UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

AMPLIACION DE TABLAS DE DIGITOS AL AZAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ERICK EMMANUEL ARNALDO OCADIZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. ARTURO HUGO NIEVA GOCHICOA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

Universidad Nacional
Autónoma de
México

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Ampliación de Tablas de Dígitos al Azar."

realizado por Erick Emmanuel Arnaldo Ocádiz

con número de cuenta 09851244-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Arturo Hugo Nieva Gochicoa	
Propietario	Act. David Reyes Morales	
Propietario	Act. Jaime Vázquez Alamilla	
Suplente	Dr. Luis Antonio Rincón Solís	
Suplente	M. en C. Agustín Ontiveros Pineda	

Consejo Departamental de
Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD ... IAS

Agradecimientos

Al Profesor Arturo Nieva, quien siempre tuvo tiempo, paciencia y palabras de aliento para guiarme y ayudarme a terminar este trabajo. Gracias Profe por toda su enseanza, su apoyo incondicional y sobre todo por la confianza que ha depositado en mí.

A mis padres, que me dieron la vida y han dado la suya para hacerme llegar hasta donde estoy. Gracias por enseñarme con su ejemplo a ser una persona de bien, por perdonar todos mis errores, por aceptarme como soy, por sus consejos, por sus regaños y sobre todo gracias por ser los mejores padres y amigos que alguien puede tener. Espero nunca defraudarlos y que siempre se sientan orgullosos de que sea su hijo.

A Conchita, el amor de mi vida, por darme fuerza y valor para perseguir y alcanzar mis sueños, por la inmensa felicidad y amor que siempre me has dado, por tu hermosa sonrisa que me llena de valor y esperanza, por tus ojos que iluminan mi vida y que cada vez que me miran me hacen sentir el hombre más afortunado del mundo, por estar siempre a mi lado y haberme acompañado y ayudado durante todo este camino. Perdóname ya que no me alcanzan las palabras para expresar todo lo que siento, pero finalmente como tú me has dicho, valen más los actos y espero algún día demostrarte lo agradecido que estoy por que seas parte de mí y por amarme a pesar de todo.

A mis hermanas, Olivia y Andrea, que aunque no lo demuestro las quiero con toda mi alma y siempre voy a cuidar de ustedes. Gracias por su cariño, apoyo y comprensión y espero que sepan que siempre que me necesiten estaré a su lado.

A mis sobrinos que han llenado de felicidad a la familia y que son un inmenso orgullo para mí.

A Oscar, el buen Tona, quien me ha acompañado desde que tengo memoria. Sabes que eres más que mi mejor amigo y mi hermano, mi cómplice, mi aliado, mi compañero en las buenas y en las malas. Gracias por todo tu apoyo, sin tu ayuda me hubiera sido mucho más difícil completar este recorrido y sobre todo hubiese sido enormemente más aburrido. ¡ Salud carnal!

A Salvador, que aunque lo conozco desde los 12 años, no fue hasta estos últimos 7 que descubrí a un excelente amigo. Gracias gordo por escucharme, por confiar en mí, por brindar conmigo y por estar siempre en las buenas y en las malas.

A mis abuelos, que son el fundamento de la gran familia a la cual tengo la fortuna y el privilegio de pertenecer.

A mis tíos y tías, que de igual forma los considero y quiero a todos y cada uno como mis segundos padres.

A mis primos y primas, que a pesar de ser todos tan distintos, somos un gran grupo de hermanos y ojalá nos mantengamos unidos toda la vida.

A todos los amigos y amigas que he hecho a lo largo de mi vida, por todos los momentos que hemos llegado a compartir, por su apoyo y porque sé que en cualquier momento puedo contar con ustedes.

A todos mis maestros, que me han brindado su conocimiento y han sido parte fundamental en mi formación.

A la Facultad de Ciencias y a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme dado la oportunidad de formarme como actuario con los mejores profesores y en la mejor universidad del país.

Finalmente quiero más que agradecer, dedicar este trabajo a Victor Manuel Ocádiz Arriaga, un niño que con toda su fuerza y valentía, ha sido mi mayor fuente de inspiración. Gracias Victor por enseñarme a no darme por vencido, que nada es imposible por difícil que parezca y que cada instante hay que dar lo mejor de uno mismo. ¡ Siempre te recordaré!

Ampliación de Tablas de Dígitos al Azar

Erick Emmanuel Arnaldo Ocádiz

Índice General

Introducción

El tema central de este trabajo de tesis es el estudio, a través de observaciones, de las propiedades probabilísticas de la función $R = (X+Y)$ *mod 10*, las cuales están demostradas teóricamente en la tesis profesional "*Construcción de Tablas de Dígitos al Azar Usando la Función $R = (X+Y)$ mod 10*" de David Reyes, 1995. Así como la utilización de dicha función para la creación de nuevas tablas de dígitos aleatorios o la ampliación de las ya existentes.

En el capítulo 1 se describe el mecanismo empleado para obtener los dígitos de las tablas de números aleatorios que aparecen en el libro *Tables of Random Sampling Numbers*, publicado por los ingleses M. B. Kendall y B. Babington Smith en el año de 1939. También se muestran en este capítulo, las propiedades que presentan los colectivos de dígitos de estas tablas, tales como:

i) Regularidades de las frecuencias de los resultados de los colectivos, tomando los dígitos individualmente, por parejas, etc. y sin importar de que manera se formen los colectivos (por columnas, hileras, diagonales, espirales, etc.).

ii) Independencia estadística.

iii) Cumplen la desigualdad de Chebishev.

iv) Satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

En el capítulo 2 se hace una pequeña presentación del Teorema de David Reyes, en el cuál se muestran algunas propiedades de dicha función, la manera en que se deben elegir las variables X y Y, así como su aplicación en la construcción de tablas de dígitos aleatorios.

En el capítulo 3 se explica cómo se construyen las nuevas tablas de dígitos empleando la función $R = (X + Y)$ *mod* 10, obteniendo la variable X de los dígitos de las tablas de números aleatorios de Kendall y Babington Smith y la variable Y de las cifras decimales de π o de las de e. De esta manera construimos 10 colectivos de 100000 dígitos cada uno, los cuales se utilizan en el siguiente capítulo para realizar las observaciones correspondientes.

En el capítulo 4 verificamos que los colectivos de dígitos de las nuevas tablas, al realizar las mismas observaciones aplicadas a las tablas de Kendall y Babington Smith en el capítulo 1 y tras comparar los resultados obtenidos, se comportan de la misma manera.

La intención de este trabajo ha sido, como ya se ha mencionado, la corroboración de los resultados obtenidos por David Reyes en su tesis profesional; pero también tiene el objetivo de que los estudiantes de los cursos de Teoría de la Probabilidad y Procesos Estocásticos que deseen comprobar los principales resultados de estas dos ramas de la matemática, cuenten con una herramienta aún más amplia que las tablas de números aleatorios de Kendall y Babington Smith para poder diseñar sus propios experimentos para aclarar sus dudas, validar o refutar sus conjeturas o simplemente con el fin de responder experimentalmente preguntas que tengan acerca de los fenómenos aleatorios con regularidades estadísticas. Así como para aquellas personas que utilizan los números pseudoaleatorios (sucesiones deterministas generadas mediante un algoritmo de congruencia lineal) para realizar simulaciones, proporcionarles una alternativa más confiable y con un tiempo de ejecución bastante similar.

En los apéndices se muestran los programas utilizados a lo largo del presente trabajo, en caso de que le sean útiles al lector.

Capítulo 1

Comportamiento de los colectivos de dígitos de las tablas de números al azar de Kendall y Babington Smith

Existen distintos mecanismos para realizar extracciones al azar de la colección de dígitos 0, 1, ... , 9; por ejemplo utilizando pelotas de plástico, del mismo tamaño, forma y textura, numeradas del 0 al 9 y depositadas en un recipiente opaco para impedir ver el número que tienen, procediendo a revolverlas bien para luego sacar una de ellas anotando el número con el que está marcada y regresándola al recipiente. Esta operación se repite tantas veces como se desee, formando un colectivo de dígitos. Este mismo experimento se puede realizar utilizando papeles numerados, observando los números finales de las placas de automóviles que transitan, consultando los dos últimos dígitos que aparcen en los números telefónicos de un directorio, etc. Estos mecanismos describen el experimento $\mathcal{E}$.

Para que los resultados de este experimento puedan ser considerados como útiles, es necesario realizar un número de repeticiones bastante considerable, además de que estas formas de obtener dígitos aleatorios dependen siempre de cierta manipulación. Es por eso que los ingleses M. B. Kendall y B. Babington Smith, consideraron un mecanismo diferente para obtener números aleatorios. Ellos construyeron una ruleta muy bien calibrada, con diez zonas del mismo tamaño y forma.

Un motor se encargaba de girar la ruleta y un dispositivo cortaba el movimiento del motor deteniendo así la ruleta. En 1937 Kendall y Babington Smith realizaron 5000 extracciones; al año siguiente, en 1938, utilizando este mismo mecanismo, realizaron 100000 ejecuciones del experimento que consiste en extraer un dígito entre 0 y 9, con los cuales construyeron las tablas que aparecen en su libro Tables of Random Sampling Numbers[1] [1].

1.1 Regularidades estadísticas de los colectivos de resultados.

Sea $\mathcal{E}$ = el experimento que consiste en extraer un número del espacio de resultados $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$ con el mecanismo utilizado por Kendall y Babington Smith. Formamos así nuestra pareja $(\mathcal{E}, X)$, experimento-espacio de resultados.

La sucesión de resultados $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ obtenidos en las tablas de números aleatorios de Kendall y Babington Smith, la denominaremos como el *colectivo de resultados* de la pareja $(\mathcal{E}, X)$.

Ahora consideremos un subconjunto A de X; si al ejecutar $\mathcal{E}$, el resultado obtenido x es tal que $x \in A$, diremos que A se realiza en esa ejecución; si por el contrario $x \notin A$, diremos que A no se realiza en dicha ejecución.

Evaluemos la ralización o no de A en una ejecución de $\mathcal{E}$ de la siguiente manera

$$\delta_i(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ se realiza en la ejecución i-ésima de } \mathcal{E}. \\ 0 & \text{si } A \text{ no se realiza en la ejecución i-ésima de } \mathcal{E}. \end{cases}$$

Así, al efectuar una corrida de ejecuciones de $\mathcal{E}$, formamos un nuevo colectivo de resultados $\delta_1(A)$,$\delta_2(A), \ldots$ que se obtiene de $(\mathcal{E}, X)$ con A, pero ahora con el espacio de resultados $\{0, 1\}$, denominado *colectivo de Bernoulli* de la pareja experimento-espacio de resultados $(\mathcal{E}, \{0, 1\})$.

La suma $\delta_1(A) + \delta_2(A) + ... + \delta_n(A)$ es igual a la cantidad de veces que se realizó A en n ejecuciones de $\mathcal{E}$, además

$$0 \leq \delta_1(A) + \delta_2(A) + ... + \delta_n(A) \leq n,$$

a este número se le llama *frecuencia acumulada* de realizaciones de A en n ejecuciones de $\mathcal{E}$. De estas desigualdades se deduce que

$$0 \leq \frac{\delta_1(A) + \delta_2(A) + ... + \delta_n(A)}{n} \leq 1;$$

este cociente es denominado *frecuencia relativa* de realizaciones de A en n ejecuciones de $\mathcal{E}$.

Si para un subconjunto A de X, $A \neq \phi$, $A \neq X$, existe un real p_A tal que

$$\frac{\delta_1(A) + ... + \delta_n(A)}{n} \approx p_A \qquad \forall \; n \text{ grande},$$

[1] Estas tablas fueron capturadas en disco por alumnos de la Facultad de Ciencias de la UNAM y están a disposición de profesores y alumnos en la página web http://www.dynamics.unam.edu/LaboratorioAleatoriedad

siendo p_A siempre el mismo número en cualquier colectivo de $(\mathcal{E}, X)$ que se obtenga experimentalmente, entonces diremos que los colectivos de resultados de $(\mathcal{E}, X)$ cumplen la *Ley Natural de los Números Grandes* o que tienen *regularidades estadísticas.*

A este número real p_A, lo llamaremos *frecuencia asintótica* de A y mide, cuantitativamente, qué tan frecuentemente se realiza A en cada número grande de ejecuciones de $\mathcal{E}$ [2].

Escojamos entonces un subconjunto de X, $A = \{d\}$, $d = 0, 1, \ldots, 9$ y denotemos por $\frac{n(A)}{n}$ la frecuencia relativa de realizaciones de A y observemos su comportamiento en los colectivos de dígitos de las Tablas de Kendall y Babington-Smith.

Tomemos primero colectivos de 1000 dígitos[3].

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 1000.

Tabla 7001-8000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.111	0.075	0.088	0.107	0.107	0.116	0.103	0.089	0.099	0.105

Tabla 24001-25000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.093	0.097	0.089	0.098	0.108	0.103	0.104	0.098	0.099	0.111

Tabla 47001-48000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.106	0.132	0.094	0.097	0.096	0.101	0.091	0.102	0.092	0.089

Tabla 54001-55000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.088	0.104	0.102	0.100	0.089	0.105	0.107	0.100	0.088	0.117

Tabla 87001-88000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.093	0.083	0.100	0.094	0.101	0.106	0.108	0.092	0.111	0.112

En todos y cada uno de los colectivos anteriores encontramos que para $n = 1000$, $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{1000}(A)}{1000} \approx \frac{1}{10}$.

Ahora observemos lo que sucede con colectivos de 10000 dígitos.

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 10000.

Tabla 1-10000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0973	0.0941	0.0993	0.1018	0.0987	0.1066	0.1024	0.0969	0.1010	0.1019

Tabla 20001-30000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0979	0.1014	0.0908	0.1013	0.1027	0.1046	0.0991	0.1035	0.0973	0.1014

[2] La teoría matemática utilizada a lo largo de este trabajo se encuentra en las notas del M. en C. Arturo Nieva[2].

[3] Las tablas de resultados de los colectivos observados, recibirán el nombre que corresponde a la posición que ocupan los dígitos del colectivo en la tabla de dígitos de Kendall y Babington-Smith. Por ejemplo, la Tabla 4001-5000 correspondería a los resultados obtenidos en el colectivo que va del dígito 4001 al 5000.

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 10000.

Tabla 40001-50000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1019	0.0995	0.1018	0.1002	0.0983	0.0999	0.0981	0.1032	0.0990	0.0981

Tabla 70001-80000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0996	0.1050	0.1029	0.0994	0.1009	0.0964	0.0942	0.0986	0.1029	0.1001

Tabla 90001-100000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1038	0.1026	0.0942	0.1042	0.1007	0.0974	0.0996	0.0976	0.0998	0.1001

En el caso de $n = 10000$, obtenemos también que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{10000}(A)}{10000} \approx \frac{1}{10}$.

Por último tomemos el colectivo total de 100000 dígitos de las tablas de números aleatorios de Kendall y Babington Smith.

Tabla de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 100000.

Tabla 1-100000

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10008	0.09924	0.09856	0.10049	0.09983	0.10124	0.09915	0.09961	0.09934	0.10246

Con $n = 100000$, $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{100000}(A)}{100000} \approx \frac{1}{10}$.

Entonces, observamos en cada uno de los colectivos que tomamos que $\frac{n(A)}{n} \approx \frac{1}{10}$, $\forall$ n grande. Por lo tanto, para $A = \{d\}$, con $d = 0, 1, \ldots, 9$; $\frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx p_A = \frac{1}{10}$.

A continuación tomemos los dígitos de las tablas anteriores, formando parejas y observemos el comportamiento de estos nuevos colectivos para verificar si de esta forma también tienen regularidades estadísticas. Sea A subconjunto de X tal que $A = \{(d_1, d_2)\}$, $d_1 = 0, 1, \ldots, 9$ y $d_2 = 0, 1, \ldots, 9$.

Comencemos con colectivos de 975 parejas de dígitos[4].

[4] Para los colectivos de parejas de dígitos, el tamaño de los mismos será: $n = 975$, 9750 y 97500. Esto se debe a la manera en que fueron construidos.

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 7001-8000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0103	0.0103	0.0113	0.0092	0.0154	0.0154	0.0123	0.0092	0.0113	0.0072
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0082	0.0062	0.0082	0.0092	0.0103	0.0051	0.0133	0.0041	0.0051	0.0072
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0103	0.0062	0.0082	0.0092	0.0082	0.0041	0.0072	0.0092	0.0113	0.0113
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0164	0.0113	0.0103	0.0082	0.0021	0.0123	0.0092	0.0103	0.0103	0.0113
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0133	0.0062	0.0082	0.0133	0.0164	0.0133	0.0072	0.0113	0.0072	0.0103
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0103	0.0051	0.0103	0.0113	0.0154	0.0123	0.0133	0.0103	0.0154	0.0133
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0113	0.0103	0.0164	0.0082	0.0103	0.0103
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0103	0.0051	0.0082	0.0082	0.0072	0.0144	0.0051	0.0103	0.0103	0.0113
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0082	0.0072	0.0113	0.0174	0.0082	0.0154	0.0082	0.0062	0.0092	0.0092
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0123	0.0082	0.0031	0.0113	0.0123	0.0133	0.0123	0.0092	0.0092	0.0154

Tabla 24001-25000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0082	0.0123	0.0103	0.0062	0.0041	0.0082	0.0123	0.0051	0.0133	0.0113
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0082	0.0113	0.0082	0.0082	0.0113	0.0154	0.0082	0.0103	0.0103	0.0051
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0072	0.0123	0.0031	0.0103	0.0103	0.0082	0.0133	0.0082	0.0082	0.0072
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0092	0.0062	0.0103	0.0103	0.0144	0.0092	0.0103	0.0082	0.0092	0.0133
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0103	0.0103	0.0103	0.0072	0.0133	0.0123	0.0133	0.0133	0.0103
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0113	0.0092	0.0082	0.0072	0.0123	0.0123	0.0072	0.0123	0.0092	0.0133
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0072	0.0103	0.0103	0.0103	0.0113	0.0103	0.0103	0.0113	0.0103	0.0123
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0072	0.0051	0.0062	0.0123	0.0082	0.0133	0.0133	0.0092	0.0103	0.0144
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0062	0.0092	0.0123	0.0103	0.0123	0.0051	0.0092	0.0123	0.0072	0.0133
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0154	0.0113	0.0092	0.0103	0.0164	0.0103	0.0103	0.0062	0.0092	0.0123

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 975$.

Tabla 47001-48000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0154	0.0133	0.0082	0.0133	0.0113	0.0082	0.0133	0.0062	0.0103	0.0051
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0195	0.0123	0.0103	0.0113	0.0154	0.0215	0.0113	0.0092	0.0103	0.0123
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0133	0.0154	0.0123	0.0092	0.0072	0.0092	0.0051	0.0092	0.0051	0.0072
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0103	0.0113	0.0133	0.0072	0.0092	0.0092	0.0082	0.0123	0.0092	0.0072
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0051	0.0164	0.0062	0.0123	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0062	0.0144
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0123	0.0092	0.0082	0.0103	0.0113	0.0113	0.0113	0.0113	0.0103	0.0051
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0133	0.0092	0.0082	0.0092	0.0082	0.0072	0.0113	0.0082	0.0072
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0082	0.0133	0.0154	0.0103	0.0123	0.0072	0.0062	0.0072	0.0103	0.0113
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0103	0.0133	0.0051	0.0062	0.0062	0.0092	0.0103	0.0123	0.0123	0.0072
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0041	0.0133	0.0062	0.0092	0.0062	0.0072	0.0082	0.0113	0.0113	0.0113

Tabla 54001-55000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0103	0.0082	0.0092	0.0062	0.0092	0.0123	0.0103	0.0092	0.0051	0.0072
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0103	0.0072	0.0103	0.0113	0.0041	0.0133	0.0154	0.0123	0.0113	0.0103
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0133	0.0062	0.0123	0.0103	0.0082	0.0164	0.0041	0.0113	0.0072	0.0133
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0082	0.0164	0.0092	0.0062	0.0031	0.0031	0.0113	0.0174	0.0092	0.0174
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0082	0.0062	0.0072	0.0133	0.0103	0.0103	0.0092	0.0062	0.0123	0.0051
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0062	0.0133	0.0072	0.0092	0.0092	0.0123	0.0133	0.0092	0.0103	0.0164
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0082	0.0123	0.0123	0.0164	0.0113	0.0031	0.0113	0.0092	0.0092	0.0123
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0062	0.0123	0.0144	0.0082	0.0144	0.0082	0.0082	0.0092	0.0072	0.0113
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0062	0.0072	0.0082	0.0092	0.0103	0.0103	0.0123	0.0041	0.0082	0.0113
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0103	0.0144	0.0123	0.0103	0.0082	0.0154	0.0133	0.0103	0.0082	0.0133

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.
Tabla 87001-88000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0072	0.0072	0.0133	0.0072	0.0113	0.0133	0.0113	0.0041	0.0072	0.0103
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0113	0.0082	0.0082	0.0041	0.0082	0.0082	0.0123	0.0082	0.0062	0.0082
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0103	0.0062	0.0092	0.0174	0.0072	0.0092	0.0133	0.0092	0.0133	0.0072
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0051	0.0062	0.0164	0.0072	0.0103	0.0103	0.0092	0.0062	0.0133	0.0092
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0062	0.0082	0.0062	0.0123	0.0051	0.0082	0.0123	0.0144	0.0174
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0082	0.0072	0.0133	0.0103	0.0123	0.0103	0.0103	0.0072	0.0144	0.0123
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0174	0.0144	0.0062	0.0072	0.0092	0.0103	0.0113	0.0144	0.0103
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0123	0.0062	0.0031	0.0123	0.0082	0.0123	0.0082	0.0113	0.0072	0.0103
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0062	0.0123	0.0103	0.0133	0.0113	0.0144	0.0082	0.0123	0.0092	0.0123
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0113	0.0072	0.0041	0.0123	0.0123	0.0113	0.0174	0.0092	0.0103	0.0174

Podemos observar en los colectivos anteriores, de tamaño $n = 975$, que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{975}(A)}{975} \approx \frac{1}{100}$, aunque en algunos casos pareciera no ser así, se tiene una aproximación menor o igual a 0.0115, es decir, $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0115$.

Veamos cómo se comportan los colectivos de parejas de dígitos cuando $n = 9750$.

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0082	0.0097	0.0097	0.0103	0.0098	0.0105	0.0103	0.0087	0.0099	0.0099
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0106	0.0074	0.0108	0.0103	0.0086	0.0094	0.0093	0.0095	0.0097	0.0084
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0091	0.0082	0.0114	0.0122	0.0099	0.0099	0.0106	0.0088	0.0087	0.0097
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0102	0.0116	0.0105	0.0098	0.0084	0.0106	0.0102	0.0102	0.0101	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0083	0.0093	0.0099	0.0114	0.0094	0.0105	0.0092	0.0088	0.0125	0.0090
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0113	0.0085	0.0088	0.0091	0.0114	0.0109	0.0116	0.0107	0.0117	0.0133
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0088	0.0103	0.0087	0.0101	0.0110	0.0133	0.0124	0.0089	0.0090	0.0099
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0094	0.0095	0.0091	0.0088	0.0105	0.0115	0.0089	0.0096	0.0084	0.0111
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0107	0.0092	0.0101	0.0106	0.0092	0.0109	0.0101	0.0115	0.0099	0.0093
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0101	0.0095	0.0105	0.0088	0.0102	0.0101	0.0103	0.0109	0.0110	0.0108

Tabla 20001-30000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0082	0.0097	0.0097	0.0103	0.0098	0.0105	0.0103	0.0087	0.0099	0.0099
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0106	0.0074	0.0108	0.0103	0.0086	0.0094	0.0093	0.0095	0.0097	0.0084
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0091	0.0082	0.0114	0.0122	0.0099	0.0099	0.0106	0.0088	0.0087	0.0097
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0102	0.0116	0.0105	0.0098	0.0084	0.0106	0.0102	0.0102	0.0101	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0083	0.0093	0.0099	0.0114	0.0094	0.0105	0.0092	0.0088	0.0125	0.0090
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0113	0.0085	0.0088	0.0091	0.0114	0.0109	0.0116	0.0107	0.0117	0.0133
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0088	0.0103	0.0087	0.0101	0.0110	0.0133	0.0124	0.0089	0.0090	0.0099
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0094	0.0095	0.0091	0.0088	0.0105	0.0115	0.0089	0.0096	0.0084	0.0111
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0107	0.0092	0.0101	0.0106	0.0092	0.0109	0.0101	0.0115	0.0099	0.0093
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0101	0.0095	0.0105	0.0088	0.0102	0.0101	0.0103	0.0109	0.0110	0.0108

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 40001-50000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0124	0.0098	0.0091	0.0103	0.0113	0.0109	0.0097	0.0097	0.0092	0.0093
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0088	0.0078	0.0096	0.0103	0.0102	0.0115	0.0115	0.0093	0.0094	0.0111
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0099	0.0112	0.0108	0.0094	0.0093	0.0096	0.0102	0.0112	0.0110	0.0090
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0088	0.0113	0.0102	0.0101	0.0101	0.0093	0.0097	0.0110	0.0093	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0099	0.0097	0.0102	0.0104	0.0109	0.0082	0.0105	0.0096	0.0092	0.0095
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0115	0.0104	0.0099	0.0097	0.0089	0.0105	0.0092	0.0099	0.0097	0.0098
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0107	0.0096	0.0098	0.0105	0.0087	0.0111	0.0092	0.0101	0.0105	0.0088
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0092	0.0101	0.0113	0.0107	0.0108	0.0104	0.0088	0.0110	0.0108	0.0104
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0109	0.0089	0.0108	0.0105	0.0092	0.0088	0.0101	0.0110	0.0101	0.0088
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0097	0.0111	0.0108	0.0085	0.0093	0.0099	0.0086	0.0101	0.0093	0.0106

Tabla 70001-80000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0124	0.0098	0.0091	0.0103	0.0113	0.0109	0.0097	0.0097	0.0092	0.0093
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0088	0.0078	0.0096	0.0103	0.0102	0.0115	0.0115	0.0093	0.0094	0.0111
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0099	0.0112	0.0108	0.0094	0.0093	0.0096	0.0102	0.0112	0.0110	0.0090
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0088	0.0113	0.0102	0.0101	0.0101	0.0093	0.0097	0.0110	0.0093	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0099	0.0097	0.0102	0.0104	0.0109	0.0082	0.0105	0.0096	0.0092	0.0095
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0115	0.0104	0.0099	0.0097	0.0089	0.0105	0.0092	0.0099	0.0097	0.0098
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0107	0.0096	0.0098	0.0105	0.0087	0.0111	0.0092	0.0101	0.0105	0.0088
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0092	0.0101	0.0113	0.0107	0.0108	0.0104	0.0088	0.0110	0.0108	0.0104
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0109	0.0089	0.0108	0.0105	0.0092	0.0088	0.0101	0.0110	0.0101	0.0088
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0097	0.0111	0.0108	0.0085	0.0093	0.0099	0.0086	0.0101	0.0093	0.0106

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 9750$.

Tabla 90001-100000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0097	0.0112	0.0096	0.0084	0.0106	0.0102	0.0110	0.0114	0.0112	0.0103
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0103	0.0120	0.0098	0.0113	0.0090	0.0103	0.0108	0.0087	0.0104	0.0104
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0109	0.0091	0.0083	0.0111	0.0102	0.0111	0.0081	0.0091	0.0089	0.0077
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0097	0.0106	0.0096	0.0108	0.0116	0.0095	0.0114	0.0102	0.0108	0.0099
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0115	0.0112	0.0103	0.0104	0.0078	0.0092	0.0118	0.0087	0.0092	0.0109
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0120	0.0098	0.0091	0.0103	0.0114	0.0086	0.0080	0.0080	0.0101	0.0098
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0109	0.0097	0.0089	0.0097	0.0092	0.0097	0.0102	0.0112	0.0094	0.0102
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0107	0.0096	0.0085	0.0103	0.0089	0.0098	0.0093	0.0105	0.0104	0.0098
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0096	0.0097	0.0092	0.0103	0.0121	0.0082	0.0101	0.0105	0.0097	0.0105
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0089	0.0104	0.0104	0.0126	0.0095	0.0103	0.0090	0.0093	0.0095	0.0102

En los colectivos de tamaño $n = 9750$, nuevamente observamos que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx \frac{1}{100}$, pero esta vez con una mejor aproximación, siendo esta menor o igual a 0.0033. Entonces, $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0033$.

Para $n = 97500$ parejas de dígitos, las frecuencias relativas son:

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 97500.
Tabla 1-100000

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0102	0.0097	0.0100	0.0098	0.0099	0.0103	0.0101	0.0103	0.0097	0.0101
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0096	0.0096	0.0100	0.0105	0.0096	0.0100	0.0100	0.0098	0.0098	0.0106
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0098	0.0098	0.0099	0.0107	0.0094	0.0098	0.0096	0.0097	0.0099	0.0099
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0098	0.0106	0.0099	0.0100	0.0103	0.0104	0.0098	0.0100	0.0098	0.0101
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0103	0.0097	0.0100	0.0099	0.0096	0.0100	0.0100	0.0100	0.0102	0.0101
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0107	0.0101	0.0096	0.0098	0.0105	0.0102	0.0098	0.0098	0.0103	0.0104
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0094	0.0100	0.0098	0.0098	0.0099	0.0104	0.0102	0.0099	0.0100	0.0099
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0105	0.0099	0.0096	0.0096	0.0101	0.0102	0.0096	0.0102	0.0097	0.0101
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0097	0.0095	0.0093	0.0101	0.0107	0.0097	0.0099	0.0102	0.0100	0.0105
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0102	0.0104	0.0105	0.0101	0.0098	0.0103	0.0102	0.0101	0.0101	0.0106

Para el colectivo con $n = 97500$ parejas de dígitos, también $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{97500}(A)}{97500} \approx \frac{1}{100}$, con $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0007$.

Entonces, podemos concluir que tomando colectivos de parejas de dígitos de tamaño $n = 975, 9750, 97500$, las frecuencias relativas de estas parejas, tienen una muy buena aproximación a $\frac{1}{100}$, es decir, $\frac{n(A)}{n} \approx \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, siendo este número la frecuencia asintótica p_A, con $A = \{(d_1, d_2)\}$. Además observamos que conforme n es más grande, se tiene una mejor aproximación a $\frac{1}{100}$, i.e., $\left|\frac{n(A)}{n} - p_A\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por lo tanto, sin importar en qué orden se tomen los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith para formar los colectivos, ya sea individualmente o por parejas, estos colectivos de dígitos presentan *regularidades estadísticas*, es decir,

$$\frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx p_A, \ \ \forall\, n \text{ grande.}$$

1.2 Independencia estadística.

En esta sección veremos una medición de la independencia que presentan los dígitos en los colectivos de Kendall y Babington-Smith, es decir, que la aparición de un dígito, no influye en el resultado siguiente. Se utilizará la siguiente notación:

$n(d_2 \mid d_1)$ la frecuencia con que aparece un dígito d_2 dado que en la extracción anteriór apareció d_1, $d_1, d_2 = 0, 1, \ldots, 9$. Donde $n(d_2 \mid d_1) = \frac{n(d_1,d_2)}{n(d_1)}$.

Comenzaremos con los colectivos de 10000 dígitos y los de 9750 parejas de dígitos formadas con estos mismos[5].

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.082	0.098	0.098	0.103	0.099	0.105	0.103	0.087	0.100	0.100
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.109	0.077	0.112	0.106	0.089	0.098	0.097	0.099	0.101	0.087
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.090	0.081	0.112	0.120	0.098	0.098	0.104	0.087	0.086	0.096
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.097	0.111	0.100	0.094	0.081	0.101	0.097	0.097	0.096	0.098
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.082	0.092	0.098	0.112	0.093	0.103	0.091	0.087	0.124	0.089
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.103	0.078	0.081	0.083	0.104	0.099	0.106	0.098	0.107	0.122
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.084	0.098	0.083	0.096	0.104	0.127	0.118	0.085	0.086	0.095
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.095	0.096	0.092	0.089	0.105	0.116	0.090	0.097	0.085	0.111
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.103	0.089	0.097	0.102	0.089	0.105	0.097	0.111	0.096	0.090
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.096	0.091	0.100	0.084	0.097	0.096	0.098	0.104	0.105	0.103

[5] No se comienza con los colectivos de 1000 dígitos, ya que la frecuencia de las parejas de dígitos formadas con estos colectivos es muy pequeña.

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 20001-30000

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.097	0.096	0.091	0.089	0.086	0.105	0.097	0.116	0.097	0.099
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.102	0.115	0.093	0.104	0.093	0.097	0.094	0.096	0.089	0.100
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.093	0.100	0.083	0.098	0.106	0.113	0.088	0.109	0.091	0.088
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.108	0.096	0.084	0.095	0.099	0.100	0.098	0.094	0.107	0.099
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.083	0.096	0.095	0.102	0.080	0.108	0.116	0.107	0.096	0.088
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.100	0.114	0.078	0.104	0.098	0.100	0.082	0.093	0.099	0.101
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.070	0.098	0.093	0.095	0.126	0.094	0.115	0.100	0.093	0.087
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.105	0.085	0.097	0.091	0.099	0.110	0.088	0.107	0.089	0.109
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.094	0.094	0.087	0.091	0.120	0.085	0.096	0.098	0.110	0.107
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.099	0.099	0.088	0.112	0.091	0.111	0.095	0.094	0.080	0.107

Tabla 40001-50000

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.119	0.094	0.087	0.098	0.108	0.104	0.093	0.093	0.088	0.089
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.086	0.076	0.094	0.101	0.099	0.113	0.113	0.091	0.092	0.109
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.095	0.107	0.103	0.090	0.089	0.092	0.097	0.107	0.105	0.086
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.086	0.110	0.099	0.098	0.098	0.091	0.095	0.107	0.091	0.100
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.099	0.097	0.101	0.103	0.108	0.081	0.104	0.096	0.092	0.095
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.112	0.101	0.097	0.095	0.087	0.102	0.090	0.097	0.095	0.096
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.106	0.096	0.098	0.104	0.087	0.110	0.092	0.100	0.104	0.088
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.087	0.095	0.107	0.101	0.102	0.098	0.083	0.104	0.102	0.098
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.107	0.088	0.106	0.103	0.091	0.087	0.099	0.108	0.099	0.087
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.097	0.110	0.107	0.085	0.093	0.099	0.086	0.100	0.093	0.105

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 70001-80000

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.082	0.099	0.107	0.096	0.100	0.101	0.093	0.102	0.101	0.095
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.093	0.098	0.094	0.110	0.093	0.095	0.092	0.089	0.105	0.110
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.102	0.112	0.103	0.102	0.091	0.082	0.097	0.087	0.099	0.102
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.103	0.090	0.105	0.105	0.102	0.105	0.072	0.109	0.099	0.093
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.108	0.107	0.100	0.085	0.097	0.102	0.080	0.105	0.105	0.087
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.101	0.092	0.096	0.090	0.094	0.091	0.096	0.099	0.119	0.089
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.097	0.098	0.099	0.086	0.119	0.087	0.091	0.105	0.084	0.102
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.101	0.109	0.096	0.114	0.093	0.101	0.098	0.077	0.089	0.086
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.093	0.110	0.087	0.100	0.094	0.089	0.096	0.091	0.104	0.108
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.101	0.107	0.110	0.076	0.100	0.091	0.091	0.095	0.104	0.106

Tabla 90001-100000

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.092	0.105	0.091	0.079	0.099	0.095	0.103	0.107	0.105	0.096
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.097	0.114	0.094	0.107	0.086	0.097	0.102	0.083	0.098	0.098
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.113	0.094	0.086	0.115	0.105	0.115	0.084	0.094	0.092	0.080
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.091	0.099	0.090	0.101	0.108	0.089	0.107	0.095	0.101	0.093
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.111	0.108	0.099	0.100	0.075	0.089	0.114	0.084	0.089	0.105
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.120	0.099	0.091	0.103	0.114	0.086	0.080	0.080	0.101	0.099
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.106	0.095	0.087	0.095	0.090	0.095	0.099	0.109	0.092	0.099
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.107	0.096	0.085	0.102	0.089	0.098	0.093	0.105	0.103	0.098
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.094	0.095	0.090	0.100	0.118	0.080	0.098	0.102	0.095	0.102
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.087	0.101	0.101	0.123	0.093	0.100	0.088	0.091	0.093	0.099

Con $n = 10000$, se observa que $n(d_2 \mid d_1) = \frac{n(d_1,d_2)}{n(d_1)} \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$.

Por último observemos como se comportan con $n = 100000$, con el colectivo de 100000 dígitos de Kendall y Babington Smith y las 97500 parejas formadas con estos dígitos.

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.0991	0.0946	0.0975	0.0957	0.0961	0.1002	0.0985	0.1000	0.0943	0.0982
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.0945	0.0946	0.0979	0.1034	0.0945	0.0981	0.0981	0.0964	0.0963	0.1039
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.0972	0.0968	0.0976	0.1061	0.0933	0.0965	0.0953	0.0955	0.0978	0.0977
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.0947	0.1024	0.0963	0.0973	0.0996	0.1011	0.0950	0.0966	0.0947	0.0976
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.1003	0.0948	0.0981	0.0970	0.0935	0.0974	0.0976	0.0974	0.0997	0.0989
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.1026	0.0976	0.0927	0.0940	0.1011	0.0980	0.0948	0.0939	0.0994	0.1006
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.0924	0.0982	0.0963	0.0967	0.0974	0.1019	0.0998	0.0970	0.0979	0.0971
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.1025	0.0971	0.0940	0.0938	0.0990	0.0998	0.0939	0.1001	0.0945	0.0986
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.0950	0.0935	0.0916	0.0990	0.1047	0.0952	0.0969	0.0998	0.0982	0.1033
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.0975	0.0992	0.0995	0.0964	0.0935	0.0981	0.0967	0.0961	0.0957	0.1012

Para $n = 100000$, encontramos también que $n(d_2 \mid d_1) = \frac{n(d_1,d_2)}{n(d_1)} \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$.

Con estos resultados corroboramos que con $n = 10000$ y $n = 100000$, las frecuencias de un dígito condicionado a otro $n(d_2 \mid d_1)$, tienen un valor cercano a $\frac{1}{10}$ que como se vio en la sección anterior, es la frecuencia asintótica de un dígito, por lo tanto se afirma que la aparición de un dígito no afecta ni influye en el siguiente resultado. Por lo tanto, podemos concluir que los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith son idependientes unos de otros, diremos entonces que tienen independencia estadística[6].

[6] No confundir con la medición de independencia que brindan las diferentes pruebas estadísticas conocidas.

1.3 Teoría débil de los espacios de colectivos de Bernoulli (espacios de medida normal producto de n copias de un espacio de medida de Bernoulli).

Consideremos un espacio de medida normal de Bernoulli,

$$(X = \{0, 1\}, \mathcal{P}(X), \mu)$$

tal que

$$\mu(\{1\}) = p, 0 < p < 1$$

y

$$\mu(\{0\}) = 1 - p,$$

$\therefore$

$$0 < 1 - p < 1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos construir el espacio de medida normal, llamado *espacio de medida producto de n copias* de ese espacio de Bernoulli:

1.

$$X_n = \left\{(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) : \delta_i = \{^0_1, i = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

esto es, el espacio de resultados consiste de todas las sucesiones o vectores de n términos, los cuales sólo pueden ser 1's ó 0's.

2. Como álgebra de subconjuntos de X_n tomaremos a $\mathcal{P}(X_n)$.

3. La medida μ_n se define como

i)

$$\mu_n(\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}) = p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} q^{n-(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)}.$$

donde q es $1-p$; nótese que la medida μ_n del conjunto que consta sólamente del vector

$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$$

es igual a p elevado al número de 1's que aparecen en tal vector, multiplicado por q a la número de 0's que aparecen en el mismo vector.

ii) Con lo anterior, definimos

$$\begin{aligned}\mu_n(A) &= \sum_{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)\in A} \mu_n(\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}), \forall A \in \mathcal{P}(X_n)\\ &= \sum_{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)\in A} p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n} q^{n-(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)}.\end{aligned}$$

Con estos tres elementos tenemos un espacio de medida normal el cual se denomina *espacio de medida normal producto de n copias de un espacio de medida de Bernoulli*.

Con el fin de interpretar geométricamente varios de los resultados que se verán a continuación conviene tener una representación gráfica de los elementos de X_n. La gráfica de un

$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$$

estará dada por la sucesión de puntos

$$(k, \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k)\,,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

en un plano cartesiano; nótese que la gráfica de esta sucesión de puntos no es decreciente.

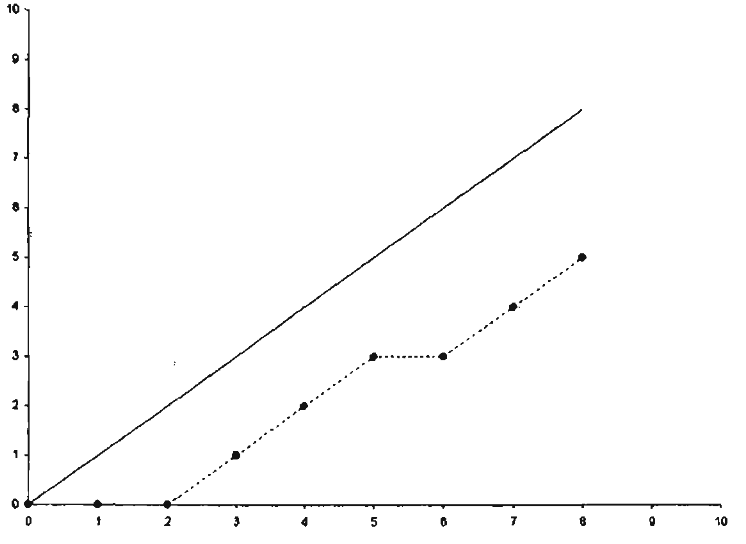


Figura 1

La gráfica de una sucesión de puntos representa una y sólo una sucesión de las nuestras; por ejemplo, la sucesión de puntos de la Figura 1, representa la sucesión

$$(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$$

en X_8.

Es claro que

i) la gráfica de cada elemento de X_n se encuentra en la zona delimitada por

$$y \leq x,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ ;$$

ii) la altura de la gráfica de

$$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

para $x = n$ es

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n,$$

precisamente el número de 1's de tal vector. En el ejemplo tal punto de $\mathbf{R}^2$ es

$$(8, 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1).$$

Ahora necesitaremos ciertos subconjuntos especiales de X_n,

$$A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_k^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$$

los cuales se definen como

$$A_k^{(n)} = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) : \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = k\},\ k = 0, 1, \dots, n\ ;$$

$A_k^{(n)}$ es el conjunto de todos los vectores de n componentes o sucesiones de n términos de 0's y 1's que tienen sólo k 1's ; en términos geométricos: aquellos vectores o sucesiones cuyas gráficas, para $x = n$, terminan en $y = k$.

Nótese que

i) $A_k^{(n)} \neq \varnothing$, $\forall\ k = 0, 1, \dots, n$;

ii) $A_i^{(n)} A_j^{(n)} = \varnothing$, si $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,

iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k^{(n)} = X_n$,

o sea, que $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_k^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ es una partición de X_n.

Por otro lado

$$\#\left(A_k^{(n)}\right) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,$$

así que:

$$\begin{aligned}\#\left(A_0^{(n)}\right) + \#\left(A_1^{(n)}\right) + \ldots + \#\left(A_n^{(n)}\right) &= \#(X_n) \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} &= 2^n.\end{aligned}$$

En cuanto a la medida μ_n de $A_k^{(n)}$, se tiene

$$\begin{aligned}\mu_n\left(A_k^{(n)}\right) &= \sum_{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in A_k^{(n)}} p^{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n} q^{n - (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)}. \\ &= \sum_{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in A_k^{(n)}} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

y por la aditividad de μ_n

$$\mu_n\left(A_0^{(n)}\right)+\mu_n\left(A_1^{(n)}\right)+\ldots+\mu_n\left(A_k^{(n)}\right)+\ldots+\mu_n\left(A_n^{(n)}\right)=\mu_n(X_n)$$

$\therefore$

$$\tbinom{n}{0}p^0q^n+\tbinom{n}{1}pq^{n-1}+\ldots+\tbinom{n}{k}p^kq^{n-k}+\ldots+\tbinom{n}{n}p^nq^0=1\ ;$$

nótese que el primer miembro de la igualdad es el desarrollo de $(p+q)^n$ y $p+q=1$.

Una colección de subconjuntos muy importante en esta teoría es aquella cuyos elementos son del tipo

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}=\sum_{p-\varepsilon<\frac{k}{n}<p+\varepsilon} A_k^{(n)}=\sum_{n(p-\varepsilon)<k<n(p+\varepsilon)} A_k^{(n)}\ ,\ \forall\ \varepsilon>0 \text{ fija };$$

las condiciones impuestas a las k, en las tres formas en que se han escrito, son las mismas. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}&=\left\{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n):\left|\tfrac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\\&=\left\{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n):p-\varepsilon<\tfrac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n}{n}<p+\varepsilon\right\}\\&=\{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n):n(p-\varepsilon)<\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n<n(p+\varepsilon)\}\end{aligned}$$

Existen dos observaciones que debemos hacer:

i) Si ε es muy pequeño, para que

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\neq\varnothing\ ,$$

n debe ser grande.

ii) Las sucesiones pertenecientes a este conjunto, por lo general, son difíciles de describir una por una. Sólo unas cuantas pueden ser descritas por algún algoritmo sencillo.

Es más, dados los primeros l términos de una de estas sucesiones, los $n-l$ restantes no quedan *determinados* por aquéllos, hecho que en la experiencia cotidiana significa *aleatoriedad*.

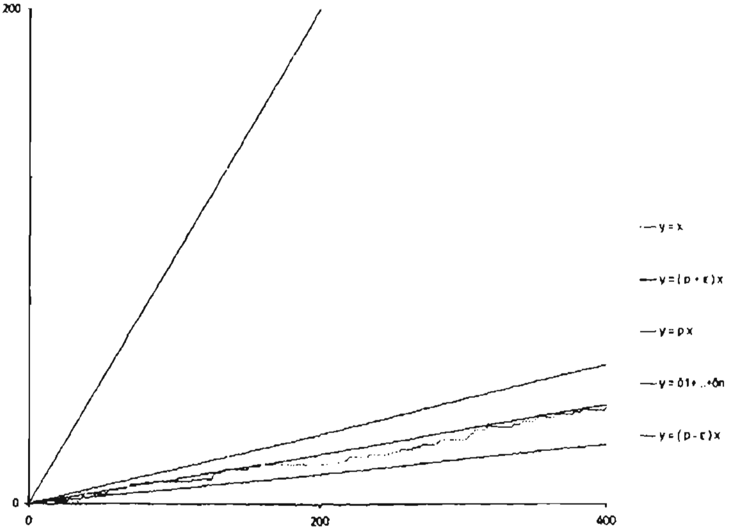


Figura 2

Esta situación se agudiza aun más para los elementos de todo X_n. Por ejemplo, ¿cómo puede describirse una sucesión obtenida por medio de, digamos $n = 100$ volados, si cuando sale águila ponemos 1 y si sale sol ponemos 0? Hay que decir, por ejemplo, "la componente 1 es 1, la componente 2 es 1, la componente 3 es 0, ... , la componente 100 es 0". No hay una fórmula corta o descripción de pocas palabras que especifique inequívocamente esa sucesión, lo cual proviene de que cualquier número de resultados no determina el siguiente.

En cuanto a la descripción geométrica de las sucesiones pertenecientes a este conjunto, para $x = n$ sus gráficas terminan dentro del intervalo

$$(n\,(p-\varepsilon)\ ,\ n\,(p+\varepsilon))\ ,$$

como se ilustra en la Figura 2.

1.3.1 Desigualdad de Chebishev.

La primera fórmula que nos informa acerca de la singularidad de estos conjuntos de sucesiones en relación con el número p, es la *Desigualdad de Chebishev.*

En el *espacio de medida normal*

$$(X_n, \mathcal{P}(X_n), \mu_n)\ ,$$

para cada $\varepsilon > 0$,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\tfrac{pq}{n\varepsilon^2}$$

o, lo que es enteramente equivalente,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\epsilon} A_k^{(n)}\right)\leq\frac{pq}{n\epsilon^2}.$$

Estas fórmulas o desigualdades provienen, ni más ni menos, de la fórmula algebráica:

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\epsilon}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\leq\frac{pq}{n\epsilon^2}.$$

Ahora bien, como

$$1\geq\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right)>1-\frac{pq}{n\epsilon^2}$$

o

$$0\leq\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\epsilon} A_k^{(n)}\right)\leq\frac{pq}{n\epsilon^2}$$

es claro que si n crece, las medidas que se encuentran entre los signos de la desigualdad son obligadas a correrse, en la primera hacia 1 y en la segunda hacia 0, obteninedo así el **Teorema de los Números Grandes de Bernoulli**:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right)=1.$$

Ahora, observemos cómo se comportan las sucesiones $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ de los colectivos extraidos de las tablas de Kendall y Babington Smith y comparemos lo que se obtiene con la teoría. Utilizaremos los 100 colectivos de 1000 dígitos, 10 de 10000 y el colectivo total de 100000 dígitos[7].

Tomaremos cinco casos: $A=\{d\}$, $d=1,2,3,5,7$.[8]

Para $n=1000$, $p=\frac{1}{10}$ y $\epsilon=\frac{1}{50}$,

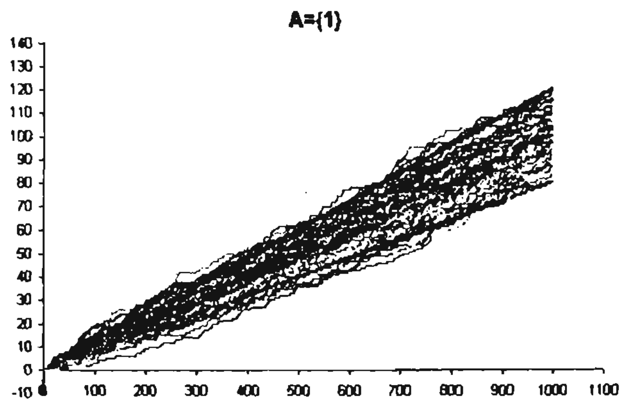
$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
80	120

[7]Los colectivos utilizados se enumeran de acuerdo a la posición que ocupan en la tabla de dígitos de Kendall y Babington Smith. Cuando $n=1000$, el colectivo 1 corresponde a los dígitos 1-1000, el 2 a los dígitos 1001-2000,..., el colectivo 100 a los dígitos 99001-100000. Cuando $n=10000$, el colectivo 1 corresponde a los dígitos 1-10000, el 2 a los dígitos 10001-20000,..., el 10 a los dígitos 90001-100000.

[8]Estos cinco dígitos, son los primeros que aparecen en la tabla de dígitos de Kendall y Babington Smith: 2, 3, 1, 5, 7.

