



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“ASPECTOS MATRICIALES DE LA TEORIA DE GRAFICAS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

SALVADOR ORTEGA MOCTEZUMA

DIRECTOR DE TESIS: DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA



2005



m. 343651



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Aspectos Matriciales de la Teoría de Gráficas"

realizado por Salvador Ortega Moctezuma

con número de cuenta 09960618-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de:  
 Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- Director de Tesis Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía *Hugo A. Rincón M.*
- Propietario Dra. Hortensia Galeana Sánchez *H. Galeana*
- Propietario Dr. Alejandro Alvarado García *A. Alvarado*
- Suplente M. en C. Patricia Cortés Flores *P. Cortés*
- Suplente Mat. Laura Pastrana Ramírez *Laura Pastrana R.*

**Consejo Departamental de Matemáticas**

*[Firma]*

Act. Jaime Vazquez Alamilia

CONSEJO DEPARTAMENTAL  
 DE  
 MATEMÁTICAS

Siempre hay algo que decir de las personas que han estado contigo a lo largo del camino:

Agradezco a mis padres por todo el apoyo que me han brindado, no solo a lo largo de este proyecto sino durante toda mi vida. Se que aunque en muchas cosas pensamos distinto y tenemos diferencias siempre terminan apoyándose y gracias a eso la confianza que les tengo es grande.

A mi hermana por ser mi compañero (sabes a que me refiero), por la fortaleza que siempre has demostrado para lograr lo que quieres. Por escucharme y ayudarme eso es muy importante.

Mis tías, por que dentro de las diferencias de carácter que tienen todas y cada una (¡necesitan ayuda!) he aprendido mucho de ustedes, les agradezco que en los momentos más difíciles en los que me he encontrado siempre han estado conmigo. A mis tíos por que siempre me trataron como uno mas de sus hijos.

A mis primos: crecimos como hermanos, la mezcla de personalidades que tenemos es de lo mejor. Que aunque en estos momentos nuestras vidas estén tomando caminos tan distintos espero que en algún momento vuelvan a converger.

Al Dr. Hugo Rincón por toda la paciencia que tuvo conmigo y por tener siempre tiempo para dedicarle tanto a mis dudas como mi trabajo. Disfruté mucho trabajar contigo.

Quiero agradecer a la Mat. Laura Pastrana, a la Dra. Hortensia Galeana, al Dr. Alejandro Alvarado y al M en C. Patricia Cortés por el tiempo y cuidado que le dedicaron a revisar mi trabajo. Las observaciones que realizaron en el mismo fueron de gran ayuda.

Las personas mencionadas a continuación no tienen ningún orden en particular todas son igual de importantes (ya saben por eso de herir susceptibilidades):

A Erick y Oscar por ayudarme abrir mi panorama a lo largo de toda la carrera, los grupos que compartimos -los cuales disfrute bastante- y enseñarme que la tarea se puede realizar a la temperatura exacta de la cebada. Johan por ayudarme con distintos aspectos de este trabajo y hacer del paso por la Facultad algo más placentero. César, Pavel, Abel, Zian y Ramiro, por las tardes de sano esparcimiento.

Gracias Isabel por ser la amiga que eres y haberme ayudado con todo lo que te fue posible hasta antes de irte. Verónica te agradezco todo el apoyo que me brindaste para poder terminar este trabajo.

A todos los amigos que he hecho a lo largo de mi vida los cuales siempre han estado conmigo y me han apoyado en diferentes etapas.

*Aspectos Matriciales de la Teoría de  
Gráficas*

Salvador Ortega Moctezuma

# Índice general

Introducción	v
<b>1. Conceptos Básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Conexidad . . . . .	11
1.2. Árboles . . . . .	18
1.2.1. Árboles Generadores . . . . .	23
<b>2. La Matriz de adyacencia</b>	<b>27</b>
2.1. Clanes . . . . .	33
2.2. Digráficas de dominación . . . . .	38
<b>3. La Matriz de Incidencia</b>	<b>47</b>
<b>4. La Matriz de Ciclos</b>	<b>53</b>
<b>5. La Matriz de Conjuntos de Corte</b>	<b>69</b>
<b>6. La Matriz de Trayectorias</b>	<b>89</b>

# Introducción

Puede ser que en primera instancia no sea sencillo percibir algún tipo de similitud entre las matrices y la Teoría de Gráficas, pero como se mostrará a lo largo de este trabajo se pueden establecer relaciones interesantes entre la Teoría de Gráficas y cierto tipo de matrices.

El objetivo de este trabajo es el de presentar algunas de las propiedades que relacionan a las matrices con las gráficas, siendo algunas de ellas bastante conocidas y algunas otras no. Esto con el fin de mostrar ciertos conceptos y resultados que pueden ser interesantes o curiosos tanto para las personas que se encuentren familiarizados con el tema como para aquellos que tengan el interés de adentrarse en el mismo.

Para facilitar su lectura, este trabajo se encuentra acompañado de una serie de ejemplos y dibujos que permiten que el lector tenga una idea más precisa de los conceptos que se analizarán a lo largo del texto. Así, este trabajo comienza con una serie de definiciones básicas que servirán de esqueleto para el manejo de los resultados que serán mostrados posteriormente. Esto puede ser de gran ayuda para el lector que no se encuentre familiarizado con las ideas fundamentales de la Teoría de Gráficas como son el concepto de gráfica, digráfica, camino, ciclo, etc; que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Más adelante se encuentra un apartado en el cual se presenta el concepto de conexidad para el caso de gráficas y digráficas.

En la última sección se introducen los conceptos referentes a árboles, así como su relación con las gráficas conexas y acíclicas.

En el capítulo dos se define la matriz de adyacencia, se muestra la relación que existe entre la matriz de adyacencia y el número de caminos entre distintos pares de vértices en una gráfica. Se introducen los conceptos de clan, de gráficas de dominación y cómo se relacionan estos con las propiedades de la matriz de adyacencia.

La definición de matriz de incidencia se encuentra en el tercer capítulo,

junto con las propiedades que cumple la gráfica asociada a dicha matriz, esto con el fin de establecer en los capítulos posteriores algunas propiedades de la matriz de incidencia, la de ciclos y la de conjuntos de corte.

En el capítulo referente a la matriz de ciclos se describe cómo se construye esta matriz tanto para el caso de gráficas como digráficas. Por otro lado se demuestran algunos resultados en los que se puede observar la relación que existe entre la matriz de ciclos y la matriz de incidencia. Este será utilizado en el capítulo posterior para mostrar la equivalencia que existe entre el rango de la matriz de conjuntos de corte y el de la matriz de conjuntos fundamentales de corte.

Se introduce el concepto de matriz de ciclos fundamentales (que será utilizado dentro del cuarto capítulo), y también se define la matriz de semiciclos fundamentales para el caso de digráficas, que servirá para demostrar que mediante una serie de combinaciones lineales y la matriz identidad se puede obtener la matriz de semiciclos.

El quinto capítulo comienza con la demostración de un resultado que establece una relación entre los ciclos y los conjuntos de corte, para utilizarlo posteriormente en las pruebas de propiedades referentes a la matriz de ciclos y de conjuntos de corte. En la última parte de este capítulo se muestra como a partir de la matriz de incidencia se pueden generar la matriz de ciclos fundamentales y de conjuntos de cortes fundamentales.

El último capítulo es el referente a la matriz de trayectorias. En éste, se explica la forma en la que se construye esta matriz, y al igual que en los capítulos anteriores se exponen las propiedades con las que esta cumple. Cabe señalar que este trabajo se basa en el libro "Graph Theory applications" de L.R. Foulds y en el libro "Applications of Linear Algebra" de Chris Rorres.

