

01170



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DIAGNÓSTICO EN LÍNEA DEL ESTADO DE
UN MEDIDOR DE OXÍGENO DISUELTO**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
(OPCIÓN: CONTROL Y ROBÓTICA)**

P R E S E N T A :

JUVENTINO CUÉLLAR GONZÁLEZ



**DIRECTORA DE TESIS
DRA. CRISTINA VERDE RODARTE**

México, D.F.

2005

M343946



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mis padres

A mis hermanos

A mi esposa

Agradecimientos

A la Dra. Cristina Verde Rodarte

por todo el apoyo y la confianza recibida en la elaboración de este trabajo.

Índice General

Índice de Figuras	vii
Índice de Tablas	ix
1 Introducción	1
1.1 Esquemas convencionales de FDI	2
1.2 Limitaciones de los esquemas convencionales de FDI	4
1.3 Arquitectura distribuida para FDI	6
2 Detección de fallas	10
2.1 Métodos básicos generales de detección de fallas	10
2.1.1 Detección de fallas con estimación de parámetros	11
2.1.2 Detección de fallas con estimación del estado y observadores	13
2.1.3 Detección de fallas con ecuaciones de paridad	14
2.2 Detección de fallas en sensores	15
2.2.1 Consideraciones de la validación de sensores	17
3 Sensor de oxígeno disuelto DO	20
3.1 Introducción	20
3.2 Modelo matemático	23
3.2.1 Modelo estático	23
3.2.2 Modelo dinámico	27
3.3 Estimación de la constante de tiempo	31
4 Propuesta de identificación de fallas	32
4.1 Introducción	32
4.2 Simulador del sensor y sistema de detección	37
4.3 Resultados	41
4.4 Implantación del sistema	48
5 Conclusiones	52
Bibliografía	54

A	Métodos de solución para ecuaciones de difusión	58
A.1	Introducción	58
A.2	Método de separación de variables	59

Índice de Figuras

1.1	Esquema o diagrama de flujo del monitoreo de procesos	3
1.2	Estructura del sistema de FDI	6
1.3	Comunicación entre los dispositivos y niveles superiores	7
2.1	Método de ecuaciones de paridad	14
2.2	Procedimiento de medición	15
2.3	Efectos de las entradas del sensor sobre las mediciones	16
2.4	Efectos de las fallas sobre la función de transferencia en el proceso de transformación	17
2.5	Modelo extendido del sensor analógico	19
3.1	Diagrama de una celda electroquímica	21
3.2	Sección transversal de un transductor de oxígeno con celda tipo Clark	22
3.3	Elementos básicos del proceso	23
3.4	Respuesta escalón del sensor de oxígeno disuelto COS4	27
3.5	Sección transversal del sensor tipo Clark Foxboro 871DO	31
4.1	Sección transversal de un sensor de DO con materia externa adherida a la membrana	33
4.2	Respuesta escalón del sensor de OD	34
4.3	Esquema de un reactor por lotes secuenciales	36
4.4	Circuito empleado en la validación del sensor de DO	36
4.5	Esquema general empleado en la simulación del sensor y sistema de detección	37
4.6	Esquema del generador de corriente	38
4.7	Señales del detector	39
4.8	Esquema representativo del bloque "Sumatoria"	40
4.9	Bloque "Estimador de TAU" del esquema general	40
4.10	Gráficas con una ventana de integración de tiempo $h_1 = 3 \text{ seg}$ y $h_2 = 2h_1$	42
4.11	Gráficas obtenidas al emplear una señal de entrada senoidal de $\omega = 0.01 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$	44
4.12	Estimado de la constante de tiempo con interrupción de polarización del cátodo de 180 segundos	46
4.13	Transitorio de $i(t)$ para diferentes valores del espesor b de la membrana	48
4.14	Diagrama de bloques del sistema	49
4.15	Diagrama de un interruptor analógico	49

4.16 Módulo acondicionador de la señal	50
--	----

Índice de Tablas

4.1	Resultados obtenidos a partir de una ventana de integración con $h_2 = 2h_1$	41
4.2	Resultados obtenidos al variar la frecuencia de la señal de entrada	43
4.3	Resultados obtenidos al variar la amplitud de la señal de entrada	45
4.4	Resultados generados al incrementar el tiempo de interrupción de la polarización del cátodo	46
4.5	Resultados obtenidos con una entrada escalón y al variar el espesor b de la membrana	47
4.6	Resultados obtenidos con una entrada senoidal y al variar el espesor b de la membrana	47

Resumen

Se presenta una plataforma para la detección de fallas en línea en la membrana de un sensor de oxígeno disuelto tipo celda de Clark. La técnica empleada explota las características dinámicas del hardware de los transductores y acondicionadores del sensor para extraer información adicional sobre la confiabilidad y validación de las mediciones que se realizan en tiempo real. Una falla común que afecta la exactitud de las mediciones del sensor de oxígeno disuelto es la acumulación de partículas externas adheridas a la superficie de su membrana (suciedad). Esta falla es atacada a través de un procedimiento de prueba basado en el modelo físico del proceso de difusión de la membrana del sensor. Se presentan los resultados alcanzados por simulación del sistema de detección.

Capítulo 1

Introducción

La medición juega un papel muy importante en todos los aspectos de la ingeniería, proporciona las bases necesarias para validar modelos y establecer criterios de control y monitoreo.

En los sistemas de tratamiento de aguas residuales los sensores son componentes clave en la obtención de mediciones e indispensables en el control y monitoreo de procesos ambientales. Sin el adecuado trabajo de los sensores, los sistemas de operación se ven limitados en la información relacionada al estado de la planta y por tanto, imposibilitados de responder con acciones de control necesarias, oportunas y eficientes que reajusten las operaciones del proceso. El sensor es simplemente un elemento en el control de lazo de un proceso y está en el nivel más bajo del sistema de monitoreo de la planta.

Es importante mencionar que el sensor está sujeto a niveles significantes de ruido extremo que continuamente modifican su señal de salida, motivo por el cual, los sensores en línea empleados en el proceso de tratamiento de aguas residuales, son comunmente referidos como las partes más inconsistentes del control [Olsson, 1999] y los componentes menos fiables en un sistema de monitoreo. Generalmente, los sistemas para el tratamiento de aguas residuales son no lineales con muchas perturbaciones que adicionalmente contribuyen a reducir el desempeño de un control.

Mucha atención se ha prestado a la teoría e implementación del control realimentado con la idea principal de que el sistema de control es capaz de compensar las limitaciones propias de la medición. Aún recientemente el único contacto entre el sensor y el sistema de control había sido el flujo unidireccional de la medición, hecho por el cual el sensor era considerado como un simple generador de señal cuya información es empleada en el sistema de control para monitorear, compensar o establecer alarmas de seguridad, sin alguna otra información

adicional que garantice la confiabilidad y validación de mediciones realizadas por el sensor.

Actualmente, el sensor ha logrado llamar la atención gracias a la demanda creciente por obtener un completo análisis de todos los aspectos de la operación del proceso. Existe un reconocimiento general de que la información obtenida de la medición de los sensores utilizada en línea, proporciona eficiencia y seguridad al sistema siempre que exista una técnica de detección e identificación de fallas *FDI* (por sus siglas en inglés *Fault Detection and Identification*) implantada también en línea. La idea básica es aprovechar toda información en línea disponible por el sensor, tanto las mediciones de las variables del proceso, como las señales que diagnostican su propio estado interno. Cuando estas señales de medición y diagnóstico son acopladas a un modelo aproximado del funcionamiento del sensor y del efecto de sus posibles fallas en el proceso de medición, entonces pueden ser detectadas estas fallas e indicar el lugar posible para su corrección.

1.1 Esquemas convencionales de FDI

Los controladores estándar de procesos son diseñados para mantener satisfactoriamente la operación de un proceso, al compensar los efectos producidos por perturbaciones y cambios sufridos en el mismo proceso. Dichos controladores tienen la capacidad de compensar varios tipos de perturbaciones pero, existen ciertos cambios en los procesos que no se pueden manejar adecuadamente. Estos cambios son conocidos con el nombre de fallas. Los tipos de fallas que ocurren en los sistemas industriales incluyen: cambios en los parámetros del proceso, cambios en los parámetros de perturbación, problemas en actuadores y sensores. Para asegurar que las operaciones del proceso satisfagan el rendimiento especificado, las fallas en el proceso requieren ser detectadas, diagnosticadas y corregidas. Estas tareas están asociadas a los procesos de monitoreo [Isermann, 1984].

Se cuenta con cuatro procedimientos asociados al monitoreo de procesos que son: detección de fallas, identificación de fallas, diagnóstico de fallas y restauración del proceso.

El procedimiento denominado detección de fallas está determinado por el momento en que ocurre una falla. La detección oportuna es acompañada de alarmas de emergencia que pueden ser de diferente tipo (sonoras, luminosas, etc.), las cuales se activan al presentarse una falla para prevenir al personal operativo de la planta y en algunas ocasiones, permiten reducir el riesgo de un daño severo en el proceso. La tarea del procedimiento de localización de fallas es precisamente identificar las variables de observación más relevantes que ayuden a diagnosticar la falla. El propósito de este procedimiento es enfocar la atención de los ope-



Figura 1.1: Esquema o diagrama de flujo del monitoreo de procesos

radores e ingenieros de la planta sobre los subsistemas pertinentes para el diagnóstico de la falla, de tal manera que el efecto de la falla pueda ser eliminado de una manera más eficiente. El diagnóstico de la falla se encuentra determinado por la causa de la falla al analizar la salida observada del estado del control. Isermann [Isermann, 1984] específicamente define el diagnóstico de la falla al determinar el tipo, localización, magnitud y tiempos de la falla. El procedimiento de diagnóstico de fallas es importante para neutralizar o eliminar con éxito la falla. El procedimiento de restauración del proceso, también llamado de intervención, tiene la tarea de eliminar los efectos de la falla y es el procedimiento que cierra el lazo en el esquema o diagrama de flujo que sigue el monitoreo de procesos, ver figura 1.1 Cada vez que una falla es detectada, los procedimientos de identificación de fallas, de diagnóstico de fallas y restauración del proceso son empleados en la secuencia respectiva; de otra manera, solamente el procedimiento de detección de fallas se repite.

Mientras que los cuatro procedimientos pueden ser implantados en un esquema de monitoreo de procesos, esto no siempre es necesario. Por ejemplo, una falla puede ser diagnosticada (por medio del procedimiento de diagnóstico de fallas), sin identificar inmediatamente las variables afectadas por dicha falla (identificación de fallas). Además, no es necesario automatizar los cuatro procedimientos, en muchos de los casos la automatización de alguno de ellos es suficiente. Por ejemplo, un procedimiento de identificación de fallas automatizado puede ser empleado para ayudar eficientemente a los operadores e ingenieros de la planta en el ciclo del esquema de monitoreo de procesos, sin la necesidad de automatizar todo el esquema.

Después de que una falla ocurre, las operaciones de control frecuentemente pueden ser restauradas por reconfiguración del proceso, reparación del proceso o resintonización de controladores. Sin embargo, elegir el recurso óptimo para neutralizar la falla, una vez que la falla ha sido diagnosticada apropiadamente, puede no ser tan obvio. Un recurso factible puede ser resintonizar los controladores estándar del proceso. Existen varios métodos que se

han desarrollado para evaluar el rendimiento de los controladores del proceso y estos pueden ser empleados para determinar cuales controladores del proceso necesitan ser resintonizados para restaurar satisfactoriamente el rendimiento. En el caso de problemas con sensores, la técnica de reconstrucción de sensores es comunmente aplicada al proceso para restaurar las operaciones en el control.

Ahora se puede decir que los sistemas de detección e identificación de fallas (FDI) son sistemas diseñados para la supervisión y monitoreo de procesos capaces de localizar e identificar fallas automáticamente. Los FDI emplean métodos que se sustentan bajo tres filosofías básicas, la identificación de parámetros afectados por las fallas [Isermann, 1984], la redundancia analítica existente en la evolución de la salida de un sistema dinámico [Frank, 1991], [Gertler, 1991] y la información del proceso vía un modelo del conocimiento [Singh, 1987].

Particularmente, los métodos de redundancia analítica aprovechan el conocimiento derivado del funcionamiento del proceso y de los modelos dinámicos internos en ellos, apoyados por herramientas de cómputo para facilitar el procesamiento de información, proporcionan mejor rendimiento y economía que los esquemas compuestos por múltiples equipos de instrumentación, es decir, redundancia de hardware [Gertler, 1998].

A pesar de la eficiencia mostrada por los métodos de redundancia analítica de los sistemas de detección e identificación de fallas en un proceso, es importante mencionar que aún no existe algún dispositivo o software de supervisión y monitoreo que sea considerado universal y pueda resolver todos los problemas de identificación y localización de fallas. Este hecho resalta la necesidad de analizar los diferentes tipos de fallas que se presentan en cada sistema compuesto por sensores, actuadores, controladores y procesos, con la finalidad de seleccionar adecuadamente las anomalías que se desean detectar, separando las perturbaciones o entradas del sistema que no se deban identificar. Por otro lado, existen procesos complejos en los que no se puede despreciar las herramientas ofrecidas por los métodos de supervisión y monitoreo de procesos, pues constituyen el soporte necesario y fundamental que sirven al operador en la toma de decisiones.

1.2 Limitaciones de los esquemas convencionales de FDI

Las desventajas que impiden tener acciones eficientes de las técnicas convencionales de FDI, en la gran mayoría, son originadas por el hecho de ignorar las mediciones de ciertos componentes del proceso que asumen ser de tipo reticente (que proporcionan poco o nada de información) y cuando los algoritmos de FDI son aplicados al sistema, éstos sólo emplean

las salidas del proceso como mediciones existentes. Entonces el distinguir entre una falla del proceso y un cambio auténtico en el comportamiento de un elemento del proceso, por ejemplo de un sensor, es frecuentemente muy difícil. Los algoritmos son útiles para detectar las grandes fallas pero tienden a ser insensibles en las fallas consideradas pequeñas.

Otras técnicas existentes cuentan con un modelo general de la planta (matemático o heurístico) que en muchos de los casos requieren de grandes esfuerzos para desarrollar y mantener tanto al modelo como al algoritmo de FDI, así que el esquema resultante es comunmente costoso, no es transportable y es muy elaborado para sistemas complicados. En el esquema completo de FDI las fallas del proceso, actuadores y sensores son modelados separadamente, sin embargo no puede considerarse que los diferentes componentes de la planta sean independientes sólo a través de sus fallas.

Los inconvenientes de los métodos basados en el conocimiento incluyen esfuerzos extra para generar la base de datos encargada de la detección de fallas y la eficiencia de los métodos se encuentra limitada por la calidad de información en la base de datos y el desempeño de los algoritmos con los que se procesa la información.

Es claro que una tarea fundamental de los sistemas de supervisión y monitoreo automáticos de procesos industriales es la detección y localización de fallas en los diferentes componentes de la planta. El marco teórico de referencia para los sistemas de diagnóstico de fallas en procesos, es presentado por la mayoría de los expertos de manera integrada considerando las fallas en sensores, actuadores y el proceso, ver [Patton, 2001]. Sin embargo, esta conceptualización tan general provoca en sistemas complejos resultados conservadores, sobre todo en la etapa del aislamiento de las fallas y en las condiciones de existencia de soluciones. Casos de referencia como el sistema hidráulico de tres tanques [Astrom, 2001] deben ser tomados como ejemplos académicos y no como procedimientos generales para atacar un problema de diagnóstico de fallas y control tolerante a fallas en aplicaciones industriales reales. Adicionalmente a esta problemática la comunidad de FDI ha reconocido que la robustificación de los sistemas de diagnóstico complejos se logra usando diferentes enfoques y metodologías en la parte de detección y aislamiento, dejando en un segundo plano la toma de decisiones [Koeppen, 2003].

Por otro lado, las tareas de calibración y compensación de los transductores en los sensores tienden a explotar las capacidades computacionales del hardware actual [Tortora, 2003]. Esta tendencia conlleva a la idea de diseñar sistemas de diagnóstico de fallas distribuidos de manera análoga al caso de los sistemas distribuidos de control. Este tipo de subsistemas

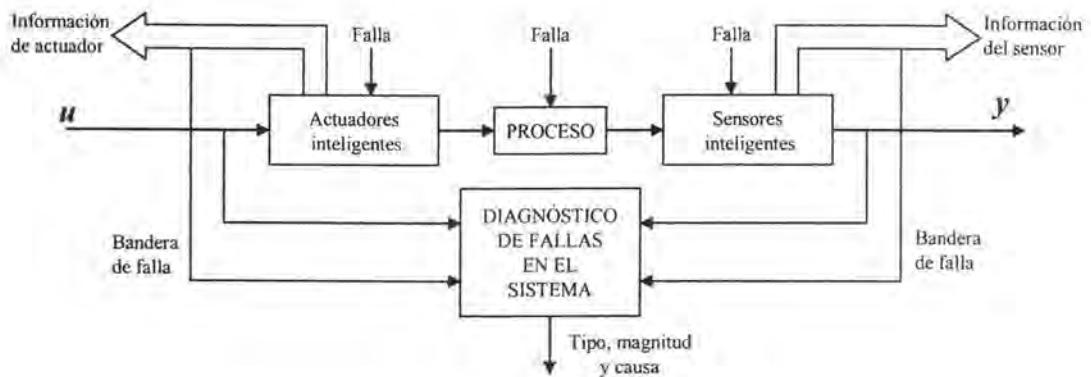


Figura 1.2: Estructura del sistema de FDI

autónomos permite involucrar funciones de diagnóstico independientes en donde se pueden adicionar datos a la medición y suministrar información sobre la confiabilidad y tendencias de la propia medición.

1.3 Arquitectura distribuida para FDI

En los años setenta los dispositivos electrónicos y sensores conectados a los procesos eran pasivos, sin embargo, a principio de los años 80's se inicio una evolución para hacerlos activos e inteligentes. La distinción de inteligente se debe a las funcionalidades que permite el procesamiento de datos a través de tecnología digital asociada a los dispositivos. La asignación de cierta inteligencia entre todos los componentes del sistema permite transformar los sistemas centralizados de supervisión en Sistemas Distribuidos Inteligentes. En [Panetto, 1993] y [Bayar, 1992] se proponen algunas funciones en los dispositivos de campo inteligentes.

