por $\frac{2}{3}$ y lo revienta.



Mary Anna.- ¿Cómo supiste que en $\frac{2}{3}$ estaba el globo azul?

Luis.- Porque vi que éste (señala la parte después de $\frac{3}{4}$, donde está el globo azul) estaba por aquí y ahí estaba muy cerca del morado, entonces dividí, hice una división de fracción.

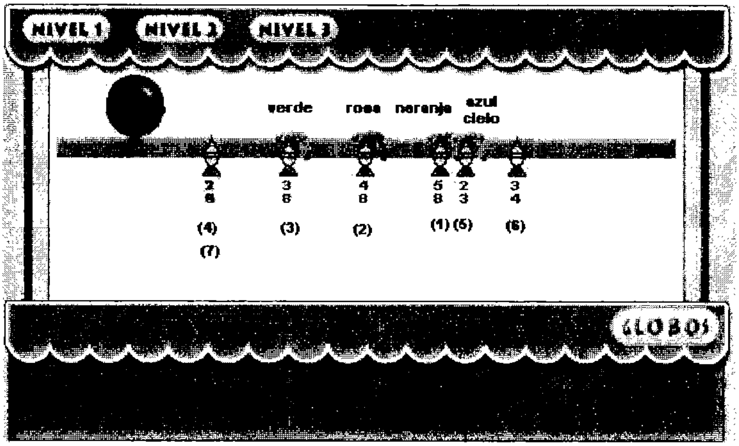
El niño no puede explicar la división de fracciones que hizo. Al parecer la elección fue al azar y funcionó.

3.- En el caso de haber tirado una fracción en tercios les es difícil ubicar acertadamente a otro globo tomando como referencia esa fracción. Para los niños resultó difícil tomar como referencia un dardo lanzado en tercios para ubicar la posición de otro globo. Esto fue aún más difícil si había globos muy cercanos como $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ ó ½. Por ejemplo:

Carlos

Los primeros cuatro tiros que hizo fueron $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{8}$

Carlos demuestra tener problemas para calcular los tercios



Carlos.- (...) Mejor intento darle al morado con $\frac{2}{3}$ (tira y revienta el globo azul cielo. Como se puede observar estima erróneamente que $\frac{2}{3}$ debe ser menor que $\frac{3}{8}$)

Mary Anna.- Cuando decidiste tomar $\frac{2}{3}$, ¿en cuántas partes dividiste la barra?

Carlos.- en tres.

Mary Anna.- Ahora, ¿dónde crees que esté el morado?

Carlos.- En $\frac{1}{3}$

Mary Anna.- antes de que tires... señálame dónde ves $\frac{1}{3}$ (él señala el espacio entre $\frac{4}{8}$ y $\frac{5}{8}$)

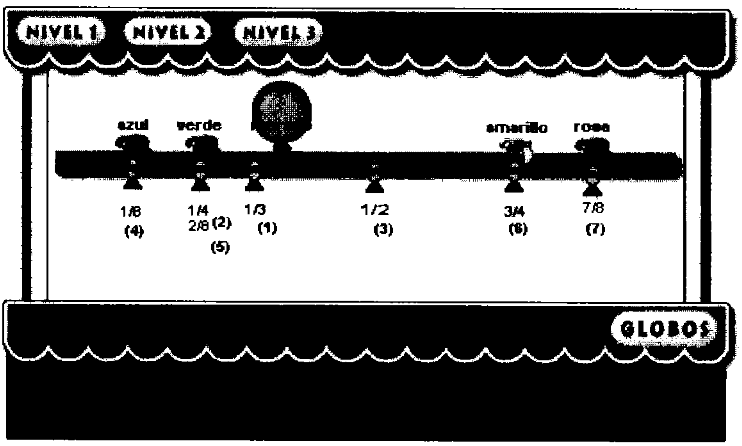
Carlos.- mmm con ¾ le podré dar al morado (tira y falla), entonces con ¼ (tira y falla)... ¡Lo hubiera reventado con ½!

En el caso de Carlos es probable que al estimar $\frac{2}{3}$ para romper el globo morado, tomara en cuenta el tiro $\frac{3}{8}$ que ya había hecho, porque el 3 es menor que el 8 y pensó que se trataba de una fracción más pequeña. Cuando se le pide ubicar $\frac{1}{3}$ en la pantalla lo ubica muy cerca de $\frac{2}{3}$, probablemente porque las demás fracciones con octavos, que ya tiene ubicadas en la recta, están muy cerca entre sí.

4.- Buscan múltiplos para los tercios. Los medios, cuartos y octavos no son múltiplos de los tercios. Los niños a veces intentaban tomar una fracción lanzada para duplicarla o dividirla, pero por ejemplo, si un globo estaba en tercios, no les era útil esa información. Veamos el siguiente caso.

Luis

En primer lugar toma $\frac{1}{3}$ para el globo azul y falla. Su segundo tiro es ¼ y atina al globo verde y después calcula $\frac{1}{2}$ para romper el globo azul. Parece que esta estimación se debe a que el niño sólo se fija en los denominadores y cree que $\frac{1}{2}$ es más pequeño que ¼.



Mary Anna.- tienes como referencia $\frac{1}{3}$ y ½, entre esos números está el globo morado.

Luis.-Aquí está ½, entonces la mitad de $\frac{1}{3}$ sería ¾, ¿no? No, sería menos, $\frac{2}{3}$.

(..)

Mary Anna.- ¿Allí estará el globo morado?

Luis.- No, ¿y si pierdo?

Cuando Luis se da cuenta de que no puede estimar tercios prefiere medir tomando como referencia las primeras fracciones de la barra ($\frac{1}{8}$, ¼, ½) para encontrar las posiciones de los demás globos; además en este caso, coincide que los globos aparecieron en fracciones múltiplos de octavos.

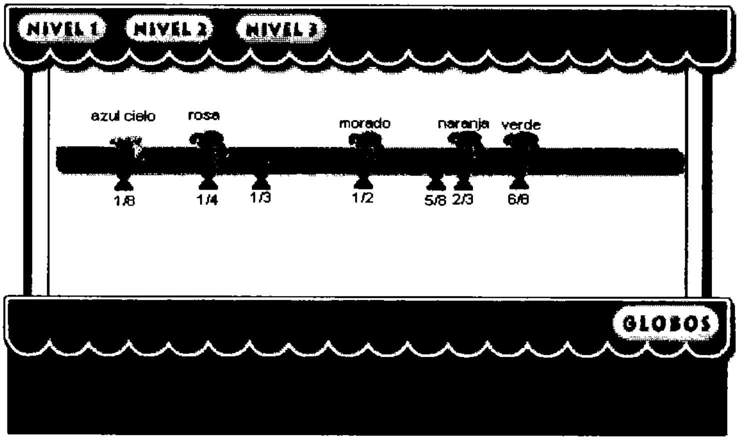
Aunque Luis puede ver dónde están $\frac{1}{3}$ y ½, no puede decir qué fracciones puede haber entre ellas sólo tomando en cuenta estas dos cantidades. Considerando las fracciones disponibles en el juego aparentemente no es difícil encontrar, en este caso, que la fracción $\frac{3}{8}$ está entre ½ y $\frac{1}{3}$, pero ningún niño logró ubicar esa fracción.

Nuevamente aparece el problema de encontrar alguna fracción que esté entre $\frac{1}{3}$ y ½. Luis intenta encontrar la mitad de $\frac{1}{3}$ para romper el globo morado pero no la logra obtener. Sin embargo aunque hubiera encontrado que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$, todavía faltaba sumar $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{3}$ para llegar a la mitad entre $\frac{1}{3}$ y ½. Además, en esta versión no se consideran los sextos. La búsqueda de la mitad se debe probablemente a que es lo que más se trabaja en fracciones.

5.- Con los tercios las estimaciones resultan más difíciles, por lo tanto los dardos se terminan pronto. Veamos los siguientes casos:

Israel.

En el juego de Israel falta por reventar el globo naranja y quedan dos dardos por tirar; él sabe que el globo no está en medios, cuartos u octavos, dejándole como única opción $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.



Israel.- Es que no tengo idea dónde caerían los tercios.

Mary Anna.- ¿Qué significa tercios?

Israel.- ¿La tercera parte de un entero?

Mary Anna.- Entonces ¿en cuántas partes debes dividir la barra?

(cubro con mi mano la parte de debajo de la barra de modo que no vea las fracciones ya utilizadas en ella para que vea la barra sólo como un entero)

(...)

Israel.- en tres.

Mary Anna.- a ver señálamelos.

Israel.- en 1,2,3...

Mary Anna.- (no muy convencida) a ver, dime dónde es $\frac{1}{3}$

Israel.- Aquí (señalando el globo verde)

Mary Anna.- ¿Tu crees que allí quedaría $\frac{1}{3}$? A ver, aviéntalo...

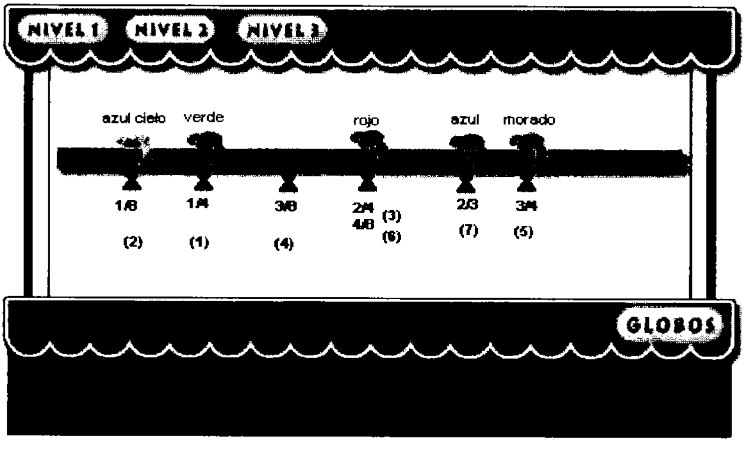
Israel.- Ah no.. Ya sé.. Sería $\frac{3}{3}$ (se fija en la lista de fracciones) pero aquí no tiene. Aquí sería $\frac{1}{3}$ ... entonces $\frac{2}{3}$ ... (tira y atina al globo naranja)

Israel desde el inicio del juego sólo se concentra en aventar medios, cuartos y octavos. Hasta que no puede evitar usar los tercios reconoce que tiene problemas para calcularlos. De hecho, a pesar de haber calculado $\frac{1}{3}$ atina por ensayo y error dado que sólo hay dos fracciones con tercios.

6.- Para los niños no es tan fácil identificar los octavos. Algunos niños identifican $\frac{1}{8}$ como la mitad de ¼, pero no la mayoría. Por otro lado, aunque a veces logran ubicar $\frac{1}{8}$ esto no les permite ubicar otro globo en octavos. Veamos los siguientes casos.

Luis.

El primer tiro de Luis es ¼ y revienta el globo verde.



Luis.- Entonces si pongo $\frac{1}{8}$, ¿caerá en el otro globo? Veamos (lanza $\frac{1}{8}$ y atina al globo azul cielo) Porque es la mitad de ¼ (...)

Él toma la distancia del primer cuarto para ubicar $\frac{2}{4}$ en el globo rojo y lo revienta

Luis.- Ahora, de aquí (señala la distancia del globo rojo al globo morado) Ahora con octavos, ¿crees que me alcance?

Mary Anna.- Pues si aquí está $\frac{1}{8}$ (le señalo la distancia con los dedos), por acá (avanzo $\frac{1}{8}$ más) ¿Cuál octavo sería?

Luis.- ¡ $\frac{3}{8}$!

Mary Anna.- muy bien, y así te podrías ir como le hiciste con los cuartos. Dices que está en octavos el morado. ¿En cuál octavo estará el globo morado?

Luis.- En el tercero... (dispara $\frac{3}{8}$ y falla) ... ¡no! (se desespera)

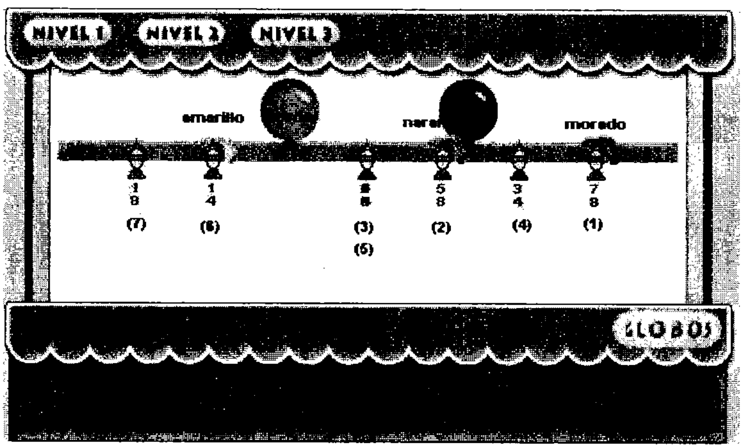
Mary Anna.- en $\frac{3}{8}$ no está.

Luis.- ahora en $\frac{4}{8}$, no creo, es lo mismo que el otro globo (rojo) (de todas maneras lo lanza) ¡tampoco!... (él dispara de inmediato $\frac{3}{4}$ y revienta el globo morado)

Como Luis usa una estrategia acertada para ubicar la posición de los cuartos, podría pensar que con la misma estrategia ubicaría fracciones de otro tipo, pero demuestra que todavía se confunde para ubicar los octavos en orden en la recta. Probablemente pensó que $\frac{3}{8}$ quedaba más a la derecha de $\frac{2}{4}$ porque los números son mayores tanto en el numerador como en el denominador.

Carlos.

El primer tiro de Carlos es $\frac{7}{8}$ para el globo morado y lo revienta.



NOTA: los tiros 3 y 5 en la imagen son $\frac{4}{8}$ y $\frac{2}{4}$ respectivamente.

Mary Anna.- ¿Por qué tiraste $\frac{7}{8}$?

Carlos.- Porque la barra es un entero. Ahora voy a tirar $\frac{5}{8}$ para poder atinar al rojo (tira y revienta el globo naranja). Y ahora voy a tratar de tirar $\frac{6}{8}$ para atinarle al rojo.

Mary Anna.- Tienes $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$. ¿Crees que $\frac{6}{8}$ cae en el rojo? A ver señálamelo (lo señala correctamente). Entonces no le pega al rojo.

Carlos.- Entonces le pega $\frac{4}{8}$.

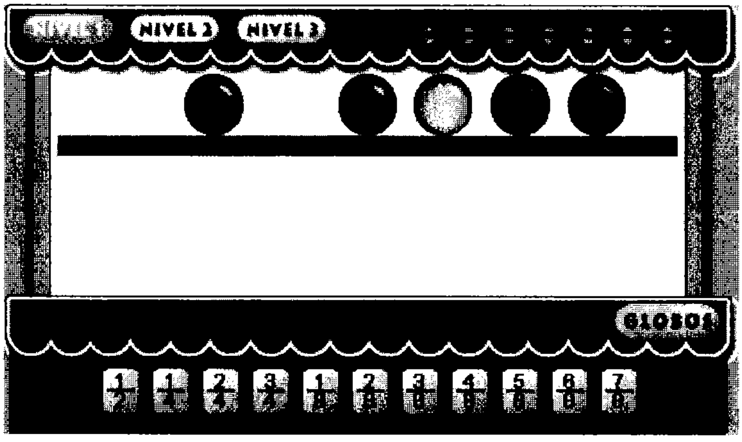
Carlos hace una estimación bastante cercana al globo rojo, sin embargo intenta continuar con octavos para romper el globo rojo. No es claro porque eligió $\frac{4}{8}$ y pensó que estaría después de $\frac{5}{8}$.

De las dificultades enunciadas, la que nos pareció decisiva para hacer un cambio fue la dificultad para identificar tercios en la recta, sobre todo cuando había un globo entre dos fracciones ya ubicadas en la recta, con denominadores 2, 4 u 8.

4.2 Primer nivel, segunda versión.

A partir de las dificultades encontradas se analizó nuevamente el juego y se consideró que quitar los tercios favorecería que los niños trabajaran con fracciones que son múltiplos y no tendrían dificultad para ubicar fracciones entre dos fracciones que no son múltiplos (como $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$).

En la segunda versión de este nivel la barra también representa un entero y la serie de fracciones propias son medios, cuartos y octavos.

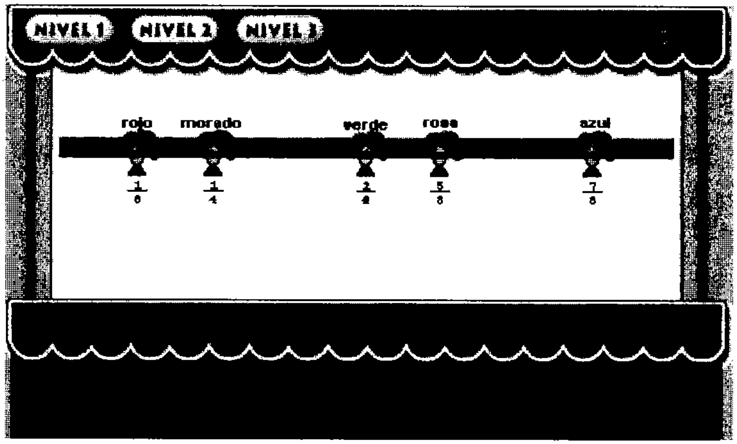


En esta nueva versión se presentaron menos dificultades en el primer nivel para terminar con éxito el juego y se registraron los siguientes aspectos positivos:

1. - Identifican $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ en la barra. La mayoría de los niños identifican sin dificultad dos fracciones en la barra. Es probable que esto se explique porque son las fracciones que se estudian con más frecuencia en la escuela primaria. Veamos algunos ejemplos:

Israel.

Israel observa los globos en la barra y decide romper en primer lugar el globo verde.



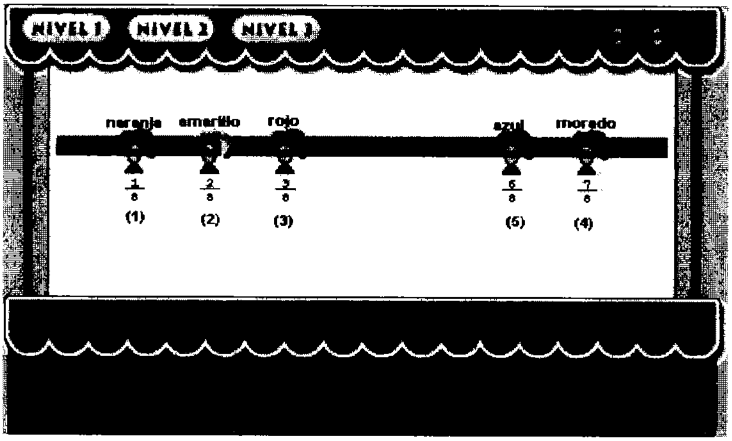
Nota: los fracciones encimadas son ½ y ¾.

Israel.- el globo verde está a la mitad de la barra (tira ½ y lo revienta) Ahora para el globo morado... sería ¼ (...).

Israel siempre demostró saber dónde estan ½ y ¼ en la barra, lo hizo también en el segundo y tercer nivel.

2.- Algunos niños identifican algunos octavos en la barra. Por ejemplo:

Luis



Mary Anna.- $\frac{1}{8}$ cayó en el naranja... ¿sabías que caería ahí?...

Luis.- sí

(va a aventar $\frac{2}{8}$)

Mary Anna.- $\frac{2}{8}$, ¿dónde caerá?...

Luis.- En el amarillo (tira y atina) y $\frac{3}{8}$ cae en el rojo.

Mary Anna.- ahora, ¿el azul o el morado? ...

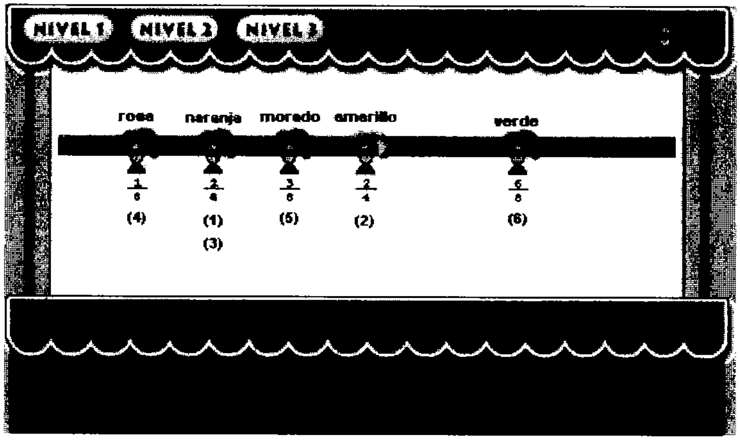
Luis.- el morado con $\frac{7}{8}$...

Mary Anna.- ¿sabías que caería allí?

Luis.- sí... y $\frac{6}{8}$ va a caer en el azul.

Como se ve, Luis descubrió la estrategia de utilizar solamente octavos para reventar los globos, ya que con éstos se pueden reventar todos.

Carlos.

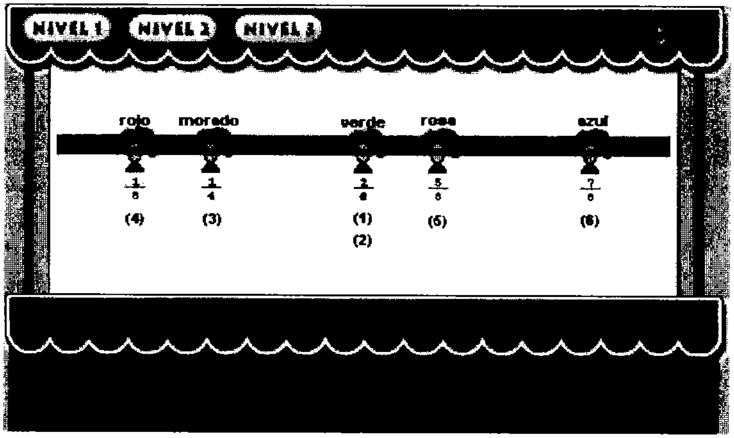


Nota: los tiros 1 y 3 son las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ respectivamente.

Carlos observa los globos y después dice: "Con $\frac{1}{4}$ quiero darle al naranja. Tira y atina". Toma como referencia la fracción utilizada y después dice, entonces con $\frac{2}{4}$ le puedo dar al amarillo. Tira y atina. Entonces con $\frac{2}{8}$ al morado (tira y falla) Entonces $\frac{1}{8}$ para el rosa (tira y atina)... $\frac{3}{8}$ al morado (tira y atina)... y con $\frac{6}{8}$ al verde (tira y atina)

3. - Algunos identifican fracciones equivalentes. Cuando tienen el caso de que una de las fracciones que tiran cae en el mismo lugar que otra, los niños se dan cuenta que son fracciones equivalentes, para este punto mencionaremos un caso en el que los niños evitan tirar fracciones equivalentes o estiman una fracción en su equivalente.