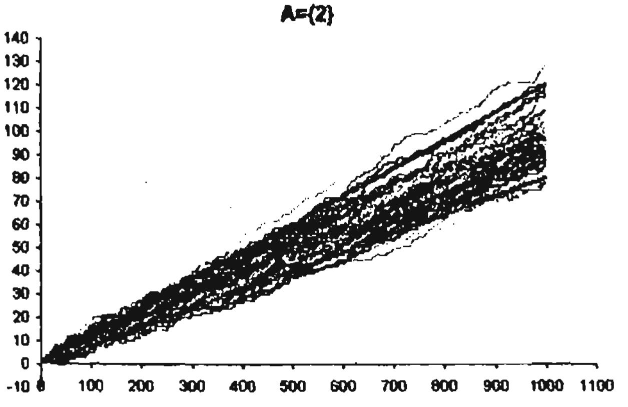
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	93	83	87	101	100	103	105	75	97	97
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	82	92	99	103	85	110	95	92	93	80
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	100	96	120	114	97	83	88	102	107	107
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	104	93	109	104	94	93	102	119	98	111
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	88	101	91	101	108	103	94	132	94	83
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	113	88	103	99	104	92	109	87	103	97
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	101	91	93	92	101	100	94	96	83	91
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	98	106	103	100	110	117	90	100	120	106
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	116	97	96	105	86	111	105	83	101	103
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	119	104	92	98	103	99	113	91	106	101



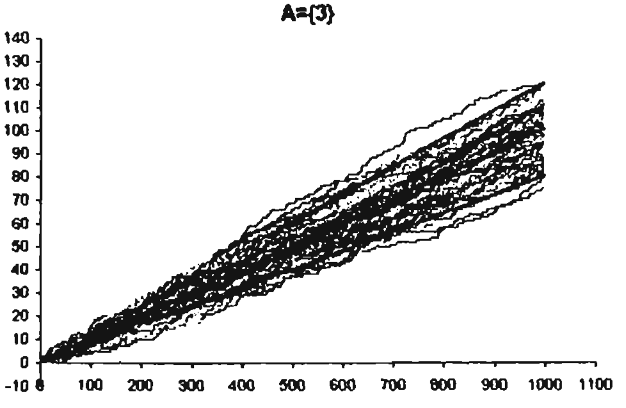
A={2}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	101	103	101	103	95	107	103	88	85	107
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	121	91	95	109	97	101	112	128	99	99
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	96	94	86	89	89	87	79	110	98	80
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	101	84	101	92	96	94	108	98	100	102
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	103	91	126	99	92	111	106	94	87	109
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	94	95	79	94	102	88	103	119	82	96
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	85	106	103	103	102	87	92	82	112	109
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	106	96	115	99	109	117	88	116	86	97
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	92	91	99	98	97	85	114	100	108	121
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	77	96	104	91	88	99	98	89	98	102



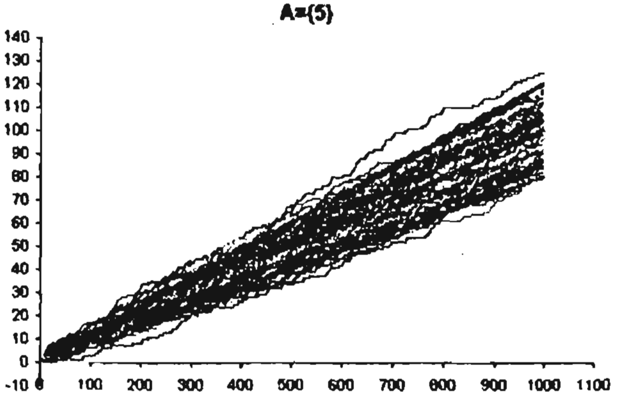
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	107	102	106	105	90	96	117	107	94	94
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	106	89	93	105	110	102	93	97	115	100
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	107	93	105	88	98	93	103	102	113	111
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	81	99	105	99	103	94	109	109	100	110
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	101	102	102	112	102	85	118	97	88	95
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	85	93	92	118	100	102	100	97	104	109
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	104	105	104	91	85	107	99	104	99	101
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	112	102	103	86	84	113	<u>120</u>	<u>75</u>	101	98
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	107	94	83	86	94	110	115	94	100	<u>79</u>
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	110	83	87	<u>120</u>	102	96	103	117	95	<u>129</u>



A={5}

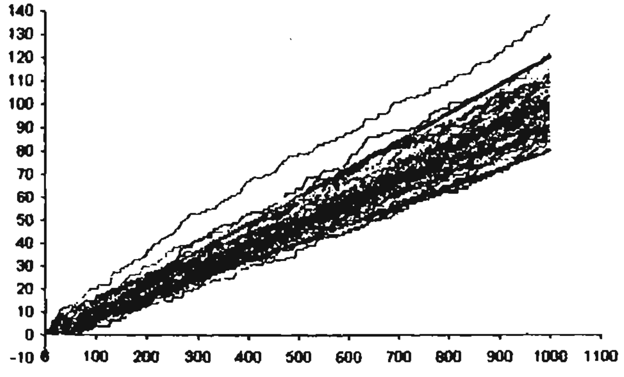
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	118	108	110	90	94	119	94	116	109	108
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	102	106	102	101	113	87	111	87	91	90
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	106	91	91	102	103	106	116	107	112	112
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	96	116	87	118	113	113	91	79	94	92
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	99	105	96	87	115	104	82	101	102	108
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	86	119	106	105	105	114	87	125	111	101
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	107	80	110	93	113	107	105	112	94	96
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	99	98	84	112	96	88	85	104	87	111
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	98	119	97	100	107	86	100	106	111	86
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	94	107	110	100	85	99	87	100	98	94



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	96	88	95	112	96	99	82	89	110	102
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	103	86	102	103	115	106	113	88	95	96
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	122	104	104	93	98	101	106	108	95	104
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	113	90	110	84	90	102	97	97	88	90
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	91	115	114	101	87	104	98	102	138	82
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	100	113	85	109	100	84	85	88	105	88
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	98	110	102	105	106	100	106	89	94	97
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	106	100	105	100	98	95	95	112	86	89
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	88	109	114	98	104	111	105	92	103	107
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	90	100	90	98	104	111	95	98	95	95

A={7}



Podemos observar que en los cinco casos existen sucesiones que quedan fuera de la zona delimitada por las rectas $y = x(p - \varepsilon)$ y $y = x(p + \varepsilon)$.

Para $d = 1$, 95 de las 100 sucesiones observadas quedan dentro de la zona de las rectas de Chebishev, i.e., en un 95% de nuestras sucesiones $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxima a p con un margen de error menor que 0.02.

Para $d = 2$, 8 sucesiones quedan fuera de la zona delimitada por las rectas de Chebishev. Entonces el 92% de las sucesiones cumple que $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02.

Para $d = 3$, son 5 las sucesiones que quedan fuera de la zona de las rectas de

Chebishev, por lo que un 95% de las sucesiones observadas cumple que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02.

Para $d = 5$, 97 sucesiones quedan dentro de la zona de las rectas de Chebishev, es decir, el 97% de las sucesiones cumple que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02.

Por último, para $d = 7$, el 98% de las sucesiones cumple que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02, i.e., 2 sucesiones de las 100 observadas quedan fuera de la zona delimitada por las rectas de Chevishev.

Teóricamente la desigualdad de Chebishev nos dice que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2} = 0.775.$$

Es decir, al menos en un 77.5% de las sucesiones, $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$, debería aproximarse a p en esta medida.

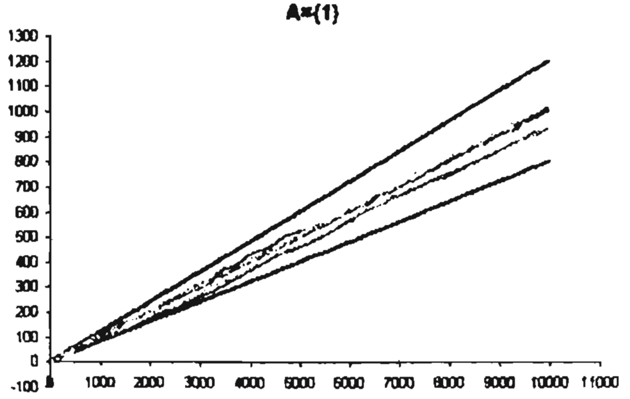
Por lo tanto, en los cinco casos se cumple la Desigualdad de Chebishev ya que el porcentaje de las sucesiones observadas que satisfacen las exigencias de esta desigualdad es mayor que el porcentaje que marca la teoría.

Para $n = 10000$

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
800	1200

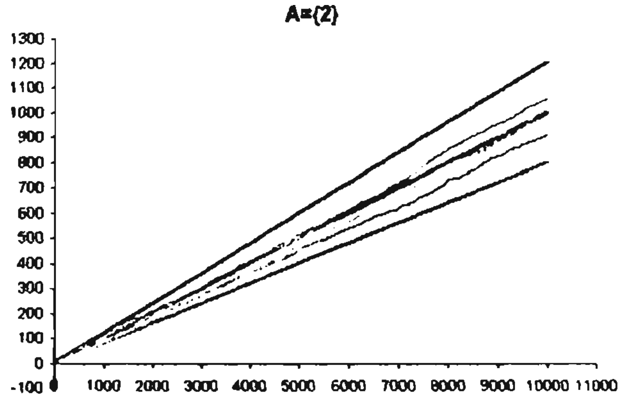
$A = \{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	941	931	1014	1027	995	995	942	1050	1003	1026



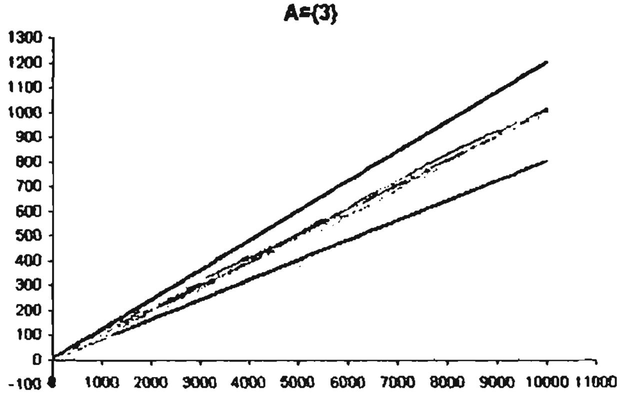
$A = \{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	993	1052	908	976	1018	952	981	1029	1005	942



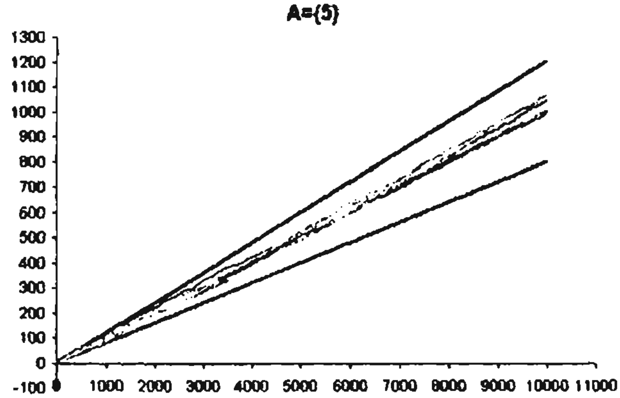
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1018	1010	1013	1009	1002	1000	999	994	962	1042



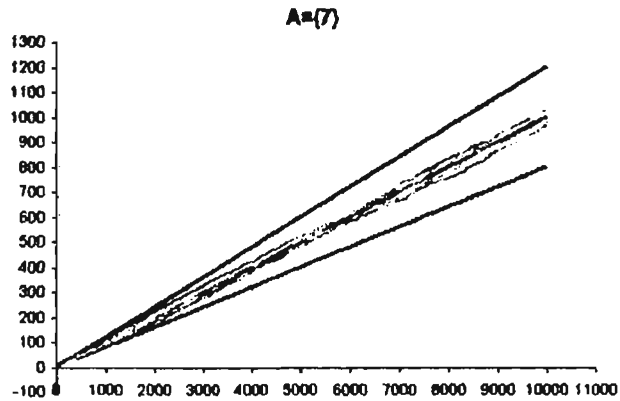
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1066	990	1046	999	999	1059	1017	964	1010	974



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	969	1007	1035	961	1032	957	1007	986	1031	976



En los cinco casos todas las sucesiones observadas caen dentro de la zona delimitada por las rectas $y = x(p-\epsilon)$ y $y = x(p+\epsilon)$, por lo tanto, para los cinco dígitos se cumple la desigualdad de Chebishev la cual teóricamente establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2} = 0.9775.$$

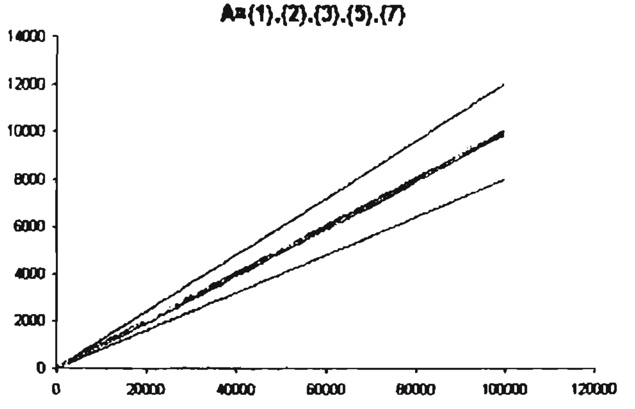
Es decir, cuando $n = 10000$, al menos el 97.75% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación a p menor que 0.02 para que se satisfaga la Desigualdad de Chebishev, dado que en nuestras observaciones realizadas para $d = 1, 2, 3, 5, 7$; el 100% de las sucesiones cumplió dicha condición, podemos afirmar que se satisface esta deisgualdad.

Finalmente cuando $n = 100000$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
8000	12000

Colectivo 1−100000

Dígito	1	2	3	5	7
Frecuencia	9924	9856	10049	10124	9961



Al igual que para $n = 10000$, al aumentar n a 100000, todas las sucesiones observadas caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Teoricamente se tiene que al menos el 99.775% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación menor que 0.02 con respecto a p para que se satisfaga la Desigualdad de Chebishev. Es decir,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.99775$$

Entonces para $n = 100000$, también se satisface la desigualdad de Chebishev.

A continuación queremos observar si al formar parejas con los dígitos, se sigue satisfaciendo esta desigualdad. Para esto formaremos los colectivos de parejas de dígitos a partir de los que utilizamos anteriormente y veamos que sucede. Tendremos entonces, $A = \{15\}, \{23\}, \{31\}, \{57\}, \{75\}$[9], $n = 975, 9750, 97500$; $\varepsilon = \frac{1}{50}$ y $p = \frac{1}{100}$.

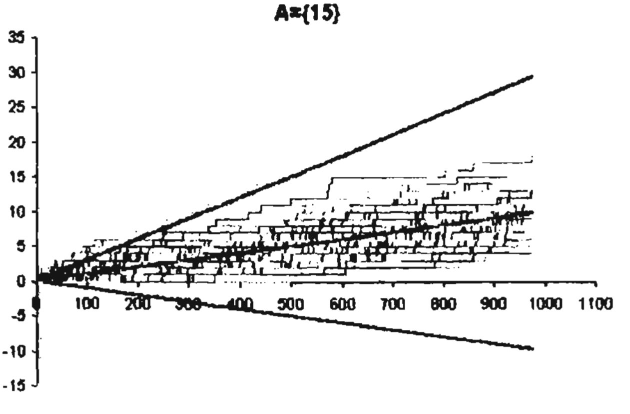
Para $n = 975$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-9.75	29.25

[9] Al formar parejas de dígitos con las tablas de Kendall y Babington Smith, estas son las primeras cinco que aparecen.

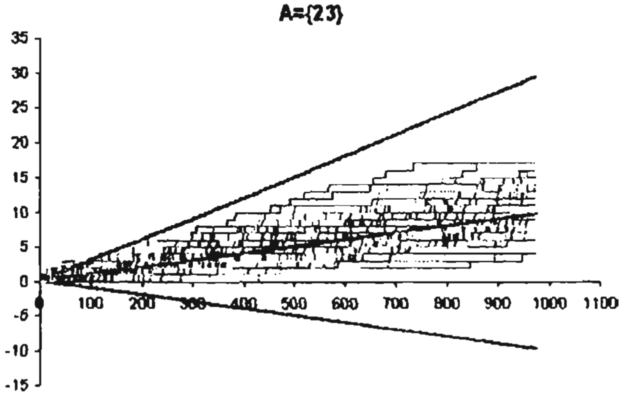
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	8	9	5	12	18	7	5	12	8
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	6	9	6	13	5	6	8	10	6	6
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	8	9	9	14	15	5	7	10	14	7
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	8	13	10	14	13	18	7	10	6	9
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	10	8	8	5	14	11	10	21	10	15
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	10	8	8	11	13	7	7	9	11	6
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	10	7	15	11	10	11	9	13	5	9
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	12	13	9	10	11	9	8	14	6	8
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	4	11	8	12	14	9	8	8	19	6
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	9	10	11	13	9	11	6	11	12	8



$A=\{23\}$

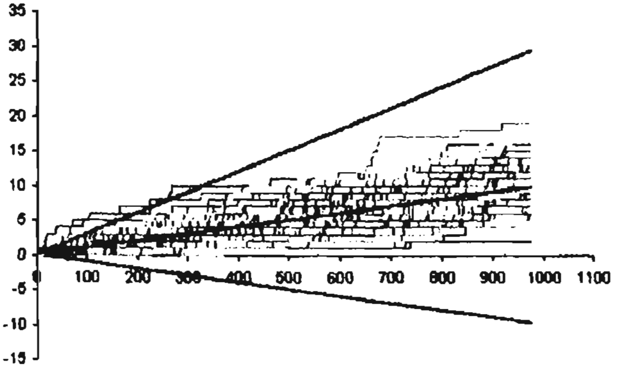
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	14	16	10	11	10	11	17	9	13	8
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	16	9	10	8	13	9	8	10	15	15
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	9	9	15	4	10	4	9	10	8	11
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	7	11	13	9	12	14	7	7	9	12
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	8	10	12	8	5	9	11	9	4	16
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	10	6	8	14	10	8	17	13	8	13
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	8	9	8	14	8	13	8	9	14	16
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	13	8	13	9	9	6	15	9	11	12
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	6	14	9	10	7	9	8	17	9	16
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	10	4	16	11	9	10	14	14	9	11



$A=\{31\}$

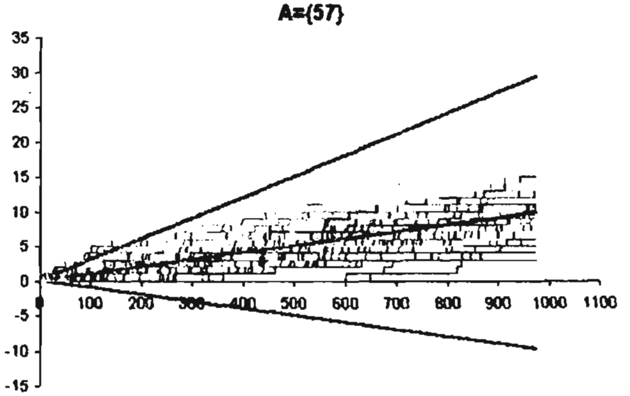
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	11	11	14	10	12	12	12	11	11	9
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	7	8	8	13	10	6	16	12	6
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	7	9	14	14	6	2	11	12	14	8
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	13	10	11	8	8	7	13	19	8	12
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	7	13	10	10	12	10	14	11	11	12
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	7	7	14	10	16	12	14	5	9	11
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	18	11	6	12	6	11	12	10	13	8
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	11	13	8	10	8	11	9	5	8	6
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	13	9	5	7	9	16	17	6	6	13
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	14	6	7	9	15	10	13	5	7	17

A={31}



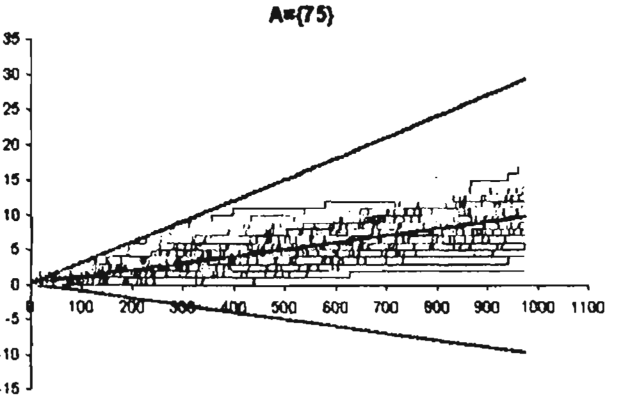
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	10	7	15	8	17	13	10	7	9
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	11	5	9	14	10	11	10	6	9	3
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	7	4	11	9	12	11	11	12	10	10
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	10	10	11	10	8	13	8	15	4	5
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	11	11	11	6	9	9	8	11	13	8
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	4	14	8	18	9	5	7	10	11	10
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	8	10	9	15	16	15	9	6	10	6
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	16	10	9	13	7	11	7	11	5	6
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	10	15	14	9	9	4	10	7	9	11
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	8	7	12	11	6	8	9	7	3	7



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	12	13	8	14	12	8	5	14	12	14
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	8	10	7	12	7	15	8	13	13
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	14	11	11	8	13	14	14	8	8	13
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	10	8	10	6	8	11	10	9	8	10
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	10	12	9	6	11	11	9	7	17	9
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	4	12	9	11	8	11	8	6	11	7
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	8	10	13	4	9	17	8	11	2	8
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	19	8	11	6	5	13	6	14	12	6
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	4	12	13	9	14	7	9	12	10	11
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	2	9	13	12	9	11	8	10	7	15



En el caso $n = 975$, $p = \frac{1}{100}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$, se cumple la Desigualdad de Chebishev, ya que la teoría nos indica que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.97525$$

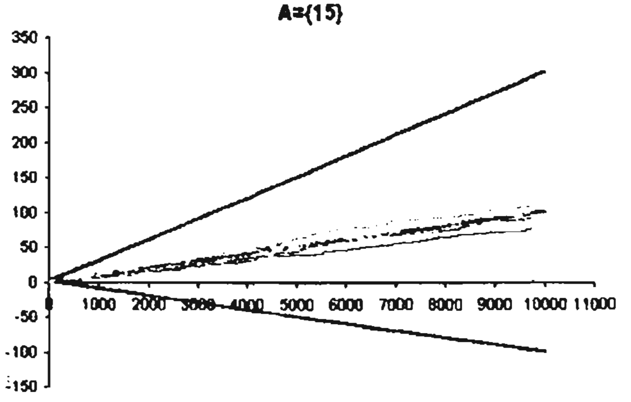
Es decir, al menos el 97.525% de las sucesiones deben tener una aproximación a p menor que 0.02 para satisfacer la Desigualdad de Chebishev. Sin embargo observamos, para las cinco parejas de dígitos, que todas las sucesiones caen en el intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Cuando $n = 9750$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-97.5	292.5

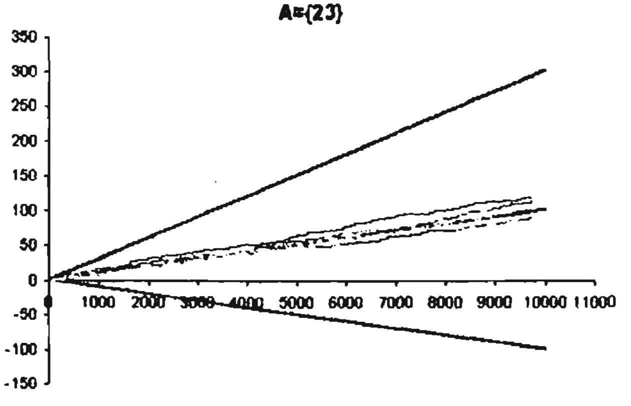
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	92	75	98	108	112	90	100	100	99	100



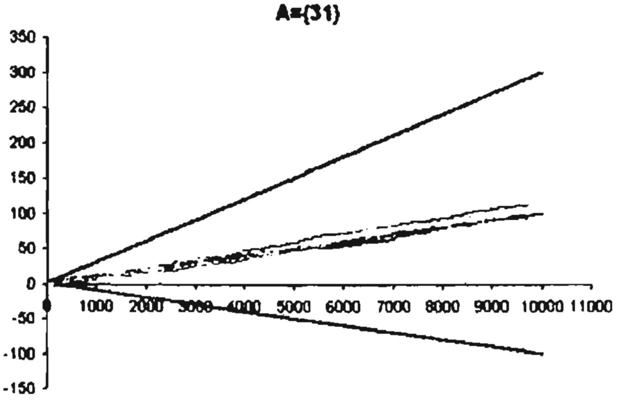
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	119	113	89	101	92	107	107	105	105	108



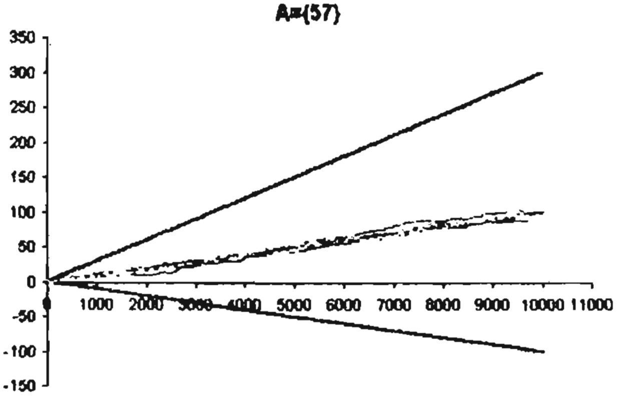
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	113	95	97	109	110	105	107	89	101	103



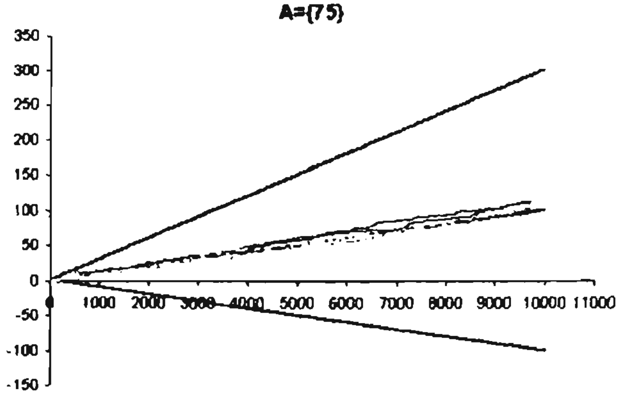
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	104	88	97	94	97	96	104	95	98	78



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	112	103	114	90	101	87	90	100	101	96



Tanto los resultados mostrados en las tablas como las gráficas nos muestran claramente que el 100 % de las sucesiones utilizadas, quedan dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Por consiguiente si la teoría establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\epsilon^2} = 0.997525$$

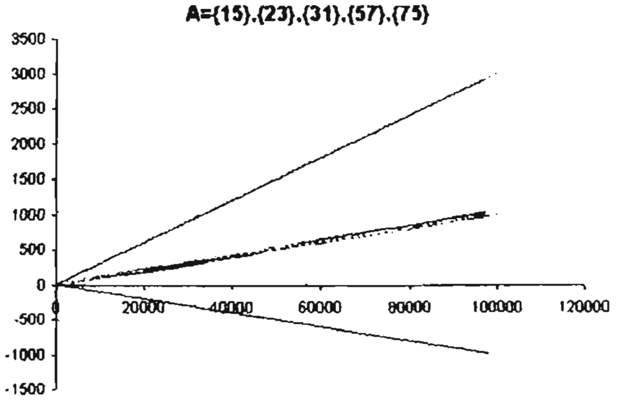
es decir, que al menos el 99.7525% de las sucesiones deben cumplir la condición que establece la Desigualdad de Chebishev. Entonces podemos concluir que las sucesiones observadas para las cinco parejas de dígitos la satisfacen.

Si $n = 97500$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-975	2925

Colectivo 1−100000

Dígito	15	23	31	57	75
Frecuencia	974	1046	1029	951	994



Podemos observar que las cinco sucesiones caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$, por lo que se afirma que se satisface la Desigualdad de Chebishev ya que lo que establece la teoría es que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\tfrac{pq}{nc^2} = 0.9997525$$

Hemos observado que los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith, no sólo satisfacen, sino que lo hacen con gran amplitud, la Desigualdad de Chebishev. Sin importar el orden o si se toman los dígitos individualmente o por parejas, casi el 100% de las sucesiones utilizadas cayeron dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$, con $\varepsilon = \frac{1}{50}$. Esta ε fue impuesta sin saber el resultado que se iba a producir, sin embargo se puede tomar cualquier otra y se observarán resultados similares.

1.3.2 Ley Basta del Logartimo Iterado.

La desigualdad de Chebishev es demasiado sobrada; un teorema que no fuerza las cosas, que describe mejor aquel comportamiento, es una versión de la Ley del Logaritmo Iterado, establecido por el matemático soviético Khinchin, en los años 30 del siglo pasado. Tal versión la llamaremos *Ley Basta del Logaritmo Iterado.*

Comencemos con lo que denominaremos la **Desigualdad de Chebishev-Khinchin.**

Para cada $n \geq 3$,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\tfrac{2pq}{\ln\ln n}$$

o, equivalentemente

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right)\leq\frac{2pq}{\ln\ln n}.$$

Esta desigualdad se deduce de la desigualdad de Chebishev. Como se señaló para la desigualdad de Chebishev, las condiciones que se cumplen por medio de los índices, pueden formularse de las siguientes maneras:

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{n}{2}(\ln\ln n)}} A_k^{(n)}=\left\{(\delta_1,\ldots,\delta_n):p-\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}<\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}<p+\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}\right\}$$

$$=\left\{(\delta_1,\ldots,\delta_n):np-\sqrt{\tfrac{n}{2}\ln\ln n}<\delta_1+\cdots+\delta_n<np+\sqrt{\tfrac{n}{2}\ln\ln n}\right\}.$$

Obsérvese que en la desigualdad de Chebishev se impone la exigencia ¿para qué n, dado (impuesto) $\epsilon>0$,

$$n(p-\epsilon)<\delta_1+\cdots+\delta_n<n(p+\epsilon)\ ,$$

con cierta medida, según μ_n, mayor que $1-\frac{pq}{n\epsilon^2}$?

Sin embargo la desigualdad de Chebishev-Khinchin nos dice que

$$np-\sqrt{\tfrac{n}{2}\ln\ln n}<\delta_1+\cdots+\delta_n<np+\sqrt{\tfrac{n}{2}\ln\ln n}$$

con una medida μ_n mayor que $1-\frac{2pq}{\ln\ln n}$ la cual, a su vez, es mayor que $1-\frac{1}{2\ln\ln n}$.

Ahora, observemos cómo se comportan las sucesiones $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ de los colectivos extraidos de las tablas de Kendall y Babington Smith, con respecto a la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Utilizaremos exactamente los mismos colectivos de 1000, 10000 y el colectivo total de 100000 dígitos; así como los mismos 5 dígitos observados en la Desigualdad de Chebishev[10].

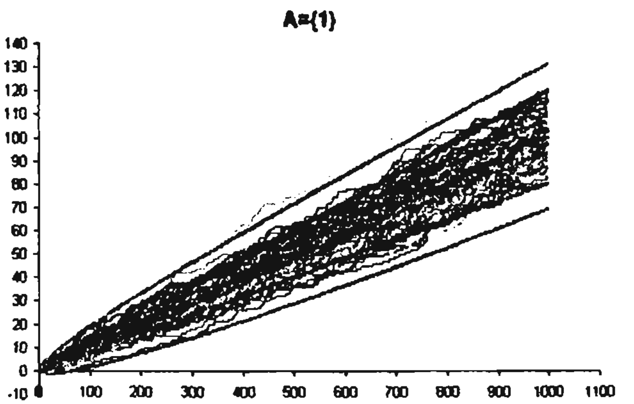
Para $n=1000$ y $p=\frac{1}{10}$,

$np-\sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np+\sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
68.9143	131.0857

[10] En los gráficos de esta sección, dejaremos las rectas de la Desigualdad de Chebishev para que sea más claro el comportamiento de ambas desigualdades conforme n se hace más grande.

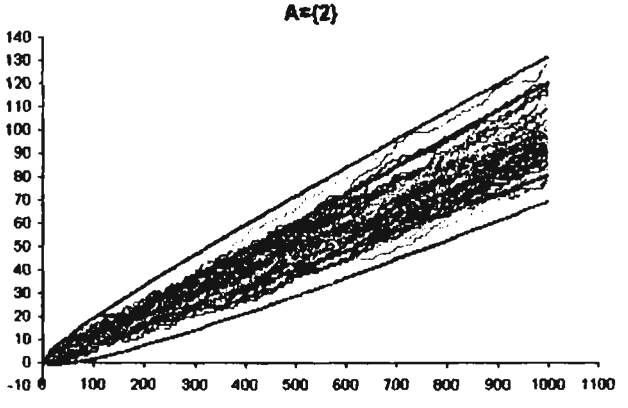
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	93	83	87	101	100	103	105	75	97	97
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	82	92	99	103	85	110	95	92	93	80
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	100	96	120	114	97	83	88	102	107	107
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	104	93	109	104	94	93	102	119	98	111
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	88	101	91	101	108	103	94	132	94	83
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	113	88	103	99	104	92	109	87	103	97
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	101	91	93	92	101	100	94	96	83	91
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	98	106	103	100	110	117	90	100	120	106
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	116	97	96	105	86	111	105	83	101	103
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	119	104	92	98	103	99	113	91	106	101



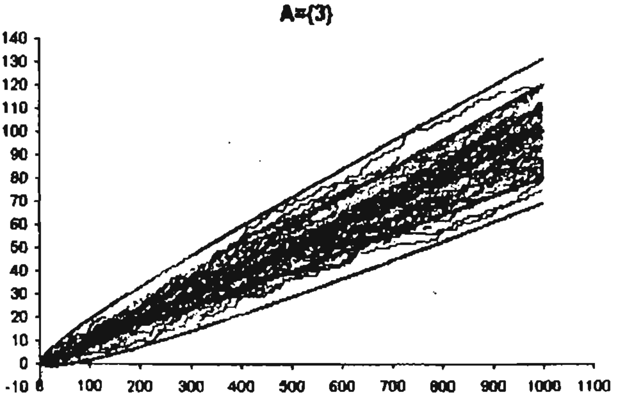
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	101	103	101	103	95	107	103	88	85	107
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	121	91	95	109	97	101	112	128	99	99
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	96	94	86	89	89	87	79	110	98	80
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	101	84	101	92	96	94	108	98	100	102
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	103	91	126	99	92	111	106	94	87	109
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	94	95	79	94	102	88	103	119	82	96
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	85	106	103	103	102	87	92	82	112	109
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	106	96	115	99	109	117	88	116	86	97
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	92	91	99	98	97	85	114	100	108	121
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	77	96	104	91	88	99	98	89	98	102



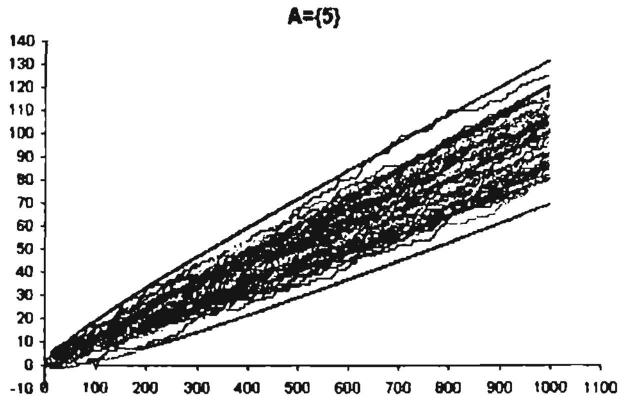
A={3}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	107	102	106	105	90	96	117	107	94	94
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	106	89	93	105	110	102	93	97	115	100
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	107	93	105	88	98	93	103	102	113	111
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	81	99	105	99	103	94	109	109	100	110
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	101	102	102	112	102	85	118	97	88	95
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	85	93	92	118	100	102	100	97	104	109
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	104	105	104	91	85	107	99	104	99	101
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	112	102	103	86	84	113	120	75	101	98
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	107	94	83	86	94	110	115	94	100	79
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	110	83	87	120	102	96	103	117	95	129



$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	118	108	110	90	94	119	94	116	109	108
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	102	106	102	101	113	87	111	87	91	90
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	106	91	91	102	103	106	116	107	112	112
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	96	116	87	118	113	113	91	79	94	92
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	99	105	96	87	115	104	82	101	102	108
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	86	119	106	105	105	114	87	125	111	101
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	107	80	110	93	113	107	105	112	94	96
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	99	98	84	112	96	88	85	104	87	111
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	98	119	97	100	107	86	100	106	111	86
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	94	107	110	100	85	99	87	100	98	94



A={7}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	96	88	95	112	96	99	82	89	110	102
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	103	86	102	103	115	106	113	88	95	96
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	122	104	104	93	98	101	106	108	95	104
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	113	90	110	84	90	102	97	97	88	90
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	91	115	114	101	87	104	98	102	138	82
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	100	113	85	109	100	84	85	88	105	88
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	98	110	102	105	106	100	106	89	94	97
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	106	100	105	100	98	95	95	112	86	89
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	88	109	114	98	104	111	105	92	103	107
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	90	100	90	98	104	111	95	98	95	95

Se observa que de los cinco casos, sólamente en dos existen sucesiones que quedan fuera de la zona de Khinchin $\left(np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}, np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}\right)$.

Para $d = 1$ y $d = 7$, 99 de las 100 sucesiones observadas quedan dentro de la zona de Khinchin. Entonces, un 99% de las sucesiones observadas $\delta_1, \ldots, \delta_n$, cumple que $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxime a p con un error menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

Para $d = 2$, $d = 3$ y $d = 5$, ninguna sucesión queda fuera de la zona de Khinchin. Entonces el 100% de estas cumple que $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxime a p con un error menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

Teóricamente la Ley Basta del Logaritmo Iterado nos dice que para $n = 1000$ y $p = \frac{1}{10}$,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.90686$$

Es decir, por lo menos un 90.686% de las sucesiones debe cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un error menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

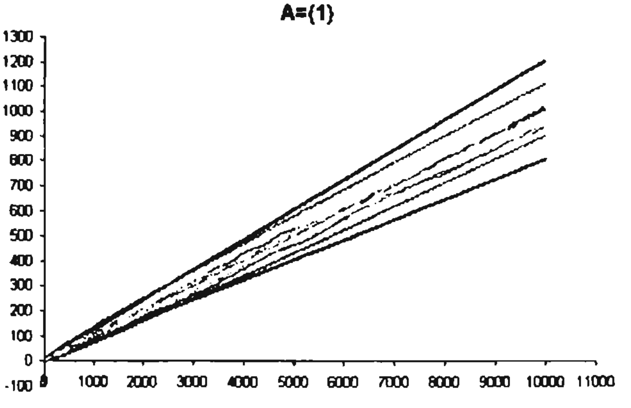
Por lo tanto, en los cinco casos se cumple la Ley Basta del Logaritmo Iterado, ya que el porcentaje de las sucesiones observadas que satisfacen las exigencias de la desigualdad de Chebishev-Khinchin es mayor que el porcentaje que marca la teoría.

Para $n = 10000$ y $p = \frac{1}{10}$

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
894.6357	1105.3643

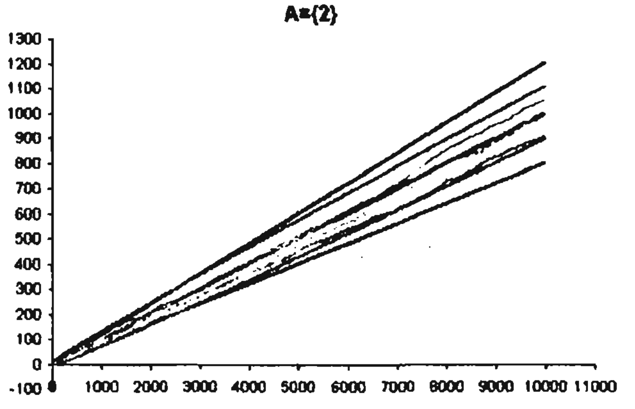
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	941	931	1014	1027	995	995	942	1050	1003	1026



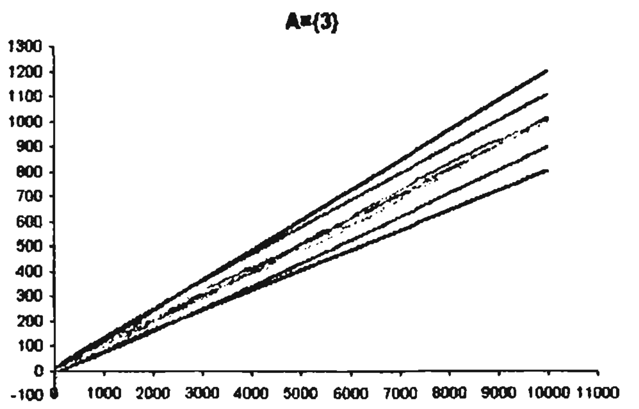
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	993	1052	908	976	1018	952	981	1029	1005	942



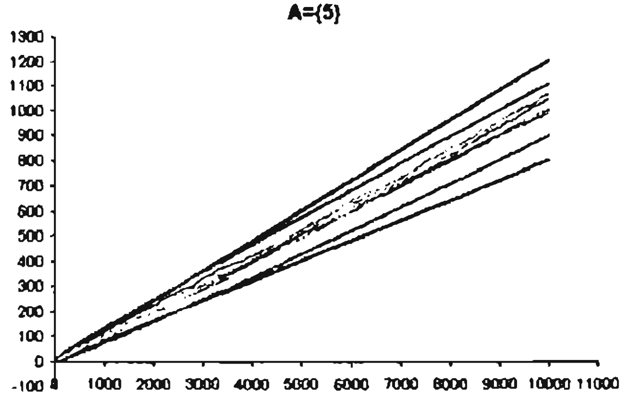
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1018	1010	1013	1009	1002	1000	999	994	962	1042



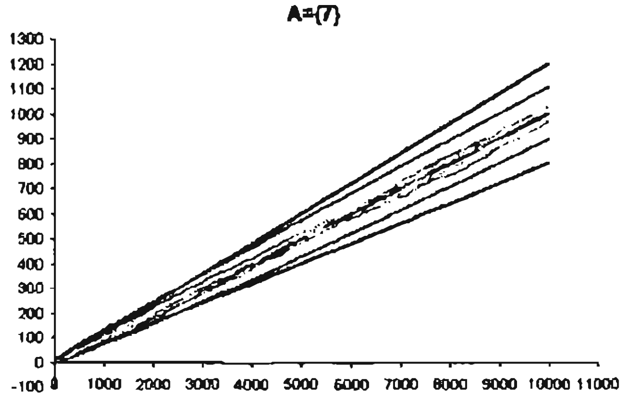
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1066	990	1046	999	999	1059	1017	964	1010	974



$A = \{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	969	1007	1035	961	1032	957	1007	986	1031	976



En los cinco casos todas las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin. La Ley Basta del Logaritmo Iterado establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.91893$$

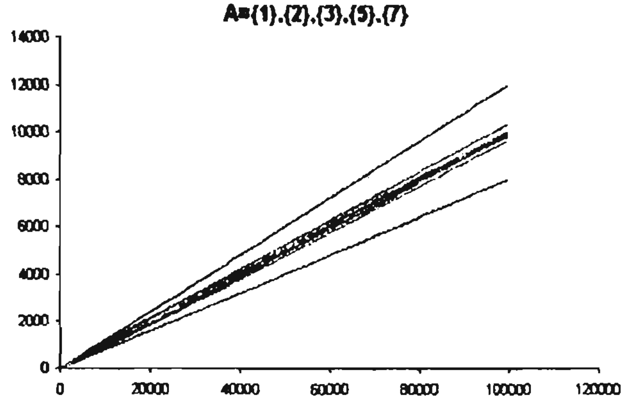
Es decir, cuando $n = 10000$ y $p = \frac{1}{10}$, para que se cumpla la Desigualdad de Chebishev-Khinchin, por lo menos en el 91.893% de las sucesiones debe pasar que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p en menos de $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$. Por lo tanto, siendo el 100% de las sucesiones observadas las que cumplen esta condición, podemos afirmar que se satisface la Ley del Logaritmo Iterado.

Finalmente cuando $n = 100000$ y $p = \frac{1}{10}$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$
9650.4667	10349.5333

Colectivo 1 – 100000

Dígito	1	2	3	5	7
Frecuencia	9924	9856	10049	10124	9961



Al igual que para $n = 10000$, al aumentar n a 100000, todas las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin.

Teoricamente se tiene que al menos el 92.633% de las sucesiones deben tener una aproximación menor que $\sqrt{\frac{\ln \ln n}{2n}}$ con respecto a p para satisfacer la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Es decir,

$$\mu_n \left(\sum_{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \sqrt{\frac{\ln \ln n}{2n}}} A_k^{(n)} \right) > 1 - \frac{2pq}{\ln \ln n} = 0.92633$$

Entonces para $n = 100000$ y $p = \frac{1}{10}$, también se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

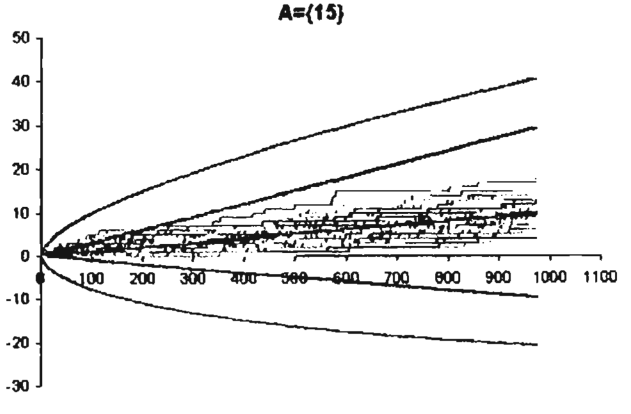
A continuación queremos observar si al formar parejas con los dígitos, se sigue satisfaciendo la Desigualdad de Chebishev-Khinchin. Para esto formaremos los colectivos de parejas de dígitos a partir de los colectivos utilizados anteriormente. Tendremos entonces $n = 975, 9750, 97500$ y $p = \frac{1}{100}$.

Para $n = 975$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$
-20.9155	40.4155

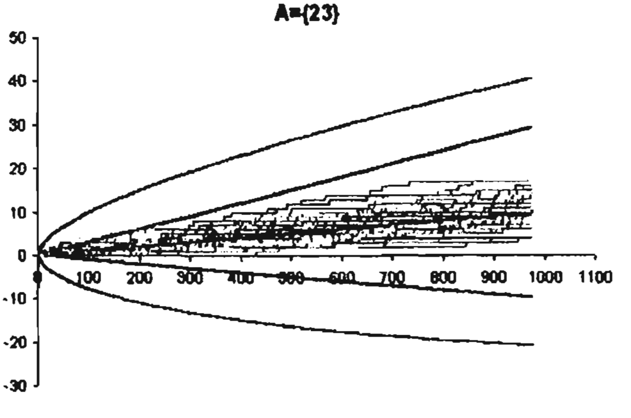
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	8	9	5	12	18	7	5	12	8
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	6	9	6	13	5	6	8	10	6	6
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	8	9	9	14	15	5	7	10	14	7
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	8	13	10	14	13	18	7	10	6	9
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	10	8	8	5	14	11	10	21	10	15
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	10	8	8	11	13	7	7	9	11	6
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	10	7	15	11	10	11	9	13	5	9
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	12	13	9	10	11	9	8	14	6	8
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	4	11	8	12	14	9	8	8	19	6
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	9	10	11	13	9	11	6	11	12	8



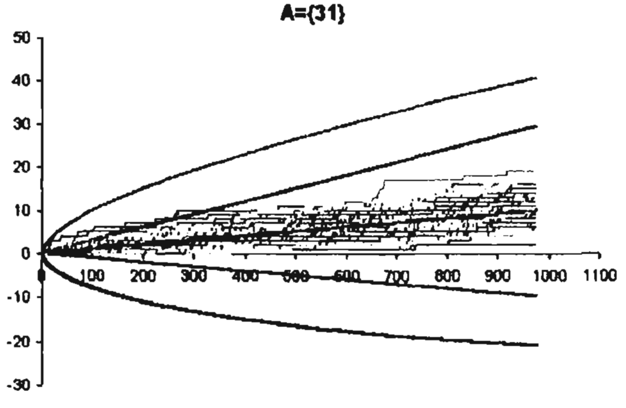
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	14	16	10	11	10	11	17	9	13	8
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	16	9	10	8	13	9	8	10	15	15
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	9	9	15	4	10	4	9	10	8	11
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	7	11	13	9	12	14	7	7	9	12
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	8	10	12	8	5	9	11	9	4	16
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	10	6	8	14	10	8	17	13	8	13
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	8	9	8	14	8	13	8	9	14	16
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	13	8	13	9	9	6	15	9	11	12
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	6	14	9	10	7	9	8	17	9	16
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	10	4	16	11	9	10	14	14	9	11



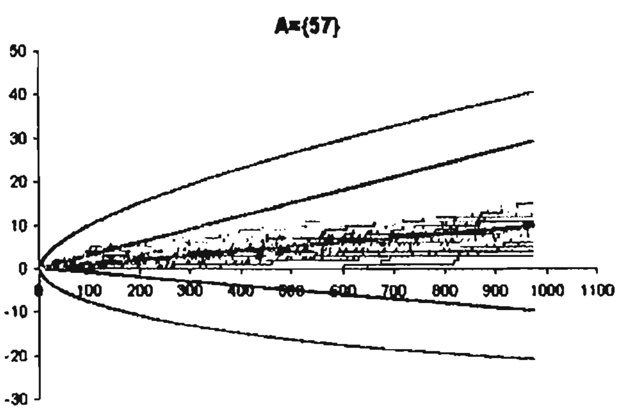
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	11	11	14	10	12	12	12	11	11	9
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	7	8	8	13	10	6	16	12	6
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	7	9	14	14	6	2	11	12	14	8
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	13	10	11	8	8	7	13	19	8	12
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	7	13	10	10	12	10	14	11	11	12
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	7	7	14	10	16	12	14	5	9	11
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	18	11	6	12	6	11	12	10	13	8
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	11	13	8	10	8	11	9	5	8	6
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	13	9	5	7	9	16	17	6	6	13
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	14	6	7	9	15	10	13	5	7	17



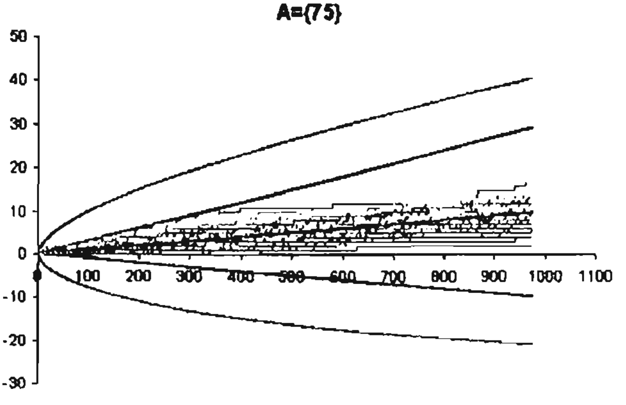
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	10	7	15	8	17	13	10	7	9
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	11	5	9	14	10	11	10	6	9	3
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	7	4	11	9	12	11	11	12	10	10
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	10	10	11	10	8	13	8	15	4	5
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	11	11	11	6	9	9	8	11	13	8
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	4	14	8	18	9	5	7	10	11	10
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	8	10	9	15	16	15	9	6	10	6
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	16	10	9	13	7	11	7	11	5	6
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	10	15	14	9	9	4	10	7	9	11
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	8	7	12	11	6	8	9	7	3	7



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	12	13	8	14	12	8	5	14	12	14
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	8	10	7	12	7	15	8	13	13
Colectivo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Frecuencia	14	11	11	8	13	14	14	8	8	13
Colectivo	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Frecuencia	10	8	10	6	8	11	10	9	8	10
Colectivo	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Frecuencia	10	12	9	6	11	11	9	7	17	9
Colectivo	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Frecuencia	4	12	9	11	8	11	8	6	11	7
Colectivo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Frecuencia	8	10	13	4	9	17	8	11	2	8
Colectivo	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	19	8	11	6	5	13	6	14	12	6
Colectivo	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Frecuencia	4	12	13	9	14	7	9	12	10	11
Colectivo	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Frecuencia	2	9	13	12	9	11	8	10	7	15



Para esta n, se cumple la Ley Basta del Logaritmo Iterado ya que la teoría nos indica que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.98974.$$

Es decir, al menos el 98.974% de las sucesiones deben tener una aproximación a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$ para satisfacer la Desigualdad de Chebishev-Khinchin.

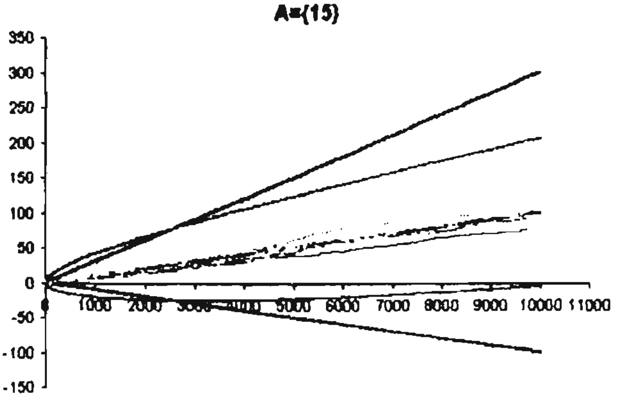
Sin embargo observamos, para las cinco parejas de dígitos, que el 100% de nuestras sucesiones caen dentro de la zona de Khinchin, por lo tanto, satisfacen esta condición.

Cuando $n = 9750$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$
-6.4744	201.4744

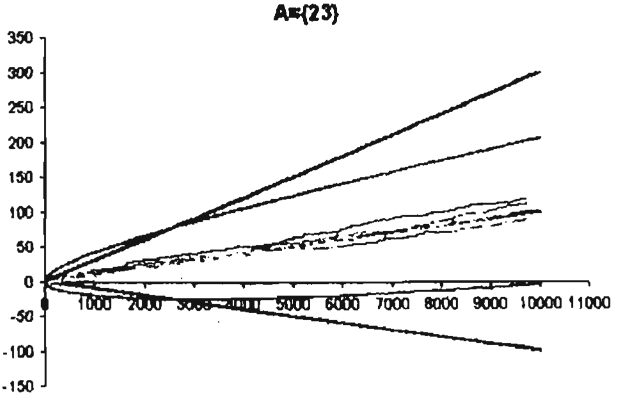
$A = \{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	92	75	98	108	112	90	100	100	99	100



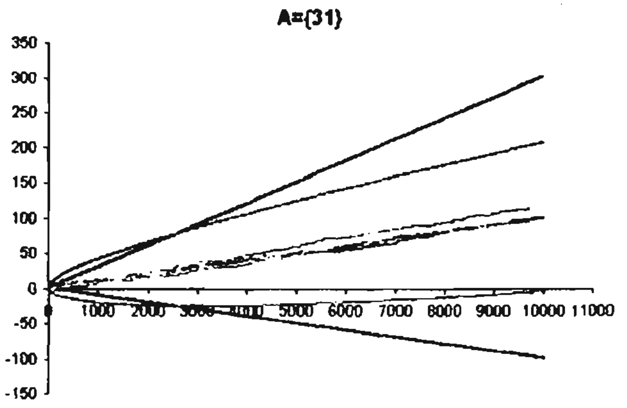
$A = \{23\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	119	113	89	101	92	107	107	105	105	108



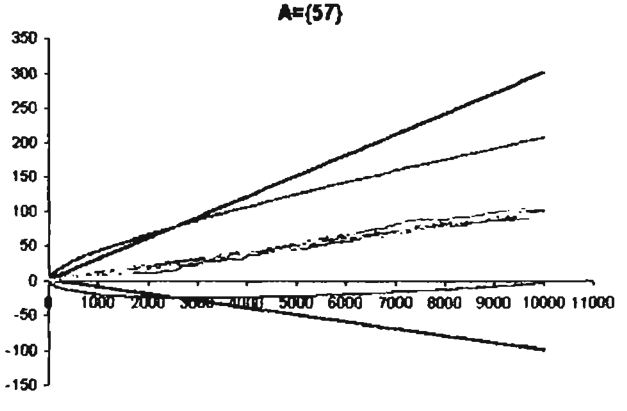
$A = \{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	113	95	97	109	110	105	107	89	101	103



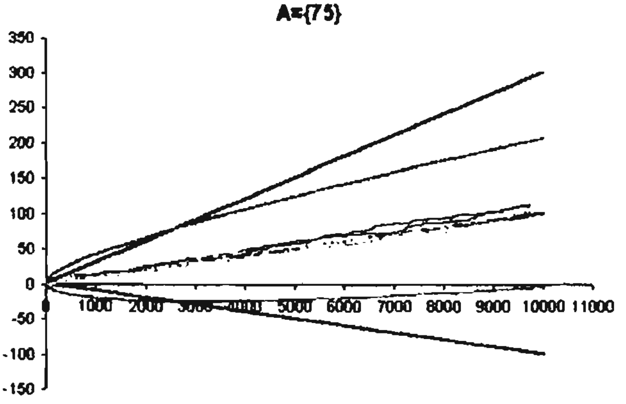
A={57}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	104	88	97	94	97	96	104	95	98	78



A={75}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	112	103	114	90	101	87	90	100	101	96



Tanto los resultados mostrados en las tablas como las gráficas nos muestran claramente que el 100 % de las sucesiones utilizadas, quedan dentro de la zona de Kinchin.