Este tipo de sistemas de monitoreo y supervisión llegan a incluir tareas de reconfiguración de un proceso y son fuertemente demandados en aplicaciones industriales. Específicamente el presente trabajo forma parte de un proyecto que se enfoca en las funciones de monitoreo de fallas y que propone desarrollar un sistema distribuido de diagnóstico con indicadores de desempeño de los sensores y actuadores de un proceso, como el mostrado en la figura 1.2. En dicha figura 1.2 se incluye información sobre la confiabilidad de las mediciones y de las acciones de control.

En esta arquitectura, las fallas del proceso son tratadas de manera independiente en otro

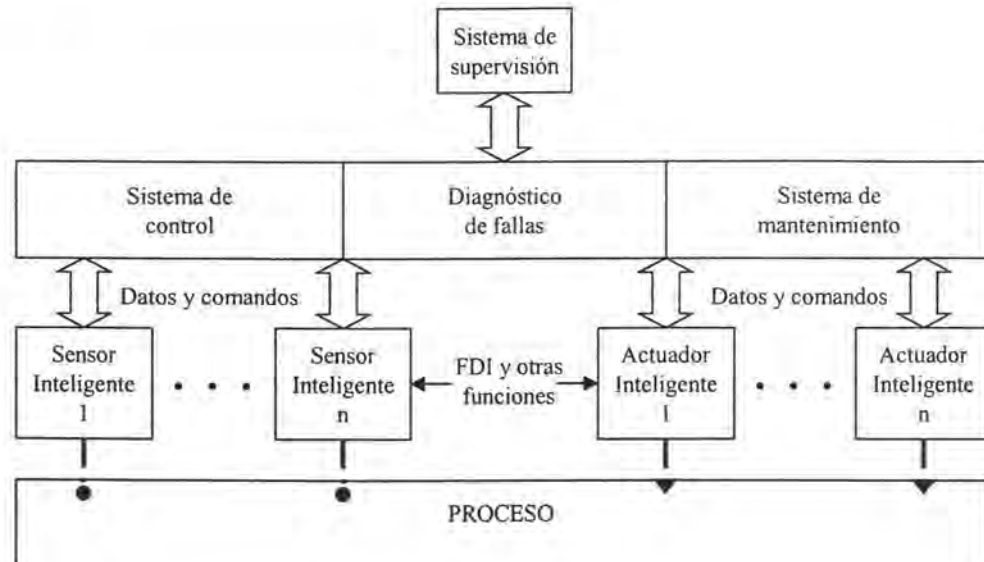


Figura 1.3: Comunicación entre los dispositivos y niveles superiores

nivel, es decir, una falla en el proceso es detectada usando información del proceso junto con los reportes individuales de las funciones de FDI en los sensores y actuadores.

Con este esquema si bien es cierto que requiere de un gran esfuerzo inicial para el diseño de cada subsistema de evaluación y supervisión, esto se compensa con los beneficios obtenidos en cuanto a modularidad, transportabilidad e intercambio de información con otros niveles jerárquicos en la estructura de control del proceso, ver figura 1.3.

Por lo que respecta al indicador de fallas en los sensores se tienen tres niveles:

- Borroso (*Fuzzy*): significa que el comportamiento es anormal pero está dentro de los límites razonables (ruido y forma).
- Confuso (*Confuse*): significa que hay evidencias de un comportamiento anormal, pero la duración de la condición es pequeña para diagnosticar una falla permanente.
- Ciego (*Blind*): significa que la señal no tiene relación con los valores esperados y este efecto se mantiene a lo largo del tiempo.

La información adicional que suministran los sensores permite no solo localizar fallas, sino ayudar a quien toma las decisiones en la reconfiguración o suspensión parcial de un proceso.

La falta de un procedimiento incluido en los transductores de los sensores que proporcione información adicional sobre la confiabilidad y validación de las mediciones, y la insuficiente redundancia con la que se cuenta muchas veces para detectar y aislar fallas en los sensores de un proceso, son hechos que motivaron la idea de explotar el hardware de los transductores y aumentar sus capacidades para mejorar las tareas de detección de fallas en los sensores. Así se propone en este trabajo dotar a los transductores de los sensores de oxígeno disuelto con capacidades individuales para el suministro de información sobre la confiabilidad de las mediciones en tiempo real.

En particular, se presenta una plataforma para la detección de fallas en la membrana de un medidor de oxígeno disuelto tipo celda de Clark, en donde de manera periódica se verifican las características dinámicas de la membrana, la cual depende de su espesor, la constante de difusión y la temperatura. La propuesta se enfoca en una falla muy común del sensor de oxígeno disuelto provocada por partículas externas que se adhieren a la superficie de la membrana. El problema es atacado por medio de un procedimiento de prueba basado en el modelo físico del proceso de difusión de la membrana del sensor. Las pruebas y resultados del sistema de detección alcanzados en este trabajo son obtenidos por simulación. A continuación se describe de manera general la organización del trabajo:

- El capítulo dos trata la importancia de un procedimiento de medición para el registro de los valores reales de un proceso, los factores que afectan las mediciones y las consecuencias de lecturas erróneas obtenidas en una condición de falla, las cuales inciden directamente en el funcionamiento del propio sistema y en perjuicio del proceso. Se retoma el tema de la necesidad de validar las lecturas efectuadas por los sensores de oxígeno disuelto y se hacen algunas observaciones sobre ciertas consideraciones y técnicas reportadas en la bibliografía sobre la validación de sensores.
- El proceso de difusión que se desarrolla en la celda del sensor de oxígeno disuelto y su modelo matemático son presentados en el capítulo tres. También, se exponen algunas técnicas de identificación utilizadas para estimar la constante de tiempo de difusión y la relación que este parámetro tiene con el espesor b de la membrana del sensor de oxígeno disuelto y su constante de difusión D_m .
- El capítulo cuatro presenta el desarrollo de la propuesta de este trabajo. Sugiere una alternativa a la problemática de conseguir aumentar la información proporcionada por el sensor a través de la medición que este dispositivo realiza, con la finalidad de diagnosticar en línea el estado físico de su membrana. Se muestran los resultados logrados por simulación empleando como entradas del sistema, señales tipo escalón y

senoidal. Se plantea una propuesta de la implementación del sistema como trabajo subsecuente al presente.

- Finalmente en el capítulo cinco, se describen las conclusiones obtenidas del desarrollo y análisis de resultados del proyecto.

Capítulo 2

Detección de fallas

2.1 Métodos básicos generales de detección de fallas

Existen diferentes técnicas de detección de fallas desarrolladas en los últimos años, de las cuales destacan aquellos métodos que emplean en su procedimiento de detección, modelos matemáticos del proceso. Estos métodos son basados en la estimación de parámetros, estimación del estado y ecuaciones de paridad.

La meta es detectar fallas en el proceso empleando la dependencia existente entre las diferentes señales que pueden ser medidas. Esta relación de dependencia es expresada en los modelos matemáticos del proceso. A partir de comparar las características estimadas con las características nominales del proceso, se detectan los cambios ocurridos y se relacionan con un síntoma analítico.

Estos métodos basados en el modelo son aplicables a procesos que presentan una configuración SISO (una entrada, una salida), SIMO (una entrada, múltiples salidas) ó MIMO (múltiples entradas y salidas).

Las fallas son clasificadas en función del tiempo y con respecto al modelo del proceso. Para la primer clasificación se distinguen tres tipos de fallas: abruptas, incipientes o intermitentes. Y para el segundo caso, los tipos de falla posible son:

- Aditivas: la falla se suma a una variable de entrada o salida del proceso
- Multiplicativas: la falla se multiplica con una variable de entrada al proceso

Comunmente las fallas aditivas se presentan en forma de ganancias sumadas a las señales de entrada o salida del proceso, mientras que las fallas multiplicativas se presentan como

cambios en los parámetros del proceso.

2.1.1 Detección de fallas con estimación de parámetros

El método de estimación de parámetros es utilizado cuando los parámetros del proceso cambian a consecuencia de una falla. Se basa en la medición de señales de entrada y salida del proceso, y en la estructura básica del modelo. Emplea la estrategia del cálculo del error a través de dos posibles procedimientos: el método de la ecuación del error y el método del error de salida [Isermann, 1984]

El primer método considera que el modelo del proceso puede describirse en forma de vector

$$y(t) = \Psi^T(t)\Theta \quad (2.1)$$

donde

$$\Theta^T = [a_1 \dots a_n \quad b_0 \dots b_m] \quad (2.2)$$

es el vector de parámetros a identificar, y

$$\Psi^T(t) = \left[-y^{(1)}(t) \dots -y^{(n)}(t) \quad u(t) \dots u^{(m)}(t) \right] \quad (2.3)$$

es una función de las entradas, salidas y sus derivadas. Para la estimación de los parámetros se introduce la ecuación de error

$$e(t) = y(t) - \Psi^T(t)\Theta \quad (2.4)$$

En el caso específico de que el sistema 2.1 este representado por su correspondiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (2.5)$$

se puede emplear la siguiente ecuación del error

$$e(s) = \widehat{B}(s)u(s) - \widehat{A}(s)y(s) \quad (2.6)$$

Entonces, a partir de las señales de entrada y salida, y la ecuación del error que involucra un tiempo de muestreo discreto

$$k = \frac{t}{T_0} = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

y un valor relativamente pequeño en T_0 para minimizar el tiempo de muestreo en la función de pérdidas

$$V = \sum_{k=1}^N e^2(k) = e^T e \quad (2.8)$$

$$\frac{dV}{d\Theta} = 0$$

se procede a la estimación de parámetros empleando un algoritmo de mínimos cuadrados

$$\widehat{\Theta}(N) = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T y \quad (2.9)$$

o mínimos cuadrados recursivo

$$\widehat{\Theta}(k+1) = \widehat{\Theta}(k) + \gamma(k) [y(k+1) - \Psi^T(k+1) \widehat{\Theta}(k)] \quad (2.10)$$

$$\gamma(k) = \frac{1}{\Psi^T(k+1) P(k) \Psi(k+1) + 1} P(k) \Psi(k+1)$$

$$P(k+1) = [I - \gamma(k) \Psi^T(k+1)] P(k)$$

Para mejorar los resultados numéricos esta técnica requiere del empleo de algoritmos para filtros de raíz cuadrada. Por otra parte, para obtener las derivadas de las señales en el vector de datos $\Psi^T(k)$, se requiere emplear algoritmos para filtros de variables de estado.

La segunda alternativa en la estimación de parámetros es el método del error de salida. Para la estimación de los parámetros esta técnica emplea el error obtenido al comparar las señales de salida correspondientes al proceso físico y al modelo matemático

$$e'(t) = y(t) - y_M(\widehat{\Theta}, t) \quad (2.11)$$

donde para el caso de un sistema lineal

$$y_M(\widehat{\Theta}, s) = \frac{\widehat{B}(s)}{\widehat{A}(s)} u(s) \quad (2.12)$$

es el modelo de salida del proceso.

No es posible calcular directamente la estimación de los parámetros Θ , debido a que el error de salida $e'(t)$ puede ser no lineal en los parámetros, por lo que la función de pérdidas (ecuación 2.8) se minimiza por métodos de optimización numérica. Además, se requiere de un gran esfuerzo computacional y su aplicación en línea en tiempo real no siempre es sencillo [Isermann, 1984].

2.1.2 Detección de fallas con estimación del estado y observadores

Este método, al igual que la mayoría de los métodos de detección basados en el modelo, es apropiado para procesos multivariantes. A partir de la representación en el espacio de estados de un proceso lineal dado

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) + E_f \quad (2.13)$$

$$y(t) = C\bar{x}(t) \quad (2.14)$$

asume que todos los parámetros del proceso son conocidos, hecho que restringe ampliamente el método de detección.

Básicamente, esta técnica consiste en emplear un observador del estado para reconstruir las variables del estado basado en las mediciones de las señales de entrada y salida

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + He(t) \quad (2.15)$$

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (2.16)$$

donde $e(t)$ es el error de salida. Se obtiene la estimación del error del estado considerando las ecuaciones 2.13 y 2.15 de donde

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{\bar{x}}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= [A - HC]\tilde{x}(t) + E_f \end{aligned} \quad (2.17)$$

El error del estado se desvanece asintóticamente si el observador es estable, lo cual se logra con un diseño apropiado del observador de retroalimentación H . Ahora si el proceso es influenciado por fallas aditivas, la estimación del error del estado se desviará de cero debido a la diferencia en las características dinámicas de $\bar{x}(t)$ y $e(t)$ con dichas fallas. Además la acción del método se ve limitada ante problemas de estabilidad y sensibilidad ocasionados por la existencia de perturbaciones no medibles en el proceso.

Por otro lado, se debe considerar que los posibles cambios a ocurrir en el estado $\bar{x}(t)$ y en el error estimado $e(t)$, dependen de cambios ocasionados en los parámetros, en la entrada y en la variable de estado. Por lo que cuando el proceso es perturbado por fallas multiplicativas (ΔA , ΔB , ΔC), el detectar que produjo los cambios en los parámetros sobre el estado $\bar{x}(t)$ a partir del error estimado $e(t)$ no es una tarea simple de resolver [Isermann, 1984].

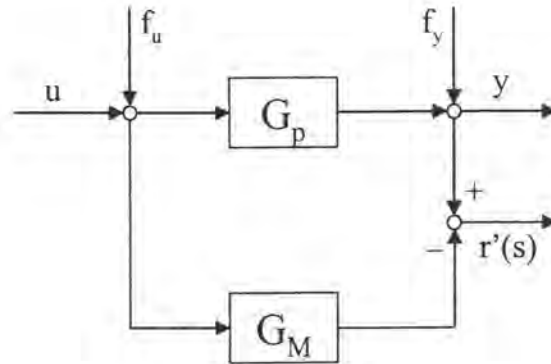


Figura 2.1: Método de ecuaciones de paridad

2.1.3 Detección de fallas con ecuaciones de paridad

A través de la representación del proceso en su función de transferencia, el método propone la ejecución en paralelo del modelo G_M y el proceso mismo G_p como se muestra en la figura 2.1.

Así $r'(s) = (G_p(s) - G_M(s))u(s)$ si no existen fallas (f_u y f_y), y si $G_p(s) = G_M(s)$ el residuo resultante será cero. En condición de falla el residuo se puede expresar como

$$r'(s) = G_p(s)f_u(s) + f_y(s) \quad (2.18)$$

considerando $G_p = G_M$, donde $f_u(s)$, $f_y(s)$ son fallas aditivas a la entrada y salida del proceso, respectivamente. Otra opción para evaluar el residuo es usar

$$\begin{aligned} r(s) &= A_M(s)y(s) - B_M(s)u(s) \\ &= B_p(s)f_u(s) + A_p(s)f_y(s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

en donde A_M , B_M corresponden al polinomio del denominador y numerador, respectivamente, en la función de transferencia del modelo del proceso. De forma similar A_p , B_p representan los polinomios de parámetros en el proceso.

Se debe hacer notar que $r'(s)$ corresponde al error de salida de la estimación de parámetros en la ecuación 2.12 y $r(s)$ a la ecuación de error 2.6. Las ecuaciones 2.18 y 2.19 son los residuales generados y son llamadas ecuaciones de paridad [Gertler, 1991].

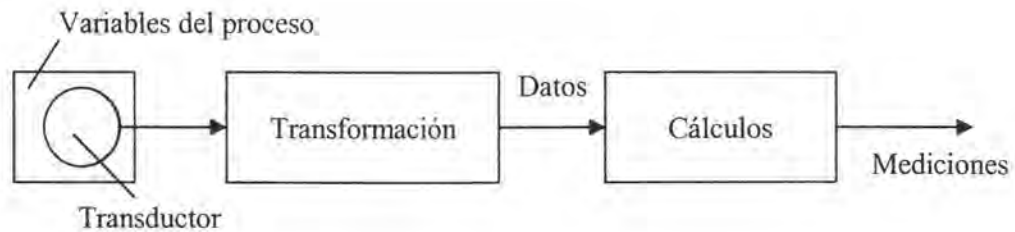


Figura 2.2: Procedimiento de medición

Para procesos SISO solamente un residual puede ser generado y no es sencillo distinguir entre las diferentes fallas. Existe mayor libertad en el diseño de las ecuaciones de paridad cuando es posible medir las señales de entrada, salida y algunas señales intermedias en un proceso SISO, o incluso en un proceso MIMO.

Al igual que en el método anterior, la acción de esta técnica de detección de fallas aditivas se restringe al requerir que los parámetros del modelo del proceso sean conocidos.

2.2 Detección de fallas en sensores

En el capítulo uno se mencionó que la eficiencia de las acciones tomadas por un sistema de supervisión y monitoreo sobre un proceso, está directamente relacionada a las estrategias empleadas por el sistema en la obtención de mediciones, las cuales siempre deben ser lo más reales y confiables posibles.

El objetivo de cualquier procedimiento de medición es registrar el valor real de las variables de un proceso físico (figura 2.2). Sin embargo, se tiene que considerar la existencia de factores que afectan las mediciones y en consecuencia el funcionamiento de los propios componentes del sistema. El sensor es el componente del sistema en el que se enfoca el presente trabajo.

La transformación del valor de las variables del proceso en datos o mediciones, es afectada por la relación funcional entre señales y puede ser modelada por ecuaciones matemáticas (generalmente ecuaciones diferenciales). Si se trata de señales estáticas, el problema se reduce al manejo de simples ganancias o tal vez en alguna forma funcional dada, pero los instrumentos de medición responden a señales dinámicas que necesitan ser descritas por funciones de transferencia. Adicionalmente, el sensor es afectado por perturbaciones y rui-

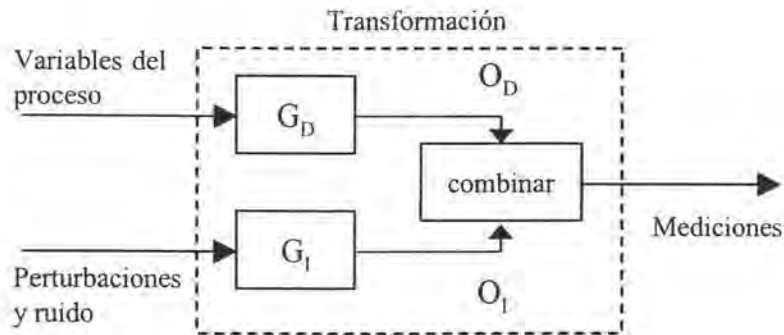


Figura 2.3: Efectos de las entradas del sensor sobre las mediciones

dos a los cuales los instrumentos con que se obtienen las mediciones también son sensibles. En conclusión, la medición obtenida del sensor es el efecto combinado del valor de las variables del proceso, las perturbaciones y ruidos. Esto puede ser representado por la figura 2.3, donde G_D y G_I representan la dinámica de la función de transferencia que relaciona las mediciones con las variables del proceso y las perturbaciones respectivamente.