Israel.



Nota: los tiros 1 y 2 son las fracciones ½ y $\frac{2}{4}$ respectivamente.

Israel.- El globo verde está a la mitad de la barra (tira ½ y lo revienta). Ahora para el globo morado sería ¼ (por error tira $\frac{2}{4}$ y cae en el mismo lugar que ½)

Mary Anna.- ¿Viste en dónde cayó $\frac{2}{4}$?

Israel.- sí, aquí (señala ½ ya ubicado)...

Mary Anna.- ¿y qué significa?

Israel.- ¿qué es igual a ½?

Mary Anna.- sí, que $\frac{2}{4}$ es igual que ½.

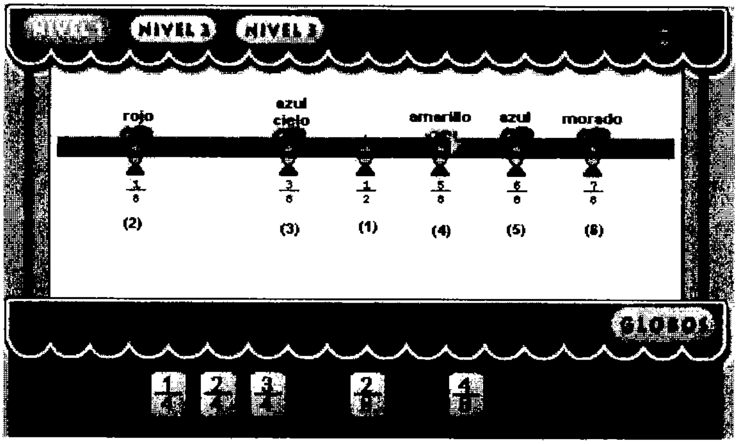
Israel.- ¡Que equivale!

Después tira ¼ para el globo morado y lo revienta, de inmediato tira $\frac{1}{8}$ para el rojo y para el globo rosa se fija en las fracciones que tiene en la barra, $\frac{1}{8}$, ¼ , ½... entonces empieza a medir octavos desde $\frac{1}{8}$ y calcula $\frac{4}{8}$ en ½, comentando que $\frac{4}{8}$ cae también donde esta el globo verde.

4.- Algunos utilizan las operaciones de suma y resta para ubicar fracciones.

Beto.

El primer tiro en este juego fue ½ y después fue $\frac{1}{8}$ para el globo rojo.

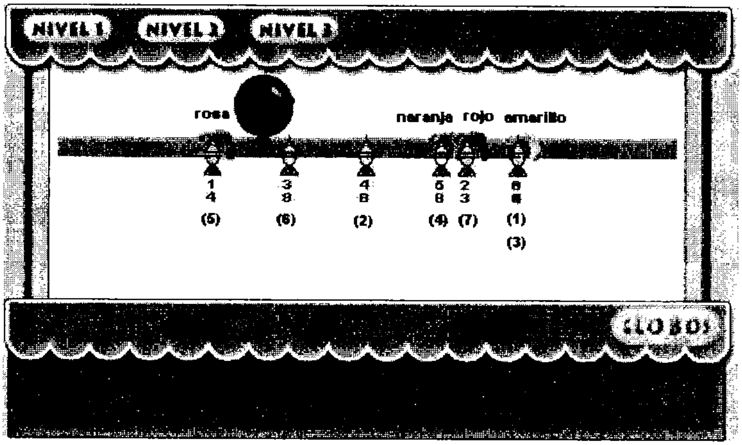


Beto.- entonces para el globo azul cielo sumo dos más a $\frac{1}{8}$, tres no, porque se iría por ½ (tira $\frac{3}{8}$ y atina)

En este caso, Beto menciona haber sumado para ubicar una fracción en la barra, otros sólo lo hacen avanzando fracción por fracción hasta llegar al globo a reventar. Además, identifica una fracción equivalente antes de tirarla.

Andrés.

Su primer tiro es ¾ y revienta el globo amarillo.



Nota: los tiros 1 y 3 son las fracciones ¾ y $\frac{6}{8}$ respectivamente.

Mary Anna.- ¿adivinaste?

Andrés.- no, dividí. Primero dividí la barra en 2 y después en 4, entonces le quite ¼ y salió ¾.

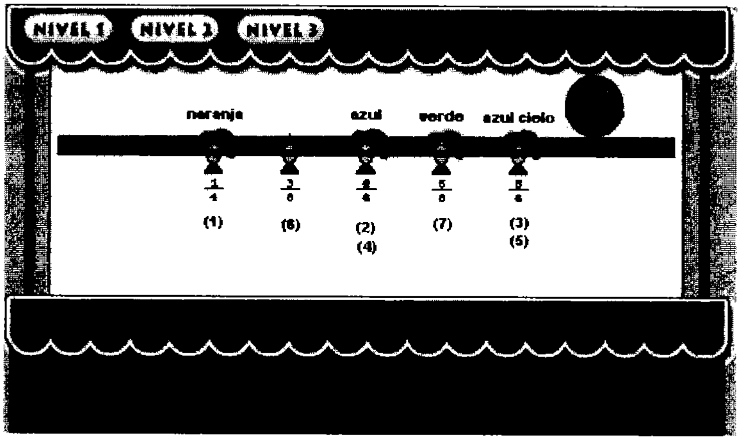
Aunque en general todos los niños hicieron este tipo de operaciones, no se observó que lo hicieran en más de una ocasión.

En los juegos de esta nueva versión también se registran algunas dificultades iguales a las de la primera versión:

1.- No siempre se pueden ubicar los octavos. A pesar de que los niños se desempeñaron mejor con la segunda versión de la actividad siguieron teniendo algunas dificultades

Carlos.

Los primeros tiros de Carlos son $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$



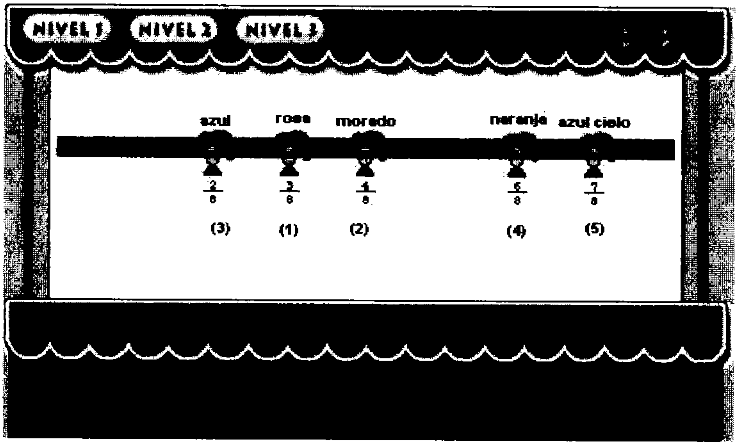
Nota: los tiros 2 y 4 son las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ respectivamente; para los tiros 3 y 5 son las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$.

Carlos.- (...) Entonces ahora con $\frac{4}{8}$ al globo verde (tira y falla) (...) $\frac{6}{8}$ para el globo morado (tira y falla) (...) $\frac{3}{8}$ para el globo morado (tira y falla), entonces $\frac{5}{8}$ (tira y falla, cae en el globo verde)

La estimación de Carlos se basa en la hipótesis de que $\frac{4}{8} > \frac{2}{4}$ y $\frac{6}{8} > \frac{3}{4}$. Estos dos casos reflejan el problema de ver los elementos de la fracción como números naturales independientes uno del otro.

Podemos agregar que Carlos no tiene orden en las fracciones. En ninguno de los tiros en octavos demuestra tener mucha idea de dónde caerían.

Andrea



Mary Anna.- cuál fracción te gustaría primero lanzar?.

Andrea.- a ver en dónde cae $3/8$.

Mary Anna.- cayó en el rosa.

Andrea.- mmm también intentaríamos con $4/8$ a ver en dónde cae...

Mary Anna.- tú ¿dónde crees que caería?

Andrea.- más o menos por acá (por el globo azul) y $2/8$ por aquí. (lo calcula por el globo morado)

Mary Anna.- ¿sí?, ¿tú crees?

Andrea.- no... si la mitad vale ¼...

Mary Anna.- ¿la mitad de la barra? ¿dijiste que en la mitad de la barra cae ¼?

Andrea.- no.

Mary Anna.- entonces ¿cúal es la mitad de la barra?

Andrea.- $2/8$, ¿no?

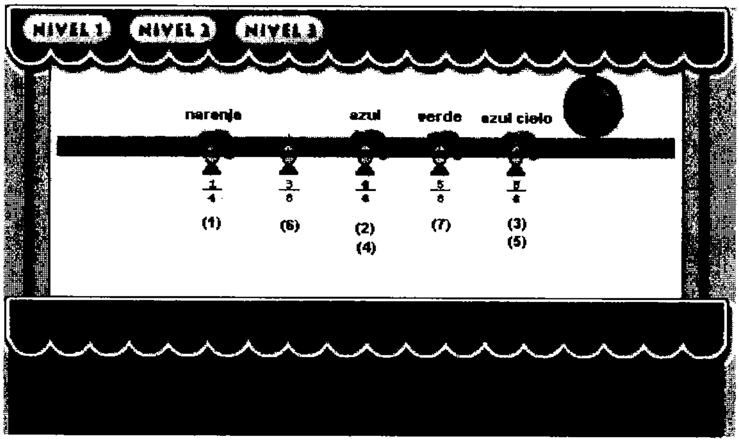
Mary Anna.- ah, no sé.

Andrea no hace una buena estimación para las fracciones en octavos.

2. - Estiman la posición de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ ordenando los denominadores como números naturales. Por ejemplo:

Los niños usan la misma técnica para estimar las fracciones mayores que $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, pues toman una fracción como referencia, restan o suman al numerador y denominador de la misma para ubicar las siguientes fracciones en la recta.

Carlos.



Nota: los tiros 2 y 4 son las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$; los tiros 3 y 5 son las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$.

Carlos.- (...) Entonces, ahora con $\frac{4}{8}$ al globo verde (tira y falla)

(...)

Mary Anna.- entonces, ¿para el verde y el morado?...

Carlos.- (...)$\frac{6}{8}$ para el globo morado (tira y falla), $\frac{3}{8}$ para el globo morado (tira y falla), entonces $\frac{5}{8}$ (tira y falla, cae en el globo verde)

Al parecer, para reventar el globo morado siempre toma como referencia $\frac{3}{4}$, entonces elige $\frac{3}{8}$ porque el 8 es mayor que el 4 y elige $\frac{5}{8}$ porque el 5 es mayor que el 3 y el 8 es mayor que el 4.

Llama la atención que un niño de sexto grado siga teniendo una idea errónea sobre fracciones representadas en medios, cuartos y octavos.
Esto hace considerar la necesidad de realizar actividades para ayudar a los niños a comprender que un denominador más grande representa una fracción más pequeña.

Comentarios

Estos ejemplos proporcionan información sobre dificultades importantes que los niños tienen con la ubicación de fracciones sobre una recta.

Hemos estudiado que el significado de fracción se introduce a partir de tercer grado de primaria, siendo los primeros ejercicios de partición el dividir una unidad en "la mitad", "la cuarta parte", "la tercera parte" y en los grados posteriores a esta propiedad de fracción se le agregan variables didácticas cuantitativas como cantidades discretas (caramelos, pasteles, pelotas), y cantidades continuas (superficies, modelos lineales), por esta razón podría creerse que el niño tiene por lo menos el significado de ½ clarísimo. Pero los resultados nos dicen que el niño aún no lo tiene bien definido, pues consideran ½ menor que ¼ porque 2<4 y lo estiman en una recta a la izquierda de ¼.

Probablemente en situaciones clásicas de reparto (pasteles, pizzas, quesos) puedan identificar ¼, ⅓, ⅛ sin dificultad en los tamaños. Sin embargo, en el contexto planteado no se trata sólo de conocer las fracciones sino de ordenarlas en una recta.

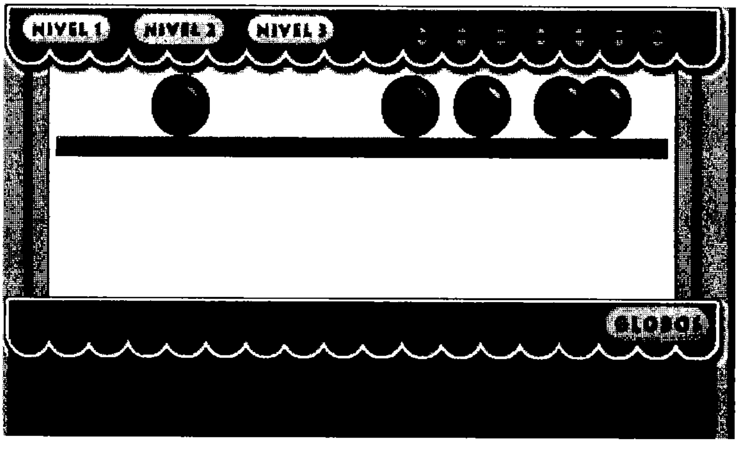
Ahora hablaremos del segundo nivel de dificultad del juego, primero considerando la versión original en la que, como se verá, hubo varias dificultades. Posteriormente se comentará el desempeño de los niños en una segunda versión a la que se hicieron modificaciones.

4.3 Segundo nivel, primera versión.

En el segundo nivel del juego "A romper globos" la barra representa un entero, igual que en el primer nivel, sin embargo, se proponen más fracciones para utilizar con los siguientes denominadores: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, décimos y doceavos.

Cuando se inicia el juego, al oprimir el botón ***globos*** aparecen aleatoriamente 5 globos en cualquiera de las fracciones con los denominadores indicados.

Cuando se diseñó el juego se tomó en cuenta que las fracciones que más se trabajan en la escuela primaria son medios, cuartos y octavos. Estas fracciones ya estaban incluidas en la versión anterior. Otra fracción que también se introduce desde tercer grado es el tercio. En esta versión se consideró incluir tercios y dos múltiplos más: sextos y doceavos.
Además se pensó en poner quintos y décimos.

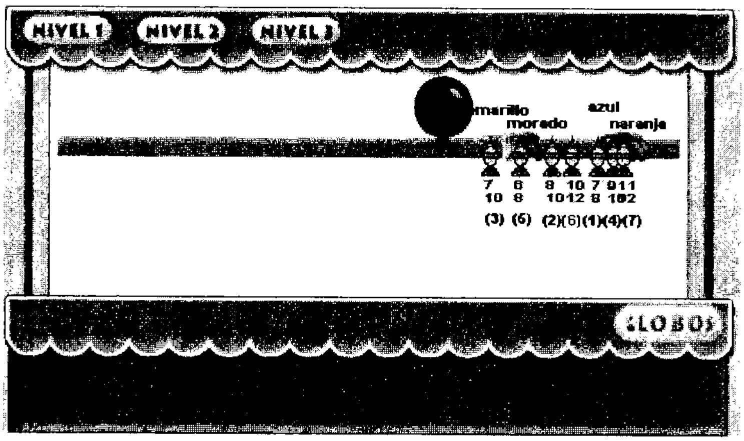


Esta segunda versión del juego resultó muy difícil para los niños, por lo que tuvieron distintas dificultades:

1. - Las fracciones se encuentran muy pegadas unas a otras. Al plantear tantos denominadores posibles, los globos que aparecen aleatoriamente en la pantalla pueden estar muy juntos, por lo que los niños no las pueden identificar con precisión y se les acaban los dardos. Veamos un ejemplo.

Andrés.

Andrés mostró en el primer nivel del juego una buena estimación para identificar globos ubicados en octavos, pero demuestra tener problemas para calcular los décimos y doceavos, sobre todo si los globos están cercanos entre sí.



Andrés retoma su experiencia con el primer nivel del juego y estima que el globo azul está en $\frac{7}{8}$. De hecho hace una muy buena estimación, pero no atina.

Andrés.- Disparé $\frac{7}{8}$... Allí cometí el error de no pegarle al globo azul pero le faltó un tantito.

Mary Anna.- entonces ¿dónde crees que esté el globo azul, después de haber aventado $\frac{7}{8}$?

(...)

Andrés.- en el $\frac{8}{10}$ (tira el segundo dardo y falla). Era en el $\frac{9}{10}$, no, porque caería en la punta de la barra (al final). Entonces me iré a cuartos, ¡no! mejor me iré a décimos (tira el tercer dardo eligiendo $\frac{7}{10}$ y revienta el globo amarillo).

Mary Anna.- ¿querías $\frac{7}{10}$ para el globo amarillo?

Andrés.- primero pensé que como había tirado el dardo de $\frac{8}{10}$ y no pegó en el blanco, entonces le quité una cifra al 8 y salió el 7 y pensé que caería en el morado o en el amarillo...

Aquí se puede observar que Andrés retoma los dardos que ha tirado para hacer una buena estimación. Los globos están muy cerca entre sí, por eso él dice que puede romper uno u otro globo. De hecho, con los globos tan cercanos entre sí, es difícil decir con precisión qué globo se rompe.

Nuevamente, toma en cuenta los dardos lanzados y hace una nueva estimación para romper el globo azul o el naranja, que están juntos... y hace un buena estimación y rompe el globo azul:
"...como sé cuánto espacio tendría entre 7 y 8 décimos serían $\frac{9}{10}$ para pegarle al naranja o al azul (lanza el cuarto dardo y rompe el globo azul)".

Vuelve a considerar los dardos lanzados en décimos para calcular el sitio donde está el globo rojo y comenta " Aquí ahorita si tiro $\frac{6}{10}$ creo que no daré al rojo porque me faltaría un poco hacia la derecha, entonces me iré a los octavos. Me iré a 6/8 (tira el quinto dardo y atina al globo morado)"

En este momento le quedan aún dos globos por romper uno está muy cerca del azul que ya rompió y el otro está relativamente cerca del amarillo que también ya rompió. "Ahora como ya tuve 2 cifras en octavos ahora voy a tratar de ver con qué cifra le pegaré al rojo o al naranja, y probaré con el 12, ¡ $\frac{10}{12}$! Entonces pegaré con $\frac{10}{12}$ (tira y falla). Aquí como que me confié mucho, no dividí la barra en $\frac{12}{12}$ y no dí en el blanco. Así que el naranja está en $\frac{11}{12}$ (tira y atina)".

Como se ve, Andrés ya había utilizado $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{10}$ y $\frac{9}{10}$, de manera que su estimación de que ahora debe usar doceavos es muy buena. Logra romper el globo naranja, pero se queda sin romper el globo rojo.

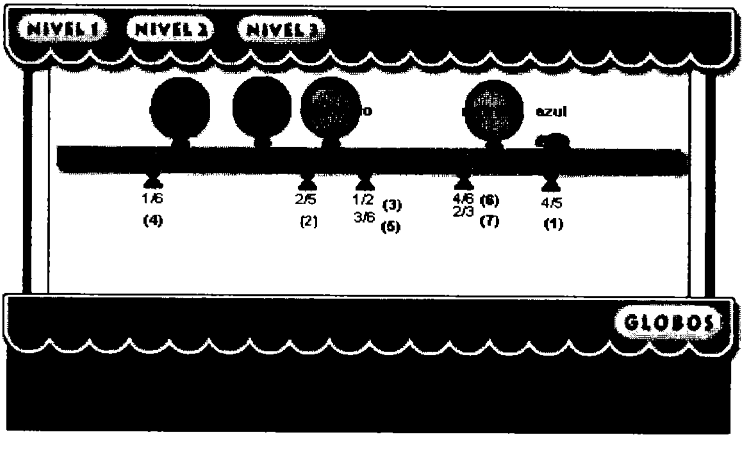
A pesar de que Andrés hace buenas estimaciones, no logra romper todos los globos. En este juego los globos aparecieron muy cerca entre sí. Algunos estaban ubicados en octavos, otros en décimos y otro en doceavos. Andrés reconoce que tiene que usar otras fracciones como décimos y doceavos, sin embargo no logra hacer buenas estimaciones, dado que rompe algunos globos de manera azarosa. Visualmente es difícil dividir al mismo tiempo una recta en décimos, doceavos y octavos, ya que entre éstos no hay equivalencias.

Sin embargo, hay que reconocer que Andrés logró aprovechar los señalamientos que obtuvo con los dardos lanzados para poder hacer buenas estimaciones a partir de conocer las distancias entre ellos.

2. - Se les dificulta ubicar fracciones en quintos. Cuando aparecieron globos en quintos y sextos para los niños fue difícil ubicar las facciones, sobre todo porque los dardos lanzados no les servían de referencia para calcular la posición de otros globos. Veamos un ejemplo.

Luis.

Antes de tirar cualquier fracción, él intenta calcular quintos (oprime el botón de las fracciones con denominador 5, él trata de explicar cómo podría ubicar estas fracciones.



Mary Anna.- si escogiste quintos, ¿qué debes hacer?

Luis.- ¿una división de fracción?

Mary Anna.- (no entiendo que quiere decir con "división de fracción", así que pregunté) ¿en cuántas partes? (debí haber preguntado qué significa "división de fracción")

Luis.- De dos, ¡no! (...) de cinco. Ahora es cinco entre cinc... cinco por cinco.. ¡No! (...) Espera... ¿cómo era?... la maestra me enseñó... ¡ah, sí!... era el producto cruz... a ver... 5...5 ése es el denominador... 5*5 son 25.. Ahora... ¿cuál es el denominador de abajo?... son cinco, ¿no? Entonces 5*5... ¡me da lo mismo!

Probablemente Luis está intentando buscar fracciones más pequeñas que los quintos sin observar las opciones que proporciona la actividad. Los veinticincoavos son equivalentes con los quintos, no obstante este dato no lo ayuda a encontrar los globos.

Luis escoge $\frac{4}{5}$, lanza su primer dardo y revienta el globo azul.

Mary Anna.- escogiste $\frac{4}{5}$, reventaste un globo... ¿eso te da una idea de los demás?

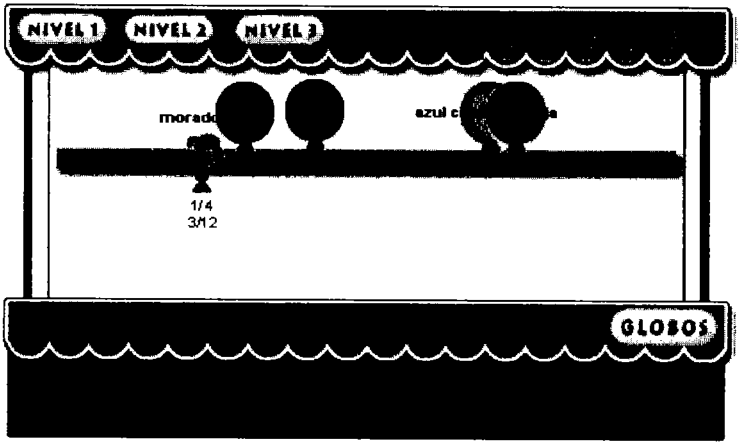
Luis.- sí, ahora...(tira $\frac{2}{5}$ intentando romper el globo azul cielo, pero falla) ¡no! A éste le faltó ¿viste? (refiriéndose a que le faltó llegar al globo azul cielo) (...) Vamos a escoger $\frac{1}{2}$, vamos a ver en dónde cae (tira 1/2)... Entonces si éste (globo azul cielo) no es $\frac{2}{5}$ y se acerca mucho a $\frac{2}{5}$ debe ser menos de $\frac{2}{5}$... ¡¡más de $\frac{2}{5}$!!