Por consiguiente si la teoría establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n}=0.99107.$$

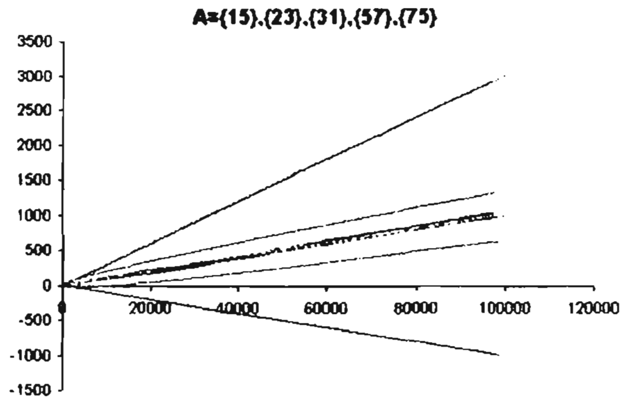
es decir, que al menos el 99.107% de las sucesiones deben cumplir la condición que establece la Desigualdad de Chebishev-Khinchin. Entonces podemos concluir que las sucesiones observadas para las cinco parejas de dígitos satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Si $n = 97500$,

$np-\sqrt{\frac{n}{2}}\ln\ln n$	$np+\sqrt{\frac{n}{2}}\ln\ln n$
630.0190	1319.9810

Colectivo 1−100000

Dígito	15	23	31	57	75
Frecuencia	974	1046	1029	951	994



Podemos observar que las cinco sucesiones caen dentro de la zona de Khinchin por lo que se afirma que se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado ya que lo que establece la teoría es que al menos el 99.189% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots\delta_n}{n}$ tenga una aproximación a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.99189.$$

Hemos observado que los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith, también satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Sin importar el orden o si se toman los dígitos individualmente o por parejas, casi el 100% de las sucesiones utilizadas caen dentro de la zona de Khinchin.

Capítulo 2

Presentación de la función R = (X+Y) mod 10.

David Reyes, en 1995, en su tesis profesional "CONSTRUCCIÓN DE DÍGITOS AL AZAR USANDO LA FUNCIÓN $R = (X+Y)$ *mod* 10"[3], presenta algunas propiedades de dicha función, la manera en que se debe realizar la elección de las variables X y Y, así como su aplicación en la construcción de tablas de dígitos aleatorios.

2.1 El método del fraile Edvin.

En su libro *"Al azar"*[4], Ivar Ekeland comenta el contenido de un manuscrito, de un fraile llamado Edvin del monasterio franciscano de Tautra, Noruega, que data de los años 1240-1250 D.C. en el cual se mencionan dos interesantes métodos para obtener números al azar.

De estos dos métodos diseñados por el fraile Edvin, el método de combinar pares de números sumándolos y obteniendo el módulo en cierta base, se presenta como una posible opción para obtener sucesiones con distribución uniforme.

La cuestión es si el método original hace aparecer los números 0 al 5 con la misma distribución de frecuencias que se da al lanzar un dado, lo cual nos lleva a plantear la hipótesis de que los resultados obtenidos con la fórmula $R = (X+Y)$ *mod* 6 tienden a distribuirse uniformemente.

La validez de esta afirmación, Reyes la estudia en su tesis desde el punto de vista de la teoría matemática de probabilidad aunque utilizando la función $R = (X+Y)$ *mod* 10 en lugar de $R = (X+Y)$ *mod* 6 ya que las sucesiones de dígitos entre 0 y 9 son más útiles en aplicaciones prácticas.

2.2 Suposiciones generales y planteamiento del problema.

Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos experimentos aleatorios independientes.

Sea $\mathcal{E}_3$ el experimento de realizar $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ a la vez.

Sea $X_1 = \{0, ..., n-1\}$ el espacio de resultados de $\mathcal{E}_1$.

Sea $X_2 = \{0, ..., m-1\}$ el espacio de resultados de $\mathcal{E}_2$.

Sea $X_3 = X_1 \times X_2$ el espacio de resultados de $\mathcal{E}_3$.

Sean $\{p_0, ..., p_{n-1}\}$ y $\{q_0, ..., q_{m-1}\}$ dos pseudodensidades.

Sea P_1 la medida de probabilidad definida en el contexto $(\mathcal{E}_1, X_1)$ por $P_1(\{k\}) = p_k$.

Sea P_2 la medida de probabilidad definida en el contexto $(\mathcal{E}_2, X_2)$ por $P_2\ (\{k\}) = q_k$.

Sea P_3 la medida de probabilidad definida en el contexto $(\mathcal{E}_3, X_3)$ por $P_3\left(\{(i,j)\}\right) = p_i * q_j$.

Sea X una variable aleatoria definida como la identidad sobre X_1.

Sea Y una variable aleatoria definida como la identidad sobre X_2.

Supóngase que X se distribuye con medida de probabilidad P_1 y que Y se distribuye con medida de probabilidad P_2.

Sea R una variable aleatoria definida en X_3 por la siguiente ecuación

$$R((i,j)) = (i+j)\ mod\ 10$$

y con valores en $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Expresado con palabras, el valor de R es igual al residuo de la división de $(i+j)$ entre 10.

Sea $P_R(\{x\}) = P_3\left(R^{-1}(\{x\})\right) = P_3(R = x)$.

2.3 Condiciones suficientes para la uniformidad de R.

Teorema 1.

Si $X_1 = X_2 = \{0, ..., 9\}$ *y al menos una de las dos variables* X *o* Y *se distribuye uniformemente, entonces también* R *se distribuye uniformemente.*

El teorema anterior establece algunas condiciones particulares que implican que la variable aleatoria R se distribuya uniformemente en D. Sin embargo no siempre se cumple que R tenga distribución uniforme, más bien, la uniformidad de R depende tanto de las pseudodensidades como de los espacios de resultados asociados a las variables X y Y.

Teorema 2.

Si $X_1 = \{0, ..., n-1\}$, $\#(X_1) = n$, $X_2 = \{0, ..., m-1\}$, $\#(X_2) = m = 10a$, *para algún* a *natural, entonces, para* $0 \leq k \leq 9$ *se cumple*

$$\begin{aligned}(R = k) &= R_{k,1} \cup \ldots \cup R_{k\ ,\ a} \\ &= \bigcup_{1\ \leq\ j\ \leq\ a} R_{k\ ,\ j}\end{aligned}$$

donde $R_{k,j} = \{ \ (h\ ,\ F_{k,j}(h)\ )\ ;\ h \in X_1 \}$

$$F_{k,j}(h) = \begin{cases} k - h + 10(j - i) & si\ h \leq k \leq 9 \\ k - h + 10j & si\ k < h < 9 \\ F_{k,j}(mod10(h)) & si\ h > 9 \end{cases}$$

Teorema 3.

Si $X_1 = \{0, ..., n-1\}$, $\#(X_1) = n$, $X_2 = \{0, ..., m-1\}$, $\#(X_2) = m = 10a$, *para algún a natural, entonces* $\#(R = k) = a(n)$ *para* $0 \leq k \leq 9$ *; además*

$$(R = k) = \sum_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}\ .$$

El teorema anterior muestra bajo qué condiciones la variable aleatoria R mapea el mismo número de parejas en cada dígito. Bajo tales condiciones, si las dos variables X y Y se distribuyeran uniformemente, entonces R también se distribuirá uniformemente. Sin embargo, se pueden reducir los requerimientos de uniformidad a una sola variable aleatoria como se indica en el teorema siguiente.

Teorema 4.

Si $X_1 = \{0, ..., n-1\}$, $\#(X_1) = n$, $X_2 = \{0, ..., m-1\}$, $\#(X_2) = m = 10a$ *para algún a natural y la variable aleatoria Y se distribuye uniformemente sobre* X_2, *entonces* $P_3\ (R = k) = 0.1$ *para* $0 \leq k \leq 9$.

En resumen, David Reyes, mediante los teoremas anteriores, demuestra que si se tienen dos variables aleatorias X y Y discretas e independientes, y una de las dos variables se distribuye uniformemente sobre un conjunto de valores de la forma $\{0, 1, ..., 10a - 1\}$ donde a es natural, entonces la variable aleatoria R se distribuye uniformemente en $\{0, 1, ..., 9\}$.

2.4 Condiciones necesarias para la uniformidad de R.

Hasta este punto se ha analizado cómo deben ser las variables aleatorias X y Y para que la variable aleatoria $R = (X + Y)\ mod\ 10$ se distribuya uniformemente y se han establecido ciertas condiciones suficientes sobre X y Y. Ahora se estudiarán las condiciones necesarias que deben cumplir.

David Reyes en su tesis profesional ilustra mediante un ejemplo que la condición de que una pseudodensidad sea uniforme sobre un conjunto de enteros con cardinalidad múltiplo de 10 no es una condición necesaria para que la variable R se distribuya uniformemente sobre $\{0, ..., 9\}$. Es decir, que las condiciones anteriores son suficientes pero no necesarias para que R se distribuya uniformemente. Las condiciones necesarias abarcan una variedad más amplia de situaciones relacionadas con las distribuciones de X y Y que las mencionadas en dicho trabajo, tales condiciones no se establecen formalmente, sino que se dejan para una futura investigación.

En el caso de que X y Y sean estadísticamente independientes, una condición necesaria sería que los espacios de resultados para X y Y junto con las pseudodensidades asociadas fueran tales que la suma de probabilidades $p_i * p_j$ sobre las parejas (i, j) que pertenecen al evento $(R = k)$ sea $\frac{1}{10}$ para $0 \leq k \leq 9$.

2.5 Aplicación en la construcción de tablas de dígitos aleatorios.

Con base a los resultados obtenidos en la Tesis profesional de David Reyes, se puede pensar que el método del Fraile Edvin constituye un método para construir nuevas sucesiones R_n con distribución uniforme apartir de dos sucesiones X_n y Y_n que cumplen ciertas condiciones.

En efecto, dada una sucesión X_n que se distribuya uniformemente sobre un conjunto de enteros con cardinalidad múltiplo de 10, se puede obtener mediante la función $R = (X + Y)\ mod\ 10$, varias sucesiones R_n que se distribuyan uniformemente sobre los dígitos de 0 a 9.

Puede servir cualquier sucesión de números Y_n que se tenga disponible y que sea independiente de la sucesión original X_n. Las sucesiones más sencillas que se pueden usar son las constantes, de la forma $Y_n = c$. Sin embargo, se debe tener en cuenta que a lo más se pueden obtener 10 sucesiones adicionales utilizando este tipo de sucesiones constantes. Lo que importa en el resultado del cálculo no son las magnitudes de los números X_n y Y_n sino el residuo de la división por 10 de dichos números, es decir, $X_n\ mod\ 10$ y $Y_n\ mod\ 10$, de modo que $(X_n + Y_n)\ mod\ 10 = [(X_n\ mod\ 10) + (Y_n\ mod\ 10)]\ mod\ 10$.

En particular si $Y_n = c_1$ donde $c_1 > 9$ entonces $c_1 = 10q + c_2$ con $0 \leq c_2 \leq 9$.

Sean $Y'_n = c_2$

$$R'_n = (X_n + Y'_n)\ mod\ 10 = (X_n + c_2)\ mod\ 10$$

entonces

$$\begin{aligned} R_n &= (X_n + Y_n)\ mod\ 10 \\ &= (X_n + c_1)\ mod\ 10 \\ &= (X_n + 10q + c_2)\ mod\ 10 \\ &= ((X_n + c_2) + 10q)\ mod\ 10 \\ &= ((X_n + c_2)\ mod\ 10 + (10q)\ mod\ 10)\ mod\ 10 \\ &= ((X_n + c_2)\ mod\ 10 + 0)\ mod\ 10 \\ &= (X_n + c_2)\ mod\ 10 \\ &= R'_n \end{aligned}$$

Esto muestra que cualquier sucesión R_n construida con una sucesión constante Y_n con valor mayor que 9 siempre corresponde a alguna sucesión R'_n construida con otra sucesión constante Y'_n con valor menor o igual a 9.

Por otra parte, si tales sucesiones de dígitos elaboradas con el método de Fray Edvin se van a utilizar como tablas de dígitos aleatorios en aplicaciones tales como el muestreo, cálculos y simulaciones de fenómenos aleatorios, etc., es necesario que dichas sucesiones presenten otras propiedades además de tener distribución uniforme, de modo que se comporten como las observadas en el capítulo 1.

Capítulo 3

Construcción de nuevas tablas de dígitos aleatorios.

En el capítulo anterior se mencionaron ciertas propiedades y características que deben cumplir las variables X y Y, para construir nuevas tablas de dígitos al azar utilizando la función $R = (X + Y)\ mod\ 10$.

En el capítulo 1 se mostró mediante diversas observaciones que los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith, efectivamente, además de distribuirse uniformemente, tienen regularidades estadísticas, son independientes estadísticamente y satisfacen la desigualdad de Chebishev y la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Al cumplir con las condiciones establecidas en el capítulo 2, tomaremos los dígitos de estas tablas como la variable X, mientras que para la variable Y se utilizarán, en principio, 100000 cifras decimales de π y 100000 de e, de esta forma se construyen 2 nuevos colectivos de 100000 dígitos cada uno. Posteriormente se toman estos nuevos colectivos como X y otras 100000 cifras decimales de π y de e, respectivamente, distintas a las anteriores, como la variable Y. Este procedimiento se repite hasta contar con 10 nuevos colectivos de 100000 dígitos cada uno, 5 construidos utilizando decimales de π y 5 a partir de decimales de e.

Por ejemplo, los primeros 10 dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith son $2, 3, 1, 5, 7, 5, 4, 8, 5, 9$ y las primeras 10 cifras decimales de π son $1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5$, entonces los primeros dígitos de nuestro nuevo colectivo construido a partir de la función R, serán:

$(2+1)\,mod 10, (3+4)\,mod 10, (1+1)\,mod 10, (5+5)\,mod 10, (7+9)\,mod 10,$
$(5+2)\,mod 10, (4+6)\,mod 10, (8+5)\,mod 10, (5+3)\,mod 10, (9+5)\,mod 10$
$= 3, 7, 2, 0, 6, 7, 0, 3, 8, 4,$ respectivamente.

Ahora para el segundo colectivo tomamos $X = \{3, 7, 2, 0, 6, 7, 0, 3, 8, 4, ...\}$ y $Y = \{4, 4, 1, 5, 9, 0, 8, 5, 5, 8, ...\}$ que son las cifras decimales de π 100001 en adelante. Aplicando R obtenemos:

$(3+4)\,mod 10, (7+4)\,mod 10, (2+1)\,mod 10, (0+5)\,mod 10, (6+9)\,mod 10,$
$(7+0)\,mod 10, (0+8)\,mod 10, (3+5)\,mod 10, (8+5)\,mod 10, (4+8)\,mod 10$

$= 7, 1, 3, 5, 5, 7, 8, 8, 3, 2,$ respectivamente, los cuales son los primeros 10 dígitos del segundo colectivo construido con cifras decimales de π. Este mecanismo se repite otras 3 veces para después realizar exactamente lo mismo pero sustituyendo los decimales de π por los de e.

Por lo tanto, en total en este trabajo se obtuvieron 1000000 de dígitos, 500000 utilizando cifras decimales de π y 500000 utilizando las de e, los cuales emplearemos en el siguiente capítulo para corroborar mediante las observaciones correspondientes, que la función propuesta por David Reyes en 1995, efectivamente es una herramienta útil y confiable para generar dígitos aleatorios y mediante la cual, a futuro, se pueden obtener muchos más.

Por cuestiones de volumen, en el capítulo 4 del presente trabajo, sólamente se muestran los resultados obtenidos para los siguientes colectivos de dígitos:

i) Colectivos 7001-8000 y 47001-48000.

ii) Colectivos 1-10000 y 40001-50000.

iii) Colectivo 1-100000.

Es decir, se eligieron los colectivos de 1000 dígitos generados en estas 10 tablas, por aquéllos en que, en el capítulo 1 se observaba la mayor dispersión con respecto a la frecuencia asintótica, así como los colectivos de 10000 dígitos que les contienen y finalmente los colectivos totales de cada una de las nuevas tablas. Excepto en la sección de la Desigualdad de Chebishev y la Ley Basta del Logaritmo Iterado, donde se utilizan los mismos cinco casos observados en el primer capítulo, es decir, $A = \{d\}$, con $d = 1, 2, 3, 5, 7$; tomando 100 colectivos de 1000 dígitos de los 500000 totales en cada caso, así como 10 colectivos de 10000 dígitos y los 5 colectivos de 100000.

Las cifras decimales de π y de e que se utilizaron para la construcción de estas tablas de dígitos, se pueden encontrar en la página web del Laboratorio de Aleatoriedad de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.,

http://www.dynamics.unam.edu/LaboratorioAleatoriedad.

Esta página contiene 5000000 de dígitos decimales de π obtenidos de la Universidad de Nagoya, Japón y 2000000 de dígitos decimales de e teniendo como fuente la Universidad George Mason y la Nasa.

Capítulo 4

Comportamiento de los dígitos de las nuevas tablas.

En este capítulo, realizaremos exactamente las mismas observaciones que en el capítulo 1, pero en vez de utilizar los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith, éstas se aplicarán a los dígitos de las nuevas tablas generadas mediante la función $R = (X + Y)$ *mod* 10[1]. Esto con el fin de observar los resultados, el comportamiento, las propiedades, las características que presentan estos nuevos dígitos y compararlos con los obtenidos en el primer capítulo. Además de establecer si la teoría también se adecua en estos casos.

4.1 Colectivos de dígitos obtenidos de las tablas generadas con la función R = (X+Y) mod 10, utilizando cifras decimales del número π.

4.1.1 Regularidades estadísticas de los colectivos de resultados.

Comenzemos, al igual que antes, tomando los dígitos de uno en uno, con $A = \{d\}$, donde $d = 0, 1, \ldots, 9$.

Los resultados cuando $n = 1000$ son

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño $n = 1000$.

Tabla 7001-8000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.104	0.098	0.096	0.085	0.128	0.091	0.093	0.107	0.092	0.106

Tabla 7001-8000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.110	0.114	0.098	0.106	0.085	0.103	0.107	0.088	0.086	0.103

[1] Las nuevas tablas serán distinguidas con los números romanos del I al V, tanto las generadas con cifras decimales de π como las generadas con las de e. Los colectivos tendrán el número correspondiente a la tabla a la que pertenezcan.

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 1000.

Tabla 7001-8000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.084	0.101	0.100	0.102	0.088	0.113	0.105	0.112	0.093	0.102

Tabla 7001-8000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.097	0.094	0.101	0.102	0.101	0.089	0.107	0.101	0.104	0.104

Tabla 7001-8000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.084	0.104	0.101	0.117	0.108	0.103	0.080	0.105	0.096	0.102

Tabla 47001-48000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.112	0.097	0.093	0.103	0.109	0.094	0.105	0.089	0.105	0.093

Tabla 47001-48000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.107	0.122	0.088	0.097	0.103	0.092	0.096	0.092	0.101	0.102

Tabla 47001-48000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.114	0.092	0.114	0.101	0.088	0.104	0.088	0.091	0.112	0.096

Tabla 47001-48000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.083	0.091	0.093	0.099	0.112	0.113	0.092	0.100	0.118	0.099

Tabla 47001-48000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.106	0.103	0.074	0.098	0.113	0.103	0.096	0.110	0.089	0.108

Podemos observar en estas tablas de resultados, que la frecuencia relativa de cada uno de los dígitos, se aproxima a 0.1, i.e., $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+...+\delta_{1000}(A)}{1000} \approx \frac{1}{10}$ para $A = \{d\}$, $d = 0, 1, ..., 9$.

Para $n = 10000$, los resultados son:

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 10000.

Tabla 1-10000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1019	0.0963	0.1010	0.0987	0.1061	0.0980	0.0948	0.1022	0.0979	0.1031

Tabla 1-10000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1030	0.1020	0.0963	0.1002	0.0970	0.1014	0.0975	0.1031	0.0979	0.1016

Tabla 1-10000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0989	0.0951	0.1005	0.1059	0.0999	0.1007	0.0996	0.0974	0.1003	0.1017

Tabla 1-10000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0965	0.1017	0.1038	0.1013	0.1033	0.0972	0.0961	0.0997	0.1011	0.0993

Tabla 1-10000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0992	0.1004	0.0995	0.1031	0.1034	0.0967	0.1001	0.0985	0.1027	0.0964

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 10000.

Tabla 40001-50000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1013	0.0969	0.0976	0.1018	0.0946	0.0990	0.1019	0.1036	0.1015	0.1018

Tabla 400001-50000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1007	0.0950	0.1017	0.0993	0.1035	0.1013	0.0993	0.1003	0.0991	0.0998

Tabla 40001-50000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1036	0.1009	0.1002	0.1000	0.0931	0.0993	0.1014	0.1023	0.0999	0.0993

Tabla 40001-50000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0940	0.0986	0.0984	0.1061	0.1007	0.1036	0.0974	0.0967	0.0999	0.1046

Tabla 40001-50000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1038	0.1049	0.0996	0.0969	0.0998	0.0971	0.0986	0.1026	0.0984	0.0983

Observamos que se mantiene que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{10000}(A)}{10000} \approx \frac{1}{10}$, pero con una mejor aproximación.

Finalmente veamos cómo se comportan los colectivos totales de las tablas, es decir, cuando $n = 100000$.

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 100000.

Tabla 1-100000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10037	0.09906	0.10034	0.10041	0.09941	0.09889	0.10096	0.10032	0.10041	0.09983

Tabla 1-100000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.09969	0.10178	0.10013	0.09989	0.09929	0.10135	0.10036	0.09923	0.09983	0.09845

Tabla 1-100000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.09895	0.09991	0.10029	0.10018	0.09851	0.10004	0.10036	0.10073	0.09966	0.10137

Tabla 1-100000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.09799	0.09896	0.10066	0.10006	0.10176	0.09988	0.09925	0.09874	0.10073	0.10197

Tabla 1-100000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10086	0.10256	0.10137	0.09859	0.09983	0.09893	0.09953	0.10010	0.09885	0.09938

También se obtiene que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{100000}(A)}{100000} \approx \frac{1}{10}$.

Hemos podido corroborar mediante estas primeras observaciones que al igual que en las tablas de dígitos de Kendall y Babington Smith, en las nuevas tablas originadas con las cifras decimales de π, al tomar los dígitos de uno en uno y sin importar el orden, $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx \frac{1}{10} = p_A$, con $A = \{d\}$, $d = 0, 1, \ldots, 9$, $\forall$ *n grande*. Por lo tanto, es posible afirmar que estos colectivos de dígitos, también tienen regularidades estadísticas.

A continuación veremos si al formar parejas con los dígitos, están tienen también regularidades estadísticas. Recordemos que en este caso, $A = \{(d_1, d_2)\}$, $d_1, d_2 = 0, 1, \ldots, 9$ y $n = 975, 9750, 97500$.

Comencemos con $n = 975$ parejas de dígitos.

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 975$.
Tabla 7001-8000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0113	0.0072	0.0154	0.0041	0.0195	0.0092	0.0123	0.0092	0.0103	0.0062
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0051	0.0133	0.0113	0.0041	0.0103	0.0123	0.0123	0.0133	0.0092	0.0082
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0072	0.0164	0.0082	0.0082	0.0144	0.0092	0.0051	0.0072	0.0103	0.0092
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0123	0.0113	0.0072	0.0051	0.0082	0.0082	0.0051	0.0103	0.0072	0.0113
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0133	0.0154	0.0092	0.0113	0.0133	0.0082	0.0154	0.0113	0.0133	0.0195
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0113	0.0041	0.0123	0.0103	0.0051	0.0092	0.0113	0.0072	0.0082	0.0092
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0113	0.0072	0.0092	0.0082	0.0133	0.0103	0.0062	0.0092	0.0051	0.0144
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0123	0.0092	0.0082	0.0113	0.0123	0.0103	0.0072	0.0144	0.0133	0.0103
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0062	0.0092	0.0082	0.0113	0.0144	0.0041	0.0082	0.0092	0.0072	0.0123
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0154	0.0051	0.0082	0.0113	0.0185	0.0082	0.0082	0.0133	0.0072	0.0072

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 7001-8000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0133	0.0133	0.0123	0.0123	0.0144	0.0103	0.0103	0.0062	0.0072	0.0113
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0144	0.0144	0.0113	0.0113	0.0092	0.0133	0.0082	0.0062	0.0082	0.0144
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0133	0.0113	0.0072	0.0185	0.0062	0.0103	0.0082	0.0092	0.0082	0.0082
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0103	0.0123	0.0103	0.0113	0.0072	0.0103	0.0144	0.0113	0.0092	0.0082
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0082	0.0092	0.0103	0.0062	0.0103	0.0082	0.0041	0.0123	0.0082
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0103	0.0174	0.0072	0.0092	0.0062	0.0092	0.0123	0.0103	0.0092	0.0133
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0113	0.0062	0.0113	0.0113	0.0113	0.0123	0.0133	0.0123	0.0051	0.0092
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0123	0.0062	0.0082	0.0072	0.0051	0.0072	0.0123	0.0113	0.0103	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0041	0.0154	0.0082	0.0113	0.0062	0.0113	0.0072	0.0072	0.0103	0.0041
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0103	0.0103	0.0123	0.0051	0.0123	0.0103	0.0144	0.0082	0.0072	0.0144

Tabla 7001-8000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0041	0.0072	0.0072	0.0072	0.0082	0.0041	0.0133	0.0123	0.0082	0.0103
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0092	0.0062	0.0051	0.0144	0.0062	0.0185	0.0072	0.0164	0.0113	0.0092
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0092	0.0133	0.0082	0.0072	0.0103	0.0133	0.0103	0.0103	0.0123	0.0072
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0133	0.0082	0.0123	0.0123	0.0103	0.0103	0.0113	0.0051	0.0092	0.0092
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0041	0.0082	0.0103	0.0072	0.0103	0.0082	0.0092	0.0072	0.0092	0.0144
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0072	0.0133	0.0123	0.0123	0.0133	0.0123	0.0103	0.0133	0.0092	0.0082
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0072	0.0082	0.0113	0.0123	0.0072	0.0103	0.0154	0.0174	0.0082	0.0082
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0103	0.0123	0.0123	0.0103	0.0062	0.0144	0.0123	0.0133	0.0082	0.0123
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0103	0.0082	0.0092	0.0103	0.0092	0.0082	0.0082	0.0072	0.0092	0.0133
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0092	0.0154	0.0113	0.0113	0.0051	0.0144	0.0082	0.0072	0.0082	0.0103

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 7001-8000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0103	0.0072	0.0092	0.0144	0.0062	0.0082	0.0123	0.0082	0.0123	0.0092
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0062	0.0041	0.0123	0.0072	0.0082	0.0103	0.0133	0.0062	0.0154	0.0103
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0103	0.0072	0.0133	0.0092	0.0103	0.0092	0.0113	0.0133	0.0092	0.0082
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0103	0.0113	0.0113	0.0082	0.0103	0.0113	0.0082	0.0133	0.0092	0.0092
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0103	0.0133	0.0051	0.0113	0.0103	0.0062	0.0154	0.0072	0.0103	0.0113
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0082	0.0103	0.0051	0.0123	0.0103	0.0062	0.0031	0.0123	0.0092	0.0103
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0113	0.0103	0.0123	0.0051	0.0103	0.0103	0.0133	0.0133	0.0103	0.0123
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0133	0.0154	0.0082	0.0072	0.0082	0.0072	0.0133	0.0051	0.0103	0.0113
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0113	0.0051	0.0144	0.0082	0.0154	0.0062	0.0051	0.0144	0.0113	0.0123
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0072	0.0113	0.0082	0.0154	0.0113	0.0123	0.0133	0.0072	0.0082	0.0113

Tabla 7001-8000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0072	0.0082	0.0092	0.0113	0.0113	0.0041	0.0082	0.0123	0.0072	0.0062
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0072	0.0051	0.0144	0.0113	0.0123	0.0123	0.0072	0.0092	0.0113	0.0123
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0062	0.0051	0.0123	0.0133	0.0133	0.0051	0.0103	0.0123	0.0092	0.0144
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0092	0.0113	0.0164	0.0144	0.0164	0.0123	0.0123	0.0062	0.0103	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0072	0.0133	0.0021	0.0164	0.0154	0.0123	0.0082	0.0133	0.0092	0.0092
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0123	0.0113	0.0113	0.0133	0.0072	0.0133	0.0072	0.0113	0.0082	0.0082
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0082	0.0113	0.0072	0.0051	0.0123	0.0092	0.0041	0.0113	0.0051	0.0062
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0072	0.0154	0.0103	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0082	0.0154	0.0133
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0113	0.0154	0.0103	0.0123	0.0051	0.0092	0.0062	0.0113	0.0103	0.0051
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0072	0.0092	0.0051	0.0113	0.0082	0.0144	0.0072	0.0103	0.0092	0.0164

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 47001-48000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0144	0.0092	0.0103	0.0103	0.0113	0.0174	0.0123	0.0123	0.0062	0.0103
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0082	0.0031	0.0103	0.0092	0.0144	0.0123	0.0092	0.0123	0.0103	0.0092
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0103	0.0123	0.0133	0.0103	0.0103	0.0082	0.0072	0.0051	0.0062	0.0082
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0103	0.0082	0.0092	0.0123	0.0133	0.0062	0.0133	0.0082	0.0144	0.0082
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0164	0.0113	0.0072	0.0092	0.0154	0.0062	0.0133	0.0113	0.0103	0.0062
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0092	0.0092	0.0041	0.0113	0.0051	0.0113	0.0103	0.0072	0.0103	0.0144
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0123	0.0113	0.0092	0.0092	0.0072	0.0092	0.0133	0.0092	0.0174	0.0072
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0103	0.0082	0.0113	0.0113	0.0113	0.0062	0.0082	0.0072	0.0103	0.0072
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0144	0.0195	0.0092	0.0072	0.0113	0.0082	0.0082	0.0082	0.0092	0.0092
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0072	0.0062	0.0082	0.0123	0.0123	0.0082	0.0082	0.0072	0.0103	0.0123

Tabla 47001-48000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0092	0.0103	0.0082	0.0113	0.0123	0.0072	0.0072	0.0072	0.0174	0.0144
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0154	0.0123	0.0103	0.0092	0.0123	0.0174	0.0103	0.0164	0.0082	0.0113
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0123	0.0113	0.0072	0.0082	0.0041	0.0082	0.0113	0.0092	0.0082	0.0092
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0113	0.0154	0.0062	0.0092	0.0113	0.0123	0.0051	0.0062	0.0072	0.0133
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0082	0.0113	0.0144	0.0092	0.0092	0.0154	0.0062	0.0092	0.0103
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0082	0.0133	0.0113	0.0103	0.0082	0.0051	0.0062	0.0113	0.0113	0.0062
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0123	0.0113	0.0082	0.0154	0.0144	0.0062	0.0072	0.0041	0.0103	0.0072
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0103	0.0082	0.0113	0.0072	0.0092	0.0082	0.0103	0.0082	0.0103	0.0072
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0113	0.0144	0.0082	0.0021	0.0103	0.0113	0.0113	0.0144	0.0113	0.0072
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0092	0.0154	0.0072	0.0103	0.0103	0.0092	0.0103	0.0092	0.0082	0.0144

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 47001-48000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0205	0.0103	0.0103	0.0164	0.0092	0.0072	0.0082	0.0113	0.0092	0.0092
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0133	0.0092	0.0123	0.0113	0.0051	0.0082	0.0082	0.0092	0.0072	0.0092
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0082	0.0103	0.0133	0.0082	0.0092	0.0144	0.0123	0.0133	0.0133	0.0123
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0133	0.0092	0.0062	0.0092	0.0092	0.0164	0.0092	0.0051	0.0092	0.0144
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0092	0.0113	0.0072	0.0072	0.0103	0.0051	0.0103	0.0154	0.0051
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0082	0.0062	0.0164	0.0144	0.0082	0.0103	0.0072	0.0113	0.0144	0.0082
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0154	0.0051	0.0092	0.0051	0.0092	0.0082	0.0082	0.0092	0.0103	0.0051
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0092	0.0072	0.0103	0.0113	0.0082	0.0031	0.0123	0.0082	0.0113	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0062	0.0113	0.0123	0.0082	0.0164	0.0195	0.0133	0.0082	0.0103	0.0082
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0103	0.0133	0.0113	0.0123	0.0082	0.0062	0.0051	0.0051	0.0123	0.0103

Tabla 47001-48000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0082	0.0041	0.0092	0.0072	0.0113	0.0072	0.0092	0.0103	0.0092	0.0072
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0041	0.0103	0.0144	0.0092	0.0103	0.0103	0.0072	0.0082	0.0082	0.0082
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0103	0.0031	0.0051	0.0103	0.0051	0.0113	0.0123	0.0113	0.0092	0.0133
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0072	0.0103	0.0123	0.0092	0.0123	0.0092	0.0062	0.0133	0.0103	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0154	0.0082	0.0082	0.0144	0.0123	0.0092	0.0144	0.0133	0.0082
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0082	0.0072	0.0123	0.0113	0.0123	0.0144	0.0092	0.0133	0.0174	0.0092
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0123	0.0082	0.0082	0.0103	0.0092	0.0082	0.0062	0.0072	0.0103	0.0123
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0082	0.0092	0.0072	0.0123	0.0103	0.0144	0.0062	0.0092	0.0133	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0092	0.0113	0.0092	0.0123	0.0185	0.0133	0.0133	0.0072	0.0133	0.0123
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0062	0.0123	0.0062	0.0103	0.0072	0.0123	0.0103	0.0072	0.0144	0.0092

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 975$.
Tabla 47001-48000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0174	0.0092	0.0062	0.0092	0.0133	0.0062	0.0113	0.0113	0.0103	0.0133
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0072	0.0113	0.0072	0.0154	0.0092	0.0113	0.0092	0.0113	0.0082	0.0103
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0062	0.0082	0.0062	0.0010	0.0133	0.0062	0.0103	0.0072	0.0082	0.0082
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0133	0.0072	0.0082	0.0072	0.0103	0.0123	0.0072	0.0133	0.0092	0.0092
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0215	0.0072	0.0092	0.0174	0.0062	0.0103	0.0092	0.0092	0.0123	0.0103
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0072	0.0051	0.0092	0.0092	0.0103	0.0154	0.0082	0.0113	0.0113	0.0154
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0082	0.0062	0.0072	0.0164	0.0072	0.0154	0.0072	0.0123	0.0082	0.0082
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0062	0.0215	0.0082	0.0103	0.0164	0.0062	0.0113	0.0133	0.0082	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0031	0.0133	0.0072	0.0072	0.0144	0.0072	0.0072	0.0133	0.0082	0.0082
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0144	0.0133	0.0051	0.0072	0.0133	0.0123	0.0154	0.0051	0.0072	0.0144

Se observa un comportamiento de las frecuencias relativas de los dígitos más o menos cercano a 0.01, aunque para algunos dígitos pareciera no serlo, tal y como sucedió en el capítulo 1 con las parejas de dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith cuando $n = 975$, en este caso resulta que la mayor diferencia con este número es 0.0115. Entonces tenemos que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{975}(A)}{975} \approx \frac{1}{100}$, con $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0115$, que casualmente es igual que en las tablas originales.

Ahora veamos cómo se comportan cuando $n = 9750$

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0114	0.0097	0.0111	0.0079	0.0101	0.0116	0.0095	0.0101	0.0102	0.0105
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0078	0.0107	0.0112	0.0091	0.0102	0.0086	0.0086	0.0108	0.0091	0.0107
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0099	0.0093	0.0105	0.0112	0.0118	0.0095	0.0101	0.0087	0.0099	0.0105
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0115	0.0095	0.0107	0.0095	0.0092	0.0103	0.0091	0.0091	0.0101	0.0095
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0102	0.0109	0.0090	0.0099	0.0116	0.0105	0.0094	0.0109	0.0116	0.0119
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0102	0.0092	0.0096	0.0096	0.0113	0.0082	0.0109	0.0092	0.0105	0.0094
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0095	0.0109	0.0087	0.0087	0.0103	0.0085	0.0103	0.0103	0.0086	0.0094
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0096	0.0109	0.0096	0.0117	0.0097	0.0094	0.0093	0.0112	0.0105	0.0105
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0110	0.0069	0.0108	0.0096	0.0121	0.0092	0.0080	0.0108	0.0081	0.0109
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0106	0.0086	0.0101	0.0106	0.0107	0.0118	0.0092	0.0107	0.0097	0.0105

Tabla 1-10000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0112	0.0112	0.0105	0.0115	0.0106	0.0118	0.0084	0.0098	0.0091	0.0101
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0117	0.0110	0.0102	0.0109	0.0085	0.0089	0.0091	0.0105	0.0109	0.0096
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0091	0.0089	0.0090	0.0118	0.0097	0.0089	0.0092	0.0098	0.0091	0.0102
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0107	0.0099	0.0090	0.0096	0.0096	0.0110	0.0101	0.0098	0.0102	0.0106
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0096	0.0099	0.0093	0.0090	0.0092	0.0095	0.0104	0.0107	0.0099	0.0105
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0099	0.0105	0.0095	0.0093	0.0110	0.0086	0.0112	0.0111	0.0095	0.0103
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0102	0.0093	0.0096	0.0097	0.0085	0.0104	0.0093	0.0112	0.0090	0.0091
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0098	0.0106	0.0103	0.0091	0.0092	0.0125	0.0103	0.0106	0.0111	0.0099
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0094	0.0115	0.0095	0.0104	0.0099	0.0106	0.0077	0.0096	0.0093	0.0097
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0109	0.0098	0.0098	0.0089	0.0113	0.0097	0.0116	0.0092	0.0099	0.0104

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0096	0.0103	0.0107	0.0101	0.0089	0.0097	0.0111	0.0083	0.0104	0.0090
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0077	0.0099	0.0087	0.0109	0.0099	0.0108	0.0084	0.0102	0.0102	0.0089
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0097	0.0090	0.0113	0.0115	0.0091	0.0109	0.0096	0.0075	0.0119	0.0107
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0103	0.0081	0.0095	0.0115	0.0122	0.0097	0.0111	0.0105	0.0121	0.0105
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0099	0.0094	0.0090	0.0103	0.0111	0.0091	0.0104	0.0111	0.0081	0.0116
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0110	0.0101	0.0109	0.0107	0.0101	0.0088	0.0093	0.0104	0.0084	0.0104
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0095	0.0084	0.0090	0.0109	0.0106	0.0098	0.0102	0.0113	0.0095	0.0107
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0092	0.0092	0.0104	0.0091	0.0093	0.0102	0.0093	0.0098	0.0115	0.0093
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0095	0.0110	0.0101	0.0091	0.0096	0.0107	0.0103	0.0091	0.0096	0.0110
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0117	0.0094	0.0106	0.0122	0.0092	0.0108	0.0104	0.0094	0.0088	0.0099

Tabla 1-10000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0103	0.0084	0.0105	0.0104	0.0096	0.0090	0.0095	0.0094	0.0087	0.0104
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0092	0.0102	0.0109	0.0086	0.0086	0.0102	0.0099	0.0112	0.0125	0.0105
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0102	0.0113	0.0095	0.0108	0.0115	0.0098	0.0097	0.0111	0.0102	0.0093
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0096	0.0115	0.0104	0.0097	0.0110	0.0091	0.0106	0.0097	0.0103	0.0098
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0105	0.0106	0.0115	0.0099	0.0111	0.0084	0.0105	0.0102	0.0107	0.0103
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0084	0.0114	0.0096	0.0116	0.0082	0.0098	0.0089	0.0095	0.0094	0.0096
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0113	0.0095	0.0093	0.0076	0.0110	0.0097	0.0096	0.0095	0.0114	0.0077
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0090	0.0099	0.0111	0.0111	0.0113	0.0095	0.0104	0.0077	0.0081	0.0116
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0088	0.0093	0.0111	0.0091	0.0114	0.0096	0.0088	0.0117	0.0104	0.0107
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0095	0.0097	0.0098	0.0124	0.0095	0.0112	0.0085	0.0094	0.0095	0.0097

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0098	0.0095	0.0101	0.0111	0.0093	0.0107	0.0089	0.0101	0.0111	0.0086
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0090	0.0096	0.0097	0.0099	0.0095	0.0097	0.0105	0.0108	0.0111	0.0095
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0102	0.0087	0.0110	0.0108	0.0092	0.0088	0.0108	0.0087	0.0113	0.0113
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0099	0.0098	0.0112	0.0110	0.0111	0.0090	0.0115	0.0086	0.0096	0.0118
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0097	0.0096	0.0078	0.0104	0.0128	0.0112	0.0115	0.0118	0.0088	0.0091
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0096	0.0104	0.0090	0.0101	0.0092	0.0104	0.0086	0.0101	0.0101	0.0097
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0114	0.0103	0.0111	0.0106	0.0101	0.0096	0.0081	0.0101	0.0101
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0102	0.0098	0.0105	0.0095	0.0102	0.0087	0.0097	0.0104	0.0106	0.0083
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0121	0.0118	0.0110	0.0096	0.0098	0.0098	0.0104	0.0093	0.0108	0.0083
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0088	0.0099	0.0092	0.0099	0.0111	0.0086	0.0090	0.0101	0.0095	0.0096

Tabla 40001-50000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0104	0.0091	0.0113	0.0101	0.0099	0.0097	0.0112	0.0112	0.0099	0.0093
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0095	0.0086	0.0087	0.0084	0.0094	0.0088	0.0098	0.0121	0.0098	0.0105
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0112	0.0102	0.0106	0.0097	0.0087	0.0090	0.0101	0.0090	0.0094	0.0098
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0107	0.0108	0.0101	0.0103	0.0093	0.0104	0.0095	0.0084	0.0114	0.0111
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0091	0.0091	0.0075	0.0098	0.0107	0.0093	0.0089	0.0108	0.0097	0.0094
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0102	0.0098	0.0099	0.0099	0.0091	0.0087	0.0119	0.0107	0.0085	0.0103
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0111	0.0107	0.0097	0.0107	0.0102	0.0098	0.0092	0.0097	0.0112	0.0104
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0106	0.0096	0.0091	0.0113	0.0096	0.0109	0.0102	0.0107	0.0107	0.0110
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0088	0.0099	0.0104	0.0120	0.0091	0.0118	0.0096	0.0093	0.0098	0.0103
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0094	0.0087	0.0107	0.0088	0.0094	0.0112	0.0114	0.0118	0.0098	0.0103

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 40001-50000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0091	0.0083	0.0092	0.0118	0.0118	0.0101	0.0088	0.0108	0.0106	0.0099
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0090	0.0090	0.0097	0.0085	0.0098	0.0102	0.0104	0.0097	0.0089	0.0093
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0112	0.0111	0.0097	0.0097	0.0093	0.0093	0.0104	0.0104	0.0093	0.0111
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0107	0.0097	0.0096	0.0103	0.0104	0.0111	0.0084	0.0099	0.0083	0.0115
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0108	0.0091	0.0112	0.0092	0.0112	0.0114	0.0109	0.0092	0.0109	0.0094
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0090	0.0108	0.0113	0.0099	0.0105	0.0107	0.0110	0.0098	0.0090	0.0089
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0091	0.0093	0.0102	0.0094	0.0108	0.0113	0.0109	0.0094	0.0106	0.0088
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0113	0.0095	0.0109	0.0087	0.0096	0.0082	0.0103	0.0115	0.0104	0.0102
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0097	0.0092	0.0096	0.0091	0.0106	0.0105	0.0099	0.0116	0.0096	0.0091
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0106	0.0085	0.0102	0.0118	0.0096	0.0096	0.0080	0.0087	0.0117	0.0112

Tabla 40001-50000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0111	0.0101	0.0125	0.0109	0.0088	0.0097	0.0103	0.0106	0.0091	0.0109
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0109	0.0104	0.0107	0.0117	0.0079	0.0087	0.0097	0.0115	0.0089	0.0099
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0089	0.0101	0.0103	0.0086	0.0091	0.0098	0.0106	0.0103	0.0113	0.0114
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0117	0.0107	0.0097	0.0110	0.0085	0.0099	0.0099	0.0088	0.0102	0.0096
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0098	0.0078	0.0090	0.0102	0.0094	0.0099	0.0092	0.0096	0.0102	0.0088
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0099	0.0094	0.0116	0.0098	0.0081	0.0104	0.0105	0.0099	0.0095	0.0106
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0103	0.0109	0.0091	0.0095	0.0108	0.0108	0.0096	0.0106	0.0096	0.0103
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0119	0.0089	0.0096	0.0102	0.0114	0.0092	0.0104	0.0105	0.0094	0.0097
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0086	0.0109	0.0093	0.0087	0.0112	0.0112	0.0105	0.0095	0.0109	0.0090
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0110	0.0116	0.0085	0.0102	0.0076	0.0095	0.0108	0.0107	0.0108	0.0085

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 9750$.

Tabla 40001-50000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0076	0.0086	0.0107	0.0108	0.0092	0.0099	0.0087	0.0102	0.0097	0.0091
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0106	0.0080	0.0109	0.0102	0.0121	0.0102	0.0090	0.0089	0.0087	0.0099
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0081	0.0093	0.0096	0.0083	0.0095	0.0115	0.0112	0.0104	0.0101	0.0111
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0093	0.0108	0.0119	0.0111	0.0111	0.0101	0.0099	0.0105	0.0097	0.0122
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0081	0.0115	0.0079	0.0093	0.0096	0.0126	0.0089	0.0094	0.0112	0.0115
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0119	0.0112	0.0082	0.0111	0.0110	0.0121	0.0092	0.0103	0.0105	0.0091
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0089	0.0092	0.0105	0.0118	0.0096	0.0091	0.0089	0.0091	0.0091	0.0101
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0090	0.0108	0.0093	0.0098	0.0092	0.0108	0.0092	0.0088	0.0097	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0105	0.0096	0.0099	0.0118	0.0083	0.0090	0.0105	0.0091	0.0094	0.0118
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0102	0.0102	0.0091	0.0117	0.0110	0.0087	0.0109	0.0108	0.0116	0.0103

Tabla 40001-50000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0113	0.0096	0.0084	0.0104	0.0102	0.0114	0.0107	0.0098	0.0105	0.0112
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0086	0.0131	0.0114	0.0104	0.0090	0.0116	0.0094	0.0109	0.0097	0.0102
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0098	0.0096	0.0106	0.0106	0.0112	0.0088	0.0099	0.0092	0.0094	0.0099
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0108	0.0107	0.0090	0.0086	0.0109	0.0084	0.0094	0.0095	0.0105	0.0097
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0114	0.0093	0.0110	0.0103	0.0104	0.0094	0.0092	0.0106	0.0108	0.0077
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0093	0.0092	0.0103	0.0092	0.0101	0.0090	0.0102	0.0090	0.0111	0.0099
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0110	0.0093	0.0116	0.0129	0.0087	0.0080	0.0098	0.0084	0.0096	0.0091
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0107	0.0111	0.0098	0.0091	0.0103	0.0109	0.0101	0.0113	0.0106	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0097	0.0113	0.0095	0.0083	0.0103	0.0087	0.0104	0.0110	0.0084	0.0112
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0108	0.0112	0.0080	0.0083	0.0091	0.0113	0.0095	0.0112	0.0084	0.0102

Claramente las frecuencias relativas de las tablas anteriores muestran que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{9750}(A)}{9750} \approx \frac{1}{100}$, pero en este caso con una diferencia máxima de 0.0031, es decir, $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0031$. En el capítulo 1, esta diferencia era menor o igual que 0.0033, así que podemos decir que se mantiene el resultado.

Para $n = 97500$ se obtiene lo siguiente:

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 97500.
Tabla 1-100000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.01038	0.00963	0.01041	0.01014	0.0099	0.01037	0.00995	0.01011	0.00968	0.00985
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00947	0.01001	0.01042	0.00972	0.00964	0.00999	0.00962	0.01004	0.01048	0.00977
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.00972	0.01	0.00976	0.01037	0.00992	0.00998	0.01033	0.0096	0.01076	0.00977
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.00988	0.01038	0.01027	0.00964	0.01006	0.00977	0.01027	0.01006	0.00963	0.01022
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.00976	0.01026	0.00942	0.00981	0.00964	0.01007	0.01009	0.01043	0.0097	0.01017
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.01018	0.00987	0.01017	0.00976	0.0096	0.00944	0.01041	0.01009	0.00996	0.00944
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.01052	0.01034	0.00995	0.01021	0.01035	0.00949	0.00977	0.00991	0.01045	0.01016
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.01022	0.00973	0.00986	0.01038	0.01001	0.00974	0.00996	0.01003	0.0103	0.01027
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.01004	0.00952	0.00977	0.01024	0.01008	0.01009	0.01036	0.01017	0.00965	0.01038
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.01008	0.00926	0.01026	0.01008	0.01032	0.01012	0.01012	0.01007	0.0096	0.00988

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 97500.

Tabla 1-100000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.00982	0.01025	0.00976	0.01056	0.00976	0.01053	0.00984	0.00985	0.00974	0.00981
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.01002	0.01026	0.0104	0.01014	0.00996	0.01035	0.01018	0.01022	0.01027	0.00975
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.01023	0.00983	0.00972	0.01023	0.01002	0.00966	0.0103	0.00988	0.01008	0.01006
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.01034	0.00997	0.0099	0.01017	0.01002	0.01035	0.00999	0.00931	0.01005	0.00978
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.00996	0.0105	0.0097	0.00941	0.00955	0.01066	0.00998	0.01009	0.00982	0.00983
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.00981	0.01037	0.01052	0.00973	0.01017	0.01005	0.01043	0.00987	0.01035	0.00975
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.00983	0.01015	0.01044	0.01026	0.00997	0.01027	0.01001	0.01023	0.00968	0.00964
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.01004	0.01008	0.00978	0.00978	0.00955	0.00988	0.01015	0.01024	0.0101	0.00974
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00993	0.01051	0.01001	0.00982	0.01024	0.01008	0.00957	0.01005	0.00991	0.00955
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.00967	0.01	0.01006	0.00978	0.00998	0.00934	0.00973	0.00963	0.01007	0.01034

Tabla 1-100000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.00975	0.00995	0.01031	0.0101	0.0095	0.00955	0.01026	0.01004	0.00982	0.00989
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00887	0.00992	0.01052	0.00973	0.01012	0.00967	0.01037	0.01025	0.01033	0.01003
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.00979	0.00987	0.01036	0.00957	0.00965	0.01012	0.01042	0.00987	0.01043	0.01034
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.00983	0.00999	0.00963	0.01022	0.01015	0.0105	0.00963	0.01004	0.01019	0.00983
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.00997	0.00955	0.00933	0.01013	0.00945	0.01059	0.0101	0.00984	0.00965	0.01011
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.00998	0.01025	0.0101	0.00987	0.00951	0.00965	0.01034	0.00995	0.00991	0.0103
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.01034	0.01015	0.00981	0.00985	0.01019	0.00978	0.01007	0.00995	0.00969	0.01036
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.00991	0.00994	0.01015	0.01008	0.00997	0.00962	0.01017	0.01019	0.01001	0.01046
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00982	0.01026	0.00981	0.0099	0.01013	0.01034	0.00932	0.0101	0.01005	0.01
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.01039	0.01017	0.01018	0.01093	0.00987	0.01016	0.0097	0.01034	0.00974	0.01009

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 97500$.

Tabla 1-100000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0095	0.00936	0.01031	0.00988	0.00999	0.00971	0.01	0.00959	0.00932	0.01013
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00986	0.00978	0.01003	0.00938	0.01018	0.01007	0.00976	0.00975	0.01045	0.00974
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.00951	0.01064	0.01006	0.0101	0.01052	0.00994	0.0099	0.01002	0.00997	0.0101
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.00956	0.01005	0.00978	0.01013	0.01009	0.00992	0.01021	0.01003	0.01012	0.01018
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.01001	0.01013	0.01038	0.01044	0.01025	0.00984	0.00981	0.01025	0.01013	0.01058
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.01008	0.00998	0.00963	0.00982	0.00979	0.00996	0.00981	0.00996	0.01067	0.01018
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0103	0.00974	0.00975	0.00981	0.01007	0.00966	0.01009	0.00955	0.01037	0.00973
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.00951	0.00938	0.01047	0.00998	0.01036	0.01048	0.00957	0.00937	0.00923	0.01042
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00956	0.00987	0.01054	0.01019	0.00996	0.01001	0.01004	0.00987	0.01005	0.01077
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.01021	0.01007	0.00983	0.01031	0.01036	0.01031	0.01003	0.01024	0.01041	0.01017

Tabla 1-100000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.00986	0.01005	0.01036	0.01005	0.01008	0.01032	0.00987	0.01026	0.00982	0.01024
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00965	0.01088	0.01072	0.01017	0.00999	0.01038	0.01031	0.0101	0.00983	0.01025
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.01045	0.01042	0.00993	0.00983	0.01046	0.00963	0.01016	0.01027	0.01013	0.01014
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.01003	0.01012	0.00995	0.00982	0.00993	0.00978	0.00993	0.00947	0.00981	0.00979
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.00996	0.01021	0.00961	0.01017	0.0105	0.01009	0.00999	0.01006	0.00965	0.00934
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.01025	0.00982	0.01057	0.01011	0.0097	0.00973	0.00952	0.00963	0.00991	0.0097
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.00989	0.0099	0.01049	0.00995	0.00957	0.00999	0.01016	0.00991	0.00987	0.01009
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.00994	0.01056	0.00934	0.00962	0.01011	0.00959	0.00977	0.01055	0.0107	0.01008
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.01047	0.01043	0.01012	0.00945	0.01002	0.00941	0.00966	0.00995	0.00988	0.00969
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.01023	0.01014	0.01039	0.00953	0.00942	0.01014	0.01006	0.00976	0.00953	0.00988

Se observa que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{97500}(A)}{97500} \approx \frac{1}{100}$, con $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.00113$, que es mayor que el 0.0007 obtenido en el capítulo 1, sin embargo se ve que sigue siendo una muy buena aproximación ya que la diferencia es bastante pequeña.

