



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**"PROPIEDADES DE LOS AGUJEROS DE GUSANO  
COMO SOLUCIONES A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN"**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**F Í S I C O**  
P R E S E N T A :  
**JOSÉ ISRAEL VILLAGÓMEZ BAHENA**



**DIRECTOR DE TESIS: DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA**

**2005**



**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

m344175



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Villagómez Bahena  
José Israel  
FECHA: 18-Mayo-2005  
FIRMA: [Signature]

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Propiedades de los agujeros de gusano como soluciones a las ecuaciones de Einstein"

realizado por José Israel Villagómez Bahena

con número de cuenta 09720518-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Darío Núñez Zúñiga

Propietario Dr. Tonatiuh Matos Chassin

Propietario Dr. Oscar Palmas Velasco

Suplente Dr. Roberto Allan Sussman Livovski

Suplente M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Consejo Departamental de Física

[Signature]  
M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**“Propiedades de lo Agujeros de Gusano como  
solución a las ecuaciones de Einstein”**

José Israel Villagómez Bahena

## *Agradecimientos*

En esta etapa de mi vida que he concluido le agradezco principalmente a mis padres Liborio Villagómez y Gloria Rosa Bahena por sus esfuerzos por haberme dado una educación. A mi hermano Vicente David por guiarme por el camino correcto. A mi tía Tesoro Josefina Bahena por estar con mi familia en los momentos difíciles. A mi tía Margarita Bahena y a sus hijos Martín y Diana. A los profesores que he conocido en este camino Darío Núñez Zúñiga, Tonatiuh Matos Chassin, Oscar Palmas Velasco, Roberto Allan Sussman, José Antonio Gómez Ortega, José Guadalupe Reyes, Emma Lam y al grupo Ollin. A mis amigos que conozco; Víctor Alberto, Areli Huanosta, Martín González, Guadalupe Morales, David Galiote, y Carlos Malagón. A todas esas personas especiales que he conocido.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b> .....   | <b>2</b>  |
| <b>1. Relatividad General</b> .....                               | <b>3</b>  |
| 1.1. Antecedentes de la Relatividad .....                         | 3         |
| 1.2. Espacio-tiempo .....   | 5         |
| <b>2. Agujeros de Gusano</b> .....                                | <b>13</b> |
| 2.1. Antecedentes .....   | 13        |
| 2.2. Condiciones para la creación de agujeros de gusano .....     | 14        |
| 2.3. Descripción de un agujero de gusano atravesable .....        | 14        |
| 2.4. Ecuaciones de campo de Einstein .....                        | 16        |
| 2.5. Geometría espacial de un agujero de gusano .....             | 18        |
| <b>3. Cosmología</b> .....  | <b>21</b> |
| 3.1. Modelos Cosmológicos .....                                   | 21        |
| <b>4. Modelos de Agujeros de Gusano</b> .....                     | <b>26</b> |
| 4.1. Antecedentes .....   | 26        |
| 4.2. El agujero de gusano de Michael S. Morris y Kip Thorne ..... | 27        |
| 4.3. El agujero de gusano de Wheeler y Misner .....               | 29        |
| 4.4. Agujero de gusano de constante cosmológica .....             | 33        |
| 4.5. Agujero de gusano con campo escalar .....                    | 33        |
| 4.6. Maquinas del tiempo .....                                    | 34        |
| <b>Bibliografía</b> .....   | <b>37</b> |

# Introducción

Cuando uno es pequeño se da cuenta que estamos rodeados en un ambiente completamente extraño sin entender nada acerca del mundo, es ahí cuando empezamos a cuestionarnos el porqué de la naturaleza, de dónde surgió el universo sin observar ningún límite a estas cuestiones, sin embargo una pregunta a la que no he encontrado respuesta es si el hombre, con su capacidad de pensar y con sus herramientas, puede ser capaz de viajar en el tiempo o de realizar grandes viajes alrededor del universo. Esta pregunta a lo largo de mi vida me fue guiando a conocer la teoría de la relatividad de Albert Einstein, con la cual fui conociendo los límites físicos que encierran las respuestas a mis preguntas. En este proceso de aprendizaje conocí la teoría de los agujeros de gusano, basada fundamentalmente en las ecuaciones de Einstein. Estos singulares objetos tienen la peculiaridad de ser atajos interestelares, pueden conectarnos a otros universos y funcionar como máquinas del tiempo. Con estas cualidades uno pensaría ¿por qué no desarrollar al máximo esta teoría?. La dificultad radica principalmente en la materia prima generadora de estos objetos la cual exige propiedades de la materia a la que el hombre no está acostumbrado. Debido a esto se duda de su existencia y existe un gran escepticismo, el cual ha traído como consecuencia no desarrollar este tema. Este trabajo trata de dar una explicación general de los agujeros de gusano conteniendo cuatro capítulos que abarcan puntos como la creación, dificultad, y uso de estos túneles.

No se trata de enseñar que éste es el camino correcto para la evolución espacial, si no de enseñar argumentos cosmológicos con los cuales podría nacer de nuevo el interés en estudiar estas configuraciones. No sé si estoy en el camino correcto para contestar las preguntas de mi infancia pero de no ser así me quiero dar cuenta yo mismo.

# Capítulo 1

## Relatividad General

### 1.1. Antecedentes de la Relatividad

Un sistema de referencia inercial se define como aquel en el cual se cumple la primera ley de Newton, la cual menciona que un cuerpo sobre el cual actúe una fuerza externa neta igual a cero se moverá con velocidad constante. Esto llevo a encontrar la relación que existe entre las coordenadas de dos sistemas inerciales en movimiento relativo, la cual está dada por las transformaciones de Galileo para el movimiento en una dimensión.

$$x' = x - vt , \tag{1.1}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Donde podemos notar que el parámetro  $t$  (tiempo) es el mismo en cualquier sistema de coordenadas. De estas ecuaciones se deriva que la aceleración de una partícula medida en ambos sistemas es la misma. En la física clásica, el movimiento del sistema de referencia no influye en la masa de la partícula, es decir  $F = ma$  y  $F' = ma'$ . De esto se concluye que  $F' = F$ . Las leyes newtonianas del movimiento y las ecuaciones de movimiento de una partícula son exactamente iguales en todos los sistemas inerciales. Se puede decir lo mismo de los principios de conservación, ya que éstos se derivan de las leyes de Newton. Esto trajo como consecuencia que las leyes de la mecánica clásica son iguales en todos los sistemas de referencia inerciales. Entonces no hay forma de determinar una velocidad absoluta en un sistema inercial de

referencia a partir de experimentos mecánicos. Solo podemos hablar de una velocidad de un sistema con respecto al otro y no a la velocidad absoluta de un sistema, a esto se le llama relatividad newtoniana.

En la mecánica newtoniana se puede diferenciar entre un marco de referencia inercial y uno no inercial aplicando la ley de inercia, pero nunca se puede tener un laboratorio sin ninguna fuerza externa ya que no se puede anular la fuerza de gravedad. Sólo para marcos inerciales locales, en los cuales se aplica la ley de inercia, se puede tener un lugar sin fuerzas externas.

Dentro de los límites locales del espacio-tiempo existen una infinidad de marcos inerciales locales, en los cuales se aplica la relatividad especial. Los marcos inerciales locales son más restringidos que los marcos inerciales newtonianos, esto se debe a que un campo gravitacional no es homogéneo en todo el espacio; por este motivo los marcos inerciales locales sólo se aplican en una región local del espacio y no a toda su extensión.

Dentro de las ideas más importantes de la relatividad se afirma que no se puede distinguir entre un campo gravitatorio uniforme y un marco uniformemente acelerado. Einstein imaginó un experimento en el cual considero un ascensor en reposo respecto a la Tierra. La persona dentro del ascensor observa que todos los objetos están sujetos a una fuerza que los empuja hacia el piso del ascensor, el observador concluye que hay una fuerza que los atrae al piso. Si ahora el ascensor se suelta y se deja en caída libre, el observador vería que la fuerza ya no existe y que los objetos no caen al suelo. Esto quiere decir que dentro del ascensor no se puede detectar la presencia de una fuerza gravitacional. Con esto Einstein dedujo que ningún experimento podría determinar si habría o no un campo gravitacional. Entonces se puede encontrar un marco de referencia inercial en el cual los efectos de gravedad se eliminan en los límites de una región local.

A principios del siglo XX se encontró que las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético no obedecían el principio de la relatividad newtoniana; es decir no eran invariantes ante las transformaciones de Galileo. Esto quiere decir que los fenómenos electromagnéticos en una nave en movimiento serían diferentes de aquellos que se presentan en una nave estacionaria. Esto implica que usando los fenómenos electromagnéticos se podría determinar la velocidad absoluta de la nave.