# Capítulo 1

## Conceptos Básicos

El objetivo principal de esta primera sección será el de familiarizar al lector con los conceptos iniciales que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Los orígenes de la Teoría de Gráficas se pueden considerar sencillos. En la ciudad de Königsberg, hoy Kaliningrado, se juntan dos ríos formando una isla en su confluencia. Siete puentes unían (ya no, pues la ciudad fue parcialmente destruída durante la Segunda Guerra Mundial) las diferentes partes de la ciudad, como se aprecia en el mapa de la *figura A*.

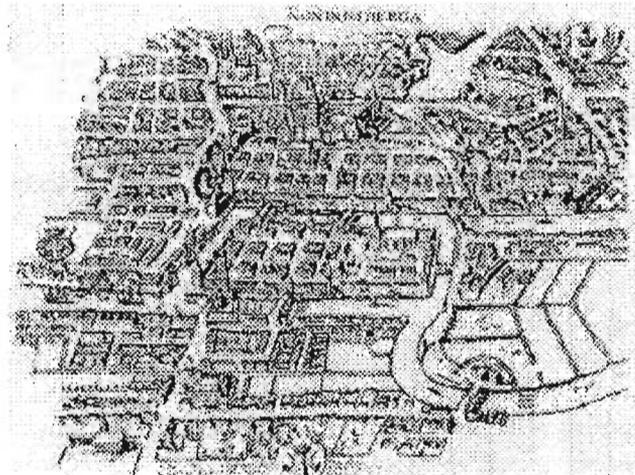


Figura A

En el siglo XVIII se hizo popular como acertijo averiguar si era posible

cruzar los siete puentes de la ciudad pasando sólo una vez por cada uno de ellos.

Este problema, por supuesto, puede resolverse mediante un estudio exhaustivo de todos los posibles itinerarios. Pero en 1736, el matemático suizo Leonhard Euler publicó "Solutio Problematis ad Geometrian Situs Partenen-tis", un artículo en el que resolvía el problema en general, así este trabajo es considerado como el inicio de la Teoría de Graficas.

La idea de Euler fue considerar los cuatro lugares terrestres, que se deseaban comunicar, como puntos de destino y los puentes como trayectorias entre estos puntos. En consecuencia, el mapa de Köninsberg puede ser reducido al siguiente diagrama *figura B*, que es un ejemplo de lo que se suele llamar gráfica. Con este diagrama Euler demostró que no existía una ruta mediante la cual se pudieran cruzar los siete puentes cruzando una sola vez cada uno de ellos.

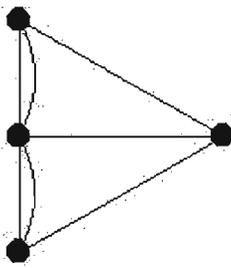


Figura B

**Definición 1** Una gráfica es una pareja de conjuntos  $(V, U)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío y finito, de elementos denominados vértices y  $U$  es un conjunto de parejas de vértices distintos, llamadas aristas. Esta pareja de conjuntos se denotará como  $G = (V, U)$ .

En este caso los elementos del conjunto  $U$  se denotarán por  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Una de las características que hacen que la teoría de graficas sea tan agradable es la facilidad de poder representar cualquier gráfica como un dibujo. Esto siempre es posible porque  $V$  y  $U$  son conjuntos finitos. Para hacer una representación pictórica de una gráfica se debe considerar cada uno de los vértices de  $V$  como un punto en el plano y cada una de las aristas de  $U$  como una línea que une distintos vértices de  $V$ . Como ejemplos de gráficas se tienen los siguientes (*figura 1,1*):

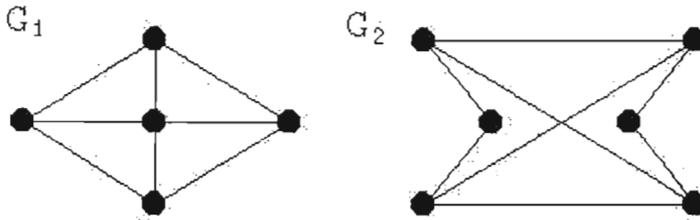


Figura 1.1

Una gráfica  $G = (V, U)$ , se llamará etiquetada cuando los vértices en  $V$  estén nombrados de tal forma que se puedan distinguir unos de otros. En este trabajo cuando se hable de un vértice etiquetado se encontrará que en las figuras  $v_i = i$ , así en la *figura 1,2* se pueden apreciar ejemplos de gráficas etiquetadas.

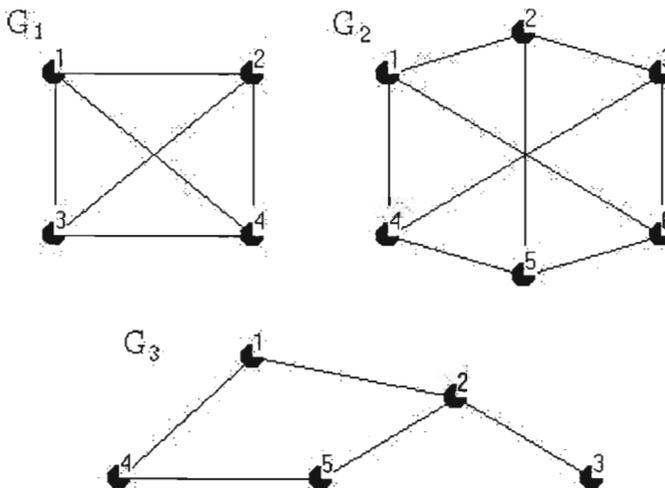


Figura 1.2

Si se considera que la arista  $u = \{v_i v_j\} \in U$ , entonces diremos que  $v_i$  y  $v_j$  son incidentes con  $u$  y adyacentes el uno con el otro. Por otro lado si la arista  $u' = \{v_i v_k\} \in U$ , entonces diremos que las aristas  $u$  y  $u'$  son adyacentes pues tienen al vértice  $v_i$  en común.

Hay problemas relacionados con la Teoría de Gráficas en los cuales se considera que las aristas tienen una orientación o sentido, a esta variedad de gráficas se les conoce con el nombre de *Digráficas* o *Gráficas dirigidas*. Así una digráfica es un conjunto finito de elementos denotados por,  $v_1, v_2, \dots, v_n$

junto con una colección finita de pares ordenados  $(v_i, v_j)$ , formados por elementos distintos del conjunto. A continuación se dará una definición más precisa del concepto de digráfica.

**Definición 2** Sea  $V$  un conjunto finito, una digráfica es un conjunto  $D = (V, A)$  tal que  $A \subset (V \times V) \setminus \Delta$  y  $V \neq \emptyset$ .

$\Delta$  denota la relación diagonal.

Los elementos del conjunto  $A$  se llamarán flechas o arcos, denotados por  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y a los elementos del conjunto  $V$  se denominarán vértices y serán denotados por  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

La notación  $v_i \rightarrow v_j$  (léase “ $v_i$  incide con  $v_j$ ”) indicará que el arco  $(v_i, v_j)$  pertenece a la digráfica.

Se obtiene un diagrama de una digráfica, representando a los vértices como puntos de un plano y a  $v_i \rightarrow v_j$  por una línea recta o curva trazada del vértice  $v_i$  al  $v_j$ . Si  $v_i \rightarrow v_j$  y  $v_j \rightarrow v_i$  son ambas flechas en  $D$  (en cuyo caso se pueden escribir  $v_i \leftrightarrow v_j$ ), entonces se puede trazar una sola línea entre  $v_i$  y  $v_j$  con dos puntas de flecha en sentidos contrarios o dos flechas.