Considerando que se tienen muchos denominadores para elegir ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$) es muy difícil ubicar en qué fracción están los globos. El globo azul cielo está muy cerca de $\frac{1}{2}$ y después de $\frac{2}{5}$, El niño tiene que reflexionar sobre las fracciones que hay entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$ y enfrentarse a la pregunta ¿el globo azul está en décimos o en doceavos?. Es algo que resultó muy difícil de contestar para los niños.

3. - Las estimaciones son incorrectas. Cuando el juego tiene los globos tan pegados y tienen tantas fracciones como opción es más difícil que su estimación sea correcta. Por ejemplo:

Luis.

Al inicio del juego Luis tira un dardo en ¼. Revienta el globo morado.



Mary Anna.- ¿calculaste para el globo morado?

Luis.- ¡no! Lo quería para el globo azul.

Mary Anna.- ahora ¿qué globo escoges?

Luis.- el azul.

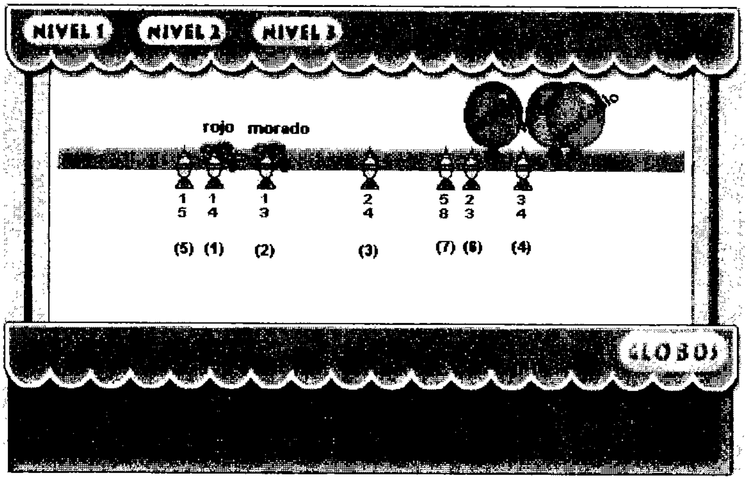
Mary Anna.- ¿escogerás una fracción más chica o más grande?

Luis.- Más chiquito. (...) Es que ya no sé qué es más chico que doceavos. Ya no puedo perder necesito más chico que doceavos para reventar el azul.

Él ya no sigue intentado tirar doceavos; para reventar el globo azul necesita avanzar poquito a la derecha, entonces es posible que recurra a la técnica que ha usado antes, sumar uno al numerador y denominador obteniendo $4/13$. Como no existe este denominador en el juego no sabe qué hacer y no se le ocurrió aumentar el numerador de $3/12$ para avanzar en la recta.

Andrea.

Cuando Andrea juega el segundo nivel trata de recordar del primer nivel en dónde caen los tercios, por lo que su primera estimación para el globo rojo es $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ pero no los tira y opta por $\frac{1}{4}$. Tira y rompe el globo rojo.



A partir del primer tiro, calcula $\frac{2}{4}$ para el globo morado, decide que no sirve. Calcula $\frac{3}{4}$ para el globo naranja. Tira su segundo dardo y falla.

Esta última estimación es cercana pero es difícil decidir dónde está el globo naranja. Es una fracción más pequeña pero no es fácil decir si está en octavos, décimos ó doceavos.

Sigue jugando, cambia a quintos, dice que $\frac{1}{4}$ le da idea para calcular quintos, calcula $\frac{3}{5}$ y dice que está allí el globo naranja, pero vuelve a medir, decide que mejor no... y que $\frac{4}{5}$ se pasa del globo naranja.

Decide cambiar a sextos, trata con $\frac{3}{6}$, calcula, mide, no lo tira.

Trata con octavos. Dice que si tira $\frac{3}{8}$ caería más allá del globo morado. (Es probable que en esta estimación haya considerado que $\frac{3}{8}$ era mayor que $\frac{1}{3}$, porque en el numerador el 2 es más grande que el 1 y en el denominador el 8 es más grande que el 3).

Después tira su tercer dardo en $\frac{1}{3}$ para romper el globo morado diciendo que divide en 3 partes la barra y acierta.
Va por el globo naranja, piensa en $\frac{2}{4}$, tira el cuarto dardo y falla.

Los siguientes tiros también los falla ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$). Cuando tiene ubicadas las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ sigue intentando romper el globo naranja, sin embargo, encontrar qué fracción hay entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ a partir de observar los denominadores del juego resultó muy difícil. Probablemente al elegir la fracción $\frac{5}{8}$, Andrea haya pensado que el dardo iba a quedar a la derecha de $\frac{2}{3}$, porque en esa fracción los números del numerador y del denominador son mayores, sin embargo, falla y quedan 3 globos sin reventar.

En el caso de Andrea no resultó útil tener tantas fracciones para elegir, dado que nunca opta por tirar décimos y doceavos. Sin embargo, aún con las que quedan es difícil ubicar mentalmente las divisiones en la recta para decidir dónde está una fracción.

Nuevamente aparece una pregunta difícil de contestar para los niños, ¿qué fracciones hay entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$?

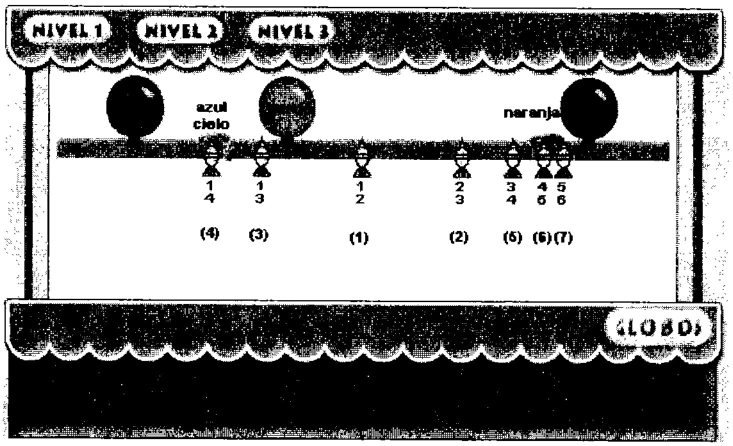
Los quintos y sextos son un gran problema. Andrea no logra estar segura de la ubicación de estas fracciones, además los décimos y los doceavos jamás fueron una opción. En seis de los siete dardos Andrea utilizó las fracciones propuestas en el primer nivel. La única fracción que agregó fue $\frac{1}{5}$.

4. - El juego se hace largo. Aunque no se tiene registrado cuánto tiempo emplearon los niños en cada juego y en cada nivel, podemos hacer la observación de que toman mucho tiempo en tratar de estimar todas las opciones con todos los denominadores, ya que tienen demasiadas fracciones a usar.

5. - Suman o restan un número más al numerador y denominador de una fracción para ubicarla a la derecha de la primera. Por ejemplo:

Andrea.

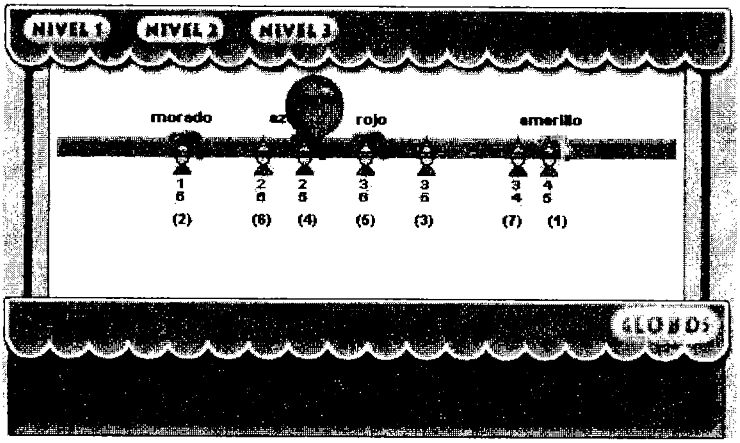
Después de lanzar 5 dardos ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$) observa la pantalla y toma como referencia el dardo ubicado en $\frac{3}{4}$ para estimar el sitio donde están los globos naranja y azul.



Para estimar una fracción más grande que $\frac{3}{4}$, decide sumar una unidad tanto al numerador como al denominador y estima $\frac{4}{5}$ para romper el globo naranja. Tira el sexto dardo y atina.

Para romper el globo azul intenta utilizar la misma estrategia, ahora retoma la fracción $\frac{4}{5}$ y le agrega una unidad al numerador y una unidad al denominador. Lanza su último dardo eligiendo la fracción $\frac{5}{6}$. Esta vez falla el tiro y ella misma se percata de que el método que construyó no funciona en todos los casos.

Carlos .



Carlos elige quintos para su primer dardo, estima $4/5$ para el globo amarillo. Lanza el dardo y atina. Dado que la distancia de este globo al extremo derecho de la barra es la misma que del globo morado al extremo izquierdo, el segundo dardo lo lanza en $1/5$ y acierta.

Carlos.- Ahora con $3/5$ al azul (tira y falla), entonces con el 2 le podré dar al azul (tira $2/5$ y atina).

Para el globo rojo observa la ubicación en la barra y decide utilizar sextos.
Después de este tiro, resta uno al numerador de $3/6$ para usar $2/6$ y darle al globo verde (tira y falla). Posteriormente elige una fracción más pequeña restando una unidad al numerador y al denominador de $3/6$.

Después elige ¾ para romper el globo verde. Para este tiro toma como referencia $3/6$ y resta dos unidades en el denominador. A pesar de tener en la barra $3/6$ y $3/5$, Carlos decide usar la estrategia de ubicar una fracción con denominador menor a la izquierda de un denominador mayor.

Comentarios

Después de esta breve experimentación del segundo nivel, nos pudimos dar cuenta de algunos errores de diseño: las fracciones muy juntas no permiten hacer buenas estimaciones. La distancia entre décimos y doceavos, e incluso entre quintos y sextos no se aprecia con claridad en la pantalla.

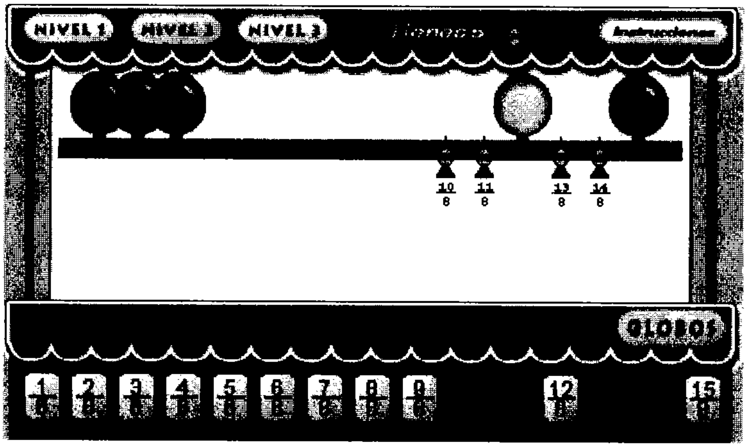
Por otro lado, se consideran 8 denominadores que producen 42 posibles fracciones para elegir.

En el diseño sólo se pensó en incluir otras fracciones que se trabajan en la educación primaria para elevar el nivel de dificultad, sin embargo, no se reflexionó ampliamente sobre las dificultades y confusiones que esto podría generar en los alumnos, como de hecho sucedió.

Por lo anterior, se hicieron modificaciones al segundo nivel conservando la característica de que el grado de dificultad fuera mayor, pero no tanto como para impedir a los niños lograr romper todos los globos.

4.4 Segundo nivel, segunda versión.

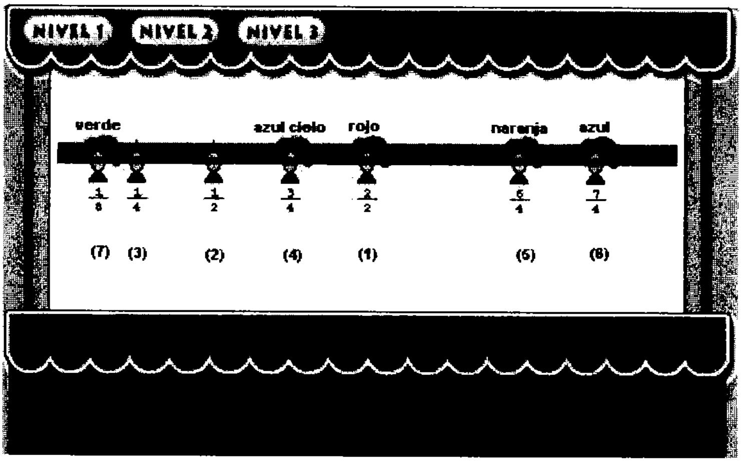
A partir de las dificultades encontradas al manejar tantos denominadores se hizo un balance con relación a la dificultad que consideramos que podrían manejar los alumnos de educación primaria. Se decidió dejar los mismos denominadores que en el primer nivel, es decir, medios, cuartos y octavos. La dificultad que se agregó fue considerar que la barra donde se lanzan los globos midiera dos unidades en lugar de una y se usan fracciones impropias menores que dos enteros. Así en lugar de aparecer la fracción $1\frac{3}{8}$ aparece $\frac{11}{8}$.



En esta nueva versión para el segundo nivel se presentaron menos dificultades para terminar con éxito el juego y se registraron los siguientes aspectos positivos:

1.- Ubican correctamente las fracciones equivalentes a un entero. Los niños no tuvieron dificultades para ubicar un dardo en un entero. Por otro lado, llama la atención que sólo en el caso de un entero los alumnos encuentran las fracciones equivalentes. En la experimentación no se encontró un caso donde los alumnos expresarán verbalmente la equivalencia entre fracciones como $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Veamos dos ejemplos:

Andrea.



Andrea.- el entero está como en el rojo, ¿no?

Mary Anna.- ándale, podría ser el entero en el globo rojo.

Andrea.- Entonces voy a poner $\frac{2}{2}$ (tira el primer dardo y rompe el globo rojo). Entonces como le calculé aquí a la mitad y son dos enteros, sería aquí como ½ (tira el segundo dardo sólo para ubicar dónde queda ½). Ya no me sirven los medios. Tendría que cambiar, ¼ quedaría por aquí ¿no? (señala el globo azul cielo) no sé... (tira el tercer dardo en ¼ y no rompe ningún globo) ¡ah! entonces sería como $\frac{3}{4}$...

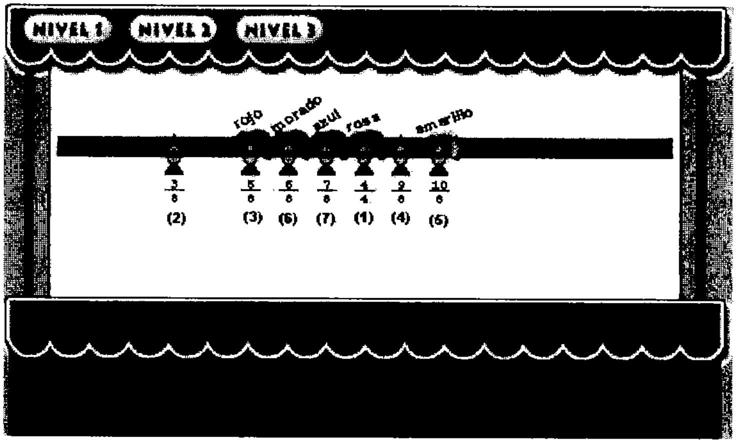
En esta estimación aparece nuevamente el concepto que se encontró en los niños de observar los números de una fracción como números naturales.

Mary Anna.- Pues fíjate dónde está ¼. Dime, ¿dónde caería $\frac{4}{4}$?.

Andrea.- Aquí (señala el primer entero de la barra) ¡ah!. Entonces $\frac{3}{4}$ cae en el globo azul (tira el cuarto dardo y atina).

Al parecer, con la pregunta planteada logra ubicar correctamente el globo azul.

Andrés.



Andrés.- ... $4/4$ para darle al azul marino o al rosa.

Dado que los globos están muy cerca entre sí, no logra precisar cuál de los dos globos está a la mitad de la barra, pero sí identifica que la mitad de la barra se puede representar con $4/4$.

Mary Anna.- A ver.

Andrés tira su primer dardo y revienta al globo azul marino.

Rompe varios globos más y para el cuarto dardo vuelve a tomar la información del entero, pero con otro denominador: los octavos.

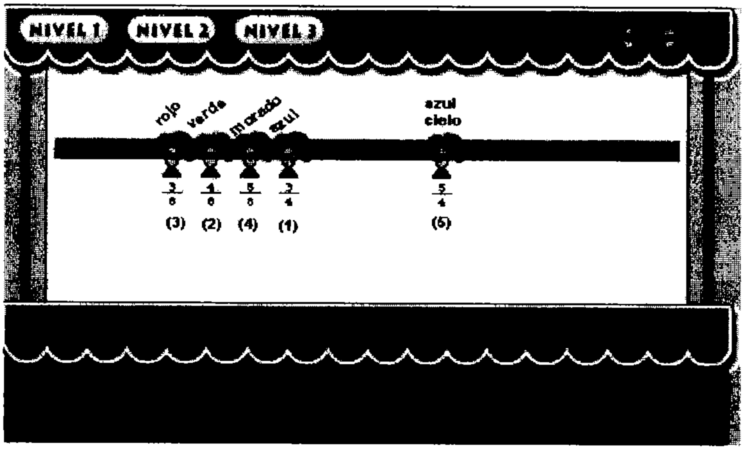
Andrés.- (...) Ahora trataré con $9/8$ al globo amarillo. Tira el cuarto dardo y falla. Es que como es equivalente el $4/4$ con $8/8$, creí que $9/8$ caería más al globo amarillo, pero me equivoqué.

Como se ve, Andrés logra hacer buenas estimaciones y logra romper todos los globos.

Por otro lado, el haber jugado varias veces permite a Andrés observar que los octavos pueden servir para romper cualquier globo. De hecho, de sus 7 tiros, 6 los hizo con octavos.

2. Estiman fracciones impropias correctamente. Varios niños lograron manejar con bastante destreza las fracciones impropias que se encuentran en el segundo entero. Los niños que mencioné en el punto anterior lo hicieron, ahora mostraré otro caso.

Luis.



Luis tira su primer dardo en $\frac{3}{4}$ y revienta el globo azul. Decide tirar el segundo dardo en $\frac{4}{8}$ pensando en romper el globo rojo, pero en lugar de ese rompe el globo verde. Esto le da la pista para romper los globos rojo y morado.

Luis.- Ahora, si $\frac{3}{8}$ cae en el rojo y $\frac{5}{8}$ en el morado (...)

Tira el tercero y cuarto dardo y rompe ambos globos. Sólo le queda el globo azul cielo. Primero estima medios y visualmente hace los cálculos, pero ve que no le sirven, entonces decide tomar cuartos. Toma como referencia el dardo que está en $3/4$ y la distancia entre éste y el dardo que está en $4/8$, calcula que el globo azul cielo está en $5/4$, lanza el quinto dardo y atina.

Luis toma la fracción correcta para el globo azul cielo sin dudar pues estima muy bien los medios y cuartos, por lo que ubica $5/4$ en el segundo entero de la barra.

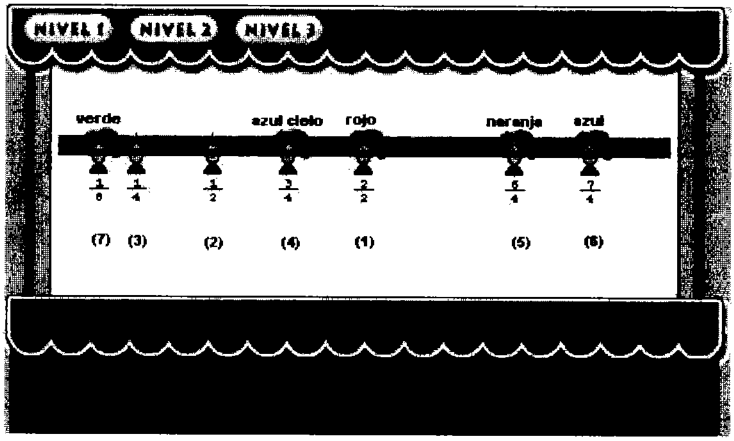
Dificultades en esta versión

A pesar de que el juego resultó más sencillo que la primera versión, algunas de las dificultades que ya se habían apreciado antes, tanto en el nivel anterior, como en las versiones anteriores, siguieron apareciendo.

1. - Estiman la posición de $1/2$, $1/4$, $1/8$,... ordenando los denominadores como números naturales. Esta es una de las dificultades que se sigue presentando en esta nueva versión para el segundo nivel. Por ejemplo:

Andrea.

Andrea suele lanzar dardos "estratégicos" para que le proporcionen información sobre la barra donde están los globos y después pueda decidir algunos tiros para romper globos específicos. En este caso, lanza el primer dardo en $3/2$ y rompe el globo rojo. Lanza el segundo dardo en $1/2$ y no rompe nada.



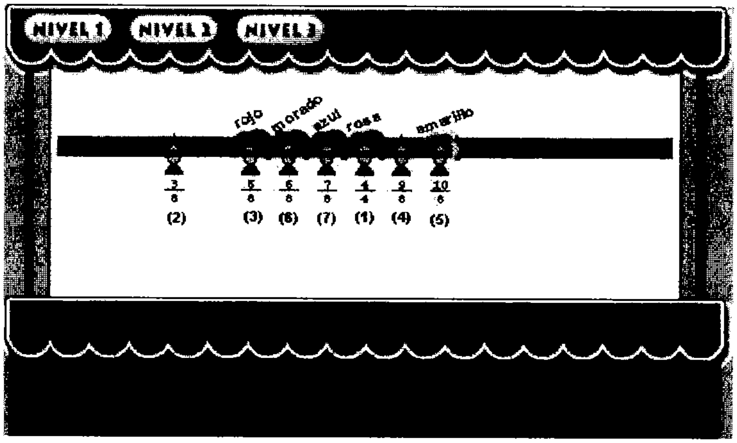
Andrea.- (...) Tendría que cambiar a cuartos, ¼ quedaría por aquí, ¿no? (señala el globo azul cielo) no sé... (tira ¼ y falla)

Andrea estima que el dardo ¼ quedará a la derecha, porque el 4 del denominador es mayor que el 2.