Una de las consecuencias de las ecuaciones de Maxwell es que la luz se propaga en todas las direcciones a la misma velocidad  $c$ , y no sólo eso: si la fuente que emite luz está en movimiento, la luz seguirá propagándose con la misma velocidad  $c$ , lo cual contradice las leyes de Galileo. Fue necesario buscar otro tipo de transformaciones que dejará invariantes las ecuaciones de Maxwell. Fue 1903, que Lorentz propuso otras leyes de transformación y las

aplicó a dichas ecuaciones, encontrando que éstas permanecían invariantes. Estas leyes son

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Usando esto, en 1905 Einstein generalizó el principio de la relatividad newtoniana a toda la física creando los postulados de la relatividad especial:

1. Todos los marcos de referencia inerciales son equivalentes para todos los experimentos.
2. La velocidad de la luz es constante en cualquier marco de referencia inercial.

La idea de Einstein era evitar las inconsistencias entre las ecuaciones de Maxwell y las transformaciones de Galileo.

## 1.2. Espacio-tiempo

Sea  $E$  un evento con coordenadas  $(x, y, z, t)$  en el sistema  $S$ . Este mismo evento visto desde un sistema de coordenadas  $S'$  que se mueve con velocidad relativa en la dirección del eje  $x$  del sistema  $S$ , tendrá coordenadas  $(x', y', z', t')$ . Asumiendo que en  $t = t' = 0$  un rayo de luz sale del origen de  $S$ , en ambos sistemas se cumple que

$$x^2 - c^2t^2 = (x')^2 - c^2(t')^2 = 0, \tag{1.3}$$

Esto se cumple para cualquier evento, aplicando las transformaciones de Lorentz se puede demostrar que para cualquier evento  $(x, y, z, t)$  y  $(x', y', z', t')$  se cumple que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = s^2. \tag{1.4}$$

donde  $s^2$  es el intervalo de espacio-tiempo y es invariante ante transformaciones de Lorentz. Si se considera dos puntos infinitesimalmente cercanos,

el cuadrado del intervalo  $ds$  entre ellos se conoce como métrica. En forma general la métrica se expresa como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.5)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico y  $dx^\mu$  es el desplazamiento infinitesimal de la coordenada  $x^\mu$ . En el espacio de la relatividad especial la ecuación (1.5) toma la forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.6)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

aquí  $\eta_{\mu\nu}$  se conoce como tensor de Minkowski y sus valores son

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la ecuación (1.6) se puede ver que  $ds^2$  no siempre es positivo, existen tres casos posibles. Si  $ds^2 > 0$  el intervalo se denomina espacial, si  $ds^2 < 0$  el intervalo es temporal y si  $ds^2 = 0$  se denomina intervalo nulo. Este último es el que corresponde a la trayectoria seguida por un rayo de luz. En el espacio tridimensional, se puede expresar las coordenadas cartesianas  $x, y, z$  como función de otras coordenadas generales  $x'$  de modo que las primeras son función de éstas últimas. De esta manera, en forma general, se obtiene que el tensor métrico es

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial x'^i} \frac{\partial x}{\partial x'^j} + \frac{\partial y}{\partial y'^i} \frac{\partial y}{\partial y'^j} + \frac{\partial z}{\partial z'^i} \frac{\partial z}{\partial z'^j}. \quad (1.7)$$

En un espacio plano o euclidiano  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i=j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . En este caso la métrica es  $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ , este concepto se extiende al espacio-tiempo de cuatro dimensiones. El tensor métrico; en este caso, tendrá 16 componentes, de las cuales 10 son independientes si el tensor es simétrico, es decir  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Es importante notar que en el espacio euclidiano bidimensional  $g_{ij}$  siempre puede ser reducido a  $\delta_{ij}$  en todo el espacio. En un espacio-tiempo general es posible hacer lo mismo, aunque sólo localmente, es decir, reducir  $g_{\mu\nu}$  a  $\eta_{\mu\nu}$ . Entonces en presencia de un campo gravitatorio no es posible cubrir todo el espacio con un único marco inercial.

En el espacio euclidiano la distancia que separa a dos puntos siempre es mayor a cero, lo cual no sucede en el espacio-tiempo, en donde la distancia

entre dos eventos puede ser positiva, negativa o cero. Una separación positiva expresa la posibilidad de que los dos eventos estén conectados causalmente y se puede encontrar un marco de referencia en el cual los eventos ocurran en el mismo lugar. Si la separación es negativa, los eventos no están conectados causalmente y uno no puede influir en otro. En caso de que la separación sea cero se satisface sólo para una señal electromagnética o un pulso de luz, que viaje entre los dos eventos.

En el desarrollo de la relatividad especial no se asume la presencia de campos gravitacionales. Existen problemas al tratar de introducir la gravedad en las ecuaciones de relatividad especial. Un ejemplo sería el siguiente

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} , \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho . \quad (1.9)$$

En la forma que están, estas ecuaciones no pueden ser introducidas a la relatividad especial. La ecuación (1.8) está en forma tridimensional y tendría que ser modificada a una forma cuadridimensional  $\frac{dx^\mu}{d\tau^2}$ .

La ecuación (1.9) no es invariante bajo transformaciones de Lorentz, ya que aparece el operador tridimensional laplaciano en lugar del operador cuadridimensional d'Alembertiano. Esto significa que el potencial responde instantáneamente a cambios en la densidad  $\rho$  a largas distancias, es decir, que el campo newtoniano se propaga con velocidad infinita. Este es un problema que se ha intentado corregir con la teoría de la relatividad de Einstein. El problema implica que no se puede formular una teoría de la gravitación en un espacio tiempo plano y que la gravitación es una manifestación de la curvatura del espacio tiempo. Para poder describir la curvatura del espacio, Einstein introdujo en la física los conceptos matemáticos desarrollados por Riemann.

Se tiene un sistema de coordenadas primado y uno no primado, cada  $x^i = x^i(x^{i'})$  es una función de variable real, univaluada tal que sus derivadas existen. En forma diferencial, las ecuaciones son

$$dx^i = a_{i'}^i dx^{i'} \quad y \quad dx^{i'} = a_i^{i'} dx^i , \quad (1.10)$$

donde

$$a_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad y \quad a_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} . \quad (1.11)$$

$a_{i'}^i$  y  $a_i^{i'}$  son los coeficientes de transformación y cumplen con la propiedad  $a_{i'}^i a_j^{i'} = \delta_j^i$ . Un sistema de coordenadas es una manera de identificar puntos

en el espacio; su propósito es nombrar puntos, mientras que el de la métrica es conectarlos geoméricamente. En el caso de un espacio plano, la distancia entre dos puntos  $(x^1, y^1)$  y  $(x^2, y^2)$  es  $[(x^1 - x^2) + (y^1 - y^2)]^{\frac{1}{2}}$ ; así, el espacio tiene asignada una métrica, esta puede ser asignada diferencialmente mediante  $g_{ij}$ , el tensor métrico. Si en un sistema de coordenadas con tensor métrico  $g_{i'j'}$  se cumple que  $ds^2 = g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'}$  el tensor métrico se puede transformar utilizando la ecuación (1.11) obteniendo

$$ds^2 = g_{i'j'} a_i^{i'} a_j^{j'} dx^i dx^j, \quad (1.12)$$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

es decir

$$g_{ij} = a_i^{i'} a_j^{j'} g_{i'j'}$$

La ley de transformación es lineal, con lo cual la ecuación (1.12) se puede escribir como

$$ds^2 = dx_i dx^i, \quad (1.13)$$

donde  $dx_i = g_{ij} dx^j$ , de esta manera se dice que  $dx_i$  es un intervalo contravariante. Con el tensor métrico es posible subir o bajar los índices de un tensor. Un vector se desplaza paralelamente cuando no se cambia su magnitud ni dirección. Cuando se desplaza paralelamente un vector en coordenadas cartesianas, las componentes de los vectores permanecen sin cambio alguno. En algunos sistemas de coordenadas esto no pasa al mover el vector paralelamente, de un punto a otro, sus componentes cambian. El símbolo de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  se define para facilitar la descripción de los desplazamientos paralelos. Si un vector  $A^i$  es paralelamente desplazado sobre un intervalo  $dx^j$ , el cambio en sus componentes  $A^k$  está determinado por el símbolo de Christoffel

$$\delta A^k = -\Gamma_{ij}^k A^i \delta x^j, \quad (1.14)$$

En forma general, los símbolos de Christoffel se pueden obtener del tensor métrico, de tal forma que:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (g_{js,i} + g_{si,j} - g_{ij,s}). \quad (1.15)$$

donde  $g_{ij,s} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}$ . La ecuación (1.14) expresa el cambio en las componentes de un vector contravariante al ser desplazado paralelamente. Una expresión similar se puede encontrar para el caso en que el vector sea covariante. Considerando el hecho que el producto interior de dos vectores es un invariante, se puede decir que

$$\delta(A_i, B^i) = 0 = A_k \delta B^k + B^i \delta A_i, \quad (1.16)$$

sustituyendo  $\delta B^k$  la ecuación en (1.21) y despejando  $\delta A_i$  se obtiene que

$$\delta A_i = \Gamma_{ij}^k A^k \delta x^j , \quad (1.17)$$

Notamos que  $\delta A^k$  y  $\delta A_k$  no son vectores debido a que  $\Gamma$  no es un tensor, en coordenadas cartesianas  $\delta A_k$  es igual a cero pero no lo es en coordenadas polares, un vector que es cero en un sistema de coordenadas puede ser diferente de cero en otro sistema. De la misma manera se aplica a los símbolos de Christoffel: en un sistema cartesiano éstos son iguales a cero pero no lo son en coordenadas polares. Se considera que  $A^i = a_{i'}^i A^{i'}$ , tomando la derivada ordinaria se tiene:

$$dA^i = d(a_{i'}^i) A^{i'} + a_{i'}^i dA^{i'} , \quad (1.18)$$

si las componentes no cambian, entonces  $dA^{i'} = 0$  y  $dA^i$  es debido sólo al desplazamiento paralelo; por lo tanto  $d(a_{i'}^i) A^{i'} = \delta A^i$  entonces :

$$a_{i'}^i dA^{i'} = dA^i - \delta A^i , \quad (1.19)$$

$$dA^{i'} = a_{i'}^i (dA^i - \delta A^i)$$

para algún otro sistema

$$dA^{i'} = a_{k'}^{i'} (dA^k - \delta A^k) , \quad (1.20)$$

$$(dA^i - \delta A^i) = a_k^i (dA^k - \delta A^k)$$

De esta última ecuación, se ve que la magnitud entre paréntesis se transforma como un vector, por lo tanto es un vector designado como:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i , \quad (1.21)$$