Como ejemplos de digráficas están los siguientes (figura 1,3):

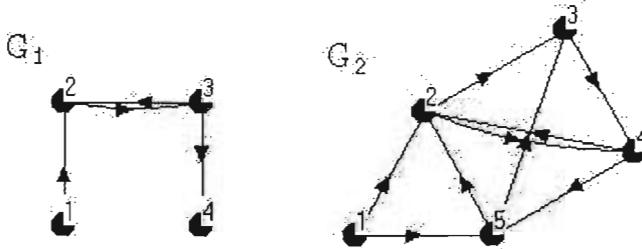


Figura 1.3

Una gráfica o una digráfica pueden tener “componentes” separadas formadas por grupos de vértices que sólo se unen entre ellos y algunos vértices, como en la figura 1,4, en la cual  $v_5$  está aislado de los demás (esto será tratado con mayor cuidado en la sección referente a conexidad). Como se señala desde la definición la expresión  $v_i \rightarrow v_i$ , no se cumple.

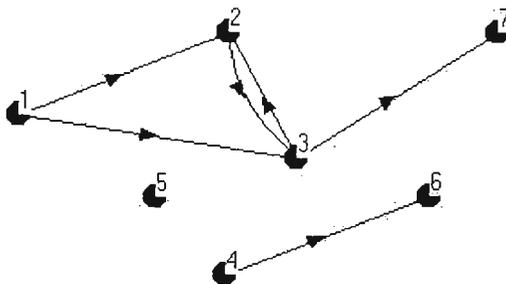


Figura 1.4

El *grado* de un vértice es el número de aristas que inciden en él y es denotado por  $d(v_i)$ .

**Ejemplo 1** En el caso de la gráfica de la figura 1,5, se observa que  $d(v_1) = 4$  y el  $d(v_3) = 3$ .

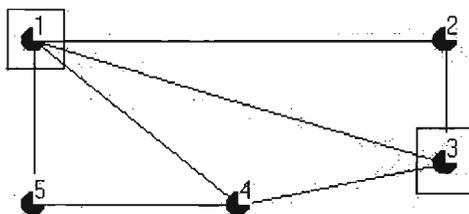


Figura 1.5

Para una digráfica  $D = (V, A)$ , se conoce como el *grado exterior* de un vértice  $v$  al número de arcos que salen directamente de  $v$  y es denotado como  $od(v)$ . Al número de arcos que entran directamente a  $v$  se le conoce como *grado interior* de  $v$  y se escribirá  $id(v)$ . Para cualquier vértice  $v$  en una digráfica  $D$  definiremos  $d(v) = od(v) + id(v)$ .

Cuando todos los vértices de una gráfica tienen el mismo grado ésta se llama *regular*. Un vértice que tiene como grado 1 es llamado *vértice terminal* o *pendiente*. Una arista incidente con un vértice pendiente es llamada *terminal*

o pendiente. Un vértice con grado 0 es un *vértice aislado*. En la *figura 1,6* el vértice  $v_6$  es pendiente y el vértice  $v_7$  es aislado.

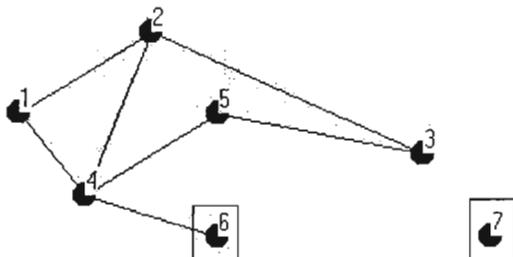


Figura 1.6

Un *camino* en una gráfica  $G$  es una sucesión alternada de vértices y aristas de la siguiente forma:

$$\langle v_1, \{v_1v_2\}, v_2, \{v_2v_3\}, v_3, \dots, v_{n-1}, \{v_{n-1}v_n\}, v_n \rangle$$

Se debe observar que:

- i) Esta sucesión empieza y termina con un vértice.
- ii) Cada una de las aristas es incidente con su vértice antecesor y sucesor.

Así se puede decir que el camino une a los vértices  $v_1$  y  $v_n$ . Otra forma para denotar un camino puede ser:

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n \rangle$$

En la *figura 1,7* se pueden observar ejemplos de caminos en una gráfica  $G$ .

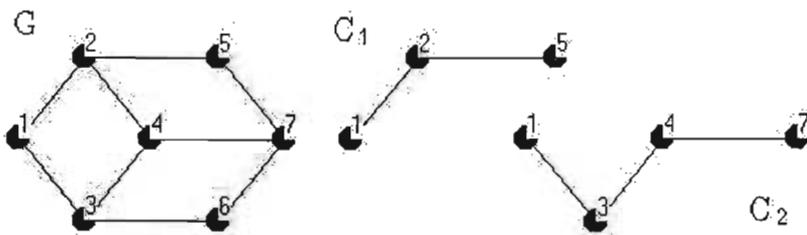


Figura 1.7

Dentro de las gráficas existen distintos tipos de caminos:

i) Un camino recibe el nombre de *cerrado* si el vértice con que inicia, coincide con el vértice que termina esto quiere decir que  $v_1 = v_n$ . Este es abierto en cualquier otro caso. Ejemplos de caminos cerrados se tienen en la *figura 1,8*.

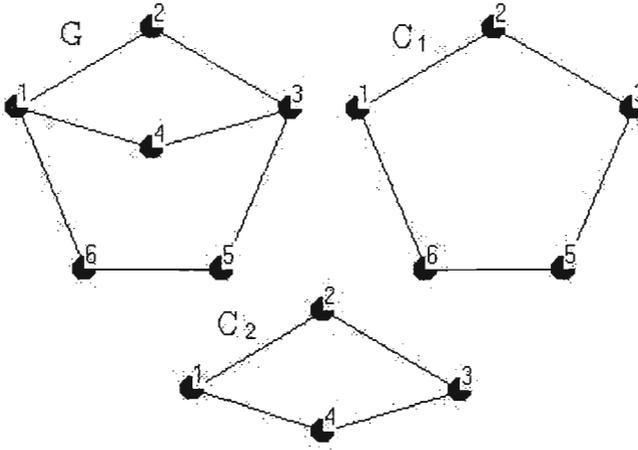


Figura 1.8

ii) Cuando todas las aristas de un camino son distintas éste recibe el nombre de *paseo*.

iii) Se conoce como *trayectoria* a un camino en la cual todos sus vértices (y por lo tanto todas sus aristas) son distintas.

**Definición 3** *Un camino cerrado con al menos tres vértices, y todos sus vértices distintos, (excepto por el primero y el último, que coinciden) recibe el nombre de ciclo.*

**Definición 4** *Un ciclo se llama par cuando contiene un número par de aristas ( y necesariamente de vértices), en cualquier otro caso se le llamará impar. Un ciclo con  $n$  aristas recibe el nombre de  $n$  – ciclo. En el caso de que  $n = 3$  este se conoce como triángulo. La gráfica que se encuentra formada solamente por un  $n$  – ciclo se denota por  $C_n$ .*

En la *figura 1,9* se puede observar una gráfica con un ciclo par y un triángulo.

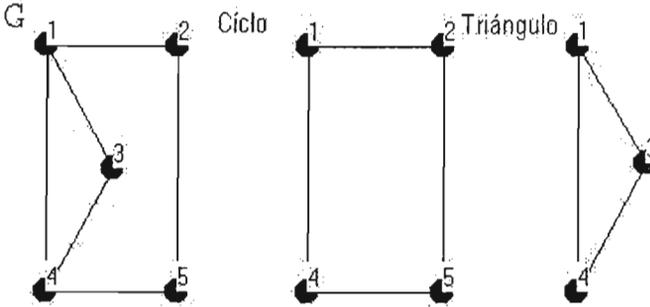


Figura 1.9

Sea  $G = (V, U)$  una gráfica, un *cuello* en  $G$  es el mínimo entre las longitudes de los ciclos.