2. - Malas estimaciones. Cuando la barra representa dos enteros tienen dificultades en ubicar las fracciones pues las distancias cambian entre ellas. Por ejemplo:

Andrés.

Este caso ya se presentó en el primer índice de los aspectos positivos en este nivel. Ahora se usará para mostrar la dificultad ya mencionada.



Andrés.- con $\frac{4}{4}$ para darle al azul marino o al rosa.

Mary Anna.- A ver (él tira y revienta al globo rosa).

Andrés.- Ahora con octavos. Me iré con $\frac{3}{8}$ para darle al rojo o al morado (tira y falla). Aquí trataré de darle al globo morado con $\frac{5}{8}$ (tira y revienta el globo rojo). Ahora trataré con $\frac{9}{8}$ al globo amarillo (tira y falla). Es que como es equivalente el $\frac{4}{4}$ con $\frac{8}{8}$, creí que $\frac{9}{8}$ caería más al globo amarillo, pero me equivoqué. Entonces me iré a medios... mmm ¡no!... mejor me iré a cuartos, no tampoco... mejor voy a tratar con $\frac{10}{8}$ para darle al globo amarillo. Ahora me voy a ir a... trataré de disparar el último dardo con $\frac{6}{8}$ para darle al globo morado (tira y atina)

En este juego los globos están muy cerca uno del otro, por lo que se dificulta al niño realizar buenas estimaciones.

Comentarios.

Como se ve, en la segunda versión de este nivel los niños se desempeñaron mucho mejor que con la primera versión. Creemos que con esto pueden afianzar los conocimientos de las fracciones medios, cuartos y octavos para identificarlos en una recta, que ahora mide 2 unidades.

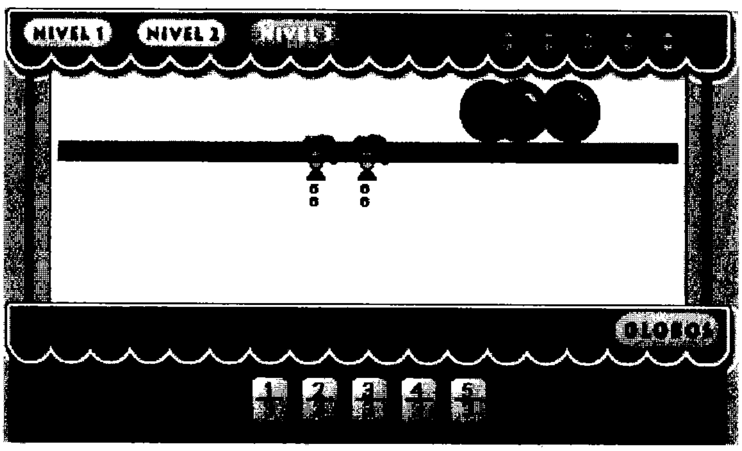
Ahora hablaremos del tercer nivel de dificultad del juego, nuevamente presentando la versión original de la actividad y posteriormente la que está vigente, que tuvo modificaciones a partir de la primera experiencia.

4.5 Tercer nivel, primera versión.

En este caso la barra representa dos enteros. Aparecen cinco globos al azar y las fracciones que pueden utilizarse para reventarlos son medios, tercios, cuartos, quintos y sextos.

Todas las fracciones son impropias, por ejemplo, en lugar de aparecer $1\frac{2}{6}$, aparece la fracción $\frac{8}{6}$.

Dado que no es posible tener a la vista todas las fracciones que pueden utilizarse, sólo aparecen los números que representan los denominadores. Así pues, si se elige el 3, aparecen las siguientes fracciones disponibles: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$.



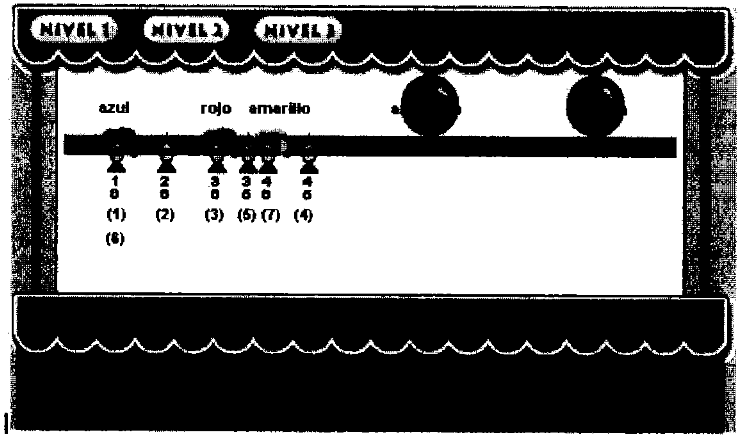
En esta primera versión se presentan las siguientes dificultades:

1.- La ubicación de las fracciones en quintos está muy pegada a las demás fracciones. Por ejemplo:

Luis.

En la segunda ocasión que juega, Luis lanza su primer dardo en $\frac{1}{6}$. Cuando se le pregunta cómo supo que el globo estaba en $\frac{1}{6}$, él dice que lo supo por la experiencia del juego anterior, posteriormente tira $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$ y rompe el globo rojo.

Para romper el globo amarillo decide cambiar sus estimaciones a quintos.



Para el globo amarillo mide con ayuda de sus dedos desde $\frac{1}{6}$... él creyó que $\frac{4}{6}$ no le daba para el amarillo así que pensó en $\frac{4}{5}$... Tira el cuarto dardo y no atina al globo, entonces tira el quinto dardo en $\frac{3}{5}$ y tampoco acierta. El globo queda entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$.

Se queda pensativo y vuelve a estimar, decide aumentar $\frac{1}{6}$ a $\frac{3}{6}$, pero se equivoca y el sexto dardo lo lanza en $\frac{1}{6}$. El último dardo lo tira en $\frac{4}{6}$ y rompe el globo amarillo.

Después de lanzar tres dardos en sextos ($\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$) a Luis se le dificultó estimar en dónde estaba el globo amarillo, quizás por la poca distancia que puede haber entre dos fracciones, una representada en quintos y otra en sextos.

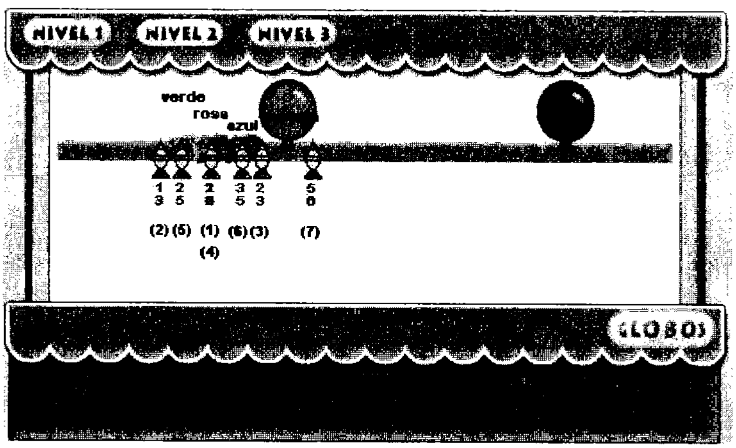
Probablemente pensó que no sería posible que hubiera otro dardo colocado en sextos y por ello intentó ubicarlo en quintos.

Andrea.

Andrea lanza su primer tiro en ½ para ubicar un punto en la recta. Con este dardo rompe el globo rosa.

Después intenta romper el globo verde y lanza el segundo dardo en $\frac{1}{3}$ y falla. Visualmente intenta ubicar el globo azul en $\frac{2}{3}$ y lanza el tercer dardo en esta fracción. Aunque su estimación es cercana, falla y no rompe el globo.

Insiste en romper el globo azul, así que en el cuarto tiro decide usar la fracción $\frac{2}{4}$, pero nuevamente falla. Sólo hasta que el dardo llega a su destino, se percata de que las fracciones ½ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes.



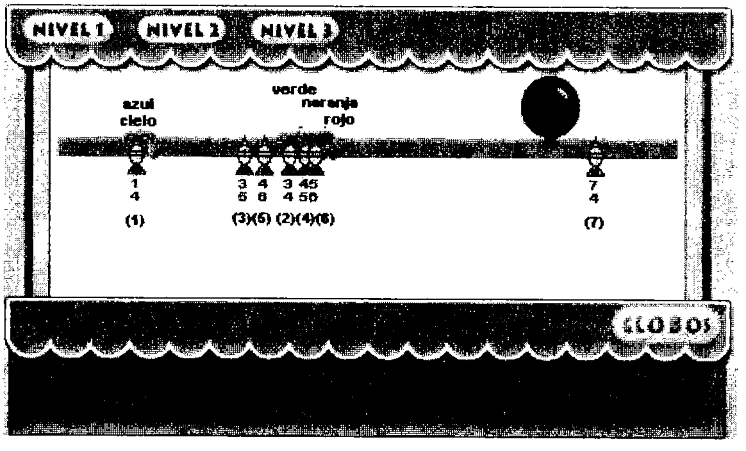
Andrea decide cambiar de denominador y elige quintos. Dice que $\frac{1}{5}$ quedaría antes de $\frac{1}{3}$, también dice que ¼ quedaría antes de $\frac{1}{3}$. Se queda viendo la recta y estima que con $\frac{2}{5}$ podría romper el globo naranja. Lanza el quinto dardo en esta fracción, pero en vez de romper el globo naranja, rompe el globo verde.

Al ver dónde cayó el dardo con $\frac{2}{5}$ se queda viendo la recta y estima que el globo naranja se puede romper con la fracción $\frac{3}{5}$. Lanza el sexto dardo y no rompe el globo esperado, sino el azul.

Llama la atención que Andrea logra ubicar más o menos bien las fracciones $\frac{1}{5}$ y ¼, pero no logra hacer bien las siguientes estimaciones con denominador 5. Probablemente esto sucede porque hay 4 globos muy cercanos entre sí, lo que dificulta hacer buenas estimaciones.

2. - La ubicación de los quintos no ayuda como referencia para ubicar otras fracciones. Por ejemplo:

Andrea.



El primer tiro de Andrea es sólo para ubicar una fracción en la barra que le permita hacer las siguientes estimaciones. Tira ¼ y rompe el globo azul cielo.

Hace una estimación visual y considera que el globo rojo está en ¾. Lanza el segundo dardo en esta fracción, pero el globo que se rompe es el verde. Como se ve estos globos están cercanos entre sí, por lo que otra vez es difícil hacer una buena estimación.

Intenta hacer estimaciones visuales con cuartos, pero considera que no le van a funcionar, entonces decide cambiar a quintos y estima que con $\frac{3}{5}$ podrá romper el globo rojo. Lanza el tercer dardo en esta fracción y no rompe nada. Nuevamente se observa la creencia de que $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{3}{4}$, porque 5 es mayor que 4.

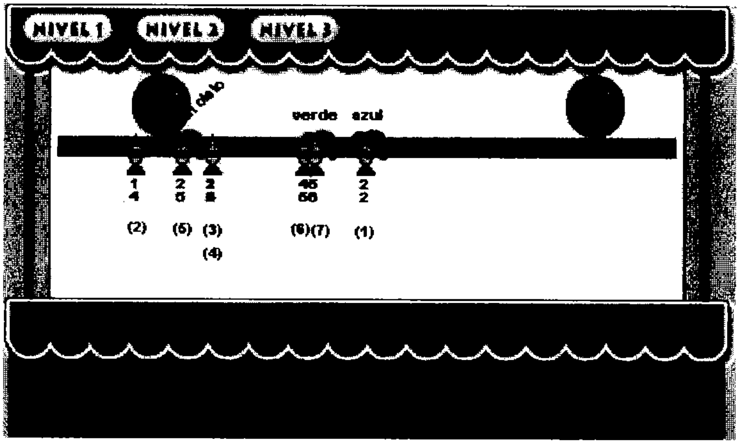
Andrea insiste con el globo rojo y lanza el cuarto dardo en $\frac{4}{5}$ para romperlo. Revienta el globo naranja. En este caso, están tan pegados los globos naranja y rojo que realmente es difícil hacer la estimación.

Decide cambiar a sextos, dice no saber si el globo rojo está en $\frac{3}{6}$ o $\frac{4}{6}$. Tira el quinto dardo en $\frac{4}{6}$, pero falla, entonces se regresa a quintos y dice que las fracciones en la serie ($\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{5}$...) que están a la derecha de $\frac{5}{5}$ no le sirven. Así que regresa a sextos, tira el sexto dardo $\frac{5}{6}$ y atina al globo rojo.

Andrea tuvo un juego difícil, con globos muy pegados entre sí con fracciones diferentes (cuartos, quintos y sextos). Visualmente es muy difícil identificar en qué fracciones están los globos que quedan juntos, por ello desperdicia dardos.

Israel.

Israel lanza sus primeros cuatro tiros en $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Sólo hasta que la fracción $\frac{1}{2}$ se encima con $\frac{2}{4}$ se percata de que son equivalentes.



Nota: Los tiros 2 y 3 son las fracciones $\frac{3}{4}$ y ½ respectivamente.

Israel.- Serían $\frac{2}{5}$ para el azul cielo (tira y atina)

Mary Anna.- ¿cómo le hiciste?

Israel.- es que si aquí es $\frac{1}{5}$ (lo señala antes de $\frac{1}{4}$) $\frac{2}{5}$ cae en el azul cielo. Ahora para el verde $\frac{4}{5}$ (tira y falla)

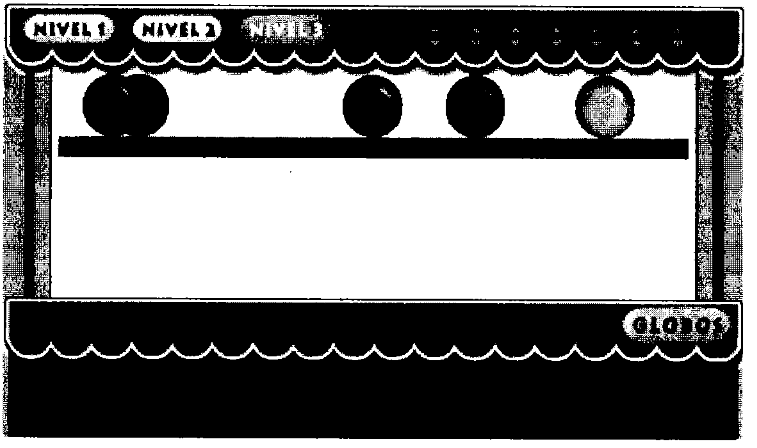
Israel hace una buena estimación para el globo verde ($\frac{4}{5}$), sin embargo el globo está $\frac{1}{30}$ más a la derecha de $\frac{4}{5}$, lo cual es muy difícil calcular visualmente.

Comentarios

El hecho de que aparecieran fracciones tan juntas hizo pensar que era necesario un cambio para esta versión. Dado que los quintos no son múltiplos de ninguna de las demás fracciones con las que se trabaja, se decidió eliminarlos y dejar los tercios y sextos para tener un mayor grado de complejidad que en la primera y segunda versión.

4.6 Tercer nivel, segunda versión.

En esta nueva versión la barra también representa dos enteros. En el menú de números (2, 3, 4 y 6) para determinar el denominador, la serie de fracciones a presentar son impropias y menores de dos enteros. Se eliminaron los quintos por la dificultad que causaban al tratar de ubicar algunas fracciones.

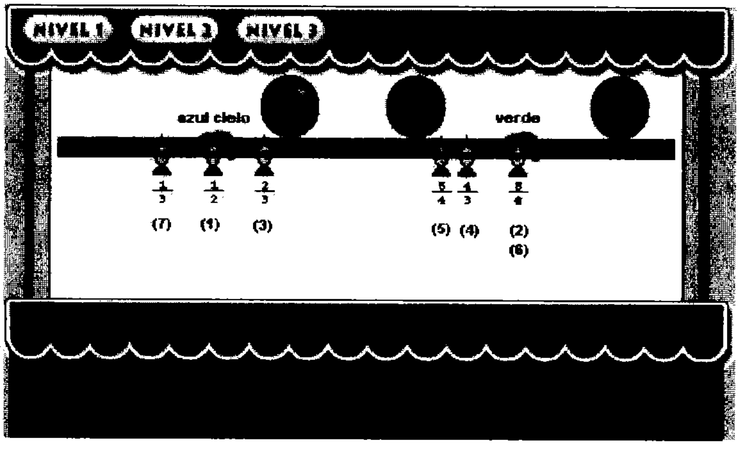


Aunque sabemos que los niños en el primer nivel de la primera versión del juego, tuvieron problemas para ubicar los tercios en un entero, se decidió conservarlos con sus múltiplos en este nivel, porque la característica principal de éste es tener un grado de dificultad mayor que los demás.

A continuación se enunciarán algunos aspectos positivos del trabajo de los niños con este nivel de dificultad.

1. - La mayoría de los niños identifica fracciones equivalentes de un entero.
La mayoría de los niños ubican el entero en la barra e incluso puede enunciar algunas de las fracciones equivalentes que representan el entero. Para algunos el punto de partida en el juego consiste en ubicar el entero, y de allí hacer los cálculos de las fracciones donde se encuentran los globos.

Andrea.



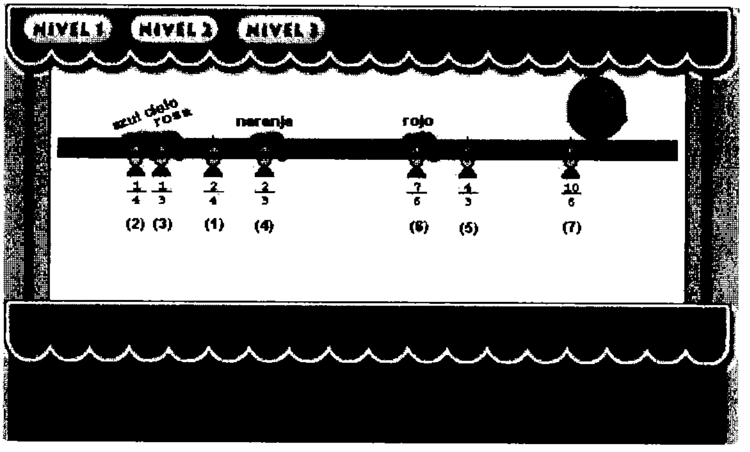
Cuando aparecen los globos Andrea dice:" aquí más o menos es la mitad (ubica la mitad de la barra como un entero), entonces con el 2 (está por tirar $\frac{2}{2}$)... ¡ah!, pero si lo tiro no le daría a ningún globo".

En ocasiones anteriores, Andrea lanzaba dardos con ciertas fracciones, aunque no hubiera ningún globo, para poder ubicarlas en la barra y de allí poder estimar el sitio donde estaban los globos. En esta ocasión, hizo una buena estimación y no lanzó el dardo porque sabía que entonces lo perdería.

Posteriormente ubica el globo azul cielo en ½ y dice: "Sería como por aquí ½ (estima romper el globo azul cielo, tira el primer dardo y atina) ahora $\frac{2}{2}$ para éste (calcula $\frac{2}{2}$ para el globo naranja pero de inmediato corrige recordando que $\frac{2}{2}$ caería en medio de la barra). Pero 3, para el azul marino (tira el segundo dardo en $\frac{3}{2}$ y cae en el globo verde)".

Andrea olvidó dónde se encontraba el primer entero e hizo una estimación incorrecta para el globo que quería romper.

Andrés.



Después de tirar el cuarto dardo quiere romper el globo rojo y estima que con $\frac{4}{3}$ puede romperlo. Lanza el quinto dardo en esa fracción y falla. Se queda mirando la barra y dice:

"No fue, entonces con sextos, aquí serían $\frac{6}{6}$ (ubicando la fracción correctamente en el primer entero de la barra) entonces para acá serían 7 (tira el sexto dardo y atina)".

Andrés hace una buena estimación para ubicar el entero con una fracción distinta a ½ que es la que más usan los alumnos. Además logra estimar bien la fracción $\frac{7}{6}$ y rompe el globo rojo.

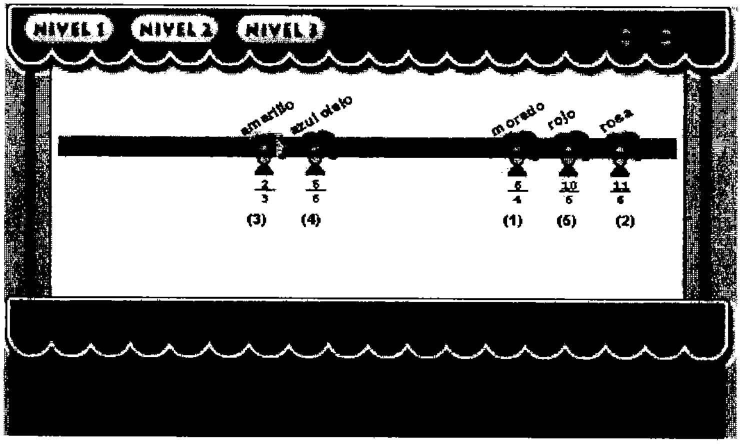
Decide mantener sus estimaciones con sextos , lanza el último dardo en $\frac{10}{6}$ para romper el globo morado. Aunque su estimación es bastante cercana, falla y el globo no se rompe.

Como en los juegos de las versiones anteriores todos los globos se podían romper con la fracción más pequeña, probablemente Andrés intentó hacer eso con los sextos. Sin embargo, en esta versión esa estrategia no funciona, porque los sextos y los cuartos no son múltiplos.

2. No identifican fracciones equivalentes. Como se observó en las versiones anteriores, también en ésta sucede que los niños lanzan a veces dos dardos en el mismo sitio y sólo hasta que lo observan se dan cuenta de que la dos fracciones son equivalentes.

Andrés.

Después de tirar el primer dardo ($6/4$), Andrés hace una estimación interesante para usar los siguientes dardos con $10/6$ y $11/6$ para reventar los globos a la derecha del morado.



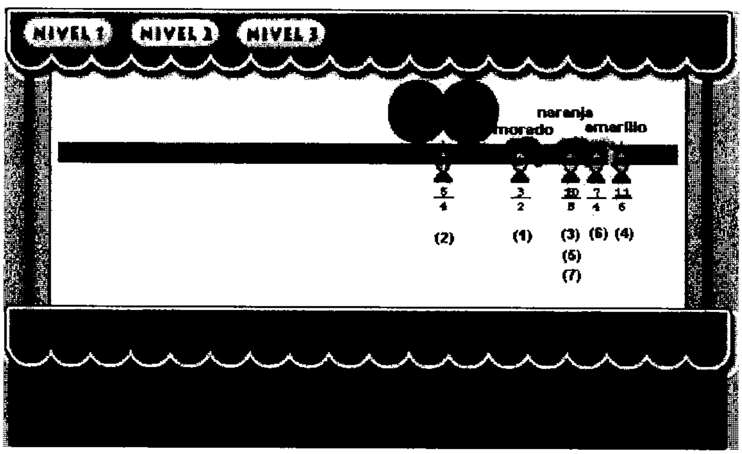
Andrés.- (...) Entonces para el otro, serían sextos, serían $10/6$, que creo que equivale más o menos a $6/4$.