Podemos concluir de esta sección que los dígitos, en estas 5 nuevas tablas, extraidos individualmente o por parejas, se adecuan, se apegan a lo que establece la Ley Natural de los Números Grandes,

$$\frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx p_A, \; \forall \; n \; grande.$$

Además, estos resultados inducen a pensar que la frecuencia relativa tiene una mejor aproximación a la frecuencia asintótica conforme n crece, es decir,

$$\left|\frac{n(A)}{n} - p_A\right| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

4.1.2 Independencia estadística.

En esta sección veremos si en estas nuevas tablas, se conserva la independencia estadística mostrada en el capítulo 1 por los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith, o si se ve afectada de algúna manera por la intervención de los decimales de π.

Comencemos, al igual que en el capítulo 1, con los colectivos de 10000 dígitos y los de 9750 parejas formadas con estos mismos y observemos que comportamiento presentan.

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000-I

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.109	0.093	0.106	0.076	0.096	0.111	0.091	0.096	0.097	0.100
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.079	0.108	0.113	0.092	0.103	0.087	0.087	0.109	0.092	0.108
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.096	0.090	0.101	0.108	0.114	0.092	0.097	0.084	0.096	0.101
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.113	0.094	0.105	0.094	0.091	0.101	0.090	0.090	0.099	0.094
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.093	0.100	0.083	0.091	0.107	0.096	0.087	0.100	0.107	0.109
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.101	0.092	0.096	0.096	0.112	0.082	0.108	0.092	0.104	0.094
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.098	0.112	0.090	0.090	0.105	0.088	0.105	0.105	0.089	0.097
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.092	0.104	0.092	0.112	0.093	0.090	0.089	0.107	0.100	0.100
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.109	0.068	0.107	0.096	0.121	0.092	0.080	0.107	0.081	0.108
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.100	0.081	0.095	0.100	0.101	0.112	0.087	0.101	0.092	0.099

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000-II

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.106	0.106	0.099	0.109	0.100	0.112	0.080	0.093	0.086	0.095
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.112	0.105	0.097	0.104	0.081	0.085	0.087	0.100	0.104	0.092
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.092	0.090	0.091	0.119	0.099	0.090	0.093	0.100	0.092	0.103
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.104	0.097	0.088	0.094	0.094	0.107	0.098	0.096	0.099	0.103
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.097	0.100	0.094	0.091	0.093	0.096	0.104	0.107	0.100	0.105
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.096	0.101	0.092	0.090	0.106	0.083	0.107	0.107	0.092	0.099
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.102	0.093	0.096	0.097	0.085	0.104	0.093	0.112	0.090	0.091
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.093	0.100	0.097	0.086	0.087	0.118	0.097	0.100	0.105	0.094
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.094	0.114	0.095	0.103	0.099	0.105	0.077	0.096	0.093	0.097
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.104	0.094	0.094	0.086	0.108	0.094	0.111	0.089	0.095	0.099

Tabla 1-10000-III

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.095	0.101	0.105	0.099	0.088	0.096	0.109	0.082	0.102	0.089
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.079	0.102	0.089	0.111	0.102	0.110	0.086	0.104	0.104	0.091
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.095	0.088	0.109	0.111	0.089	0.105	0.094	0.073	0.115	0.103
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.094	0.075	0.088	0.106	0.112	0.090	0.102	0.096	0.111	0.096
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.097	0.092	0.088	0.100	0.108	0.089	0.101	0.108	0.079	0.113
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.106	0.097	0.105	0.103	0.097	0.085	0.090	0.100	0.081	0.100
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.093	0.082	0.088	0.106	0.103	0.096	0.099	0.110	0.093	0.104
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.092	0.092	0.104	0.091	0.093	0.102	0.093	0.099	0.115	0.093
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.093	0.107	0.098	0.089	0.094	0.104	0.100	0.089	0.094	0.107
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.112	0.090	0.101	0.117	0.088	0.103	0.099	0.090	0.085	0.095

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000-IV

<table>
<tr><td>n(0|0)</td><td>n(1|0)</td><td>n(2|0)</td><td>n(3|0)</td><td>n(4|0)</td><td>n(5|0)</td><td>n(6|0)</td><td>n(7|0)</td><td>n(8|0)</td><td>n(9|0)</td></tr>
<tr><td>0.104</td><td>0.085</td><td>0.106</td><td>0.105</td><td>0.097</td><td>0.091</td><td>0.096</td><td>0.095</td><td>0.088</td><td>0.105</td></tr>
<tr><td>n(0|1)</td><td>n(1|1)</td><td>n(2|1)</td><td>n(3|1)</td><td>n(4|1)</td><td>n(5|1)</td><td>n(6|1)</td><td>n(7|1)</td><td>n(8|1)</td><td>n(9|1)</td></tr>
<tr><td>0.088</td><td>0.097</td><td>0.104</td><td>0.083</td><td>0.083</td><td>0.097</td><td>0.095</td><td>0.107</td><td>0.120</td><td>0.100</td></tr>
<tr><td>n(0|2)</td><td>n(1|2)</td><td>n(2|2)</td><td>n(3|2)</td><td>n(4|2)</td><td>n(5|2)</td><td>n(6|2)</td><td>n(7|2)</td><td>n(8|2)</td><td>n(9|2)</td></tr>
<tr><td>0.095</td><td>0.106</td><td>0.090</td><td>0.101</td><td>0.108</td><td>0.092</td><td>0.092</td><td>0.104</td><td>0.095</td><td>0.088</td></tr>
<tr><td>n(0|3)</td><td>n(1|3)</td><td>n(2|3)</td><td>n(3|3)</td><td>n(4|3)</td><td>n(5|3)</td><td>n(6|3)</td><td>n(7|3)</td><td>n(8|3)</td><td>n(9|3)</td></tr>
<tr><td>0.093</td><td>0.111</td><td>0.100</td><td>0.094</td><td>0.106</td><td>0.088</td><td>0.102</td><td>0.094</td><td>0.099</td><td>0.095</td></tr>
<tr><td>n(0|4)</td><td>n(1|4)</td><td>n(2|4)</td><td>n(3|4)</td><td>n(4|4)</td><td>n(5|4)</td><td>n(6|4)</td><td>n(7|4)</td><td>n(8|4)</td><td>n(9|4)</td></tr>
<tr><td>0.099</td><td>0.100</td><td>0.108</td><td>0.094</td><td>0.105</td><td>0.079</td><td>0.099</td><td>0.096</td><td>0.101</td><td>0.097</td></tr>
<tr><td>n(0|5)</td><td>n(1|5)</td><td>n(2|5)</td><td>n(3|5)</td><td>n(4|5)</td><td>n(5|5)</td><td>n(6|5)</td><td>n(7|5)</td><td>n(8|5)</td><td>n(9|5)</td></tr>
<tr><td>0.084</td><td>0.114</td><td>0.097</td><td>0.116</td><td>0.082</td><td>0.099</td><td>0.090</td><td>0.096</td><td>0.095</td><td>0.097</td></tr>
<tr><td>n(0|6)</td><td>n(1|6)</td><td>n(2|6)</td><td>n(3|6)</td><td>n(4|6)</td><td>n(5|6)</td><td>n(6|6)</td><td>n(7|6)</td><td>n(8|6)</td><td>n(9|6)</td></tr>
<tr><td>0.114</td><td>0.097</td><td>0.095</td><td>0.077</td><td>0.111</td><td>0.099</td><td>0.098</td><td>0.097</td><td>0.116</td><td>0.078</td></tr>
<tr><td>n(0|7)</td><td>n(1|7)</td><td>n(2|7)</td><td>n(3|7)</td><td>n(4|7)</td><td>n(5|7)</td><td>n(6|7)</td><td>n(7|7)</td><td>n(8|7)</td><td>n(9|7)</td></tr>
<tr><td>0.088</td><td>0.097</td><td>0.108</td><td>0.108</td><td>0.110</td><td>0.093</td><td>0.101</td><td>0.075</td><td>0.079</td><td>0.113</td></tr>
<tr><td>n(0|8)</td><td>n(1|8)</td><td>n(2|8)</td><td>n(3|8)</td><td>n(4|8)</td><td>n(5|8)</td><td>n(6|8)</td><td>n(7|8)</td><td>n(8|8)</td><td>n(9|8)</td></tr>
<tr><td>0.085</td><td>0.090</td><td>0.107</td><td>0.088</td><td>0.110</td><td>0.093</td><td>0.085</td><td>0.113</td><td>0.100</td><td>0.103</td></tr>
<tr><td>n(0|9)</td><td>n(1|9)</td><td>n(2|9)</td><td>n(3|9)</td><td>n(4|9)</td><td>n(5|9)</td><td>n(6|9)</td><td>n(7|9)</td><td>n(8|9)</td><td>n(9|9)</td></tr>
<tr><td>0.094</td><td>0.096</td><td>0.097</td><td>0.122</td><td>0.094</td><td>0.110</td><td>0.084</td><td>0.093</td><td>0.094</td><td>0.096</td></tr>
</table>

Tabla 1-10000-V

<table>
<tr><td>n(0|0)</td><td>n(1|0)</td><td>n(2|0)</td><td>n(3|0)</td><td>n(4|0)</td><td>n(5|0)</td><td>n(6|0)</td><td>n(7|0)</td><td>n(8|0)</td><td>n(9|0)</td></tr>
<tr><td>0.097</td><td>0.094</td><td>0.099</td><td>0.109</td><td>0.092</td><td>0.105</td><td>0.088</td><td>0.099</td><td>0.109</td><td>0.085</td></tr>
<tr><td>n(0|1)</td><td>n(1|1)</td><td>n(2|1)</td><td>n(3|1)</td><td>n(4|1)</td><td>n(5|1)</td><td>n(6|1)</td><td>n(7|1)</td><td>n(8|1)</td><td>n(9|1)</td></tr>
<tr><td>0.088</td><td>0.094</td><td>0.095</td><td>0.097</td><td>0.093</td><td>0.095</td><td>0.102</td><td>0.105</td><td>0.108</td><td>0.093</td></tr>
<tr><td>n(0|2)</td><td>n(1|2)</td><td>n(2|2)</td><td>n(3|2)</td><td>n(4|2)</td><td>n(5|2)</td><td>n(6|2)</td><td>n(7|2)</td><td>n(8|2)</td><td>n(9|2)</td></tr>
<tr><td>0.099</td><td>0.085</td><td>0.108</td><td>0.106</td><td>0.090</td><td>0.086</td><td>0.106</td><td>0.085</td><td>0.111</td><td>0.111</td></tr>
<tr><td>n(0|3)</td><td>n(1|3)</td><td>n(2|3)</td><td>n(3|3)</td><td>n(4|3)</td><td>n(5|3)</td><td>n(6|3)</td><td>n(7|3)</td><td>n(8|3)</td><td>n(9|3)</td></tr>
<tr><td>0.094</td><td>0.093</td><td>0.106</td><td>0.104</td><td>0.105</td><td>0.085</td><td>0.109</td><td>0.081</td><td>0.091</td><td>0.112</td></tr>
<tr><td>n(0|4)</td><td>n(1|4)</td><td>n(2|4)</td><td>n(3|4)</td><td>n(4|4)</td><td>n(5|4)</td><td>n(6|4)</td><td>n(7|4)</td><td>n(8|4)</td><td>n(9|4)</td></tr>
<tr><td>0.092</td><td>0.091</td><td>0.074</td><td>0.098</td><td>0.121</td><td>0.105</td><td>0.108</td><td>0.111</td><td>0.083</td><td>0.086</td></tr>
<tr><td>n(0|5)</td><td>n(1|5)</td><td>n(2|5)</td><td>n(3|5)</td><td>n(4|5)</td><td>n(5|5)</td><td>n(6|5)</td><td>n(7|5)</td><td>n(8|5)</td><td>n(9|5)</td></tr>
<tr><td>0.097</td><td>0.104</td><td>0.091</td><td>0.101</td><td>0.093</td><td>0.104</td><td>0.087</td><td>0.101</td><td>0.101</td><td>0.098</td></tr>
<tr><td>n(0|6)</td><td>n(1|6)</td><td>n(2|6)</td><td>n(3|6)</td><td>n(4|6)</td><td>n(5|6)</td><td>n(6|6)</td><td>n(7|6)</td><td>n(8|6)</td><td>n(9|6)</td></tr>
<tr><td>0.090</td><td>0.111</td><td>0.100</td><td>0.108</td><td>0.103</td><td>0.098</td><td>0.094</td><td>0.079</td><td>0.098</td><td>0.098</td></tr>
<tr><td>n(0|7)</td><td>n(1|7)</td><td>n(2|7)</td><td>n(3|7)</td><td>n(4|7)</td><td>n(5|7)</td><td>n(6|7)</td><td>n(7|7)</td><td>n(8|7)</td><td>n(9|7)</td></tr>
<tr><td>0.101</td><td>0.097</td><td>0.104</td><td>0.094</td><td>0.101</td><td>0.086</td><td>0.096</td><td>0.103</td><td>0.105</td><td>0.082</td></tr>
<tr><td>n(0|8)</td><td>n(1|8)</td><td>n(2|8)</td><td>n(3|8)</td><td>n(4|8)</td><td>n(5|8)</td><td>n(6|8)</td><td>n(7|8)</td><td>n(8|8)</td><td>n(9|8)</td></tr>
<tr><td>0.115</td><td>0.112</td><td>0.104</td><td>0.092</td><td>0.093</td><td>0.093</td><td>0.098</td><td>0.089</td><td>0.102</td><td>0.079</td></tr>
<tr><td>n(0|9)</td><td>n(1|9)</td><td>n(2|9)</td><td>n(3|9)</td><td>n(4|9)</td><td>n(5|9)</td><td>n(6|9)</td><td>n(7|9)</td><td>n(8|9)</td><td>n(9|9)</td></tr>
<tr><td>0.089</td><td>0.101</td><td>0.093</td><td>0.101</td><td>0.112</td><td>0.087</td><td>0.091</td><td>0.102</td><td>0.096</td><td>0.098</td></tr>
</table>

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño $n = 10000$.

Tabla 40001-50000-I

$n(0\mid 0)$	$n(1\mid 0)$	$n(2\mid 0)$	$n(3\mid 0)$	$n(4\mid 0)$	$n(5\mid 0)$	$n(6\mid 0)$	$n(7\mid 0)$	$n(8\mid 0)$	$n(9\mid 0)$
0.100	0.088	0.109	0.097	0.096	0.094	0.108	0.108	0.096	0.090
$n(0\mid 1)$	$n(1\mid 1)$	$n(2\mid 1)$	$n(3\mid 1)$	$n(4\mid 1)$	$n(5\mid 1)$	$n(6\mid 1)$	$n(7\mid 1)$	$n(8\mid 1)$	$n(9\mid 1)$
0.096	0.087	0.088	0.085	0.095	0.089	0.099	0.122	0.099	0.105
$n(0\mid 2)$	$n(1\mid 2)$	$n(2\mid 2)$	$n(3\mid 2)$	$n(4\mid 2)$	$n(5\mid 2)$	$n(6\mid 2)$	$n(7\mid 2)$	$n(8\mid 2)$	$n(9\mid 2)$
0.112	0.101	0.106	0.097	0.087	0.090	0.100	0.090	0.094	0.098
$n(0\mid 3)$	$n(1\mid 3)$	$n(2\mid 3)$	$n(3\mid 3)$	$n(4\mid 3)$	$n(5\mid 3)$	$n(6\mid 3)$	$n(7\mid 3)$	$n(8\mid 3)$	$n(9\mid 3)$
0.102	0.103	0.096	0.098	0.089	0.099	0.091	0.081	0.109	0.106
$n(0\mid 4)$	$n(1\mid 4)$	$n(2\mid 4)$	$n(3\mid 4)$	$n(4\mid 4)$	$n(5\mid 4)$	$n(6\mid 4)$	$n(7\mid 4)$	$n(8\mid 4)$	$n(9\mid 4)$
0.094	0.094	0.077	0.101	0.110	0.096	0.092	0.111	0.100	0.097
$n(0\mid 5)$	$n(1\mid 5)$	$n(2\mid 5)$	$n(3\mid 5)$	$n(4\mid 5)$	$n(5\mid 5)$	$n(6\mid 5)$	$n(7\mid 5)$	$n(8\mid 5)$	$n(9\mid 5)$
0.100	0.097	0.098	0.098	0.090	0.086	0.117	0.105	0.084	0.101
$n(0\mid 6)$	$n(1\mid 6)$	$n(2\mid 6)$	$n(3\mid 6)$	$n(4\mid 6)$	$n(5\mid 6)$	$n(6\mid 6)$	$n(7\mid 6)$	$n(8\mid 6)$	$n(9\mid 6)$
0.106	0.102	0.093	0.102	0.097	0.094	0.088	0.093	0.107	0.099
$n(0\mid 7)$	$n(1\mid 7)$	$n(2\mid 7)$	$n(3\mid 7)$	$n(4\mid 7)$	$n(5\mid 7)$	$n(6\mid 7)$	$n(7\mid 7)$	$n(8\mid 7)$	$n(9\mid 7)$
0.099	0.091	0.086	0.106	0.091	0.102	0.096	0.100	0.100	0.103
$n(0\mid 8)$	$n(1\mid 8)$	$n(2\mid 8)$	$n(3\mid 8)$	$n(4\mid 8)$	$n(5\mid 8)$	$n(6\mid 8)$	$n(7\mid 8)$	$n(8\mid 8)$	$n(9\mid 8)$
0.085	0.096	0.100	0.115	0.088	0.113	0.093	0.090	0.095	0.099
$n(0\mid 9)$	$n(1\mid 9)$	$n(2\mid 9)$	$n(3\mid 9)$	$n(4\mid 9)$	$n(5\mid 9)$	$n(6\mid 9)$	$n(7\mid 9)$	$n(8\mid 9)$	$n(9\mid 9)$
0.090	0.083	0.102	0.084	0.090	0.107	0.109	0.113	0.094	0.098

Tabla 40001-50000-II

$n(0\mid 0)$	$n(1\mid 0)$	$n(2\mid 0)$	$n(3\mid 0)$	$n(4\mid 0)$	$n(5\mid 0)$	$n(6\mid 0)$	$n(7\mid 0)$	$n(8\mid 0)$	$n(9\mid 0)$
0.088	0.080	0.089	0.114	0.114	0.097	0.085	0.104	0.102	0.096
$n(0\mid 1)$	$n(1\mid 1)$	$n(2\mid 1)$	$n(3\mid 1)$	$n(4\mid 1)$	$n(5\mid 1)$	$n(6\mid 1)$	$n(7\mid 1)$	$n(8\mid 1)$	$n(9\mid 1)$
0.093	0.093	0.100	0.087	0.101	0.104	0.106	0.100	0.092	0.096
$n(0\mid 2)$	$n(1\mid 2)$	$n(2\mid 2)$	$n(3\mid 2)$	$n(4\mid 2)$	$n(5\mid 2)$	$n(6\mid 2)$	$n(7\mid 2)$	$n(8\mid 2)$	$n(9\mid 2)$
0.107	0.106	0.093	0.093	0.089	0.089	0.099	0.099	0.089	0.106
$n(0\mid 3)$	$n(1\mid 3)$	$n(2\mid 3)$	$n(3\mid 3)$	$n(4\mid 3)$	$n(5\mid 3)$	$n(6\mid 3)$	$n(7\mid 3)$	$n(8\mid 3)$	$n(9\mid 3)$
0.105	0.096	0.095	0.101	0.102	0.109	0.083	0.098	0.082	0.113
$n(0\mid 4)$	$n(1\mid 4)$	$n(2\mid 4)$	$n(3\mid 4)$	$n(4\mid 4)$	$n(5\mid 4)$	$n(6\mid 4)$	$n(7\mid 4)$	$n(8\mid 4)$	$n(9\mid 4)$
0.101	0.086	0.105	0.087	0.105	0.107	0.102	0.087	0.102	0.089
$n(0\mid 5)$	$n(1\mid 5)$	$n(2\mid 5)$	$n(3\mid 5)$	$n(4\mid 5)$	$n(5\mid 5)$	$n(6\mid 5)$	$n(7\mid 5)$	$n(8\mid 5)$	$n(9\mid 5)$
0.087	0.104	0.109	0.096	0.101	0.103	0.106	0.095	0.087	0.086
$n(0\mid 6)$	$n(1\mid 6)$	$n(2\mid 6)$	$n(3\mid 6)$	$n(4\mid 6)$	$n(5\mid 6)$	$n(6\mid 6)$	$n(7\mid 6)$	$n(8\mid 6)$	$n(9\mid 6)$
0.090	0.092	0.100	0.093	0.106	0.111	0.107	0.093	0.104	0.087
$n(0\mid 7)$	$n(1\mid 7)$	$n(2\mid 7)$	$n(3\mid 7)$	$n(4\mid 7)$	$n(5\mid 7)$	$n(6\mid 7)$	$n(7\mid 7)$	$n(8\mid 7)$	$n(9\mid 7)$
0.110	0.093	0.106	0.085	0.094	0.080	0.100	0.112	0.101	0.099
$n(0\mid 8)$	$n(1\mid 8)$	$n(2\mid 8)$	$n(3\mid 8)$	$n(4\mid 8)$	$n(5\mid 8)$	$n(6\mid 8)$	$n(7\mid 8)$	$n(8\mid 8)$	$n(9\mid 8)$
0.096	0.091	0.095	0.090	0.104	0.103	0.098	0.114	0.095	0.090
$n(0\mid 9)$	$n(1\mid 9)$	$n(2\mid 9)$	$n(3\mid 9)$	$n(4\mid 9)$	$n(5\mid 9)$	$n(6\mid 9)$	$n(7\mid 9)$	$n(8\mid 9)$	$n(9\mid 9)$
0.103	0.083	0.099	0.115	0.094	0.094	0.078	0.085	0.114	0.109

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 40001-50000-III

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.104	0.095	0.118	0.102	0.083	0.092	0.097	0.099	0.086	0.102
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.105	0.100	0.103	0.113	0.076	0.084	0.094	0.111	0.086	0.096
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.087	0.098	0.100	0.084	0.089	0.096	0.103	0.100	0.110	0.111
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.114	0.104	0.095	0.107	0.083	0.097	0.097	0.086	0.099	0.094
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.103	0.082	0.095	0.106	0.099	0.104	0.097	0.101	0.106	0.092
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.098	0.093	0.114	0.097	0.080	0.102	0.103	0.098	0.094	0.104
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.099	0.105	0.088	0.092	0.104	0.104	0.093	0.102	0.093	0.099
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.113	0.085	0.092	0.097	0.109	0.088	0.099	0.100	0.090	0.093
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.084	0.106	0.091	0.085	0.109	0.109	0.102	0.093	0.106	0.088
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.108	0.114	0.084	0.100	0.075	0.094	0.106	0.105	0.106	0.084

Tabla 40001-50000-IV

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.079	0.089	0.111	0.112	0.096	0.103	0.090	0.105	0.101	0.095
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.104	0.079	0.108	0.100	0.120	0.100	0.089	0.088	0.086	0.098
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.080	0.092	0.096	0.082	0.095	0.114	0.111	0.103	0.100	0.110
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.086	0.099	0.109	0.102	0.102	0.092	0.091	0.096	0.090	0.112
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.078	0.111	0.076	0.090	0.093	0.122	0.086	0.091	0.108	0.111
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.112	0.105	0.077	0.104	0.103	0.114	0.087	0.097	0.098	0.086
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.089	0.092	0.105	0.118	0.097	0.091	0.089	0.091	0.091	0.101
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.091	0.109	0.094	0.099	0.093	0.109	0.093	0.089	0.098	0.093
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.102	0.094	0.097	0.115	0.081	0.088	0.102	0.089	0.092	0.115
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.095	0.095	0.085	0.109	0.102	0.081	0.101	0.100	0.108	0.096

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.
Tabla 40001-50000-V

<table>
<tr><td>n(0|0)</td><td>n(1|0)</td><td>n(2|0)</td><td>n(3|0)</td><td>n(4|0)</td><td>n(5|0)</td><td>n(6|0)</td><td>n(7|0)</td><td>n(8|0)</td><td>n(9|0)</td></tr>
<tr><td>0.106</td><td>0.091</td><td>0.079</td><td>0.097</td><td>0.095</td><td>0.107</td><td>0.100</td><td>0.092</td><td>0.098</td><td>0.105</td></tr>
<tr><td>n(0|1)</td><td>n(1|1)</td><td>n(2|1)</td><td>n(3|1)</td><td>n(4|1)</td><td>n(5|1)</td><td>n(6|1)</td><td>n(7|1)</td><td>n(8|1)</td><td>n(9|1)</td></tr>
<tr><td>0.080</td><td>0.122</td><td>0.106</td><td>0.096</td><td>0.084</td><td>0.108</td><td>0.088</td><td>0.101</td><td>0.091</td><td>0.094</td></tr>
<tr><td>n(0|2)</td><td>n(1|2)</td><td>n(2|2)</td><td>n(3|2)</td><td>n(4|2)</td><td>n(5|2)</td><td>n(6|2)</td><td>n(7|2)</td><td>n(8|2)</td><td>n(9|2)</td></tr>
<tr><td>0.096</td><td>0.094</td><td>0.103</td><td>0.103</td><td>0.109</td><td>0.086</td><td>0.097</td><td>0.090</td><td>0.092</td><td>0.097</td></tr>
<tr><td>n(0|3)</td><td>n(1|3)</td><td>n(2|3)</td><td>n(3|3)</td><td>n(4|3)</td><td>n(5|3)</td><td>n(6|3)</td><td>n(7|3)</td><td>n(8|3)</td><td>n(9|3)</td></tr>
<tr><td>0.108</td><td>0.107</td><td>0.091</td><td>0.087</td><td>0.109</td><td>0.085</td><td>0.095</td><td>0.096</td><td>0.105</td><td>0.098</td></tr>
<tr><td>n(0|4)</td><td>n(1|4)</td><td>n(2|4)</td><td>n(3|4)</td><td>n(4|4)</td><td>n(5|4)</td><td>n(6|4)</td><td>n(7|4)</td><td>n(8|4)</td><td>n(9|4)</td></tr>
<tr><td>0.111</td><td>0.091</td><td>0.107</td><td>0.100</td><td>0.101</td><td>0.092</td><td>0.090</td><td>0.103</td><td>0.105</td><td>0.075</td></tr>
<tr><td>n(0|5)</td><td>n(1|5)</td><td>n(2|5)</td><td>n(3|5)</td><td>n(4|5)</td><td>n(5|5)</td><td>n(6|5)</td><td>n(7|5)</td><td>n(8|5)</td><td>n(9|5)</td></tr>
<tr><td>0.094</td><td>0.093</td><td>0.103</td><td>0.093</td><td>0.101</td><td>0.091</td><td>0.102</td><td>0.091</td><td>0.111</td><td>0.100</td></tr>
<tr><td>n(0|6)</td><td>n(1|6)</td><td>n(2|6)</td><td>n(3|6)</td><td>n(4|6)</td><td>n(5|6)</td><td>n(6|6)</td><td>n(7|6)</td><td>n(8|6)</td><td>n(9|6)</td></tr>
<tr><td>0.109</td><td>0.092</td><td>0.115</td><td>0.128</td><td>0.086</td><td>0.079</td><td>0.097</td><td>0.083</td><td>0.095</td><td>0.090</td></tr>
<tr><td>n(0|7)</td><td>n(1|7)</td><td>n(2|7)</td><td>n(3|7)</td><td>n(4|7)</td><td>n(5|7)</td><td>n(6|7)</td><td>n(7|7)</td><td>n(8|7)</td><td>n(9|7)</td></tr>
<tr><td>0.101</td><td>0.105</td><td>0.094</td><td>0.087</td><td>0.097</td><td>0.103</td><td>0.096</td><td>0.107</td><td>0.100</td><td>0.088</td></tr>
<tr><td>n(0|8)</td><td>n(1|8)</td><td>n(2|8)</td><td>n(3|8)</td><td>n(4|8)</td><td>n(5|8)</td><td>n(6|8)</td><td>n(7|8)</td><td>n(8|8)</td><td>n(9|8)</td></tr>
<tr><td>0.097</td><td>0.112</td><td>0.095</td><td>0.082</td><td>0.102</td><td>0.086</td><td>0.103</td><td>0.109</td><td>0.083</td><td>0.111</td></tr>
<tr><td>n(0|9)</td><td>n(1|9)</td><td>n(2|9)</td><td>n(3|9)</td><td>n(4|9)</td><td>n(5|9)</td><td>n(6|9)</td><td>n(7|9)</td><td>n(8|9)</td><td>n(9|9)</td></tr>
<tr><td>0.107</td><td>0.111</td><td>0.079</td><td>0.082</td><td>0.091</td><td>0.112</td><td>0.095</td><td>0.111</td><td>0.083</td><td>0.101</td></tr>
</table>

Con $n = 10000$, se tiene que $n(d_2 \mid d_1) \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$..

Por último observemos el comportamiento para $n = 100000$, con los colectivos de 100000 dígitos de las 5 tablas generadas utilizando cifras decimales de π y las 97500 parejas formadas con cada uno de estos colectivos.

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000-I

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.1008	0.0936	0.1011	0.0985	0.0961	0.1007	0.0966	0.0982	0.0941	0.0956
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.0932	0.0985	0.1026	0.0957	0.0949	0.0983	0.0947	0.0988	0.1032	0.0962
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.0945	0.0972	0.0949	0.1008	0.0964	0.0970	0.1004	0.0933	0.1045	0.0950
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.0959	0.1008	0.0997	0.0936	0.0977	0.0949	0.0997	0.0977	0.0935	0.0992
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.0958	0.1006	0.0923	0.0962	0.0946	0.0988	0.0990	0.1023	0.0952	0.0998
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.1004	0.0973	0.1003	0.0963	0.0947	0.0930	0.1026	0.0995	0.0982	0.0930
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.1016	0.0998	0.0961	0.0986	0.0999	0.0916	0.0944	0.0957	0.1009	0.0982
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.0993	0.0946	0.0958	0.1009	0.0973	0.0947	0.0968	0.0975	0.1001	0.0998
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.0975	0.0924	0.0949	0.0994	0.0979	0.0980	0.1006	0.0988	0.0937	0.1008
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.0985	0.0905	0.1002	0.0985	0.1008	0.0989	0.0989	0.0984	0.0938	0.0965

Tabla 1-100000-II

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.0960	0.1002	0.0955	0.1033	0.0955	0.1030	0.0962	0.0963	0.0953	0.0959
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.0960	0.0983	0.0996	0.0972	0.0954	0.0991	0.0976	0.0979	0.0983	0.0934
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.0996	0.0957	0.0947	0.0996	0.0976	0.0941	0.1003	0.0962	0.0982	0.0980
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.1009	0.0973	0.0966	0.0993	0.0978	0.1010	0.0975	0.0909	0.0981	0.0955
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.0978	0.1031	0.0953	0.0924	0.0938	0.1046	0.0980	0.0991	0.0964	0.0965
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.0943	0.0998	0.1012	0.0936	0.0979	0.0967	0.1003	0.0949	0.0996	0.0938
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.0955	0.0986	0.1014	0.0996	0.0969	0.0997	0.0972	0.0993	0.0941	0.0937
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.0987	0.0991	0.0961	0.0961	0.0938	0.0970	0.0998	0.1006	0.0993	0.0957
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.0970	0.1027	0.0978	0.0959	0.1000	0.0985	0.0935	0.0982	0.0968	0.0933
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.0958	0.0990	0.0996	0.0969	0.0988	0.0925	0.0964	0.0954	0.0997	0.1024

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000-III

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.0961	0.0980	0.1016	0.0995	0.0936	0.0941	0.1011	0.0989	0.0967	0.0974
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.0866	0.0968	0.1027	0.0950	0.0988	0.0944	0.1012	0.1000	0.1008	0.0979
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.0952	0.0959	0.1007	0.0930	0.0938	0.0984	0.1013	0.0959	0.1014	0.1005
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.0956	0.0972	0.0937	0.0994	0.0988	0.1022	0.0937	0.0977	0.0992	0.0956
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.0987	0.0945	0.0924	0.1003	0.0935	0.1049	0.1000	0.0974	0.0955	0.1001
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.0973	0.0999	0.0985	0.0962	0.0927	0.0941	0.1008	0.0970	0.0966	0.1004
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.1004	0.0986	0.0953	0.0957	0.0990	0.0951	0.0978	0.0967	0.0942	0.1006
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.0959	0.0962	0.0983	0.0976	0.0965	0.0931	0.0985	0.0987	0.0969	0.1013
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.0960	0.1003	0.0959	0.0968	0.0991	0.1011	0.0912	0.0988	0.0983	0.0978
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.0999	0.0979	0.0980	0.1052	0.0949	0.0978	0.0933	0.0994	0.0937	0.0971

Tabla 1-100000-IV

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.0945	0.0932	0.1026	0.0983	0.0994	0.0966	0.0995	0.0954	0.0928	0.1008
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.0971	0.0964	0.0988	0.0925	0.1003	0.0992	0.0962	0.0961	0.1030	0.0960
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.0921	0.1030	0.0975	0.0979	0.1019	0.0963	0.0959	0.0971	0.0966	0.0979
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.0931	0.0979	0.0953	0.0987	0.0983	0.0966	0.0994	0.0977	0.0986	0.0992
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.0959	0.0971	0.0994	0.1000	0.0982	0.0942	0.0939	0.0982	0.0971	0.1014
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.0984	0.0974	0.0940	0.0958	0.0956	0.0972	0.0957	0.0972	0.1041	0.0994
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.1012	0.0957	0.0958	0.0963	0.0989	0.0949	0.0991	0.0938	0.1019	0.0956
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.0939	0.0927	0.1034	0.0985	0.1023	0.1035	0.0945	0.0926	0.0911	0.1029
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.0925	0.0955	0.1021	0.0987	0.0964	0.0969	0.0972	0.0955	0.0973	0.1042
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.0976	0.0963	0.0939	0.0986	0.0990	0.0986	0.0959	0.0979	0.0995	0.0973

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000-V

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.0953	0.0972	0.1001	0.0972	0.0975	0.0997	0.0954	0.0991	0.0949	0.0989
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.0918	0.1035	0.1019	0.0967	0.0950	0.0987	0.0980	0.0960	0.0934	0.0974
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.1005	0.1002	0.0955	0.0945	0.1006	0.0926	0.0978	0.0987	0.0975	0.0976
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.0992	0.1001	0.0984	0.0971	0.0982	0.0968	0.0982	0.0936	0.0970	0.0969
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.0973	0.0997	0.0939	0.0994	0.1026	0.0986	0.0976	0.0983	0.0943	0.0913
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.1010	0.0967	0.1042	0.0997	0.0956	0.0959	0.0938	0.0949	0.0976	0.0956
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.0969	0.0970	0.1028	0.0975	0.0937	0.0979	0.0996	0.0971	0.0967	0.0989
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.0968	0.1029	0.0910	0.0937	0.0985	0.0934	0.0952	0.1028	0.1042	0.0982
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.1033	0.1029	0.0998	0.0932	0.0988	0.0928	0.0953	0.0981	0.0974	0.0956
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.1003	0.0995	0.1019	0.0935	0.0924	0.0995	0.0987	0.0958	0.0935	0.0969

Cuando $n = 100000$, de nuevo $n(d_2 \mid d_1) \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$..

Por lo tanto, se observa que para $n = 10000$ y $n = 100000$ las frecuencias relativas de un dígito condicionado a otro $(n(d_2 \mid d_1))$, tienen un valor cercano a $\frac{1}{10}$ que es la frecuencia asintótica de un dígito, por lo tanto afirmamos que la aparición de un dígito no influye en el siguiente resultado.

Concluimos entonces que los dígitos de las 5 tablas generadas con las cifras decimales de π tienen independencia estadística, ya que $n(d_2 \mid d_1) = \frac{n(d1d2)}{n(d1)} \approx \frac{1}{10} \approx \frac{n(d_2)}{n}$.

4.1.3 Teoría débil de los espacios de colectivos de Bernoulli (espacios de medida normal producto de n copias de un espacio de medida de Bernoulli).

En esta sección, analizaremos las frecuencias acumuladas de los cinco casos que se observaron en el primer capítulo, con el fin de determinar si las tablas de dígitos generadas a partir de las cifras decimales de π, satisfacen la Desigualdad de Chebishev y la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Desiguldad de Chebishev.

Observemos como se comportan las sucesiones $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ de los colectivos extraidos de estas nuevas tablas. Utilizaremos, al igual que con las tablas de

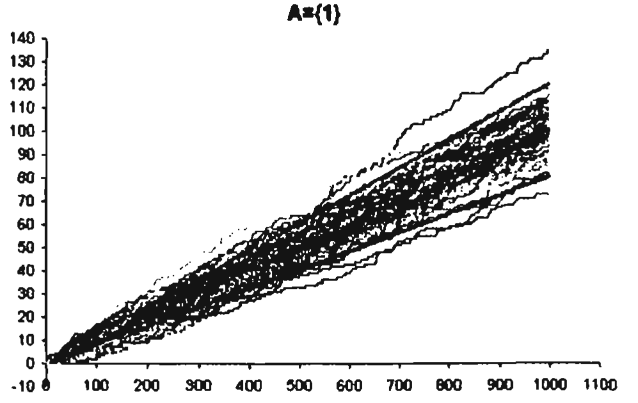
Kendall y Babington Smith, 100 colectivos de 1000 dígitos, 10 de 10000 y los cinco colectivos de 100000 dígitos.

Para $n = 1000^2$, $p = \frac{1}{10}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
80	120

$A=\{1\}$

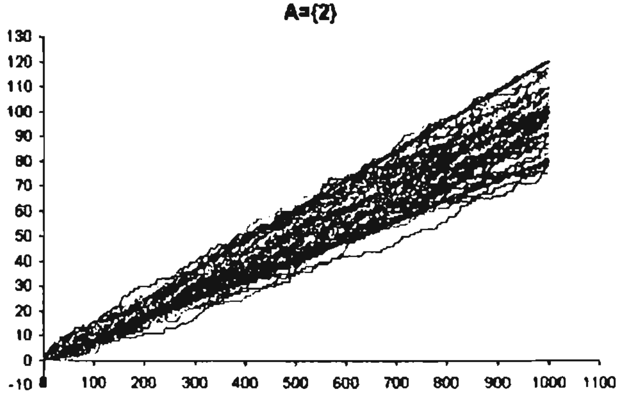
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	91	92	82	100	115	100	88	98	102	95
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	86	110	86	110	101	93	94	96	88	92
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	104	112	100	82	105	118	113	96	108	112
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	88	99	107	96	113	92	135	89	105	96
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	88	104	131	101	95	106	112	92	92	88
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	94	86	91	101	106	100	108	101	104	99
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	116	89	100	100	104	98	116	90	120	106
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	103	85	93	105	97	109	73	98	101	91
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	101	104	96	107	92	103	110	107	104	99
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	110	109	100	98	110	103	102	95	106	108



[2]Los colectivos 1 al 20 son los veinte primeros colectivos de la tabla I, los colectivos 121 al 140 son los colectivos 21 al 40 de la tabla II, los colectivos 241 al 260 son los colectivos 41-60 de la tabla III, los colectivos 361-380 son los colectivos 61-80 de la tabla IV y los colectivos 481-500 son los colectivos 81-100 de la tabla V.

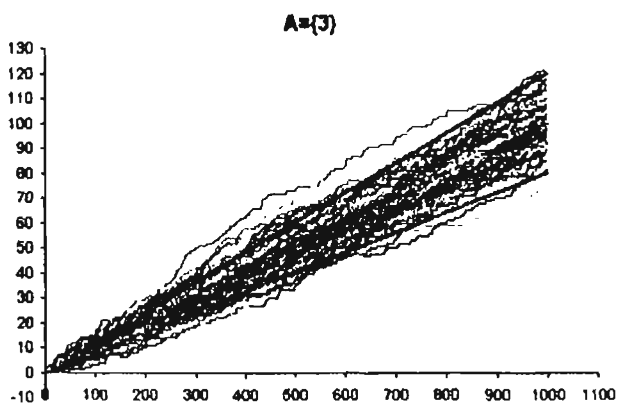
A={2}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	95	118	95	93	96	110	100	96	106	101
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	96	100	90	88	99	98	113	100	88	101
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	79	96	105	103	109	108	110	113	84	83
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	100	91	96	94	90	90	79	115	81	108
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	92	98	107	76	107	101	91	114	99	117
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	94	106	105	93	108	106	102	103	117	82
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	94	110	110	103	86	95	101	121	95	98
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	105	104	100	108	97	98	107	92	97	93
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	118	79	111	116	116	87	108	99	107	85
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	90	98	92	110	100	112	99	108	108	96



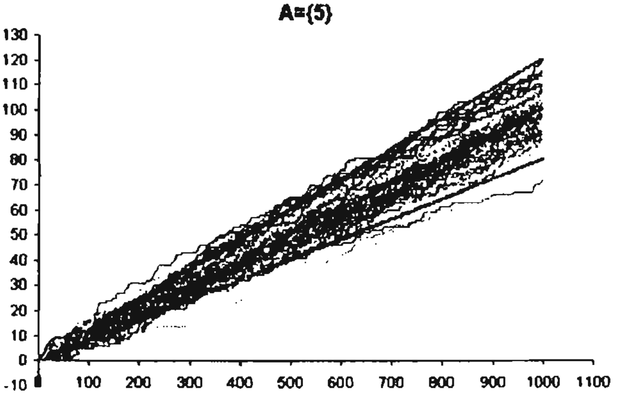
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	98	103	101	75	94	103	100	85	123	105
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	108	100	86	108	105	108	105	85	111	90
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	90	82	90	102	99	89	110	107	114	108
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	98	103	99	116	98	121	105	101	107	90
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	82	115	100	89	117	96	107	101	90	103
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	96	98	105	97	99	99	118	116	92	99
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	113	105	84	100	113	101	91	106	91	86
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	86	93	120	94	102	94	95	104	92	117
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	97	93	104	106	106	108	91	95	105	113
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	95	98	99	85	104	101	123	98	95	95



$A=\{5\}$

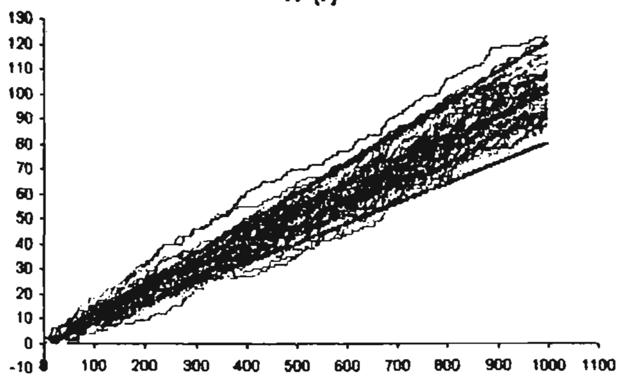
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	95	90	88	104	94	113	99	91	98	108
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	87	101	113	97	101	107	82	106	92	98
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	108	90	105	99	100	104	95	100	95	106
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	109	110	90	103	110	107	104	101	88	93
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	108	93	91	101	98	106	103	104	103	86
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	96	101	106	108	93	101	100	91	93	113
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	105	119	99	98	74	98	110	80	92	87
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	102	105	72	93	108	101	119	113	92	103
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	95	103	103	96	92	115	105	98	95	116
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	110	97	89	98	100	97	98	100	97	103



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	96	110	113	97	98	104	95	107	94	108
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	89	89	96	93	101	88	103	103	97	116
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	107	96	100	109	94	97	104	90	102	86
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	99	113	91	91	94	104	100	107	123	103
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	107	98	105	121	95	99	100	91	110	97
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	108	103	105	99	104	107	92	88	88	108
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	91	78	110	91	92	109	98	105	85	117
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	105	85	98	94	100	117	108	107	113	92
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	100	103	96	94	96	90	98	119	99	91
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	101	109	96	91	103	100	93	110	92	117

A={7}



Podemos observar que en los cinco casos existen sucesiones que quedan fuera de la zona delimitada por las rectas $y = x(p - \varepsilon)$ y $y = x(p + \varepsilon)$.

Para $d = 1$, 96 de las 100 sucesiones observadas quedan dentro de la zona de las rectas de Chebishev, i.e., en un 96% de nuestras sucesiones $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxima a p con un margen de error menor que 0.02.

Para $d = 2$ y $d = 3$, 5 sucesiones quedan fuera de la zona delimitada por las rectas de Chebishev. Entonces el 95% de las sucesiones cumple que $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02.

Por último, para $d = 5$ y $d = 7$, el 97% de las sucesiones cumple que $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$

se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02, i.e., 3 sucesiones de las 100 observadas quedan fuera de la zona delimitada por las rectas de Chevishev.

Teóricamente la desigualdad de Chebishev nos dice que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.775.$$

Es decir, en al menos un 77.5% de las sucesiones, $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$, debería aproximarse a p con un margen de error menor que 0.02.

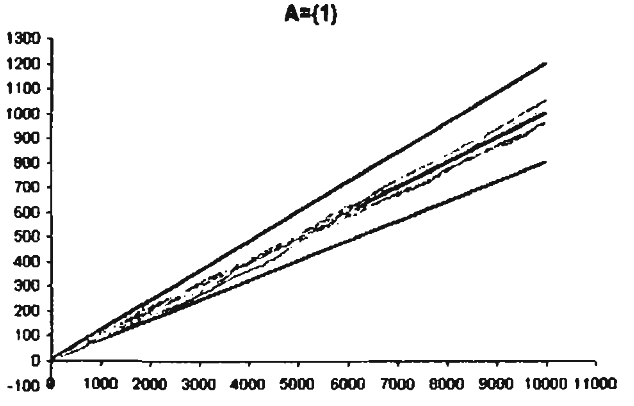
Por lo tanto, en los cinco casos se cumple la Desigualdad de Chebishev, ya que el porcentaje de las sucesiones observadas que satisfacen la condición de esta desigualdad es mayor que el porcentaje que marca la teoría.

Para $n = 10000$[3], $p = \frac{1}{10}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
800	1200

$A=\{1\}$

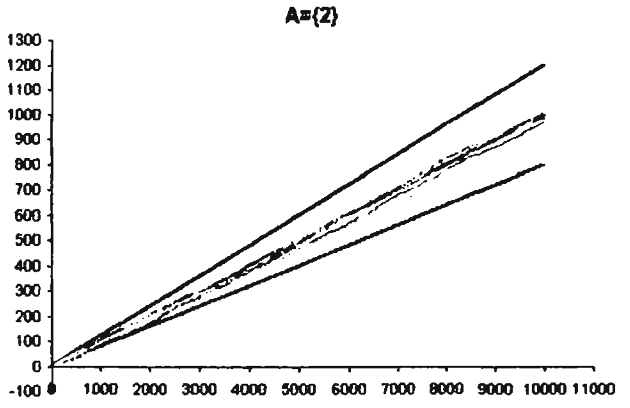
Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	963	956	1050	1020	1009	990	1039	955	1023	1041



$A=\{2\}$

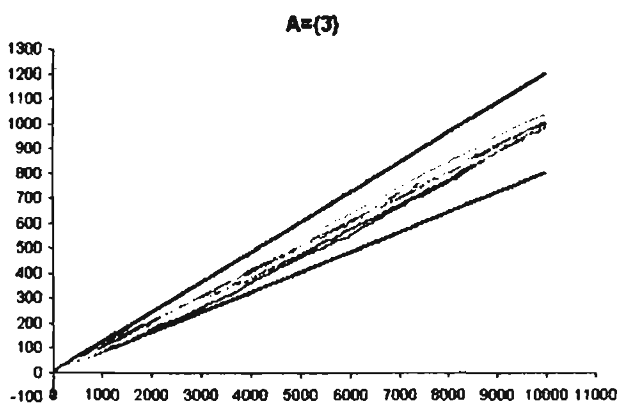
Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1010	973	990	944	1002	1016	1013	1001	1026	1013

[3]Los colectivos 1 y 2 corresponden a los dos primeros colectivos de la tabla I, los colectivos 13 y 14 corresponden a los colectivos 3 y 4 de la tabla II, los colectivos 25 y 26 corresponden a los colectivos 5 y 6 de la tabla III, los colectivos 37 y 38 corresponden a los colectivos 7 y 8 de la tabla IV y los colectivos 49 y 50 corresponden a los colectivos 9 y 10 de la tabla V.



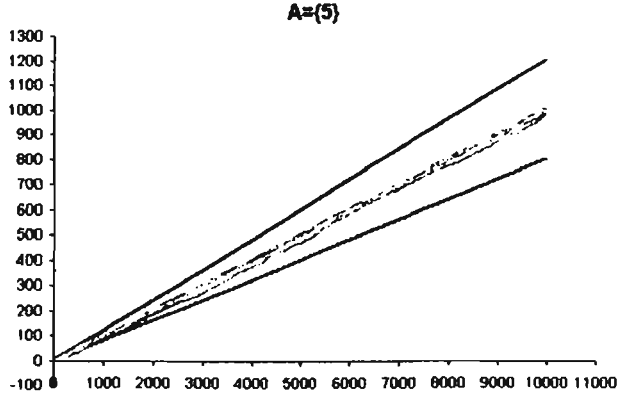
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	987	1006	991	1038	1000	1019	990	997	1018	993



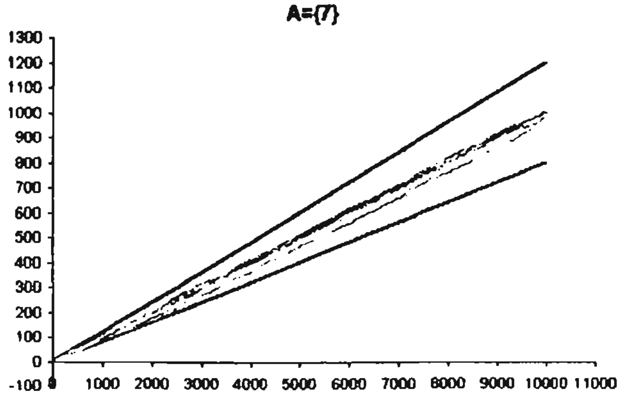
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	980	984	1002	1015	993	1002	962	1008	1018	989



$A = \{7\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1022	975	985	1025	1023	1002	976	1019	986	1012



En los cinco casos todas las sucesiones observadas caen dentro de la zona delimitada por las rectas $y = x(p-\varepsilon)$ y $y = x(p+\varepsilon)$, por lo tanto, para los cinco dígitos se cumple la desigualdad de Chebishev, la cual teóricamente establece que

$$\mu_n \left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)} \right) > 1 - \tfrac{pq}{n\epsilon^2} = 0.9775.$$

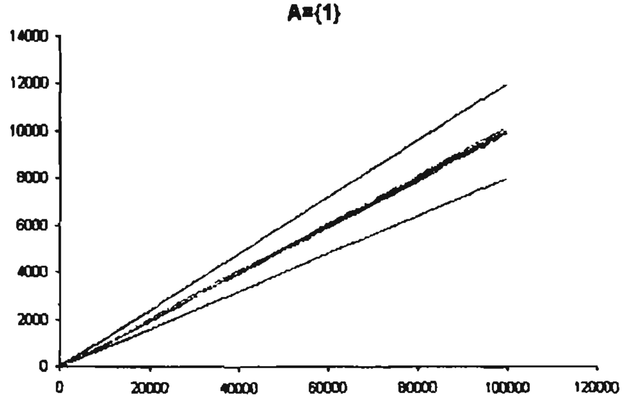
Es decir, cuando $n = 10000$, al menos el 97.75% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación a p menor que 0.02 para que se satisfaga la Desigualdad de Chebishev, dado que en nuestras observaciones realizadas para $d = 1, 2, 3, 5, 7$; el 100% de las sucesiones cumplió dicha condición, podemos afirmar que se satisface esta deisgualdad.