Esta diferencia da el cambio en el vector debido a las condiciones curvilíneas del sistema de coordenadas, dejando el cambio real en el vector. La ecuación (1.21) se puede escribir como :

$$DA^i = \left( \frac{dA^i}{dx^j} + \Gamma_{jk}^i A^k \right) dx^j , \quad (1.22)$$

La cantidad entre paréntesis es un tensor mixto llamado covariante. La ecuación (1.22) puede escribirse como:

$$A_{i;j}^i = A_j^i + \Gamma_{jk}^i A^k , \quad (1.23)$$

donde el punto y coma representa la derivada covariante. De la misma forma, para un vector covariante se tiene

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma_{jk}^i A_k . \quad (1.24)$$

Todo lo anterior se puede generalizar fácilmente para la geometría del espacio-tiempo, simplemente haciendo las sumatorias en cuatro dimensiones. El tensor de Riemann se obtiene de la siguiente expresión:

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu]A_\beta = R_{\beta\mu\nu}^\alpha A_\alpha , \quad (1.25)$$

donde  $\nabla_\nu$  es la derivada covariante respecto de  $x^\nu$  y  $[\nabla_\nu, \nabla_\mu] = \nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu$ . El tensor de Riemann  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  se puede interpretar como una medida de la no conmutatividad de la derivada covariante. Este tensor puede ser obtenido partir de los símbolos de Christoffel y sus derivadas

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\mu , \quad (1.26)$$

Al bajar el índice cotravariante del tensor de Riemann se obtiene el tensor de curvatura, dado como:

$$R_{\lambda\beta\gamma\delta} = g_{\lambda\alpha} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha . \quad (1.27)$$

El tensor de Riemann tiene 256 componentes pero no todas son independientes, debido a las simetrías que presenta este tensor. Algunas de ellas son  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = -R_{\beta\delta\gamma}^\alpha$  y  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + R_{\gamma\delta\beta}^\alpha + R_{\delta\beta\gamma}^\alpha = 0$ . El tensor de Ricci se encuentra contrayendo el tensor de Riemann:

$$R_{\nu\mu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha . \quad (1.28)$$

Otra forma de expresar la curvatura del espacio-tiempo es mediante la curvatura escalar , que es

$$R = R_\alpha^\alpha = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (1.29)$$

en donde  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico contravariante y satisface la relación  $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ . En principio, Einstein supuso que el tensor de Ricci se debía igualar al tensor de materia; de esta manera la materia sería la fuente de gravedad. Esto no funcionó ya que la divergencia del tensor de materia se hace cero y la del tensor de Ricci no siempre lo es. Para encontrar un tensor que cumpliera con la condición anterior se recurre a las identidades de Bianchi:

$$R_{\mu\nu\lambda\delta;\tau} + R_{\mu\nu\delta\tau;\lambda} + R_{\mu\nu\tau\lambda;\delta} = 0 . \quad (1.30)$$

Estas identidades forman un conjunto de 1024 ecuaciones de las cuales la mayoría no dice nada. Esencialmente son 24 identidades que no son triviales, si multiplicamos la ecuación (1.30) por  $g^{\mu\lambda} g^{\nu\delta}$  y mas la definición del tensor de Ricci y de la curvatura escalar, junto con las propiedades de simetría del tensor de Riemann se llega a:

$$R_{;\tau} + R_{\tau;\mu}^\mu + R_{\tau;\nu}^\nu = 0 . \quad (1.31)$$

Esto define el tensor de Einstein  $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ . Este tensor satisface la condición de divergencia  $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ .

El postulado de Einstein para el vacío afirma que  $R^{\mu\nu} = 0$ . Esta ecuación describe el campo gravitacional en ausencia de materia. Para poder considerar la fuente del campo gravitacional es necesario incluir a la materia en las ecuaciones. En la electrostática, se cumple la ecuación de Laplace para el campo eléctrico en el vacío, esto es  $\nabla^2\phi = 0$ . Cuando consideramos una distribución de carga la ecuación de Laplace se convierte en la ecuación de Poisson,  $\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Además la carga cumple con la ecuación de continuidad dada por

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (1.32)$$

lo cual significa que se conserva la carga. Para introducir materia en la ecuación de Einstein, se utiliza la identidad de Bianchi dada por la ecuación (1.31), de la cual se obtiene el tensor de Einstein  $G^{\mu\nu}$ . Por analogía con la electrostática, se postula que:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} . \quad (1.33)$$

donde  $G$  es la constante gravitacional y  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento. El tensor de Einstein cumple que  $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , por lo tanto, el tensor de energía-momento cumple la misma propiedad; es decir

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (1.34)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de continuidad (1.32). Esta es la forma más general de las ecuaciones de campo de Einstein y muestra la relación entre la materia y la curvatura del espacio tiempo. La ecuación (1.32) también se escribe como

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} . \quad (1.35)$$

La constante  $\Lambda$  es la llamada constante cosmológica que introdujo Einstein en un principio para obtener un universo estático y que luego retiró ante la evidencia experimental de un universo en expansión. Curiosamente y desde hace unos años los datos experimentales parecen favorecer una constante cosmológica no nula. Estas herramientas nos van a servir para el desarrollo de los siguientes capítulos, los cuales abarcan la construcción, creación y dificultades del los agujeros de gusano; además, se mencionan algunos ejemplos particulares de estos singulares objetos. En el capítulo dos se desarrolla

la manera más general de obtener un agujero de gusano atravesable, donde se empiezan a ver las condiciones que la materia impondra para la creación de dicho objeto, así como su geometría.

## Capítulo 2

# Agujeros de Gusano

### 2.1. Antecedentes

Basada en una novela de Carl Sagan los agujeros de gusano son una proyección de reducir las distancias estelares por parte del hombre. La base para el estudio de estos singulares objetos es la teoría los agujeros negros. Cada agujero negro tiene un horizonte de eventos; es decir, una superficie que separa dos regiones comunicables entre sí. En un horizonte de un agujero negro de masa  $M$  están contenidas fuerzas gravitacionales que producen enormes aceleraciones relativas. La deformación originada por la acción gravitatoria sobre la geometría del espacio tiempo podría propiciar atajos que faciliten la llegada a lugares lejanos.

La solución de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein contiene un agujero de gusano, una especie de túnel (puente Einstein-Rosen) un asa, o garganta estrecha corta, que sirve como atajo entre regiones remotas. Estos agujeros de gusano tipo Schwarzschild no son atravesables; ya que las fuerzas de marea en la garganta son similares a las de los agujeros negros en su horizonte, y por lo tanto son muy intensas. Los agujeros negros son objetos dinámicos, cuya garganta crece desde un radio nulo hasta uno máximo, para luego decrecer de nuevo a cero, rompiéndose la conexión que el túnel establece. Todo esto ocurre en un tiempo demasiado corto para atravesar el túnel; aunque se vaya a la velocidad de la luz, el viajero quedaría preso y aplastado al límite por fuerzas de marea aniquilantes. Estos agujeros de gusano tipo Schwarzschild poseen también un antihorizonte (como el de un agujero blanco) inestable, y cualquier perturbación externa acelera el sellado del túnel.

Los agujeros de gusano son soluciones a las ecuaciones de Einstein, aunque

existen objeciones físicas para que estos peculiares objetos sean creados.