Al parecer, Andrés está usando equivalencia de fracciones para estimar las próximas fracciones en la barra y lo hace con la única referencia que tiene en la barra, que es su primer tiro. Tal vez él calcula los equivalentes de $6/4$ como $12/8$, y $18/12$ obteniendo de este último otro equivalente en $9/6$ por lo que tal vez de allí viene la suposición de que $^{10}\!/_{6}$ equivale más o menos a $^{5}\!/_{4}$. Pero para no errar prefiere tirar el último sexto de la serie para el último globo en la barra.

Andrés.- Entonces con $^{11}\!/_{6}$ creo que podría darle al globo rosa o al rojo (tira y rompe el globo rosa). Aquí son $^{3}\!/_{6}$, que es la mitad de los dos enteros (...). Veré si puedo calcular para darle al globo amarillo con tercios (tira y atina) y ¡di en el blanco! Ahora me iré a sextos para pegarle con $^{5}\!/_{6}$, porque $^{4}\!/_{6}$ equivale a $^{2}\!/_{3}$ (tira y atina). Ahora pegaré al rojo con... intentaré... a ver si no son equivalentes $^{5}\!/_{4}$ con $^{10}\!/_{6}$ (tira y atina).

3. - La mayoría de los niños identifica las fracciones impropias en la parte que les corresponde de la barra.

Luis.



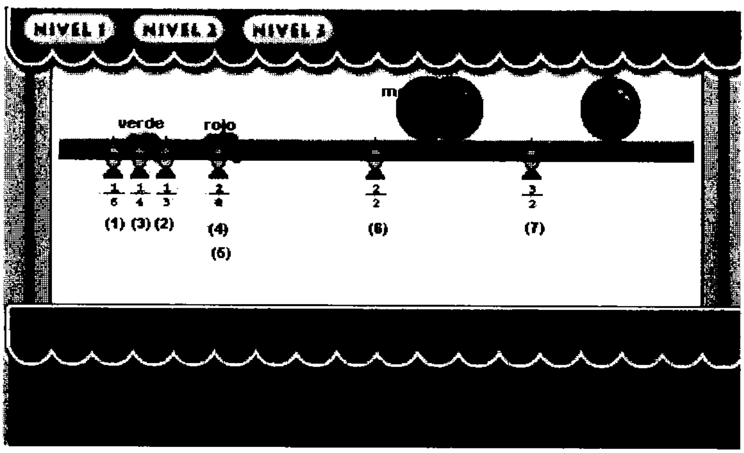
En este caso, podemos observar que los cinco globos están ubicados en la parte del segundo entero de la barra. Todas las estimaciones que hizo Luis estuvieron en el segundo entero, lo que muestra un buen entendimiento de dónde se ubican las fracciones impropias. Sin embargo, no logra romper todos los globos. Más adelante se tratará de dar una explicación de las posibles dificultades que tuvo al resolver este juego.

Dificultades

De las dificultades que los niños tuvieron en la primera versión del juego, que se tomaron para justificar las modificaciones para la segunda versión, se volvieron a presentar aquí además de otras en esta nueva versión:

1. - No identifican qué fracción es más chica.

Luis.



Nota: el 4 y 5 tiro son las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente.

Luis no sabe qué fracción lanzar para romper el globo verde. Dice que puede quizás estar en tercios o en sextos

Luis.- Pero aquí, ¿cuál es el más chiquito? (se refiere a que no sabe qué fracción elegir para romper el globo).

Mary Anna.- ¿más chiquito?

Luis.- ¿los tercios? o ¿son más chicos los sextos? (hace la pregunta dando a entender que los tercios deben ser más chicos. Decide tirar las dos fracciones, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{3}$, para ver cuál es más chica).

Mary Anna.- En ningún globo cayeron los dardos, pero después de tus tiros, ¿puedes saber qué dardo es para el verde?

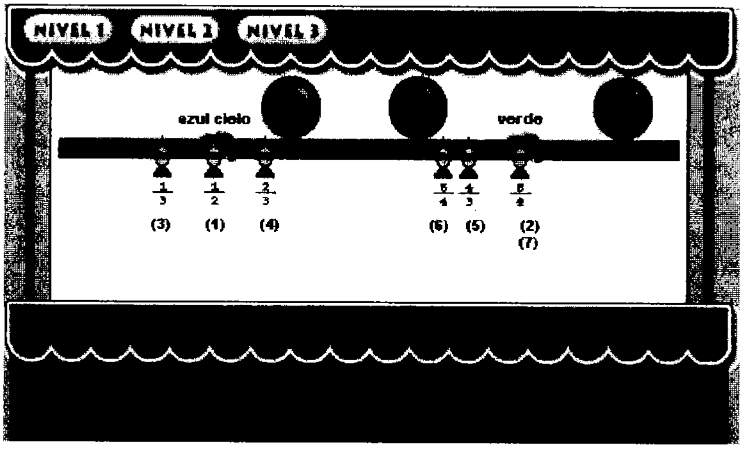
Luis.- en ¼.

Como Luis no logra identificar qué fracción es menor en la recta entonces prefiere probar.

2.- Algunos niños hacen malas estimaciones.

Andrea.

Andrea estima ½ para el globo azul cielo.



Lanza el primer dardo en ½ y lo rompe. Después dice que quiere romper el globo azul marino. Observa la pantalla y dice que con $\frac{3}{2}$ se rompe. Lanza el segundo dardo y rompe el globo verde.

No parece sorprendida de no haber roto el globo que quería, porque finalmente, rompió un globo.

Decide cambiar de denominador porque los medios "ya no le sirven". Dice: "Ahora voy con tercios; ¡ah! ya entendí, los "grandes" caen para acá". Se refiere a que si los numeradores son más grandes que el denominador, las fracciones caen del lado derecho de la barra. Es decir, sin usar la palabra, identifica que se trata de fracciones impropias.

Estima que con $1/3$ puede romper el globo naranja. Lanza el tercer dardo y falla. Comenta que el globo rosa se puede romper con $2/3$ o con $4/3$. Antes de que se le cuestione dónde caerán los dardos, lanza el cuarto dardo en $2/3$ y el quinto en $4/3$.

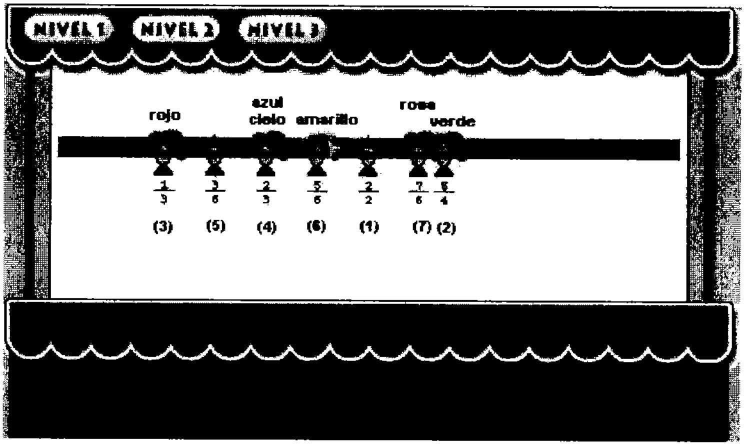
Como se ve, las dos estimaciones son lejanas de donde está el globo rosa. No parece claro que Andrea haya reflexionado acerca del lugar donde caerían los dardos. En juegos anteriores lanzaba algunos dardos al azar sólo para ver dónde caían. Probablemente en este momento del juego hizo lo mismo.

Al final sólo le quedan dos dardos a Andrea. Esta vez observa la barra y trata de estimar antes de lanzar el sexto dardo. Dice lo siguiente:
"$3/4$ caería como por aquí (lo calcula antes del entero, más o menos donde se ubicaría realmente), $5/4$ caería como por el azul, ¿no?."

Lanza el sexto dardo y falla. No obstante, se puede decir que esta vez sí hizo una estimación cercana al lugar donde estaba el globo que quería romper. Para el último dardo tira la fracción $6/4$ y cuando ve que cae en el mismo sitio que $3/2$ se ve decepcionada y dice que eran iguales.

3. - Los niños siguen con la hipótesis de que una fracción es menor o mayor a otra si su numerador es menor o mayor que la anterior.

Israel.



Los primeros cuatro tiros de Israel son $2/2$, $5/4$ y $1/3$.

Para el cuarto dardo, Israel decide romper el globo azul cielo y lanza el dardo $2/3$ tomando como base el que está en $1/3$.

Enseguida decide romper el globo amarillo y estima que el globo estará en $3/6$, porque está al lado derecho del globo que está en $2/3$ y tanto el numerador como el denominador son más grandes. Lanza el dardo y falla.

Después toma en cuenta los dardos lanzados y logra estimar que el globo amarillo se encuentra en la fracción $5/6$.

Comentarios

A pesar de que se ha tratado de bajar el grado de dificultad en este nivel, omitiendo los quintos y usando solamente los denominadores 2 y 3 y sus múltiplos 4 y 6, el desempeño de los niños no fue muy exitoso, pues trataban de estimar los globos en las fracciones ya trabajadas en el anterior nivel (medios y cuartos) y al estimar la ubicación de las fracciones en tercios y sextos volvían a cometer el error de establecer relaciones de orden entre fracciones de numeradores iguales, solo copiando la relación de orden que mantienen los denominadores como números naturales.

Desempeño y procedimientos de solución.

A partir de experimentar el juego en los tres niveles, se pudieron observar varias estrategias por parte de los niños para ubicar las fracciones en donde se encontraban los globos. Veamos algunas

1. Dividen con sus dedos la barra en tantas partes como indique el denominador que eligen.

2. Tiran las dos primeras fracciones de las series con igual denominador para tomar la medida de la distancia entre ellas y con la misma distancia ubicar en la barra las siguientes.

3. Van estimando fracción por fracción para descartar, según ellos, la que no les sirve.
4. Cuentan los holanes de las cortinas.
5. Usan como salvavidas la fracción $\frac{3}{4}$ para ubicar fracciones a la derecha sumando el numerador y denominador para obtener $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$; aunque no es una estrategia correcta matemáticamente, a veces les funcionaba.

6. Para resolver la segunda versión del primer nivel hacen uso exclusivo de los octavos para ubicar los cincos globos en la barra pues el 8 es común múltiplo de 2 y 4.

Comentarios finales

Como se comentó al inicio, el juego original era muy difícil para los alumnos. Esta experimentación permitió hacerlo más accesible y al mismo tiempo poner en juego conocimientos sobre las fracciones para que los alumnos puedan comprender algunas propiedades de éstas, como son el orden, la equivalencia y las fracciones impropias.

Los resultados que se obtienen muestran que los niños tienen dificultades importantes con la ubicación de fracciones en una recta, además de ordenarlas. Tal situación se había anticipado en el primer y tercer capítulo, pues se menciona que esta actividad es un reto para los niños ya que durante el aprendizaje de las matemáticas se enfrentan primero al conjunto de los números naturales y sus propiedades; además el contexto en el que se ordenan las fracciones y se ubican en la recta es el menos trabajado en los materiales que se analizaron en el capitulo tres.

Sin embargo, después de jugar varias veces, los niños fueron construyendo estrategias que les permitieron utilizar estas propiedades de las fracciones. Las estimaciones para ubicar la posición de un globo fueron mejorando.

CONCLUSIONES

El tema de las fracciones es uno de los retos más importantes que se plantea en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, frente a este reto es necesario diseñar situaciones en donde las fracciones, sus relaciones y sus operaciones cobren sentido como herramientas que sean útiles para resolver problemas.

Consideramos que en la actividad "A romper globos" se ponen en juego conocimientos sobre las fracciones para que los alumnos puedan comprender algunas características de éstas, como son el orden, la equivalencia, su clasificación en propias e impropias y operaciones de suma y resta.

De acuerdo con las interpretaciones y características de los números racionales mencionadas en el primer capítulo, al jugar los niños demostraron estar familiarizados con el lenguaje matemático que envuelve a los números racionales pues identificaron cómo se representa simbólicamente un medio, un tercio, dos cuartos, cinco tercios, etc.

En el juego los niños demostraron no tener habilidad para ordenar los números racionales, pues al jugar trataban de ubicar las fracciones ordenando primero las que tienen igual denominador.

Una de las características de los números racionales que se pone en práctica en el juego es construir isomorfismos de números racionales en puntos de la recta al asignar un valor a cada punto racional en la recta. Esto lo harían correctamente los niños si conocieran la relación de orden entre los números racionales.

Otra de las características de los números racionales que los niños trabajaron en el juego es conjunto denso, es decir, los niños sabían que entre dos números racionales existe otro número racional, pero tuvieron dificultades para encontrarlo porque no sabían las relaciones de orden.

Algunos niños trataron de resolver el juego de los globos calculando la magnitud de la barra de acuerdo con el número de holanes que tenía la cortina del puesto de la feria, al cual dividían entre el denominador que escogían para ubicar un globo. Aunque se podría decir que ponían en práctica los racionales como cocientes, que es otra definición de los números racionales, no es la mejor forma de resolver el juego pues al dividir el entero entre el denominador se reduce a usar números naturales.

En el juego los niños sólo sumaron y restaron fracciones con el mismo denominador, pues al tener ubicados $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ en la barra, si un globo estaba en $\frac{3}{4}$, el niño no sumaba $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ para ubicar $\frac{3}{4}$, el niño hacía sumas sucesivas de $\frac{1}{4}$ para llegar a $\frac{3}{4}$. Para la resta se presentó el caso de tener ubicado $\frac{1}{8}$ en la barra y otro globo a la misma distancia de $\frac{1}{8}$ del extremo derecho de la barra. Los niños identificaban que el globo estaba en $\frac{7}{8}$, pues $\frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Es difícil evaluar los conocimientos que los niños tienen sobre fracciones, pero como ya mencionamos, en la actividad "A romper globos" se ponen en juego conocimientos sobre las fracciones para que el niño pueda comprender las propiedades de éstas. Después de jugar varias veces, los niños fueron construyendo estrategias que les permitieron utilizar dichas propiedades. Las estimaciones para ubicar la posición de un globo fueron mejorando.

Además, no olvidemos que a pesar de ser incluido a partir de cuarto grado en el programa de estudio la representación de las fracciones sobre la recta y el orden entre ellas, es el menos trabajado.

El error más común encontrado en esta experimentación fue que los niños hacían una estimación incorrecta por tratar de ver a las fracciones como números naturales, por ejemplo, estimaban que $\frac{3}{8}$ era mayor que $\frac{1}{2}$, porque en la primera fracción los números son más grandes que en la segunda.

El juego, sin embargo, permitió poco a poco ir reflexionando sobre estos aspectos. Recordemos que el papel del maestro es un elemento fundamental para que los alumnos se vayan apropiando de los conocimientos.

Una tarea interesante es pedir al alumno que anticipe dónde caerán los dardos antes de lanzarlos y después reflexionar sobre los dardos que ya están ubicados, justamente para empezar a darse cuenta de que los números racionales no tienen las mismas propiedades que los números naturales.

Por otro lado, dado que las fracciones constituyen uno de los contenidos que resultan más difíciles para los niños y también para los maestros, consideramos que esta actividad aporta elementos para que los alumnos puedan trabajar algunos aspectos de éstas: la ubicación de fracciones en la recta, las fracciones equivalentes (en tanto se pueden usar distintas fracciones para romper un mismo globo), y el orden de las fracciones (a partir de observar las notaciones que aparecen en la pantalla después de romper cada globo).

Con esta actividad en forma de juego tratamos de aportar elementos para cambiar la perspectiva que tienen los niños de las matemáticas, para mostrar una actividad que además permite hacer uso de los conocimientos que se tienen y de confrontar algunas creencias erróneas que se manejan.

Creemos que si logramos que los niños se interesen por jugar varias veces y asumir el reto de romper todos los globos, como de hecho lo hicieron todos los niños entrevistados, estamos ganando terreno en crear cierta afinidad con las matemáticas.

Habrá que tratar de diseñar actividades similares para otros contenidos, de manera que éstas, además de ser lúdicas, proporcionen información visual a los niños sobre los resultados de sus decisiones, que los hagan reflexionar (de manera informal) sobre el contenido (en este caso las fracciones en la recta) para generar nuevas estrategias que resulten ganadoras.

También podemos mencionar que las investigaciones realizadas en este trabajo, así como la aceptación del mismo en el XXXIII Congreso Nacional de Matemáticas y en el XX Simposio Internacional de Computación en la Educación, señalan que este tipo de situaciones didácticas puede ser una herramienta poderosa para la enseñanza de las matemáticas.

APÉNDICE

Se pretende que el presente apéndice funcione como un puente entre los lectores interesados en conocer más del conjunto de los números racionales y la bibliografía utilizada para el estudio de los mismos.

1. LOS NÚMEROS NATURALES.

La necesidad de contar condujo a la primera noción de número: el número natural.

El conjunto de los números naturales se representa con la letra $\mathbb{N}$, el cual contiene los números 1,2,3,..., n; las propiedades de este conjunto son deducibles de "los axiomas de Peano"[1], esto demostrado por el matemático Italiano Peano (1858-1932) los cuales son:

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es tal que:

i) *1 pertenece a $\mathbb{N}$.*

ii) *Para cada n pertenece a $\mathbb{N}$ existe un único $(n)^*$ que pertenece a $\mathbb{N}$, llamado el siguiente de $\mathbb{N}$*

iii) *Para cada n que pertenece a $\mathbb{N}$ se tiene que $(n)^*$ es diferente a 1.*

iv) *Si m, n pertenecen a $\mathbb{N}$ y $(m)^* = (n)^*$, entonces m=n*

v) *Todo subconjunto A de $\mathbb{N}$ que tenga las propiedades:*

a) 1 pertenece a A.

b) n pertenece a A implica que $(n)^*$ pertenece a A

es el mismo conjunto $\mathbb{N}$."

Partiendo de esta base axiomática veremos las propiedades de los números naturales en forma de teoremas, así como caracterizar a $\mathbb{N}$ como un semianillo conmutativo unitario bien ordenado.

[1] Axiomas de Peano. Bibliografía número 25. Pág. 10

1.1 LA ADICIÓN EN $\mathbb{N}$

En los números naturales se define la adición (+) como una aplicación de $\mathbb{N}X\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, que verifica dos propiedades[2]:

A1. $n+1=(n)^* \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

A2. $n+(m)^*=(n+m)^* \ \forall \ n, m \in \mathbb{N}$

Tales propiedades permiten la suma de dos números naturales cualesquiera obteniéndose como resultado un número natural único.

Sea A= $\{m \in \mathbb{N} \mid m+n \in N \ \ y \ \ n+m \ \ único, n \in \mathbb{N}, \ n \ fijo\}$, fijado n esta perfectamente definida su suma con cualquier número natural; haciendo variar n tenemos perfectamente definida la suma de dos números naturales cualesquiera.

$1 \in A$, pues $n+1=(n)^* \in \mathbb{N}$ y es único por ser $()^*$ la aplicación del axioma *ii* de Peano y *A*1.

Sea $m \in$ A, $n+(m)^*=(n+m)^*$ (condición *A*2 de la suma) como $m \in A$ tenemos que $n+m \in \mathbb{N}$ por definición de *A*, como $n+m \in \mathbb{N}$ entonces $(n+m)^* \in \mathbb{N}$ y es único (por axioma *ii* y *iv* de Peano), por tanto $(m)^* \in A$, en consecuencia, por el inciso (*v*), $A=\mathbb{N}$.

Construimos un conjunto *A* a partir de un *n* arbitrario que pertenece a los números naturales como el conjunto de todo $m \in \mathbb{N}$ tal que la suma es cerrada ($n+m \in \mathbb{N}$) y única. Llegamos a que $A = \mathbb{N}$ esto implica que la suma es cerrada y única sobre todos los naturales. Entonces $\mathbb{N}$ $\exists$ y es único.

---

[2] La adición en $\mathbb{N}$. Bibliografía número 25. Pág. 11

A continuación probaremos las propiedades[3] de la adición.

Teorema 1: "$(a+b)+c=a+(b+c)$ $\forall$ $a,b,c\in\mathbb{N}$, es decir, la adición es asociativa".

Por inducción. Sea $A=\{n\in\mathbb{N} / (a+b)+n=a+(b+n),\ a,b\in\mathbb{N},\ a,b \text{ fijos}\}$

$1\in A$, pues $(a+b)+1=(a+b)^*$ (condición $A1$)$=$ $a+(b)^*$ (condición $A2$) $=a+(b+1)$ (condición $A1$), por tanto $1\in A$.

Sea $n\in A$, tenemos que $(a+b)+n=a+(b+n)$; $(a+b)+(n)^*=[(a+b)+n]^*$ (Condición $A2$)$=[a+(b+n)]^*$ (por ser $n\in A$)$=$ $a+(b+n)^*$ (condición $A2$)$=$ $a+(b+(n)^*)$ (condición $A2$)$\Rightarrow(n)^*\in A$, por tanto $A=\mathbb{N}$. Como a y b son números naturales cualesquiera queda probado el teorema.

Lema: "El 1 conmuta para la adición, con cualquier número natural, es decir, $n+1=1+n$ para todo $n\in\mathbb{N}$".

Sea $A=\{n\in\mathbb{N}\ /\ n+1=1+n\}$. $1\in A$ pues $1+1=1+1$. Sea $n\in A$, veamos que $(n)^*\in A$; $1+(n)^*=(1+n)^*$ (por condición $A2$)$=(n+1)^*$ (por ser $n\in A$)$=((n)^*)^*$ (por condición $A1$) $=(n)^*+1$ (por condición $A1$), por tanto $(n)^*\in A$, luego por axioma (v), $A=\mathbb{N}$.

Teorema 2: "$a+b=b+a$ para todo $a,b\in\mathbb{N}$, es decir, la adición es conmutativa".

Fijemos $a\in\mathbb{N}$ y sea $A=\{m\in\mathbb{N}\ /\ a+m=m+a\}$. Procedemos por inducción:

$1\in A$, pues $a+1=1+a$ para todo $a\in\mathbb{N}$, (según hemos probado en el lema).

Sea $m\in A$, $a+(m)^*=(a+m)^*$ (condición $A2$)$=(m+a)^*$ (por ser $m\in A$) $=m+(a)^*$ (condición $A2$)$=m+(a+1)$(condición $A1$)$=m+(1+a)$ (en virtud del lema) $=(m+1)+a$ (propiedad asociativa)$=(m)^*+a$ (condición $A1$), por tanto $(m)^*\in A$, en consecuencia, por axioma (v), es $A=\mathbb{N}$. Como a es un número natural cualquiera queda demostrado el teorema.