Por ejemplo el cuello de la gráfica  $G$  de la *figura 1,9* es 3 y corresponde al ciclo que se encuentra formado por el conjunto de vértices  $\{v_1, v_3, v_4\}$ .

**Definición 5** Una gráfica  $G$  que no contenga ciclos se le llama *acíclica*.

En la *figura 1,10* se tienen dos ejemplos de gráficas acíclicas.

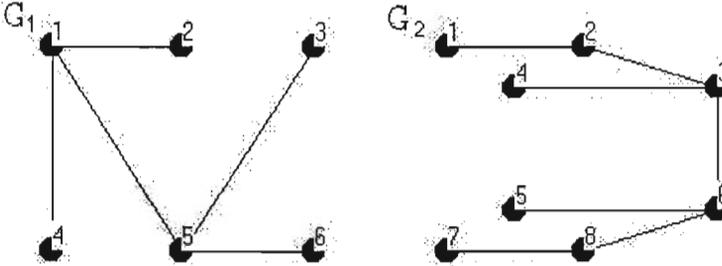


Figura 1.10

Después de analizar los conceptos anteriores se puede hablar acerca de las propiedades de dos gráficas que cumplen con ser isomórfas.

**Definición 6** Sean  $G_1 = (V_1, U_1)$  y  $G_2 = (V_2, U_2)$  dos gráficas. Diremos que  $G_1$  y  $G_2$  son isomórfas (denotándolo por  $G_1 \simeq G_2$ ), si existe una función biyectiva  $f : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $v_1 v_2 \in U_1 \iff f(v_1) f(v_2) \in U_2$ .

**Definición 7**  $G_1 \simeq G_2 \iff f$  preserva adyacencia (esto quiere decir que dos vértices son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si sus imágenes bajo  $f$  son adyacentes en  $G_2$ ).

**Ejemplo 2** Considérense la gráficas  $G_1 = (V_1, U_1)$  y  $G_2 = (V_2, U_2)$  de la *figura 1,11*.

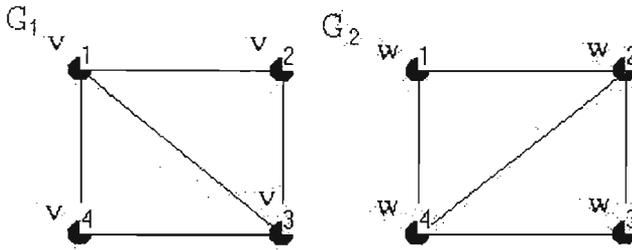


Figura 1.11

Las dos gráficas de la *figura 1,11* son isomorfas pues existe la función biyectiva  $f(v_i) = w_{i+1} \pmod{4}$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ , que es un isomorfismo.

Es interesante prestar atención en las propiedades que cumplen las gráficas que se encuentran relacionadas por un isomorfismo.

Las gráficas isomorfas tienen:

- i) El mismo número de vértices.
- ii) El mismo número de aristas.
- iii) Un mismo número de vértices con grado  $k$ .
- iv) El mismo número de ciclos.
- v) El mismo cuello.

Por otro lado, estas propiedades son necesarias pero no son un criterio suficiente para determinar si dos gráficas son isomorfas. Esto se puede observar en el ejemplo de la *figura 1,12* en el cual las dos gráficas cumplen con las propiedades *i), ii), iii), iv)*, pero no son isomorfas. A un isomorfismo de una gráfica  $G$  en sí misma se le conoce con el nombre de automorfismo.

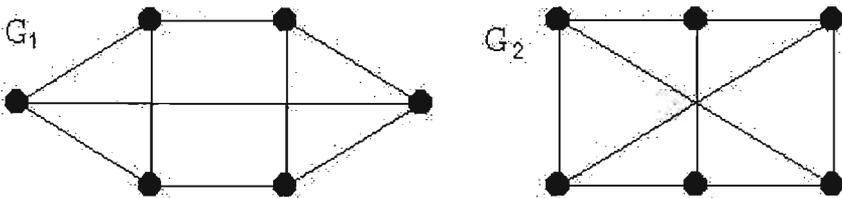


Figura 1.12

Si se observan con detenimiento las dos gráficas de la *figura 1,12* se puede notar que la primera muestra dos conjuntos de tres vértices que forman dos triángulos, mientras que en la segunda dichos triángulos no existen, por lo tanto se puede afirmar (como se dijo en el párrafo anterior) que estas dos gráficas no son isomorfas.

En algunas ocasiones nos interesan solo algunos aspectos de una gráfica. Esto puede representarse de numerosas y diferentes formas. Dada una gráfica

$G = (V, U)$ , se pueden considerar: *i)* sólo algunos de los vértices y todas las aristas en  $U$  que unen a estos pares de vértices, *ii)* todos los vértices y sólo algunas de las aristas existentes en  $U$  que unen a estos vértices o *iii)* sólo algunos de los vértices y algunas de las aristas en  $U$  que unen a cada par de vértices.

De una forma más precisa:

*i)* Sea  $X$  un subconjunto no vacío de  $V$ . La gráfica formada por el conjunto de vértices que están en  $X$  y el conjunto de aristas que contiene exactamente a las aristas en  $U$  las cuales unen a los vértices en  $X$  recibe el nombre de *subgráfica de  $G$  inducida por  $X$* .

En la *figura 1,13* se muestra una gráfica, con dos de sus respectivas *subgráficas inducidas*:

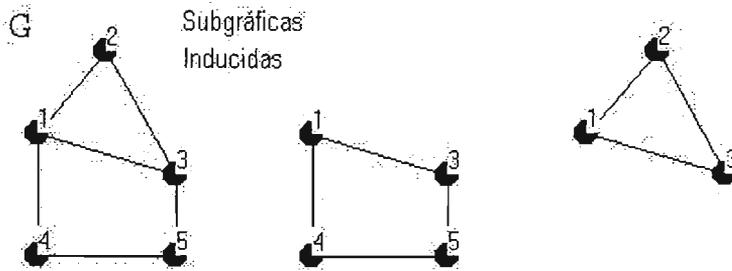


Figura 1.13

*ii)* Sea  $F$  un subconjunto propio de  $U$ . La gráfica  $G = (V, F)$ , es llamada una *subgráfica generadora* de  $G$ . Este concepto se encuentra ilustrado en la *figura 1,14* siguiente:



Figura 1.14

*iii)* Por otro lado sea  $G = (V, U)$  una gráfica, una *subgráfica* de  $G$  es una gráfica  $G' = (W, F)$  tal que  $W \subseteq V$  y  $F \subseteq U$  *figura 1,15*.

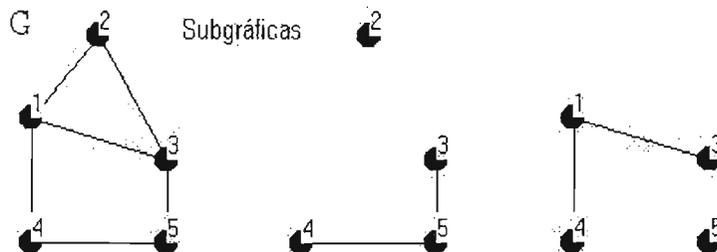


Figura 1.15

Cuando un vértice  $v$  (o los vértices de una subgráfica  $G_1$ ) y todas las aristas incidentes con este vértice (con estos vértices), son removidos de una gráfica  $G$  la gráfica resultante se denota por  $G - v$  ( $G - G_1$ ). Cuando una arista  $u$ , es eliminada de una gráfica, la gráfica resultante se expresa como  $G - u$ . También si una arista  $u$  (conjunto de aristas  $U$ ), no pertenece a una gráfica  $G$  y es agregada a  $G$  la gráfica resultante será denotada como  $G + u$  ( $G + E'$ ).