Uno de los objetivos en el diseño del sensor es eliminar o atenuar la componente de la señal referida a las perturbaciones y ruidos tan rápido como sea posible. Esto se logra sólo si se puede anular G_I en el sensor o usando sensores auxiliares para medir el efecto de las perturbaciones y el ruido, y después compensar las mediciones. Se debe hacer notar que la eliminación de los efectos de las perturbaciones y el ruido no puede ser perfecta.

La presencia de condiciones o eventos anormales en el sensor son también factores que pueden tener gran impacto sobre la medición, por ejemplo:

- Condiciones en el hardware del sensor que pueden causar cambios en las matrices de transferencia G_D y G_I .
- Condiciones en la parte interna o externa del sensor que pueden causar cambios en la salida del propio sensor.

Estos efectos pueden ser modelados y representados por los términos G_{FD} , G_{FI} y G_F en la función de transferencia observada en la figura 2.4, en la cual las trayectorias de las señales están habilitadas o deshabilitadas dependiendo del efecto de la condición de falla. Las señales correspondientes a G_D y G_I son habilitadas en ausencia de fallas, por lo que las mediciones son la combinación de las variables del proceso y las perturbaciones inherentes a él. Por otra parte, las señales que corresponden a G_{FD} , G_{FI} y G_F serán habilitadas sólo en

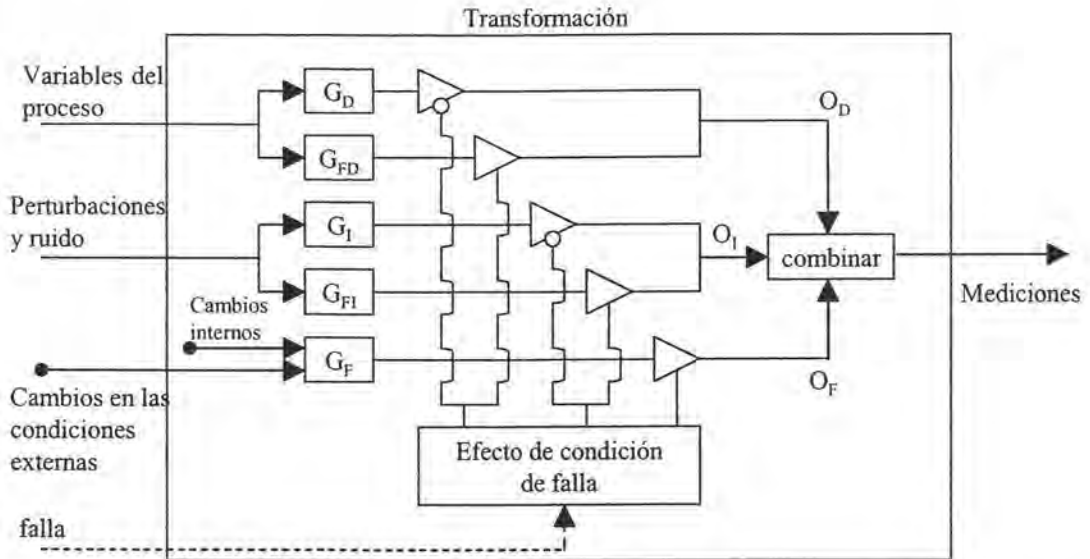


Figura 2.4: Efectos de las fallas sobre la función de transferencia en el proceso de transformación

condición de falla y las mediciones obtenidas en esta situación resultarán de la combinación de los efectos de las fallas.

Otras situaciones que pueden causar una degradación en el rendimiento del sensor son:

- Condiciones donde el sensor es forzado a trabajar fuera de sus especificaciones (por ejemplo, exceder los límites nominales de medición).
- Condiciones donde existe una agravación de los efectos de alguna influencia variable (por ejemplo ruido excesivo).
- Condiciones que pueden afectar al sensor en el futuro (fallas incipientes).
- Condiciones donde el sensor no está en contacto apropiado con la variable del proceso pretendida (instalación inadecuada).

2.2.1 Consideraciones de la validación de sensores

La validación de sensores implica tomar acciones convenientes para obtener las mejores mediciones posibles y la valoración de su calidad.

A partir del concepto de la validación de sensores, se ha propuesto que la auto-validación de sensores sea considerada como una fuente de información y que su funcionalidad incluya las siguientes características [Henry, 1991]:

- a. Capacidad de auto-diagnóstico: poder de procesamiento interno y conocimiento específico del dispositivo para que las funciones de detección de fallas y diagnóstico puedan ser construidas dentro del sensor, de tal manera que las lecturas del sensor puedan ser verificadas.
- b. Generar mediciones de la más alta calidad posible: el sensor hace uso de toda la información disponible para generar el mejor estimado de las mediciones aún después de detectar alguna falla en el sensor. La presencia de una falla no necesariamente imposibilita la capacidad de medición del sensor completamente, es decir, aún en condición de falla el sensor puede ser capaz de proporcionar información útil. Por tanto el sensor debe de corregir los efectos ocasionados por los defectos inherentes del sensor y las perturbaciones, e intentar calcular las consecuencias de cualquier falla del sensor sobre las mediciones. De ser posible las mediciones deben ser compensadas adecuadamente, de otra manera, tienen que ser estimadas a partir de toda la información disponible en el dispositivo (por ejemplo, historial de lecturas del sensor). El sensor debe trabajar a su capacidad total para generar mediciones útiles e información válida en todo momento así como maximizar la disponibilidad del dispositivo.
- c. Proporcionar información actualizada sobre las características de las mediciones. La calidad de las mediciones es afectada por la tecnología del sensor y las condiciones del sensor en el momento de efectuar las mediciones. Idealmente se debe llevar a cabo una evaluación en línea de la exactitud de las mediciones tomando en cuenta todos los factores que las afectan. Adicionalmente, los operadores de la planta e ingenieros de mantenimiento necesitan conocer las condiciones del sensor y las circunstancias aparentemente "normales" de cuando las mediciones fueron obtenidas con la finalidad de tomar acciones adecuadas. Esta información es parcialmente proporcionada por sensores inteligentes al transmitir un código de error que señala la presencia de una falla en particular, pero idealmente esto debería ser una medida estandarizada para que los mensajes generados por los dispositivos de diferentes fabricantes sean compatibles.

Los sistemas con sensores necesitan proporcionar al usuario datos claros y comprensibles que permitan al operador analizar la situación oportunamente para tomar las acciones requeridas. Actualmente, no existen protocolos estándar universalmente aceptados para la comunicación digital entre el sistema de control y los dispositivos de medición, así que el

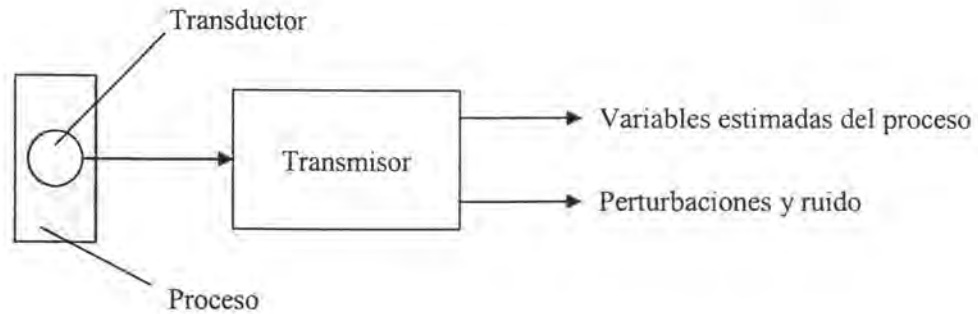


Figura 2.5: Modelo extendido del sensor analógico

diseño e implantación de sistemas de monitoreo están aún dependientes del software y hardware individualmente. Mientras que la información extra proporcionada por el sensor es útil para los sistemas de control y monitoreo, la falta de una interfaz estándar entre los sensores y el controlador, ocasiona que un gran número de ventajas ofrecidas por los sensores inteligentes se pierdan debido a la incompatibilidad. Por tanto, existe una clara necesidad de una interfaz específicamente estándar con tipos de datos bien definidos para presentar la información sobre la calidad de las mediciones y las condiciones del sensor al controlador.

Por otra parte, una condición que puede afectar seriamente la calidad de una medición es la presencia de fallas en el sensor (ver figura 2.5). La falta de un procedimiento interno significa que los sensores convencionales son incapaces de poder detectar sus propias fallas, por lo que después de iniciada una condición de falla, la medición transmitida es incorrecta y probablemente declarada fuera del límite de error. Por tanto, es importante que cualquier condición de falla en el sensor sea detectada inmediatamente con el objetivo de mantener la credibilidad en las mediciones del proceso. Es tarea de la detección de fallas distinguir entre las fallas del sensor y los legítimos cambios en las mediciones de las señales del proceso.

Capítulo 3

Sensor de oxígeno disuelto DO

3.1 Introducción

Los sensores de oxígeno disuelto *DO* (por su siglas en inglés *dissolved oxygen*) son frecuentemente usados en aplicaciones de monitoreo industrial, ambiental y procesos biológicos, particularmente con la finalidad de indicar los niveles de oxígeno disuelto contenidos en el agua. La concentración de oxígeno disuelto *DO* es una medida de la capacidad para mantener vivos a microorganismos en un líquido (normalmente agua). Se debe considerar que la solubilidad de oxígeno en el agua decrece al incrementar la temperatura y que casi todo tipo de desechos consumen oxígeno.

El oxígeno disuelto es normalmente medido usando una celda electroquímica, la cual consta de dos electrodos del mismo o diferente metal, sumergidos en el mismo o diferente electrolito (solución conductora), ver figura 3.1. Cada compartimiento utilizado por un electrodo es la mitad de la celda. Los electrodos son conectados a dispositivos electrónicos, los cuales pueden intercambiar energía eléctrica con la celda. La energía eléctrica intercambiada entre la celda y el dispositivo, es liberada o consumida por reacciones que involucran transferencia de carga en los electrodos. Las moléculas de oxígeno que penetran a la celda son atraídas por la carga positiva del cátodo, lugar donde son ionizadas en un proceso químico llamado de reducción ocasionando una deficiencia de electrones en este electrodo. Para equilibrar la carga neta de los electrodos, se produce en el ánodo una reacción química denominada de oxidación, la cual origina un flujo de electrones que parten de este electrodo hacia el cátodo. Los electrones libres generalmente no existen en el electrolito y la electricidad generada es transportada a través de la celda por migración de iones.

Existen dos tipos de celdas electroquímicas: las galvánicas (o voltaicas) y electrolíticas. Una

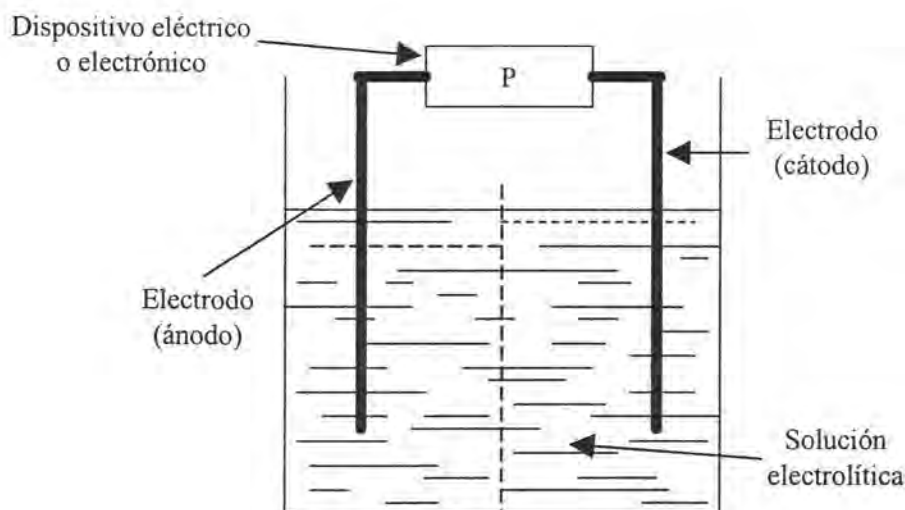


Figura 3.1: Diagrama de una celda electroquímica

celda galvánica consta de dos electrodos y una o más soluciones (dos medias celdas). En esta celda, una reacción química involucra una oxidación en un electrodo y una reducción ocurre en el otro electrodo. Una celda electrolítica es aquella en que la energía eléctrica es proporcionada por una fuente externa y la corriente es forzada a fluir a través de la celda.

El tipo de sensor comunmente usado para investigaciones biológicas y ambientales, está basado en la celda tipo Clark [Clark, 1959], la cual es una celda electroquímica del tipo electrolítica que genera una corriente eléctrica por métodos químicos permitiendo el intercambio de electrones de las moléculas e iones en una solución. La figura 3.2 muestra un típico sensor DOx tipo Clark. La celda está compuesta por tres elementos básicos:

- El electrolito, es la solución que contiene las moléculas e iones para producir la corriente.
- El cátodo, es el electrodo que proporciona los electrones a las especies ionizadas en el proceso llamado de reducción.
- El ánodo, es el electrodo que remueve los electrones de los iones en el electrolito en un proceso llamado de oxidación.

En su forma más básica, como se muestra en la figura 3.2, la celda tipo Clark tiene un electrodo de medición de oro (cátodo) y un electrodo auxiliar de plata (ánodo) sumergidos en una solución electrolítica de cloruro de potasio y una membrana de polipropileno o teflón.

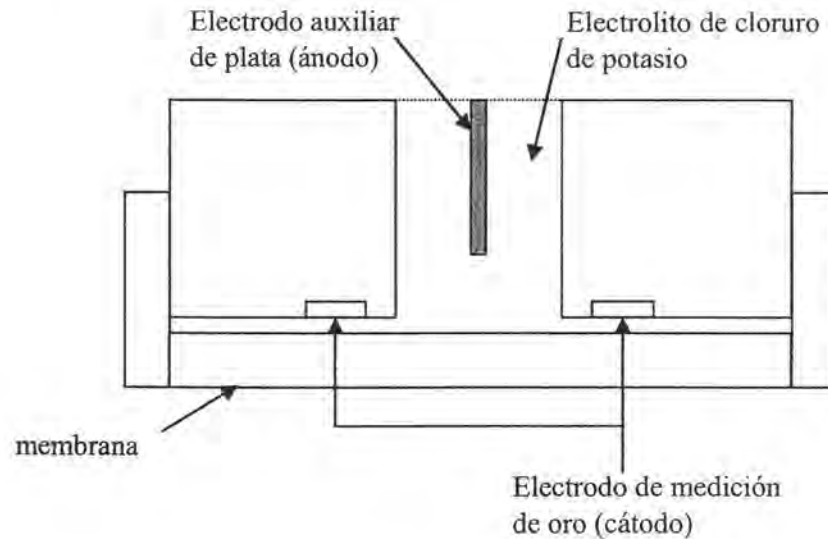


Figura 3.2: Sección transversal de un transductor de oxígeno con celda tipo Clark

La diferencia de potencial entre electrodos es aproximadamente de 0.7 volts.

En el cátodo es donde se puede medir la corriente generada por la cantidad de oxígeno disuelto en el agua. También es el electrodo donde se presenta la siguiente reacción química llamada de reducción:



El ion de OH^- combinado con un ion de K^+ forma KOH y el ion negativo de Cl^- se difunde hacia el ánodo donde los electrones nuevamente son liberados vía la producción de cloruro de plata dando lugar a la siguiente reacción química denominada de oxidación:



La membrana de teflón semipermeable tiene la función de separar la muestra de agua del electrolito y al mismo tiempo permitir únicamente el paso a las moléculas de oxígeno disuelto contenidas en el agua. Además, impide el paso a impurezas hacia el interior de la celda y evita la salida de la solución electrolítica.

Se debe considerar que las reacciones electroquímicas conducen a la formación de productos de deshecho, KOH en el electrolito y $AgCl$ en el ánodo, motivo por el cual es necesario

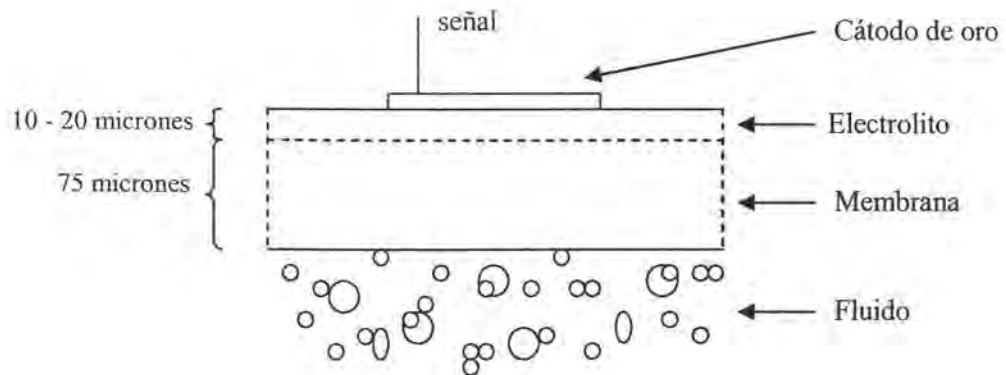


Figura 3.3: Elementos básicos del proceso

limpiar y cambiar la sustancia electrolítica al sensor periódicamente.

Como la capa de electrolito que cubre al cátodo es mucho más delgada que la capa de la membrana (aproximadamente de 10 a 20 μm , ver figura 3.3), entonces las moléculas de oxígeno difundidas a través de la membrana llegan rápidamente al cátodo, lo que indica que la respuesta dinámica del sensor está determinada por el proceso mismo de difusión de la membrana. Sin embargo, el proceso de difusión de la membrana es seriamente afectado por suciedad, considerando que aún en condiciones óptimas de limpieza, la velocidad de la respuesta es bastante lenta.

La sensibilidad de un sensor de oxígeno basado en la difusión de la membrana, está limitada por la propia membrana. Así que para una membrana dada a una temperatura constante, el flujo de corriente en el cátodo es proporcional a la presión parcial de oxígeno disuelto contenido en el agua que pasa a través de la membrana [Clarke, 1996].