[3] Propiedades de la adición. Bibliografía número 25. Pág. 12-13

Teorema 3: "$m+n \neq n$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$, es decir, no hay elemento neutro para la adición".

Sea $m \in \mathbb{N}$, n fijo; sea A=$\{m \in \mathbb{N}$ / $m+n \neq m\}$. $1 \neq$ A, pues $1+n=n+1$ (propiedad conmutativa)=$(n)^*$ (condición A1) $\neq 1$ (pues inciso *(iii)*).

Sea $m \in$ A, es decir, $m+n \neq m$; $(m)^*+n=n+(m)^*$ (propiedad conmutativa) =$(n+m)^*$(condición A2)=$(m+n)^*$ (propiedad conmutativa); como $m \in$ A es $m+n \neq m$, por tanto $(m)^*+n=(m+n)^* \neq (m)^*$ (por ser $()^*$ una aplicación inyectiva), por tanto $(m)^* \in$ A, en consecuencia A=$\mathbb{N}$.

Teorema 4: "$m+p=n+p \Rightarrow m=n$ para todo $m,n,p \in \mathbb{N}$, es decir, se verifica la ley de simplificación para la adición".

Tomemos $m,n \in \mathbb{N}$, m y n fijos. Sea A=$\{p \in$ N / $m+p=n+p \Rightarrow m=n\}$.

$1 \in A$ pues si $m+1=n+1$, entonces $(m)^*=(n)^*$(condición $A1$)$\Rightarrow m=n$ (axioma (*ii*)) por tanto, $1 \in A$.

Sea $p \in A$, es decir, $m+p=n+p \Rightarrow m=n$.

Sea $m+(p)^*=n+(p)^* \Rightarrow (m+n)^*=(n+p)^*$(condición $A2$)

$\Rightarrow m+p=n+p$(condición *ii*) $\Rightarrow$ $m=n$ (por ser $p \in A$), en consecuencia $(p)^* \in A$, por tanto, $A=\mathbb{N}$.

Teorema 5: "$m+n \neq 1$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$, es decir, el 1 no se puede descomponer como suma de dos números naturales".

Sea $m \in \mathbb{N}$, m fijo A=$\{n \in \mathbb{N}$ / $m+n \neq 1\}$.

$1 \in A$, pues $m+1=(m)^*$(condición $A1$) $\neq 1$(inciso (*iii*))

Sea $n \in A$; $m+(n)^*=(m+n)^*$(condición $A2$) $\neq 1$ (inciso (*iii*)) $\Rightarrow (n)^* \in A$, por tanto, $A=\mathbb{N}$.

1.2 EL PRODUCTO EN $\mathbb{N}$.

Se define el producto[4] ($\circ$) en $\mathbb{N}$ como una aplicación de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, que verifica:

P1 $n \circ 1 = n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

P2 $n \circ (m)^* = n \circ m + n \ \forall \ n, m \in \mathbb{N}$.

Tales condiciones permiten multiplicar dos números naturales cualesquiera, obteniéndose como resultado un número natural único.

Ya que si tomamos $m \in \mathbb{N}$, m fijo; y sea $A=\{n \in \mathbb{N} \mid m \circ n \in \mathbb{N} \ \ y \ \ m \circ n \ \ único\}$,

$1 \in \mathbb{N}$, pues $m \circ 1 = m$ (condición P1); $m \in \mathbb{N}$ y es único.

Sea $n \in A$, es decir, $m \circ n \in \mathbb{N}$ y $m \circ n$ es un número natural único

$m \circ (n)^* = m \circ n + n$ (condición P2), como $n \in A$, $m \circ n \in \mathbb{N}$ y es único, como la adición es una operación $m \circ n + n \in \mathbb{N}$ y es único, por tanto, $m \circ (n)^* \in \mathbb{N}$ y es único, por tanto $(n)^* \in A$; por inciso (*v*) es $A = \mathbb{N}$.

Como m es un número natural cualquiera, tenemos que siempre se pueden multiplicar dos números naturales dados, obteniéndose como resultado un único número natural.

A continuación probaremos las propiedades[5] del producto.

Teorema 6: "$a \circ (b+c) = a \circ b + a \circ c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, es decir, la multiplicación es distributiva por la izquierda respecto a la adición".

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, a, b fijos. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ a \circ (b+n) = a \circ b + a \circ n\}$.

---

[4] Producto en $\mathbb{N}$. Bibliografía número 25. Pág. 14.

[5] Propiedades del producto en $\mathbb{N}$. Idem Pág. 15-16

$1 \in A$, pues $a \circ (b+1) = a \circ (b)^*$ (condición A1)$= a \circ b + a$ (condición $P2$) $= a \circ b + a \circ 1$ (condición $P1$) $\Rightarrow 1 \in A$.

Sea $n \in A$, es decir, $a \circ (b+n) = a \circ b + a \circ n$, veamos que $(n)^* \in A$.

$a \circ (b+(n)^*) = a \circ (b+n)^*$ (condición $A2$) $= a \circ (b+n) + a$ (condición $P2$) $= (a \circ b + a \circ n) + a$ (por ser $n \in A$)$= a \circ b + (a \circ n + a)$(por ser la adición asociativa) $= a \circ b + a \circ (n)^*$ (condición $P2$) $\Rightarrow (n)^* \in A$, por tanto, $A = \mathbb{N}$.

Teorema 7: "$(a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, es decir, la multiplicación es distributiva por la derecha respecto a la adición".

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, a, b fijos. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} / (a+b) \circ n = a \circ n + b \circ n\}$.

$1 \in A$, pues $(a+b) \circ 1 = a + b$ (condición $P1$)$= a \circ 1 + b \circ 1$(condición $P1$)$\Rightarrow 1 \in A$.

Sea $n \in A$, es decir, $(a+b) \circ n = a \circ n + b \circ n$, veamos que $(n)^* \in A$.

$(a+b) \circ (n)^* = (a+b) \circ n + (a+b)$(condición $P2$)$= (a \circ n + b \circ n) + (a+b)$ (por ser $n \in A$)$= (a \circ n + b \circ n) + (b + a)$ (por la propiedad conmutativa de la adición) $= a \circ n + [b \circ n + (b+a)]$(por la asociativa de la adición)$= a \circ n + [(b \circ n + b) + a]$ (por la propiedad asociativa de la adición)$= a \circ n + (b \circ (n)^* + a)$ (por la condición $P2$) $= a \circ n + (a + b \circ (n)^*)$(por la propiedad conmutativa de la adición) $= (a \circ n + a) + b \circ (n)^*$ (por la asociativa de la adición)$= a \circ (n)^* + b \circ (n)^*$ (condición $P2$) $\Rightarrow$ $(n)^* \in A$, por tanto, $A = \mathbb{N}$.

Teorema 8: "$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, es decir, el producto es asociativo".

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, a, b fijos. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} / (a \circ b) \circ n = a \circ (b \circ n)\}$.

$1 \in A$, pues $(a \circ b) \circ 1 = a \circ b$ (condición $P1$)$= a \circ (b \circ 1)$(condición P1)$\Rightarrow 1 \in A$.

Sea $n \in A$, es decir, $(a \circ b) \circ n = a (b \circ n)$, veamos que $(n)^* \in A$.

$(a \circ b) \circ (n)^* = (a \circ b) \circ n + (a \circ b)$(condición $P2$)$= a \circ (b \circ n) + a \circ b$(por ser $n \in A$) $= a \circ (b \circ n + b)$(por el teorema 6)$= a \circ (b \circ n^*)$ (condición $P2$)

$\Rightarrow (n)^* \in A$, por tanto, $A = \mathbb{N}$.

Lema: "El 1 conmuta para el producto con cualquier número natural, es decir, $m \circ 1 = 1 \circ m$ para todo $m \in \mathbb{N}$".

Sea $A = \{m \in \mathbb{N} \ / \ m \circ 1 = 1 \circ m\}$. $1 \in A$, pues $1 \circ 1 = 1 \circ 1$.

Sea $m \in A$, veamos que $(m)^* \in A$

$(m)^* \circ 1 = (m)^*$ (condición $P1$)$=(m \circ 1)^*$(condición $P1$)$=(1 \circ m)^*$ (por ser $m \in A$)$=1 \circ m+1$ (condición $A1$)$=1 \circ m+1 \circ 1$(condición $P1$)$=1 \circ (m+1)$(propiedad distributiva)$=1 \circ (m)^*$ (condición $A1$), por tanto $(m)^* \in A$, en consecuencia $A=\mathbb{N}$.

Teorema 9: "$a \circ b = b \circ a$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$, es decir, el producto es conmutativo"

Sea $a \in \mathbb{N}$, a fijo. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ a \circ n = n \circ a\}$. $1 \in A$, pues por el lema $1 \circ a = a \circ 1$ para todo $a \in \mathbb{N}$. Sea $n \in A$, $a \circ (n)^* = a \circ n + a$ (condición $P2$)$= n \circ a + a$ (por ser $n \in$ A)$=$ $n \circ a + a \circ 1$ (condición $P1$)$= n \circ a + 1 \circ a$ (por el lema)$=(n+1) \circ a$ (por la propiedad distributiva) $=((n)^*) \circ a$ (condición $A1$)$(n)^* \in A$, por tanto, $A=\mathbb{N}$.

Teorema 10: "Si $m \circ n = n \Rightarrow m=1$; es decir, el único elemento que al multiplicarlo por otro lo reproduce es el 1".

Sea $A = \{n \in N \ / \ m \circ n = n \Rightarrow m=1\}$. $1 \in A$, pues $m \circ 1 = 1$ y $m \circ 1 = m$ (condición $P1$), por tanto, $m=1$. Sea $n \in A$, es decir, $m \circ n = n \Rightarrow m=1$.

Sea $m \circ (n)^* = (n)^* \Rightarrow$ $m \circ n + m = n+1$ (condición $P2$ y $A1$), como $n \in A$ es $m \circ n = n \Rightarrow$ $n+m=n+1$ y aplicando la ley de simplificación de la adición es $m=1$, por tanto $(n)^* \in A$, en consecuencia $A=\mathbb{N}$.

Teorema 11: "Si $m \circ n = 1$, entonces $m=n=1$; es decir, la única forma de descomponer el 1 como producto de dos números naturales, es que estos dos factores coincidan con el 1".

Sean $m,n \in \mathbb{N}$, $m \circ n = 1$, sea $n \neq 1 \Rightarrow$ existe $n' \in \mathbb{N}$, $(n')^* = n \Rightarrow m \circ (n')^* = 1 \Rightarrow$ $m \circ n' + m = 1$ (condición P2) lo que contradice el enunciado del teorema 5, por tanto, $n=1$ y en consecuencia $m \circ 1 = 1$, por tanto, $m=1$ (condición P1).

Consecuencia: "el producto de dos números naturales distintos de 1 es un número natural distinto de 1".

Si $m \neq 1$, $n \neq 1 \Rightarrow m \circ n \neq 1$, pues si $m \circ n=1$, tenemos por el teorema $m=n=1$.

SEMIGRUPO

Ahora mencionaremos la definición de semigrupo[6]: *Diremos que el par ordenado (A,*) es un semigrupo, o bien que A es una estructura de semigrupo respecto de *, sí y sólo sí A es un conjunto y * es una operación interna asociativa en A.*

Diremos que un semigrupo (A,) es unitario sí y sólo sí * posee la propiedad de existencia de elemento neutro en A.*

Diremos que un semigrupo (A,) es conmutativo o abeliano sí y sólo sí * es conmutativo en A.*

De las anteriores definiciones resulta inmediatamente:

a) $(\mathbb{N},+)$ es un semigrupo y conmutativo, en el que cada número natural es regular.

b) $(\mathbb{N},\circ)$ es un semigrupo unitario y conmutativo, en el que cada número natural distinto de cero es regular.

En este apartado hemos estructurado $(\mathbb{N}, +)$ como un semigrupo abeliano, sin elemento neutro, con ley de simplificación.

SEMIANILLO

Ahora definiremos semianillo[7]: *Diremos que una terna ordenada (A,*,•) es un semianillo, o bien que A posee una estructura de semianillo respecto de * y • (en este orden), si y sólo si:*

*a) (A, *) es un semigrupo unitario y conmutativo.*

[6] Semigrupo. Bibliografía número 28. Pág. 304

[7] Semianillo. Idem, pág. 310.

b) (A, •) es un semigrupo.

*c) • es distributiva respecto de * en A.*

Diremos que un semianillo (A,,•) es unitario (respectivamente conmutativo) sí y sólo sí • posee la propiedad de existencia de elemento neutro en A (respectivamente, • es conmutativa en A).*

De las anteriores definiciones resulta, inmediatamente, que $(\mathbb{N},+,\circ)$ es un semianillo y conmutativo; en cambio $(\mathbb{N},\circ,+)$ no es un semianillo, ya que la suma no es distributiva respecto del producto en $\mathbb{N}$.

1.3 EL ORDEN EN $\mathbb{N}$.

En este apartado definiremos una relación de orden en $\mathbb{N}$[8] que es un buen orden, en consecuencia total, compatible con las operaciones, lo que nos va a permitir ordenar a los números naturales uno a continuación de otro, empezando por el 1.

Teorema 12: "Dados $m,n \in \mathbb{N}$, se verifica una y solo una de las siguientes propiedades:

a) $m=n$

b) $\exists\ p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n=m+p$

c) $\exists\ q \in \mathbb{N}$ *tal que* $m=n+q$".

En primer lugar veremos que si se cumple una condición no se cumplen las otras.

1. Si se cumple (a), es imposible, en virtud del teorema 3, que se cumplan las otras dos (no hay elemento neutro para la adición).
2. Si se cumple *(b)*, tenemos que existe $p \in \mathrm{N}$ tal que $n=m+p$, por lo que se cumple (a) si y solo si $n=n+p$ lo que es imposible por el teorema 3.

---

[8] Orden en $\mathbb{N}$. Bibliografía número 25. Pág. 17-18.

No se cumple (c) ya que existiría $q \in \mathbb{N}$ tal que $m=n+q$, con lo que $n=(n+q)+p=n+(q+p)$, y como $q+p \in \mathbb{N}$ es imposible en virtud del teorema 3.

3. Si se cumple la condición c la discusión es análoga a la anterior. Por lo tanto son excluyentes.

Nos falta ver que si $m,n \in \mathbb{N}$, siempre se cumple una de las tres propiedades (a), (b), (c).

Sea $m \in \mathbb{N}$, m fijo, sea $A=\{n \in \mathbb{N} \,/\, m$ y n satisfacen (a) o (b) o (c)$\}$.

Procederemos por inducción.

$1 \in A$

Si $m=1$ se verifica ($m=n=1$) la condición (a).

Si $m \neq 1$, entonces $m \in img(()^*)$ (m es imagen de otro número natural) por tanto, existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que $m=(m')^* \Rightarrow m=m'+1$ (condición $A1$)$=1+m'$ (propiedad conmutativa de la adición), con lo que se cumple (c) sin mas que tomar $q=m'$.

Hemos probado que $1 \in A$.

Sea $n \in A$, veamos que $(n)^* \in A$.

Pueden presentarse tres casos.

1. $n \in$ A y verifica la condición (a).
2. $n \in$ A y verifica la condición (b).
3. $n \in$ A y verifica la condición (c).

Caso 1:

$n \in A$ $m=n \Rightarrow (m)^*=(n)^* \Rightarrow (n)^*=m+1$ (condición A1) luego $(n)^*$ y m cumplen la condición (b) con $p=1 \Rightarrow$ $(n)^* \in A$.

Caso 2:

$n \in$ A y verifica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n=m+p \Rightarrow n^*=(m+p)^*$(por ser $()^*$ una aplicación)$=$ $m+(p)^*$(condición $A2$), por tanto $(n)^*$ y m cumplen la condición (b) tomando $(p)^*$ en el lugar de p, en consecuencia $(n)^* \in A$.

Caso 3:

$n \in A$ y verifica que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que:

$m=n+q \Rightarrow (m)^*=(n+q)^*=(q+n)^*=q+(n)^*$, luego $m+1=q+(n)^*$.

Pueden presentarse dos casos: $q=1$ y $q \neq 1$.

Si $q=1$, es $m+1=1+(n)^* \Rightarrow m+1=(n)^*+1 \Rightarrow m=(n)^*$ (ley de simplificación de la adición), por tanto $(n)^*$ y m cumplen la condición (a), luego $(n)^* \in A$.

Si $q \neq 1 \Rightarrow q \in img(()^*)$ (q es imagen de otro número natural), por tanto (en virtud del teorema 2) existe $q^* \in \mathbb{N}$ tal que $(q^*)^*=q$, como $m=n+q$, por verificar (c), tenemos $m=n+(q')^*=(n+q')^*=(q'+n)^*=q'+(n)^*=(n)^*+q'$, luego m y $(n)^*$ verifican la condición (c), por tanto $(n)^* \in A$. Como $1 \in A$ y dado $n \in A$ entonces $(n)^* \in A$, entonces $A=\mathbb{N}$. Aplicando el axioma (v) es $A=\mathbb{N}$.

Partimos del conjunto que lo cumple A y llegamos a que $A=\mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N}$ lo cumple.

DEFINICIÓN DE ESTRICTO ORDEN[9].

Dados dos números naturales m y n, diremos que m es menor que n y escribiremos $m<n \Leftrightarrow$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n=m+p$,.es decir, n se puede descomponer en dos sumando uno de los cuales es m. Análogamente sí m>n sí y sólo sí $m=n+p$.

Teorema 13: "si $m<n$ y $n<p \Rightarrow$ existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n=m+q_1$ (transitividad de orden estricto)".

Si $m<n \Rightarrow$ existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n=m+q_1$.

Si $n<p \Rightarrow$ existe $q_2 \in \mathbb{N}$ tal que $p=n+q_2$.

Si sustituimos el valor de n de la primera igualdad en la segunda tenemos

[9] Estricto orden. Bibliografía 25. Pág. 28.

$p=(m+q_1)+q_2=m+(q_1+q_2)$, como $q_1+q_2=q\in\mathbb{N}$, $p=m+q$, por tanto, $m<p$. Análogamente si $m>n$ y $n>p$ tal que $m>p$.

1.4 LA DIFERENCIA EN $\mathbb{N}$[10].

Definición: "si $m,n\in\mathbb{N}$ y $m<n$, entonces existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $n=m+p$, al número natural p le llamaremos diferencia entre n y m lo representaremos como $n\text{-}m$, a n le llamaremos minuendo y a m sustraendo".

Consecuencia1: "si $m<n$; $n\text{-}m$ es único".
si $n\text{-}m=p$ y $n\text{-}m=p'$, por definición es $n=m+p=m+p'$ y por la ley de simplificación de la adición es $p=p'$.

Consecuencia2: "si $m,n\in\mathbb{N}$ y $m\neq n$, siempre existe una y solo una de las dos diferencias $m\text{-}n$ y $n\text{-}m$".

Ya que siempre se verifica solo una de las tres siguientes relaciones $m=n$, $m<n$ o $n<m$, y en nuestro caso es $m\neq n$.

<u>Con lo anterior se verifica que el resultado de restar dos números naturales no siempre es un número natural, por que si $m<n$ entonces no existe $m\text{-}n$ en los naturales.</u>

Propiedades de la diferencia en $\mathbb{N}$[11]:

Teorema 14: "$(m+p)\text{-}(n+p)=m\text{-}n$ (suponemos $m>n$). es decir, si al minuendo y al sustraendo de una diferencia se le suma un mismo número natural la diferencia permanece igual".

$m\text{-}n=h \Rightarrow m=n+h \Rightarrow m+p=(n+h)+p=n+(h+p)=n+(p+h)=(n+p)+h$

$\Rightarrow (m+p)\text{-}(n+p)=h=m\text{-}n$

---

[10] Diferencia en $\mathbb{N}$. Bibliografía 25. Pág. 22.
[11] Propiedades de la diferencia. Idem, pág. 22-23

Teorema 15: $n<m \Rightarrow (m+p)-n=(m-n)+p \quad \forall \ p \in \mathbb{N}$. Es decir, si al minuendo de una diferencia se le añade un número natural la diferencia aumenta en ese mismo número"

$m-n=h \Rightarrow m=n+h \Rightarrow m+p=(n+h)+p=n+(h+p) \Rightarrow (m+p)-n=h+p=(m-n)+p$

Teorema 16:- "si $n<m$ y $n+p<m \Rightarrow m-(n+p)=(m-n)-p$"

sea $m=n+h$ y $m=(n+p)+q=n+(p+q)$ luego por sustitución es

$m=n+h=n+p+q \Rightarrow$ (por simplificación) es $h=p+q \Rightarrow h-p=q \Rightarrow (m-n)-p=m-(n+p)$.

1.5 LA DIVISION EN $\mathbb{N}$[12].

Definición:"dados $m,n \in \mathbb{N}$ si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m=n \circ q$ decimos que m es múltiplo de n, que n es divisor de m y que q es el cociente exacto de la división de m y n. Escribiremos $q=m/n$".

Consecuencia1: "el cociente entre dos números naturales en caso de existir es único".

En efecto sean $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m=n \circ q_1$ y $m=n \circ q_2 \Rightarrow n \circ q_1=n \circ q_2$, aplicando la ley de simplificación $q_1=q_2$.

Consecuencia 2. "Si q es el cociente exacto de m por n, entonces $q \circ p$ es el cociente exacto de $m \circ p$ por n, para todo $p \in \mathbb{N}$"

Si $q=m/n \Rightarrow m=n \circ q \Rightarrow m \circ p=(n \circ q) \circ p=n \circ (q \circ p)=(q \circ p) \circ n \Rightarrow q \circ p=m \circ p/n$

<u>La división de dos números naturales no siempre es un número natural ya que en $\frac{m}{n}$ si m no es divisible entre n entonces el cociente exacto no existe en los naturales.</u>

[12] La división en $\mathbb{N}$. Bibliografía número 25. Pág. 23.

Propiedades de la división[13]:

Consecuencia 3. "si q es el cociente exacto de dividir m entre n, también lo es de dividir $m \circ p$ entre $n \circ p$, para cualquier $p \in \mathbb{N}$".

Si $q=m/n \Rightarrow m=n \circ q \Rightarrow m \circ p=(n \circ q) \circ p=n \circ (q \circ p)=n \circ (p \circ q)=(n \circ p) \circ q \Rightarrow m \circ p/n \circ p=q$

Dado lo anterior se puede verificar también la amplificación y simplificación de fracciones.

Definición: "Dado $n \in \mathbb{N}$ representaremos como k al conjunto de los múltiplos de n, es decir, k=$\{pn \,/\, p \in \mathbb{N}\}$".