## 1.1. Conexidad

Uno de los conceptos más importantes dentro de la Teoría de Gráficas es el de conexidad. A continuación se introducirán algunas de las ideas concernientes a este aspecto dentro de la estructura de las gráficas.

**Definición 8** Sea  $G = (V, U)$ , se dice que  $G$  es conexa si para todo par de vértices en  $G$ , existe una trayectoria que los une y se dirá que es desconexa si no es conexa.

Como ejemplos de gráficas conexas, se tienen los de la *figura 1,1,1*:

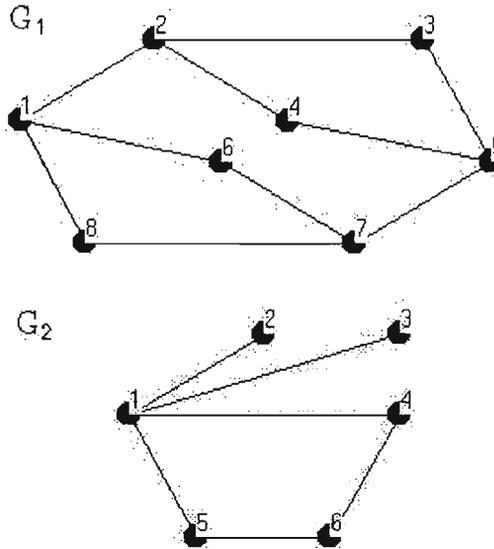


Figura 1.1.1

En la *figura 1,1,2*, se muestra una gráfica desconexa.

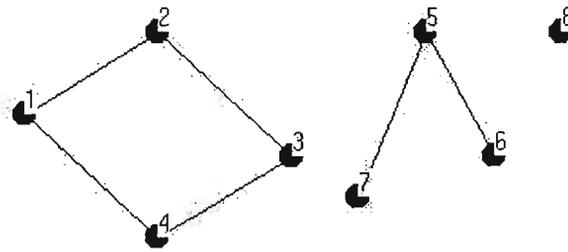


Figura 1.1.2

Una subgráfica conexas máxima (esto quiere decir que el conjunto contiene al máximo número de elementos que permiten que se cumpla dicha propiedad) de una gráfica  $G$  recibe el nombre de *componente conexas* de  $G$ . Una gráfica recibe el nombre de *completa* cuando todo par de vértices en  $G$  se encuentra conectado por una arista. Así una gráfica completa con  $n$  vértices se denota por  $K_n$ .

Un vértice  $v$  (arista  $u$ ) en una gráfica  $G$  se llama *vértice de corte* (*punte*) de  $G$  si  $G - v$  ( $G - u$ ) comprende un mayor número de componentes conexas con respecto a las que están en  $G$ . Así si  $G$  es conexas ( esta formada por una sola componente conexas) con un *vértice de corte*, (*punte*), entonces  $G - v$  ( $G - u$ ) por definición debe estar formada al menos por dos componentes conexas. Sea  $G = (V, U)$  la gráfica de la *figura 1,1,3*.

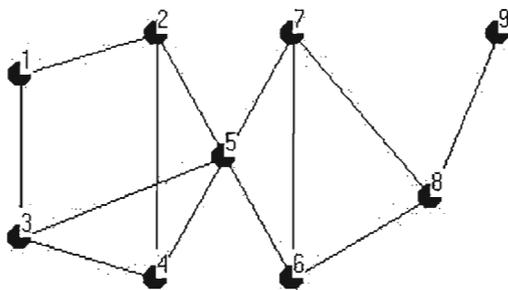


Figura 1.1.3

En la gráfica anterior se puede notar que el vértice  $v_5$  es un *vértice de corte*, pues como se observa en la gráfica  $G - v_5$  de la *figura 1,1,4* el número de componentes conexas de  $G$  es menor.

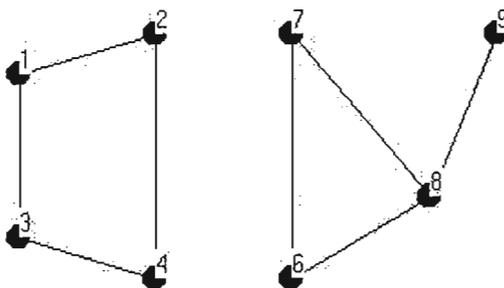


Figura 1.1.4

Una gráfica conexas que no contiene vértices de corte se llamará *gráfica no - separable*. Como ejemplos de *gráficas no - separables* se tienen las gráficas de la *figura 1,1,5*. Así todas las gráficas que no son *no - separables* reciben el nombre de *separables*.

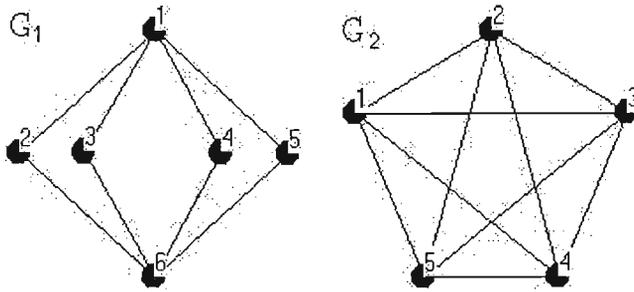


Figura 1.1.5

En una gráfica separable  $G$  un *bloque* es una subgráfica *maxima no - separable* de  $G$ . En la *figura 1,1,6* se tiene un ejemplo de una gráfica  $G$ , con una subgráfica inducida por el conjunto de vértices  $\{v_4, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}\}$  así esta subgráfica es un *bloque* de la gráfica  $G$ .

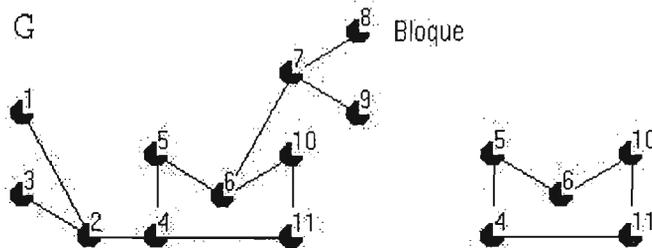


Figura 1.1.6

La idea de conexidad también puede ser extendida para el caso de *digráficas*  $D = (V, A)$ . Pero primero es necesario señalar conceptos básicos en digráficas equivalentes a algunas de las ideas de gráficas.

Supóngase que  $D = (V, A)$  es una digráfica entonces un *camino dirigido* en  $D$  es una sucesión alternada de vértices y arcos de  $D : \langle v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n \rangle$ , donde cada arco  $a_i$  es de la forma  $v_{i-1}v_i$ . En la *figura 1,1,7* se encuentran dos ejemplos de caminos dirigidos en una digráfica.

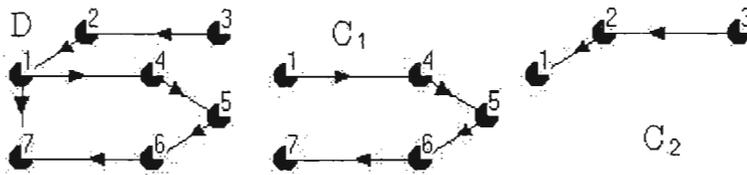


Figura 1.1.7

- i) Un camino dirigido recibe el nombre de *cerrado* si  $v_0 = v_n$  y *generador* si  $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ .
- ii) Cuando todos los arcos de un camino son distintos se le conoce con el nombre de *paseo dirigido*.
- iii) Si en un camino dirigido todos sus vértices son distintos éste se conocerá como *trayectoria dirigida*.

**Definición 9** Sea  $D = (V, A)$  una digráfica, entonces un camino  $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$  en  $D$  con al menos tres vértices y todos sus vértices distintos excepto por  $v_0 = v_n$  recibe el nombre de *ciclo*.