## 2.2. Condiciones para la creación de agujeros de gusano

Uno desearía que estos objetos tuvieran las condiciones suficientes para que fueran atravesables por el hombre. Las que condiciones para que los agujeros de gusano sean atravesables, son <sup>1</sup>

1. La métrica debe ser esféricamente simétrica y estática (independiente del tiempo). Estos requerimientos sólo simplifican los cálculos con el objetivo de encontrar un agujero de gusano estable.
2. La solución debe obedecer las ecuaciones de Einstein.
3. La solución de agujero de gusano debe tener un túnel que conecte dos regiones del espacio asintóticamente planas.
4. Las fuerzas gravitacionales de marea deben ser soportables para el hombre.
5. Un viajero que desee atravesar el agujero de gusano debe hacerlo en un tiempo finito y en tiempo propio razonable (menos de un año).
6. La materia y los campos que generan el agujero de la curvatura del espacio-tiempo debe tener un tensor de energía-momento físicamente razonable.

## 2.3. Descripción de un agujero de gusano atravesable

Se requiere que la métrica espacio-tiempo para un agujero de gusano sea expresada en forma estática y de forma esféricamente simétrica.

$$dl^2 = -e^{2\phi}c^2dt^2 + dr^2/(1 - b/r) + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (2.1)$$

donde  $\phi = \phi(r)$  y  $b = b(r)$  son funciones arbitrarias del radio y  $c$  es la velocidad de la luz <sup>2</sup>.  $b(r)$  determina la forma espacial de un agujero de gusano

---

<sup>1</sup>Estas condiciones las propuso Michael S. Morris y Kip S. Thorne para viajes interestelares.

<sup>2</sup>Morris y Thorne , impusieron como condición que un agujero de gusano debe tener un radio mínimo  $r = b_0$  (la garganta del agujero de gusano).

la cual se le denomina función de forma.

$\phi(r)$  es la función gravitacional del corrimiento al rojo por lo cual se le denomina función de "redshift"<sup>3</sup>. La coordenada radial tiene un especial significado geométrico,  $2\pi r$  es la circunferencia del círculo centrado sobre la garganta del agujero de gusano. Para desarrollar la estructura matemática de los agujeros de gusano nosotros necesitamos los tensores de Riemann y Einstein para la métrica (2.1). Ocupamos los símbolos de Christoffel (coeficientes de conexión)  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  y las componentes  $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$  del tensor de curvatura utilizando las ecuaciones convencionales (1.15) y (1.26). Entonces aplicando estas ecuaciones a la métrica (2.1) se encuentran 24 componentes no nulas del tensor de Riemann. Con la contracción del tensor de Riemann calculamos el tensor de Ricci utilizando la ecuación (1.28) y la curvatura escalar de curvatura  $R$  utilizando (1.29).

Podemos introducir estos elementos en las ecuaciones de Einstein (1.33), y ver que las únicas componentes del tensor de Einstein no nulas son

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{b'}{r^2} \\ G_{rr} &= -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}, \\ G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ahora analizamos el tensor de energía momento. Para esto tenemos que referirnos al teorema de Birkhoff que nos dice que las ecuaciones de Einstein sólo permiten un tipo de agujero de gusano esférico en el vacío, el agujero de gusano de Schwarzschild. Para que el agujero de gusano sea atravesable uno debe tratarlo con un campo de materia dado por un tensor de energía-momento no vacío. Entonces las ecuaciones de Einstein requieren que el tensor de energía-momento sea proporcional al tensor de Einstein.

El tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  debe tener la misma estructura algebraica que  $G_{\mu\nu}$  en la ecuación (2.2). Las únicas componentes que no son nulas deben ser  $T_{tt}, T_{rr}$  y  $T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi}$ . La interpretación física para un observador estático es:

$$T_{tt} = \rho(r)c^2, \quad T_{rr} = -\tau(r), \quad \text{and} \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p(r). \quad (2.3)$$

donde  $\rho(r)$  es la densidad total de masa-energía (que se mide en unidades de  $g/cm^3$ );  $\tau(r)$  es la tensión por unidad de área en la dirección radial (es

<sup>3</sup>Los espectros de los astros aparecen líneas relacionadas con los elementos químicos presentes; las líneas se desplazan hacia la zona de las longitudes de ondas largas indicando que el astro se aleja.

el negativo de la presión con unidades de  $\text{dyn}/\text{cm}^2$ ) y  $p(r)$  ( $\text{dyn}/\text{cm}^2$ ) es la presión que nosotros medimos en las direcciones laterales.

## 2.4. Ecuaciones de campo de Einstein

Teniendo las ecuaciones de campo de Einstein e igualando el tensor de Einstein (2.2) y el tensor de Energía momento (2.3) llegamos a:

$$b' = 8\pi Gc^{-2}r^2\rho . \quad (2.4)$$

$$\Phi' = \frac{(-8\pi Gc^{-4}\tau r^3\rho + b)}{2r(r-b)} . \quad (2.5)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - \frac{2(p + \tau)}{r} . \quad (2.6)$$

De acuerdo a las relaciones obtenidas (2.4) y (2.5) son las partes temporal y radial de las ecuaciones de Einstein respectivamente. La ecuación (2.6) es la parte lateral ( $\theta, \phi$ ). La ecuaciones de campo (2.4 - 2.6) son tres ecuaciones diferenciales relacionando 5 funciones desconocidas de  $r$ :  $b, \Phi, \rho, \tau$  y  $p$ . Lo que facilita la solución de este sistema de ecuaciones es tomar en cuenta la ecuación de estado para la tensión radial ya que es una función de la densidad masa-energía  $\tau(\rho)$  y de la misma forma la presión  $p(\rho)$ . Con estas condiciones se forman sistema de cinco ecuaciones con cinco funciones desconocidas ( $b, \Phi, \rho, \tau$  y  $p$ ) de  $r$ .

Una de las condiciones para poder construir un agujero de gusano es obtener la materia necesaria, esto se logra mediante el tensor de energía momento . Matemáticamente deseamos controlar las funciones, recordando las relaciones entre  $\rho, \tau$  y  $p$  con esto rescribimos las ecuaciones (2.11)-(2.13), para llegar a la siguiente forma:

$$\rho = b'/(8\pi Gc^{-2}r^2) . \quad (2.7)$$

$$\tau = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi'}{8\pi Gc^{-4}r^2} . \quad (2.8)$$

$$p = \frac{r}{2}[(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau . \quad (2.9)$$

De las ecuaciones de campo de Einstein (2.7)-(2.9) se obtienen constricciones sobre la densidad de masa  $\rho$ , la tensión radial  $\tau$ , y al presión  $p$ , la cual genera la curvatura del espacio-tiempo. Ahora tomando en cuenta la ecuación (2.8) en agujero de gusano esto implica que  $\tau = \frac{[\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi']}{8\pi Gc^{-4}r^2}$

$$\tau_0 \equiv \textit{tensión en la garganta}$$

$$= \frac{1}{8\pi G c^{-4} b_0^2} 5 \times 10^{41} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \left(\frac{10m}{b_0}\right)^2$$

Se observa que es una gran magnitud para la tensión. En las vecindades de la garganta se puede investigar otro aspecto de la esta tensión definiendo la siguiente función:

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|} . \quad (2.10)$$

Ahora utilizamos las ecuaciones de campo de Einstein (2.7) y (2.8) al remplazar las funciones del tensor de energía momento  $\tau$  y  $\rho$  por sus contrapartes geométricas  $b$  y  $\Phi$ . Esta  $\zeta(r)$  entra en la siguiente discusión: Los requerimientos para que un agujero de gusano sea conectable en un espacio asintóticamente plano implican que la garganta en la superficie encajada se extienda externamente como lo muestran la figuras (2.1) y (2.2) el significado matemático es que el inverso de la función de encaje  $r(z)$  debe de satisfacer  $\frac{d^2 r}{dz^2} > 0$  donde cerca de la garganta  $r=b$ . Analizando la consecuencias de estas constricciones, con la ecuación (2.18) invirtiendo su forma

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (2.11)$$

diferenciando respecto  $z$  se obtiene una versión de la extensión externa con la condición:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \text{ donde cerca de la garganta } r = b , \quad (2.12)$$

Combinando la ecuación (2.10) y la ecuación (2.12) nosotros rescribimos  $\zeta$  con radio  $r$  así

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left( \frac{d^2 r}{dz^2} \right) - 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|} , \quad (2.13)$$

Tomamos en cuenta el hecho que  $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$  en la garganta, esto nos permite rescribir la condición (2.12) como:

$$\zeta \equiv \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c|} > 0 \text{ donde cerca de la garganta } r = b = b_0 . \quad (2.14)$$

La constricción  $\tau_0 > \rho_0 c^2$  significa que en la garganta la presión debe ser grande para exceder la densidad de masa-energía  $\rho_0 c^2$ . A este tipo de materia con la propiedad  $\tau > \rho_0 c^2 > 0$  se le llama exótica.

La naturaleza exótica de la garganta de los agujeros de gusano  $\tau_0 > \rho_0 c^2$  lo

hace atravesable. Esto implica que el tensor de energía-momento es problemático, pues el material exigido para formar estos túneles debe tener una tensión (presión negativa) radial que supera a la energía en reposo, lo cual viola todas las condiciones sobre la energía que estamos acostumbrados a ver en la relatividad general; en particular, esto hace que un observador moviéndose suficientemente rápido pueda ver densidades de energía anti-gravetantes.

La cuestión del montaje o preparación de tal artefacto no es trivial, pues requiere modificar la topología del espacio-tiempo.