3.2 Modelo matemático

3.2.1 Modelo estático

Para un medidor de oxígeno que emplea una celda de tipo Clark, la relación existente entre la corriente y el nivel de oxígeno disuelto DO se deriva vía la Ley de Faraday. La carga total Q de especies electroquímicas electrolizadas en un electrodo después de un intervalo de tiempo T , está dada por

$$Q = \int_0^T i dt = mnF \quad (3.3)$$

donde:

- m es la cantidad de moles de oxígeno (1 mole = 16 grs).
- n es el número de electrones requeridos para electrolizar una molécula de oxígeno, es decir que n es el número de electrones liberados por molécula de oxígeno.
- F es la constante de Faraday (96512 Coulombs mol⁻¹ [O₂]).

La cantidad de flujo de corriente en el cátodo del sensor está determinado por el proceso de difusión de la membrana. En estado permanente, la corriente es proporcional a la razón total de oxígeno disuelto que pasa por la membrana y se expresa como

$$i = nF \frac{dm}{dt} \quad (3.4)$$

Por otro lado, la razón de flujo de masa $\frac{dm}{dt}$ se encuentra determinada por la Primer Ley de Fick de Difusión que relaciona el flujo molar $\frac{1}{A} \frac{dm}{dt}$ con el gradiente de concentración de oxígeno $\frac{dC}{dy}$ y la difusividad D_m así que se tiene

$$J = D_m \frac{dC}{dy} = \frac{1}{A} \frac{dm}{dt} \quad (3.5)$$

donde:

- A es la área del electrodo.
- J es la densidad de flujo molar de oxígeno en la superficie del electrodo.
- D_m es el coeficiente de difusión de la membrana.

Entonces la ecuación 3.4 se puede también expresar como

$$i = nAFJ \quad (3.6)$$

Normalmente el nivel de oxígeno disuelto DO se mide en presión parcial p_{O_2} (atmósferas) o concentración (partes por millón o $mg\ l^{-1}$ [O₂]), unidades que son intercambiables vía la Ley de Henry $[O_2] = H_m p_{O_2}$.

Si se asume que la difusión del flujo de oxígeno disuelto a través de la membrana es total, entonces el flujo de salida J de la membrana está dado por la primer Ley de Fick. Empleando el intercambio de unidades vía la Ley de Henry, la expresión 3.5 se puede escribir como

$$J = D_m H_m \frac{\partial p_{O_2}}{\partial y} \quad (3.7)$$

donde:

H_m es el coeficiente de la ley de Henry del material de la membrana
 p_{o_2} es la presión parcial de oxígeno disuelto

En la mayoría de las celdas tipo Clark, el flujo molar de oxígeno J en la superficie del electrodo depende de todo flujo a través de la membrana, por lo cual es necesario al menos un modelo de dos dimensiones para analizar el proceso. Si se considera que el proceso está determinado por la difusión en una dimensión, entonces todo flujo a través de la membrana es concentrado en el electrodo (debido a que la abertura entre el electrodo y la membrana es solamente 1% del radio del cátodo). Por lo anterior, se puede asumir que el flujo de salida de la membrana es uniforme y alcanza al electrodo (cátodo) instantáneamente.

Entonces al considerar la difusión de oxígeno disuelto a través de la membrana de grosor b , la presión parcial es nula en el interior de la celda al consumirse casi de manera instantánea las moléculas de oxígeno que llegan a los electrodos, definiéndose así, las siguientes condiciones de frontera

$$p(0) = p_e = 0 \quad (3.8)$$

Las condiciones iniciales son determinadas por las presiones parciales en la frontera

$$p(b) = p_w \quad (3.9)$$

(las presiones parciales son continuas a través de la frontera). Como la pendiente de la curva de la presión parcial a través de la membrana es constante, entonces

$$\frac{\partial p_{o_2}}{\partial y} = \frac{p_w}{b} \quad (3.10)$$

Y la expresión para medir la corriente se reduce a

$$i = nFAD_m \frac{dC}{dy} \Big|_{y=0} \quad (3.11)$$

En una celda tipo Clark el espesor a del electrolito se considera despreciable por ser muy delgado comparado con el grosor b de la membrana. Este hecho sumado con la difusividad substancial de la membrana, significa que aproximadamente el 99 % del oxígeno consumido entre la superficie del electrodo y el lado externo de la membrana ocurre a través de la propia membrana. Entonces el gradiente de concentración puede ser aproximada por

$$\frac{dC}{dy} = \frac{[O_2]}{b} \quad (3.12)$$

Al considerar las expresiones 3.10, 3.11 y 3.12, la corriente en estado permanente se reduce a

$$i_{ss} = \frac{nAFD_m H_m p_w}{b} = \frac{nAFD_m H_m}{bH_w} [O_2]_w \quad (3.13)$$

Donde los subíndices m, w se refieren a la membrana y al fluido externo (para este trabajo en particular el sensor normalmente se encontrará sumergido en agua) respectivamente. La ecuación 3.13 muestra que la corriente i_{ss} , está linealmente relacionada a las *ppm* (partes por millón) de oxígeno disuelto en el fluido y que en particular la constante de proporcionalidad depende de la difusividad D_m y del grosor b de la membrana.

Por tanto, la expresión 3.13 se puede escribir como

$$[O_2] = \frac{b}{nFAkD_m} i_{ss} = G_0 G(T) i_{ss} \quad (3.14)$$

donde $k = \frac{H_m}{H_w}$, siendo H_m, H_w las constantes de proporción de la ley de Henry para la membrana y el fluido respectivamente. $G(T)$ refleja las desviaciones de temperatura con respecto a la temperatura usada al calibrar el sensor. Se considera que $G(T)$ tiene la forma de una relación Van T'Hoff-Arrhenius [Krevelen, 1972], dada por

$$G(T) = \exp\left(\frac{E}{RT}\right) \quad (3.15)$$

y G_0 es la constante de calibración definida como

$$G_0 = \frac{[O_2]_0}{i_{ss0} G(T_0)} \quad (3.16)$$

donde $[O_2]_0, i_{ss0}$ y $G(T_0)$ son obtenidos en el momento de la calibración del sensor.

De la ecuación 3.14 se puede observar que el flujo de corriente en estado permanente i_{ss} puede variar por efectos de la temperatura, el espesor b de la membrana y naturalmente por la misma concentración de oxígeno disuelto en el fluido. Además, se debe hacer notar que la ecuación del oxígeno disuelto 3.16 es estática y dado que se tiene un fenómeno de difusión (en 3.10) un cambio en el nivel de oxígeno disuelto en el fluido tardaría en reflejarse sobre la corriente i_{ss} .

Es común en los medidores industriales tener constantes de tiempo de dos o más minutos. Lo cual provoca retardos cuando se hace control en línea. Adicionalmente, si a la membrana del sensor se le adhieren pequeñas partículas existentes en el fluido, la medición se ve alterada provocando una incertidumbre en el lazo de control.

Por tales motivos, se desea detectar cuando existan cambios en la corriente i_{ss0} provocados por deterioros en la membrana y no por cambios en la condición del oxígeno disuelto contenido en el fluido.

3.2.2 Modelo dinámico

Un estudio realizado en el proyecto de investigación dedicado al control *EOLI*, ver [EOLI, n.d.], indica que las fallas más frecuentemente encontradas en un reactor de una planta de aguas residuales, son las originadas por errores en la medición del oxígeno disuelto y en especial, debido a daños y suciedad en la superficie de la membrana del medidor utilizado.

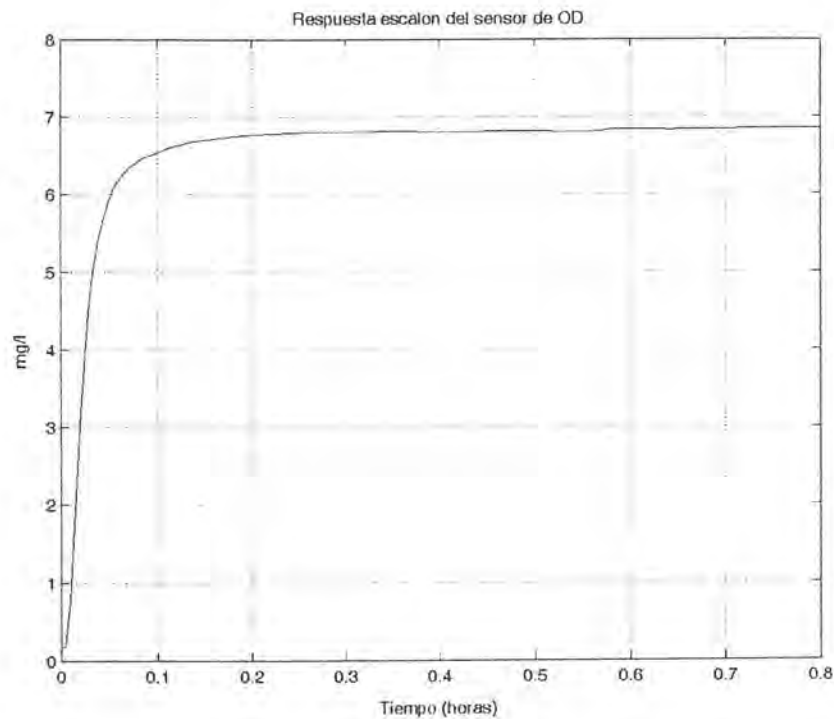


Figura 3.4: Respuesta escalón del sensor de oxígeno disuelto COS4

En particular al obtener la respuesta escalón de un sensor de oxígeno disuelto en el laboratorio (modelo COS4 [Endress, n.d.]) muestra que su dinámica es del orden de dos minutos, ver figura 3.4, y se observa que dicha dinámica se ve modificada si la membrana se daña o se ensucia. Por tanto, se propone explotar esta característica para monitorear su comportamiento.

Esto implica que se requiere un modelo dinámico del sensor. Para ello se asume que se alcanza un equilibrio en la presión parcial de la membrana, es decir, que la presión en los extremos y dentro de la membrana es la misma

$$p_e = p_m = p_w$$

Así al energizar los electrodos, las moléculas de oxígeno existentes en el electrolito son rápidamente removidas ocasionando que exista una gran corriente inicial, la cual desciende hasta alcanzar el equilibrio en i_{ss} con una difusión permanente a través de la membrana. Por lo tanto, es la corriente transitoria la que puede ser usada para validar y diagnosticar la buena operación del sensor. A partir de la segunda ley de Fick de difusión de la presión en la membrana se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

con lo cual se tienen las siguientes condiciones en la frontera

$$p(0, t) = 0 \quad y \quad p(b, t) = p_w \quad (3.18)$$

y condiciones iniciales

$$p(y, 0) = p_w, \quad 0 < y < b \quad (3.19)$$

La ecuación 3.17 se resuelve usando el común método de separación de variables. Es decir, las soluciones de la ecuación diferencial 3.17 son de la forma

$$p(y, t) = Y(y)T(t) \quad (3.20)$$

Al sustituir la expresión 3.20 en la ecuación diferencial 3.17 se obtiene

$$YT' = D_m Y''T \quad (3.21)$$

donde los apóstrofes se refieren a la derivación ordinaria con respecto a la variable independiente, sea y ó t . Al ordenar la ecuación 3.21 se convierte en

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{1}{D_m} \frac{T'}{T} \quad (3.22)$$

en la cual las variables están separadas.

Para que la ecuación 3.22 sea válida para $0 < y < b, t > 0$ es necesario que ambos miembros de la ecuación 3.22 sean igual a la misma constante. A esta constante se le llama constante de separación y en este caso es representada por λ . Entonces la ecuación 3.22 se transforma en dos ecuaciones diferenciales ordinarias como las siguientes:

$$Y'' - \lambda Y = 0 \quad (3.23)$$

$$T' - \lambda D_m T = 0 \quad (3.24)$$

De esta manera se sustituye la ecuación diferencial 3.17 por dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de estas se puede resolver para cualquier valor de la constante de separación λ . El producto de las soluciones de las ecuaciones 3.23 y 3.24 por cualquier valor de λ da una solución de la ecuación diferencial 3.17. Pero sólo interesan aquellas soluciones de la ecuación 3.17 que también satisfagan las condiciones en la frontera 3.18.

Debido a que las condiciones en la frontera son no homogéneas, se recurre a la maniobra de reducir el problema a otro que tenga las condiciones en la frontera homogéneas. La técnica consiste en interpretar el problema en su estado estable y transitorio. Cuando la presión parcial alcanza un estado estable $v(y)$, entonces es independiente del tiempo t y de las condiciones iniciales.

Puesto que $v(y)$ debe satisfacer la ecuación de difusión 3.17, se tiene que

$$v''(y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.25)$$

Además, $v(y)$ debe satisfacer las condiciones en la frontera

$$v(0) = 0, \quad v(b) = p_w \quad (3.26)$$

las cuales se aplican aún cuando $t \rightarrow \infty$. La solución de la ecuación 3.25 que satisface las ecuaciones 3.26 es

$$v(y) = (v(b) - v(0)) \frac{y}{b} + v(0) = p_w \frac{y}{b} \quad (3.27)$$

donde la presión parcial en estado estable $v(y)$ es una función lineal de y .

Ahora se trata de expresar $p(y, t)$ como la suma de la presión parcial en estado permanente $v(y)$ y otra presión parcial en estado transitorio $w(y, t)$; es decir

$$p(y, t) = v(y) + w(y, t) \quad (3.28)$$

Puesto que $v(y)$ está dada por la ecuación 3.27, el problema se resuelve siempre que se pueda determinar $w(y, t)$. El problema con valores en la frontera para $w(y, t)$ se encuentra al sustituir la expresión de la ecuación 3.28, por $p(y, t)$ en las ecuaciones 3.17, 3.18 y 3.19.

De la ecuación 3.17 se tiene

$$D_m(v + w)_{yy} = (v + w)_t \quad (3.29)$$

de donde se deduce que

$$D_m w_{yy} = w_t \quad (3.30)$$

puesto que $v_{yy} = 0$ y $v_t = 0$. De modo semejante, de las ecuaciones 3.28, 3.18 y 3.26, se obtiene

$$\begin{aligned} w(0, t) &= p(0, t) - v(0) = 0 \\ w(b, t) &= p(b, t) - v(b) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Finalmente de las ecuaciones 3.28 y 3.30, se tiene

$$w(y, 0) = p(y, 0) - v(y) = p_w - v(y) \quad (3.32)$$

donde $v(y)$ está dada por la ecuación 3.27. Así, la parte transitoria de la solución al problema original se encuentra resolviendo la ecuación diferencial 3.30, con las condiciones en la frontera 3.31 y condiciones iniciales 3.32. La solución específica es descrita en el apéndice A y se puede escribir como

$$p(y, t) = v(y) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}\right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.33)$$

donde

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b (p_w - v(y)) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (3.34)$$

Si se considera que $v(y)$ está dada por la ecuación 3.27, entonces 3.33 se puede escribir como

$$p(y, t) = p_w \frac{y}{b} + 2p_w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}\right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.35)$$

Por comodidad, se emplea el intercambio de unidades de la Ley de Henry ($[O_2] = H_m p_{O_2}$), para expresar la ecuación 3.11 en términos de la presión $p(y, t)$ y obtener

$$i = nFAD_m H_m \frac{\partial p(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.36)$$

La derivada de 3.35 en términos de y es

$$\frac{\partial p(y, t)}{\partial y} = \frac{p_w}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}\right) \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (3.37)$$

Entonces, al sustituir 3.37 en 3.36 y considerando que la difusión de oxígeno es inicialmente uniforme a través de la membrana, se obtiene una expresión para la corriente en todo tiempo descrita como

$$i(t) = i_{ss} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}\right) \right) \quad (3.38)$$

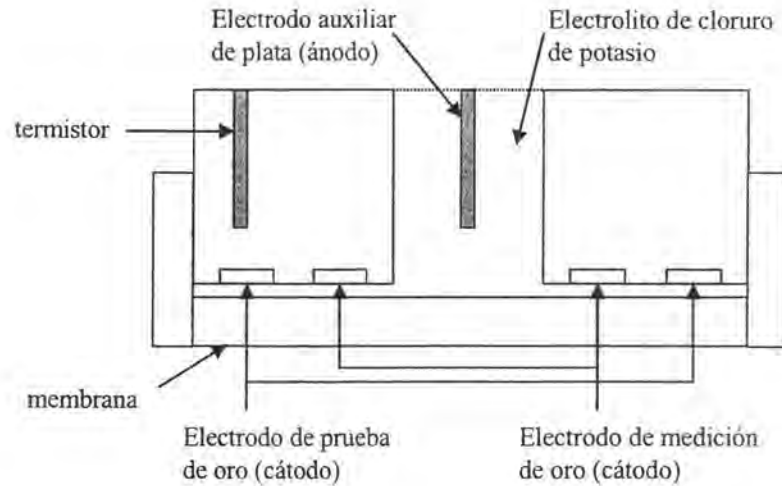


Figura 3.5: Sección transversal del sensor tipo Clark Foxboro 871DO

3.3 Estimación de la constante de tiempo

Dado que el valor de $i(t)$ se ve afectado por alteraciones en el valor nominal del espesor b y la constante de difusión D_m que a su vez depende de la temperatura, Fraher [Fraher, 1998] compensa la incertidumbre en la medición ΔO debido a la temperatura y al deterioro de la membrana (tanto en el espesor b como en la constante de difusión D_m) empleando un análisis de sensibilidad e incluye un electrodo extra de comparación, es decir, usa un electrodo redundante por hardware para auto-diagnosticar variaciones en la corriente producidas por partículas adheridas a la membrana o desgaste de ésta, ver figura 3.5.

La técnica propuesta por Fraher emplea la redundancia de hardware al utilizar un sensor con dos cátodos (Foxboro 871DO) para validar la medición y confirmar el estado de la membrana del sensor a partir de la implementación de una rutina que alterna la polarización de ambos electrodos y poder así analizar la constante de tiempo de difusión definida como

$$\tau = \frac{b^2}{D_m} \quad (3.39)$$

Esta solución es costosa y no es fácil construir aditamentos compensatorios una vez que el sensor ha sido construido.

En el siguiente capítulo se propone una técnica alterna en la solución de este problema, se emplean un software y hardware mínimo para su realización, siendo ésta la principal contribución de la presente tesis.