Se dirá que una digráfica es *acíclica* si no contiene ciclos. Como ejemplo de digráfica con ciclos y acíclica se tienen los de la *figura 1,1,8*.

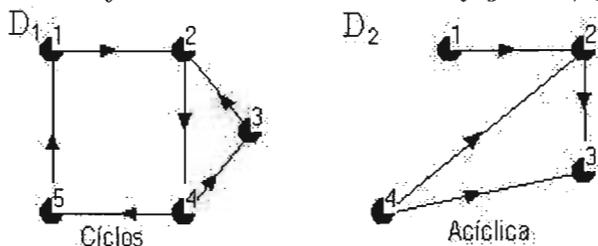


Figura 1.1.8

Un *semicamino* es una sucesión alternante de vértices y arcos  $\langle v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n \rangle$  donde cada arco  $a_i$  es de la forma  $v_{i-1}v_i$  o  $v_i v_{i-1}$ . Un *semicamino* es conocido como *semipaseo* si todos sus arcos son distintos, como una *semitrayectoria* si todos sus vértices son distintos. Un *semicamino* es un *semiciclo* si contiene al menos tres vértices y todos sus vértices son distintos con la excepción de que  $v_0 = v_n$ . En la *figura 1,1,9* se puede observar una digráfica con sus respectivos *semiciclos*.

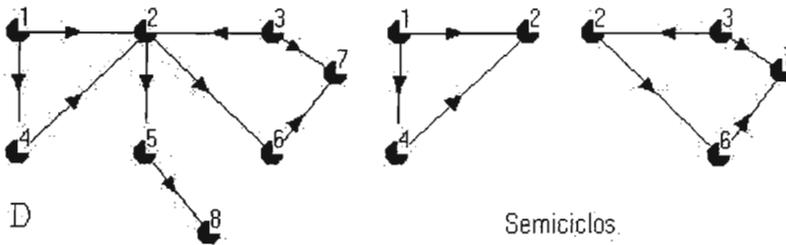


Figura 1.1.9

**Definición 10** Sea  $D = (V, A)$  una digráfica, diremos que  $D$  es fuertemente conexa o conexa fuerte, si para todo par de vértices  $v_i, v_j \in D$ , a partir de  $v_i$  se puede alcanzar a  $v_j$  mediante una trayectoria dirigida.

Como ejemplos de digráficas fuertemente conexas se tienen los de la figura 1,1,10.

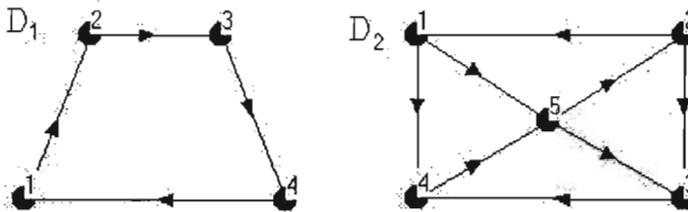


Figura 1.1.10

**Definición 11** Una digráfica  $D = (V, A)$ , se le llamará unilateralmente conexa o unilateral, si para cualquier par de vértices en  $D$ , se tiene que  $v_i$  puede ser alcanzado desde  $v_j$  o  $v_j$  puede ser alcanzado desde  $v_i$ , mediante trayectorias dirigidas.

En la figura 1,1,11 se pueden observar dos digráficas unilateralmente conexas.

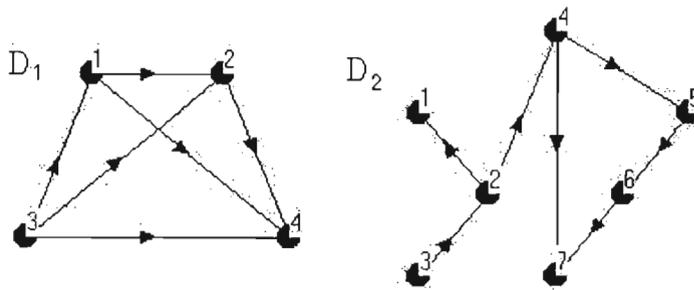


Figura 1.1.11

**Definición 12** Se dice que una digráfica  $D$  es *debilmente conexa* o *conexa débil*, si para todo par de vértices en  $D$  existe un *semicamino* que los une sin importar la dirección de los arcos.

Si una digráfica no es *debilmente conexa*, se dirá que es *disconexa*.

Como ejemplos de digráficas *debilmente conexas* se tienen los siguientes figura 1,1,12 :

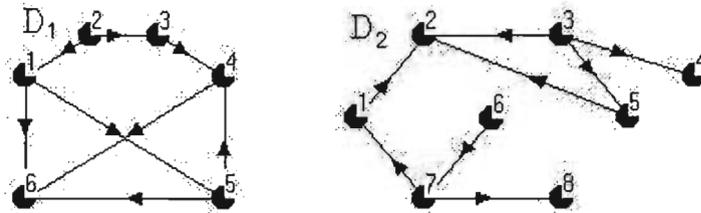


Figura 1.1.12

Por otro lado, toda digráfica fuertemente conexa es conexa unilateral, pero no toda digráfica unilateralmente conexa es conexa fuerte. En la figura 1,1,13 se muestran dos ejemplos de digráficas unilateralmente conexas que no son fuertemente conexas.

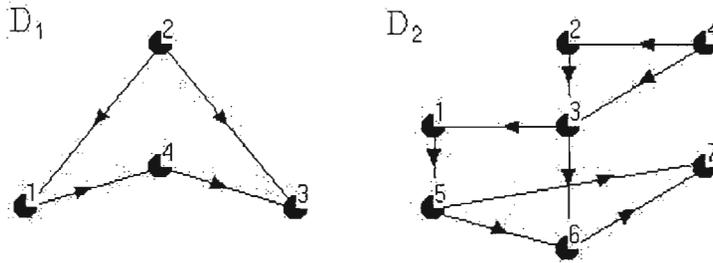


Figura 1.1.13

De la misma forma toda digráfica unilateralmente conexa es conexa débil, pero no toda digráfica débilmente conexa es conexa unilateral como se puede observar en las digráficas de la *figura 1,1,14*.

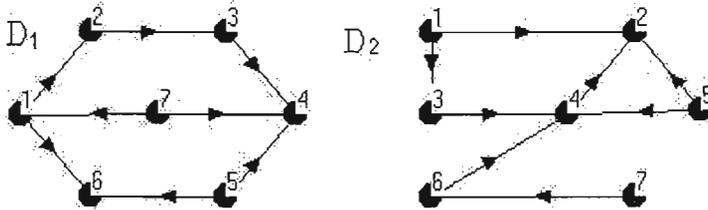


Figura 1.1.14

## 1.2. Árboles

En esta sección se comenzará por introducir el concepto de árbol y sus propiedades.

**Definición 13** *Un árbol es una gráfica conexa y acíclica. Las aristas en esta gráfica reciben el nombre ramas.*

A continuación en la *figura 1,2,1* se muestran distintos ejemplos de árboles.

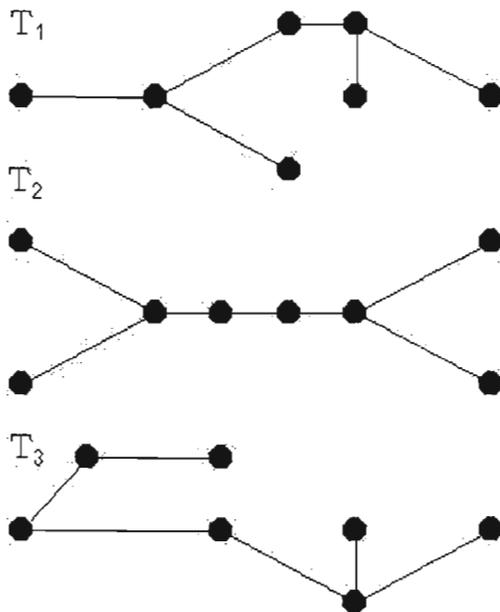


Figura 1.2.1

Antes de enunciar algunas de las definiciones equivalentes de árbol es necesario tener en cuenta dos propiedades importantes.