## 2.5. Geometría espacial de un agujero de gusano

Un ejemplo típico de agujero de gusano es el esquematizado en la figura 2.1, que representa la inmersión métrica en  $R^3$  de un corte instantáneo de su geometría ecuatorial, empalmado a dos porciones alejadas de un espacio-tiempo asintóticamente plano. Para poder visualizar un agujero de gusano nos ayudamos de los diagramas de encaje fijando una geometría de 3 dimensiones y con ello la coordenada temporal. Esta geometría es esféricamente simétrica lo cual significa que perdemos información, lo que nosotros podemos hacer es enfocarnos en un corte ecuatorial a  $\theta = \phi/2$  que alrededor de la garganta. El elemento de línea para un corte obtenido con  $t=\text{constante}$ ,  $\theta = \phi/2$  es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 . \quad (2.15)$$

nosotros deseamos construir en un espacio Euclidiano de tres dimensiones, una superficie de dos dimensiones con la misma geometría que el corte es decir nosotros deseamos visualizar este corte. En el encaje del espacio Euclidiano introducimos coordenadas cilíndricas  $z, r, \phi$ . Entonces la métrica Euclidiana del espacio encajado tiene la forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 . \quad (2.16)$$

La superficie encajada será axialmente simétrica y descrita por una función sencilla  $z = z(r)$ . Sobre esta superficie el elemento de línea es

$$ds^2 = \left[1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right] dr^2 + r^2 d\phi^2 . \quad (2.17)$$

Este elemento de línea es igual a nuestro corte ecuatorial de la garganta del agujero de gusano de la ecuación (2.15) si identificamos las coordenadas

$(r, \phi)$  del espacio encajado con el  $(r, \phi)$  del espacio-tiempo del agujero de gusano. La función  $z(r)$  describe una superficie encajada, la cual satisface :

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Esta superficie  $z = z(r)$  es la dibujada a continuación (figura 2.1) y la ecuación (2.18) muestra la manera en la cual la función  $b = b(r)$  forma la geometría espacial de un agujero de gusano.

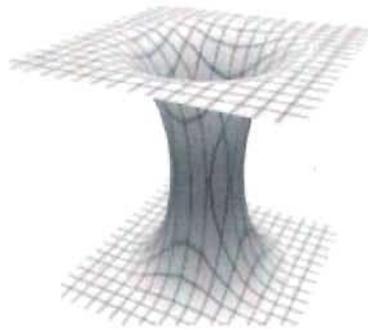


Figura 2.1: Diagrama de un agujero de gusano que conecta dos diferentes universos

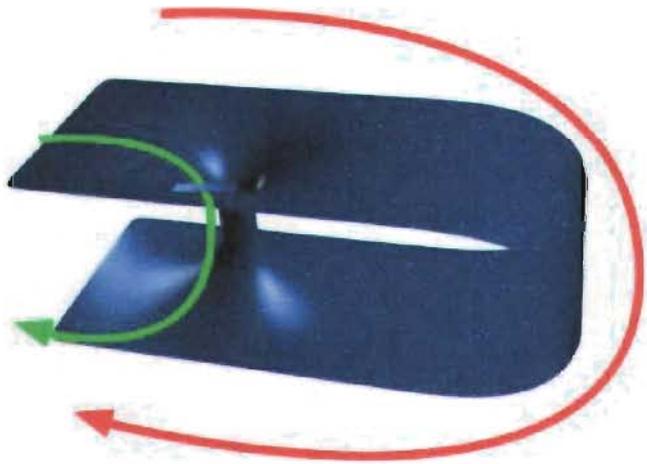


Figura 2.2: Diagrama de un agujero de gusano que conecta dos regiones distintas de nuestro universo

## Capítulo 3

# Cosmología

### 3.1. Modelos Cosmológicos

Los modelos cosmológicos son familias de soluciones a las ecuaciones de Einstein, bajo ciertas condiciones. Dentro de estas condiciones, el tensor  $T_{\mu\nu}$  se refiere al contenido material del Universo. Este contenido se presenta muy complejo desde el punto de vista observacional, de modo que para representarlo se le considera como un fluido material continuo (el fluido cósmico) cuyas moléculas serían los cúmulos de galaxias. Esto significa que los modelos tienen validez cuando se considera al universo a gran escala.

Los primeros modelos cosmológicos eran estáticos; es decir, las métricas correspondientes no dependían del tiempo. Se pudo demostrar que bajo estas condiciones sólo existían tres posibilidades: una de ellas era el modelo plano de relatividad restringida, y las otras dos eran los modelos de Einstein y de Sitter, en estos casos se impone un valor de la constante cosmológica necesariamente diferente de cero.

El descubrimiento de la ley de Hubble, y su inmediata interpretación como debida a la expansión, llevó a abandonar los modelos estáticos y adoptar los desarrollados por Friedmann, los cuales, además de satisfacer las hipótesis antes mencionadas, tienen una métrica que varía con el tiempo. Con esto nace una nueva hipótesis que impone la existencia del llamado tiempo cósmico; un tiempo que puede ser definido para todo el Universo en cada instante. Geométricamente esto significa que en la variedad espacio-temporal de cuatro dimensiones, existe en cada instante una superficie tridimensional ortogonal a la dimensión temporal, que coincide con el universo.

Una hipótesis fundamental conocida como principio cosmológico se a la geometría del espacio-tiempo. Este principio establece que todas las posiciones

espaciales del mismo son equivalentes, por lo que el universo aparece espacialmente homogéneo e isótropo.

A partir de las ecuaciones de Einstein, H. P. Robertson en 1933 estableció una clasificación de los posibles modelos cosmológicos. Para ello analizó el comportamiento de un factor de escala del que dependían las variaciones de distancia.

Partimos de la métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (3.1)$$

se supone homogeneidad e isotropía del universo a gran escala: un espacio-tiempo de 4 dimensiones que contiene un subespacio de 3 dimensiones simétrico dos cantidades especifican la métrica  $R(t)$  el factor cosmológico de escala tiene dimensiones de longitud y se relaciona con el radio del universo de la siguiente manera: El parámetro de desplazamiento al rojo  $z$ , debido a la expansión de Hubble, está relacionado con el factor de escala,  $R$ , y en el momento de la emisión de la luz por parte de la fuente,  $R_0$ , mediante <sup>1</sup>:

$$Z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \approx \frac{v}{c} = H \frac{\delta r}{c} \equiv \frac{\dot{R}}{R} \delta t = \frac{\delta R}{R} = \frac{R - R_0}{R_0} \Rightarrow 1 + z = \frac{R}{R_0}. \quad (3.2)$$

definiendo  $H = \frac{\dot{R}}{R}$

Ahora si sustituimos la métrica de Robertson-Walker en las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

y tomamos en cuenta que la forma del tensor energía-momento correspondiente a un fluido perfecto, de densidad total  $\rho$  y presión  $p$ :

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad en reposo de la partícula,  $c$  es la velocidad de la luz  $p$  la presión y  $U_\mu$  la cuadrivelocidad.

$$U_\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}$$

se obtienen las ecuaciones cosmológicas; para observadores inerciales con  $U^\mu = (u^0, \vec{0})$

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8}{3}\pi\rho G - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>El efecto Doppler es un cambio de frecuencia de la emisión de ondas electromagnéticas producida por una fuente en movimiento relativa a un observador. Donde  $\lambda_0$  es la longitud inicial de la onda.

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4}{3}\pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad (3.6)$$

Si tomamos en cuenta la conservación de energía  $T_{\nu;\nu}^\mu = 0$  se puede obtener la ecuación de un fluido.

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + p \frac{d}{dt}R^3 = 0. \quad (3.7)$$

Introducimos el parametro de Hubble  $H$  mide el ritmo de expansión del universo:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \text{ (su valor real es la constante de Hubble } H_0). \quad (3.8)$$

Experimentalmente:  $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $h = 0.71_{-0.03}^{+0.04}$ .

La densidad crítica ( $\rho_c$ ) depende de la velocidad de expansión (o parámetro de Hubble  $H$ ) y de la constante de gravitación universal ( $G$ ). Para saber si nuestro universo es abierto, cerrado o plano debemos determinar las diferentes componentes que contribuyen a la masa y energía del universo. Para esto se debe tomar en cuenta la materia: La masa de todas las partículas en el universo. La radiación: los fotones de la radiación cósmica de fondo y los neutrinos en el universo. La densidad de cada una de estas componentes se expresa en términos relativos de la densidad crítica.

El parámetro de densidad  $\Omega$  se descompone en una contribución debida a la materia  $\Omega_M$ , y otra debida a la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$  (densidad de energía del vacío). Se define como el cociente entre  $\rho$  y la densidad crítica  $\rho_c$ .