Capítulo 4

Propuesta de identificación de fallas

4.1 Introducción

Con la idea de explotar el hardware de los transductores y acondicionadores de señal para aumentar sus capacidades y mejorar las tareas de detección y localización de fallas en procesos dinámicos por software, este trabajo propone dotar a los transductores de los sensores de oxígeno disuelto, de capacidades individuales para suministrar información sobre la confiabilidad de las mediciones en tiempo real. Esta filosofía de mejorar el monitoreo de un proceso, deja en un segundo nivel la integración de las tareas de supervisión, toma de decisiones y reconfiguración del proceso. En lo particular, se presenta una plataforma para la detección de fallas en la membrana de un medidor de oxígeno disuelto tipo Clark, que opera en una planta de tratamiento de agua en tandas [Fibrianto, 2003], en donde de manera periódica y durante la etapa de sedimentación, se verifican las características dinámicas de la membrana que involucran al espesor b , la constante de difusión D_m y a la temperatura T .

Cuando la membrana del sensor se ensucia por agentes externos que se adhieren a la superficie de ésta, se afecta la difusión de moléculas de oxígeno a la superficie del electrodo y se observa una disminución del nivel de oxígeno disuelto en el fluido reportado por las mediciones del propio sensor, ver figura 4.1. Ante tales lecturas del nivel de oxígeno disuelto, el operador del proceso se ve entre la disyuntiva de dos posibles causas:

- Las lecturas indican disminución en el nivel del oxígeno disuelto debido a que el oxígeno disuelto en el medio disminuye.
- Daños posibles de la membrana por envejecimiento, ruptura o suciedad adherida a la

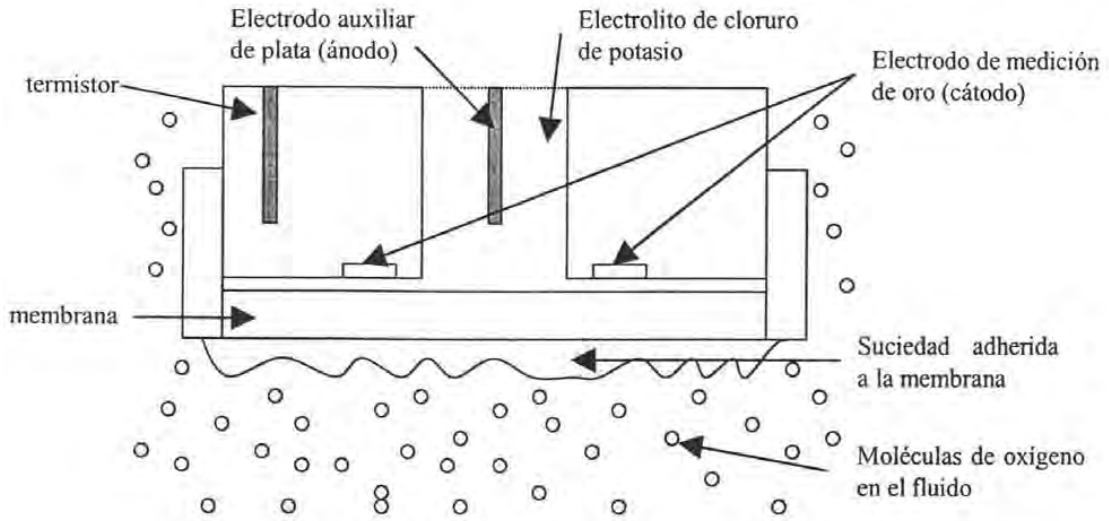


Figura 4.1: Sección transversal de un sensor de DO con materia externa adherida a la membrana

superficie.

En el caso de que la superficie de la membrana se ensucie, ésta se convierte en una estructura compuesta por el material original de la membrana (por ejemplo teflón) y las partículas adheridas. La suciedad en la membrana ocasiona un efecto de reducción en la ganancia del sensor dado que D_m y b varían, mientras que el número de electrones liberados por molécula de oxígeno n , la constante de Faraday F y la área del electrodo A no cambian, por consiguiente las mediciones efectuadas en tales condiciones indicarán una disminución en el nivel de oxígeno disuelto.

Por otro lado, en el modelo del comportamiento de la corriente proporcionada por el electrodo del medidor de oxígeno derivado en el capítulo tres y expresado por la ecuación 3.38, se observa que la corriente en $t = 0^+$ tiende al infinito y los términos en la sumatoria determinan la parte de la corriente transitoria, la cual depende de la constante de difusión D_m y del espesor b de la membrana. Por consiguiente, la estrategia de diagnóstico de fallas que se propone consiste en identificar estos dos parámetros.

Es preciso hacer notar que la ecuación 3.38 se derivó a partir de una ecuación diferencial parcial, por lo que la identificación de los parámetros debería hacerse considerando un modelo de dimensión infinita, en donde además, no se tiene libertad para generar la señal de excitación del sistema a identificar. Esta problemática limita el uso de técnicas tradicionales

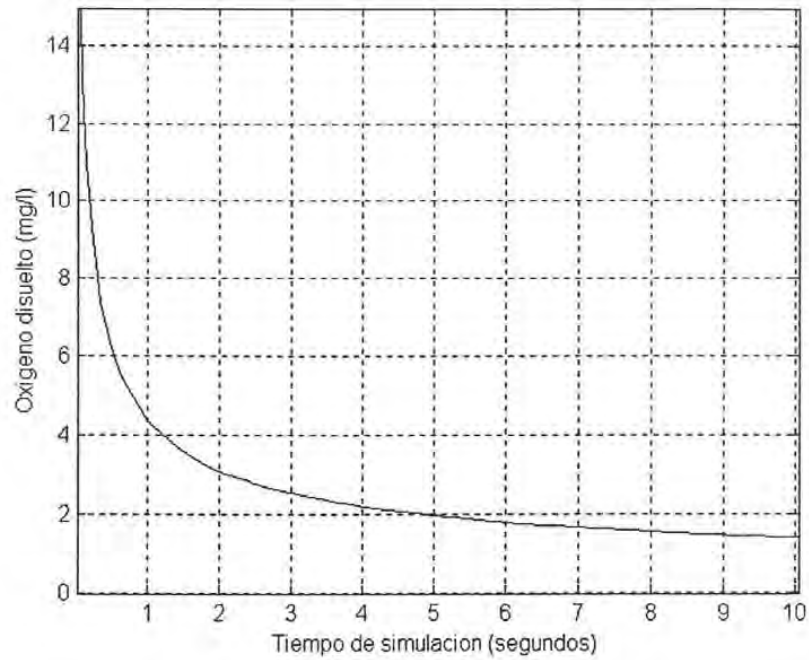


Figura 4.2: Respuesta escalón del sensor de OD

de identificación.

Considerando la curva de la respuesta al escalón del sensor dada en la figura 4.2, se puede afirmar que en $t = 0$ tiende al infinito, por lo que una identificación basada en la respuesta en el intervalo $(0, t = 0^+)$, provocaría muchos errores. Entonces, para resolver este problema se propone:

- a) Generar una señal perturbada de entrada al sistema
- b) Analizar la señal de salida durante su transitorio para un tiempo $t > 0^+$
- c) Evaluar los resultados

Para ello se integra la corriente de la ecuación 3.38 a partir de un instante $h_1 > 0$ y durante una ventana de tiempo $h = h_2 - h_1$ para $h_2 > h_1$, obteniendo

$$\frac{I}{i_{ss}} = h - \frac{2\tau}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 h_2}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 h_1}{\tau}\right) \right) \quad (4.1)$$

donde

$$I = \int_{h_1}^{h_2} i(t) dt$$

$$\tau = \frac{b^2}{D_m}$$

Como la integral I puede calcularse a partir de la medición de la corriente $i(t)$ y en la expresión 4.1 la única incógnita es τ , entonces a través de la relación entre el valor de la corriente en estado permanente y de su integral durante el transitorio en una ventana de tiempo, se puede estimar la constante de tiempo τ y detectar las variaciones con respecto a la constante de tiempo nominal $\tau_0 = \frac{b_0^2}{D_{m_0}}$ (donde b_0 , D_{m_0} son los valores nominales del espesor de la membrana y la constante de difusión, respectivamente), obtenida al calibrar el instrumento.

Este procedimiento de estimar la constante de tiempo a través de la respuesta transitoria del sensor para detectar deterioros en su membrana, se pretende emplear específicamente durante las secuencias de un reactor SBR aerobio, aprovechando la existencia de intervalos en los cuales las mediciones de oxígeno disuelto son irrelevantes para el proceso.

La propuesta específica se basa en el hecho de tener un proceso en tanda de cuatro fases con dinámicas muy lentas, ver figura 4.3 [Fibrianto, 2003] en donde las fases de vaciado y decantado permiten interrumpir la circulación de corriente en la sonda del medidor de DO , ver figura 4.4, durante un intervalo de tiempo mayor a Δt , de tal manera que cuando se cierre nuevamente el circuito entre el cátodo y ánodo en la etapa de llenado, se tenga un efecto transitorio en la corriente de la forma dada por la ecuación 3.38 y de ahí partir hacia la expresión 4.1 para identificar la constante de tiempo τ . Esta es la principal aportación del presente trabajo.

Al involucrar un potencial externo B de polarización en el circuito del sensor (cátodo-ánodo) como se aprecia en la figura 4.4, se puede interrumpir el voltaje de manera periódica provocando excitaciones que generen un transitorio en la corriente y emular la condición obtenida en 3.38.

De este modo el coeficiente $\frac{\tau}{\tau_0}$ representa un indicador del estado de la membrana de la sonda, que puede ser suministrado por intervalos de tiempo al sistema de supervisión junto con la medición actual de oxígeno disuelto.

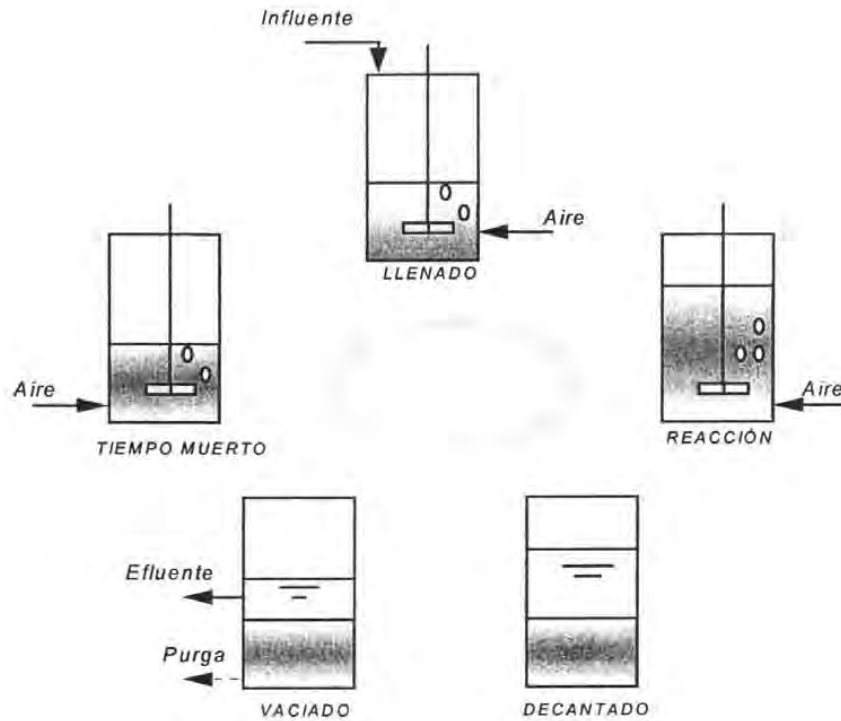


Figura 4.3: Esquema de un reactor por lotes secuenciales

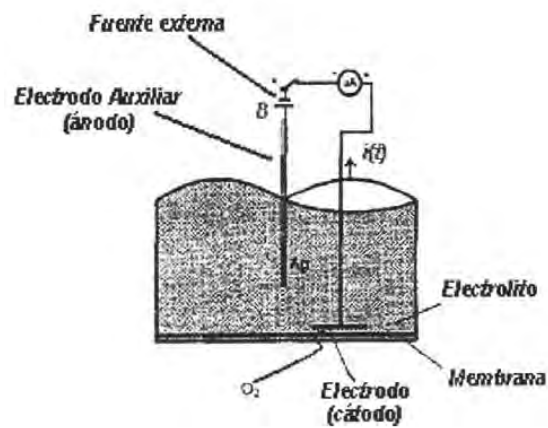


Figura 4.4: Circuito empleado en la validación del sensor de DO

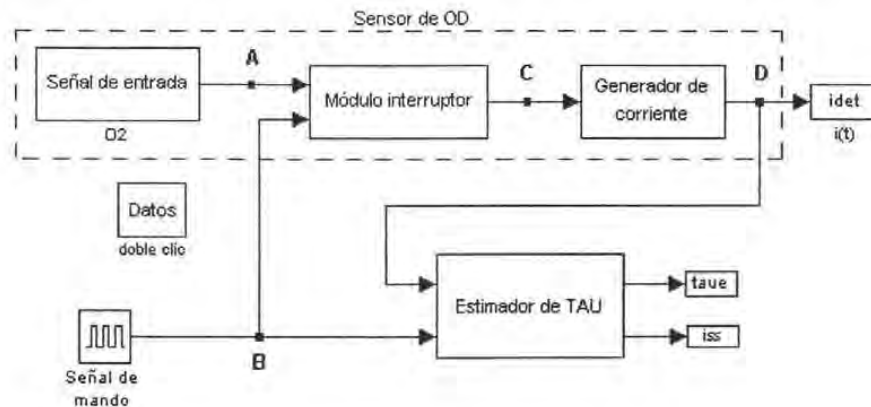


Figura 4.5: Esquema general empleado en la simulación del sensor y sistema de detección

4.2 Simulador del sensor y sistema de detección

El modelo de simulación implementado en *Simulink*[®] para emular la medición de oxígeno y el proceso de diagnóstico, se muestra en la figura 4.5. La cantidad de oxígeno disuelto *DO* considerada como entrada del sistema (punto *A* en la figura 4.5), se representa en la simulación por medio de señales de tipo escalón y senoidal (bloque etiquetado como "O2" de la figura 4.5). Se emplean diferentes frecuencias para simular variaciones de oxígeno y los resultados obtenidos son reportados en la siguiente sección.

El bloque superior marcado con línea punteada en la figura 4.5, corresponde al sensor propiamente dicho, en donde el módulo interruptor es el que permite el paso de la corriente a través de los electrodos. El simulador del sensor de oxígeno disuelto del tipo celda de Clark, tiene los siguientes parámetros nominales tomados del fabricante, ver [Endress, n.d.]:

- Coeficiente de difusión, $Dm = 9.375 \times 10^{-11} \frac{m^2}{s}$
- Espesor de la membrana, $b = 75 \mu m$

Es por tanto en este bloque donde se simula el deterioro de la membrana por suciedad.

La señal de mando *B*, emula la condición de circuito abierto o cerrado de la celda. Así cuando tiene un nivel alto, la señal de salida del generador de corriente (ver figura 4.6), corresponde a la corriente $i(t)$ proporcionada por el cátodo del sensor. En caso contrario, el generador no recibe ninguna entrada y su salida decae en poco tiempo de acuerdo a su dinámica expresada por la ecuación 3.38. Finalmente, el próximo nivel alto de la señal de

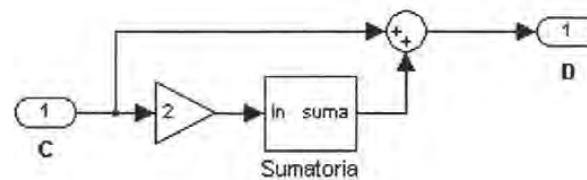


Figura 4.6: Esquema del generador de corriente

mando, produce la emulación de la polarización de los electrodos (ánodo-cátodo) del sensor y se genera un transitorio en la corriente $i(t)$ (punto D de la figura 4.5) obtenida con la ecuación 3.38.

La señal de mando puede ser implementada a través del empleo de un tren de pulsos de amplitud igual a uno y frecuencia muy lenta, con ciclo de trabajo alrededor del 87.5 % del periodo (punto B en la figura 4.5). Sin embargo, una señal arbitraria de comportamiento similar, puede ser de más ayuda si se desea modificar constantemente los intervalos de tiempo en la interrupción o desactivación de la entrada.

En la figura 4.7, se muestran las señales generadas por el medidor de oxígeno (ver figura 4.5). La señal A corresponde a la variable que se emplea como entrada del sistema.

El punto B muestra el comportamiento de la señal de mando, el cual al llegar a un nivel bajo (cero), provoca una suspensión de la señal de entrada A con un pequeño retardo, tiempo necesario para que el estimador pueda capturar el último valor de la corriente i_{ss} antes de que ocurra la interrupción.

Los términos relativos al comportamiento transitorio (sumatoria en la ecuación 3.38 y bloque "Sumatoria" de la figura 4.6), son simulados a través de su representación en términos del dominio s de Laplace, tal como se muestra en la figura 4.8. Los términos en el esquema de la figura 4.8 indicados como $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$, corresponden a los productos $n^2 \pi^2 D_m$ para $n = 1, 2, 3, \dots, 10$. Es preciso señalar que se hicieron pruebas con más términos y se observó que para valores de $n > 10$ no se tenían cambios considerables en la parte transitoria de $i(t)$, por tal motivo se trabajó en la simulación sólo con 10 términos en la sumatoria.

La parte del estimador o detector que corresponde al procedimiento propuesto en este

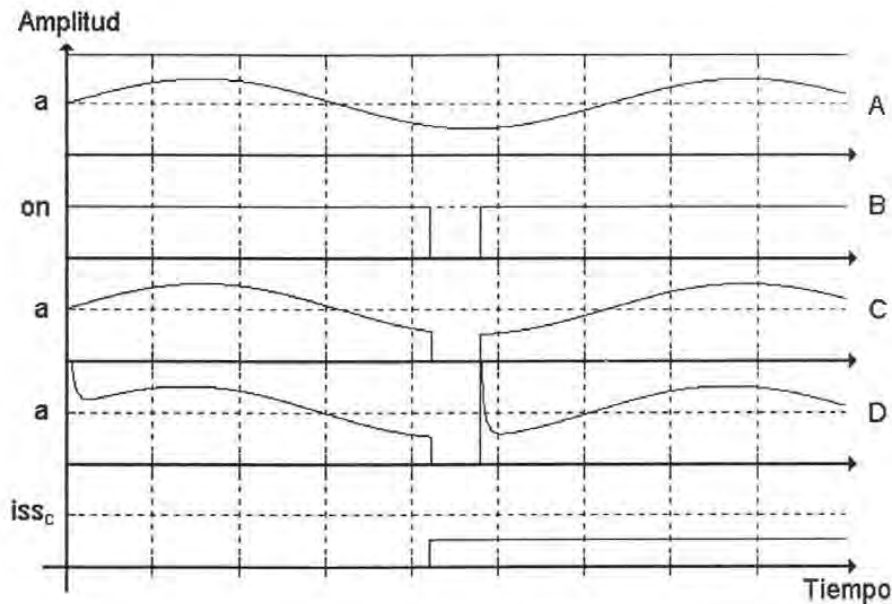


Figura 4.7: Señales del detector

trabajo para el cálculo de la constante de tiempo τ , es mostrado en el bloque etiquetado como "Estimador de TAU" de la figura 4.5. Tiene principalmente las siguientes tareas:

- Retener el valor de la corriente i_{ss} cuando se genera la interrupción, el cual emplea para calcular la constante de tiempo τ' (figura 4.9).
- Evaluar τ a partir de la expresión 4.1. Esto se hace de manera recursiva partiendo de τ nominal.