Teorema 17: "Dado $n \in \mathbb{N}$, la aplicación f: $\mathbb{N} \rightarrow$k definida por $f(p)=p \circ n$ es una biyección que conserva el orden".

Es claro que la aplicación pues dados p y n el producto $p \circ n$ es un número natural único.

Es inyectiva pues si $f(p)=f(q) \Rightarrow n \circ p=n \circ q \Rightarrow p=q$ (por simplificación)

Es suprayectiva pues si $a \in k \Rightarrow \exists p \in N$ *tal que* $a=n \circ$p $\Rightarrow$ f(p)= a.

Conserva el orden, pues si $p<q$ *y* $f(p)=p \circ n$ $\quad f(q)=q \circ n$, por monotonía del orden que $p<q \Rightarrow p \circ n<q \circ n \Rightarrow f(p)<f(q)$

Teorema 18: "k no está acotado superiormente".

Sea $a \in \mathbb{N}$ cota superior de k$\Rightarrow p \circ n \leq a \; \forall \; p \in \mathbb{N}$. Como $a \leq a \circ n$, por transitiva es $p \circ n \leq a \circ n \; \forall p \in \mathbb{N}$, por tanto es $p \leq a$ ya que si $a<p \Rightarrow a \circ n<p \circ n$, absurdo, por

[13] Propiedades de la división. Bibliografía número 25. Pág. 24-25.

tanto es $p\leq a$ $\forall$ $p\in\mathbb{N}$ y en consecuencia $\mathbb{N}$ estaría acotado superiormente, absurdo.

Teorema 19.- "$\forall$ $m,n\in\mathbb{N}$ existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $p\circ n>m$".

En efecto basta tomar $p=(m)^*$ pues $n\circ(m)^*= n\circ m+n\geq m+n$ $\geq m+1$ (pues $1\leq n \forall$ $n\in\mathbb{N})>m$, luego $n\circ(m)^*>m$ y $p=(m)^*$ cumple el teorema.

Teorema 20: "$\forall$ $m,n\in\mathbb{N}$, $m\notin k$ y $m>n$, existen $q,r\in\mathbb{N}$, q y r número tales que $m=q\circ n+r$ y $1\leq r<n$. A q le llamamos cociente de la división entera y a r resto. A m y n se les llama dividendo y divisor (existencia de la división entera)".

Sea $P=\{p\in\mathbb{N} \ / \ m<p\circ n\}$ $P\neq\emptyset$ pues por el teorema 19, existe $p\in\mathbb{N}$ que verifica $m<p\circ n$. Como el orden en $\mathbb{N}$ es un buen orden existe *minP* y este es único, es decir, existe $q=minP$, es decir, $q\leq p$ $\forall$ $p\in N$, $q\in$ P y $q\neq 1$, pues si q=1es $m<n$ contra la hipótesis $m>n$; al ser $q\neq 1$ existe $q'\in\mathbb{N}$ tal que $(q')^*=q$ luego $(q')^*=q\leq p$. Al ser $q=minP$ es $m<q\circ n$ además, $q'\circ n<m<q\circ n$ pues si $q'\circ n=m$ entonces $m\in k$ contra la hipótesis, si $q'\circ n>m$ es $q'\in\mathbb{N}$ y $q'<q$ contra la hipótesis de que q es mínimo, por tanto $q'\circ n<m<q\circ n$, como $q'\circ n<m\Rightarrow$ existe $r\in$ N tal que $q'\circ n+r=m$, r único (por definición de diferencia), "$r<n$" pues si $r\geq n$ es $q'\circ n+r\geq q'\circ n+n=$ $(q'+1)\circ n=(q')^*\circ n$, como $m= q'\circ n+r$ es $m>q\circ n$, contra la hipótesis $m<q\circ n$.

Consecuencia: "si multiplicamos el dividendo y el divisor de una división entera por un mismo número el cociente no varía pero el resto queda multiplicado por dicho número".

Sean q y r el resto de dividir m por n, tenemos $m= q\circ n+r$ $1\leq r<n$, sea $p\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow m\circ p=(q\circ n+r)$ $\circ p=(q\circ n)$ $\circ p+r\circ p=q\circ(n\circ p)+r\circ p$, *como* $r<n$ $\Rightarrow$ $r\circ p<n\circ p$ luego q es el cociente y $r\circ p$ el resto de dividir $m\circ p$ por $n\circ p$.

2. LOS NÚMEROS ENTEROS

En el conjunto $\mathbb{N}$, es posible definir, sin ninguna restricción la suma. Cuando definimos la resta, es necesario imponer la condición de que el minuendo sea mayor que el sustraendo, de tal manera la sustracción en $\mathbb{N}$ no es una operación cerrada.

Es entonces cuando aparece el conjunto de los números enteros al cual designaremos la letra $\mathbb{Z}$[14]. Tal conjunto se define como sigue $\mathbb{Z}=\{\mathbb{N}+\{-\mathbb{N}\}+0\}$.

$\mathbb{Z}$ hereda de los números naturales las mismas propiedades para la suma y la multiplicación que satisfacen las siguientes propiedades, excepto la propiedad 3 y 4.

Propiedad 1. La suma de números enteros es conmutativa, es decir, si $a,b\in\mathbb{Z}$, entonces $a+b=b+a$

Propiedad 2. La suma de números enteros es asociativa, es decir, si $a,b,c\in\mathbb{Z}$, entonces $(a+b)+c=a+(b+c)$

Propiedad 3. Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la suma, el 0. Es decir, si $a\in\mathbb{Z}$, $a+0=0+a=a$

Propiedad 4. Para cada a en $\mathbb{Z}$ existe en $\mathbb{Z}$ un inverso aditivo que se denota por $-a$. Esto es $a+(-a)=(-a)+a=0$

Propiedad 5.- El producto de números enteros es conmutativo, es decir, si $a,b\in\mathbb{Z}$, entonces $ab=ba$

Propiedad 6. El producto en $\mathbb{Z}$ es asociativo, es decir, si $a,b,c\in\mathbb{Z}$ entonces $(ab)c=a(bc)$.

Propiedad 7. Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la multiplicación, el 1. Es decir, si $a\in\mathbb{Z}$ $a1=1a=a$

[14] Los números enteros y sus propiedades. Bibliografía número 5. Pág. 163-164

Propiedad 8. En $\mathbb{Z}$ el producto distribuye a la suma, es decir, si, $a,b,c \in \mathbb{Z}$, entonces

$a(b+c)= ab+ac$

$(a+b)c=ac+bc$

ANILLOS

En matemáticas aparecen con mucha frecuencia conjuntos en los cuales se tienen dos operaciones que tienen las propiedades 1,2,...,8 que acabamos de mencionar. En estos casos se dice que dichos conjuntos, con las operaciones respectivas, constituyen un anillo conmutativo, con elemento unitario (el 1).

> Definición: *Diremos que la terna ordenada $(A,*,\bullet)$ es un anillo sí y sólo sí $(A,*,\bullet)$ es un semianillo, tal que todo elemento de A es invertible respecto de $*$.*[15]

Así pues, podemos decir que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, con las operaciones + y x forman un anillo.

Cuando valen todas las propiedades menos (posiblemente) el 5 y el 7, a dichas estructuras se les llama simplemente anillos.

> *Diremos que un anillo $(A,*,\bullet)$ es unitario (respectivamente, conmutativo) sí y sólo sí $\bullet$ posee la propiedad de existencia de elemento neutro en A (respectivamente $\bullet$ es conmutativa en A)*[16].

2.1 PROPIEDADES DE ANILLOS DE LOS ENTEROS[17]

Veremos ahora como, a partir de las propiedades básicas de las operaciones con los números enteros, pueden demostrarse otras muchas de las que conocemos.

---

[15] Anillos. Bibliografía número 28. Pág. 310.

[16] Anillo unitario. Ibidem.

[17] Propiedades de anillos de los enteros. Bibliografía número 5. Pág. 168-170

La importancia de proceder en esta forma es que estas propiedades no solo serán válidas en los enteros, sino en cualquier conjunto con dos operaciones que cumplan las propiedades 1,2,3,....,8, es decir en cualquier anillo conmutativo con elemento unitario.

Proposición 1: (ley de cancelación) Si a, b y c son enteros y $a+b=a+c$, entonces $b=c$.

Demostración. Supongamos que $a+b=a+c$. Según la propiedad 4 existe un entero, $-a$, tal que $(-a)+a=0$. Tenemos entonces que $(-a)+(a+b)=(-a)+(a+c)$.

Por la propiedad asociativa (propiedad 2), podemos escribir:

$((-a)+a)+b=((-a)+a)+c$, de donde, $0+b=0+c$ y como 0 es el elemento neutro aditivo (propiedad 3), obtenemos que $b=c$.

Esta propiedad podríamos llamarla, con más precisión, ley de cancelación por la izquierda.

Utilizando la ley de cancelación por la izquierda y la propiedad conmutativa para la adición se demuestra la ley de cancelación por la derecha.

Corolario 1: Si a, b y c son enteros y $a+c=b+c$, entonces $a=b$

Demostración. Ya que $a+c=b+c$, por la propiedad 1 obtenemos $c+a=c+b$ y por la ley de cancelación demostrada anteriormente, resulta que $a=b$.

Corolario 2: Si a y b son enteros y $a+b=a$, entonces $b=0$.

Demostración. Por hipótesis, ya que $a=a+0$, tenemos que $a+b=a+0$,

de donde, por la ley de cancelación, obtenemos $b=0$.

Proposición 2: Para todo entero a, se tiene que $0a=0$.

Demostración. Ya que $0=0+0$ (según la propiedad 3) tenemos, por la propiedad asociativa; que $0a=(0+0)a=0a+0a$

Por lo tanto según el corolario anterior, resulta que $0a=0$

Usando la ley de cancelación podemos demostrar fácilmente el corolario 3.

Corolario 3: El inverso aditivo del inverso aditivo de un número entero a es a. Es decir, $-(-a)=a$

Demostración. Por definición de inverso aditivo de un entero sabemos que

$(-a)+a=0$ (1)

y también que $-(-a)+(-a)=0$ (2)

Por la propiedad conmutativa, (1) nos da $a+(-a)=-(-a)+(-a)$

Ahora bien, usando la propiedad de cancelación obtenemos que $a=-(-a)$ que es lo que se quería demostrar.

Podemos ahora demostrar las a veces llamadas "reglas de los signos".

Proposición 3: Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces

$(-a)(b)=-(ab)$

$(-a)(-b)=ab$

Demostración. Tenemos que $(-a)b+ab=((-a)+a)b=0b=0$, y también, por definición de inverso aditivo, $-(ab)+ab=0$. Por consiguiente $(-a)b+ab=-(ab)+ab$ y por la ley de cancelación resulta que $(-a)b=-(ab)$ con lo que queda demostrada la primera parte.

Se tiene que $(-a)b+(-a)(-b)=(-a)(b+(-b))=(-a)0=0$

y también, como vimos antes, $(-a)b+ab=0$

Por consiguiente, $(-a)b+(-a)(-b)=(-a)b+ab$

y, cancelando, obtenemos $(-a)(-b)=ab$

con lo que queda probada la segunda parte.

Corolario 4: $(-1)a=-a \quad (a \in \mathbb{Z})$

$(-1)(-1)=1$

La diferencia de dos números enteros se puede definir utilizando la adición y los inversos aditivos.

Definición: Si $a, b \in \mathbb{Z}$ la diferencia $a-b$ es el entero $a-b=a+(-b)$

Proposición 4: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $a(b-c)=ab-ac$

En efecto, $a(b+(-c))=ab+a(-c)=ab+(-ac)=ab-ac$

como caso particular resulta que:

Corolario 5: $-(a+b)=-a-b$

en efecto $-(a+b)=(-1)(a+b)=(-1)a+(-1)b=-a+(-b)=-a-b$

No todas las propiedades en los enteros son consecuencia de las propiedades de anillo. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ tiene la propiedad siguiente:

Propiedad 9: Si a, b son números entero diferentes de cero, entonces su producto a b es diferente de cero.

Es fácil ver que esta propiedad no es consecuencia de las propiedades 1, 2...,8. la forma de hacerlo es exhibir un anillo conmutativo, con 1 en donde podamos encontrar dos elementos distintos de cero, cuyo producto sea cero.

A los elementos a, b cuyo producto es cero se les llama divisores de cero. Con esta terminología, la propiedad 9 dice que en $\mathbb{Z}$ no hay divisores de cero distintos de cero.

DOMINIOS ENTEROS

Definición: un anillo conmutativo $(A,\bullet,*)$ diremos que es íntegro o un dominio de integridad o un dominio entero sí y sólo sí carece de divisores de cero[18].

Así que si A es un anillo conmutativo con 1 en el cual se cumple la propiedad 9 se dirá A es un dominio entero.

Así pues, podemos decir que $\mathbb{Z}$ es un dominio entero.

[18] Dominio entero. Bibliografía número 28. Pág. 312.

Proposición: En un dominio entero vale la ley de cancelación[19] para la multiplicación. Es decir, si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ entonces $ab=ac$ implica $b=c$.

Demostración. Ya que $ab=ac$ tenemos que $ab-ac=0$, de donde $a(b-c)=0$ y como $a \neq 0$ forzosamente $b-c=0$, es decir, $b=c$.

Es necesario observar que en esta propiedad el factor que podemos cancelar debe ser distinto de cero. En efecto, si $a=0$ puede ser que $ab=ac$ sin que b y c sean iguales (Cancelación).

2.2 EL ORDEN EN $\mathbb{Z}$.

Otro aspecto muy importante en el anillo de los números enteros es el orden[20]. Sabemos cuando un número es mayor que otro. Ahora precisaremos este concepto.

Los números naturales $\mathbb{N}$ forman un subconjunto de los números enteros:

$\mathbb{N}=\{1,2,3,...\} \subset \mathbb{Z}$

Destacaremos las tres propiedades básicas siguientes:

Propiedad 10: La suma de dos números naturales es un número natural.

Propiedad 11: El producto de dos números naturales es un número natural.

Propiedad 12: Si a es un número entero se cumple una y solamente una de las tres condiciones siguientes:

i) a es un número natural

ii) $a=0$

iii) $-a$ es un número natural

Dicho de otra manera, un entero puede ser o bien natural, o bien cero, o bien su inverso aditivo es natural.

[19] Ley de cancelación. Bibliografía número 5. Pág. 170-171

[20] Orden en $\mathbb{Z}$. Idem, pág. 172-173

Usando el subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$, y estas tres propiedades, podemos definir el orden y demostrar las propiedades básicas del orden y las que de ellas se deduzcan.

Definición: Si a, b son números enteros, decimos que a es mayor que b si $a-b$ es un número natural.

En símbolos, $a>b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{N}$.

Observemos que, de esta definición se sigue que

$a>0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{N}$, pues $a-0=a$.

A los números a tales que $a>0$ se les llama positivos. Así pues, los números naturales son los números positivos.

Demostración. $a>b$ significa, según la definición, que $a-b\in\mathbb{N}$. Análogamente, como $b>c$, sabemos que $b-c\in\mathbb{N}$. Por el propiedad 10, como $a-b\in\mathbb{N}$ y $b-c\in\mathbb{N}$ tenemos que su suma $(a-b)+(b-c)\in\mathbb{N}$, lo que, según la definición significa que $a>c$.

Como es costumbre la notación $a<b$ equivale $b>a$ y $a\geq b$ significa que $a>b$ o que $a=b$. Análogamente $a\leq b$ significa $a<b$, o bien $a=b$.

El propiedad 12 podemos enunciarlo ahora como sigue:

Proposición 1: Si a es un número entero, se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:

i) $a>0$

ii) $a=0$

iii) $a<0$.

Proposición 2: Si a, b y c son enteros y $a>b$, entonces $a+c>b+c$.

Demostración. Puesto que $a>b$, sabemos que $a-b\in\mathbb{N}$. Ya que $a-b=(a+c)-(b+c)$ tenemos que $(a+c)-(b+c)\in\mathbb{N}$.

Proposición 3: Si a, b y c son enteros tales que $a>b$ y $c>0$, entonces $ac>bc$.

Demostración. Por hipótesis $a-b\in\mathbb{N}$ y $c\in\mathbb{N}$. Luego, por el propiedad 11, $(a-)c\in\mathbb{N}$, es decir, $ac-bc$ es natural, de donde, $ac>bc$.

Proposición 4: Si a y b son enteros positivos y $b>1$, entonces $ab>a$.

En efecto, $b>1$ y $a>0$, Por lo tanto, según la proposición 6, tenemos que $ba>1^{a}$, es decir, $ab>a$.

2.3 LA DIVISIÓN EN $\mathbb{Z}$.

La división en los enteros[21] se define: Sea la ecuación multiplicativa $bx=a$; con a, $b\in\mathbb{Z}$. A su solución, es decir, al número x que multiplicado por b nos da como resultado a, le llamaremos el cociente de a entre b y lo representaremos con $\frac{a}{b}$.

Recordemos que un entero $b\neq 0$ se dice factor de un entero a si existe un $c\in\mathbb{Z}$, tal que $bc=a$.

Así, para el cociente $\frac{a}{b}$ podemos distinguir tres casos:

i) b es factor de a

Este es el único caso en el que la ecuación $bx=a$ tiene solución en $\mathbb{Z}$, por lo que $\frac{a}{b}$ es un número entero.

ii) b no es factor de a y $b\neq 0$.

En este caso la ecuación $bx=a$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$, por lo que $\frac{a}{b}$ no es un número entero y decimos que es un número racional.

---

[21] La división de los enteros. Bibliografía número 18. Pág. 30-31

iii) b=0

Este es un caso que merece especial atención en virtud de que $\frac{a}{b}$ no esta definido.

En efecto; si $a \neq 0, \frac{a}{b}$ no existe, ya que no hay un número que multiplicado por cero dé como resultado un número diferente de cero.

Por otra parte, si a=0, $\frac{a}{b}$ no esta determinado ya que cualquier número multiplicado por cero da como resultado el cero.

<u>En cualquier caso, el número $\frac{a}{b}$ con b=0 no está definido</u>.

Podemos ver que no siempre existe la división de los enteros.

3. LOS NÚMEROS RACIONALES

Así como los números naturales surgieron por la necesidad de contar, los números racionales surgieron por la necesidad de expresar partes de un todo. A continuación se definen los números racionales[22].

3.1 RELACION DE EQUIVALENCIA

La ecuación $mx=n$, $m \neq 0$, con m y n números enteros (coprimos o primos relativos, es decir, no poseen divisores comunes) dados, no siempre posee una solución x en los enteros. Nace entonces la necesidad de construir otro conjunto de números, que contenga a los números enteros y donde cualquiera de las ecuaciones de la forma $mx = n$; $m \neq 0$, con m y n enteros, tenga siempre solución.

Consideremos para tal fin el conjunto $\mathbb{Q}$ de los «pares ordenados» de números enteros

$\mathbb{Q}=\{(n, m) / n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$

[22] Definición de números racionales y relación de equivalencia. Bibliografía número 46. Pág. 33-34

Diremos que un par $(n;\ m)\in\mathbb{Q}$ es *irreducible* si y sólo si n y m son coprimos, es decir, no poseen divisores comunes. Diremos que dos pares $(n1,m1),(n2,m2)$ son *equivalentes*, y escribiremos

$(n1,m1)\equiv(n2,m2)$, sí y sólo sí $n1\circ m2 = m1\circ n2$. Por ejemplo, (1. 2) es irreducible y $(1,2)\equiv(2,4)$.

La relación $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva, en el sentido que precisamos a continuación:

(i) Reflexividad: $(n,m)\equiv(n,m)$, para todo par $(n,m)\in\mathbb{Q}$;

(ii) Simetría: $(n1,m1)\equiv(n2,m2)$ sí y sólo sí $(n2,m2)\equiv(n1,m1)$, para cualesquiera $(n1,m1),(n2,m2)\in\mathbb{Q}$;

(iii) Transitividad:

si $(n1,m1)\equiv(n2,m2)$ y $(n2,m2)\equiv(n3,m3)$ entonces $(n1,m1)\equiv(n3,m3)$, entendiéndose que $(n1,m1),\ (n2,m2),\ (n3,m3)\in\mathbb{Q}$.

Un número racional, que indicaremos por $\frac{a}{b}$, donde a,b son números enteros y $b\neq 0$, es e*l conjunto* $\frac{a}{b}=\{(n,m)\in Q:(n,m)\equiv(a,b)\}$

Obtenemos que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *sí y sólo sí* $(a,b)\equiv(c,d)$

es decir, los conjuntos $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son iguales sí y sólo sí los *pares* $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Q}$ son equivalentes. Esto se debe al hecho que $\equiv$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Es así como podemos definir sin ambigüedad el número racional $\frac{a}{b}$ como el conjunto $\frac{a}{b}$.

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional, llamamos **numerador** al entero a y llamamos **denominador** al entero $b\neq 0$. Está claro que el numerador y el denominador dependen del par ordenado que se use para representar al número racional.

Es natural elegir como notación para un número racional $\frac{a}{b}$ aquel elemento del conjunto $\frac{a}{b}$ para el cual los enteros de la fracción (el numerador y el denominador) son coprimos (primos relativos) y el denominador es positivo. Por ejemplo,

$\frac{1}{2}$ = {(1, 2), (-1,-2), (2, 4), (-2, -4), (3, 6), ...} y

$-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$ = {(-1,2), (1, -2), (-2, 4), (2, -4), (-3, 6), (3, -6),...}

Corolario 1: $\frac{a}{b}=\frac{ar}{br}$ si $r\neq 0$

El conjunto formado por todos los números racionales lo indicaremos por el símbolo $\mathbb{Q}$.

3.2 SUMA Y PRODUCTO EN $\mathbb{Q}$[23].

Para definir estas operaciones necesitamos dos lemas.

Lema 1: $\left(\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \text{ y } \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}\right)\Rightarrow \frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$.

Demostración. Por hipótesis $ab'=ba'$ y $cd'=dc'$. Entonces

$(ad+bc)b'd'=adb'd'+bcb'd'=bda'd'+bdb'c'=bd(a'd'+b'c')$,

que, según la proposición 2, es lo que se quería demostrar.

Lema 2: $\left(\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \text{ y } \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}\right)\Rightarrow \frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}$

Demostración: la hipótesis es la misma del lema anterior. Tendremos pues,

$acb'd'=bda'c'$,

como se quería demostrar.

---

[23] Suma y producto en $\mathbb{Q}$. Bibliografía número 5. Pág. 211-212

Ahora podemos definir

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Los lemas anteriores muestran que estas son definiciones auténticas. Si denotamos *a/b y c/d* de otras maneras, la suma y el producto que se obtienen con las fórmulas anteriores son los mismos

Observación: $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$

en efecto, $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{ad+db}{d^2}=\frac{(a+b)d}{d^2}=\frac{a+b}{d}$ por el corolario 1.