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c};$$

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88h^2 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$$

La  $\Omega_M$  se obtiene a partir de sus diferentes componentes: materia bariónica (barionica es la materia hecha de protones y neutrones) ( $\Omega_B$ ), y materia oscura fría ( $\Omega_{CDM}$ ), que es la principal contribución <sup>2</sup> y ( $\Omega_R$ ) contribución de radiación (los fotones radiación cósmica de fondo y los neutrinos en el

---

<sup>2</sup>La materia oscura es aquella que no se ve, solo se pueden sentir sus efectos gravitatorios (curvas de rotación de las galaxias, velocidades de cúmulos de galaxia, etc.). Se divide en dos categorías: bariónica y no bariónica, con la segunda subdividida en caliente

universo).

Sumando las componentes de materia y energía terminamos en todo caso con una densidad de 30 % de la crítica. Si paramos de contar diríamos que el universo es abierto y se expande para siempre. Sin embargo resultados experimentales indican que vivimos en un universo con densidad de energía justamente igual a la densidad crítica (universo plano).

Este tipo de acción logra incluir el término de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein, este valor viene a completar la densidad total del universo.

Razones de densidades:

$$\Omega_B \approx 0.05 , \quad \Omega_R \approx 0.0002 , \quad \Omega_{CDM} \approx 0.022 , \quad \Omega_\Lambda \approx 0.073 \quad (3.9)$$

$$\Omega_M = \Omega_B + \Omega_R + \Omega_{CDM} \quad (3.10)$$

Existe un bastantes medidas complementarias de los parámetros cosmológicos y todas apuntan a que :

$$\Omega_M + \Omega_k \approx 0.27 , \quad \Omega_\Lambda \approx 0.73 . \quad (3.11)$$

y se define que el total de estas contribuciones es:

$$\Omega_{total} = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 . \quad (3.12)$$

Hasta ahora hemos visto el modelo cosmológico y las contribuciones correspondientes a materia, radiación , energía y sobre todo destacar la aportación debida a la constante cosmológica. La importancia de esta constante radica en el siguiente desarrollo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}\tilde{T}_{\mu\nu} , \quad (3.13)$$

con  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  dada como

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu} = -\tilde{p}g_{\mu\nu} + (\tilde{p} + \tilde{\rho}c^2)u_\mu u_\nu , \quad (3.14)$$

---

(HDM) y fría (CDM) , constituida por partículas poco masivas (relativistas) y muy masivas (lentas), respectivamente. Todas estas formas de materia oscura parecen ser necesarias para explicar los distintos niveles de estructura del universo

donde la presión efectiva  $\tilde{p}$  y densidad efectiva  $\tilde{\rho}$  se relacionan con las correspondientes cantidades para un fluido perfecto :

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} , \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} ; \quad (3.15)$$

con esto encontramos las siguientes ecuaciones :

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\tilde{\rho} + 3\frac{\tilde{p}}{c^2}\right)R , \quad (3.16)$$

$$\dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi}{3}GR^2 . \quad (3.17)$$

Estas ecuaciones admiten una solución dada por

$$\tilde{\rho} = -3\frac{\tilde{p}}{c^2} = \frac{3kc^2}{8\pi GR^2} , \quad (3.18)$$

para un universo de polvo ( $p=0$ ), esto es una buena aproximación de nuestro universo en el tiempo presente. Si la ecuación de campo se escribe así, la constante cosmológica aparece del lado derecho de la ecuación, el termino de la constante cosmológica podría asociarse con una densidad de energía de vacío:

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_\Lambda . \quad (3.19)$$

El termino de la constante cosmológica es proporcional a la métrica. La presión asociada con el vacío es entonces dada por la relación

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 . \quad (3.20)$$

Así la constante cosmológica se comporta gravitacionalmente como materia y energía, excepto que tiene una presión negativa.

Esto es una parte esencial de la naturaleza de la constante cosmológica, y que nos relaciona con el tema de agujeros de gusano ya que vemos que debe cumplir una condición fundamental en la creación de los agujeros de gusano, que es tener una densidad de energía negativa. Lo más fascinante es la contribución que aporta la constante cosmológica ya que es enorme a comparación de las otras. Esto nos indica que la materia prima que puede ser la creadora de los agujeros de gusano abunda en el universo y con eso se incrementa la posibilidad de que estos objetos pudiesen existir en alguna parte de nuestro interminable universo.

## Capítulo 4

# Modelos de Agujeros de Gusano

### 4.1. Antecedentes

El concepto de agujeros de gusano se origina con los trabajos de Einstein y Nathan Rosen (1935). Básicamente ellos no creían que debido a que las partículas eran entes físicos sin dimensiones (comportándose como puntos matemáticos), cuando uno mide las propiedades de las mismas en el mismo sitio que ocupan, lo único que se obtiene son solo magnitudes. Ellos postularon que las partículas en realidad eran una deformación del espacio, una compuerta hacia otras locaciones del espacio-tiempo, a la cual se le llamó PUENTE DE EINSTEIN-ROSEN lo cual hoy en día se les conoce como agujeros de gusano microscópicos. Esta idea fue adquirida por John Archibald Wheeler, quien retoma el tema e introduce el nombre de AGUJERO DE GUSANO para designar al puente Einstein-Rosen. Sin embargo, el concepto era demasiado complicado y muy pocos investigaban este tipo de tema.

Además resultaba muy difícil investigar, en teoría, cuáles distribuciones de materia-energía eran capaces de producir agujeros de gusano sin que estos degeneraran, o se convirtieran en un agujero negro. Fueron M.S Morris y Kip Thorne quienes retomaron la idea y para su estudio adoptaron otra idea; que en lugar de estudiar las diferentes distribuciones de materia que generase una curvatura en el espacio lo suficientemente buena para formar agujeros de gusano, estudiaron las condiciones matemáticas necesarias para la formación de agujeros de gusano y después se buscó la materia compatible con la existencia de un agujero de gusano. Hoy en día los agujeros de

gusano son llamados **agujeros de gusano Lorentzianos** (los cuales satisfacen las ecuaciones de Einstein) y por sus propiedades matemáticas se han clasificado de la siguiente forma:

1. **agujeros de gusano Lorentzianos inter-universales:**  
conectan nuestro Universo con otro posible universo.
2. **agujeros de gusano Lorentzianos intra-universales:**  
conectan 2 o más regiones distintas de nuestro universo.
3. **agujeros de gusano Lorentzianos Macroscópicos y Microscópicos:**  
se cree que los microscópicos pueden tener un tamaño del orden de las longitudes de Planck.
4. **agujeros de gusano Lorentzianos permanentes**
5. **agujeros de gusano pasajeros:**  
objetos que aparecen y desaparecen, sin dejar rastro en el espacio, en un periodo de tiempo muy pequeño.
6. **agujeros de gusano Lorentzianos atravesables:**  
aquellos macroscópicos permanentes o cuasi-permanentes que son lo suficientemente estables como para que la materia puede atravesarlo sin sufrir un colapso.

## 4.2. El agujero de gusano de Michael S. Morris y Kip Thorne

Asumiendo que es un agujero de gusano atravesable, Morris y Kip Thorne proponen una solución de la forma: <sup>1</sup>:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

Donde las coordenadas tiene rangos:  $-\infty < t < +\infty$ ,  $-\infty < l < +\infty$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < 2\phi < 2\pi$ ,  $b_0 = cte$  y  $c$  es la velocidad de la luz. Vemos que  $t$  es la coordenada temporal que mide el tiempo propio de un observador estático,  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas esférico-polares;  $l$  es una coordenada radial

---

<sup>1</sup>Michael S.Morris y Kip S. Thorne, American Association of Physics Teachers. **395**,405 (1987)

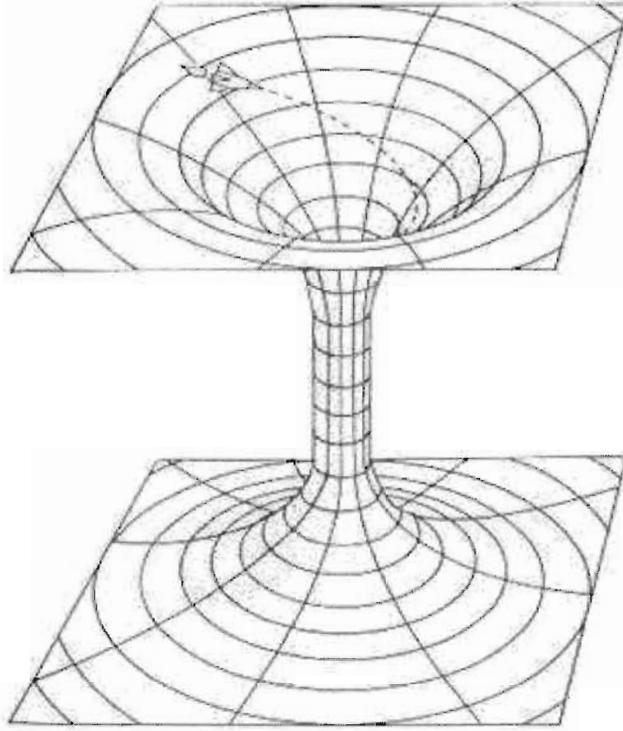


Figura 4.1: Agujero de gusano. Del cual dadas las condiciones adecuadas, una nave exploradora puede aventurarse a través de él.

midiendo la distancia propia radial en un punto fijo  $t$ . El espacio tiempo es esféricamente simétrico y estático teniendo dos regiones asintóticamente planas,  $l \rightarrow +\infty$  y  $l \rightarrow -\infty$ . Construyendo un diagrama de encaje para el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , tomando  $t = \text{cte}$  y utilizando coordenadas esféricas  $(z, r, \phi)$  así  $ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$ , entonces obtenemos

$$z(r) = \pm b_0 \ln \left( \frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1} \right). \quad (4.2)$$

con  $l = \pm(r^2 - b_0^2)^{\frac{1}{2}}$  como muestra en la figura (4.1)

Obteniendo las ecuaciones de campo con el tensor de Einstein.

$$G_{ll} = \frac{-b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} = G_{tt} = -c^2 G_{ll}, \quad G_{\theta\theta} = \frac{b_0^2}{l^2 + b_0^2}, \quad G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \text{sen}^2 \theta. \quad (4.3)$$

### 4.3. El agujero de gusano de Wheeler y Misner

Wheeler empezó a interesarse por la topología descrita en los trabajo de Einstein-Rosen (1955) así como en la relatividad general.