A partir de un instante $h_1 > 0$, se integra la corriente $i(t)$ de la ecuación 3.38 durante una ventana de tiempo que va de h_1 a h_2 (ver bloque "Integración" de la figura 4.9)

$$I = \int_{h_1}^{h_2} i(t) dt \quad (4.2)$$

La corriente en estado permanente i_{ss} , se obtiene de la misma señal de la corriente $i(t)$ antes de que ésta sea interrumpida por la señal de mando B (bloque de "Captura i_{ss} " en la figura 4.9). A partir de la relación $\frac{I}{i_{ss}}$ se estima la constante de tiempo τ de acuerdo a la expresión 4.1 (bloque "Estimador" de la figura 4.9). Los resultados que genera la simulación son almacenados en archivos cuyo nombre indica la variable correspondiente, reportados y analizados en la siguiente sección.

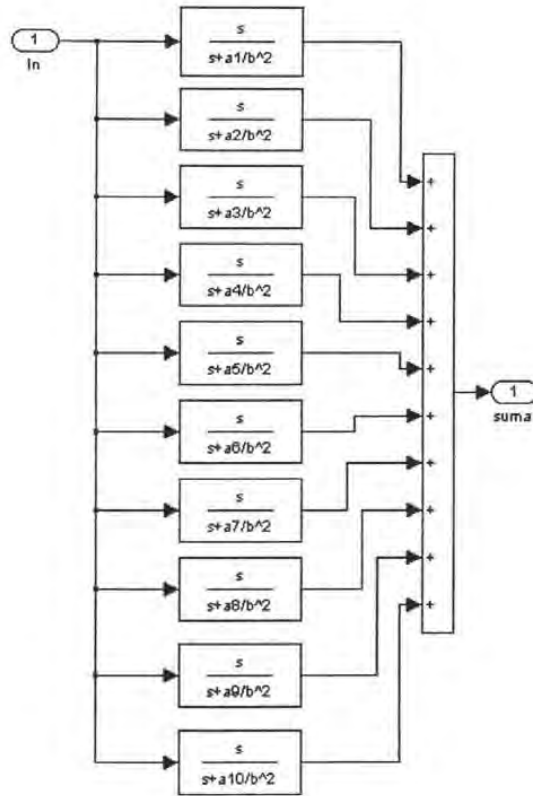


Figura 4.8: Esquema representativo del bloque "Sumatoria"

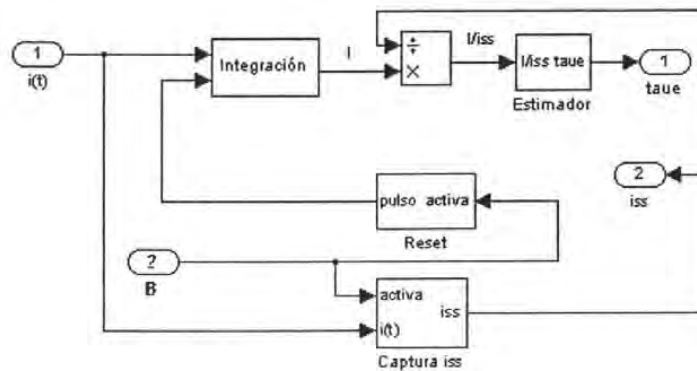


Figura 4.9: Bloque "Estimador de TAU" del esquema general

4.3 Resultados

A partir del empleo de una señal escalón de amplitud uno como señal de entrada (la cual representa la cantidad de oxígeno disuelto en el fluido), se integra el transitorio de la corriente generada $i(t)$ en una ventana de tiempo $h = h_2 - h_1$, utilizando diferentes valores de tiempo para $h_1 > 0$ y $h_2 > h_1$. Se considera la constante de tiempo τ como

$$\tau = \frac{b^2}{D_m} \quad (4.3)$$

Al emplear los valores de b y D_m propuestos y considerados nominales para la simulación, resulta que $\tau = 60 \text{ seg}$ de acuerdo a la expresión 4.3. Con la entrada escalón y los valores nominales de b y D_m , se sugieren valores de tiempo en $h_1 > 0$ y $h_2 > h_1$ para determinar la dimensión apropiada de la ventana de integración h , en la que el porcentaje de error del estimado de la constante de tiempo τ sea lo más cercano a cero.

h_1 [seg]	$\frac{I}{i_{ss}}$	$(\frac{I}{i_{ss}}) - h$	τ' [seg]	% error
1	3.6203	2.6203	59.9988	0.002
2	5.1198	3.1198	59.9981	0.0032
3	6.2706	3.2706	59.9982	0.003
4	7.2421	3.2421	59.9985	0.0025
5	8.1046	3.1046	59.9994	0.001
6	8.9001	2.9001	59.9990	0.0016
7	9.6587	2.6587	59.9997	0.0005
8	10.4019	2.4019	60.0002	0.0003
9	11.1450	2.1450	60.0005	0.0008
10	11.8980	1.8980	60.0011	0.0018
12	13.4554	1.4554	60.0024	0.004

Tabla 4.1: Resultados obtenidos a partir de una ventana de integración con $h_2 = 2h_1$

Se hace variar h_1 y se elige $h_2 = 2h_1$ como primer prueba, los resultados generados son presentados en la tabla 4.1. La integral de $i(t)$ durante el transitorio en la ventana de tiempo es denotada por la literal I . De la tabla 4.1 se observa en la columna $(\frac{I}{i_{ss}} - h)$, que con $h_1 = 3$ segundos se obtiene mayor información del transitorio de $i(t)$, de acuerdo a la ecuación 4.1, pero con $h_1 = 8$ segundos se tiene mejor aproximación a la constante de tiempo nominal τ_0 . El porcentaje de error para el cálculo de la τ_0 (determinado a través de la relación $\frac{\tau'}{\tau_0}$) en los casos mostrados de la tabla 4.1, es relativamente pequeño (menor al 0.004 %), sin embargo para tiempos de $h_1 > 12 \text{ seg}$ la información que se puede obtener del transitorio de la señal se reduce hasta perderse y en consecuencia el porcentaje de error en la aproximación de la constante de tiempo nominal se vuelve intolerable. En la figura

4.10 se presentan las gráficas para una ventana de integración de tiempo de $h_1 = 3 \text{ seg}$ considerando $h_2 = 2h_1$.

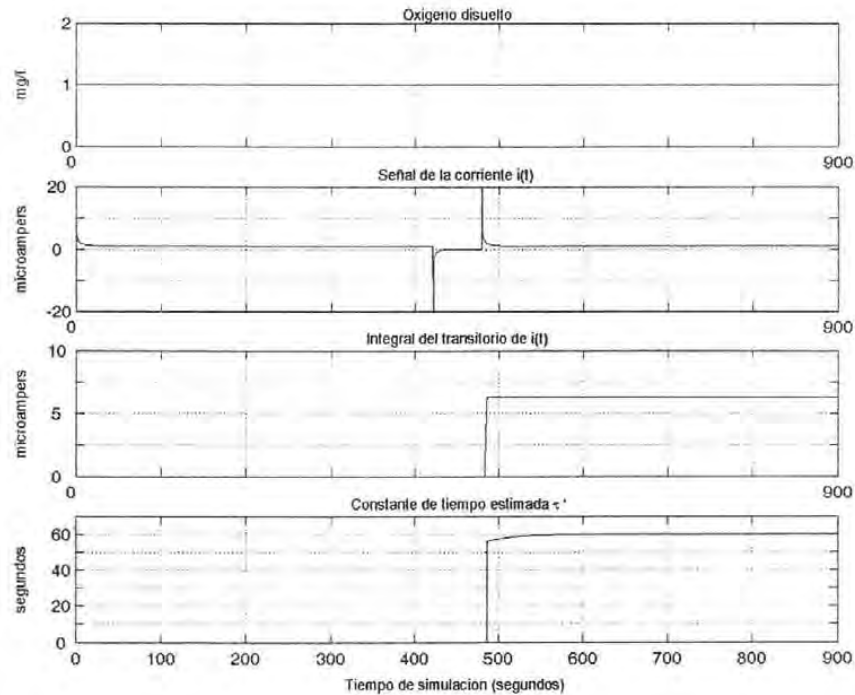


Figura 4.10: Gráficas con una ventana de integración de tiempo $h_1 = 3 \text{ seg}$ y $h_2 = 2h_1$

El oxígeno disuelto contenido en el fluido es representado por una señal escalón y mostrado en la primera gráfica de las figura 4.10. La segunda gráfica, corresponde a la señal de la corriente $i(t)$ proporcionada por el cátodo del sensor de oxígeno, en la cuál se observa que aproximadamente a los 420 segundos de iniciado el proceso, dicha señal decae debido a una interrupción deliberada en la polarización de los electrodos de la celda. Después de un minuto, el proceso se reanuda (se polarizan los electrodos) provocando un transitorio en la señal de la corriente $i(t)$. Durante el transitorio, la corriente $i(t)$ se integra en una ventana de tiempo que va de h_1 a h_2 resultando la tercer gráfica de la figura 4.10. La señal de la constante de tiempo estimada es mostrada en la última gráfica de la figura 4.10.

Se procede a cambiar la señal de entrada por una señal senoidal de amplitud igual a $0.5 V_p$ y una frecuencia angular ω relativamente baja en el intervalo $[0.05 \quad 0.0001] \left[\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right]$. Se emplean los valores de $h_1 = 3 \text{ seg}$ y $h_2 = 3h_1$ en la integración de la corriente $i(t)$ durante el transitorio y se prueban las diferentes frecuencias del intervalo propuesto para la señal

senoidal. El objetivo en este caso es determinar los límites de frecuencia de la señal de entrada que el sistema puede aceptar de acuerdo a un margen de error tolerante.

ω	$\frac{rad}{seg}$	T [seg]	τ' [seg]	% error
0.05		125.7	14.2913	76.1812
0.02		314.2	18.0807	69.8655
0.015		418.9	93.9641	56.6068
0.012		523.6	125.4178	109.0297
0.011		571.2	94.5823	57.6372
0.01		628.3	58.8287	1.9522
0.008		785.4	37.1581	38.0698
0.006		1047.2	46.5022	22.4963
0.004		1570.8	57.4996	4.1673
0.00335		1875.6	59.9821	0.0298
0.003		2094.4	61.0131	1.6885
0.001		6283.2	62.3036	3.8393
0.0009		6981.3	62.1548	3.5913
0.0005		12566.4	61.3682	2.2803
0.0001		62831.9	60.3026	0.5043

Tabla 4.2: Resultados obtenidos al variar la frecuencia de la señal de entrada

De la tabla 4.2 se puede observar que el porcentaje de error en la aproximación a la constante de tiempo nominal τ_0 (determinado a través de la relación $\frac{\tau'}{\tau_0}$), presenta un comportamiento oscilante dependiente de la señal senoidal de entrada. Cuando la medición de la corriente i_{ss} y el transitorio de la corriente $i(t)$ coinciden sobre la cresta o valle de la señal de entrada senoidal (lugar donde la señal es más plana), el error en la estimación de la constante de tiempo τ' es menor del 5 %. Por otro lado, si la medición de la corriente i_{ss} y el transitorio de $i(t)$ coinciden en un punto de inflexión de la señal senoidal, el error aumenta por encima del 20 % (en el punto de inflexión de cresta a valle, la estimación del valor de la constante de tiempo τ' es menor que el valor nominal τ_0 y en el punto de inflexión de valle a cresta, la estimación del valor de la contante de tiempo está por encima del valor nominal). Sin embargo, se puede considerar que para frecuencias menores de $\omega = 0.003 \frac{rad}{seg}$ ($T = 2094.4$ seg) el porcentaje de error en la estimación a la constante de tiempo nominal τ_0 , es menor del 4 %. Este error depende del intervalo de tiempo transcurrido durante la interrupción de polarización del sensor, así como del valor seleccionado para h_1 y del periodo de la perturbación. Mientras mayor sea el tiempo que dure la interrupción de la polarización de los electrodos, menor será la frecuencia de las perturbaciones que tolere el detector.

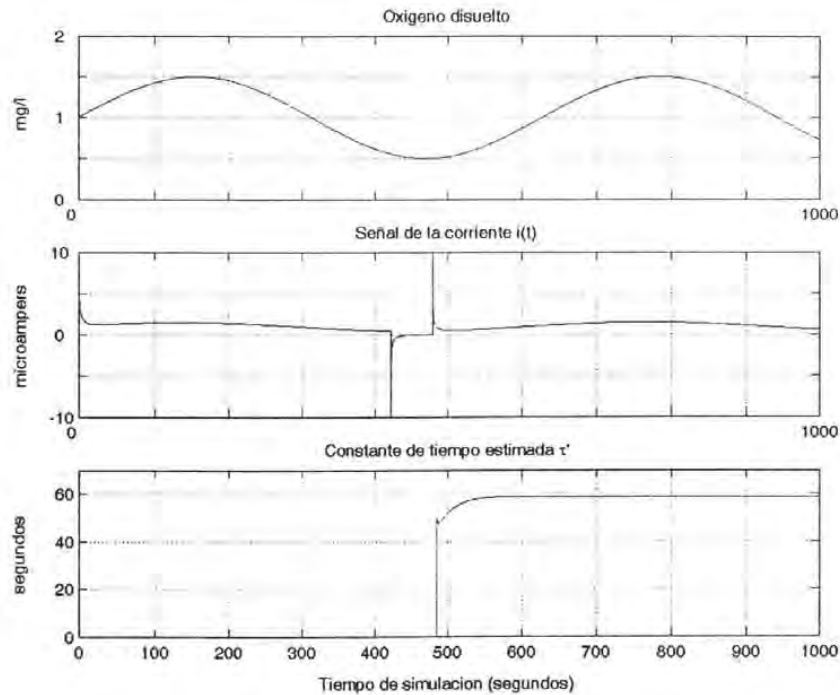


Figura 4.11: Gráficas obtenidas al emplear una señal de entrada senoidal de $\omega = 0.01 \frac{rad}{seg}$

La figura 4.11 muestra gráficas obtenidas al emplear una señal de entrada senoidal con una frecuencia angular $\omega = 0.01 \frac{rad}{seg}$, donde se observa un porcentaje de error pequeño (menor del 2 %) debido a que durante el tiempo que se integra la corriente $i(t)$, la señal de perturbación cambia despreciablemente. Sin embargo, con una señal senoidal de frecuencia mucho muy baja, por ejemplo $\omega = 0.00335 \frac{rad}{seg}$, ver tabla 4.2, se tiene un mejor estimado de la constante de tiempo τ' (con un error menor a 0.03 %). En este caso la frecuencia angular ω es tan baja que durante el tiempo que se suspende la polarización la señal de entrada se mantiene relativamente constante.

Por otro parte, se puede disminuir el porcentaje de error y aumentar un poco más la frecuencia angular ω de la señal de entrada senoidal, siempre que sea posible reducir la amplitud de la misma señal. Por ejemplo, la tabla 4.3 muestra los resultados obtenidos al variar la amplitud de la señal senoidal a 0.25, 0.15 y 0.05 V_p con frecuencia constante de $\omega = 0.01 \frac{rad}{seg}$.

Al observar los resultados mostrados por las tablas 4.2 y 4.3, se puede decir que al emplear

una señal de entrada senoidal de amplitud $Amp \leq 0.5 V_p$ es posible obtener un porcentaje de error aproximado al 0.0298 % si se utiliza una frecuencia angular $\omega \leq 0.00335 \frac{rad}{seg}$ en la señal. Pero si la amplitud de la señal senoidal puede ser reducida hasta $Amp \leq 0.15 V_p$, entonces se pueden emplear frecuencias de $\omega \leq 0.004 \frac{rad}{seg}$ con un porcentaje de error aproximado de 1.53% (el porcentaje de error es determinado a través de la relación $\frac{\tau'}{\tau_0}$).

Se debe hacer notar que los resultados anteriormente presentados se generaron con una duración en la interrupción de la polarización del cátodo de 60 segundos y que como se mencionó en párrafos anteriores, entre mayor sea el tiempo de interrupción de la polarización, menores serán las variaciones o perturbaciones que tolere el sistema de detección. La tabla 4.4 muestra los resultados generados al incrementar el tiempo de interrupción en la polarización del cátodo, emplea una señal de entrada senoidal con frecuencia de $0.00335 \frac{rad}{seg}$ y $Amp = 0.5 V_p$, $h_1 = 3$ y $h_2 = 3h_1$.

El tiempo de interrupción de la polarización de los electrodos, influye directamente en el procedimiento para la estimación de la constante de tiempo del proceso. Esto es debido a la necesidad de obtener el valor de la corriente en estado permanente i_{ss} antes de que ocurra dicha interrupción. Al incrementar el intervalo de tiempo para volver a energizar los electrodos del sensor, también aumenta la probabilidad de que las condiciones del proceso cambien (por ejemplo, variaciones en la cantidad de oxígeno disuelto, cambios en la temperatura, perturbaciones o ruido inherentes del proceso, entre otros). La figura 4.12 muestra un porcentaje de error aproximado al 6 % en la estimación de la constante de tiempo τ' (gráfica 3), debido al empleo de un intervalo de tiempo igual a 180 segundos en la interrupción de la polarización del cátodo (gráfica 2).