**Proposición 1** Sea  $G = (V, U)$ , una gráfica. Supóngase que se agrega una arista  $u = \{v_i, v_j\}$  a  $G$ . Entonces:

i) El número de componentes conexas de  $G$  disminuye una unidad si  $v_i$  y  $v_j$  pertenecen a dos componentes conexas distintas. En este caso la arista  $u$  no pertenece a ningún ciclo de la gráfica  $G' = (V, U \cup \{u\})$ .

ii) El número de componentes conexas de  $G$  permanece igual si tanto  $v_i$  como  $v_j$  pertenecen a la misma componente conexa. En este caso  $u$  pertenece a un ciclo de la gráfica  $G' = (V, U \cup \{u\})$ .

**Demostración.** i) Sea  $G = (V, U)$  una gráfica, considérese que  $G_i = (V_i, U_i)$  y  $G_j = (V_j, U_j)$  son dos componentes conexas de  $G$ , tales que  $v_i \in V_i$  y  $v_j \in V_j$ .

Por otro lado, sea  $G'$  la gráfica que se genera al agregar la arista  $u = (v_i, v_j)$  a  $G$ .

Sean  $v_p$  y  $v_r$  dos vértices que pertenecen a  $V_i \cup V_j$ . Como  $G_i$  es conexa se tiene que si  $v_p, v_r \in G_i$  existe la trayectoria que une a  $v_p$  con  $v_r$  en  $G_i$  y por lo tanto en  $G'$ .

Para  $G_j$  el razonamiento es análogo.

Supóngase que  $v_p \in V_i$  y que  $v_r \in V_j$ . Entonces existe una trayectoria que une al vértice  $v_p$  con el vértice  $v_i$  en  $G_i$ , a su vez existe una trayectoria que une al vértice  $v_j$  con  $v_r$  en  $G_j$  entonces existe una trayectoria que une al vértice  $v_p$  con el vértice  $v_r$  en  $G'$ , por lo tanto  $G_i$  y  $G_j$  pertenecen a la misma componente conexa en  $G'$ .

Para el caso en que  $v_r \in V_i$  y  $v_p \in V_j$  el razonamiento es análogo.

$\therefore$  Al agregar una arista  $u$  a una gráfica  $G$  el número de componentes conexas en  $G$  disminuye en una unidad.

Se sabe que un ciclo es un camino cerrado en el cual todos sus vértices son distintos. Supóngase que  $u = (v_i, v_j)$  pertenece a un ciclo en  $G'$ , entonces existe un camino cerrado que inicia y termina en  $v_i$ . Por lo tanto debe existir un camino que une a  $v_i$  con  $v_j$  en  $G$ , pero esto es una contradicción pues  $v_i$  y  $v_j$  pertenecen a componentes conexas distintas en  $G$ .

$\therefore$  La arista  $u$  no pertenece a ningún ciclo en  $G' = (V, U \cup \{u\})$ .

ii) Si  $v_i, v_j \in G_i$ , el camino que une al vértice  $v_i$  con  $v_j$  se encuentra contenido en  $G_i$ , entonces tanto  $G$  como  $G'$  tienen el mismo número de componentes conexas.

Por otro lado existe el camino que une al vértice  $v_i$  con  $v_j$  en  $G$ . Entonces si se agrega la arista  $u$  en  $G$  se crea un ciclo en  $G'$ .

$\therefore$  La arista  $u$  pertenece a un ciclo en  $G'$ . ■

**Proposición 2** Sea  $G = (V, U)$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Entonces:

i) Si  $G$  es conexa, entonces  $m \geq n - 1$

ii) Si  $G$  es acíclica, entonces  $m \leq n - 1$

**Demostración.** i) Supóngase que  $G = (V, U)$  es una gráfica con  $n$  componentes conexas. Por la *proposición 1* se sabe que si se agrega una arista  $u = (v_i, v_j)$ , cuyos extremos formen parte de dos componentes distintas en  $G$ , el número de componentes conexas en  $G$  disminuye en una unidad. Entonces como  $G$  esta formada por  $n$  componentes conexas, para que  $G$  sea conexa es necesario agregar al menos  $n - 1$  aristas.

Por otro lado si los extremos de la arista  $u$  pertenecen a una misma componente conexa en  $G$  el número de componentes conexas en  $G$  seguirá

siendo  $n$ .

$$\therefore m \geq n - 1$$

ii) Sea  $G = (V, U)$  una gráfica con  $n$  componentes. Supóngase que se agrega una arista  $u = (v_i, v_j)$  en  $G$ , entonces para que la gráfica continúe siendo acíclica los extremos de  $u$  deben pertenecer a componentes distintas de  $G$ . Así si se repite este proceso para cada una de las componentes conexas de  $G$  se obtendrá una gráfica formada por una sola componente conexa con  $n - 1$  aristas. Si se agrega una arista más supóngase  $u'$ , los extremos de  $u'$  pertenecerán a la misma componente conexa y por la *proposición 1* se formará un ciclo.

$$\therefore m \leq n - 1$$

■

Es importante notar que como consecuencia inmediata de la *proposición 2* se tiene que el número de aristas en un árbol es igual al número de vértices menos uno.

Contando con los resultados anteriores se pueden dar una serie de equivalencias con respecto a la definición de árbol.

**Teorema 1** *Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Supóngase que  $n \geq 2$ , entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes y caracterizan un árbol:*

- i)  $G$  es acíclica y tiene  $n - 1$  aristas.
- ii)  $G$  es conexa y acíclica.
- iii)  $G$  es conexa y tiene  $n - 1$  aristas.
- iv)  $G$  es conexa pero deja de serlo si se elimina una arista.
- v)  $G$  es acíclica y si se agrega una arista se forma exactamente un ciclo.
- vi) Para cada par de vértices en  $G$  existe una única trayectoria que los une.

**Demostración.** Supóngase que  $G = (V, U)$  es una gráfica con  $m$  aristas y  $n$  vértices.

ii)  $\implies$  i) Por hipótesis se sabe que  $G$  es conexa y acíclica, entonces por la *proposición 2* tiene  $n - 1$  aristas.

i)  $\implies$  ii) Que  $G$  sea acíclica se sigue de la hipótesis. Sabemos que  $G$  es acíclica con  $n - 1$  aristas y supongase que no es conexa, entonces cada componente conexa de  $G$  sería un árbol y habrá  $k \geq 2$  componentes conexas.

Si hay  $k$  componentes conexas cada una con  $n_1, n_2, \dots, n_k$  vértices entonces habrá  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1)$  aristas en  $G$ .

$$\therefore G \text{ tendría } \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k \text{ aristas.}$$

Pero  $n - k = n - 1$  entonces  $k = 1$  y esto es una contradicción, es decir que  $G$  es conexa.

$ii) \implies iii)$  Que  $G$  sea conexa se sigue de la hipótesis. Por otro lado si  $G$  es conexa y acíclica por la *proposición 2* el número de aristas en  $G$  es  $n - 1$ .

$iii) \implies iv)$   $G$  es conexa por hipótesis y tiene  $n - 1$  aristas, supóngase que se elimina una arista y se tiene que  $G' = (V, U \setminus \{u\})$  entonces el número de aristas en  $G'$  será  $n - 2$  y por la *proposición 2*  $G'$  no puede ser conexa.