Geones son entes hipotéticos inestables pero a lo largo de su vida soluciones a la combinación de las ecuaciones Einstein-Maxwell. La palabra geon fue creada por Wheeler para denotar un ente electromagnético gravitacional. Wheeler observo que uno podría considerar una métrica la cual fuera plana en casi todas las regiones separadas, donde pudiesen llegar a conectarse por un túnel. Con esto Wheeler se inclinó con Misner hacia una investigación dirigida hacia una física clásica geométrica abarcando la gravitación, el electromagnetismo, la carga, masa, así como las propiedades de curvatura del espacio vacío <sup>2</sup>.

Enfocados en la idea de una geometría dinámica se interesaron por el problema de la interacción entre dos concentraciones de masa-energía. Guiándose por los principios de la geometro-dinámica encontraron una definición natural de centro de masa, en la cual la descripción de estas masas no es única. Uno podría construir tres diferentes variedades interpretadas como universos conteniendo dos partículas. La base es la construcción de una métrica parecida a la de Schwarzschild para un solo cuerpo (Expresada en coordenadas isotropicas) <sup>3</sup> :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.4)$$

Entonces con esto podríamos considerar dos variedades con dos puentes Einstein-Rosen con dos bocas. Los tres posibles candidatos están ilustrados en la figura 4.2. La ultima variedad es la más importante, una variedad asintótica plana en tres dimensiones conteniendo dos puentes Einstein-Rosen cuyas bocas están unidas. Entonces topológicamente estamos hablando de un espacio con una métrica estrictamente plana conteniendo un asa. Este modelo es conocido como una variedad de agujero de gusano. Wheeler fue primero en proponer estos modelos a los que llamo agujeros de gusano que describen un universo conteniendo dos puente Einstein-Rosen de igual masa. Este modelo de agujero de gusano se construyo con un sistema de coordenadas llamadas bisféricas

---

<sup>2</sup>En 1957 los artículos publicados por Misner y Wheeler englobaron todas las fuerzas donde la geometría Riemanniana de variedades de una topología no trivial fue investigada con una visión de explicar toda la física clásica

<sup>3</sup>El primero en expresar la métrica de esta manera fue ,Charles W. Misner, Wormhole Initial Conditions, Phys.Rev. 118, 1110-1111 (1960)

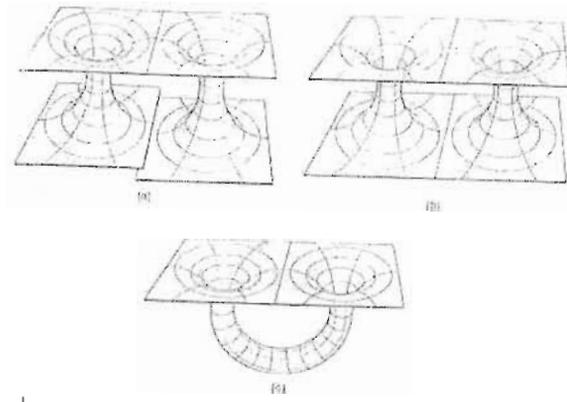


Figura 4.2: (a), Muestra un par de puentes Einstein-Rosen unidos por las hojas superiores. (b) En la siguiente figura están unidas por las partes superiores e inferiores. (c) La tercera configuración sólo se da si las masas de las gargantas son iguales.

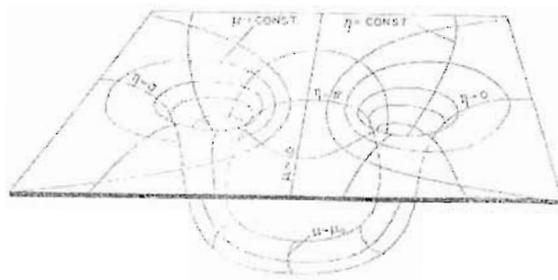


Figura 4.3: Curvas coordenadas  $\mu = const$ , y  $\eta = const$

$$\coth \mu = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}{2az} . \quad (4.5)$$

$$\cot \eta = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} . \quad (4.6)$$

$$\cot \phi = \frac{x}{y} . \quad (4.7)$$

Se toma la orilla de dos esferas no intersectadas S y S' dada por

$$\mu = +\mu_0 \quad y \quad \mu = -\mu_0 , \quad (4.8)$$

Entonces los puntos en  $E^3$  en el exterior de las esferas tienen coordenadas con rangos

$$-\mu_0 < \mu < \mu_0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi . \quad (4.9)$$

Interpretamos que  $\eta$  y  $\phi$  son coordenadas angulares (con periodo  $2\pi$ ).

Se requiere también que  $\mu$  sea una coordenada periódica, con periodo  $2\mu_0$  esto, para que uno identifique los puntos  $(\mu, \eta, \phi)$  y  $(\mu + 2n\mu_0, \eta, \phi)$  para todo los enteros  $n$ . Cuatro de las diez ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (4.10)$$

son de campo gravitacional

$$G_{\alpha}^0 \equiv R_{\alpha}^0 - \frac{1}{2}\delta^0_{\alpha}R = 0 . \quad (4.11)$$

no contienen segundas derivadas temporales de  $g_{\mu\nu}$ . Imponemos condiciones necesarias sobre los valores de  $g_{\mu\nu}$  y  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}$  sobre una hipersuperficie  $\Sigma : t = 0$ . Si pedimos que esta hipersuperficie tenga simetría-temporal entonces <sup>4</sup> :

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 , \quad (4.12)$$

$$g_{0i} \Big|_{t=0} = 0 , \quad (4.13)$$

con estas condiciones iniciales el tensor de curvatura escalar en 3 dimensiones es:

$${}^3R = 0 , \quad (4.14)$$

---

<sup>4</sup>Misner ,Charles W. menciona que eran necesarias las condiciones de simetría para poder facilitar el desarrollo matemático y la evolución del sistema.

${}^3R$  es el escalar la curvatura obtenida de la métrica  $ds_0^2$  sobre la superficie inicial  $\Sigma$ .

La ecuación (4.14) es una ecuación no lineal elíptica conectando los componentes de la métrica  $g_{ij}$  sobre  $\Sigma$ . Nosotros suponemos que

$$ds_0^2 = \psi^4 d\bar{s}^2, \quad (4.15)$$

con  $d\bar{s}^2$  un cambio de base en la métrica. Con esta sustitución la ecuación (4.14) es una ecuación elíptica para  $\psi$ :

$$\bar{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{8} \bar{R} \psi = 0, \quad (4.16)$$

Donde  $\bar{\nabla}$  y  $\bar{R}$  son el laplaciano y el escalar de curvatura evaluado  $d\bar{s}^2$ .

La solución correcta para la ecuación (4.16) para la variedad de agujero de gusano fue obtenida por Misner. Entonces al cambiar la base métrica  $d\bar{s}$  obtenemos la forma:

$$ds_0^2 = d\mu^2 + d\eta^2 + \text{sen}^2 \eta d\phi^2, \quad (4.17)$$

y entonces se obtiene para (4.16)

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\text{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\text{sen} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}) + \frac{1}{\text{sen}^2 \eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{4} \right] \psi = 0, \quad (4.18)$$

Ahora el espacio plano del tensor métrico expresado en coordenadas bisféricas es de la siguiente forma:

$$ds_0^2 = a^2 (\cosh \mu - \cos \eta)^{-2} (d\mu^2 + d\eta^2 + \text{sen}^2 \eta d\phi^2), \quad (4.19)$$

y nosotros requerimos que  $ds_0^2$  sea asintóticamente plano lo que significa que  $\mu$  y  $\eta$  tienden a 0:

$$\psi(\mu, \eta, \phi) \rightarrow \left( \frac{a}{\cosh \mu - \cos \eta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20)$$

Ademas si nosotros queremos que la variedad construida posea una simétrica rotacional cerca del eje z (los ejes inmersos en el centro de las dos esferas  $\mu = \pm \mu_0$ ), uno debe pedir que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0, \quad (4.21)$$

mientras que si queremos que las dos masas sean idénticas (simétrica de espejo con respecto al eje z) se sigue que :

$$\psi(-\mu, \eta, \phi) = \psi(\mu, \eta, \phi), \quad (4.22)$$

y se encuentra como solución que <sup>5</sup>.

$$\psi = a^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cosh(\mu + 2n\mu_0) - \cos \eta]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.23)$$

De esta manera Misner encontró una representación de agujero dada por la figura 4.3

#### 4.4. Agujero de gusano de constante cosmológica

Einstein introdujo la constante cosmológica como una manera de generalizar las ecuaciones de campo (1.35); entonces definimos:

$$T_{\mu\nu total} \equiv T_{\mu\nu} + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (4.24)$$

Si tenemos que  $T_{\mu\nu} = 0$ , sólo hay una constante cosmológica, podemos ver el termino cosmológico como un tensor de fluido perfecto (4.4):

$$T_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu}, \quad \rho_{\Lambda} = -\frac{c^4}{8\pi G} \Lambda. \quad (4.25)$$

Tomando como condición  $p = -\rho c^2$ . Con esto se observa que se requiere el mismo tipo de condiciones para generar un agujero de gusano de naturaleza cosmológica.