Finalmente cuando $n = 100000$[4], $p = \frac{1}{10}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
8000	12000

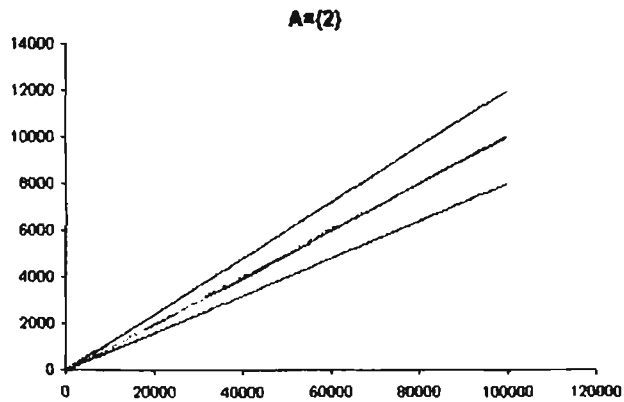
$A = \{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9906	10178	9991	9896	10256



$A = \{2\}$

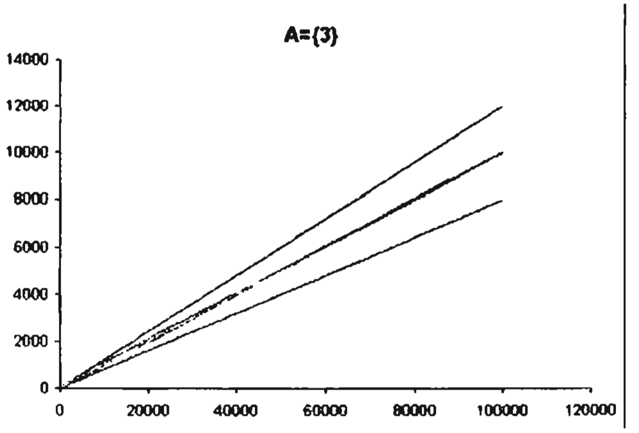
Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10034	10013	10029	10066	10137



$A = \{3\}$

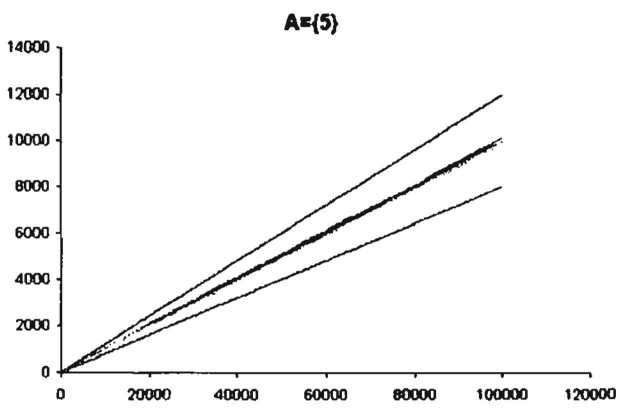
Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10041	9989	10018	10006	9859

[4] El número de los cinco colectivos corresponde al número de tabla que se usó, es decir, el 1 es la tabla I, el 2 es la tabla II, el 3 es la tabla III, el 4 es la tabla IV y el 5 es la tabla V.



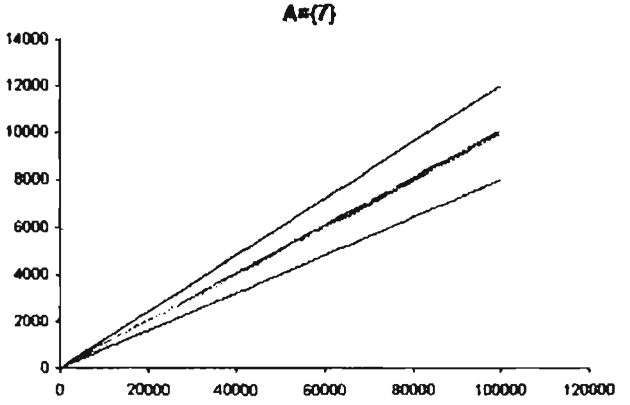
A={5}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9889	10135	10004	9988	9893



A={7}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10032	9923	10073	9874	10010



Para $n = 100000$, todas las sucesiones observadas caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Teoricamente se tiene que al menos el 99.775% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación menor que 0.02 con respecto a p para que se satisfaga la Desigualdad de Chebishev. Es decir,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1 - \tfrac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.99775$$

Entonces para $n = 100000$, también se satisface la desigualdad de Chebishev, ya que en el 100% de las sucesiones observadas se tiene esta aproximación a p.

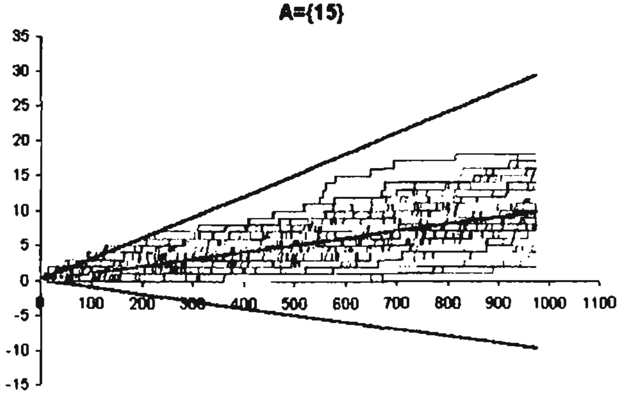
A continuación queremos observar si al formar parejas con los dígitos, se sigue satisfaciendo la Desigualdad de Chebishev. Para esto formaremos los colectivos de parejas de dígitos a partir de los utilizados anteriormente. Tendremos entonces $n = 975, 9750, 97500$; $\varepsilon = \frac{1}{50}$ y $p = \frac{1}{100}$.

Para $n = 975$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-9.75	29.25

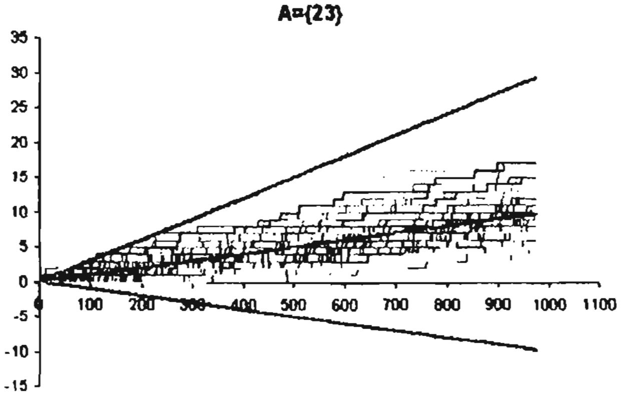
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	7	6	4	11	9	12	7	12	6	10
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	9	6	8	16	13	3	10	8	9
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	12	12	11	15	8	18	8	11	5	14
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	8	5	11	13	14	8	17	5	5	3
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	6	10	9	9	10	11	11	8	8	3
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	8	7	10	7	14	7	12	10	17	11
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	15	12	11	12	8	7	18	7	5	9
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	7	9	7	7	12	12	2	7	9	9
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	11	13	8	11	7	10	13	8	13	8
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	12	16	11	16	13	7	15	12	7	12



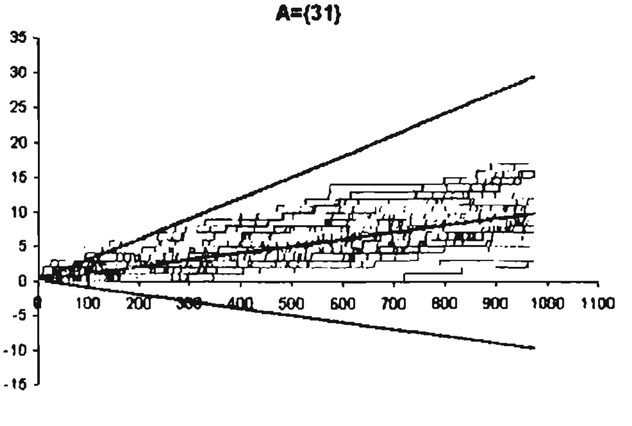
A={23}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	10	12	12	10	10	13	12	8	15	7
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	11	15	10	11	12	9	13	7	7	8
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	5	9	10	9	17	10	12	15	13	12
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	8	9	14	8	9	8	7	8	7	6
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	6	6	11	8	9	14	11	8	6	5
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	12	11	7	11	15	10	9	11	7	3
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	14	10	12	12	5	10	9	14	8	10
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	9	13	8	10	8	8	10	10	5	7
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	12	5	11	9	18	10	7	11	11	15
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	10	17	9	10	10	9	9	5	7	7



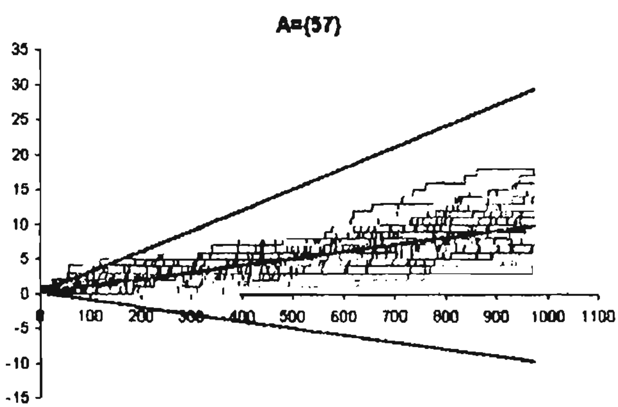
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	5	11	7	8	14	9	8	11	10	10
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	16	3	14	15	10	8	3	8	7
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	4	9	3	7	4	11	9	9	15	12
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	11	15	9	13	10	11	17	7	16	7
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	4	11	19	8	12	5	17	9	9	10
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	8	5	4	9	10	8	13	7	9	8
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	17	8	7	11	14	9	15	9	10	7
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	7	5	10	16	9	11	7	10	15	12
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	10	8	9	13	12	16	13	12	9	11
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	10	16	9	11	8	9	11	10	8	10



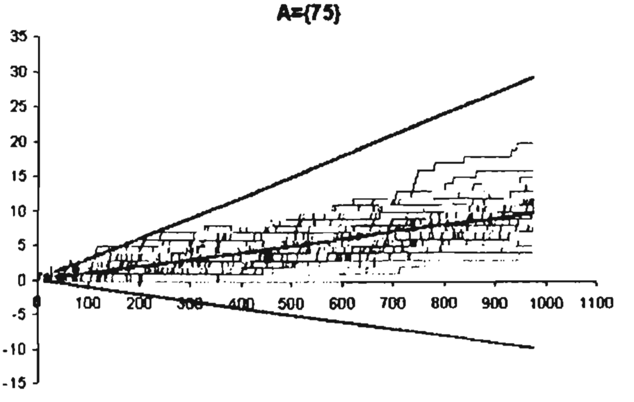
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	5	8	10	7	10	10	7	10	15
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	5	8	16	8	12	10	7	13	7	18
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	11	8	11	9	12	8	12	6	7	6
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	13	9	10	11	11	14	6	14	11	5
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	8	9	10	8	5	8	12	11	18	8
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	10	10	6	16	8	11	8	6	6	12
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	11	11	8	6	4	13	8	9	9	14
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	10	10	4	12	10	12	15	11	8	8
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	8	10	16	8	5	8	11	15	6	7
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	7	16	8	7	16	11	14	8	11	15



A={75}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	9	7	12	6	8	13	12	10	9	6
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	8	9	6	8	7	11	12	8	20
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	8	6	9	9	11	7	14	10	9	12
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	10	15	9	8	10	10	8	9	12	11
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	7	7	12	13	7	8	16	3	6	11
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	12	11	12	10	10	12	5	6	5	6
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	9	13	9	9	7	15	5	10	8	12
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	15	9	8	6	13	9	12	15	11	12
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	8	12	6	8	7	9	7	8	12	8
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	9	7	4	7	10	12	3	8	4	14



En el caso $n = 975$, $p = \frac{1}{100}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$, se cumple la Desigualdad de Chebishev, ya que la teoría nos indica que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.97525$$

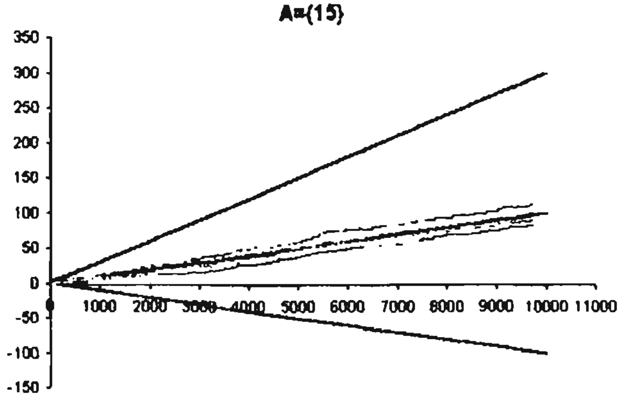
Es decir, al menos el 97.525% de las sucesiones deben tener una aproximación a p menor que 0.02, para satisfacer esta desigualdad. Sin embargo observamos que, para las cinco parejas de dígitos, el 100% de las sucesiones caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Cuando $n = 9750$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-97.5	292.5

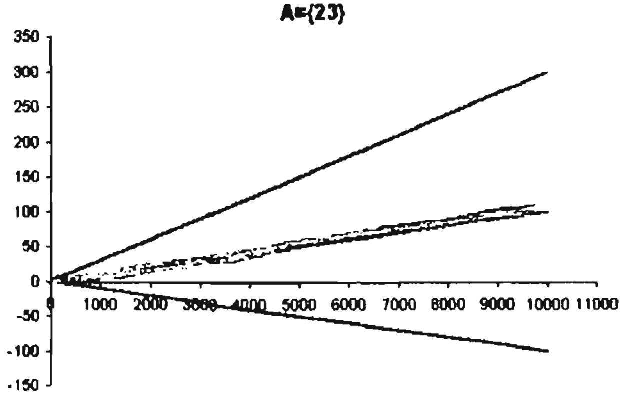
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	84	91	114	89	85	103	104	81	102	121



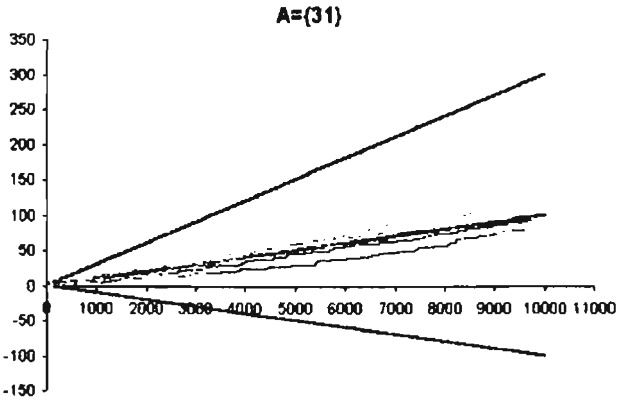
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	109	103	112	84	84	96	104	88	109	93



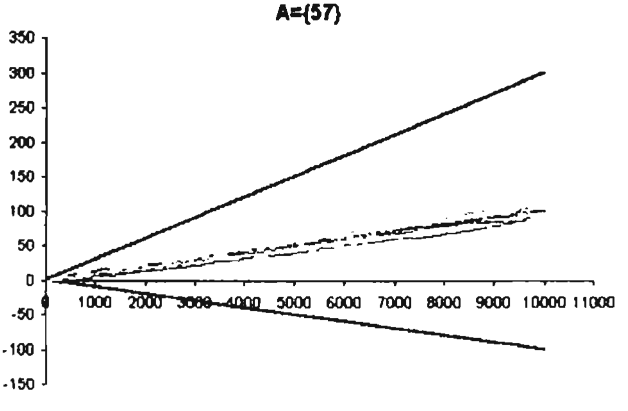
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	93	94	83	116	104	81	107	102	113	102



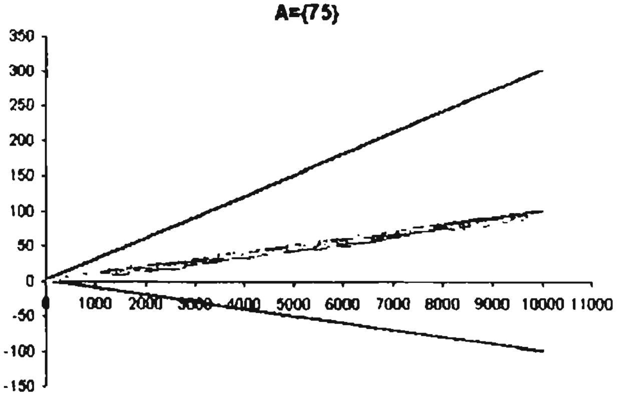
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	90	104	90	104	97	93	93	100	94	113



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	92	99	95	102	90	89	97	110	85	78



Tanto los resultados mostrados en las tablas como las gráficas nos muestran claramente que el 100 % de las sucesiones utilizadas, quedan dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Por consiguiente si la teoría establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2} = 0.997525$$

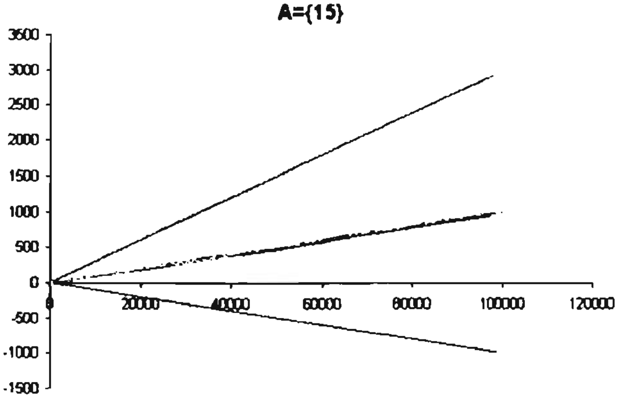
es decir, que al menos el 99.7525% de las sucesiones deben tener la aproximación a p que establece la Desigualdad de Chebishev. Entonces podemos concluir que las cinco parejas de dígitos, satisfacen esta desigualdad.

Si $n = 97500$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-975	2925

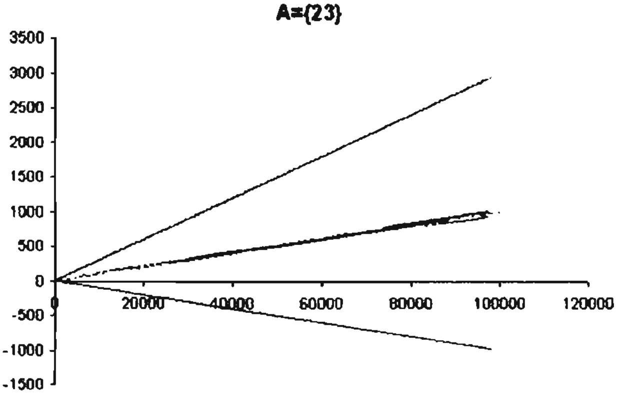
A={15}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	974	1009	943	982	1012



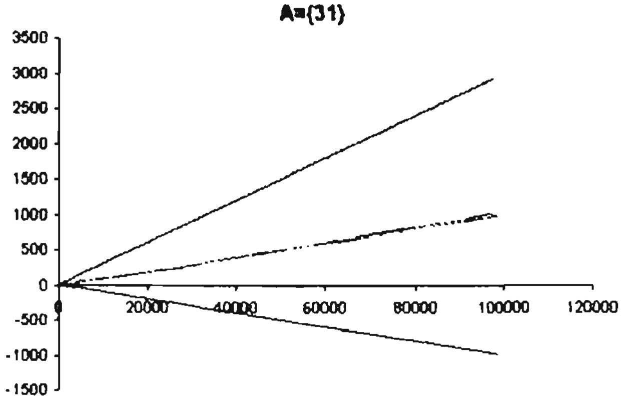
A={23}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	1011	997	933	985	958



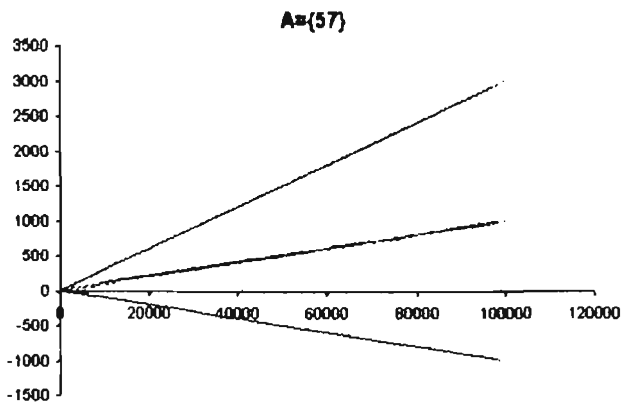
A={31}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	1012	972	974	980	987



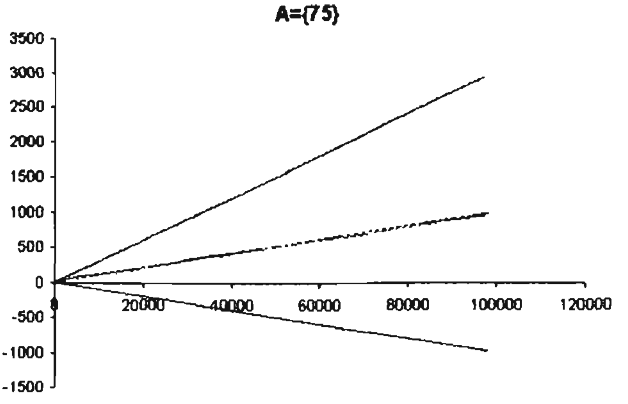
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	984	962	970	971	939



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	950	963	938	1022	935



Podemos observar que en los cinco casos, el 100% de las sucesiones caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$, por lo que se afirma que satisfacen la Desigualdad de Chebishev ya que lo que establece la teoría es que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.9997525$$

i.e., que en más del 99.97525% de las sucesiones, $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02.

Mediante estas observaciones corroboramos que los dígitos de las tablas generadas utilizando las cifras decimales de π, ya sea tomados de uno en uno ó por parejas, cumplen también la Desigualdad de Chebishev, presentando un comportamiento muy similar al de los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith.

Ley Basta del Logaritmo Iterado.

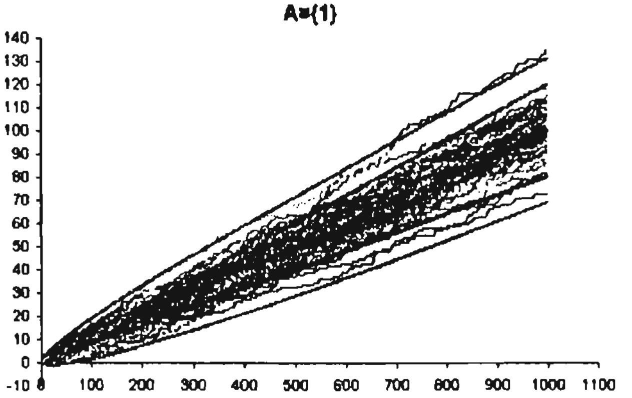
Ahora, observemos si estas mismas sucesiones $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado, utilizando los mismos colectivos que en la Desigualdad de Chebishev.

Para $n = 1000$ y $p = \frac{1}{10}$,

$np-\sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np+\sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
68.9143	131.0857

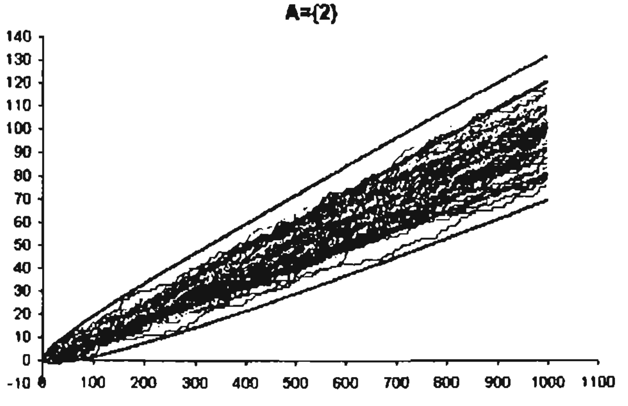
$A = \{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	91	92	82	100	115	100	88	98	102	95
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	86	110	86	110	101	93	94	96	88	92
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	104	112	100	82	105	118	113	96	108	112
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	88	99	107	96	113	92	135	89	105	96
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	88	104	131	101	95	106	112	92	92	88
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	94	86	91	101	106	100	108	101	104	99
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	116	89	100	100	104	98	116	90	120	106
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	103	85	93	105	97	109	73	98	101	91
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	101	104	96	107	92	103	110	107	104	99
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	110	109	100	98	110	103	102	95	106	108



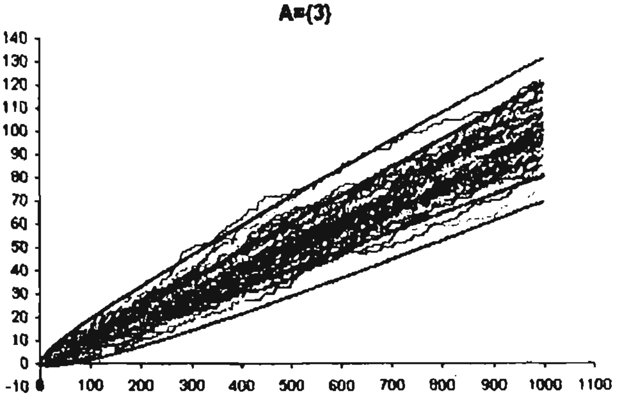
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	95	118	95	93	96	110	100	96	106	101
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	96	100	90	88	99	98	113	100	88	101
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	79	96	105	103	109	108	110	113	84	83
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	100	91	96	94	90	90	79	115	81	108
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	92	98	107	76	107	101	91	114	99	117
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	94	106	105	93	108	106	102	103	117	82
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	94	110	110	103	86	95	101	121	95	98
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	105	104	100	108	97	98	107	92	97	93
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	118	79	111	116	116	87	108	99	107	85
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	90	98	92	110	100	112	99	108	108	96



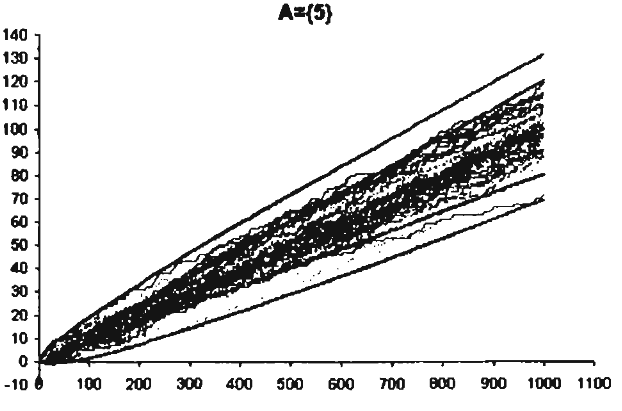
$A = \{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	98	103	101	75	94	103	100	85	123	105
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	108	100	86	108	105	108	105	85	111	90
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	90	82	90	102	99	89	110	107	114	108
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	98	103	99	116	98	121	105	101	107	90
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	82	115	100	89	117	96	107	101	90	103
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	96	98	105	97	99	99	118	116	92	99
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	113	105	84	100	113	101	91	106	91	86
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	86	93	120	94	102	94	95	104	92	117
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	97	93	104	106	106	108	91	95	105	113
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	95	98	99	85	104	101	123	98	95	95



$A=\{5\}$

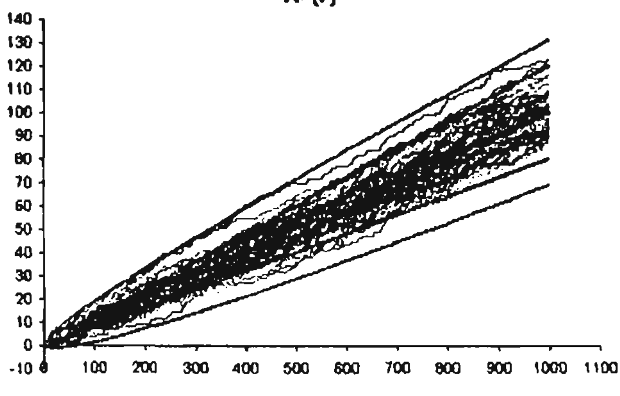
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	95	90	88	104	94	113	99	91	98	108
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	87	101	113	97	101	107	82	106	92	98
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	108	90	105	99	100	104	95	100	95	106
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	109	110	90	103	110	107	104	101	88	93
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	108	93	91	101	98	106	103	104	103	86
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	96	101	106	108	93	101	100	91	93	113
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	105	119	99	98	74	98	110	80	92	87
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	102	105	72	93	108	101	119	113	92	103
Colectivo	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
Frecuencia	95	103	103	96	92	115	105	98	95	116
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	110	97	89	98	100	97	98	100	97	103



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	96	110	113	97	98	104	95	107	94	108
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	89	89	96	93	101	88	103	103	97	116
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	107	96	100	109	94	97	104	90	102	86
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	99	113	91	91	94	104	100	107	123	103
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	107	98	105	121	95	99	100	91	110	97
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	108	103	105	99	104	107	92	88	88	108
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	91	78	110	91	92	109	98	105	85	117
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	105	85	98	94	100	117	108	107	113	92
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	100	103	96	94	96	90	98	119	99	91
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	101	109	96	91	103	100	93	110	92	117

A={7}



Podemos observar que sólo en uno de los cinco casos existen sucesiones que quedan fuera de la zona de Khinchin $\left(np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}, np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}\right)$.

Para $d = 1$, una sucesión queda fuera de la zona de Khinchin. Entonces, un 99% de las sucesiones observadas $\delta_1, \ldots, \delta_n$, cumple que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un error menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

Para $d = 2$, $d = 3$, $d = 5$ y $d = 7$, el 100% de las sucesiones observadas cumplen que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ se aproxime a p con un error menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

Teóricamente la desigualdad la Ley Basta del Logaritmo Iterado nos dice que para $n = 1000$,

$$\mu_n \left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)} \right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.90686$$

Es decir, más del 90.686% de las sucesiones debería tener una aproximación de $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ a p con un margen de error menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

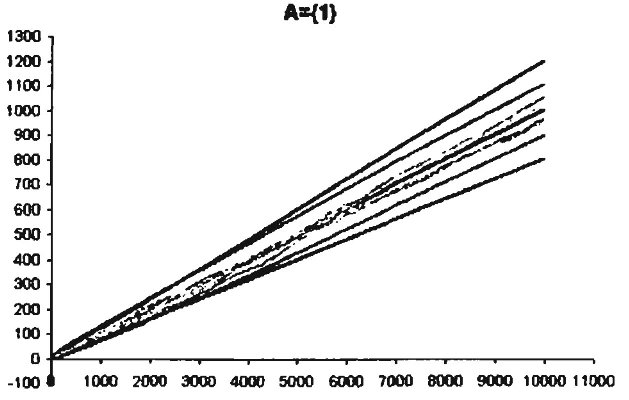
Por lo tanto, es claro que en los cinco casos se cumple la Desigualdad de Chebishev-Khinchin, y por lo tanto se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado, ya que el porcentaje de las sucesiones observadas que satisfacen la exigencia de esta desigualdad es mayor que el porcentaje que marca la teoría.

Para $n = 10000$

$np - \sqrt{\frac{n}{2}}\ln\ln n$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}}\ln\ln n$
894.6357	1105.3643

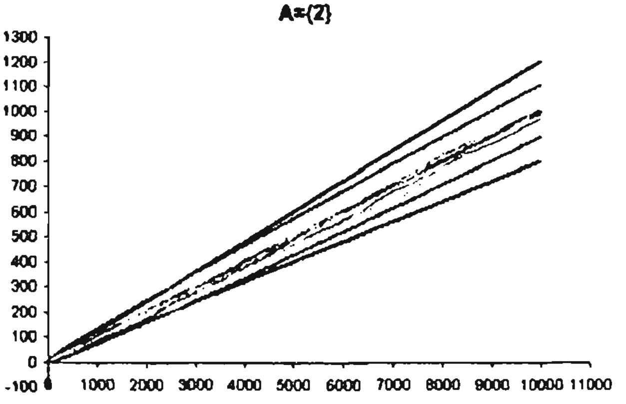
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	963	956	1050	1020	1009	990	1039	955	1023	1041



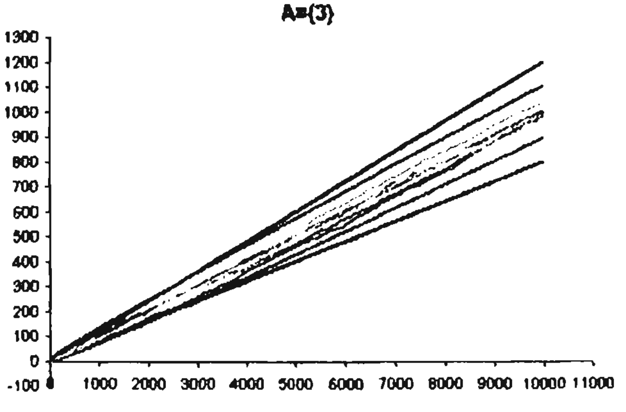
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1010	973	990	944	1002	1016	1013	1001	1026	1013



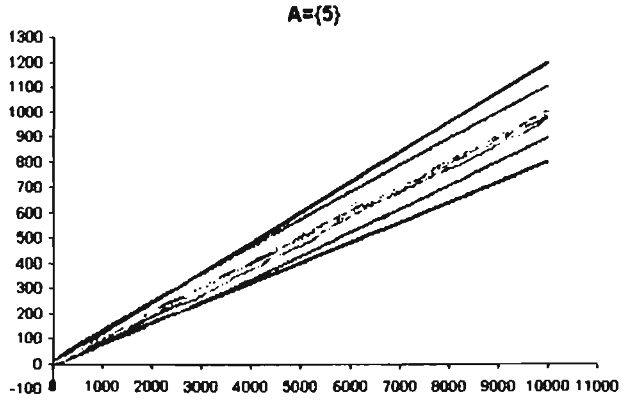
A={3}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	987	1006	991	1038	1000	1019	990	997	1018	993



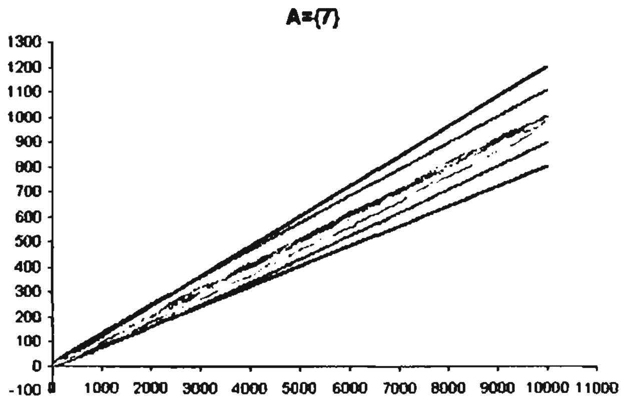
A={5}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	980	984	1002	1015	993	1002	962	1008	1018	989



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1022	975	985	1025	1023	1002	976	1019	986	1012



En los cinco casos todas las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin, por lo tanto, para los cinco dígitos se cumple la desigualdad de Chebishev-Khinchin, la cual establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.91893$$

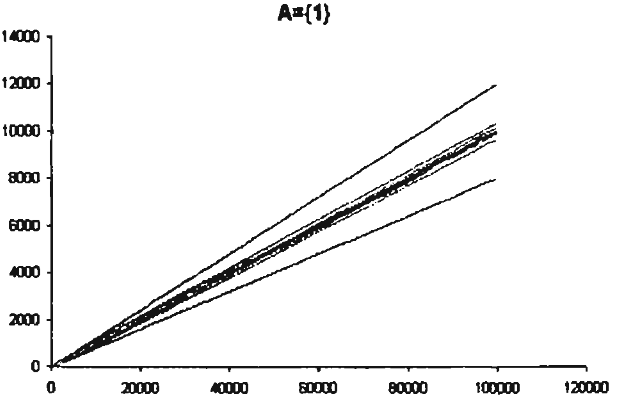
Es decir, cuando $n = 10000$, más del 91.893% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$ para que se satisfaga esta Desigualdad, dado que en nuestras observaciones realizadas para $d = 1,2,3,5,7$; el 100% de las sucesiones cumplió dicha condición, podemos afirmar que se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Finalmente cuando $n = 100000$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
9650.4667	10349.5333

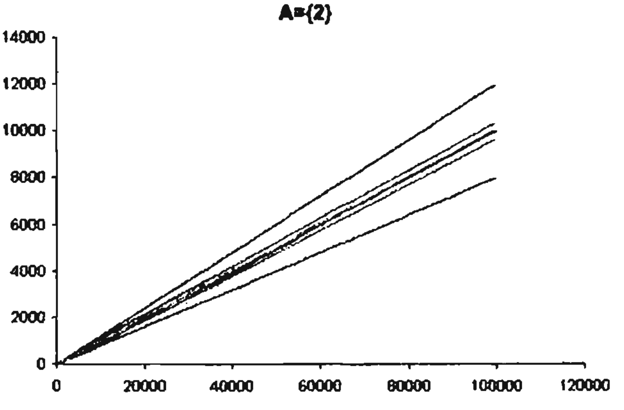
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9906	10178	9991	9896	10256



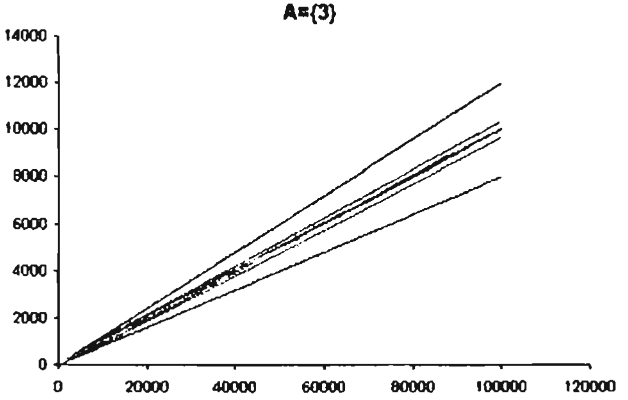
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10034	10013	10029	10066	10137



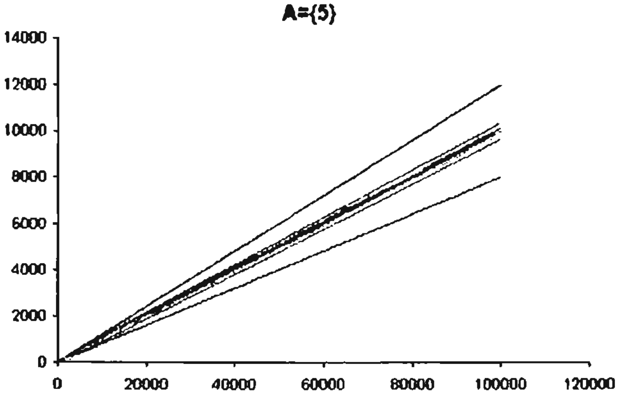
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10041	9989	10018	10006	9859



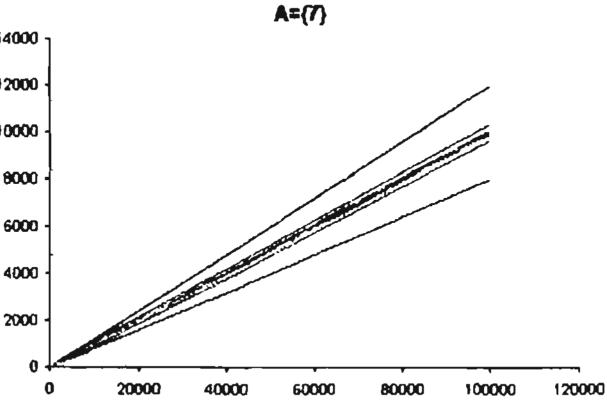
A={5}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9889	10135	10004	9988	9893



A={7}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10032	9923	10073	9874	10010



Al igual que para $n = 10000$, si $n = 100000$, todas las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin.

Teóricamente se tiene que más del 92.633% de las sucesiones deben tener una aproximación menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$ de $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ con respecto a p para satisfacer la Desigualdad de Chebishev. Es decir,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.92633$$

Entonces para $n = 100000$, también se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

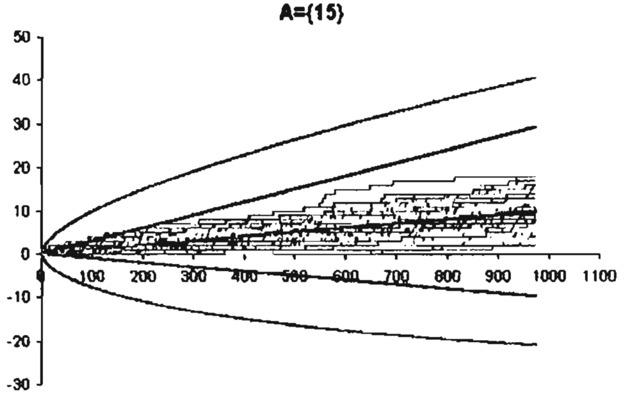
A continuación observemos si al formar parejas con los dígitos, también se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Para esto formaremos los colectivos de parejas de dígitos a partir de los que utilizamos anteriormente y veamos que sucede.

Para $n = 975$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}}\ln\ln n$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}}\ln\ln n$
-20.9155	40.4155

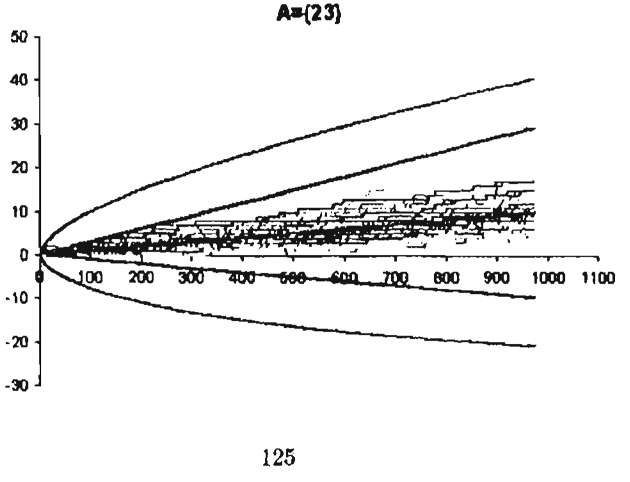
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	7	6	4	11	9	12	7	12	6	10
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	9	6	8	16	13	3	10	8	9
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	12	12	11	15	8	18	8	11	5	14
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	8	5	11	13	14	8	17	5	5	3
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	6	10	9	9	10	11	11	8	8	3
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	8	7	10	7	14	7	12	10	17	11
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	15	12	11	12	8	7	18	7	5	9
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	7	9	7	7	12	12	2	7	9	9
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	11	13	8	11	7	10	13	8	13	8
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	12	16	11	16	13	7	15	12	7	12



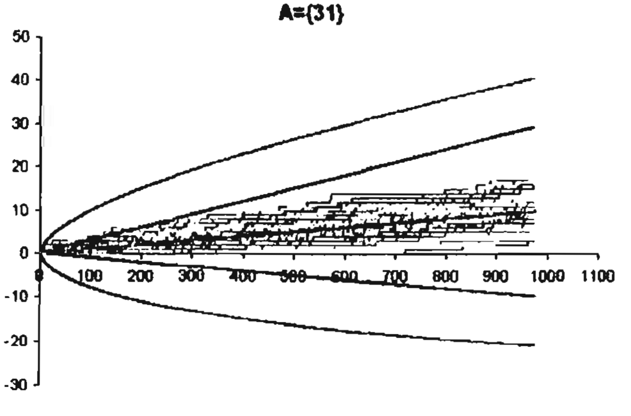
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	10	12	12	10	10	13	12	8	15	7
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	11	15	10	11	12	9	13	7	7	8
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	5	9	10	9	17	10	12	15	13	12
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	8	9	14	8	9	8	7	8	7	6
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	6	6	11	8	9	14	11	8	6	5
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	12	11	7	11	15	10	9	11	7	3
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	14	10	12	12	5	10	9	14	8	10
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	9	13	8	10	8	8	10	10	5	7
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	12	5	11	9	18	10	7	11	11	15
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	10	17	9	10	10	9	9	5	7	7



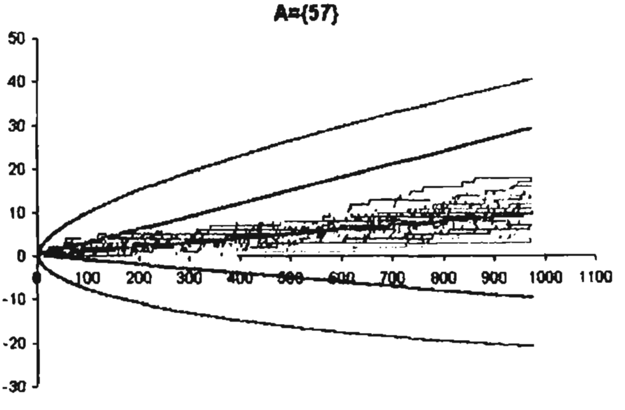
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	5	11	7	8	14	9	8	11	10	10
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	16	3	14	15	10	8	3	8	7
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	4	9	3	7	4	11	9	9	15	12
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	11	15	9	13	10	11	17	7	16	7
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	4	11	19	8	12	5	17	9	9	10
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	8	5	4	9	10	8	13	7	9	8
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	17	8	7	11	14	9	15	9	10	7
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	7	5	10	16	9	11	7	10	15	12
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	10	8	9	13	12	16	13	12	9	11
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	10	16	9	11	8	9	11	10	8	10



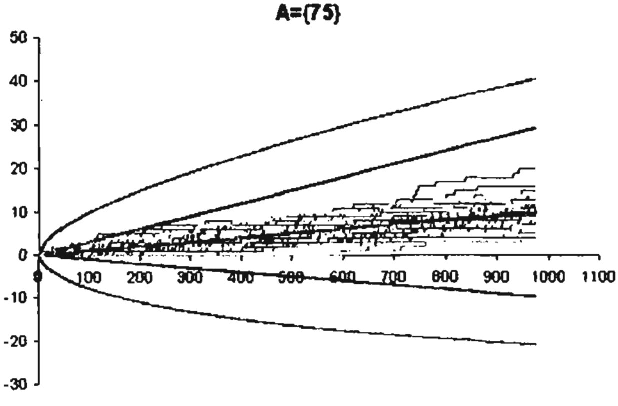
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	5	8	10	7	10	10	7	10	15
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	5	8	16	8	12	10	7	13	7	18
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	11	8	11	9	12	8	12	6	7	6
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	13	9	10	11	11	14	6	14	11	5
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	8	9	10	8	5	8	12	11	18	8
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	10	10	6	16	8	11	8	6	6	12
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	11	11	8	6	4	13	8	9	9	14
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	10	10	4	12	10	12	15	11	8	8
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	8	10	16	8	5	8	11	15	6	7
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	7	16	8	7	16	11	14	8	11	15



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	9	7	12	6	8	13	12	10	9	6
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	8	9	6	8	7	11	12	8	20
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	8	6	9	9	11	7	14	10	9	12
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	10	15	9	8	10	10	8	9	12	11
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	7	7	12	13	7	8	16	3	6	11
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	12	11	12	10	10	12	5	6	5	6
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	9	13	9	9	7	15	5	10	8	12
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	15	9	8	6	13	9	12	15	11	12
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	8	12	6	8	7	9	7	8	12	8
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	9	7	4	7	10	12	3	8	4	14



En el caso $n = 975$ y $p = \frac{1}{100}$, se cumple la Desigualdad de Chebishev-Khinchin ya que la teoría nos indica que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.98974.$$

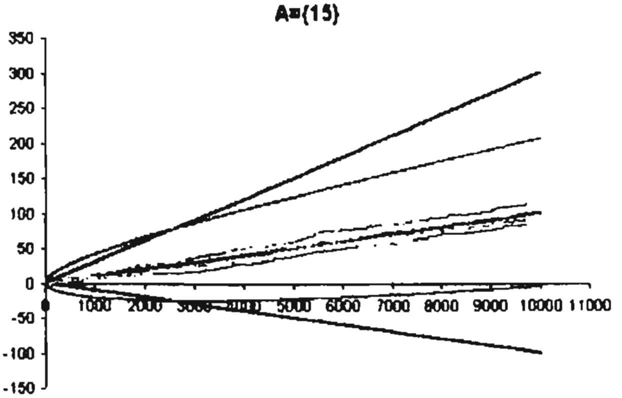
Es decir, más del 98.974% de las sucesiones, deben tener una aproximación de $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$, para satisfacer esta desigualdad. Sin embargo observamos, para las cinco parejas de dígitos, que el 100% de las sucesiones caen dentro de la zona de Khinchin, por lo cual satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Cuando $n = 9750$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
-6.4744	201.4744

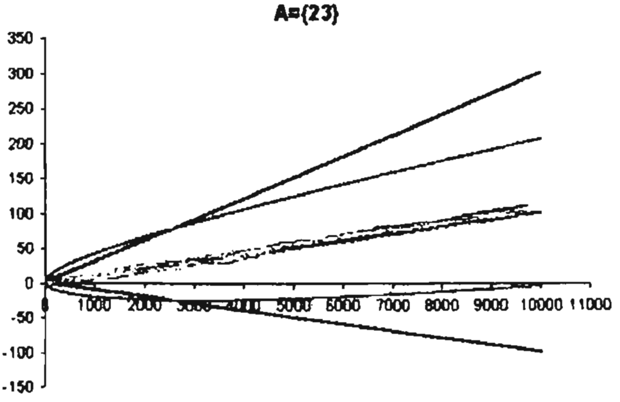
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	84	91	114	89	85	103	104	81	102	121



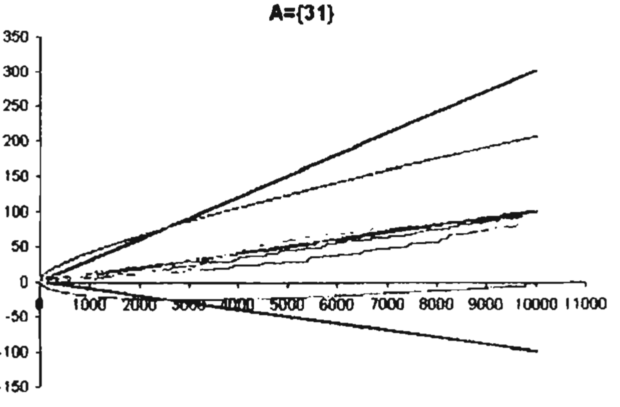
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	109	103	112	84	84	96	104	88	109	93



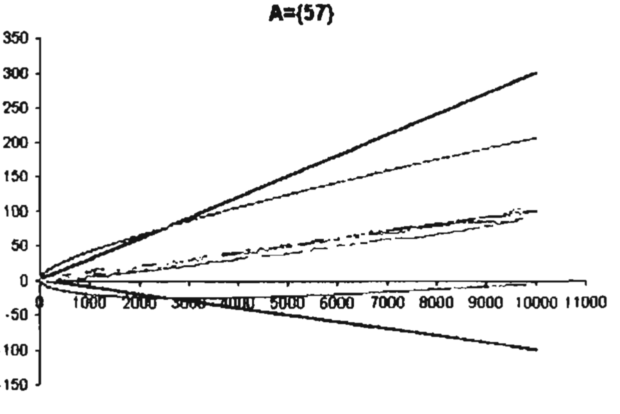
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	93	94	83	116	104	81	107	102	113	102



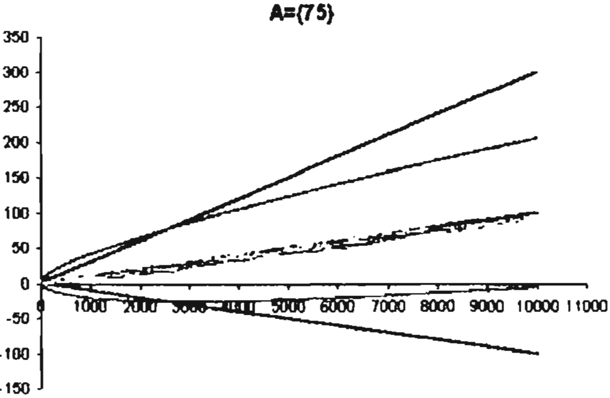
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	90	104	90	104	97	93	93	100	94	113



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	92	99	95	102	90	89	97	110	85	78



Los resultados mostrados muestran claramente que el 100 % de las sucesiones utilizadas, quedan dentro de la zona de Kinchin.