Para emular los efectos que produce una membrana sucia, se procede a variar el espesor b de la membrana, lo cual repercutirá directamente sobre la constante de difusión D_m y la constante de tiempo τ . La tabla 4.5 presenta los resultados obtenidos al emplear una señal de entrada escalón y al variar la dimensión nominal del espesor b de la membrana ($b_0 = 75\mu m$). Se obtiene la integración del transitorio de $i(t)$ en una ventana de tiempo h para $h_1 = 3 seg$ y $h_2 = 2h_1$.

Amp	$[V_p]$	T	$[seg]$	τ'	$[seg]$	% error
0.25		628.32		59.5979		0.6702
0.15		628.32		59.7843		0.3595
0.05		628.32		59.9326		0.1123

Tabla 4.3: Resultados obtenidos al variar la amplitud de la señal de entrada

Tiempo de interrupción [seg]	T [seg]	τ' [seg]	% error
120	1875.6	57.5663	4.0562
180	1875.6	56.3490	6.0850

Tabla 4.4: Resultados generados al incrementar el tiempo de interrupción de la polarización del cátodo

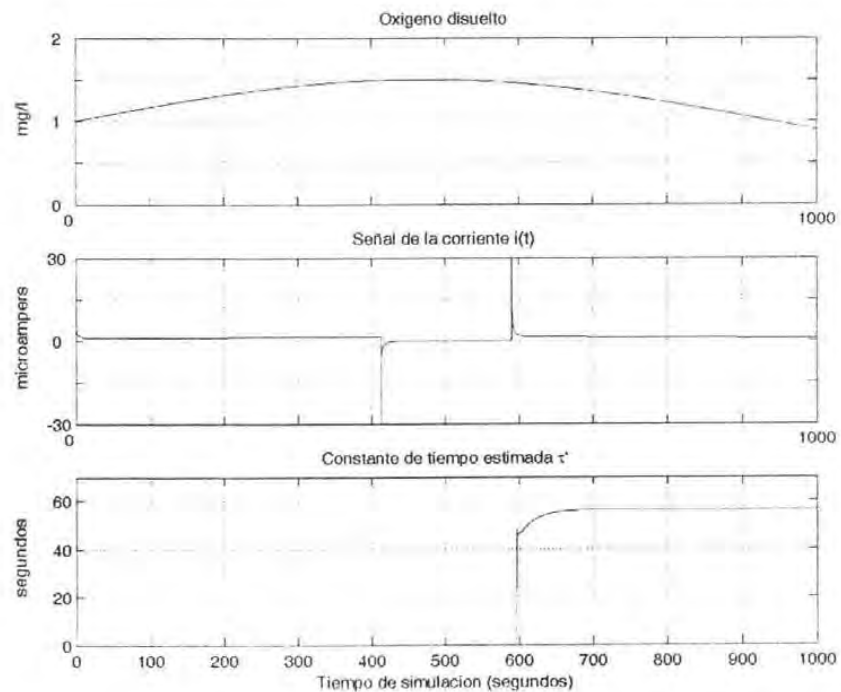


Figura 4.12: Estimado de la constante de tiempo con interrupción de polarización del cátodo de 180 segundos

b [μm]	% Δb_0	D_m	$\frac{m^2}{seg}$	τ' [seg]	% error
76.87	2.5	$9.3759x10^{-11}$		63.0232	5.0387
78.75	5.0	$9.3767x10^{-11}$		66.1378	10.2297
82.50	10.0	$9.3781x10^{-11}$		72.5762	20.9603
90.00	20.0	$9.3869x10^{-11}$		86.2903	43.8172

Tabla 4.5: Resultados obtenidos con una entrada escalón y al variar el espesor b de la membrana

Los resultados observados en la tabla 4.5, muestran la sensibilidad del proceso debido al incremento del espesor b de la membrana, manifestando de inmediato un incremento en el porcentaje de error sobre la aproximación a la constante de tiempo nominal τ_0 . Se puede decir que para tener mediciones de la corriente $i(t)$ que correspondan a la cantidad de oxígeno disuelto en el fluido con un margen de error $e < 5.0387\%$, es preciso mantener la membrana del sensor limpia y no dejar que las sustancias que se le adhieran tengan un efecto mayor al del valor nominal de su espesor.

Al cambiar la entrada a una señal senoidal de amplitud $Amp = 0.25 V_p$, con frecuencia $\omega = 0.00335 \frac{rad}{seg}$ y mover el valor nominal del espesor b de la membrana, se obtienen los resultados presentados por la tabla 4.6. A pesar de tener una señal senoidal como entrada, se puede observar en la tabla 4.6 que los resultados son muy parecidos a los reportados en la tabla 4.5 con una señal escalón, lo cual habla de la robustez del detector.

b [μm]	% Δb_0	D_m	$\frac{m^2}{seg}$	τ' [seg]	% error
76.87	2.5	$9.3780x10^{-11}$		63.0092	5.0153
78.75	5.0	$9.3809x10^{-11}$		66.1083	10.1805
82.50	10.0	$9.3874x10^{-11}$		72.5038	20.8397
90.00	20.0	$9.4070x10^{-11}$		86.1057	43.5095

Tabla 4.6: Resultados obtenidos con una entrada senoidal y al variar el espesor b de la membrana

Las respuestas transitorias con cambios en el valor nominal del espesor b de la membrana, son presentadas en la figura 4.13.

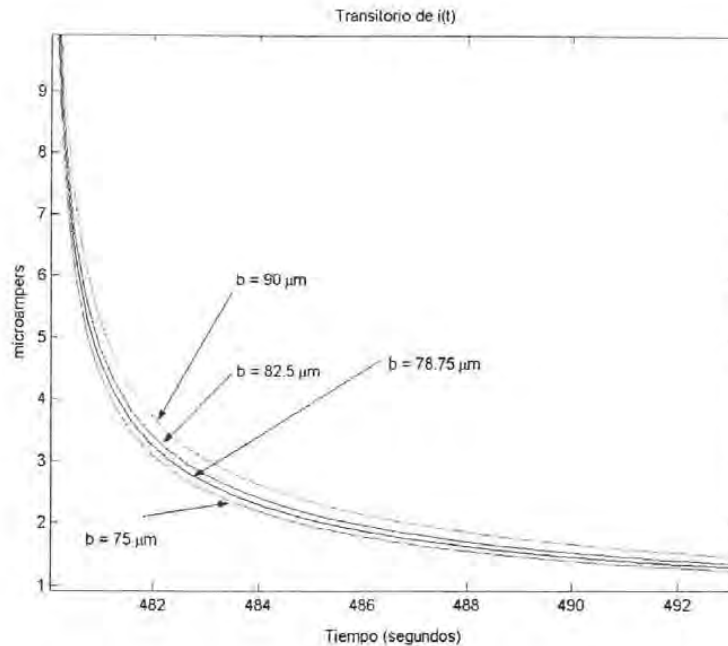


Figura 4.13: Transitorio de $i(t)$ para diferentes valores del espesor b de la membrana

4.4 Implantación del sistema

Los resultados obtenidos por simulación y presentados en la sección anterior, proporcionan la confianza necesaria para proceder a la implantación del sistema que permitirá validar la propuesta de este trabajo. Sin embargo, debido a falta de los dispositivos y elementos físicos necesarios, el presente trabajo se limita únicamente a la prueba del sistema en simulación. No obstante, se propone el diagrama a bloques para la implantación en la figura 4.14.

El módulo interruptor de la figura 4.14, abre y cierra el circuito de la polarización del sensor al recibir una señal de mando previamente programada en el sistema de cómputo. El circuito eléctrico de este módulo se tendrá que analizar con detenimiento, ya que se requiere cumpla con por lo menos las siguientes características de operación:

- Ser relativamente rápido en la interrupción y cierre del circuito que polariza los electrodos del sensor para evitar producir o inducir al máximo, ruido o interferencia al circuito
- Evitar alterar la impedancia del circuito

Por tanto para la construcción de este módulo, se propone el empleo de un circuito que

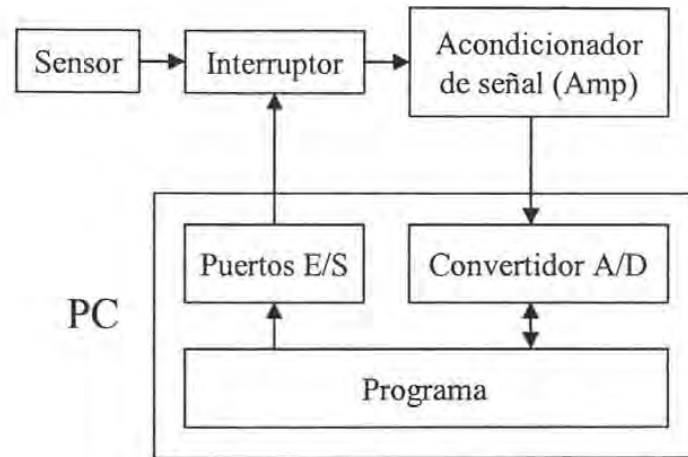


Figura 4.14: Diagrama de bloques del sistema

incluya un interruptor analógico de un polo, un tiro, normalmente cerrado y con muy baja resistencia (cerca a cero ohms), entrada de control compatible con TTL/CMOS y un tiempo de respuesta relativamente rápido (alrededor de 6 ns). Se presenta en la figura 4.15 un ejemplo de un interruptor analógico comercial.

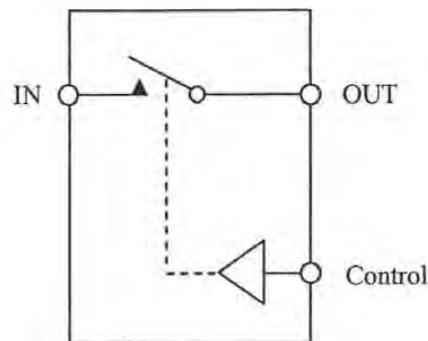


Figura 4.15: Diagrama de un interruptor analógico

En el módulo acondicionador de señal se tiene el circuito eléctrico que polariza los electrodos del sensor formado por la resistencia variable VR_1 y la batería B_1 , ver figura 4.16. Este módulo acondiciona la señal de corriente $i(t)$ recibida del cátodo para ser leída posteriormente por el sistema de cómputo. El circuito emplea un amplificador de transimpedancia o convertidor de corriente a voltaje. El capacitor C_1 de valor generalmente pequeño (en el orden de pF) es incluido para limitar el ancho de banda del amplificador, reducir el ruido

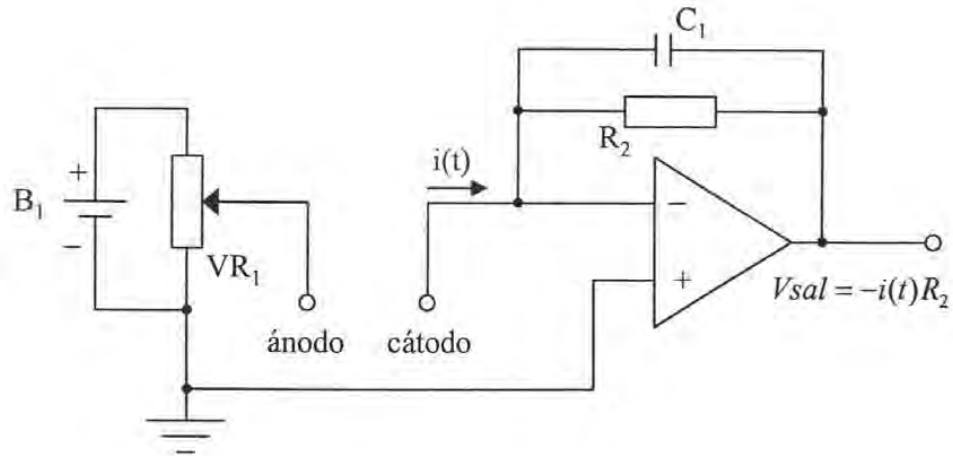


Figura 4.16: Módulo acondicionador de la señal

y mejorar la estabilidad.

El amplificador operacional maneja la corriente de entrada $i(t)$ y la hace pasar a través de la resistencia R_2 (cuyo valor es normalmente grande, en el orden de $M\Omega$). La función de transferencia es

$$V_{out} = -i(t)R_2 \quad (4.4)$$

El valor de los componentes C_1 y R_2 , se encuentran relacionados con el ancho de banda del circuito, el cual se calcula con la siguiente expresión:

$$f = \frac{1}{2\pi R_2 C_1} \quad (4.5)$$

Por otra parte, es necesario contar con una tarjeta de adquisición de datos que incluya un convertidor de analógico a digital de por lo menos 12 bits de aproximaciones sucesivas, con rangos de entrada acordes a los niveles de voltaje manejados por la salida del módulo acondicionador de señal y velocidad de muestreo de 10 Hz. Con éstas características se puede elegir que el módulo acondicionador de señal (ver figura 4.16) tenga un rango de salida de 0 a 5 volts o si se prefiere uno de 0 a 10 v. Los 12 bits del convertidor ofrecen una resolución de 2^{12} incrementos en la lectura de los datos de salida, es decir, se tendrá mediciones con variaciones de 1.2 mv para el rango de 0 a 5 v o de 2.44 mv para el caso de 0 a 10 v. Además, con la velocidad de muestreo de 10 Hz, se puede manejar las frecuencias de la señal de entrada empleadas en la tabla 4.2 y tener 10 *muestras/seg* de la misma señal.

Es indispensable contar con un programa de adquisición y procesamiento de datos (ver figura 4.14), que manipule la información proporcionada por el sensor de oxígeno, con el objetivo principal de diagnosticar el estado físico de la membrana a través de estimar la constante de tiempo del proceso.

La sugerencia es emplear el lenguaje de programación *C* para la parte de adquisición de datos, programando las siguientes tareas específicas:

- Configurar las entradas y salidas de la tarjeta de adquisición de datos
- Capturar los datos del medidor de oxígeno y escribirlos en un archivo

Para procesar la información recabada y desplegar los resultados, se podría intentar programar en Matlab[®], por ser un lenguaje de alto nivel que permite reducir la programación con base en el empleo de comandos muy específicos que ahorran tiempo de procesamiento, además cuenta con extraordinario ambiente gráfico que lo hace ser muy amigable.

Las características mínimas del hardware para el desarrollo de los programas y el sistema de detección en general, son las siguientes:

- Procesador Pentium IV (cualquier velocidad)
- Memoria RAM de 256 MB
- Capacidad en disco duro de 80 GB

Capítulo 5

Conclusiones

Como parte integral del proyecto EOLI, ver [EOLI, n.d.], patrocinado por la Comunidad Europea, que consiste en el diseño de un sistema de monitoreo y control para un proceso de tratamiento de agua en un reactor secuencial en lotes (SBR) aerobio, el presente trabajo expone la propuesta de una plataforma para la detección de fallas en línea en la membrana de un medidor de oxígeno disuelto tipo celda de Clark.

El enfoque que se aborda, es el de un subsistema autónomo que permite involucrar funciones de diagnóstico que adicionan datos a la medición y suministran información sobre la confiabilidad y tendencias de las mediciones. Es decir, se propone explotar el hardware del transductor y acondicionador del sensor para aumentar su capacidad en el suministro de información sobre la confiabilidad y validación de las mediciones en tiempo real.

Los principales problemas que afectan la medición del sensor de oxígeno disuelto además de las variaciones en la temperatura, son los daños en la membrana. Las diferentes fallas que pueden presentarse en la membrana del sensor son: ruptura, desgaste o envejecimiento y pérdida de la capacidad de difusión por partículas externas adheridas a la superficie (suciedad). Sólo esta última falla es atacada por el presente trabajo.

La técnica de detección para esta falla en particular, consiste en identificar de manera periódica las características dinámicas de la membrana, las cuales dependen de su espesor, el coeficiente de difusión y la temperatura. El sistema se encarga de reconocer dichas características al estimar la constante de tiempo del proceso a través de la respuesta transitoria del sensor.

El método cumple con el objetivo particular del trabajo, ya que identifica claramente la

5. Conclusiones

diferencia entre variaciones en la medición debido a cambios reales en la cantidad de oxígeno disuelto y cambios debidos a fallas en la membrana por suciedad adherida en su superficie.

El sistema de detección propuesto asume que la temperatura es constante y la difusión de oxígeno uniforme a través de la membrana.

Actualmente, existen equipos comerciales que integran rutinas por software a los transductores para la auto evaluación de mediciones realizadas por un sensor, pero desafortunadamente tienen un costo económico considerablemente elevado. En este sentido, el método propuesto en el presente trabajo posee la confiabilidad en la validación de sensores y al mismo tiempo, su costo de inversión para la implantación es relativamente accesible.

El trabajo a un futuro inmediato es la construcción física del sistema de detección en línea que permitirá la validación de esta propuesta.

Bibliografía

- [Astrom, 2001] Astrom K., P. Albertos, M. Blanke, A. Isidori, W. Schaufelberger and R. Sanz. (2001). *Control of Complex Systems*. Chap. Three-tank Control Reconfiguration, pp. 241-283. Springer.
- [Bayar, 1992] Bayar M. and M. Staroswiechi. (1992). *Smart actuators: Generic functional architecture, service and cost analysis*. In: Proceeding of the International Conference on Intelligence Control and Instrumentation. pp.642-646.
- [Chow, 1984] Chow E.Y. and A.S. Willsky. (1984). *Analytical Redundancy and the Desing of Robust Failure Detection Systems*. IEEE Transactions of Automatic Control, 29(7): 603-614.
- [Clark, 1959] Clark, L.C. (1959). *Electrochemical device for chemical analysis*. US Patent 2,913,386.
- [Clarke, 1996] Clarke D.W. and P.M.A. Fraher. (1996). *Model-Based Validation of a DO₂ Sensor*. Control Eng. Practice, Vol. 4, No. 9, pp 1313-1320.
- [Crank, 1975] Crank J. (1975). *The Mathematics of Diffusion*. Second edition, Clarendon Press, Oxford.
- [Dailly, 1990] Dailly C. (1990). *Fault Monitoring and Diagnosis*. IEE Computing and Control Engineering Journal, 1(2):57-62.
- [EOLI, n.d.] EOLI (n.d.). <http://www.auto.ucl.ac.be/EOLI/>.
- [Endress, n.d.] Endress+Hauser (n.d.). *COS 4 / COS 4HD Sensor for Dissolved Oxygen*. Operating Instructions and technical information. Endress+Hauser GmbH+Co. <http://www.endress.com>.
- [Fibrianto, 2003] Fibrianto H. and D. Dochain. (2003). *Time optimal control of a biological wastewater treatment process by hybrid approach*. In: IFAC Conference on

- Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)03. Saint-Malo, France. pp. 171-176.
- [Fraher, 1998] Fraher P.M.A. and D. W. Clarke. (1998). *Fouling Detection and Compensation in Clark-Type DO_x Sensors*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 47, No. 3, June.
- [Frank, 1990] Frank P.M. (1990). *Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Analytical and Knowledge Based Redundancy - a survey and some new results*. Automatica, 26(3):459-474.
- [Frank, 1991] Frank P.M. (1991). *Enhancement of Robustness in Observer Based Fault Detection*. IFAC/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocesses '91. Preprints vol. 1, pág. 275-287.
- [Gertler, 1991] Gertler J.J. (1991). *Analytical Redundancy Methods in Fault Detection and Isolation*. IFAC/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocesses '91. Preprints vol. 1, pág. 9-21.
- [Gertler, 1998] Gertler J. (1998). *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Marcel Dekker. Inc.
- [Halme, 1991] Halme A. and J. Selkainako. (1991). *Advanced fault detection for sensors and actuators in process control*. IFAC/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocesses '91. Preprints vol. 1, pág. 343-349.
- [Henry, 1991] Henry M. P. and D. W. Clarke. (1991). *A Standard Interface for Self-Validating sensors*. IFAC/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocesses '91. Preprints vol. 2, páginas 405-412.
- [Henry, 1993] Henry M. P. and D. W. Clarke. (1993). *The Self-Validating Sensor: Rationale, Definitions and Examples*. Control Eng. Practice, Vol. 1, No. 4, pp. 585-610.
- [Henry, 1996] Henry M.P., N. Archer, M.R.A. Atia, J. Bowles, D.W. Clarke. (1996). *Programmable Hardware Architectures for Sensor Validation*. Control Eng. Practice, Vol. 4, No. 10, pp 1339-1354.