#### 4.5. Agujero de gusano con campo escalar

Ahora del lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein introducimos un tensor de campo escalar que tiene la siguiente estructura :

$$T_{\mu\nu} = \chi_{,\mu} \chi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \chi_{,\rho} \chi_{,\sigma} + 2V). \quad (4.26)$$

Donde  $\chi$  es el campo escalar, con potencial  $V(\chi)$ . Del lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein consideramos la métrica de un agujero de gusano expresado en términos de la distancia radial propia:

$$ds^2 = -e^{2\phi(l)} dt^2 + dl^2 + R^2(l) [d\eta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2]. \quad (4.27)$$

---

<sup>5</sup>Misner encontró una única solución a la ecuación (3.20) satisfaciendo todas las condiciones

Las únicas componentes no nulas de las ecuaciones de Einstein son

$$G_t^t = \frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - 1}{R^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( V + \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right), \quad (4.28)$$

$$G_l^l = \frac{2R\dot{R}\dot{\psi} + \dot{R}^2 - 1}{R^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( V - \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right), \quad (4.29)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{\ddot{\psi}R + R\dot{\psi}^2 + \dot{R}\dot{\psi} + \ddot{R}}{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( V + \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right), \quad (4.30)$$

Con las condiciones iniciales  $V = 0$  y  $\psi = 1$ , las ecuaciones se simplifican de la siguiente manera:

$$G_t^t = \frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - 1}{R^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right), \quad (4.31)$$

$$G_l^l = \frac{\dot{R}^2 - 1}{R^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( -\frac{\dot{\chi}^2}{2} \right), \quad (4.32)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right), \quad (4.33)$$

Utilizando las ecuaciones (4.33-4.35) se obtiene las siguientes soluciones:

$$R = l^2 + l_0^2. \quad (4.34)$$

$$\chi = \frac{c^4}{2\pi G l_0} \arctan\left(\frac{l}{l_0}\right). \quad (4.35)$$

Con esto observamos que la coordenada radial y el campo escalar se encuentran en términos de los valores de la garganta  $l$  y  $l_0$

## 4.6. Máquinas del tiempo

Los agujeros de gusano podrían usarse como máquinas del tiempo. Para ver esto imaginemos que inicialmente ( $t=0$ ) las dos bocas del túnel están en reposo relativo; y que una de las bocas comenzara a acelerar hasta alcanzar casi la velocidad de la luz, para luego frenar, desacelerar y regresar a donde se encontraba. Esto puede conseguirse si se tira de la boca  $M$  gravitacional o eléctricamente. Como al moverse van más despacio los relojes ( Como en la paradoja de los gemelos), yendo de  $E$  (boca estacionaria) a  $M$  por el

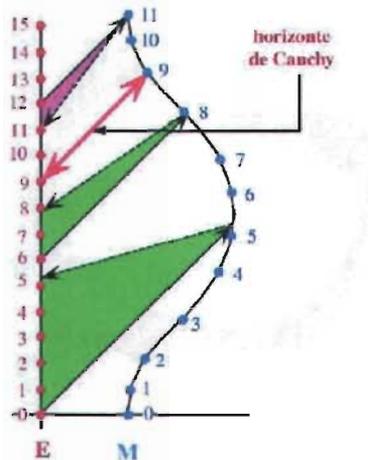


Figura 4.4: Líneas del universo de las bocas (en rojo la estática, en azul la móvil) de un agujero de gusano transformado como máquina del tiempo.

exterior y regresando de  $M$  a  $E$  a través del túnel se puede volver al pasado , y conseguir las famosas curvas temporales cerradas <sup>6</sup>. El gráfico de la Figura 4.4 ilustra esto con viajes de  $E$  a  $M$ , por el exterior del Agujero de Gusano, prácticamente a la velocidad de la luz (líneas continuas), y regresos casi instantáneos de  $M$  a  $E$  por dentro del agujero de gusano (líneas discontinuas). El horizonte de Cauchy, determinado por la condición de que se puede hacer el viaje de ida y vuelta con regreso al suceso de partida, marca una línea divisoria de modo que a partir de esta podemos regresar a la entrada estacionaria antes de haber partido. con la presencia de circuitos espaciotemporales y las curvas cerradas temporales imponen condiciones de autoconsistencia: una bola puede penetrar por la boca móvil  $M$  y salir por la estacionaria  $E'$  en el pasado, chocando con ella misma antes de entrar por  $M$  ; esta colisión debe permitir que se complete el circuito (consistencia) , y no estropear la jugada Figura 4.5. Así se elimina la llamada paradoja de Polchinski (Novikov 1992), que expresa la sorpresa que produce un regreso

<sup>6</sup>Esto lleva a la violación de la causalidad o como dicen Hawking y Ellis (1973), *one could imagine that a suitable rocketship one could travel round such a [closed timelike] curve and, arriving back before one's departure, one could prevent oneself from setting out in the first place*

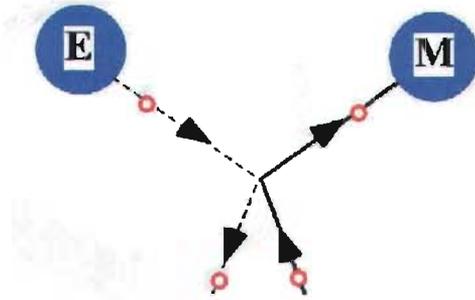


Figura 4.5: Bola que regresa del futuro para chocar con ella misma en su pasado

de la bola de billar por la boca E, que al chocar con la bola que va entrar por M la desvía impidiendo su entrada por el agujero de gusano. Tal posibilidad no sería una solución autoconsistente de las ecuaciones dinámicas para estos sistemas en que el futuro puede volver al pasado y actuar sobre él <sup>7</sup>. En este trabajo se encontró vía las ecuaciones de Einstein la relación que existe entre la geometría y la distribución de materia-energía. En este proceso se mostró que una de estas soluciones fueron los agujeros de gusano, y los cosmológicos. Estos dos tipos de soluciones encuentran una relación en la materia exótica generadora de agujeros de gusano y en la naturaleza de la constante cosmológica. Este trabajo me sirvió para darme cuenta que el entorno físico en que vive el hombre puede ser definido de manera geométrica, toda perturbación que exista en el espacio le puedo dar una **representación** matemática. Tal vez en un futuro cercano la idea de construir túneles estelares y máquinas del tiempo se vuelva un tema fundamental **para** la raza humana.

---

<sup>7</sup>El principio de autoconsistencia (Novikov y Frolov 1989, Friedman et al. 1990) podría enunciarse diciendo que las únicas soluciones a las leyes físicas que pueden darse localmente son aquellas **globalmente** consistentes.

# Bibliografía

- [1] M. Visser, *Lorentzian Wormholes*, AIP Series in Computational and Applied Mathematical Physics, EU, 1996.
- [2] M.S. Morris y k.S. Thorne , *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. Am.J.Phys, Vol 56 No 5 395-413, 1987.
- [3] R.H.Prince , *General relativity primer*. Am. J. Phys, 300-328, 1996.
- [4] R.W. Lindquist, *The Two-Body Problem in Geometrodynamics*, Annals of Physics, Vol 29, 304-331, 1964.
- [5] P.J.Peebles, *Principles of physical Cosmology*, Princenton series in physics, EU, 1993.
- [6] A.Linddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wileyand Sons, EU, 2003.
- [7] B. F. Schutz, *Afirst course in general relativity*, Cambridge University Press, EU, 1998.
- [8] S.Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, Inc., EU, 1972.
- [9] S.W.Hawking y F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of space-time*, Cambridge University Press, EU, 1973.
- [10] L.Landau y E.Lifshitz, *The classical theory of fields*,Pergamon Press, EU, 1989.
- [11] R.Adler, *introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, EU, 1975.
- [12] E.Borel, *Space and Time*, Macmillan, London, 1980.