Por consiguiente si la teoría establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n}=0.99107.$$

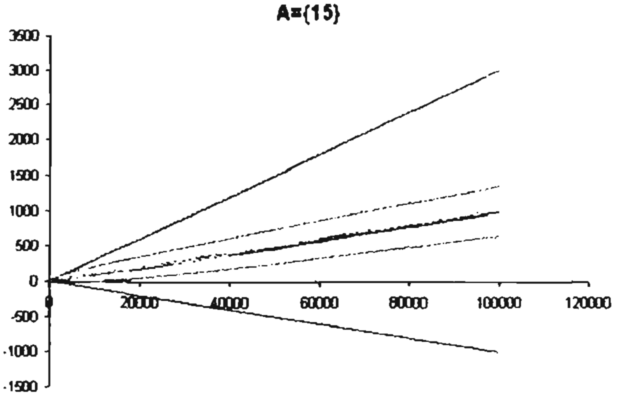
es decir, que más del 99.107% de las sucesiones deben tener una aproximación de $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ con repecto a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$, para que se cumpla la Desigualdad de Chebishev-Khinchin. Entonces, para $n = 10000$, las sucesiones observadas para las cinco parejas de dígitos satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Si $n = 97500$,

$np-\sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np+\sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
630.0190	1319.9810

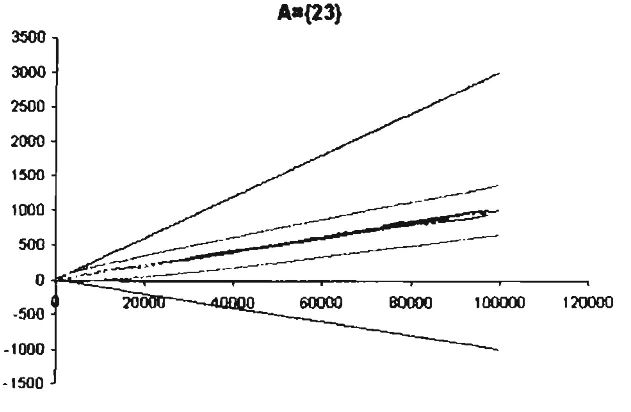
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	974	1009	943	982	1012



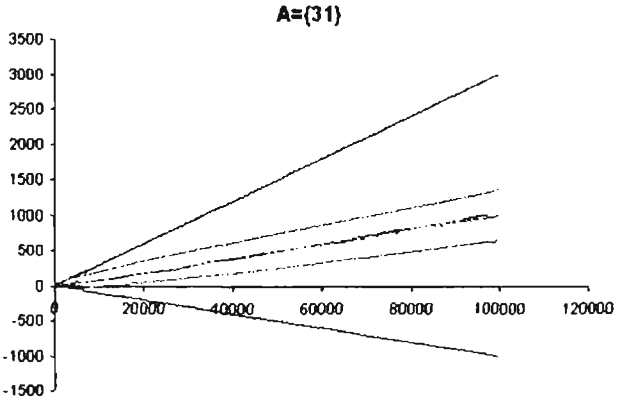
A={23}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	1011	997	933	985	958



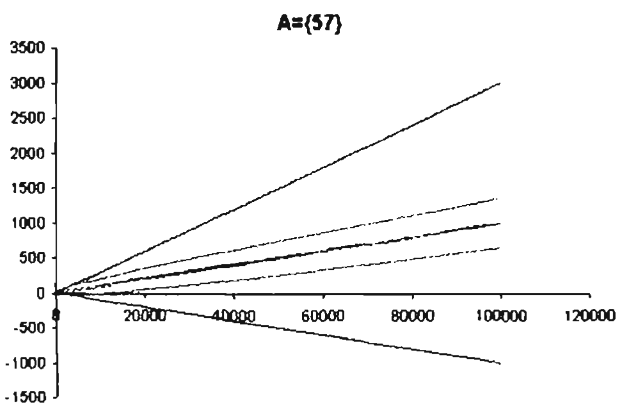
A={31}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	1012	972	974	980	987



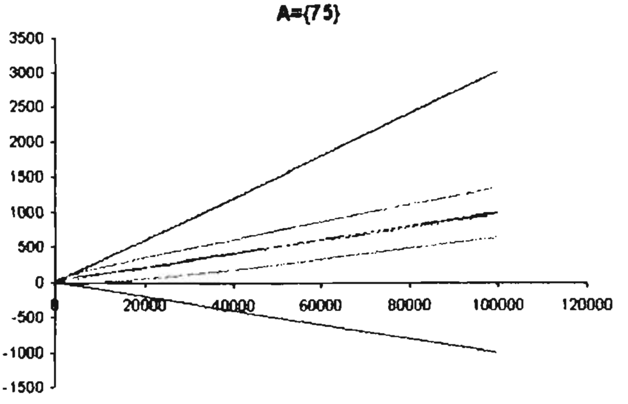
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	984	962	970	971	939



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	950	963	938	1022	935



Podemos observar que en los cinco casos, también el 100% de las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin por lo que se afirma que se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado ya que lo que establece la teoría es que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.99189.$$

Entonces, con los dígitos de estas nuevas tablas, tomándolos individualmente y por parejas, en colectivos de tamaño 1000, 10000 y 100000; también se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Por lo tanto, en todas y cada una de las sucesiones estudiadas, se observa, nuevamente, un comportamiento casi idéntico al que presentan las tablas de dígitos de Kendall y Babington Smith, siendo prácticamente nula la aparición de sucesiones fuera de la zona de Khinchin.

4.2 Colectivos de dígitos obtenidos de las tablas generadas con la función R=(X+Y)mod 10, utilizando cifras decimales del número e.

4.2.1 Regularidades estadísticas de los colectivos de resultados.

Comenzemos, al igual que antes, tomando los dígitos de uno en uno, $A = \{d\}$, donde $d = 0, 1, \ldots, 9$.

Los resultados cuando $n = 1000$ son

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 1000.
Tabla 7001-8000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.112	0.089	0.100	0.107	0.089	0.087	0.102	0.092	0.111	0.111

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 1000.

Tabla 7001-8000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.094	0.099	0.109	0.105	0.110	0.096	0.099	0.108	0.096	0.084

Tabla 7001-8000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.093	0.101	0.102	0.109	0.092	0.103	0.108	0.101	0.095	0.096

Tabla 7001-8000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.104	0.114	0.122	0.107	0.083	0.088	0.100	0.099	0.097	0.086

Tabla 7001-8000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.089	0.109	0.107	0.102	0.094	0.088	0.100	0.080	0.110	0.121

Tabla 47001-48000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.108	0.088	0.097	0.106	0.108	0.113	0.100	0.082	0.093	0.105

Tabla 47001-48000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.084	0.110	0.105	0.095	0.104	0.114	0.094	0.108	0.093	0.093

Tabla 47001-48000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.090	0.100	0.092	0.104	0.094	0.120	0.092	0.090	0.105	0.113

Tabla 47001-48000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.085	0.099	0.113	0.103	0.093	0.103	0.100	0.098	0.110	0.096

Tabla 47001-48000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.089	0.098	0.113	0.107	0.096	0.088	0.100	0.097	0.097	0.115

Podemos observar en estas tablas de resultados, que la frecuencia relativa de cada uno de los dígitos, se aproxima a 0.1, es decir, $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+...+\delta_{1000}(A)}{1000} \approx \frac{1}{10}$ para $A = \{d\}$, $d = 0, 1, ..., 9$.

Para $n = 10000$, los resultados son:

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 10000.

Tabla 1-10000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0996	0.1016	0.1011	0.1027	0.0959	0.1045	0.0988	0.0999	0.0956	0.1003

Tabla 1-10000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1000	0.0991	0.1024	0.0986	0.1027	0.1024	0.1002	0.1044	0.0970	0.0932

Tabla 1-10000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1012	0.0985	0.1015	0.1011	0.0991	0.0982	0.1010	0.1008	0.1034	0.0952

Tabla 1-10000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1071	0.1000	0.1041	0.0980	0.0970	0.0983	0.0979	0.1005	0.1033	0.0938

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 10000.

Tabla 1-10000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1022	0.1039	0.1010	0.1019	0.0989	0.0960	0.0987	0.0983	0.0967	0.1024

Tabla 40001-50000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1061	0.0947	0.0933	0.0971	0.1068	0.1049	0.0958	0.1018	0.1007	0.0988

Tabla 400001-50000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0956	0.1040	0.1006	0.1024	0.0978	0.1040	0.0968	0.1013	0.0984	0.0991

Tabla 40001-50000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1087	0.0970	0.1043	0.0962	0.1014	0.0986	0.0978	0.0989	0.0977	0.0994

Tabla 40001-50000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0973	0.1067	0.0999	0.0973	0.0960	0.0990	0.0997	0.1061	0.0991	0.0989

Tabla 40001-50000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1000	0.0975	0.0993	0.1027	0.1034	0.0955	0.1018	0.0984	0.0990	0.1024

Observamos que se mantiene que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{10000}(A)}{10000} \approx \frac{1}{10}$, pero con una mejor aproximación.

Finalmente veamos como se comportan los colectivos totales de las tablas, es decir, cuando $n = 100000$.

Tablas de frecuencias relativas de los dígitos en colectivos de tamaño n = 100000.

Tabla 1-100000-I

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10060	0.09969	0.09952	0.10098	0.10006	0.10158	0.09836	0.09965	0.09917	0.10039

Tabla 1-100000-II

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10047	0.09964	0.09977	0.10139	0.09969	0.10055	0.09997	0.09967	0.10056	0.09829

Tabla 1-100000-III

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10022	0.10009	0.09933	0.10001	0.09950	0.10020	0.10029	0.10053	0.09962	0.10021

Tabla 1-100000-IV

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.10042	0.10076	0.09923	0.09982	0.10040	0.09927	0.10088	0.10061	0.10074	0.09787

Tabla 1-100000-V

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.09934	0.09917	0.09939	0.10187	0.10128	0.09971	0.10073	0.09973	0.10017	0.09861

También se obtiene que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{100000}(A)}{100000} \approx \frac{1}{10}$.

Hemos podido corroborar mediante estas primeras observaciones, que al igual que en las tablas de dígitos de Kendall y Babington Smith y en las tablas de dígitos originadas con cifras decimales de π, en estas 5 nuevas tablas originadas con las cifras decimales de e, al tomar los dígitos de uno en uno y sin importar el orden, estos colectivos de dígitos también tienen regularidades estadísticas, ya que,

$$\frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx \frac{1}{10} = p_A, \text{ con } A = \{d\},\ d = 0, 1, \ldots, 9,\ \forall\ n \textit{ grande}.$$

A continuación veremos si al formar parejas con los dígitos, estás presentan también regularidades estadísticas. Recordemos que en este caso,
$A = \{(d_1, d_2)\}$, $d_1, d_2 = 0, 1, \ldots, 9$; $n = 975, 9750, 97500$.

Comencemos con $n = 975$ parejas de dígitos.

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.
Tabla 7001-8000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0185	0.0072	0.0062	0.0133	0.0092	0.0123	0.0103	0.0103	0.0123	0.0144
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0072	0.0103	0.0092	0.0092	0.0092	0.0072	0.0082	0.0051	0.0133	0.0113
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0144	0.0072	0.0082	0.0195	0.0041	0.0051	0.0092	0.0092	0.0154	0.0092
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0113	0.0072	0.0144	0.0103	0.0123	0.0051	0.0103	0.0072	0.0164	0.0113
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0082	0.0062	0.0123	0.0092	0.0051	0.0103	0.0103	0.0113	0.0103	0.0062
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0113	0.0103	0.0082	0.0092	0.0051	0.0113	0.0144	0.0072	0.0051	0.0062
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0164	0.0072	0.0103	0.0103	0.0123	0.0092	0.0103	0.0103	0.0082	0.0072
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0062	0.0144	0.0103	0.0082	0.0072	0.0072	0.0092	0.0103	0.0072	0.0133
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0051	0.0103	0.0092	0.0103	0.0123	0.0103	0.0133	0.0103	0.0113	0.0164
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0144	0.0092	0.0103	0.0072	0.0144	0.0072	0.0082	0.0092	0.0092	0.0185

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 7001-8000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0031	0.0092	0.0082	0.0133	0.0092	0.0072	0.0082	0.0103	0.0092	0.0164
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0144	0.0021	0.0082	0.0092	0.0133	0.0103	0.0092	0.0103	0.0092	0.0113
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0092	0.0195	0.0072	0.0154	0.0092	0.0072	0.0082	0.0123	0.0123	0.0103
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0123	0.0103	0.0185	0.0113	0.0062	0.0123	0.0133	0.0133	0.0051	0.0031
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0031	0.0195	0.0123	0.0082	0.0113	0.0144	0.0062	0.0123	0.0133	0.0113
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0133	0.0092	0.0113	0.0092	0.0154	0.0062	0.0092	0.0072	0.0113	0.0041
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0113	0.0062	0.0092	0.0103	0.0133	0.0113	0.0123	0.0144	0.0062	0.0031
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0051	0.0103	0.0164	0.0092	0.0113	0.0123	0.0123	0.0113	0.0103	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0092	0.0092	0.0103	0.0113	0.0062	0.0133	0.0092	0.0103	0.0092	0.0092
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0144	0.0051	0.0072	0.0092	0.0113	0.0021	0.0082	0.0082	0.0072	0.0082

Tabla 7001-8000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0072	0.0072	0.0092	0.0113	0.0103	0.0113	0.0092	0.0041	0.0062	0.0154
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0051	0.0113	0.0123	0.0103	0.0041	0.0164	0.0164	0.0123	0.0062	0.0082
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0062	0.0103	0.0113	0.0113	0.0113	0.0051	0.0133	0.0123	0.0123	0.0092
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0113	0.0103	0.0103	0.0144	0.0082	0.0154	0.0133	0.0092	0.0103	0.0072
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0072	0.0123	0.0082	0.0082	0.0072	0.0113	0.0123	0.0103	0.0051	0.0082
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0133	0.0113	0.0092	0.0103	0.0062	0.0082	0.0103	0.0133	0.0072	0.0123
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0082	0.0123	0.0103	0.0133	0.0113	0.0195	0.0103	0.0062	0.0133	0.0041
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0133	0.0092	0.0082	0.0092	0.0103	0.0082	0.0113	0.0103	0.0113	0.0103
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0123	0.0092	0.0113	0.0092	0.0103	0.0041	0.0062	0.0123	0.0092	0.0113
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0082	0.0062	0.0133	0.0092	0.0123	0.0041	0.0062	0.0103	0.0144	0.0123

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 7001-8000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0133	0.0113	0.0072	0.0103	0.0092	0.0154	0.0092	0.0082	0.0103	0.0103
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0123	0.0113	0.0123	0.0103	0.0123	0.0062	0.0154	0.0123	0.0133	0.0092
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0113	0.0133	0.0154	0.0144	0.0133	0.0082	0.0082	0.0144	0.0123	0.0113
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0154	0.0133	0.0144	0.0123	0.0113	0.0062	0.0103	0.0062	0.0092	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0103	0.0082	0.0133	0.0082	0.0041	0.0082	0.0092	0.0062	0.0051	0.0072
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0072	0.0144	0.0123	0.0082	0.0041	0.0092	0.0051	0.0092	0.0103	0.0072
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0031	0.0144	0.0113	0.0082	0.0062	0.0082	0.0185	0.0133	0.0041	0.0123
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0123	0.0092	0.0082	0.0092	0.0154	0.0082	0.0113	0.0103	0.0082	0.0062
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0103	0.0092	0.0123	0.0092	0.0072	0.0103	0.0072	0.0113	0.0123	0.0082
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0062	0.0123	0.0164	0.0144	0.0010	0.0092	0.0051	0.0072	0.0113	0.0041

Tabla 7001-8000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0072	0.0103	0.0062	0.0092	0.0062	0.0103	0.0021	0.0051	0.0144	0.0174
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0062	0.0164	0.0123	0.0123	0.0144	0.0103	0.0092	0.0072	0.0082	0.0123
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0123	0.0103	0.0092	0.0144	0.0113	0.0082	0.0072	0.0072	0.0113	0.0174
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0062	0.0092	0.0092	0.0103	0.0113	0.0133	0.0082	0.0072	0.0164	0.0072
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0113	0.0123	0.0103	0.0082	0.0072	0.0062	0.0174	0.0062	0.0041	0.0123
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0062	0.0062	0.0103	0.0144	0.0051	0.0062	0.0062	0.0113	0.0123	0.0092
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0072	0.0103	0.0123	0.0092	0.0072	0.0082	0.0103	0.0103	0.0123	0.0113
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0072	0.0082	0.0123	0.0041	0.0082	0.0062	0.0103	0.0092	0.0051	0.0092
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0103	0.0103	0.0123	0.0082	0.0072	0.0113	0.0144	0.0123	0.0154	0.0103
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0154	0.0174	0.0103	0.0113	0.0144	0.0072	0.0164	0.0041	0.0123	0.0144

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 47001-48000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0113	0.0082	0.0082	0.0092	0.0113	0.0133	0.0174	0.0072	0.0082	0.0144
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0082	0.0113	0.0072	0.0103	0.0062	0.0113	0.0082	0.0082	0.0062	0.0133
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0062	0.0113	0.0123	0.0123	0.0082	0.0051	0.0092	0.0082	0.0113	0.0103
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0123	0.0051	0.0092	0.0133	0.0164	0.0113	0.0133	0.0113	0.0051	0.0092
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0123	0.0051	0.0123	0.0072	0.0133	0.0123	0.0103	0.0062	0.0164	0.0113
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0144	0.0113	0.0103	0.0133	0.0144	0.0103	0.0082	0.0092	0.0072	0.0144
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0062	0.0113	0.0103	0.0113	0.0133	0.0092	0.0051	0.0092	0.0082	0.0133
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0113	0.0072	0.0062	0.0113	0.0072	0.0092	0.0062	0.0123	0.0082	0.0051
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0123	0.0082	0.0072	0.0082	0.0062	0.0174	0.0113	0.0051	0.0072	0.0082
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0123	0.0082	0.0154	0.0082	0.0144	0.0103	0.0113	0.0051	0.0154	0.0072

Tabla 47001-48000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0072	0.0072	0.0092	0.0092	0.0051	0.0092	0.0092	0.0103	0.0082	0.0072
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0092	0.0164	0.0113	0.0031	0.0123	0.0174	0.0051	0.0113	0.0092	0.0144
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0092	0.0103	0.0123	0.0133	0.0113	0.0123	0.0082	0.0082	0.0103	0.0103
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0051	0.0082	0.0174	0.0092	0.0103	0.0113	0.0133	0.0082	0.0051	0.0082
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0082	0.0113	0.0133	0.0072	0.0082	0.0082	0.0154	0.0133	0.0041	0.0133
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0082	0.0133	0.0072	0.0103	0.0123	0.0092	0.0154	0.0103	0.0205	0.0092
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0062	0.0082	0.0072	0.0133	0.0113	0.0082	0.0103	0.0103	0.0103
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0103	0.0103	0.0062	0.0123	0.0051	0.0164	0.0072	0.0144	0.0133	0.0113
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0113	0.0144	0.0092	0.0133	0.0113	0.0092	0.0051	0.0113	0.0041	0.0031
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0031	0.0113	0.0103	0.0082	0.0164	0.0092	0.0092	0.0103	0.0082	0.0082

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 975.

Tabla 47001-48000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0092	0.0051	0.0072	0.0113	0.0092	0.0082	0.0092	0.0082	0.0103	0.0123
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0072	0.0082	0.0072	0.0103	0.0092	0.0133	0.0123	0.0072	0.0092	0.0164
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0082	0.0133	0.0021	0.0041	0.0123	0.0123	0.0113	0.0082	0.0113	0.0072
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0082	0.0154	0.0144	0.0103	0.0041	0.0103	0.0103	0.0103	0.0113	0.0113
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0072	0.0051	0.0113	0.0082	0.0051	0.0185	0.0092	0.0092	0.0062	0.0133
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0103	0.0082	0.0133	0.0144	0.0185	0.0062	0.0103	0.0123	0.0164	0.0103
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0051	0.0113	0.0072	0.0092	0.0062	0.0103	0.0082	0.0123	0.0082	0.0164
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0072	0.0062	0.0072	0.0123	0.0082	0.0123	0.0072	0.0103	0.0144	0.0051
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0123	0.0144	0.0154	0.0123	0.0062	0.0123	0.0082	0.0072	0.0082	0.0082
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0144	0.0123	0.0072	0.0092	0.0154	0.0154	0.0072	0.0062	0.0113	0.0123

Tabla 47001-48000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0113	0.0123	0.0144	0.0092	0.0113	0.0062	0.0082	0.0051	0.0051	0.0021
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0082	0.0082	0.0113	0.0082	0.0113	0.0082	0.0133	0.0103	0.0113	0.0082
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0092	0.0103	0.0113	0.0113	0.0205	0.0092	0.0062	0.0092	0.0133	0.0113
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0051	0.0113	0.0103	0.0113	0.0092	0.0062	0.0133	0.0123	0.0154	0.0103
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0072	0.0062	0.0133	0.0072	0.0051	0.0092	0.0103	0.0103	0.0103	0.0133
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0092	0.0123	0.0082	0.0072	0.0082	0.0195	0.0082	0.0123	0.0123	0.0072
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0113	0.0072	0.0082	0.0113	0.0082	0.0123	0.0103	0.0072	0.0174
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0072	0.0113	0.0113	0.0185	0.0041	0.0113	0.0113	0.0092	0.0092	0.0031
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0113	0.0082	0.0123	0.0154	0.0123	0.0113	0.0072	0.0082	0.0092	0.0123
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0072	0.0051	0.0113	0.0082	0.0021	0.0133	0.0082	0.0113	0.0164	0.0133

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 975$.
Tabla 47001-48000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0072	0.0103	0.0062	0.0133	0.0103	0.0082	0.0082	0.0092	0.0072	0.0113
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0031	0.0123	0.0092	0.0123	0.0103	0.0123	0.0082	0.0092	0.0072	0.0133
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0123	0.0144	0.0215	0.0082	0.0123	0.0113	0.0051	0.0144	0.0062	0.0082
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0185	0.0051	0.0092	0.0092	0.0082	0.0082	0.0164	0.0092	0.0092	0.0113
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0062	0.0103	0.0062	0.0133	0.0072	0.0144	0.0103	0.0082	0.0103
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0041	0.0092	0.0103	0.0092	0.0123	0.0031	0.0123	0.0031	0.0133	0.0123
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0092	0.0092	0.0082	0.0092	0.0072	0.0062	0.0062	0.0144	0.0164	0.0144
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0082	0.0113	0.0113	0.0113	0.0082	0.0123	0.0082	0.0103	0.0092	0.0082
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0082	0.0072	0.0103	0.0133	0.0103	0.0103	0.0062	0.0113	0.0092	0.0092
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0082	0.0154	0.0174	0.0144	0.0062	0.0092	0.0123	0.0072	0.0103	0.0133

Se observa un comportamiento de las frecuencias relativas de los dígitos más o menos cercano a 0.01, aunque para algunos dígitos, de nuevo, no lo parezca, al igual que en el capítulo 1 y en la sección anterior, cuando $n = 975$.

Entonces, en este caso, tenemos que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{975}(A)}{975} \approx \frac{1}{100}$, con una aproximación $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0115$, que es igual en las tablas originales y en las generadas con decimales de π.

Ahora veamos como se comportan cuando $n = 9750$

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0116	0.0088	0.0099	0.0103	0.0084	0.0101	0.0098	0.0091	0.0101	0.0116
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0090	0.0090	0.0108	0.0119	0.0102	0.0105	0.0084	0.0097	0.0105	0.0116
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0088	0.0118	0.0093	0.0109	0.0103	0.0099	0.0087	0.0108	0.0112	0.0088
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0093	0.0094	0.0097	0.0090	0.0110	0.0110	0.0109	0.0112	0.0111	0.0099
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0103	0.0098	0.0095	0.0091	0.0085	0.0113	0.0089	0.0102	0.0097	0.0089
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0102	0.0107	0.0112	0.0105	0.0097	0.0107	0.0122	0.0093	0.0095	0.0109
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0110	0.0123	0.0108	0.0099	0.0112	0.0106	0.0084	0.0075	0.0081	0.0091
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0093	0.0099	0.0108	0.0118	0.0086	0.0102	0.0114	0.0099	0.0085	0.0101
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0096	0.0104	0.0098	0.0090	0.0092	0.0089	0.0104	0.0116	0.0085	0.0078
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0112	0.0089	0.0088	0.0106	0.0097	0.0107	0.0099	0.0104	0.0088	0.0109

Tabla 1-10000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0111	0.0104	0.0088	0.0097	0.0108	0.0092	0.0091	0.0099	0.0095	0.0114
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0098	0.0080	0.0101	0.0102	0.0109	0.0108	0.0108	0.0112	0.0079	0.0092
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0108	0.0105	0.0093	0.0109	0.0107	0.0106	0.0107	0.0104	0.0094	0.0093
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0085	0.0097	0.0122	0.0089	0.0099	0.0113	0.0087	0.0106	0.0110	0.0081
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0095	0.0107	0.0096	0.0110	0.0108	0.0102	0.0094	0.0105	0.0120	0.0095
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0102	0.0112	0.0108	0.0099	0.0120	0.0085	0.0108	0.0106	0.0099	0.0090
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0090	0.0112	0.0114	0.0088	0.0102	0.0110	0.0104	0.0101	0.0095	0.0086
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0110	0.0103	0.0119	0.0094	0.0094	0.0104	0.0112	0.0109	0.0088	0.0105
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0113	0.0095	0.0099	0.0094	0.0080	0.0108	0.0107	0.0097	0.0095	0.0082
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0090	0.0084	0.0081	0.0105	0.0096	0.0094	0.0087	0.0107	0.0087	0.0096

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0101	0.0117	0.0105	0.0107	0.0109	0.0108	0.0095	0.0083	0.0097	0.0090
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0084	0.0114	0.0089	0.0083	0.0090	0.0103	0.0103	0.0112	0.0111	0.0101
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0095	0.0089	0.0116	0.0107	0.0106	0.0088	0.0105	0.0095	0.0114	0.0103
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0126	0.0091	0.0103	0.0099	0.0101	0.0098	0.0105	0.0104	0.0101	0.0087
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0094	0.0093	0.0090	0.0097	0.0090	0.0122	0.0108	0.0102	0.0099	0.0093
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0103	0.0092	0.0108	0.0095	0.0093	0.0087	0.0108	0.0106	0.0097	0.0093
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0085	0.0083	0.0101	0.0118	0.0105	0.0108	0.0106	0.0103	0.0112	0.0096
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0106	0.0089	0.0111	0.0112	0.0103	0.0084	0.0091	0.0102	0.0101	0.0106
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0104	0.0108	0.0104	0.0098	0.0103	0.0103	0.0099	0.0106	0.0110	0.0098
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0105	0.0110	0.0094	0.0090	0.0091	0.0075	0.0094	0.0101	0.0095	0.0090

Tabla 1-10000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0115	0.0112	0.0109	0.0085	0.0101	0.0123	0.0106	0.0115	0.0110	0.0103
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0099	0.0107	0.0098	0.0111	0.0105	0.0079	0.0098	0.0113	0.0101	0.0090
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0121	0.0102	0.0109	0.0102	0.0106	0.0104	0.0102	0.0107	0.0099	0.0097
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0101	0.0093	0.0108	0.0105	0.0094	0.0090	0.0088	0.0085	0.0117	0.0096
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0092	0.0101	0.0093	0.0099	0.0093	0.0104	0.0103	0.0088	0.0114	0.0087
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0111	0.0093	0.0114	0.0092	0.0084	0.0091	0.0103	0.0095	0.0095	0.0097
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0105	0.0090	0.0113	0.0097	0.0096	0.0085	0.0105	0.0087	0.0106	0.0096
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0112	0.0109	0.0093	0.0089	0.0105	0.0098	0.0105	0.0104	0.0092	0.0090
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0107	0.0096	0.0110	0.0109	0.0097	0.0116	0.0087	0.0108	0.0105	0.0099
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0110	0.0103	0.0097	0.0088	0.0084	0.0088	0.0091	0.0096	0.0096	0.0081

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 1-10000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0095	0.0107	0.0103	0.0101	0.0099	0.0106	0.0105	0.0109	0.0087	0.0110
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0114	0.0118	0.0082	0.0097	0.0095	0.0101	0.0106	0.0109	0.0107	0.0111
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0115	0.0103	0.0081	0.0102	0.0111	0.0105	0.0092	0.0101	0.0106	0.0102
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0109	0.0104	0.0103	0.0109	0.0095	0.0110	0.0093	0.0086	0.0108	0.0097
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0102	0.0112	0.0118	0.0108	0.0107	0.0084	0.0105	0.0080	0.0077	0.0104
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0098	0.0092	0.0109	0.0089	0.0093	0.0094	0.0088	0.0081	0.0109	0.0101
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0081	0.0094	0.0106	0.0109	0.0095	0.0084	0.0111	0.0104	0.0112	0.0094
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0104	0.0098	0.0098	0.0094	0.0095	0.0098	0.0086	0.0109	0.0092	0.0109
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0091	0.0097	0.0094	0.0085	0.0110	0.0089	0.0094	0.0108	0.0090	0.0109
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0113	0.0121	0.0116	0.0116	0.0093	0.0090	0.0102	0.0092	0.0082	0.0094

Tabla 40001-50000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0107	0.0082	0.0105	0.0095	0.0133	0.0115	0.0112	0.0104	0.0109	0.0106
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0092	0.0094	0.0081	0.0101	0.0092	0.0096	0.0088	0.0104	0.0098	0.0107
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0082	0.0103	0.0092	0.0092	0.0102	0.0084	0.0094	0.0086	0.0105	0.0089
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0093	0.0087	0.0089	0.0090	0.0105	0.0104	0.0088	0.0110	0.0089	0.0109
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0107	0.0097	0.0088	0.0112	0.0123	0.0115	0.0109	0.0106	0.0106	0.0099
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0116	0.0111	0.0097	0.0119	0.0095	0.0115	0.0081	0.0098	0.0106	0.0110
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0093	0.0102	0.0085	0.0085	0.0103	0.0103	0.0107	0.0093	0.0095	0.0092
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0141	0.0088	0.0085	0.0099	0.0110	0.0103	0.0088	0.0113	0.0104	0.0088
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0120	0.0087	0.0103	0.0096	0.0105	0.0112	0.0096	0.0086	0.0091	0.0114
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0107	0.0099	0.0106	0.0080	0.0111	0.0099	0.0090	0.0117	0.0099	0.0081

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 9750.

Tabla 40001-50000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0089	0.0089	0.0078	0.0104	0.0087	0.0106	0.0104	0.0113	0.0097	0.0091
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0086	0.0108	0.0103	0.0109	0.0098	0.0116	0.0097	0.0111	0.0095	0.0118
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0104	0.0108	0.0112	0.0097	0.0116	0.0109	0.0082	0.0073	0.0103	0.0098
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0104	0.0097	0.0118	0.0106	0.0111	0.0101	0.0092	0.0095	0.0102	0.0104
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0099	0.0099	0.0095	0.0095	0.0074	0.0101	0.0097	0.0111	0.0088	0.0114
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0101	0.0119	0.0091	0.0118	0.0094	0.0105	0.0102	0.0105	0.0111	0.0096
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0095	0.0094	0.0110	0.0097	0.0099	0.0096	0.0108	0.0079	0.0103	0.0085
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0093	0.0101	0.0101	0.0099	0.0098	0.0118	0.0105	0.0101	0.0098	0.0101
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0091	0.0117	0.0101	0.0101	0.0093	0.0092	0.0089	0.0114	0.0094	0.0095
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0087	0.0115	0.0097	0.0091	0.0108	0.0105	0.0097	0.0105	0.0090	0.0091

Tabla 40001-50000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0114	0.0109	0.0127	0.0103	0.0118	0.0095	0.0092	0.0104	0.0105	0.0116
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0113	0.0096	0.0095	0.0105	0.0097	0.0107	0.0101	0.0082	0.0096	0.0086
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0111	0.0102	0.0107	0.0097	0.0121	0.0095	0.0111	0.0094	0.0101	0.0097
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0114	0.0089	0.0095	0.0086	0.0089	0.0088	0.0097	0.0115	0.0097	0.0093
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0098	0.0096	0.0108	0.0103	0.0089	0.0111	0.0112	0.0099	0.0108	0.0095
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0108	0.0081	0.0098	0.0096	0.0109	0.0081	0.0104	0.0110	0.0103	0.0098
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0108	0.0099	0.0111	0.0083	0.0095	0.0097	0.0094	0.0102	0.0090	0.0105
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0116	0.0106	0.0105	0.0106	0.0108	0.0108	0.0076	0.0092	0.0081	0.0091
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0111	0.0092	0.0098	0.0097	0.0084	0.0106	0.0086	0.0102	0.0108	0.0083
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0095	0.0106	0.0099	0.0079	0.0106	0.0092	0.0111	0.0094	0.0088	0.0121

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 9750$.

Tabla 40001-50000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0096	0.0102	0.0113	0.0094	0.0109	0.0088	0.0101	0.0098	0.0081	0.0094
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0115	0.0115	0.0091	0.0102	0.0118	0.0099	0.0102	0.0091	0.0116	0.0112
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0090	0.0090	0.0107	0.0108	0.0089	0.0108	0.0091	0.0104	0.0106	0.0108
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0083	0.0108	0.0099	0.0110	0.0094	0.0098	0.0101	0.0110	0.0095	0.0080
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0095	0.0101	0.0086	0.0081	0.0075	0.0083	0.0101	0.0110	0.0097	0.0126
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0109	0.0112	0.0096	0.0093	0.0080	0.0101	0.0096	0.0110	0.0088	0.0102
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0087	0.0115	0.0092	0.0084	0.0097	0.0111	0.0107	0.0112	0.0091	0.0105
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0104	0.0122	0.0109	0.0103	0.0112	0.0104	0.0102	0.0118	0.0108	0.0079
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0096	0.0110	0.0102	0.0090	0.0093	0.0101	0.0084	0.0102	0.0098	0.0113
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0094	0.0095	0.0099	0.0107	0.0093	0.0103	0.0114	0.0109	0.0107	0.0074

Tabla 40001-50000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0087	0.0109	0.0105	0.0111	0.0106	0.0104	0.0088	0.0094	0.0093	0.0095
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.0093	0.0084	0.0096	0.0106	0.0117	0.0105	0.0089	0.0073	0.0099	0.0109
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0109	0.0096	0.0103	0.0099	0.0089	0.0106	0.0085	0.0106	0.0116	0.0094
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.0112	0.0088	0.0107	0.0099	0.0104	0.0092	0.0117	0.0109	0.0104	0.0097
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.0119	0.0099	0.0097	0.0089	0.0099	0.0105	0.0109	0.0110	0.0083	0.0117
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0101	0.0105	0.0089	0.0097	0.0108	0.0076	0.0099	0.0094	0.0104	0.0087
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0096	0.0094	0.0096	0.0108	0.0104	0.0099	0.0118	0.0089	0.0107	0.0105
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.0086	0.0092	0.0098	0.0112	0.0101	0.0089	0.0103	0.0115	0.0093	0.0098
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.0099	0.0108	0.0098	0.0097	0.0094	0.0088	0.0101	0.0090	0.0103	0.0104
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.0096	0.0104	0.0101	0.0108	0.0118	0.0099	0.0102	0.0106	0.0087	0.0111

Claramente se observa en las frecuencias relativas de las tablas anteriores que

$\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{9750}(A)}{9750} \approx \frac{1}{100}$, pero en este caso con $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0041$. En el capítulo 1, esta diferencia era menor o igual que 0.0033 y en la sección anterior menor o igual que 0.0031, sin embargo sigue siendo una diferencia muy pequeña.

Para $n = 97500$ se obtiene lo siguiente:

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño $n = 97500$.
Tabla 1-100000-I

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.01063	0.01004	0.00983	0.01001	0.01024	0.00956	0.01006	0.01004	0.00983	0.01035
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00998	0.00911	0.01004	0.01033	0.00956	0.01014	0.00934	0.01022	0.01028	0.01086
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.00959	0.01075	0.00991	0.00964	0.01005	0.01015	0.00983	0.00972	0.01007	0.00974
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.00974	0.00991	0.00969	0.01083	0.01066	0.01028	0.00977	0.01004	0.00989	0.01006
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.01008	0.00986	0.01	0.01026	0.00979	0.01061	0.00969	0.01018	0.00956	0.01018
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.01032	0.01055	0.00986	0.01084	0.00959	0.01072	0.01003	0.00954	0.00997	0.01005
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.00968	0.01023	0.00931	0.01004	0.00966	0.01019	0.00995	0.00975	0.00973	0.00985
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.01065	0.00981	0.01047	0.00978	0.01004	0.00982	0.00943	0.01007	0.00988	0.00988
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00985	0.0101	0.01028	0.00993	0.0099	0.00965	0.00985	0.00986	0.01004	0.00967
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.01029	0.00964	0.00998	0.0097	0.01064	0.01046	0.01006	0.01018	0.00967	0.0096

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 97500.

Tabla 1-100000-II

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.01046	0.00983	0.00949	0.01005	0.01062	0.01007	0.01014	0.01014	0.00981	0.01003
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00988	0.0099	0.00978	0.01007	0.01	0.01002	0.00997	0.00994	0.00981	0.01023
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.00979	0.01041	0.00993	0.00992	0.01026	0.01007	0.00969	0.00988	0.00984	0.00984
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.00987	0.00988	0.01046	0.01007	0.00998	0.01061	0.00985	0.01017	0.01055	0.01009
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.01007	0.0101	0.00969	0.00989	0.00967	0.00981	0.01008	0.01049	0.01004	0.00986
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.00986	0.01047	0.00966	0.01023	0.01013	0.00963	0.01033	0.0099	0.01054	0.00998
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.01056	0.00945	0.01047	0.01042	0.00962	0.01031	0.01017	0.00983	0.00967	0.00916
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.00989	0.00981	0.0101	0.01031	0.01012	0.00982	0.01049	0.00978	0.00973	0.00959
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.01017	0.01036	0.0103	0.01039	0.00974	0.01029	0.00964	0.00952	0.01039	0.00989
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.00979	0.00954	0.01005	0.01032	0.00934	0.00995	0.00987	0.00968	0.01007	0.00959

Tabla 1-100000-III

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.01012	0.00998	0.01029	0.00969	0.00973	0.00978	0.00973	0.01045	0.01033	0.01017
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00985	0.01059	0.00946	0.01029	0.00999	0.01042	0.01029	0.00971	0.00988	0.0099
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.0099	0.00995	0.0096	0.01014	0.01008	0.00982	0.01053	0.00972	0.01024	0.00945
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.01021	0.00955	0.01008	0.01048	0.00985	0.00971	0.00981	0.01034	0.01013	0.00985
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.00968	0.01028	0.00959	0.00971	0.00998	0.01069	0.01003	0.01003	0.00967	0.00997
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.01005	0.00973	0.01013	0.00995	0.00958	0.00977	0.01062	0.01023	0.00998	0.01009
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.01001	0.00998	0.01026	0.00982	0.01008	0.01023	0.00975	0.01015	0.00975	0.01027
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.01012	0.00991	0.01054	0.0103	0.01028	0.00983	0.00956	0.00978	0.00946	0.01078
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00991	0.00986	0.00969	0.00971	0.01003	0.01028	0.01007	0.01028	0.01031	0.00919
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.01011	0.01022	0.00973	0.00996	0.00983	0.00977	0.01002	0.00987	0.00989	0.01058

Tablas de frecuencias relativas de las parejas de dígitos en colectivos de tamaño n = 97500.

Tabla 1-100000-IV

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0097	0.01008	0.01024	0.01014	0.01042	0.00991	0.01033	0.01042	0.00995	0.00948
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00996	0.01	0.00983	0.01035	0.01019	0.00967	0.01064	0.00988	0.01063	0.00951
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.01011	0.00975	0.01	0.00979	0.01001	0.00937	0.00982	0.01012	0.01043	0.00979
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.01014	0.01003	0.00977	0.01033	0.01039	0.00969	0.0097	0.00987	0.00996	0.01001
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.01025	0.01009	0.00976	0.01013	0.00981	0.00976	0.01024	0.01016	0.01003	0.01023
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.01001	0.01013	0.00988	0.01031	0.00936	0.01004	0.00985	0.01022	0.00979	0.00961
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.0101	0.01045	0.00955	0.00942	0.01023	0.0104	0.01039	0.01002	0.01025	0.01
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.01041	0.01038	0.01008	0.00954	0.01038	0.01014	0.01027	0.00972	0.00959	0.00996
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00999	0.00997	0.01018	0.00953	0.01023	0.01028	0.00978	0.01026	0.01047	0.01006
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.00972	0.00994	0.00985	0.01009	0.00942	0.01002	0.00999	0.01007	0.00969	0.00911

Tabla 1-100000-V

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.00966	0.00968	0.00995	0.01034	0.01017	0.01024	0.00984	0.0097	0.00965	0.01015
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.00985	0.00985	0.00936	0.00974	0.00996	0.01021	0.00992	0.01054	0.01	0.00955
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.01045	0.01027	0.00918	0.00993	0.01028	0.01031	0.01016	0.00992	0.00981	0.00931
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
0.01083	0.00983	0.01039	0.01045	0.01006	0.01008	0.01022	0.00937	0.01058	0.01016
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0.01052	0.01024	0.01007	0.01014	0.0103	0.00976	0.01042	0.01009	0.00994	0.00996
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0.0095	0.00994	0.00953	0.01029	0.0101	0.00986	0.01011	0.00982	0.01064	0.00979
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0.00955	0.00987	0.01083	0.01027	0.01019	0.00975	0.01055	0.01037	0.01	0.00963
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
0.00967	0.01016	0.01003	0.00996	0.00974	0.00991	0.00976	0.01024	0.00993	0.01019
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
0.00984	0.00963	0.00998	0.01059	0.01011	0.01006	0.00965	0.01009	0.01018	0.00979
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
0.00963	0.00978	0.0099	0.01006	0.01042	0.00976	0.00981	0.0095	0.00964	0.00998

Se obtiene que $\frac{n(A)}{n} = \frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_{97500}(A)}{97500} \approx \frac{1}{100}$, con $\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{100}\right| \leq 0.0009$, que es mayor que el 0.0007 obtenido en el capítulo 1 pero menor que el 0.00113 de la sección anterior, así que sigue siendo una muy buena aproximación.

Podemos concluir de esta sección que los dígitos, en estas 5 nuevas tablas, extraidos individualmente o por parejas, se apegan de igual forma, a lo que establece la Ley Natural de los Números Grandes,

$$\frac{\delta_1(A)+\ldots+\delta_n(A)}{n} \approx p_A, \; \forall \; n \; grande$$

Además, las frecuencias relativas se aproximan más a la frecuencia asintótica conforme n se hace más grande, es decir, $\left|\frac{n(A)}{n} - p_A\right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

4.2.2 Independencia estadística.

En esta sección veremos si en estas nuevas tablas, se conserva la independencia estadística mostrada en el capítulo 1 por los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith, o si de algúna manera la intervención de los decimales de e afecta esta propiedad.

Comencemos de nuevo con nuestros colectivos de 10000 dígitos y sus respectivos colectivos de parejas.

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000-I

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.113	0.086	0.097	0.100	0.082	0.098	0.096	0.089	0.098	0.113
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.087	0.087	0.103	0.114	0.097	0.100	0.081	0.094	0.100	0.111
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.085	0.114	0.090	0.105	0.099	0.096	0.084	0.104	0.108	0.085
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.089	0.090	0.093	0.086	0.104	0.104	0.103	0.106	0.105	0.094
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.104	0.100	0.097	0.093	0.087	0.115	0.091	0.103	0.099	0.091
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.095	0.100	0.104	0.098	0.091	0.100	0.114	0.087	0.089	0.101
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.108	0.121	0.106	0.098	0.110	0.104	0.083	0.074	0.080	0.090
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.091	0.097	0.105	0.115	0.084	0.099	0.111	0.097	0.083	0.098
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.098	0.106	0.100	0.092	0.094	0.091	0.106	0.118	0.087	0.079
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.109	0.087	0.086	0.103	0.095	0.104	0.097	0.101	0.086	0.106

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000-II

$n(0\mid0)$	$n(1\mid0)$	$n(2\mid0)$	$n(3\mid0)$	$n(4\mid0)$	$n(5\mid0)$	$n(6\mid0)$	$n(7\mid0)$	$n(8\mid0)$	$n(9\mid0)$
0.108	0.101	0.086	0.095	0.105	0.090	0.089	0.097	0.093	0.111
$n(0\mid1)$	$n(1\mid1)$	$n(2\mid1)$	$n(3\mid1)$	$n(4\mid1)$	$n(5\mid1)$	$n(6\mid1)$	$n(7\mid1)$	$n(8\mid1)$	$n(9\mid1)$
0.097	0.079	0.099	0.100	0.107	0.106	0.106	0.110	0.078	0.091
$n(0\mid2)$	$n(1\mid2)$	$n(2\mid2)$	$n(3\mid2)$	$n(4\mid2)$	$n(5\mid2)$	$n(6\mid2)$	$n(7\mid2)$	$n(8\mid2)$	$n(9\mid2)$
0.103	0.100	0.089	0.104	0.102	0.101	0.102	0.099	0.090	0.089
$n(0\mid3)$	$n(1\mid3)$	$n(2\mid3)$	$n(3\mid3)$	$n(4\mid3)$	$n(5\mid3)$	$n(6\mid3)$	$n(7\mid3)$	$n(8\mid3)$	$n(9\mid3)$
0.084	0.096	0.121	0.088	0.098	0.112	0.086	0.104	0.109	0.080
$n(0\mid4)$	$n(1\mid4)$	$n(2\mid4)$	$n(3\mid4)$	$n(4\mid4)$	$n(5\mid4)$	$n(6\mid4)$	$n(7\mid4)$	$n(8\mid4)$	$n(9\mid4)$
0.091	0.101	0.092	0.104	0.102	0.096	0.090	0.099	0.114	0.091
$n(0\mid5)$	$n(1\mid5)$	$n(2\mid5)$	$n(3\mid5)$	$n(4\mid5)$	$n(5\mid5)$	$n(6\mid5)$	$n(7\mid5)$	$n(8\mid5)$	$n(9\mid5)$
0.097	0.106	0.103	0.095	0.114	0.081	0.103	0.101	0.095	0.086
$n(0\mid6)$	$n(1\mid6)$	$n(2\mid6)$	$n(3\mid6)$	$n(4\mid6)$	$n(5\mid6)$	$n(6\mid6)$	$n(7\mid6)$	$n(8\mid6)$	$n(9\mid6)$
0.088	0.109	0.111	0.086	0.099	0.107	0.101	0.098	0.093	0.084
$n(0\mid7)$	$n(1\mid7)$	$n(2\mid7)$	$n(3\mid7)$	$n(4\mid7)$	$n(5\mid7)$	$n(6\mid7)$	$n(7\mid7)$	$n(8\mid7)$	$n(9\mid7)$
0.102	0.096	0.111	0.088	0.088	0.097	0.104	0.102	0.082	0.098
$n(0\mid8)$	$n(1\mid8)$	$n(2\mid8)$	$n(3\mid8)$	$n(4\mid8)$	$n(5\mid8)$	$n(6\mid8)$	$n(7\mid8)$	$n(8\mid8)$	$n(9\mid8)$
0.113	0.096	0.100	0.095	0.080	0.108	0.107	0.098	0.096	0.082
$n(0\mid9)$	$n(1\mid9)$	$n(2\mid9)$	$n(3\mid9)$	$n(4\mid9)$	$n(5\mid9)$	$n(6\mid9)$	$n(7\mid9)$	$n(8\mid9)$	$n(9\mid9)$
0.094	0.088	0.085	0.109	0.101	0.099	0.091	0.112	0.091	0.101

Tabla 1-10000-III

$n(0\mid0)$	$n(1\mid0)$	$n(2\mid0)$	$n(3\mid0)$	$n(4\mid0)$	$n(5\mid0)$	$n(6\mid0)$	$n(7\mid0)$	$n(8\mid0)$	$n(9\mid0)$
0.097	0.113	0.101	0.103	0.105	0.104	0.092	0.080	0.094	0.087
$n(0\mid1)$	$n(1\mid1)$	$n(2\mid1)$	$n(3\mid1)$	$n(4\mid1)$	$n(5\mid1)$	$n(6\mid1)$	$n(7\mid1)$	$n(8\mid1)$	$n(9\mid1)$
0.083	0.113	0.088	0.082	0.089	0.102	0.102	0.111	0.110	0.099
$n(0\mid2)$	$n(1\mid2)$	$n(2\mid2)$	$n(3\mid2)$	$n(4\mid2)$	$n(5\mid2)$	$n(6\mid2)$	$n(7\mid2)$	$n(8\mid2)$	$n(9\mid2)$
0.092	0.086	0.111	0.102	0.101	0.085	0.100	0.092	0.109	0.099
$n(0\mid3)$	$n(1\mid3)$	$n(2\mid3)$	$n(3\mid3)$	$n(4\mid3)$	$n(5\mid3)$	$n(6\mid3)$	$n(7\mid3)$	$n(8\mid3)$	$n(9\mid3)$
0.122	0.088	0.099	0.096	0.097	0.095	0.101	0.100	0.097	0.084
$n(0\mid4)$	$n(1\mid4)$	$n(2\mid4)$	$n(3\mid4)$	$n(4\mid4)$	$n(5\mid4)$	$n(6\mid4)$	$n(7\mid4)$	$n(8\mid4)$	$n(9\mid4)$
0.093	0.092	0.089	0.096	0.089	0.120	0.106	0.100	0.098	0.092
$n(0\mid5)$	$n(1\mid5)$	$n(2\mid5)$	$n(3\mid5)$	$n(4\mid5)$	$n(5\mid5)$	$n(6\mid5)$	$n(7\mid5)$	$n(8\mid5)$	$n(9\mid5)$
0.102	0.092	0.107	0.095	0.093	0.087	0.107	0.105	0.097	0.093
$n(0\mid6)$	$n(1\mid6)$	$n(2\mid6)$	$n(3\mid6)$	$n(4\mid6)$	$n(5\mid6)$	$n(6\mid6)$	$n(7\mid6)$	$n(8\mid6)$	$n(9\mid6)$
0.082	0.080	0.097	0.114	0.101	0.104	0.102	0.099	0.108	0.093
$n(0\mid7)$	$n(1\mid7)$	$n(2\mid7)$	$n(3\mid7)$	$n(4\mid7)$	$n(5\mid7)$	$n(6\mid7)$	$n(7\mid7)$	$n(8\mid7)$	$n(9\mid7)$
0.102	0.086	0.107	0.108	0.099	0.081	0.088	0.098	0.097	0.102
$n(0\mid8)$	$n(1\mid8)$	$n(2\mid8)$	$n(3\mid8)$	$n(4\mid8)$	$n(5\mid8)$	$n(6\mid8)$	$n(7\mid8)$	$n(8\mid8)$	$n(9\mid8)$
0.098	0.102	0.098	0.093	0.097	0.097	0.094	0.100	0.103	0.093
$n(0\mid9)$	$n(1\mid9)$	$n(2\mid9)$	$n(3\mid9)$	$n(4\mid9)$	$n(5\mid9)$	$n(6\mid9)$	$n(7\mid9)$	$n(8\mid9)$	$n(9\mid9)$
0.107	0.112	0.097	0.092	0.093	0.077	0.097	0.103	0.098	0.092

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 1-10000-IV

$n(0\mid 0)$	$n(1\mid 0)$	$n(2\mid 0)$	$n(3\mid 0)$	$n(4\mid 0)$	$n(5\mid 0)$	$n(6\mid 0)$	$n(7\mid 0)$	$n(8\mid 0)$	$n(9\mid 0)$
0.105	0.102	0.099	0.077	0.092	0.112	0.096	0.105	0.100	0.093
$n(0\mid 1)$	$n(1\mid 1)$	$n(2\mid 1)$	$n(3\mid 1)$	$n(4\mid 1)$	$n(5\mid 1)$	$n(6\mid 1)$	$n(7\mid 1)$	$n(8\mid 1)$	$n(9\mid 1)$
0.097	0.104	0.096	0.108	0.102	0.077	0.096	0.110	0.098	0.088
$n(0\mid 2)$	$n(1\mid 2)$	$n(2\mid 2)$	$n(3\mid 2)$	$n(4\mid 2)$	$n(5\mid 2)$	$n(6\mid 2)$	$n(7\mid 2)$	$n(8\mid 2)$	$n(9\mid 2)$
0.113	0.095	0.102	0.095	0.099	0.097	0.095	0.100	0.093	0.091
$n(0\mid 3)$	$n(1\mid 3)$	$n(2\mid 3)$	$n(3\mid 3)$	$n(4\mid 3)$	$n(5\mid 3)$	$n(6\mid 3)$	$n(7\mid 3)$	$n(8\mid 3)$	$n(9\mid 3)$
0.100	0.093	0.107	0.104	0.094	0.090	0.088	0.085	0.116	0.096
$n(0\mid 4)$	$n(1\mid 4)$	$n(2\mid 4)$	$n(3\mid 4)$	$n(4\mid 4)$	$n(5\mid 4)$	$n(6\mid 4)$	$n(7\mid 4)$	$n(8\mid 4)$	$n(9\mid 4)$
0.093	0.101	0.094	0.100	0.094	0.104	0.103	0.089	0.114	0.088
$n(0\mid 5)$	$n(1\mid 5)$	$n(2\mid 5)$	$n(3\mid 5)$	$n(4\mid 5)$	$n(5\mid 5)$	$n(6\mid 5)$	$n(7\mid 5)$	$n(8\mid 5)$	$n(9\mid 5)$
0.110	0.093	0.113	0.092	0.083	0.091	0.102	0.095	0.095	0.097
$n(0\mid 6)$	$n(1\mid 6)$	$n(2\mid 6)$	$n(3\mid 6)$	$n(4\mid 6)$	$n(5\mid 6)$	$n(6\mid 6)$	$n(7\mid 6)$	$n(8\mid 6)$	$n(9\mid 6)$
0.104	0.090	0.112	0.097	0.096	0.085	0.104	0.087	0.105	0.096
$n(0\mid 7)$	$n(1\mid 7)$	$n(2\mid 7)$	$n(3\mid 7)$	$n(4\mid 7)$	$n(5\mid 7)$	$n(6\mid 7)$	$n(7\mid 7)$	$n(8\mid 7)$	$n(9\mid 7)$
0.108	0.105	0.091	0.087	0.101	0.096	0.101	0.100	0.090	0.088
$n(0\mid 8)$	$n(1\mid 8)$	$n(2\mid 8)$	$n(3\mid 8)$	$n(4\mid 8)$	$n(5\mid 8)$	$n(6\mid 8)$	$n(7\mid 8)$	$n(8\mid 8)$	$n(9\mid 8)$
0.101	0.091	0.104	0.103	0.092	0.109	0.082	0.102	0.099	0.094
$n(0\mid 9)$	$n(1\mid 9)$	$n(2\mid 9)$	$n(3\mid 9)$	$n(4\mid 9)$	$n(5\mid 9)$	$n(6\mid 9)$	$n(7\mid 9)$	$n(8\mid 9)$	$n(9\mid 9)$
0.114	0.107	0.101	0.092	0.087	0.092	0.095	0.100	0.100	0.084

Tabla 1-10000-V

$n(0\mid 0)$	$n(1\mid 0)$	$n(2\mid 0)$	$n(3\mid 0)$	$n(4\mid 0)$	$n(5\mid 0)$	$n(6\mid 0)$	$n(7\mid 0)$	$n(8\mid 0)$	$n(9\mid 0)$
0.091	0.102	0.098	0.096	0.095	0.101	0.100	0.104	0.083	0.105
$n(0\mid 1)$	$n(1\mid 1)$	$n(2\mid 1)$	$n(3\mid 1)$	$n(4\mid 1)$	$n(5\mid 1)$	$n(6\mid 1)$	$n(7\mid 1)$	$n(8\mid 1)$	$n(9\mid 1)$
0.107	0.111	0.077	0.091	0.090	0.094	0.099	0.102	0.100	0.104
$n(0\mid 2)$	$n(1\mid 2)$	$n(2\mid 2)$	$n(3\mid 2)$	$n(4\mid 2)$	$n(5\mid 2)$	$n(6\mid 2)$	$n(7\mid 2)$	$n(8\mid 2)$	$n(9\mid 2)$
0.111	0.099	0.078	0.098	0.107	0.101	0.089	0.097	0.102	0.098
$n(0\mid 3)$	$n(1\mid 3)$	$n(2\mid 3)$	$n(3\mid 3)$	$n(4\mid 3)$	$n(5\mid 3)$	$n(6\mid 3)$	$n(7\mid 3)$	$n(8\mid 3)$	$n(9\mid 3)$
0.104	0.099	0.098	0.104	0.091	0.105	0.089	0.082	0.103	0.093
$n(0\mid 4)$	$n(1\mid 4)$	$n(2\mid 4)$	$n(3\mid 4)$	$n(4\mid 4)$	$n(5\mid 4)$	$n(6\mid 4)$	$n(7\mid 4)$	$n(8\mid 4)$	$n(9\mid 4)$
0.100	0.110	0.116	0.106	0.105	0.083	0.103	0.079	0.076	0.102
$n(0\mid 5)$	$n(1\mid 5)$	$n(2\mid 5)$	$n(3\mid 5)$	$n(4\mid 5)$	$n(5\mid 5)$	$n(6\mid 5)$	$n(7\mid 5)$	$n(8\mid 5)$	$n(9\mid 5)$
0.100	0.094	0.110	0.091	0.095	0.096	0.090	0.082	0.110	0.102
$n(0\mid 6)$	$n(1\mid 6)$	$n(2\mid 6)$	$n(3\mid 6)$	$n(4\mid 6)$	$n(5\mid 6)$	$n(6\mid 6)$	$n(7\mid 6)$	$n(8\mid 6)$	$n(9\mid 6)$
0.080	0.093	0.104	0.107	0.094	0.083	0.109	0.102	0.110	0.093
$n(0\mid 7)$	$n(1\mid 7)$	$n(2\mid 7)$	$n(3\mid 7)$	$n(4\mid 7)$	$n(5\mid 7)$	$n(6\mid 7)$	$n(7\mid 7)$	$n(8\mid 7)$	$n(9\mid 7)$
0.103	0.098	0.098	0.094	0.095	0.098	0.085	0.108	0.092	0.108
$n(0\mid 8)$	$n(1\mid 8)$	$n(2\mid 8)$	$n(3\mid 8)$	$n(4\mid 8)$	$n(5\mid 8)$	$n(6\mid 8)$	$n(7\mid 8)$	$n(8\mid 8)$	$n(9\mid 8)$
0.092	0.098	0.095	0.086	0.111	0.090	0.095	0.109	0.091	0.110
$n(0\mid 9)$	$n(1\mid 9)$	$n(2\mid 9)$	$n(3\mid 9)$	$n(4\mid 9)$	$n(5\mid 9)$	$n(6\mid 9)$	$n(7\mid 9)$	$n(8\mid 9)$	$n(9\mid 9)$
0.107	0.115	0.110	0.110	0.089	0.086	0.097	0.088	0.078	0.090

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 40001-50000-I

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.098	0.075	0.096	0.088	0.123	0.106	0.103	0.095	0.100	0.097
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.095	0.097	0.083	0.103	0.095	0.099	0.091	0.107	0.101	0.110
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.086	0.107	0.096	0.096	0.106	0.088	0.099	0.090	0.109	0.093
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.094	0.088	0.090	0.091	0.105	0.104	0.089	0.110	0.090	0.109
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.097	0.089	0.081	0.102	0.112	0.105	0.099	0.096	0.096	0.091
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.108	0.103	0.091	0.111	0.089	0.107	0.075	0.092	0.098	0.102
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.095	0.103	0.087	0.087	0.104	0.104	0.109	0.095	0.097	0.094
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.135	0.084	0.082	0.095	0.105	0.098	0.084	0.108	0.099	0.084
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.116	0.084	0.099	0.093	0.101	0.108	0.093	0.083	0.088	0.110
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.105	0.098	0.104	0.079	0.109	0.098	0.089	0.115	0.098	0.080

Tabla 40001-50000-II

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.091	0.091	0.079	0.106	0.089	0.108	0.106	0.115	0.099	0.093
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.081	0.101	0.096	0.102	0.092	0.109	0.091	0.104	0.089	0.111
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.100	0.104	0.108	0.094	0.112	0.105	0.080	0.071	0.099	0.095
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.099	0.093	0.112	0.101	0.105	0.096	0.088	0.091	0.097	0.099
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.099	0.099	0.095	0.095	0.074	0.100	0.097	0.110	0.088	0.113
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.094	0.112	0.086	0.111	0.088	0.098	0.095	0.098	0.104	0.090
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.096	0.095	0.111	0.098	0.100	0.097	0.108	0.080	0.103	0.086
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.090	0.097	0.097	0.096	0.095	0.114	0.101	0.097	0.095	0.097
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.090	0.116	0.100	0.100	0.092	0.091	0.088	0.113	0.093	0.095
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.086	0.113	0.096	0.090	0.106	0.103	0.096	0.103	0.089	0.090

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.