- [Isermann, 1984] Isermann R. (1984). *Process Fault Detection Based on Modelling and Estimation Methods*. Automatica. Vol. 20, 387-404.
- [Khandpur, 1981] Khandpur R. (1981). *Handbook of Modern Analytical Instruments*. First edition. Tab Books Inc.
- [Koeppen, 2003] Koeppen-Seliger B., T. Marcu, M. Capobianco, M. S. Gentil, M. Albert, S. Latzel. Magic. (2003). *An integrated approach for diagnostic data management and operator support*. In: Safeprocess03, IFAC, Washington DC. pp. 471-501, June.
- [Krevelen, 1972] Krevelen D.W.V. (1972). *The Properties of Polymers*. Elsevier, Amsterdam, the Netherlands.
- [Mehra, 1971] Mehra R.K. and I. Peshon. (1971). *An Innovations Approach to Fault Detection and Diagnosis in Dynamic Systems*. Automatica, 7(5): 637-640.
- [Moreno, 2000] Moreno J. y G. Buitrón (2000). *Optimización de un Biorreactor Aerobico para el Tratamiento de Aguas Residuales Industriales*. Coordinación de Automatización y Coordinación de Bioprocesos Ambientales, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- [Olsson, 1999] Olsson G. & Newell, B. (1999). *Wastewater Treatment Systems: Modelling, Diagnosis and Control*. IWA Publishing, London.
- [Panetto, 1993] Panetto H., J.M. Rivi re and J.F. Pétin. (1993). *Towards a unified approach for intelligent actuators and sensors*. In: Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics 'Systems Eng in the Service of Humans. Vol. 5 pp. 177-182.
- [Patton, 2001] Patton R.J., P. Frank and R. Clark. (2001). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer. London.
- [Ray, 1991] Ray A. and R. Luck. (1991). *An Introduction to Sensor Signal Validation in Redundant Measurement Systems*. IEEE Control Systems Magazine, 11(2):44-49.
- [Singh, 1987] Singh M.G., Hindi K.S. Schmidt G. & Tzafestas S.G. (1987). *Fault Detection & Reliability*. Proc of the second European Workshop on Fault Diagnostics Reliability and Related Knowledge Based Approaches. Manchester, UK.

Bibliografía

- [Soto, 2000] Soto B. G. (2000). *Biodegradación de compuestos tóxicos en un proceso SBR controlado por medio del oxígeno disuelto*. Trabajo de investigación de tesis. Facultad de Química, UNAM.
- [Tortora, 2003] Tortora G., B. Kouvaritakis, D. Clarke. (2003). *Fault-Accommodation with Intelligent Sensors*. Science@Direct, Automatica 39, pp. 1227-1233.
- [Tzafestas, 1989] Tzafestas S.G. (1989). *System Fault Diagnosis Using the Knowledge Based Methodology*. Prentice Hall.
- [Vargas, 1999] Vargas C. A. y J. Moreno. (1999). *Control de tiempo óptimo de un biorreactor aerobico usando observadores no lineales*. Trabajo de investigación de tesis. Facultad de Ingeniería, DEPMI, UNAM.
- [Zhou, 1999] Zhou F., N. Archer, J. Bowles, D. Clarke, M. Henry, C. Peters. (1999). *A General Hardware Platform for Sensor Validation*. The Institution of Electrical Engineers, páginas 14/1-14/5.

Apéndice A

Métodos de solución para ecuaciones de difusión

A.1 Introducción

Las soluciones generales de las ecuaciones de difusión pueden ser obtenidas a partir de una gran variedad de condiciones iniciales y de frontera, además de incluir las características particulares del coeficiente de difusión, que para efectos prácticos del presente trabajo se ha considerado constante.

Dichas soluciones normalmente tienen una o dos formas estándar. Cualquiera de las dos, consta de una serie de funciones de error o integrales relacionadas que en cuyo caso, es más conveniente la evaluación numérica en valores de tiempo pequeños, es decir, en las primeras etapas de la difusión, o también es en la forma de una serie trigonométrica que converge más satisfactoriamente para valores de tiempo grande. Cuando la difusión se lleva a cabo en un cilindro, las series trigonométricas son reemplazadas por series de funciones de Bessel.

Se tienen preferentemente tres métodos de solución:

- Método de reflexión y superposición
- Método de separación de variables
- Método de la transformada de Laplace

Los primeros dos métodos ilustran el significado físico de dos tipos de solución estándar. El tercero, emplea la transformada de Laplace y es esencialmente un método operador por el cual ambos tipos de solución anteriormente mencionados, pueden ser obtenidas. Es el más

poderoso de los tres métodos y es particularmente empleado en problemas más complejos.

El tratamiento completo necesario para la discusión matemática rigurosa de los tres métodos, es encontrada principalmente en trabajos sobre la conducción del calor. Sin embargo, en la siguiente sección se presenta el método de separación de variables como técnica utilizada para la solución de las ecuaciones de difusión descritas en este trabajo.

A.2 Método de separación de variables

Se retoman las expresiones matemáticas 3.30, 3.31, 3.32 y se aplica el método de separación de variables para encontrar su solución. La ecuación diferencial es

$$D_m w_{yy} = w_t \tag{A.1}$$

condiciones de frontera homogéneas

$$\begin{aligned} w(0, t) &= p(0, t) - v(0) = 0 \\ w(b, t) &= p(b, t) - v(b) = 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

y condiciones iniciales

$$w(y, 0) = p(y, 0) - v(y) = p_w - v(y) \tag{A.3}$$

donde $v(y)$ está dada por la ecuación 3.27.

Este método se basa en la idea de encontrar ciertas soluciones de la ecuación diferencial A.1, de la forma

$$w(y, t) = Y(y)T(t) \tag{A.4}$$

sustituyendo la ecuación A.4 por w en la ecuación diferencial A.1 da

$$D_m Y''T = YT' \tag{A.5}$$

donde los apóstrofes se refieren a la derivación ordinaria con respecto a la variable independiente, sea y ó t . La ecuación A.5 es equivalente a

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{1}{D_m} \frac{T'}{T} \tag{A.6}$$

en la cual las variables están separadas, es decir, el primer miembro sólo depende de y y el segundo miembro sólo de t . Para que la ecuación A.6 sea válida para $0 < y < b, t > 0$, es necesario que ambos miembros de la ecuación A.6 sean iguales a la misma constante. De otro modo, conservando una variable independiente fija (por ejemplo y) y variando la otra,

A. Métodos de solución para ecuaciones de difusión

uno de los miembros de la ecuación A.6 no cambiaría (el izquierdo en este caso), mientras el otro variará, violando así la igualdad. Por lo que, si se hace llamar a esta constante de separación σ , entonces la ecuación A.6 se transforma en

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{1}{D_m} \frac{T'}{T} = \sigma \quad (\text{A.7})$$

y se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes, para $Y(y)$ y $T(t)$:

$$Y'' - \sigma Y = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$T' - \sigma D_m T = 0 \quad (\text{A.9})$$

De esta manera se ha sustituido la ecuación diferencial A.1 por dos ecuaciones ordinarias, cada una de estas se puede resolver para cualquier valor de la constante de separación σ . El producto de las soluciones de las ecuaciones A.8 y A.9, por cualquier valor de σ da una solución de la ecuación diferencial A.1. Sin embargo, sólo se está interesado en las soluciones de la ecuación A.1 que también satisfagan las condiciones de frontera A.2.

Se sustituye $w(y, t)$ de la ecuación A.4 en la condición de frontera $y = 0$ y se obtiene

$$w(0, t) = Y(0)T(t) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Si la ecuación A.10 se satisface al elegir $T(t)$ como cero para toda t , entonces $w(y, t)$ será idénticamente cero. Esto es inaceptable, puesto que no satisface la condición inicial A.3. Por lo tanto, la ecuación A.10 debe ser satisfecha si

$$Y(0) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Similarmente, la condición de frontera en $y = b$ requiere que

$$Y(b) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Ahora se desea considerar la ecuación A.8 sujeta a las condiciones en la frontera A.11 y A.12. Deben distinguirse dos casos, dependiendo de si $\sigma = 0$ ó $\sigma \neq 0$.

Si $\sigma = 0$, entonces la solución general de la ecuación A.8 es

$$Y(y) = k_1 y + k_2 \quad (\text{A.13})$$

Para satisfacer la condición en la frontera A.11 se debe escoger $k_2 = 0$ y para satisfacer la segunda condición de frontera se debe tener $k_1 = 0$. De ahí que $Y(y)$ es idénticamente cero y por tanto $w(y, t)$ es también idénticamente cero. Como antes, esto es inaceptable y se

A. Métodos de solución para ecuaciones de difusión

concluye que σ no debe ser cero.

Si $\sigma \neq 0$, entonces es conveniente reemplazarla por $-\lambda^2$, donde λ es un parámetro nuevo, no necesariamente real. Entonces la ecuación A.8 se convierte en

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0 \quad (\text{A.14})$$

cuya solución general es

$$Y(y) = k_1 e^{i\lambda y} + k_2 e^{-i\lambda y} \quad (\text{A.15})$$

Al aplicar las condiciones de frontera A.11 y A.12, se obtiene

$$k_1 + k_2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$k_1 e^{i\lambda b} + k_2 e^{-i\lambda b} = 0$$

El sistema de ecuaciones A.16 siempre tiene la solución trivial $k_1 = 0, k_2 = 0$; como antes, esto conduce a la conclusión inaceptable de que $w(y, t)$ es idénticamente cero. Existen soluciones no triviales de las ecuaciones A.16 si y sólo si, el determinante de coeficientes es cero, es decir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\lambda b} & e^{-i\lambda b} \end{vmatrix} = e^{-i\lambda b} - e^{i\lambda b} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Si se escribe ahora, $\lambda = \mu + iz$, donde μ y z son reales, entonces la ecuación A.17 se reduce a

$$e^{-i\mu b} e^{zb} - e^{i\mu b} e^{-zb} = 0 \quad (\text{A.18})$$

Ahora se emplea la relación de Euler

$$e^{i\mu b} = \cos \mu b + i \sin \mu b \quad (\text{A.19})$$

y la ecuación A.18 se separa en las partes real e imaginaria para obtener

$$\left(e^{zb} - e^{-zb} \right) \cos \mu b - i \left(e^{zb} + e^{-zb} \right) \sin \mu b = 0 \quad (\text{A.20})$$

La ecuación A.20 se satisface solamente si las partes reales e imaginarias son cero por separado, es decir

$$\left(e^{zb} - e^{-zb} \right) \cos \mu b = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\left(e^{zb} + e^{-zb} \right) \sin \mu b = 0 \quad (\text{A.22})$$

Puesto que $e^{zb} + e^{-zb} > 0$ para todos los valores de z y b , la ecuación A.22 requiere que $\sin \mu b = 0$. De donde, debe escogerse de modo que μb sea un múltiplo de π , es decir $\mu = \frac{n\pi}{b}$. Para esta elección de μ , $\cos \mu b \neq 0$, y la ecuación A.21 se reduce a

$$e^{zb} - e^{-zb} = 2 \sinh zb = 0 \quad (\text{A.23})$$

A. Métodos de solución para ecuaciones de difusión

en consecuencia $z = 0$. Puesto que $z = 0$, no se puede tener $\mu = 0$ porque se tendría $\sigma = 0$ que ya se había rechazado. Entonces se toma

$$\lambda = \mu = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{A.24})$$

donde n es un número entero diferente de cero.

Volviendo a las ecuaciones A.16, se observa que $k_2 = -k_1$, y por tanto, de la ecuación A.15 se convierte en

$$Y(y) = k_1 (e^{i\mu y} - e^{-i\mu y}) \quad (\text{A.25})$$

Al emplearse la relación de Euler A.19 se encuentra que $Y(y)$ es proporcional a $\sin \mu y$.

En resumen, se puede observar que las condiciones de frontera A.2 se satisfacen, sólo si la constante de separación σ tiene ciertos valores reales y negativos, dados por

$$\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (\text{A.26})$$

donde $n \neq 0$ es un entero. Las funciones correspondientes Y son proporcionales a $\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$. Después de introducir los valores de σ dados por la ecuación A.26 a la ecuación A.9, se encuentra que $T(t)$ es proporcional a $\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}\right]$. Por tanto, despreciando las constantes arbitrarias de proporcionalidad, las funciones

$$w_n(y, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.27})$$

satisfacen las condiciones en la frontera A.2, así como la ecuación diferencial A.1.

Ahora, solamente falta por satisfacer la ecuación inicial A.3. La ecuación diferencial A.1 y las condiciones en la frontera A.2 son lineales, homogéneas y se satisfacen por $w_n(y, t)$ para $n = 1, 2, \dots$. Con base al principio de superposición se sabe que, cualquier combinación lineal de las $w_n(y, t)$ también satisface la ecuación diferencial y las condiciones en la frontera. Como consecuencia se tiene que

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^m C_n w_n(y, t) = \sum_{n=1}^m C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 D_m t}{b^2}} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.28})$$

donde los coeficientes C_n aún no están determinados y donde m es cualquier entero positivo. Puesto que $w(y, t)$ dada por la ecuación A.28, satisface la ecuación diferencial A.1 y las condiciones en la frontera, para cualquier elección de C_n , pero como no es posible satisfacer

A. Métodos de solución para ecuaciones de difusión

la condición inicial A.3 por medio de una suma finita de la forma A.28. Esto sugiere que formalmente se extienda el principio de superposición para incluir series infinitas, es decir

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D_m t}{b^2}} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.29})$$

Los términos individuales en la ecuación A.29 satisfacen la ecuación diferencial parcial A.1, así como las condiciones en la frontera y cualquier suma finita de tales términos también lo hará. Para satisfacer las condiciones iniciales A.3 se debe tener que

$$w(y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} = p_w - v(y) \quad (\text{A.30})$$

Ahora es posible expresar $p_w - v(y)$ por medio de una serie infinita de términos senoidales

$$p_w - v(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.31})$$

Antes de continuar, resulta útil distinguir dos clases de funciones para las cuales pueden simplificarse las fórmulas de Euler-Fourier. Estas son las funciones pares e impares, que geoméricamente se caracterizan por la propiedad de simetría con respecto al eje y y al origen, respectivamente.

Analíticamente, f es una función par si su dominio contiene al punto $-x$ siempre que contenga al punto x , y si

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{A.32})$$

para cada x en el dominio de f . De modo semejante, f es una función impar si su dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x , y si

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{A.33})$$

para cada x en el dominio de f .

También es importante mencionar las siguientes dos propiedades integrales de las funciones pares e impares:

- Si f es una función par, entonces

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx \quad (\text{A.34})$$

A. Métodos de solución para ecuaciones de difusión

- Si f es una función impar, entonces

$$\int_{-l}^l f(x)dx = 0 \quad (\text{A.35})$$

Estas propiedades son intuitivamente claras a partir de la interpretación de una integral en términos del área bajo la curva. Por ejemplo, si f es par, se tiene

$$\int_{-l}^l f(x)dx = \int_{-l}^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx \quad (\text{A.36})$$

Al hacer x igual a $-s$ en el primer término del lado derecho y usando la ecuación A.32, da

$$\int_{-l}^l f(x)dx = - \int_l^0 f(s)ds + \int_0^l f(x)dx = 2 \int_0^l f(x)dx \quad (\text{A.37})$$

la prueba de la propiedad correspondiente para las funciones impares es similar.

Las funciones pares e impares son en particular importantes en las aplicaciones de las series de Fourier. Ahora, si se supone que f y f' son seccionalmente continuas sobre $-l \leq x < l$, y que f es una función periódica impar de período $2l$ (dos ele). Entonces de las siguientes propiedades:

- La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar; el producto (cociente) de dos funciones impares es par.
- La suma (diferencia) de una función impar y una función par no es ni par ni impar; el producto (cociente) de dos funciones así es impar.

se deduce que $f(x) \cos(\frac{n\pi x}{l})$ es impar y $f(x) \sin(\frac{n\pi x}{l})$ es par. En este caso, los coeficientes de Fourier de f son

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.38})$$

y la serie de Fourier para f es de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{A.39})$$

A esta serie se le llama serie senoidal de Fourier.

Después de esta breve explicación se puede proceder a calcular los coeficientes b_n en la serie infinita de la ecuación A.31. La ecuación A.30 se puede satisfacer eligiendo $C_n = b_n$

A. Métodos de solución para ecuaciones de difusión

para cada n . Con los coeficientes C_n seleccionados de esta manera, la ecuación A.29 da la solución del problema A.1 con los valores en la frontera A.2 y condiciones iniciales A.3. De acuerdo a A.38 y A.39 los coeficientes b_n en A.31 son

$$b_n = \frac{2}{b} \int_0^b [p(y, t) - v(y)] \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (\text{A.40})$$