Proposición 3: en $\mathbb{Q}$:

i) La suma es conmutativa.

ii) La suma asociativa.

iii) 0/1 es neutro aditivo. Es decir, *(m/n)+(0/1)=m/n* para todo *m/n*.

iv) Todo racional tiene inverso aditivo (otro racional que al ser sumado con él da 0/1 como resultado). El único inverso aditivo de *m/n* es –*m/n*, también denotado por *–(m/n)*.

v) El producto es conmutativo.

vi) El producto es asociativo.

vii) 1/1 es neutro multiplicativo. Es decir, *(m/n)*$\circ$*(1/1)=m/n* para todo *m/n*.

viii) Todo racional $\neq$0/1 tiene inverso multiplicativo (otro racional que al ser multiplicado por él da el producto 1/1). El único inverso multiplicativo de *m/n* es *n/m*, también denotado por *(m/n)*$^{-1}$.

ix) El producto distribuye a la suma. El inciso *vi)*, por ejemplo, se demuestra así:

$$\left(\frac{a}{b}\circ\frac{c}{d}\right)\circ\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\circ\frac{e}{f}=\frac{(ac)e}{(bd)f}=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

Observación: Con las definiciones anteriores, cualquier ecuación de la forma $mx=n$ (que hemos llamado ecuaciones multiplicativas), $m\neq 0$, con m y n enteros, tiene como solución el número racional $\frac{n}{m}$.

Estas operaciones son cerradas en $\mathbb{Q}$, es decir, la suma y el producto de dos números racionales son nuevamente números racionales. (Dadas las definiciones de suma y producto el resultado es igual a un cociente de dos enteros cuyo denominador es distinto de cero, por lo tanto pertenece a los racionales)

3.3 El ORDEN EN $\mathbb{Q}$

En $\mathbb{Z}$ está dado un orden, a saber, si $n, m\in\mathbb{Z}$, $n<m$ significa que $m-n>0$. Podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$[24] a partir del orden en $\mathbb{Z}$ de la manera siguiente: decimos que un número racional $r=\frac{a}{b}$ es *positivo*, y escribimos $r>0$, sí y sólo sí se satisface una de las siguientes propiedades para los enteros a, bq:

(i) a, b son ambos positivos, es decir, $a>0$ y $b>0$

(ii) $-a$, $-b$ son ambos positivos, es decir, $-a>0$ y $-b>0$.

Dados dos números racionales r y s, decimos que r es *menor que s*, y escribimos $r<s$, sí y sólo sí $s-r>0$.

Observe entonces que, al calcular $r-s$, con $r=\frac{a}{b}$ y $s=\frac{c}{d}$, *tenemos que* $r<s$ *sí y sólo sí* $abd^2<cdb^2$.

Si asumimos, sin embargo, que $b, d>0$ entonces $r<s$ sí y sólo sí $ad<cb$:

Por otra parte, decimos que $r\leq s$ si y sólo si $r<s$ o $r=s$. La relación $\leq$ es una *relación de orden*.

Con esto, dados a/b y c/d en $\mathbb{Q}$ se cumple una y solo una de las afirmaciones siguientes:

[24] El orden en $\mathbb{Q}$. Bibliografía número 5. Pág. 214-215

i) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$;

ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

iii) $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$

Proposición 4: La relación > es transitiva:

$$\left(\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \text{ y } \frac{c}{d} > \frac{c'}{d'} \right) \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{e}{f}$$

Proposición 5:

i) $\left(\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \text{ y } \frac{c}{d} > \frac{c'}{d'} \right) \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$

ii) $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} + \frac{c}{d}$

iii) $\left(\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \geq \frac{0}{1} \text{ y } \frac{c}{d} > \frac{c'}{d'} \geq \frac{0}{1} \right) \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

iv) $\left(\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \text{ y } \frac{c}{d} > \frac{0}{1} \right) \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

v) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow -\frac{c}{d} > -\frac{a}{b}$

3.4 DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los conjuntos de los números naturales y enteros frecuentemente se consideran como conjuntos discretos. Esto significa que entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural. Una situación semejante existe para los enteros.

El conjuntos de los números racionales no tiene esta propiedad de discreción.

Propiedad de densidad[25]: Dados dos números racionales a y b, hay un tercer número racional c tal que $a<c<b$ o $b<c<a$.

Esto significa que, dado un número racional, no hay un número racional próximo mayor o próximo menor.

Mas bien es fácil encontrar un número racional que éste comprendido entre dos números racionales dados. Una manera de hacerlo es calcular la media aritmética (promedio) de los dos números.

Teorema: Para dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b} y \frac{c}{d}$ si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$$

Demostración. Ya que por hipótesis sabemos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ es verdadero, necesitamos solamente demostrar que $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ y $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$ son verdaderas.

Pero simplifiquemos $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{\frac{ad+bc}{bd}}{2} = \frac{ad+bc}{2bd}$

Ahora demostraremos que $\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd}$ se deduce a partir de $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Proporcionemos la razón de cada paso.

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $(b<0, d<0) = ad<bc$

$abd<bbc$

$abd+abd<abd+bbc$

$2abd<abd+bbc$

$a(2bd)<b(ad+bc)$

$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd}$

---

25 Propiedad de densidad. Bibliografía número 18. Pág. 42-43

Para la segunda parte de este teorema si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ entonces $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}<\frac{c}{d}$

3.5 Q COMO CAMPO COCIENTE SOBRE LOS ENTEROS.

Si un dominio entero es tal que todo elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo, entonces es un campo[26]. Sin embargo, muchos dominios enteros, como los enteros $\mathbb{Z}$ no forman campo. Pero se puede mostrar que todo dominio entero puede considerarse contenido en cierto campo, *el campo de cocientes del dominio entero.* Este campo será *un campo minimal* que contiene el dominio entero en el sentido que describiremos. Por ejemplo, los enteros están contenidos en el campo $\mathbb{Q}$, cuyos elementos se pueden expresar como cocientes de enteros.

Si $a \in \mathbb{Z}$-{0} y $b \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación xa=b carece, de solución en $\mathbb{Z}$, debido a que ($\mathbb{Z}$-{0},$\circ$) no es un grupo. El objetivo del presente es introducir el campo ($\mathbb{Q}$,+,$\circ$) de los números racionales que "extiende" a ($\mathbb{Z}$,+,$\circ$), en el sentido de que podemos sumergir $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, respetando las respectivas estructuras algebraicas, y de tal forma que en $\mathbb{Q}$ son resolubles todas las ecuaciones del tipo $xa=b$.

Entonces sea $\mathbb{Z}$ un dominio entero que deseamos agrandar a un campo de cocientes $\mathbb{Q}$ los pasos a seguir son los siguientes:

1. Definir cuales serán los elementos de $\mathbb{Q}$.
2. Definir en $\mathbb{Q}$ las operaciones binarias de suma y multiplicación.
3. Comprobar que se cumplan todos los axiomas de campo, para mostrar que $\mathbb{Q}$ es un campo bajo estas operaciones.

---

[26] Campo cociente. Bibliografía número 13. Pág. 237

4. Mostrar que $\mathbb{Q}$ puede considerarse conteniendo a $\mathbb{Z}$ como un subdominio entero.

Hasta el momento se ha elaborado hasta el tercer paso. Falta mostrar que $\mathbb{Q}'$ puede considerarse conteniendo $\mathbb{Z}$. Para ello, mostramos que existe isomorfismo *i* de $\mathbb{Z}$ con un subdominio de $\mathbb{Q}'$. El lema siguiente nos da este isomorfismo[27].

Considerando la clase de los números racionales cuya segunda componente sea 1. Los elementos de esta clase serán de la forma $(x,1)$ pudiendo ser x un número entero positivo o negativo. Sea $\mathbb{Q}'$ esta clase.

Definamos una función $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}'$, tal que $\forall\, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow i(x) = (x,1)$

Esta función es biyectiva, pues:

a) $x \neq x' \Rightarrow (x,1) \neq (x',1)$ (inyectiva)

b) $\forall\, (z,1) \in \mathbb{Q}'$, $\exists\, z \in \mathbb{Z}$, tal que $i(z) = (z,1)$ (sobreyectiva)

Existe entonces una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, y esta correspondencia conserva la suma y el producto. En efecto:

$$(a,1) + (b,1) = (a+b,1) = a+b$$
$$(a,1) \cdot (b,1) = (ab,1) = ab$$

Podemos entonces afirmar que los números enteros ($\mathbb{Z}$) y los racionales de la forma $(x,1)$ ($\mathbb{Q}'$) corresponden a un concepto esencialmente único y pueden por lo tanto identificarse. Todo número entero *s* puede por lo tanto identificarse con un número racional de la forma $(s, 1)$ que normalmente expresamos con $s/1$.

Así, *i* es un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z}i$ y, por supuesto, $\mathbb{Z}i$ es, entonces, un subdominio de $\mathbb{Q}$.

[27] $\mathbb{Z}$ contenido en $\mathbb{Q}$. Bibliografía número 13. Pág. 242

Por lo que podemos concluir que cualquier dominio entero $\mathbb{Z}$ puede agrandarse (o incrustarse) en un campo $\mathbb{Q}$, tal que todo elemento de $\mathbb{Q}$ puede expresarse como cociente de dos elementos de $\mathbb{Z}$ (Dicho campo $\mathbb{Q}$ es un **campo de cocientes** de $\mathbb{Z}$).

3.6 EL SUBCONJUNTO DECIMAL DE $\mathbb{Q}$[28].

Los números racionales de la forma $\frac{a}{10^n}$ constituyen un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que denotaremos D. El elemento $a/10^n$ se acostumbra representar escribiendo a en la forma usual, con base 10, y poniendo un punto a n lugares del extremo derecho:

$$\frac{325}{100} = 3.25$$

$$\frac{4}{10000} = 0.0004$$

también se utilizará la notación

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{0\ldots01}_{n}$$

Las sumas y productos de elementos de D pertenecen a D. Sea $D^+ = D \cap \mathbb{Q}^+$,

$D^- = D \cap \mathbb{Q}^-$

Los elementos de D^+ son los $A.\ a_1 a_2 \ldots a_n$

Donde A es un entero no negativo, los a_i son cifras a_i son cifras $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$, y n es tan grande como se quiera, porque podemos agregar ceros a la derecha de la ultima cifra:

3.25=3.250=3.2500=...

[28] Subconjunto decimal. Bibliografía número 5. Pág. 216.

Los elementos D^- son los $-A.\, a_1 a_2 \ldots a_n$

Proposición 9:

i) $0>x$ para todo $x \in D^-$

ii) $x>y$ siempre que $x \in D^+$, $y \in D^-$

iii) $x>0$ para todo $x \in >D^+$

iv) Dados dos elementos cualquiera de D^+,

$x=A.\, a_1 a_2 \ldots a_n$

$y=B.b_1 b_2 \ldots b_n$

$x>y$ en cualquiera de los dos casos siguientes:

iv') Si $A>B$

iv'') SI $A=B$ y existe algún entero no negativo $m \leq n$ tal que $a_i=b_i$ para $i<n$ y $a_m>b_m$

v) Dados $x \in D^+$, $y \in D^+$

$-x>-y$ si $y>x$

Proposición 10: La regla de los signos es válida en D. Esto es:

$(-A.\, a_1 \ldots a_n) \times B.b_1 \ldots b_n = -(A.\, a_1 \ldots a_n \times B.b_1 \ldots b_n)$

$A.\, a_1 \ldots a_n \times (-B.b_1 \ldots b_n) = -(A.\, a_1 \ldots a_n \times B.b_1 \ldots b_2)$

$(-A.\, a_1 \ldots a_n) \times (-B.b_1 \ldots b_n) = A.\, a_1 \ldots a_n \times B.b_1 \ldots b_n$

4. MAXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO[29]

Se dice que c es el máximo común divisor de m y n, escrito $c=mcd\{m,n\}$ cuando $c>0$, c divide a m (escrito c/m), c/n y (d/m, $d/n \Rightarrow d/c$). A continuación veremos que si m y n no son ambos cero, entonces c existe. Es claro que c es único, pues $c'=mcd\{m,n\} \Rightarrow c/c'$ y c'/c, y así $c=c'$.

Proposición. Si m,n, no son ambos cero, entonces existe el $mcd\{m,n\}$.

[29] MCD y MCM. Bibliografía número 47. Pág. 9-10.

Demostración. Sea A el subconjunto de $\mathbb{Z}$ de los números que se pueden escribir como $\alpha m+bn$. Este es un subconjunto no vacío pues contiene a cero. También es claro que contiene elementos positivos. Sea c el mínimo elemento positivo de A. Se afirma que $c=mcd\{m,n\}$.

En primer lugar $c>0$ y $c=\alpha m+bn$ con ciertos $\alpha, b\in\mathbb{Z}$. Como existen q,r tales que $m=qc+r$, $0\leq r<c$, vemos que $r=m-qc=(1-q\alpha)m+(-qb)n$ está en A. Siendo c mínimo positivo, se obtiene que $r=0$, es decir, que c/m. Similarmente c/n. Por último, d/m, $d/n \Rightarrow d/(\alpha m+bn)=c$.

Se dice que s es el mínimo común múltiplo de m,n cuando $s>o$, m/s, n/s y (m/r, $n/r \Rightarrow s/r$). Esto se escribe así: $s=mcm\{m,n\}$. También es claro que si s existe, entonces es único.
Un número positivo p es primo cuando solamente es divisible por ± 1 y $\pm p$; además, pedimos $p\neq 1$.

Todo número positivo $\neq 1$ puede escribirse como producto de potencias de primos. Esta expresión es única, en el sentido de que si $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}=q_1^{b_1}\ldots q_s^{b_s}$ con $p_1,\ldots,p_r$ primos distintos, $p_1,\ldots,p_s$ primos distintos y α_i, b_j 0, entonces $r=s$ y para cada $1\leq i\leq r$ existe $1\leq j\leq s$ tal que j es único, $p_i=q_j$ y $p_i=q_j$ y $\alpha_i=b_j$.

Cuando $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ y $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ y $n=p_1^{b_1}\ldots p_r^{b_r}$ con $\alpha_i, b_j\geq 0$, entonces mcd $\{m,n\}=p_1^{c_1}\ldots p_r^{c_r}$ donde $c_i=mín\{\alpha_i, b_i\}$, para todo i. Observamos que siempre es posible escribir m y n en esta forma, permitiendo que algunos exponentes sean cero.

Cuando m y n no son ambos cero, entonces mcm $\{m,n\}$ también existe y es $p_1^{l_1}\ldots p_r^{l_r}$ donde $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$, $n=p_1^{b_1}\ldots p_r^{b_r}$ y $l_i=max\{\alpha_i, b_i\}$ para todo i.

Así vemos que $(mcd\ \{m,n\})(mcm\ \{m,n\})=mn$. Observamos también que en esta discusión hemos considerado números m,n no negativos, y si nos dieran m,n arbitrarios, bastaría ignorar los signos para calcular su *mcd* y su *mcm*.

B I B L I O G R A F Í A

En este apartado se cita la bibliografía que se utilizó como material de consulta y referencia en el desarrollo del presente trabajo profesional.

1. **ANDERSON, J. et al (1972)** *Redacción de Tesis y Trabajos Escolares.* México, Diana.

2. **BLOCK, D. (1996)** *Análisis de situaciones Didácticas.* En Revista: Básica de mayo-junio.

3. **BLOCK, D. (2001)** *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* Tesis de Doctorado en Ciencias con especialidad en Investigaciones Educativas, Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV-IPN.

4. **BROUSSEAU, G. (1982)** *Los diferentes roles del maestro,* en *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires, Paidós Pág. 65-93.

5. **CARDENAS, H., E. LLUIS, F. RAGGI, F. TOMÁS (1982)** *Álgebra Superior: Conjuntos y combinatoria, Introducción al álgebra lineal, estructuras numéricas, polinomios y ecuaciones.* México, Trillas.

6. **CASTELNUOVO, E. (1982)** *Didáctica de la matemática moderna.* México, Trillas.

7. **CHARNAY, R. (1994)** *Aprender por medio de la resolución de problemas,* en *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires, Paidós Pág. 51-63

8. **CLEMENTE, D. (2002)** *Una propuesta para el aprendizaje de las fracciones.* Correo del Maestro Núm. 73. (En línea).
Disponibilidad:
http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2002/junio/nosotros73.htm
Fecha de consulta: Octubre 2003.

9. **CLEMENTE, D., F. AYALA, J. FAVILA, E. LÓPEZ (2001)** *Las fracciones. Una propuesta constructivista para su enseñanza-aprendizaje.* Correo del Maestro Núm. 56, Enero. (En línea).
Disponibilidad:
http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/2nosotros56.htm
Fecha de consulta: Octubre 2003.

10. **DÁVILA, M. (1992)** *El reparto y las fracciones.* En Revista: Educación Matemática de abril.

11. __________**(1998)** *Una manera de trabajar una lección del libro de Matemáticas. Tercer grado.* En Boletín: semestral No. 2 de abril.

12. __________**(1991)** *Situaciones de Reparto: una introducción a las fracciones* Tesis de Licenciatura en Educación Primaria. Universidad Pedagógica Nacional.

13. **FRALEIGH, J. B. (1987)** *Álgebra abstracta.* Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana.

14. **FUNDACIÓN POLAR** *Matemática para todos, Fascículo 9, El mundo de las fracciones.* Números 2. Pág. 130-143.
Disponibilidad: http://www.fpolar.org.ve/matematica/fasciculo9.pdf
Fecha consultada: Enero, 2004.

15. **GACETA DE LA ESCUELA NORMAL (1998)** *La enseñanza de las matemáticas. Sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Número cero. Pág. 24-25. Enero. (En línea).
Disponibilidad: http://normalista.ilce.edu.mx/normalista/gaceta/num0/gace_3.pdf
Fecha consultada: Enero 2004.

16. **GÁLVEZ, G. (1985)** *La didáctica de las matemáticas,* en *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires, Paidós Pág. 39-50

17. **GONZÁLEZ, G., M. KRISCAUTZKY, P. MARTÍNEZ (2002)** *MATECHAVOS. Un sitio interactivo para niños de educación básica.* Ponencia en: XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba del 15 al 19 de julio.

18. **HEIMER, R. T., E. D. NICHOLS, E. H. GARLAND (1969)** *Álgebra Moderna.* Florida, Continental.

19. **MANCERA, E. (1993)** *Problemas, Maestros, y la Resolución de Problemas.* En Revista: Educación Matemática de diciembre.

20. **MARTÍNEZ, P. (1997)** *Desarrollos de procedimientos para dividir: un estudio didáctico* Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en investigaciones educativas. Departamento de Investigaciones Educativa CINVESTAV-IPN

21. **MATEMÁTICAS ELEMENTALES EN EL CIBERESPACIO** *Ayuda para profesores: educación primaria: Aritmética: Números Racionales: Aspectos cognitivos.* (En línea)
Disponibilidad:
http://www.uco.es/~ma1marea/profesor/primaria/aritmeti/racional/cognitiv/indice.htm
Fecha consultada: Enero 2004.

22. **NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1964)** *Topics in Mathematics for elementary School Teachers. Booklet Number 6. The Rational Numbers.* Washington Trillas.

23. ______________________________ **(1968)** *Booklet Number 9. The System of Integers.* Washington Trillas.

24. ______________________________ *Booklet Number 10. The System of Rational Numbers.* Washington Trillas.

25. **PADILLA, Y., P. RODRÍGUEZ, R. RODRÍGUEZ (1996)** *Cuadernos de matemáticas 4, como enseñar el número natural.* Ágora.

26. **PAPERT, S. (1981)** *DESAFIO A LA MENTE: Computadoras y educación.* Buenos Aires, Galápago.

27. **PARRA, C., I. SAIZ (1994)** *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires, Paidós.

28. **PÉREZ, M. de J. (1988)** *Teoría de Clases y Conjuntos. Una introducción del cuerpo de los números reales.* Barcelona EDUNSA.

29. **PORTAL S.E.P. (2003)** *Plan y Programas de Estudios de Educación Básica. El derecho a una educación primaria de calidad.* (En línea).
Disponibilidad: http://www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_112_introduccion
Fecha de consulta: Octubre 2003.

30. ______________________________
Matemáticas. Enfoque. (En línea).
Disponibilidad: http://www.sep.gob.mx/wb2/sep_121_matematicas

Fecha de consulta: Octubre 2003.

31. **PUJADAS, M., M. L. EGUILUZ (2000)** Fracciones ¿Un quebradero de cabeza?. Sugerencias para el aula. Buenos Aires, Novedades Educativas.

32. **Red Normalista en Internet,** Programa de Estudios. 2° Semestre. Licenciatura en Educación Primaria. Matemáticas y su Enseñanza I.
Disponibilidad:
http://normalista.ilce.edu.mx/normalista/r_n_plan_prog/primaria/2osemes/enfo_mate2.htm
Fecha de consulta: Enero 2004.

33. **SANTALÓ, L. (1994)** *Matemática para no matemáticos,* en D*idáctica de matemáticas.* Buenos Aires, Paidós Pág. 21-36

34. **SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (1992)** *Colección: Capacitación y actualización docentes. La matemática en la educación primaria. Documento del docente*. México, S.E.P.

35. ______________________________ **(1994)** *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica: primaria.* México, S.E.P.

36. ______________________________ **(1995)** *La enseñanza de las matemáticas en escuela primaria.* México, S.E.P.

37. ______________________________ **(1998)** *Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado.* México, S.E.P.

38. ______________________________ **(1999)** *MATEMÁTICAS Cuarto grado.* México, S.E.P.

39. ________________________________ **(2000)** *Fichero de Actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado.* México, S.E.P.

40. ________________________________ **(2000)** *MATEMÁTICAS Quinto grado.* México, S.E.P.

41. ________________________________ **(2000)** *MATEMÁTICAS Tercer grado.* México, S.E.P.

42. ________________________________ **(2001)** *Fichero de Actividades didácticas. Matemáticas. Sexto grado.* México, S.E.P.

43. ________________________________ **(2001)** *MATEMÁTICAS Sexto grado.* México, S.E.P.

44. ________________________________ **(2001)** *Programa Nacional de Educación 2001-2006.* México, S.E.P.

45. **SUÁREZ, R. (1997)** *La educación: su filosofía, su psicología, su método.* México, Trillas.

46. **UNIVERSIDAD DE SIMÓN BOLIVAR (1988)** *Matemáticas I.* Departamento de matemáticas puras y aplicadas. Tercera edición de la guía MA1111. Caracas, Venezuela.
Disponibilidad: http://www.ma.usb.ve/cursos/basicas/ma1111/guias
Fecha de consulta: abril, 2005.

47. **VARGAS, J. (1986)** *Álgebra Abstracta.* México LIMUSA.

48. **VERGNAUD, G. (1991)** *El NIÑO, las MATEMÁTICAS y la REALIDAD.* México Trillas.