Tabla 40001-50000-III

$n(0\mid 0)$	$n(1\mid 0)$	$n(2\mid 0)$	$n(3\mid 0)$	$n(4\mid 0)$	$n(5\mid 0)$	$n(6\mid 0)$	$n(7\mid 0)$	$n(8\mid 0)$	$n(9\mid 0)$
0.102	0.098	0.114	0.092	0.106	0.086	0.083	0.093	0.094	0.104
$n(0\mid 1)$	$n(1\mid 1)$	$n(2\mid 1)$	$n(3\mid 1)$	$n(4\mid 1)$	$n(5\mid 1)$	$n(6\mid 1)$	$n(7\mid 1)$	$n(8\mid 1)$	$n(9\mid 1)$
0.113	0.097	0.096	0.105	0.098	0.107	0.101	0.082	0.097	0.087
$n(0\mid 2)$	$n(1\mid 2)$	$n(2\mid 2)$	$n(3\mid 2)$	$n(4\mid 2)$	$n(5\mid 2)$	$n(6\mid 2)$	$n(7\mid 2)$	$n(8\mid 2)$	$n(9\mid 2)$
0.104	0.095	0.100	0.091	0.113	0.089	0.104	0.088	0.094	0.091
$n(0\mid 3)$	$n(1\mid 3)$	$n(2\mid 3)$	$n(3\mid 3)$	$n(4\mid 3)$	$n(5\mid 3)$	$n(6\mid 3)$	$n(7\mid 3)$	$n(8\mid 3)$	$n(9\mid 3)$
0.115	0.090	0.097	0.087	0.090	0.089	0.099	0.116	0.099	0.095
$n(0\mid 4)$	$n(1\mid 4)$	$n(2\mid 4)$	$n(3\mid 4)$	$n(4\mid 4)$	$n(5\mid 4)$	$n(6\mid 4)$	$n(7\mid 4)$	$n(8\mid 4)$	$n(9\mid 4)$
0.095	0.093	0.104	0.099	0.086	0.107	0.107	0.096	0.104	0.092
$n(0\mid 5)$	$n(1\mid 5)$	$n(2\mid 5)$	$n(3\mid 5)$	$n(4\mid 5)$	$n(5\mid 5)$	$n(6\mid 5)$	$n(7\mid 5)$	$n(8\mid 5)$	$n(9\mid 5)$
0.106	0.080	0.097	0.095	0.108	0.080	0.102	0.109	0.101	0.097
$n(0\mid 6)$	$n(1\mid 6)$	$n(2\mid 6)$	$n(3\mid 6)$	$n(4\mid 6)$	$n(5\mid 6)$	$n(6\mid 6)$	$n(7\mid 6)$	$n(8\mid 6)$	$n(9\mid 6)$
0.107	0.099	0.110	0.083	0.095	0.097	0.094	0.101	0.090	0.104
$n(0\mid 7)$	$n(1\mid 7)$	$n(2\mid 7)$	$n(3\mid 7)$	$n(4\mid 7)$	$n(5\mid 7)$	$n(6\mid 7)$	$n(7\mid 7)$	$n(8\mid 7)$	$n(9\mid 7)$
0.114	0.104	0.103	0.104	0.106	0.106	0.075	0.091	0.080	0.090
$n(0\mid 8)$	$n(1\mid 8)$	$n(2\mid 8)$	$n(3\mid 8)$	$n(4\mid 8)$	$n(5\mid 8)$	$n(6\mid 8)$	$n(7\mid 8)$	$n(8\mid 8)$	$n(9\mid 8)$
0.111	0.092	0.098	0.097	0.084	0.105	0.086	0.101	0.107	0.083
$n(0\mid 9)$	$n(1\mid 9)$	$n(2\mid 9)$	$n(3\mid 9)$	$n(4\mid 9)$	$n(5\mid 9)$	$n(6\mid 9)$	$n(7\mid 9)$	$n(8\mid 9)$	$n(9\mid 9)$
0.094	0.104	0.098	0.077	0.104	0.091	0.109	0.093	0.087	0.119

Tabla 40001-50000-IV

$n(0\mid 0)$	$n(1\mid 0)$	$n(2\mid 0)$	$n(3\mid 0)$	$n(4\mid 0)$	$n(5\mid 0)$	$n(6\mid 0)$	$n(7\mid 0)$	$n(8\mid 0)$	$n(9\mid 0)$
0.097	0.102	0.113	0.095	0.109	0.088	0.101	0.099	0.081	0.095
$n(0\mid 1)$	$n(1\mid 1)$	$n(2\mid 1)$	$n(3\mid 1)$	$n(4\mid 1)$	$n(5\mid 1)$	$n(6\mid 1)$	$n(7\mid 1)$	$n(8\mid 1)$	$n(9\mid 1)$
0.105	0.105	0.083	0.093	0.108	0.091	0.093	0.083	0.106	0.102
$n(0\mid 2)$	$n(1\mid 2)$	$n(2\mid 2)$	$n(3\mid 2)$	$n(4\mid 2)$	$n(5\mid 2)$	$n(6\mid 2)$	$n(7\mid 2)$	$n(8\mid 2)$	$n(9\mid 2)$
0.088	0.088	0.104	0.105	0.087	0.105	0.089	0.101	0.103	0.105
$n(0\mid 3)$	$n(1\mid 3)$	$n(2\mid 3)$	$n(3\mid 3)$	$n(4\mid 3)$	$n(5\mid 3)$	$n(6\mid 3)$	$n(7\mid 3)$	$n(8\mid 3)$	$n(9\mid 3)$
0.083	0.108	0.100	0.110	0.095	0.099	0.101	0.110	0.096	0.080
$n(0\mid 4)$	$n(1\mid 4)$	$n(2\mid 4)$	$n(3\mid 4)$	$n(4\mid 4)$	$n(5\mid 4)$	$n(6\mid 4)$	$n(7\mid 4)$	$n(8\mid 4)$	$n(9\mid 4)$
0.097	0.102	0.088	0.082	0.076	0.084	0.102	0.111	0.099	0.128
$n(0\mid 5)$	$n(1\mid 5)$	$n(2\mid 5)$	$n(3\mid 5)$	$n(4\mid 5)$	$n(5\mid 5)$	$n(6\mid 5)$	$n(7\mid 5)$	$n(8\mid 5)$	$n(9\mid 5)$
0.107	0.110	0.095	0.092	0.079	0.099	0.095	0.108	0.087	0.100
$n(0\mid 6)$	$n(1\mid 6)$	$n(2\mid 6)$	$n(3\mid 6)$	$n(4\mid 6)$	$n(5\mid 6)$	$n(6\mid 6)$	$n(7\mid 6)$	$n(8\mid 6)$	$n(9\mid 6)$
0.085	0.112	0.090	0.082	0.095	0.108	0.104	0.109	0.089	0.102
$n(0\mid 7)$	$n(1\mid 7)$	$n(2\mid 7)$	$n(3\mid 7)$	$n(4\mid 7)$	$n(5\mid 7)$	$n(6\mid 7)$	$n(7\mid 7)$	$n(8\mid 7)$	$n(9\mid 7)$
0.095	0.112	0.100	0.094	0.103	0.095	0.093	0.108	0.099	0.073
$n(0\mid 8)$	$n(1\mid 8)$	$n(2\mid 8)$	$n(3\mid 8)$	$n(4\mid 8)$	$n(5\mid 8)$	$n(6\mid 8)$	$n(7\mid 8)$	$n(8\mid 8)$	$n(9\mid 8)$
0.095	0.108	0.100	0.089	0.092	0.099	0.083	0.100	0.097	0.111
$n(0\mid 9)$	$n(1\mid 9)$	$n(2\mid 9)$	$n(3\mid 9)$	$n(4\mid 9)$	$n(5\mid 9)$	$n(6\mid 9)$	$n(7\mid 9)$	$n(8\mid 9)$	$n(9\mid 9)$
0.093	0.094	0.098	0.105	0.092	0.101	0.112	0.107	0.105	0.073

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =10000.
Tabla 40001-50000-V

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.085	0.106	0.102	0.108	0.103	0.101	0.086	0.092	0.091	0.093
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.093	0.084	0.096	0.106	0.117	0.105	0.089	0.073	0.099	0.109
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.107	0.095	0.101	0.098	0.088	0.104	0.084	0.104	0.114	0.093
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.106	0.084	0.101	0.094	0.098	0.088	0.111	0.103	0.098	0.093
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.112	0.094	0.092	0.084	0.094	0.099	0.103	0.103	0.078	0.110
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.103	0.107	0.091	0.099	0.110	0.077	0.102	0.096	0.106	0.089
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.092	0.090	0.092	0.103	0.099	0.095	0.113	0.085	0.102	0.100
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.085	0.091	0.098	0.111	0.100	0.088	0.102	0.114	0.092	0.098
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.098	0.106	0.097	0.096	0.093	0.087	0.099	0.089	0.101	0.102
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.092	0.099	0.096	0.103	0.112	0.095	0.097	0.101	0.083	0.105

Con $n = 10000$, se mantiene que $n(d_2 \mid d_1) \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$

Por último veamos lo que sucede para $n = 100000$, con los colectivos de 100000 dígitos de las 5 tablas generadas utilizando cifras decimales de e y las 97500 parejas formadas con cada uno de estos colectivos.

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000-I

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.1030	0.0973	0.0952	0.0970	0.0992	0.0926	0.0975	0.0973	0.0952	0.1003
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.0976	0.0891	0.0982	0.1010	0.0935	0.0992	0.0914	0.0999	0.1005	0.1062
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.0940	0.1053	0.0971	0.0945	0.0985	0.0995	0.0963	0.0953	0.0987	0.0955
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.0941	0.0957	0.0936	0.1046	0.1029	0.0992	0.0944	0.0969	0.0955	0.0971
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.0982	0.0960	0.0974	0.0999	0.0954	0.1033	0.0944	0.0992	0.0931	0.0992
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.0990	0.1013	0.0946	0.1041	0.0920	0.1029	0.0963	0.0916	0.0957	0.0965
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.0960	0.1014	0.0923	0.0995	0.0958	0.1011	0.0986	0.0967	0.0965	0.0976
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.1042	0.0959	0.1025	0.0957	0.0982	0.0960	0.0922	0.0985	0.0966	0.0966
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.0968	0.0993	0.1010	0.0976	0.0973	0.0949	0.0968	0.0969	0.0987	0.0951
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.0999	0.0936	0.0969	0.0942	0.1033	0.1016	0.0977	0.0989	0.0939	0.0932

Tabla 1-100000-II

$n(0 \mid 0)$	$n(1 \mid 0)$	$n(2 \mid 0)$	$n(3 \mid 0)$	$n(4 \mid 0)$	$n(5 \mid 0)$	$n(6 \mid 0)$	$n(7 \mid 0)$	$n(8 \mid 0)$	$n(9 \mid 0)$
0.1015	0.0954	0.0921	0.0975	0.1030	0.0977	0.0984	0.0984	0.0952	0.0973
$n(0 \mid 1)$	$n(1 \mid 1)$	$n(2 \mid 1)$	$n(3 \mid 1)$	$n(4 \mid 1)$	$n(5 \mid 1)$	$n(6 \mid 1)$	$n(7 \mid 1)$	$n(8 \mid 1)$	$n(9 \mid 1)$
0.0966	0.0968	0.0957	0.0986	0.0979	0.0981	0.0976	0.0973	0.0959	0.1001
$n(0 \mid 2)$	$n(1 \mid 2)$	$n(2 \mid 2)$	$n(3 \mid 2)$	$n(4 \mid 2)$	$n(5 \mid 2)$	$n(6 \mid 2)$	$n(7 \mid 2)$	$n(8 \mid 2)$	$n(9 \mid 2)$
0.0957	0.1017	0.0970	0.0969	0.1002	0.0984	0.0947	0.0965	0.0961	0.0961
$n(0 \mid 3)$	$n(1 \mid 3)$	$n(2 \mid 3)$	$n(3 \mid 3)$	$n(4 \mid 3)$	$n(5 \mid 3)$	$n(6 \mid 3)$	$n(7 \mid 3)$	$n(8 \mid 3)$	$n(9 \mid 3)$
0.0949	0.0950	0.1006	0.0969	0.0960	0.1020	0.0947	0.0978	0.1015	0.0971
$n(0 \mid 4)$	$n(1 \mid 4)$	$n(2 \mid 4)$	$n(3 \mid 4)$	$n(4 \mid 4)$	$n(5 \mid 4)$	$n(6 \mid 4)$	$n(7 \mid 4)$	$n(8 \mid 4)$	$n(9 \mid 4)$
0.0985	0.0988	0.0948	0.0967	0.0946	0.0959	0.0986	0.1026	0.0982	0.0964
$n(0 \mid 5)$	$n(1 \mid 5)$	$n(2 \mid 5)$	$n(3 \mid 5)$	$n(4 \mid 5)$	$n(5 \mid 5)$	$n(6 \mid 5)$	$n(7 \mid 5)$	$n(8 \mid 5)$	$n(9 \mid 5)$
0.0956	0.1015	0.0937	0.0992	0.0983	0.0934	0.1001	0.0960	0.1022	0.0968
$n(0 \mid 6)$	$n(1 \mid 6)$	$n(2 \mid 6)$	$n(3 \mid 6)$	$n(4 \mid 6)$	$n(5 \mid 6)$	$n(6 \mid 6)$	$n(7 \mid 6)$	$n(8 \mid 6)$	$n(9 \mid 6)$
0.1030	0.0921	0.1021	0.1016	0.0938	0.1005	0.0992	0.0958	0.0943	0.0893
$n(0 \mid 7)$	$n(1 \mid 7)$	$n(2 \mid 7)$	$n(3 \mid 7)$	$n(4 \mid 7)$	$n(5 \mid 7)$	$n(6 \mid 7)$	$n(7 \mid 7)$	$n(8 \mid 7)$	$n(9 \mid 7)$
0.0967	0.0959	0.0988	0.1008	0.0990	0.0960	0.1026	0.0957	0.0952	0.0938
$n(0 \mid 8)$	$n(1 \mid 8)$	$n(2 \mid 8)$	$n(3 \mid 8)$	$n(4 \mid 8)$	$n(5 \mid 8)$	$n(6 \mid 8)$	$n(7 \mid 8)$	$n(8 \mid 8)$	$n(9 \mid 8)$
0.0986	0.1004	0.0998	0.1007	0.0945	0.0997	0.0935	0.0923	0.1007	0.0959
$n(0 \mid 9)$	$n(1 \mid 9)$	$n(2 \mid 9)$	$n(3 \mid 9)$	$n(4 \mid 9)$	$n(5 \mid 9)$	$n(6 \mid 9)$	$n(7 \mid 9)$	$n(8 \mid 9)$	$n(9 \mid 9)$
0.0972	0.0946	0.0997	0.1024	0.0927	0.0987	0.0979	0.0960	0.0999	0.0951

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000-III

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.0985	0.0971	0.1001	0.0943	0.0947	0.0952	0.0947	0.1017	0.1005	0.0990
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.0959	0.1032	0.0921	0.1002	0.0973	0.1015	0.1002	0.0946	0.0962	0.0964
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.0972	0.0977	0.0942	0.0996	0.0990	0.0963	0.1034	0.0954	0.1005	0.0927
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.0995	0.0931	0.0983	0.1022	0.0960	0.0947	0.0956	0.1008	0.0988	0.0960
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.0949	0.1007	0.0940	0.0952	0.0978	0.1047	0.0983	0.0983	0.0948	0.0977
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.0978	0.0947	0.0986	0.0968	0.0932	0.0951	0.1033	0.0995	0.0971	0.0982
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.0973	0.0970	0.0997	0.0954	0.0980	0.0994	0.0948	0.0987	0.0948	0.0998
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.0982	0.0961	0.1023	0.0999	0.0997	0.0953	0.0927	0.0949	0.0917	0.1045
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.0970	0.0965	0.0949	0.0951	0.0982	0.1006	0.0986	0.1006	0.1009	0.0899
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.0984	0.0994	0.0947	0.0969	0.0956	0.0951	0.0975	0.0960	0.0962	0.1030

Tabla 1-100000-IV

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.0942	0.0979	0.0994	0.0985	0.1012	0.0962	0.1003	0.1012	0.0966	0.0920
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.0964	0.0968	0.0951	0.1001	0.0987	0.0936	0.1029	0.0956	0.1028	0.0920
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.0994	0.0958	0.0983	0.0962	0.0984	0.0921	0.0964	0.0995	0.1025	0.0962
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.0991	0.0980	0.0955	0.1009	0.1015	0.0947	0.0948	0.0964	0.0973	0.0978
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.0995	0.0980	0.0948	0.0984	0.0952	0.0948	0.0994	0.0987	0.0974	0.0993
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.0983	0.0995	0.0970	0.1012	0.0920	0.0986	0.0967	0.1003	0.0962	0.0944
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.0976	0.1010	0.0923	0.0910	0.0988	0.1005	0.1004	0.0968	0.0990	0.0966
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.1009	0.1006	0.0977	0.0924	0.1006	0.0983	0.0995	0.0942	0.0929	0.0965
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.0967	0.0965	0.0986	0.0922	0.0990	0.0995	0.0947	0.0993	0.1014	0.0974
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.0969	0.0990	0.0981	0.1005	0.0938	0.0998	0.0995	0.1003	0.0966	0.0907

Tablas de frecuencias de un dígito condicionado a otro en colectivos de tamaño n =100000.

Tabla 1-100000-V

n(0|0)	n(1|0)	n(2|0)	n(3|0)	n(4|0)	n(5|0)	n(6|0)	n(7|0)	n(8|0)	n(9|0)
0.0948	0.0950	0.0976	0.1015	0.0999	0.1005	0.0965	0.0952	0.0947	0.0997
n(0|1)	n(1|1)	n(2|1)	n(3|1)	n(4|1)	n(5|1)	n(6|1)	n(7|1)	n(8|1)	n(9|1)
0.0968	0.0968	0.0921	0.0958	0.0979	0.1003	0.0975	0.1037	0.0983	0.0939
n(0|2)	n(1|2)	n(2|2)	n(3|2)	n(4|2)	n(5|2)	n(6|2)	n(7|2)	n(8|2)	n(9|2)
0.1025	0.1007	0.0900	0.0974	0.1008	0.1011	0.0997	0.0973	0.0962	0.0914
n(0|3)	n(1|3)	n(2|3)	n(3|3)	n(4|3)	n(5|3)	n(6|3)	n(7|3)	n(8|3)	n(9|3)
0.1037	0.0940	0.0994	0.1000	0.0963	0.0965	0.0978	0.0897	0.1013	0.0973
n(0|4)	n(1|4)	n(2|4)	n(3|4)	n(4|4)	n(5|4)	n(6|4)	n(7|4)	n(8|4)	n(9|4)
0.1013	0.0985	0.0970	0.0977	0.0991	0.0940	0.1003	0.0972	0.0957	0.0959
n(0|5)	n(1|5)	n(2|5)	n(3|5)	n(4|5)	n(5|5)	n(6|5)	n(7|5)	n(8|5)	n(9|5)
0.0929	0.0972	0.0932	0.1006	0.0988	0.0964	0.0989	0.0960	0.1040	0.0958
n(0|6)	n(1|6)	n(2|6)	n(3|6)	n(4|6)	n(5|6)	n(6|6)	n(7|6)	n(8|6)	n(9|6)
0.0924	0.0955	0.1048	0.0994	0.0987	0.0944	0.1022	0.1004	0.0968	0.0932
n(0|7)	n(1|7)	n(2|7)	n(3|7)	n(4|7)	n(5|7)	n(6|7)	n(7|7)	n(8|7)	n(9|7)
0.0946	0.0994	0.0981	0.0974	0.0953	0.0969	0.0955	0.1001	0.0971	0.0997
n(0|8)	n(1|8)	n(2|8)	n(3|8)	n(4|8)	n(5|8)	n(6|8)	n(7|8)	n(8|8)	n(9|8)
0.0957	0.0937	0.0971	0.1031	0.0984	0.0979	0.0939	0.0982	0.0991	0.0953
n(0|9)	n(1|9)	n(2|9)	n(3|9)	n(4|9)	n(5|9)	n(6|9)	n(7|9)	n(8|9)	n(9|9)
0.0952	0.0967	0.0979	0.0995	0.1030	0.0965	0.0969	0.0939	0.0953	0.0987

Cuando $n = 100000$, $n(d_2 \mid d_1) \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$

Por lo tanto, con estos resultados observamos que para $n = 10000$ y 100000 las frecuencias de un dígito condicionado a otro, $n(d_2 \mid d_1)$, tienen un valor cercano a $\frac{1}{10}$, que es la frecuencia asintótica de un dígito. Por lo tanto, la aparición de un dígito determinado, no afecta el siguiente resultado.

Entonces concluimos que los dígitos de las 5 tablas generadas con las cifras decimales de e, también son independientes estadísticamente, es decir, $n(d_2 \mid d_1) = \frac{n(d1d2)}{n(d1)} \approx \frac{1}{10} = p_A \approx \frac{n(d_2)}{n}$.

4.2.3 Teoría débil de los espacios de colectivos de Bernoulli (espacios de medida normal producto de n copias de un espacio de medida de Bernoulli).

En esta sección, nuevamente analizaremos las frecuencias acumuladas de los cinco casos que se observaron en el primer capítulo, esta vez para determinar si las tablas de dígitos generadas a partir de las cifras decimales de e, satisfacen la Desigualdad de Chebishev y la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Desiguldad de Chebishev.

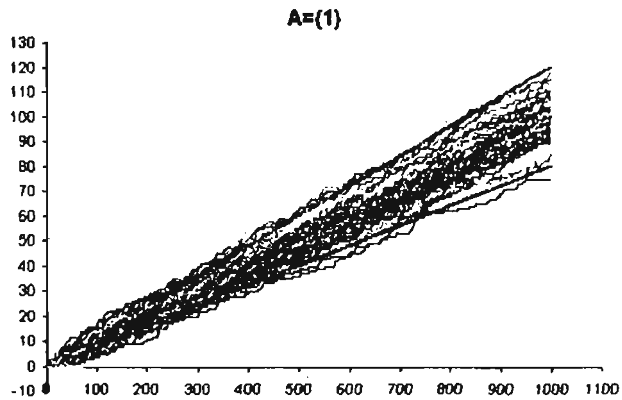
Observemos cómo se comportan las sucesiones $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ de los colectivos extraidos de estas nuevas tablas. Utilizaremos los mismos colectivos que en la sección anterior, es decir, los mismos 100 colectivos de 1000 dígitos, los mismos 10 de 10000 y los mismos 5 colectivos de 100000 dígitos.

Para $n = 1000$, $p = \frac{1}{10}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
80	120

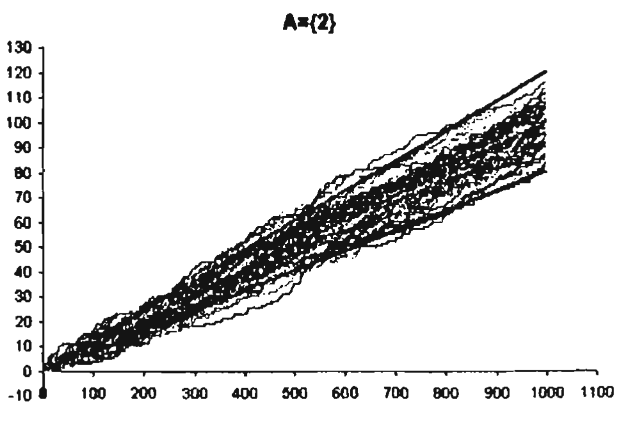
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	101	103	94	107	99	97	120	89	101	105
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	102	97	90	94	106	106	99	102	121	99
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	92	108	108	96	92	97	83	99	105	108
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	97	95	105	88	104	102	93	106	92	110
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	96	92	83	102	97	99	96	100	103	102
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	115	99	105	78	103	85	95	99	98	99
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	98	113	92	95	100	118	93	91	96	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	106	89	105	100	75	99	115	116	91	109
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	83	94	84	111	93	91	114	118	113	91
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	111	96	107	98	101	100	96	88	97	101



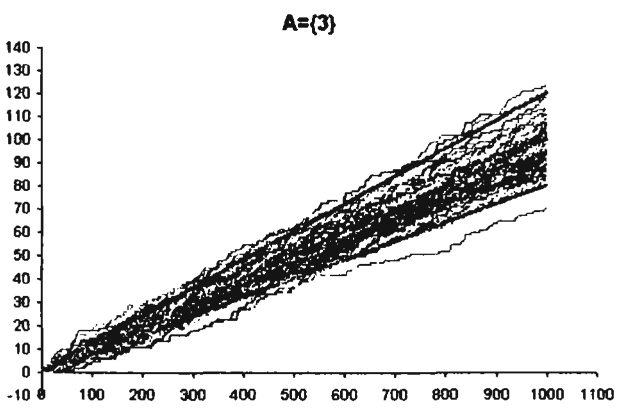
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	108	101	101	92	98	103	108	100	97	103
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	100	98	118	87	92	106	106	113	88	83
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	91	103	103	100	105	107	105	112	110	83
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	108	93	96	81	98	110	106	95	86	86
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	123	111	93	116	95	110	104	92	93	106
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	92	89	86	111	87	108	101	100	100	96
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	89	107	95	104	98	97	96	112	98	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	99	80	91	100	95	102	84	101	95	97
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	104	99	112	89	104	95	100	106	98	106
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	99	92	91	108	112	93	89	94	90	102



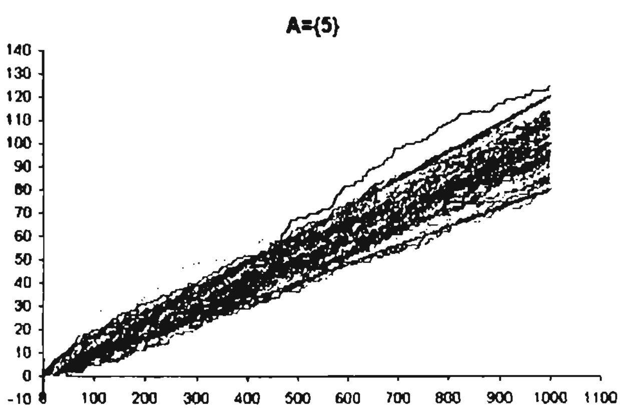
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	121	95	101	96	111	106	92	107	100	98
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	102	82	102	110	89	104	91	94	103	108
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	85	111	94	103	96	103	84	114	90	108
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	86	93	108	118	99	89	90	106	92	96
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	84	102	90	71	91	114	85	104	111	110
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	91	93	93	93	94	102	92	107	104	103
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	85	82	117	117	101	82	85	113	99	103
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	123	105	124	100	94	113	94	94	105	118
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	87	97	99	98	103	109	100	114	97	101
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	91	92	94	103	94	96	101	110	95	108



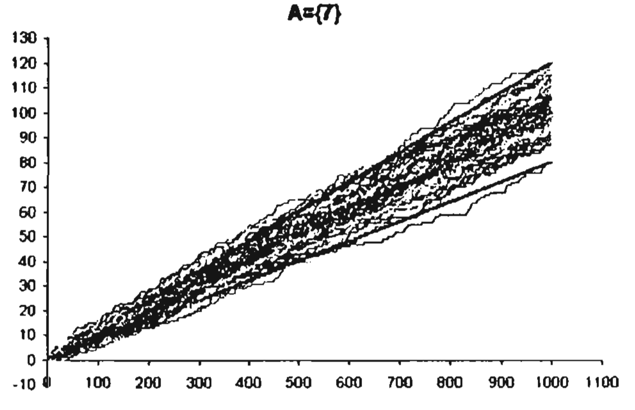
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	99	97	109	120	115	109	106	87	99	104
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	106	94	93	101	98	109	109	85	88	101
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	96	86	107	87	107	113	109	111	86	97
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	90	116	101	101	89	95	104	102	112	105
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	93	111	102	99	86	86	104	120	94	91
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	114	115	89	107	95	104	103	101	99	111
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	81	89	100	104	108	89	106	112	98	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	100	112	100	102	96	93	97	107	97	104
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	107	110	115	110	102	94	101	80	100	109
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	83	125	96	109	100	105	100	81	111	107



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	99	108	105	111	96	85	96	92	105	102
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	89	98	103	105	94	91	108	108	104	105
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	105	95	90	113	103	111	98	103	87	103
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	106	96	93	95	113	109	93	104	114	93
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	120	91	91	90	107	101	99	90	99	101
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	88	106	88	98	101	89	117	103	99	110
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	115	109	98	89	100	93	103	103	100	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	102	102	108	113	102	90	107	88	100	115
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	107	99	99	98	96	116	114	89	108	80
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	118	106	102	97	91	97	109	119	101	95



Podemos observar que en los cinco casos existen sucesiones que quedan fuera de la zona delimitada por las rectas $y = x(p - \varepsilon)$ y $y = x(p + \varepsilon)$.

Para los casos $d = 1$, $d = 3$ y $d = 5$, 96 de las 100 sucesiones observadas quedan dentro de la zona de las rectas de Chebishev, i.e., en un 96% de nuestras sucesiones $\delta_1, \dots, \delta_n$, $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxima a p con un margen de error menor que 0.02.

Mientras que para $d = 2$ y $d = 7$, 2 sucesiones quedan fuera de la zona delimitada por las rectas de Chebishev, entonces el 98% de las sucesiones cumple que $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ se aproxime a p con un margen de error menor que 0.02.

Teóricamente la desigualdad de Chebishev nos dice que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=0.775.$$

Es decir, en más del 77.5% de las sucesiones, $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$, debería aproximarse a p con un margen de error menor que el antes señalado.

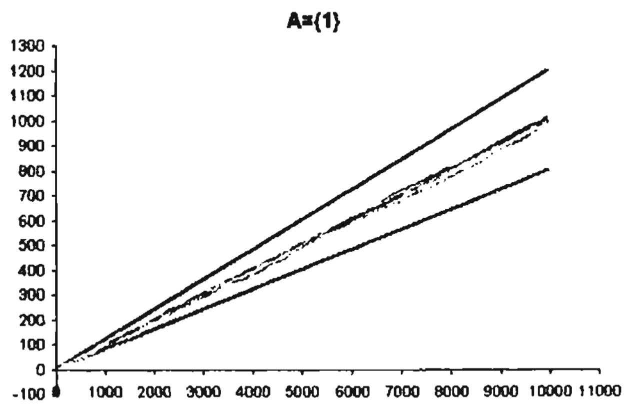
Por lo tanto, en los cinco casos se satisface la Desigualdad de Chebishev, ya que el porcentaje de las sucesiones observadas que cumplen las exigencias de esta desigualdad es mayor que el porcentaje que marca la teoría.

Para $n = 10000$

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
800	1200

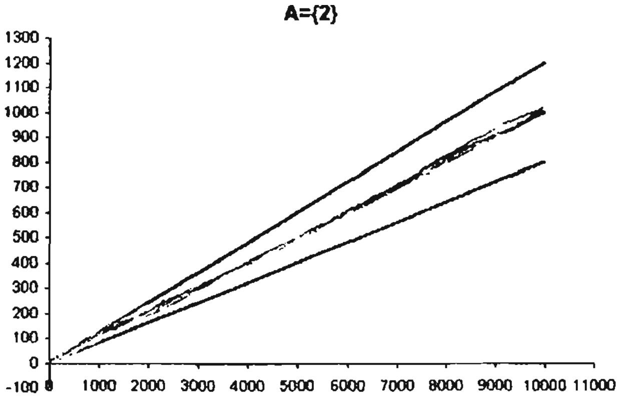
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1016	1016	988	992	970	976	995	1005	992	995



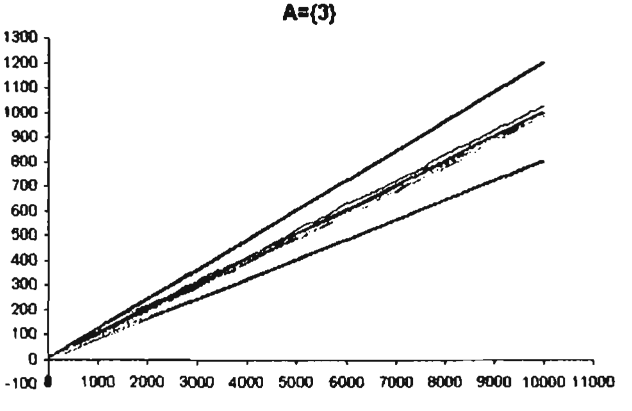
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1011	991	1019	959	1043	970	995	944	1013	970



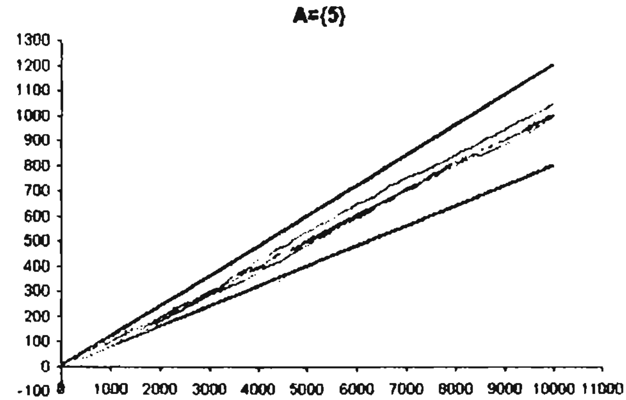
A={3}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1027	985	988	977	962	972	984	1070	1005	984



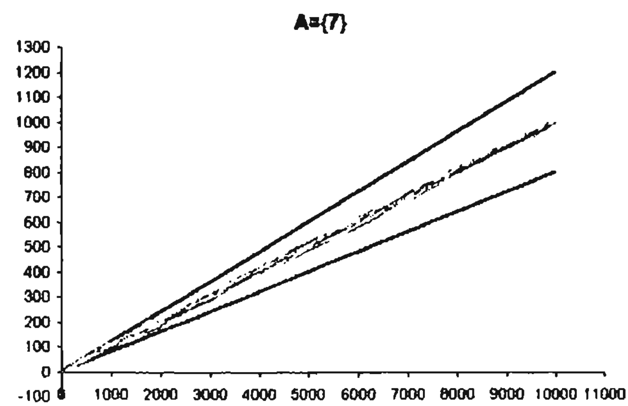
A={5}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1045	984	999	1015	986	1038	986	1008	1028	1017



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	999	1005	1008	1016	989	999	1009	1027	1006	1035



En los cinco casos, el 100% las sucesiones observadas caen dentro de la zona delimitada por las rectas $y = x(p-\varepsilon)$ y $y = x(p+\varepsilon)$, por lo tanto, para los cinco dígitos se cumple la desigualdad de Chebishev, la cual establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1 - \tfrac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.9775.$$

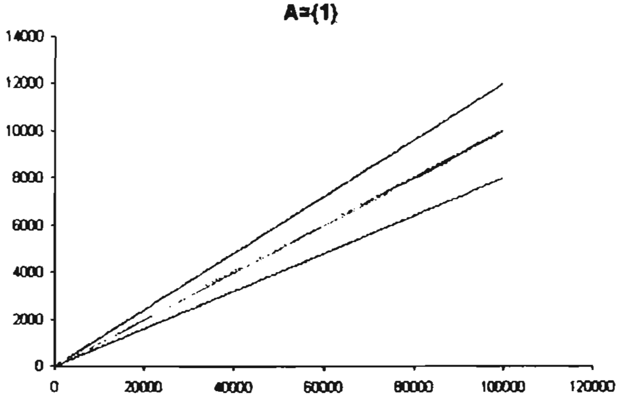
Es decir, cuando $n = 10000$, más del 97.75% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación a p menor que 0.02 para que se satisfaga la desigualdad, dado que en nuestras observaciones realizadas para $d = 1, 2, 3, 5, 7$; el 100% de las sucesiones cumplió dicha condición, podemos afirmar que esta se satisface.

Finalmente cuando $n = 100000$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
8000	12000

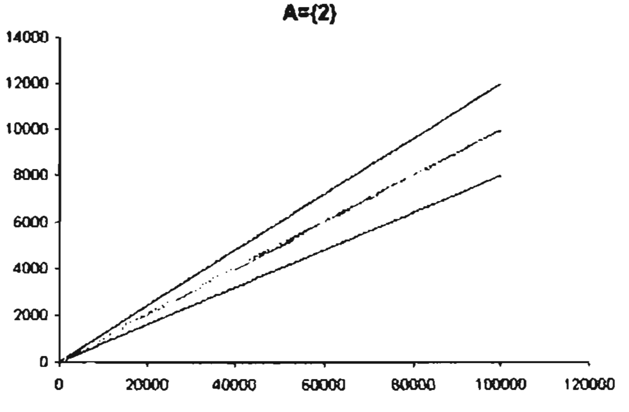
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9969	9964	10009	10076	9917



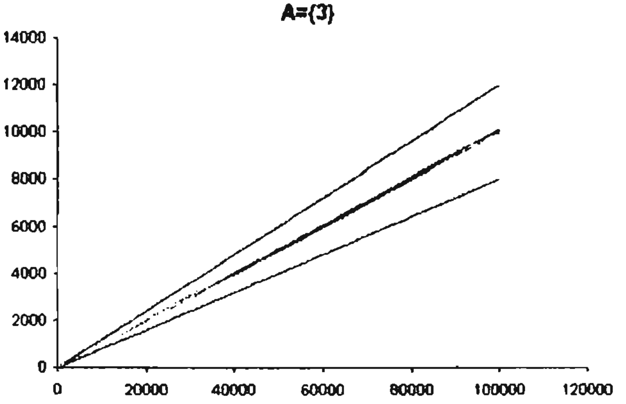
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9952	9977	9933	9923	9939



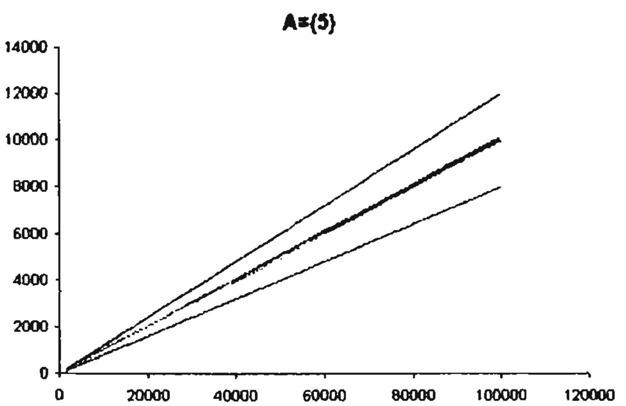
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10098	10139	10001	9982	10187



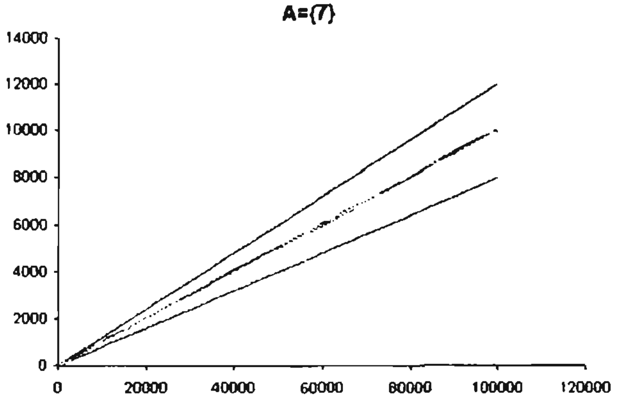
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10158	10055	10020	9927	9971



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9965	9967	10053	10061	9973



Al igual que antes, cuando $n = 100000$, el 100% de las sucesiones caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Teoricamente se tiene que más del 99.775% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación menor que 0.02 con respecto a p para que se satisfaga la Desigualdad de Chebishev, es decir,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.99775$$

Entonces para $n = 100000$, también se satisfacen la desigualdad.

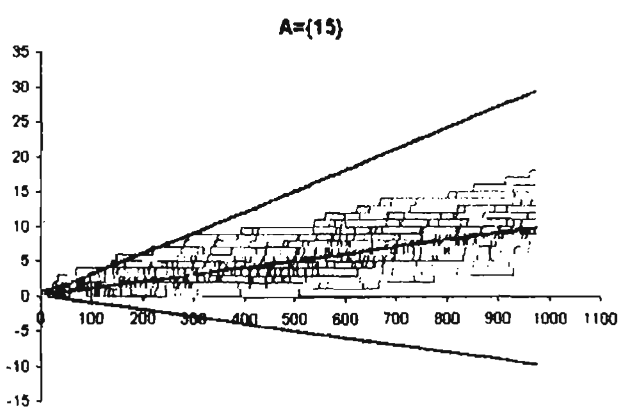
Veamos si al formar parejas con los dígitos, se siguen satisfaciendo ambas desigualdades. Para esto se construyen los colectivos de parejas de dígitos a partir de los utilizados anteriormente. Tendremos entonces $n = 975, 9750, 97500$; $\varepsilon = \frac{1}{50}$ y $p = \frac{1}{100}$.

Para $n = 975$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-9.75	29.25

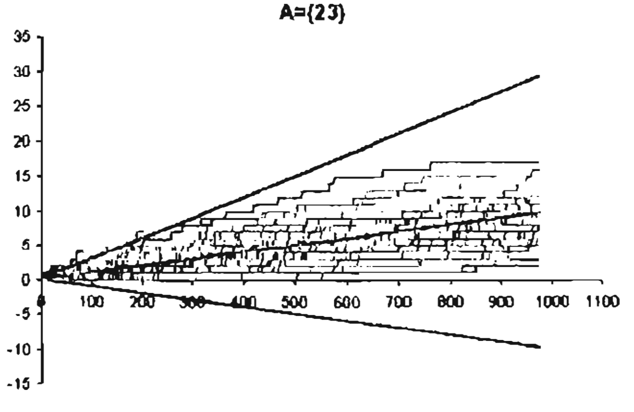
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	7	9	10	13	15	14	13	7	8	6
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	13	9	6	6	15	11	7	7	16	15
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	6	9	18	9	6	9	10	11	4	9
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	11	7	7	9	11	15	5	9	6	14
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	13	10	9	11	9	6	14	13	9	10
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	10	8	9	7	10	11	8	10	10	10
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	11	5	7	12	11	7	8	9	8	8
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	12	7	16	8	7	9	14	9	7	12
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	7	12	7	10	9	10	14	10	8	7
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	13	10	15	9	10	7	10	4	11	8



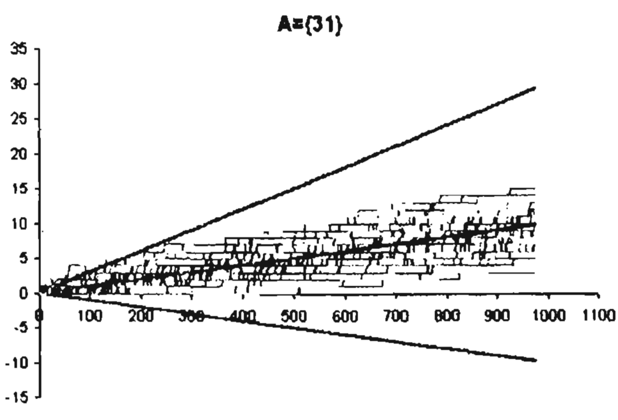
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	14	11	3	8	8	16	7	19	6	14
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	12	6	11	10	7	11	5	13	8	8
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	10	10	11	7	9	12	12	10	9	6
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	9	7	12	10	4	13	5	8	7	8
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	11	11	10	6	4	14	10	4	7	18
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	8	15	9	11	12	11	5	6	9	9
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	7	8	7	16	7	13	6	12	7	6
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	10	7	12	11	8	10	2	7	8	16
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	11	17	14	6	6	6	14	12	12	9
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	8	7	6	10	10	9	6	10	7	10



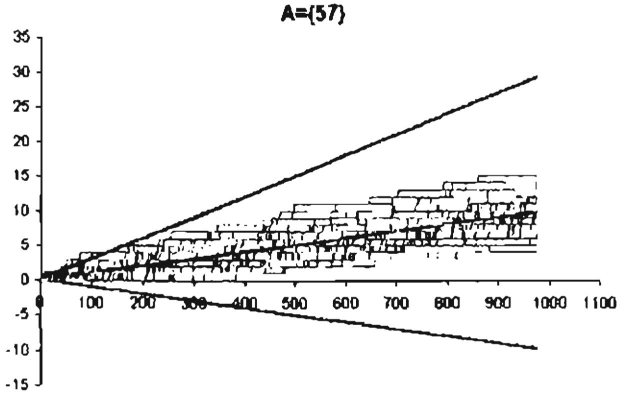
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	11	11	9	11	13	6	9	7	8	7
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	9	11	11	10	9	11	7	13	11
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	13	9	12	11	3	7	12	12	8	15
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	12	11	7	8	11	10	7	12	5	9
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	10	5	8	10	4	7	6	15	14	8
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	11	7	7	5	11	6	9	9	9	9
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	9	11	9	15	11	13	7	10	10	5
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	17	7	12	13	7	10	11	9	8	8
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	5	11	7	13	12	9	10	10	12	11
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	14	12	9	15	5	11	6	8	12	17



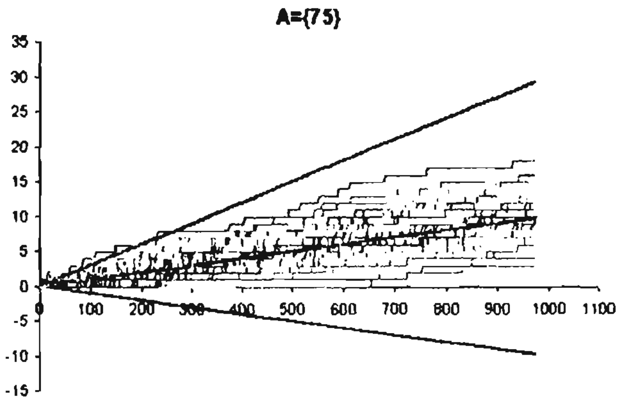
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	7	14	10	13	7	10	9	7	7	7
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	7	6	10	9	7	13	10	8	11
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	12	4	9	14	12	13	10	11	5	9
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	8	9	9	9	9	9	8	6	11	8
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	13	14	7	8	13	5	12	12	7	16
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	10	12	8	12	9	5	10	7	14	12
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	12	5	9	7	15	10	12	13	13	7
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	9	8	11	10	7	14	10	11	5	15
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	9	12	13	9	12	7	5	10	11	10
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	5	12	7	11	8	7	13	13	6	10



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	9	8	16	15	6	10	13	7	6	9
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	4	9	13	10	8	11	9	10	8
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	15	7	9	7	6	12	9	18	6	10
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	7	9	9	5	9	5	12	11	13	4
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	19	6	10	10	9	10	9	12	12	8
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	12	13	5	9	8	7	12	18	6	11
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	9	10	10	9	10	9	12	9	8	14
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	14	11	9	14	13	10	9	7	11	15
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	10	10	10	9	10	14	14	6	12	11
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	8	13	7	10	3	8	14	13	11	15



Una vez más, se cumplen la Desigualdad de Chebishev ya que la teoría indica que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\epsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\epsilon^2} = 0.97525$$

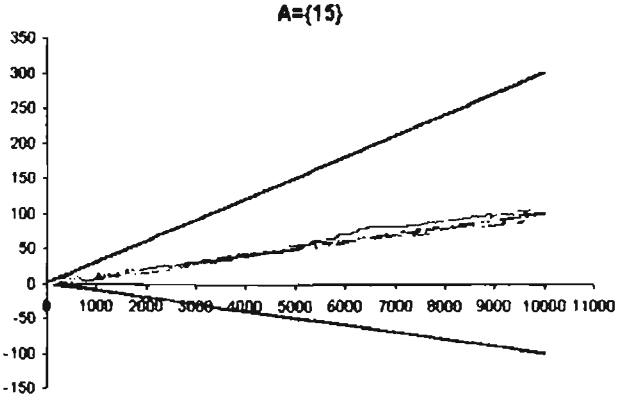
Más del 97.525% de las sucesiones deben tener una aproximación a p menor que 0.02 para satisfacer la desigualdad, sin embargo observamos, para las cinco parejas de dígitos, que el 100% de las sucesiones caen en el intervalo $(n(p-\epsilon), n(p+\epsilon))$.

Cuando $n = 9750$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-97.5	292.5

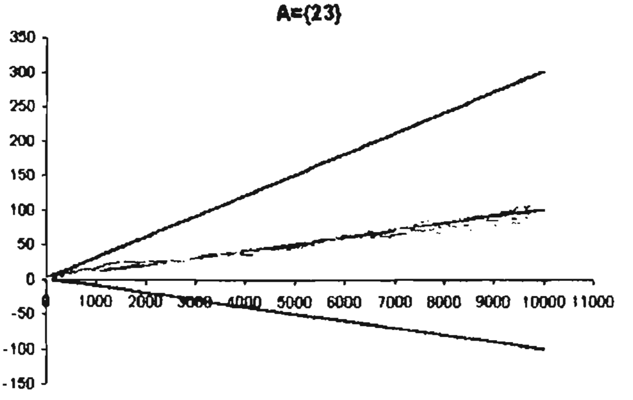
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	102	105	91	94	104	93	86	101	94	97



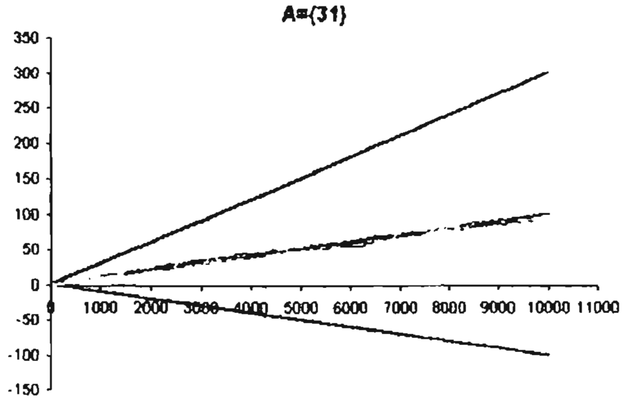
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	106	91	96	83	95	95	89	91	107	83



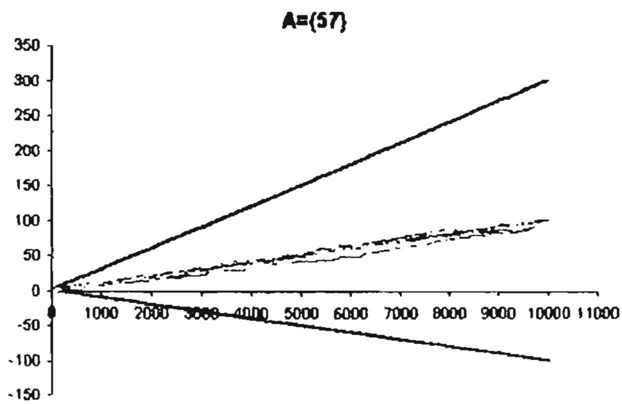
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	92	102	102	92	87	83	100	102	100	109



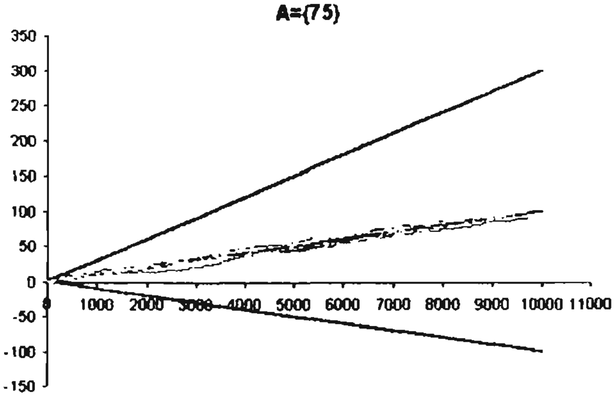
A={57}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	91	90	99	86	107	99	103	100	98	92



A={75}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	99	91	99	84	105	101	100	113	106	102



Los resultados muestran claramente que el 100 % de las sucesiones, quedan dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$.

Por consiguiente si la teoría establece que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.997525$$

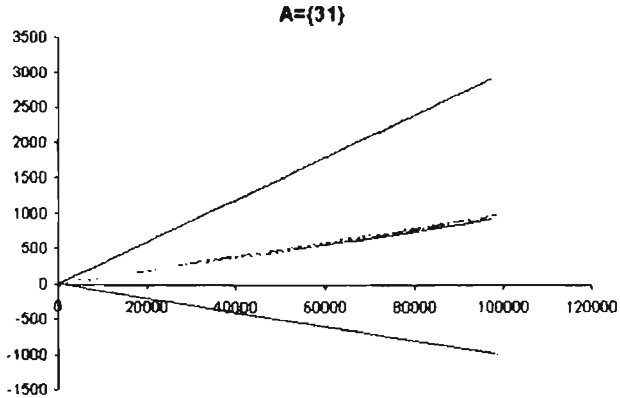
es decir, que más del 99.7525% de las sucesiones deben cumplir la condición que establece la Desigualdad de Chebishev, entonces podemos concluir que las sucesiones observadas para las cinco parejas de dígitos la satisfacen.

Si $n = 97500$,

$n(p-\varepsilon)$	$n(p+\varepsilon)$
-975	2925

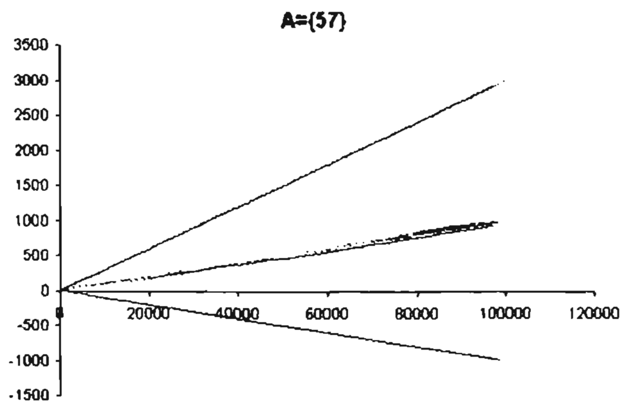
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	989	977	1016	943	995



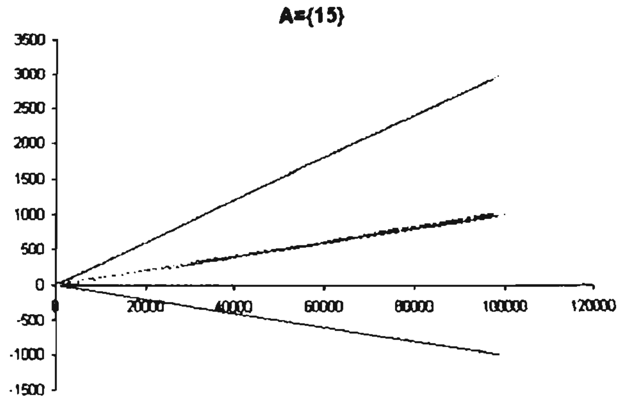
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	930	965	997	996	957



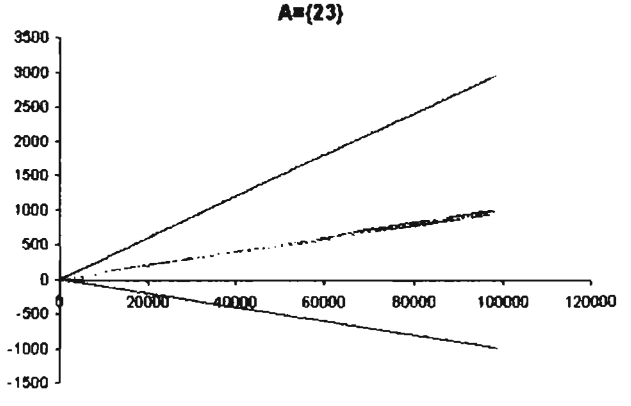
$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	957	957	958	989	966



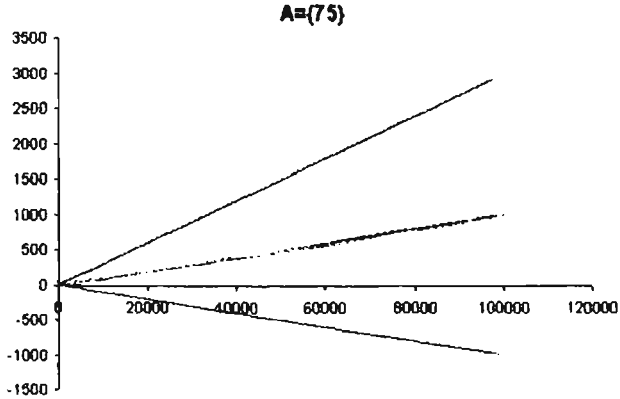
A={23}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	940	967	989	955	968



A={31}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	966	963	931	978	958



El 100% de las sucesiones caen dentro del intervalo $(n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$, por lo que se afirma que se satisface la Desigualdad de Chebishev ya que lo que esta establece es que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.9997525$$

Mediante estas observaciones corroboramos que los dígitos de las tablas generadas utilizando las cifras decimales de e, ya sea tomados de 1 en 1 ó por parejas, cumplen también la Desigualdad de Chebishev, presentando un comportamiento muy similar al de las tablas generadas utilizando cifras decimales de π,así como al de los dígitos de las tablas de Kendall y Babington Smith.

Ley Basta del Logaritmo Iterado.

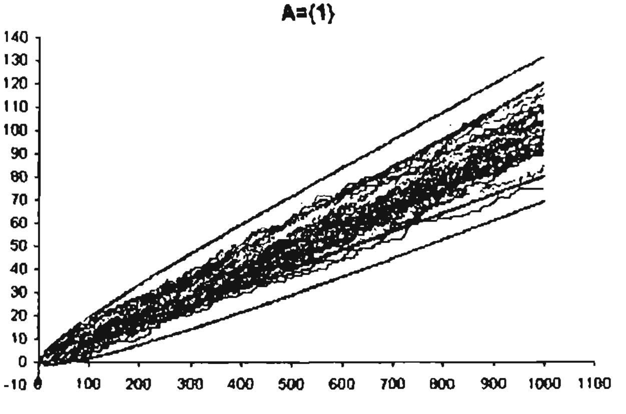
Observemos esta vez si las mismas sucesiones $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado, utilizando exactamente los mismos colectivos que en la Desigualdad de Chebishev.

Para $n = 1000$ y $p = \frac{1}{10}$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
68.9143	131.0857

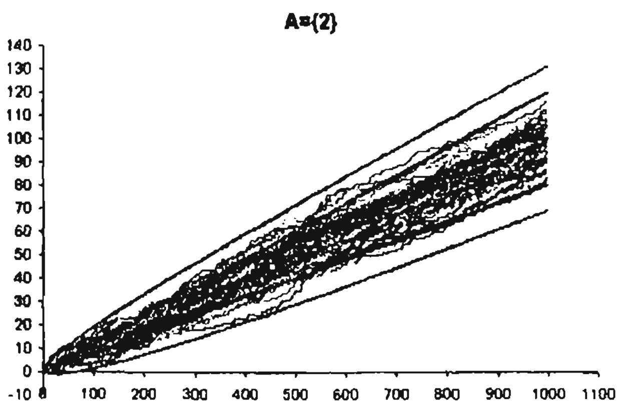
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	101	103	94	107	99	97	120	89	101	105
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	102	97	90	94	106	106	99	102	121	99
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	92	108	108	96	92	97	83	99	105	108
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	97	95	105	88	104	102	93	106	92	110
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	96	92	83	102	97	99	96	100	103	102
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	115	99	105	78	103	85	95	99	98	99
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	98	113	92	95	100	118	93	91	96	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	106	89	105	100	75	99	115	116	91	109
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	83	94	84	111	93	91	114	118	113	91
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	111	96	107	98	101	100	96	88	97	101



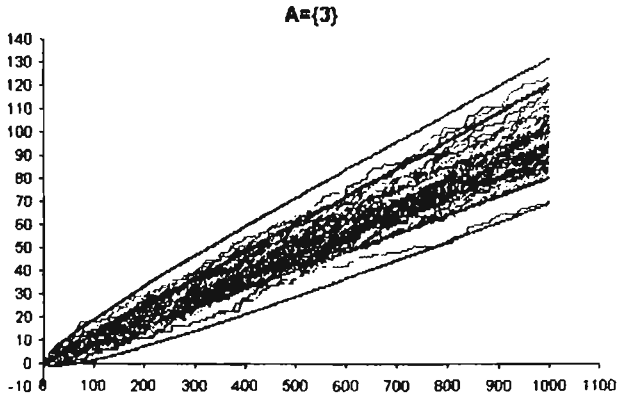
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	108	101	101	92	98	103	108	100	97	103
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	100	98	118	87	92	106	106	113	88	83
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	91	103	103	100	105	107	105	112	110	83
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	108	93	96	81	98	110	106	95	86	86
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	123	111	93	116	95	110	104	92	93	106
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	92	89	86	111	87	108	101	100	100	96
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	89	107	95	104	98	97	96	112	98	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	99	80	91	100	95	102	84	101	95	97
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	104	99	112	89	104	95	100	106	98	106
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	99	92	91	108	112	93	89	94	90	102



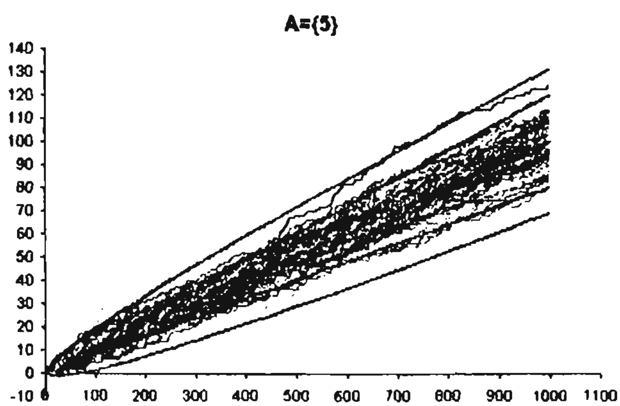
A={3}

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	121	95	101	96	111	106	92	107	100	98
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	102	82	102	110	89	104	91	94	103	108
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	85	111	94	103	96	103	84	114	90	108
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	86	93	108	118	99	89	90	106	92	96
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	84	102	90	71	91	114	85	104	111	110
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	91	93	93	93	94	102	92	107	104	103
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	85	82	117	117	101	82	85	113	99	103
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	123	105	124	100	94	113	94	94	105	118
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	87	97	99	98	103	109	100	114	97	101
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	91	92	94	103	94	96	101	110	95	108



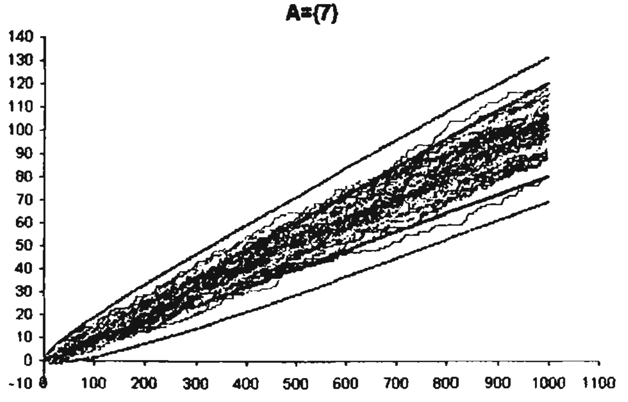
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	99	97	109	120	115	109	106	87	99	104
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	106	94	93	101	98	109	109	85	88	101
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	96	86	107	87	107	113	109	111	86	97
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	90	116	101	101	89	95	104	102	112	105
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	93	111	102	99	86	86	104	120	94	91
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	114	115	89	107	95	104	103	101	99	111
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	81	89	100	104	108	89	106	112	98	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	100	112	100	102	96	93	97	107	97	104
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	107	110	115	110	102	94	101	80	100	109
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	83	125	96	109	100	105	100	81	111	107



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	99	108	105	111	96	85	96	92	105	102
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	89	98	103	105	94	91	108	108	104	105
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	105	95	90	113	103	111	98	103	87	103
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	106	96	93	95	113	109	93	104	114	93
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	120	91	91	90	107	101	99	90	99	101
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	88	106	88	98	101	89	117	103	99	110
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	115	109	98	89	100	93	103	103	100	99
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	102	102	108	113	102	90	107	88	100	115
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	107	99	99	98	96	116	114	89	108	80
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	118	106	102	97	91	97	109	119	101	95



Podemos observar, en los cinco casos, que ninguna sucesión queda fuera de la zona de Khinchin $\left(np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}, np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}\right)$.

La Ley Basta del Logaritmo Iterado nos dice que para $n = 1000$,

$$\mu_n \left(\sum_{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)} \right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.90686$$

En más del 90.686% de las sucesiones se debería tener una aproximación de $\frac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}$ con respecto a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

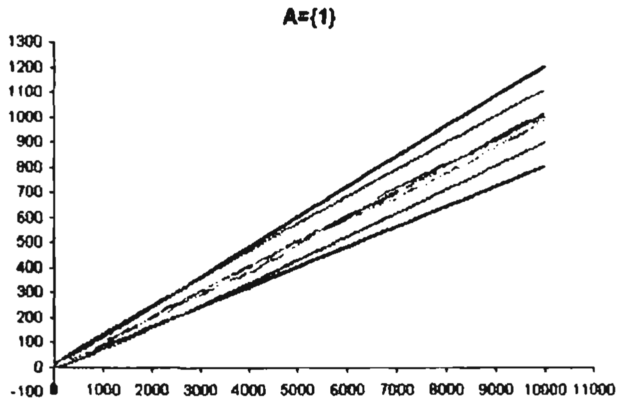
Por lo tanto, en los cinco casos se satisface la Desigualdad de Chebishev-Khinchin o Ley Basta del Logaritmo Iterado, ya que el 100% de las sucesiones observadas cumplen con esta condición.

Para $n = 10000$

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
894.6357	1105.3643

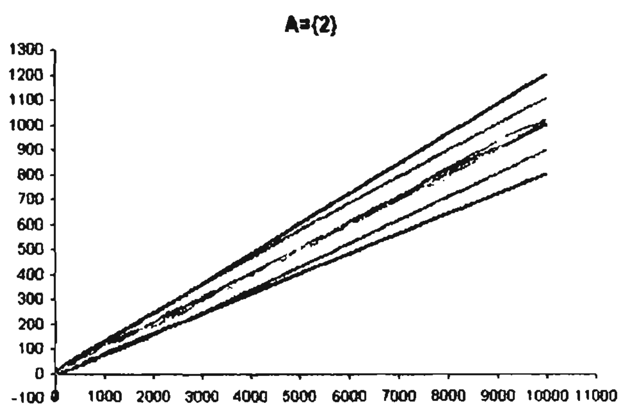
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1016	1016	988	992	970	976	995	1005	992	995



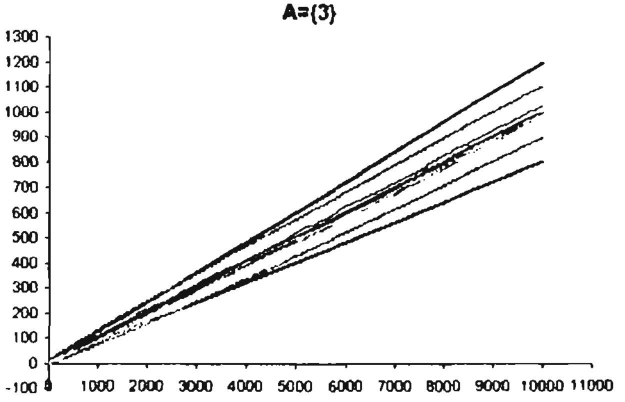
$A=\{2\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1011	991	1019	959	1043	970	995	944	1013	970



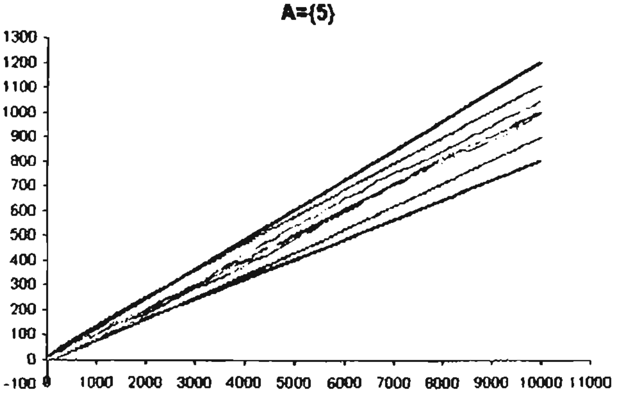
$A=\{3\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1027	985	988	977	962	972	984	1070	1005	984



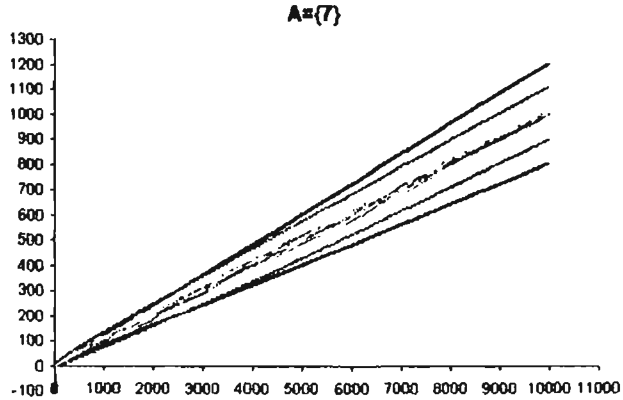
$A=\{5\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	1045	984	999	1015	986	1038	986	1008	1028	1017



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	999	1005	1008	1016	989	999	1009	1027	1006	1035



En los cinco casos, el 100% de las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin, por lo tanto, para los cinco dígitos se cumple la desigualdad de Chebishev-Khinchin, la cual establece que

$$\mu_n \left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)} \right) > 1 - \tfrac{2pq}{\ln\ln n} = 0.91893$$

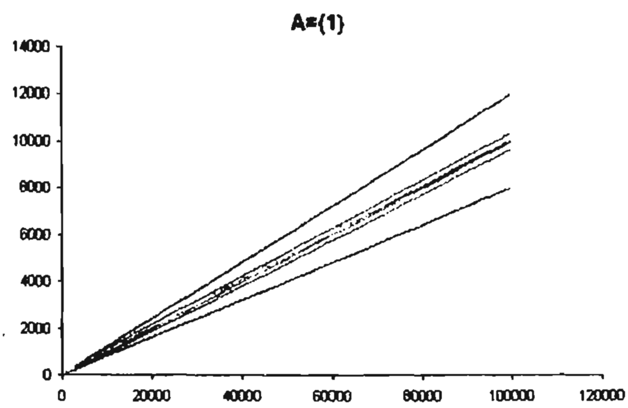
Es decir, cuando $n = 10000$, más del 97.75% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$.

Finalmente cuando $n = 100000$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
9650.4667	10349.5333

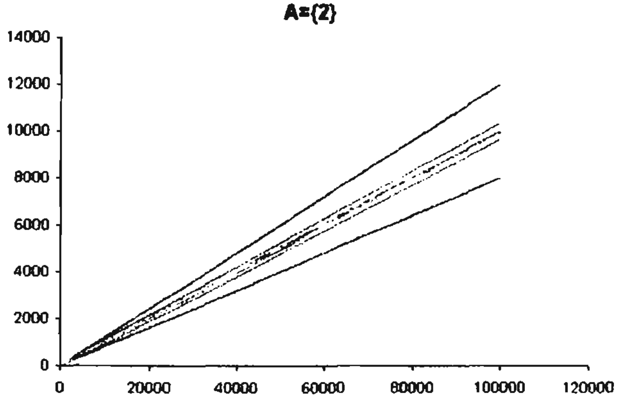
$A=\{1\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9969	9964	10009	10076	9917



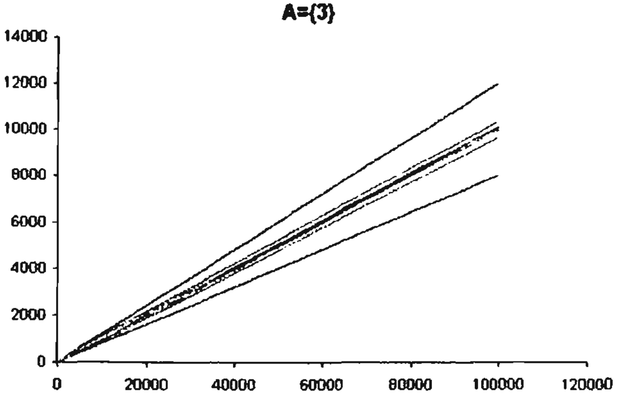
A={2}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9952	9977	9933	9923	9939



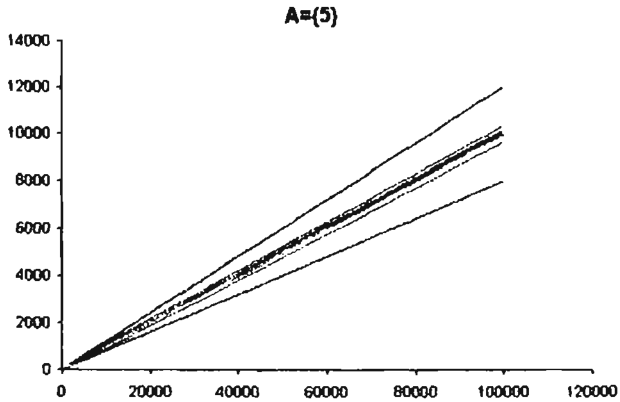
A={3}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10098	10139	10001	9982	10187



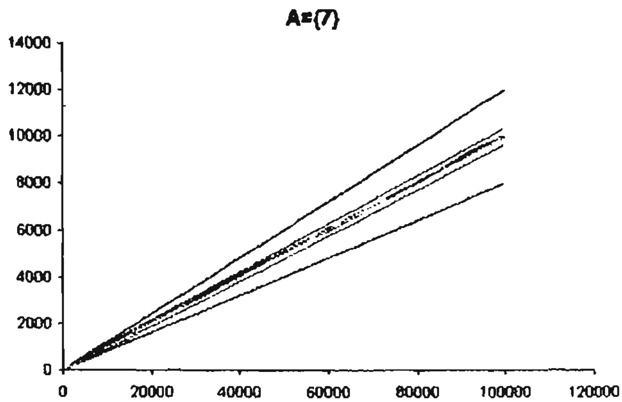
A={5}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	10158	10055	10020	9927	9971



$A=\{7\}$

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	9965	9967	10053	10061	9973



El 100% de las sucesiones observadas caen dentro de la zona de Khinchin.

Teoricamente se tiene que más del 92.633% de las sucesiones deben cumplir que $\frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ tenga una aproximación menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$ con respecto a p para que se satisfaga la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Es decir,

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.92633$$

Entonces para $n = 100000$, esta también se satisface.

A continuación observemos cómo al formar parejas con los dígitos, se sigue satisfaciendo la desigualdad.

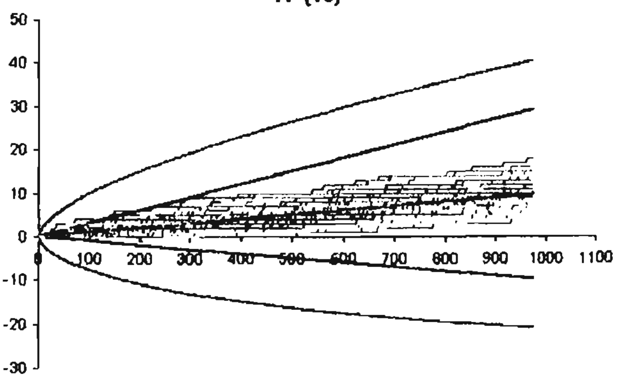
Para $n = 975$ y $p = \frac{1}{100}$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}} \ln \ln n$
-20.9155	40.4155

$A = \{15\}$

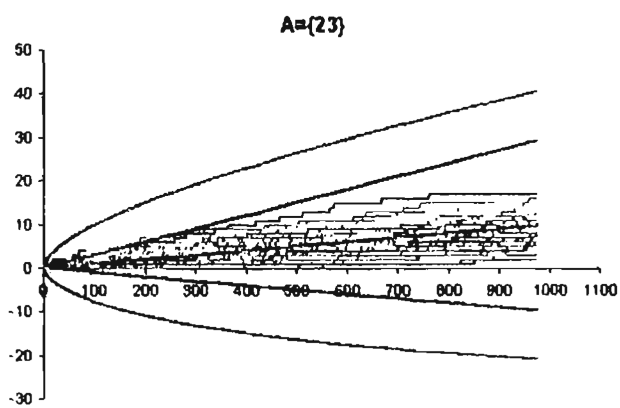
Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	7	9	10	13	15	14	13	7	8	6
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	13	9	6	6	15	11	7	7	16	15
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	6	9	18	9	6	9	10	11	4	9
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	11	7	7	9	11	15	5	9	6	14
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	13	10	9	11	9	6	14	13	9	10
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	10	8	9	7	10	11	8	10	10	10
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	11	5	7	12	11	7	8	9	8	8
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	12	7	16	8	7	9	14	9	7	12
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	7	12	7	10	9	10	14	10	8	7
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	13	10	15	9	10	7	10	4	11	8

A={15}



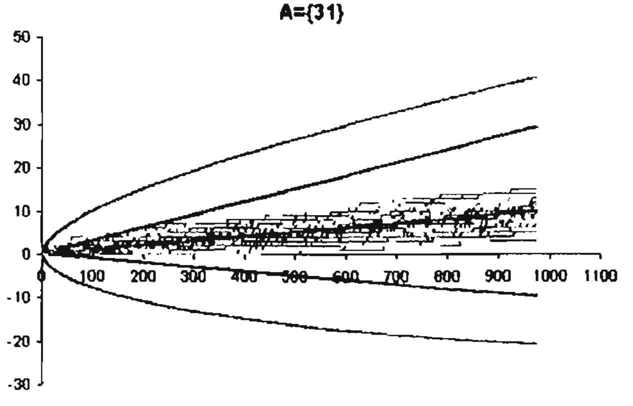
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	14	11	3	8	8	16	7	19	6	14
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	12	6	11	10	7	11	5	13	8	8
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	10	10	11	7	9	12	12	10	9	6
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	9	7	12	10	4	13	5	8	7	8
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	11	11	10	6	4	14	10	4	7	18
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	8	15	9	11	12	11	5	6	9	9
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	7	8	7	16	7	13	6	12	7	6
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	10	7	12	11	8	10	2	7	8	16
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	11	17	14	6	6	6	14	12	12	9
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	8	7	6	10	10	9	6	10	7	10



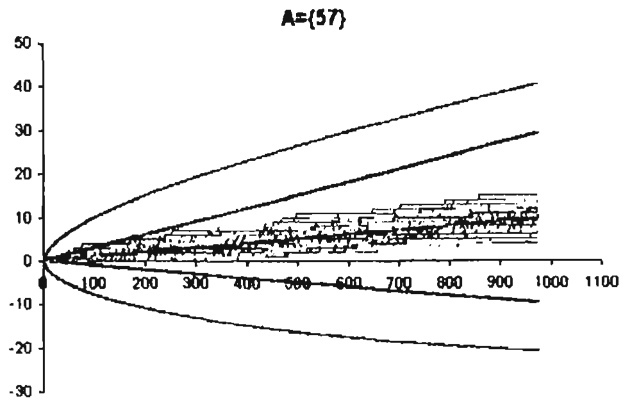
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	11	11	9	11	13	6	9	7	8	7
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	10	9	11	11	10	9	11	7	13	11
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	13	9	12	11	3	7	12	12	8	15
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	12	11	7	8	11	10	7	12	5	9
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	10	5	8	10	4	7	6	15	14	8
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	11	7	7	5	11	6	9	9	9	9
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	9	11	9	15	11	13	7	10	10	5
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	17	7	12	13	7	10	11	9	8	8
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	5	11	7	13	12	9	10	10	12	11
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	14	12	9	15	5	11	6	8	12	17



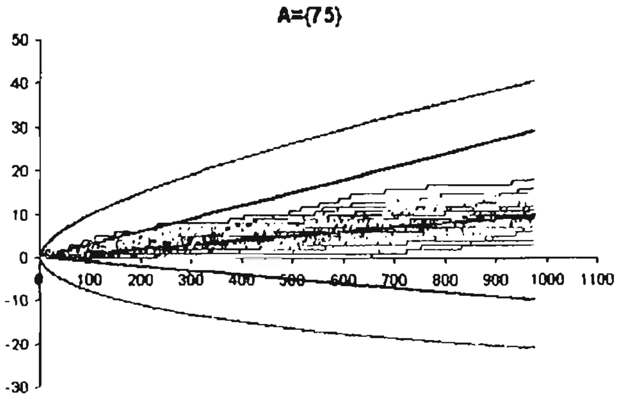
$A=\{57\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	7	14	10	13	7	10	9	7	7	7
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	7	6	10	9	7	13	10	8	11
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	12	4	9	14	12	13	10	11	5	9
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	8	9	9	9	9	9	8	6	11	8
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	13	14	7	8	13	5	12	12	7	16
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	10	12	8	12	9	5	10	7	14	12
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	12	5	9	7	15	10	12	13	13	7
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	9	8	11	10	7	14	10	11	5	15
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	9	12	13	9	12	7	5	10	11	10
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	5	12	7	11	8	7	13	13	6	10



$A=\{75\}$

Colectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	9	8	16	15	6	10	13	7	6	9
Colectivo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frecuencia	9	4	9	13	10	8	11	9	10	8
Colectivo	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
Frecuencia	15	7	9	7	6	12	9	18	6	10
Colectivo	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
Frecuencia	7	9	9	5	9	5	12	11	13	4
Colectivo	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
Frecuencia	19	6	10	10	9	10	9	12	12	8
Colectivo	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
Frecuencia	12	13	5	9	8	7	12	18	6	11
Colectivo	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
Frecuencia	9	10	10	9	10	9	12	9	8	14
Colectivo	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
Frecuencia	14	11	9	14	13	10	9	7	11	15
Colectivo	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
Frecuencia	10	10	10	9	10	14	14	6	12	11
Colectivo	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
Frecuencia	8	13	7	10	3	8	14	13	11	15



Por lo tanto se cumple la Desigualdad de Chebishev-Khinchin ya que esta indica que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n}=0.98974.$$

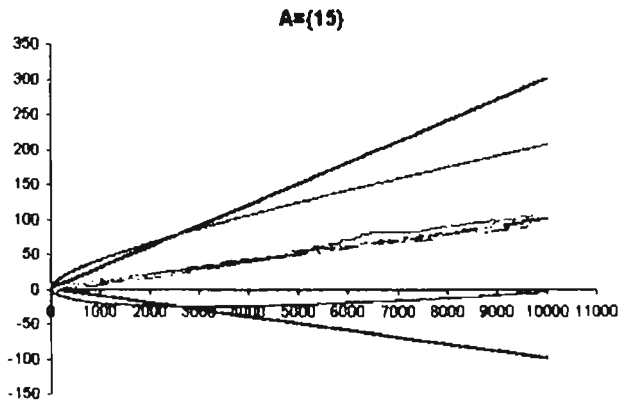
Es decir, que más del 98.974% de las sucesiones deben tener una aproximación a p menor que $\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}$, para satisfacer la desigualdad. Sin embargo, para las cinco parejas de dígitos, el 100% de las sucesiones caen dentro de la zona de Khinchin, por lo que cumplen dicha condición.

Cuando $n = 9750$ y $p = \frac{1}{100}$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
-6.4744	201.4744

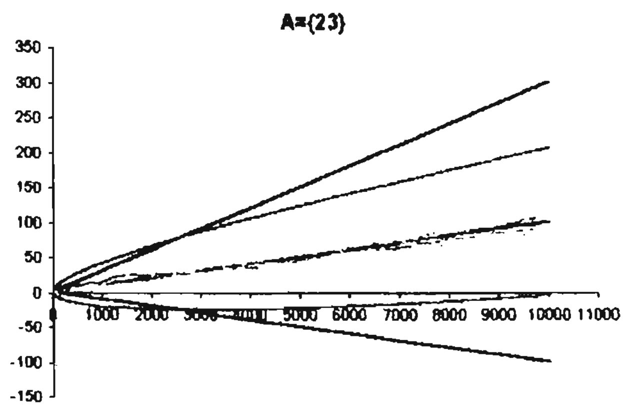
$A=\{15\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	102	105	91	94	104	93	86	101	94	97



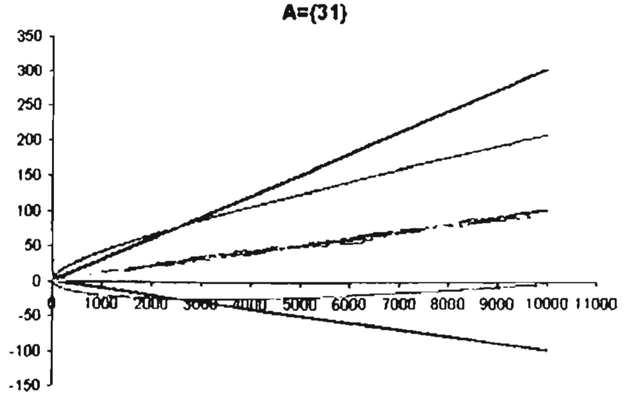
$A=\{23\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	106	91	96	83	95	95	89	91	107	83



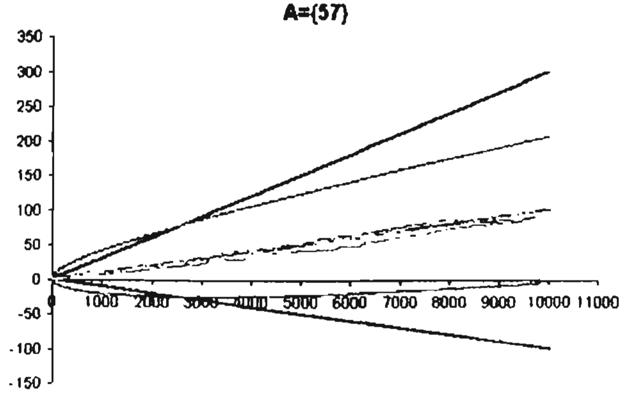
$A=\{31\}$

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	92	102	102	92	87	83	100	102	100	109



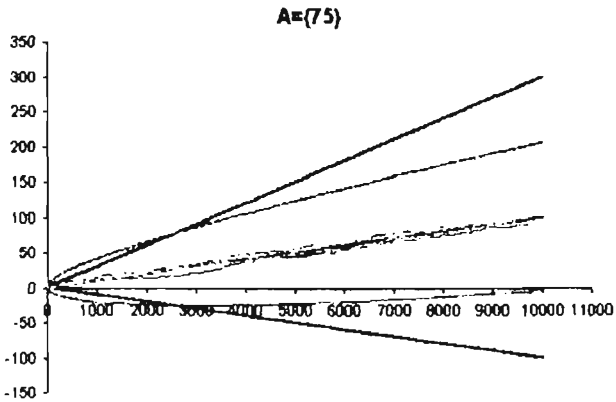
A={57}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	91	90	99	86	107	99	103	100	98	92



A={75}

Colectivo	1	2	13	14	25	26	37	38	49	50
Frecuencia	99	91	99	84	105	101	100	113	106	102



Se observa claramente que el 100 % de las sucesiones utilizadas, quedan dentro de la zona de Kinchin.

Por consiguiente, si la teoría establece que

$$\mu_n \left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)} \right) > 1 - \frac{2pq}{\ln\ln n} = 0.99107.$$

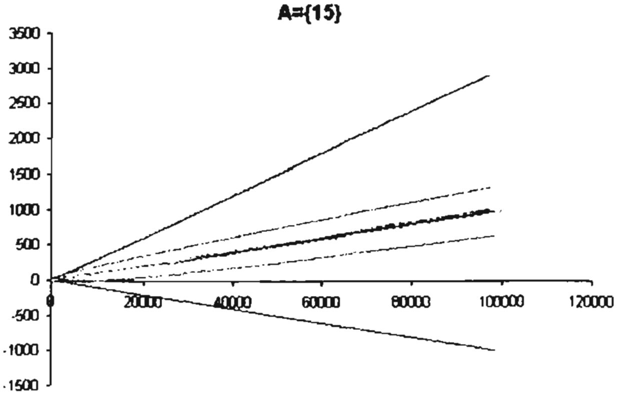
es decir, que más del 99.107% de las sucesiones deben cumplir la condición que establece la Desigualdad de Chebishev-Khinchin, entonces podemos concluir que las sucesiones observadas para las cinco parejas de dígitos satisfacen la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Si $n = 97500$ y $p = \frac{1}{100}$,

$np - \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$	$np + \sqrt{\frac{n}{2}\ln\ln n}$
630.0190	1319.9810

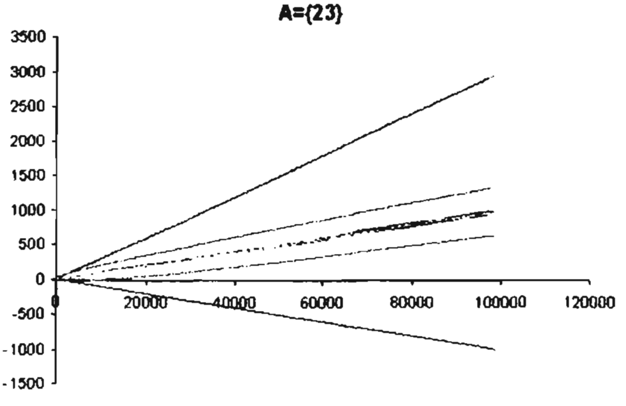
A={15}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	989	977	1016	943	995



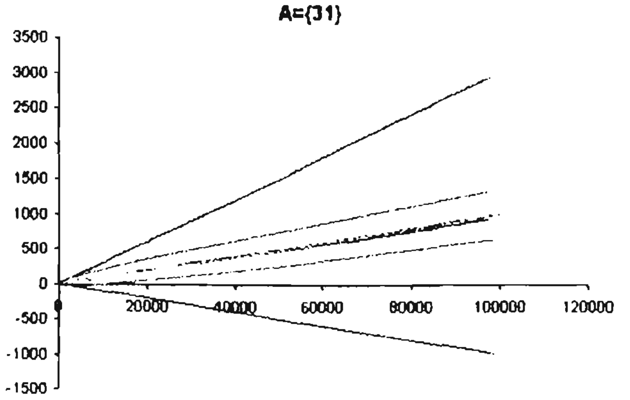
A={23}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	940	967	989	955	968



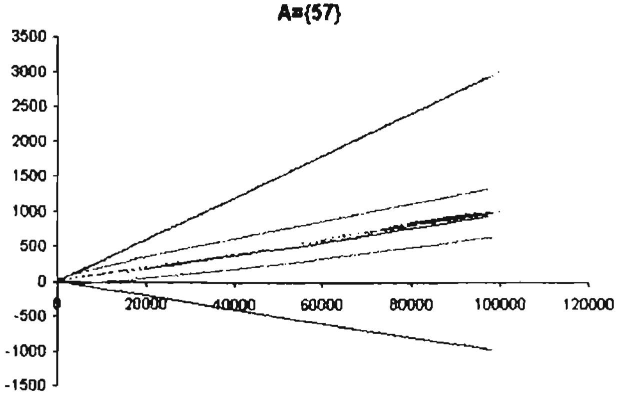
A={31}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	966	963	931	978	958



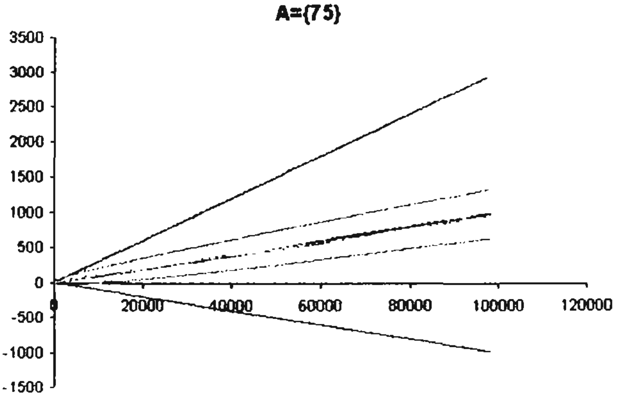
A={57}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	930	965	997	996	957



A={75}

Colectivo	1	2	3	4	5
Frecuencia	957	957	958	989	966



Podemos observar, una vez más, que el 100% de las sucesiones caen dentro de la zona de Khinchin por lo que se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado ya que lo que esta establece es que

$$\mu_n\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\sqrt{\frac{\ln\ln n}{2n}}} A_k^{(n)}\right) > 1-\frac{2pq}{\ln\ln n}=0.99189.$$

Entonces, con los dígitos de estas nuevas tablas, tomados individualmente y por parejas, en colectivos de 1000, 10000 y 100000 dígitos, una vez más se satisface la Ley Basta del Logaritmo Iterado.

Por lo tanto, en todas las sucesiones de los cinco dígitos, se observa, de nueva cuenta, un comportamiento muy similar al observado en las tablas de dígitos de Kendall y Babington Smith y en las tablas de dígitos generadas a partir de cifras decimales de π.

Conclusiones.

Se mostraron algunas propiedades relevantes que presentan los colectivos de dígitos de la Tabla de Dígitos al Azar de Kendall y Babington Smith. Por ejemplo, se mostró que estos colectivos tienen regularidades estadísticas, ya sea por bloques o el colectivo total y sin importar si se toman individualmente o por parejas de dígitos. Es decir,

$$\frac{\delta_1(A)+\cdots+\delta_n(A)}{n} \approx \frac{1}{10} = p_A,\ \forall\ n\ \textit{grande, con}\ A = \{d\}\,,\ d = 0,1,\ldots,9.$$

y

$$\frac{\delta_1(A)+\cdots+\delta_n(A)}{n} \approx \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = p_A,\ \forall\ n\ \textit{grande, con}\ A = \{(d_1,d_2)\}\,,\\ d_1, d_2 = 0,1,\ldots,9.$$

Cabe mencionar que se observó, en todos los casos, que conforme n crece, las frecuencias relativas parecen ser cada vez más próximas a la frecuencia asintótica.

Se observó también, para colectivos de tamaño $n = 10000$ y $n = 100000$, que

$$n(d_2 \mid d_1) = \frac{n((d1,d2))}{n(d1)} \approx \frac{1}{10} \approx \frac{n(d_2)}{n}.$$

Lo cual indica que la aparición de un dígito no influye en el resultado subsecuente, por lo tanto, estos colectivos de dígitos presentan independencia estadística.

Se mostró que los colectivos de esta tabla, satisfacen tanto la desigualdad de Chebishev como la Ley Basta del Logaritmo Iterado, de nuevo sin influir si los dígitos son tomados individualmente o por parejas. Es importante resaltar que de cierta manera, ambas desigualdades parecen un poco sobradas, lo cual es resultado del hecho de que esta teoría fue construida para el espacio de medida normal, constituido por el espacio de resultados

$$X = \left\{(\delta_1, \delta_2, \ldots) : \delta_i = \left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.,\ i = 1,2,\ldots\right\},$$

el álgebra σ generada por sus intervalos y la medida μ_n que resulta de extender la medida

$$\mu_n\left((\delta_1,\ldots,\delta_n)\right) = p^{\delta_1+\cdots+\delta_n}\left(1-p\right)^{n-(\delta_1+\cdots+\delta_n)},\ \forall\ n \geq 1$$

definida en la colección de esos intervalos.

En este espacio de medida normal, hay una infinidad de sucesiones que pueden cumplir las condiciones impuestas por estas desigualdades y que jamás se darán como resultado de nuestras observaciones. Por ejemplo, para $n = 100000$, la sucesión:

$$(\underbrace{0,0,0,\dots,0,0}_{89747 ceros},\underbrace{1,1,\dots,1,1}_{10253 unos}), \text{ cumple que } \delta_1 + ... + \delta_{100000} = 10253,$$

por lo cual termina dentro de la zona delimitada por las rectas $y = n(p-\varepsilon)$ y $y = n(p+\varepsilon)$, ya que,

$$n(p-\varepsilon) = 8000 < 10253 < 12000 = n(p+\varepsilon).$$

Además también termina dentro de la denominada zona de Khinchin,

$$np - \sqrt{\tfrac{n}{2}\ln\ln n} = 9650.4667 < 10253 < 10349.5333 = np + \sqrt{\tfrac{n}{2}\ln\ln n}.$$

Sin embargo, esta sucesión no puede aparecer nunca con la tabla de dígitos de Kendall y Babington Smith, y por consiguiente, tampoco con las nuevas tablas.

Se presentaron las características y condiciones, demostradas teoricamente por David Reyes, que deben cumplir las variables X y Y, para que al aplicar la función $R = (X+Y)$ *mod* 10, se pueda construir un vector aleatorio cuyas componentes se distribuyan uniformemente sobre $\{0, 1, \dots, 9\}$.

Como estas condiciones se cumplen al utilizar como la variable X, la Tabla de Dígitos al Azar de Kendall y Babington Smith y como la variable Y, cifras decimales de π o de e. Se procedió a la construcción de 10 nuevas tablas de 100000 dígitos cada una, 5 de estas tablas se generaron utilizando los decimales de π y las cinco restantes con los decimales de e, obteniéndose de esta forma, dos grandes colectivos de 500000 dígitos cada uno.

Finalmente se realizaron, con los dígitos de estas nuevas tablas o colectivos, las mismas observaciones que a la tabla de Kendall y Babington Smith. Los resultados arrojados por este análisis muestran, de manera clara y contundente, que el comportamiento de los dígitos de las nuevas tablas es prácticamente el mismo que se observa en la tabla original: presentan las mismas regularidades estadísticas, los dígitos son independientes estadísticamente y se satisfacen, con igual amplitud, la desigualdad de Chebishev y la Ley Basta del Logaritmo Iterado. Por lo cual, y basándose meramente en estos resultados, se puede afirmar que los dígitos de las nuevas tablas también presentan la propiedad de ser aleatorios ya que muestran el mismo comportamiento que las tablas de dígitos aleatorios de Kendall y Babington Smith.

Las observaciones realizadas a lo largo de este trabajo, que básicamente parten del experimento $\mathcal{E}$ = *extraer un dígito al azar*, ya sea por medio de la ruleta de Kendall y Babington Smith o por medio de las nuevas tablas construidas con el método de David Reyes, y el espacio de resultados $X = \{0, 1, \dots, 9\}$ corroboran la existencia de *regularidades estadísticas*, tanto por tramo como globalmente, para un dígito o para parejas de éstos. Además nos muestra la fidelidad con la que la teoría matemática de la probabilidad refleja estos hechos de la naturaleza.

Cabe mencionar que estos resultados, son un hecho objetivo, independiente de nosotros y de las circunstancias en que se realizaron, son un hecho que cualquier persona puede corroborar ya que son verificables, repetibles, reproducibles y mensurables.

Bibliografía.

[1] KENDALL M.G. Y BABINGTON SMITH B., "Tables of Random Sampling Numbers", Cambridge University Press, Inglaterra, 1939.

[2] NIEVA ARTURO, "Acerca de la Ley Natural de los Números Grandes", Taller de publicaciones de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México, 2004.

[3] REYES DAVID, "Construcción de Tablas de Dígitos al Azar usando la Función $R = (X + Y)$ *mod* 10", Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1995.

[4] EKELAND IVAR, "Al Azar", Editorial Gedisa, España, 1992.

Apéndice.

m-files de Matlab.

1. Creación de nuevas tablas de dígitos con la función R = (X+Y) mod 10.

```
function tablas
archivo1=fopen('numerosI.txt','r');
archivo2=fopen('Pi.txt','r');
nuevoarchivo=fopen('nuevatabla.txt','a+');
espacio=32;
nuevalinea=13;
if (archivo1==-1)|(archivo2==-1)|(nuevoarchivo==-1)
  'error en la lectura'
else
   for j=1:2500,
       for i=1:40,
           A=fread(archivo1,1,'int8');
           B=fread(archivo2,1,'int8');
           while A<48|A>57,
               A=fread(archivo1,1,'int8');
           end
           while B<48|B>57,
               B=fread(archivo2,1,'int8');
           end
           A=A-48;
           B=B-48;
           C=mod(A+B,10)+48;
           fwrite(nuevoarchivo,C,'int8');
           fwrite(nuevoarchivo,espacio,'int8');
       end
       fwrite(nuevoarchivo,nuevalinea,'int8');
   end
end
fclose(archivo1);
fclose(archivo2);
fclose(nuevoarchivo);
```

2. Conteo de dígitos en colectivos de tamaño n.

```
function frec1
frecuencia=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
archivo=fopen('T50001-100000.txt','r');
nuevoarchivo=fopen('frec7-2-1000.txt','w');
espacio=9;
nuevalinea=13;
A=espacio;
for renglones=0:1249,
  for columnas=0:39,
     while A<48|A>57,
        A=fread(archivo,1,'int8');
     end
     A=A-47;
     frecuencia(A)=frecuencia(A)+1;
     for k=1:10,
        fprintf(nuevoarchivo,'%s',int2str( frecuencia(k) ) );
        fwrite(nuevoarchivo,espacio,'int8');
     end
     fwrite(nuevoarchivo,nuevalinea,'int8');
  end
end
fwrite(nuevoarchivo,nuevalinea,'int8');
fclose(archivo);
fclose(nuevoarchivo);
```

3. Conteo de parejas de dígitos en colectivos de tamaño n.

```
function frec2
frecuencia=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
archivo=fopen('T87001-88000.txt','r');
nuevoarchivo=fopen('frec2-5.txt','w');
espacio=9;
nuevalinea=13;
A=fread(archivo,1,'int8');
for renglones=0:24,
  while A<48|A>57,
      A=fread(archivo,1,'int8');
  end
  for columnas=0:39,
     B=fread(archivo,1,'int8');
     while B<48|B>57,
         B=fread(archivo,1,'int8');
     end
     A=A-48;
     B=B-48;
     C=(10*A)+B+1;
     B=B+48;
     A=B;
     if columnas<39
        frecuencia(C)=frecuencia(C)+1;
        for k=1:100,
           fprintf(nuevoarchivo,'%s',int2str( frecuencia(k) ) );
           fwrite(nuevoarchivo,espacio,'int8');
        end
        fwrite(nuevoarchivo,nuevalinea,'int8');
     end
  end
end
fclose(archivo);
fclose(nuevoarchivo);
```