$iv) \implies v)$   $G$  es conexa por hipótesis, entonces existe al menos una trayectoria que une a  $v_i$  con  $v_j$ . Supóngase que  $u_k$  es una arista que forma parte de la trayectoria que va de  $v_i$  a  $v_j$  y que  $G' = (V, U \setminus \{u_k\})$ , por hipótesis  $G'$  es disconexa. Entonces no existe una trayectoria que vaya de  $v_j$  a  $v_i$ , por lo tanto la gráfica  $G$  es acíclica. Por otro lado que al agregar una arista en  $G$  se forme un ciclo se sigue de la *proposición 1, ii)*.

$v) \implies vi)$  Por hipótesis se sabe que si se agrega una arista en  $G$  se forma un ciclo y por el inciso  $ii)$  de la *proposición 1* se tiene que  $v_i$  y  $v_j$  forman parte de la misma componente conexa, por lo tanto  $G$  es conexa. Como  $G$  es conexa existe, al menos una trayectoria que une a todo par de vértices. Por otro lado supóngase que entre  $v_i$  y  $v_j$  existen dos trayectorias distintas que los unen, entonces  $v_i$  y  $v_j$  forman parte de un ciclo pero esto es una contradicción pues por hipótesis  $G$  es acíclica.

$vi) \implies i)$  Por hipótesis y definición de conexidad  $G$  es conexa. Supóngase que  $C_i = u_1, u_2, \dots, u_i, u_1$  es un ciclo en  $G$ , entonces existen dos trayectorias entre  $u_1$  y  $u_i$ . Pero esto es una contradicción a la hipótesis, pues para cada par de vértices en  $G$  existe una única trayectoria que los une, por lo tanto  $G$  es acíclica y por la *proposición 2* tiene  $n - 1$  aristas. ■

Para el caso de digráficas  $D = (V, A)$  se tiene un concepto análogo al de árbol en graficas.

**Definición 14** *Un árbol dirigido es una digráfica débilmente conexa que no contiene semiciclos.*

Como ejemplos de árboles dirigidos se tienen los de la *figura 1,2,2*.

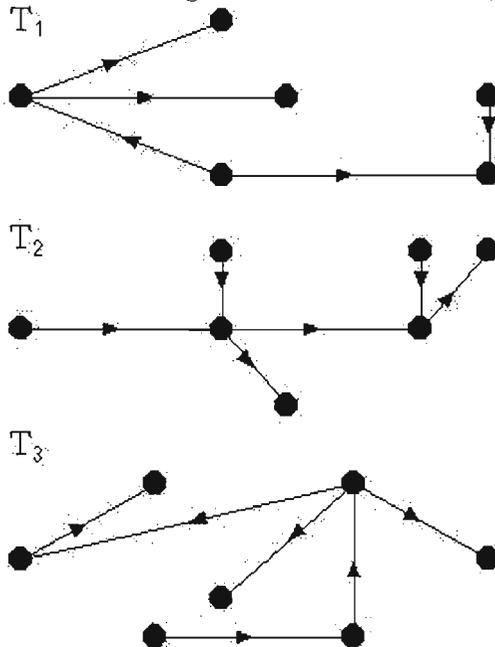


Figura 1.2.2

### 1.2.1. Árboles Generadores

Considérese una gráfica  $G = (V, U)$  conexa, que contiene una subgráfica que será el árbol  $T = (V', U')$ . Las aristas de  $U'$ , de  $T$  serán llamadas *ramas* y las aristas de  $G$  que no están en  $T$  se llamarán *cuerdas* (ambos conceptos relativos a  $T$ ).

**Definición 15** Sea  $T$  un árbol de una gráfica  $G$ , si  $V' = V$ , entonces diremos que  $T$  es un árbol generador de la gráfica  $G$ .

Es claro que sólo las gráficas conexas tienen árboles generadores como subgráficas. Por otro lado si una gráfica conexa  $G$  tiene un árbol generador único, entonces  $G$  es un árbol. Cada componente conexa de una gráfica arbitraria  $G$  contendrá al menos un árbol generador. Como ejemplos de árboles generadores se tienen los de la *figura 1,2,3*, donde del lado izquierdo se

tienen las gráficas y del lado derecho sus árboles generadores respectivos.

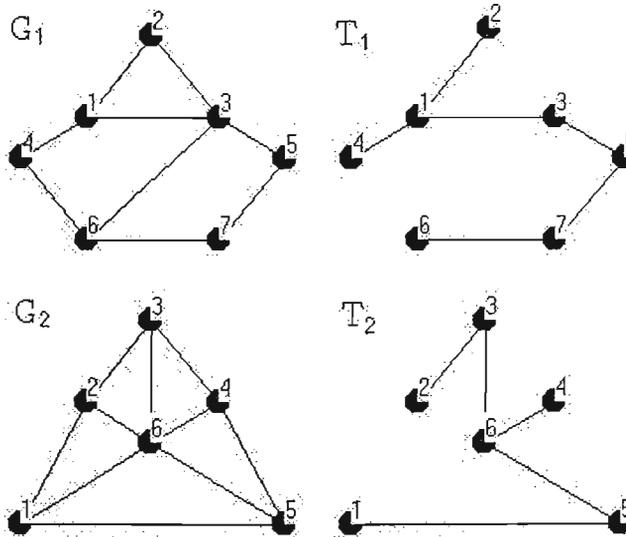


Figura 1.2.3

Una colección de árboles generadores (uno por cada componente conexa de  $G$ ), es llamado *bosque generador*. A continuación en la *figura 1,2,4* se puede observar un bosque generador de una gráfica  $G$ .

GRAFICA G:

BOSQUE GENERADOR DE G

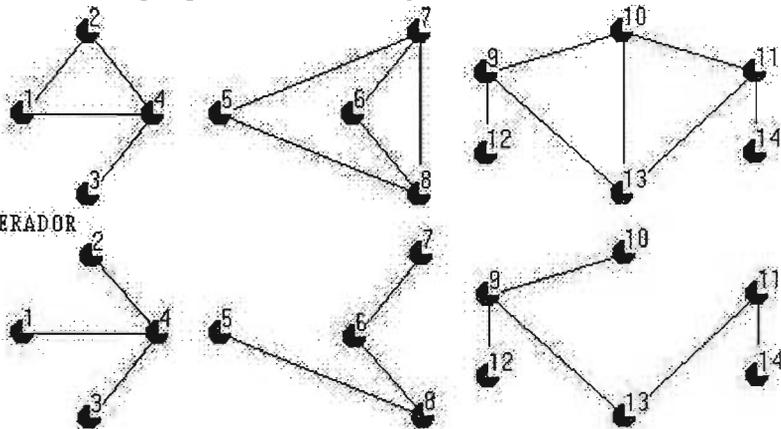


Figura 1.2.4

**Observación 1** *Sea  $T$  un árbol generador de una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $u$  aristas, entonces para cualquier árbol generador en  $G$ , el número de aristas que no forman parte de  $T$  estará dado por  $u - n + 1$ .*

Es fácil corroborar esta observación si se parte del hecho de que un árbol generador es una subgráfica de  $G$ , entonces estará formado por  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas (por el *teorema 1*). Si se considera que  $G$  es una gráfica con  $u$  aristas se tiene que  $u - n + 1$  será el número de aristas que no pertenecen a  $T$ .

# Capítulo 2

## La Matriz de adyacencia

A una digráfica de  $n$  vértices se le puede asociar una matriz de  $n \times n$ ,  $M = [m_{ij}]$  que recibe el nombre de “matriz de adyacencia”. Sus elementos se definen por medio de :

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \longrightarrow v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Así para las siguientes digráficas, las matrices de adyacencia correspondientes serán (*figura 2,1*) :

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

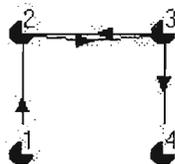


Figura 2.1

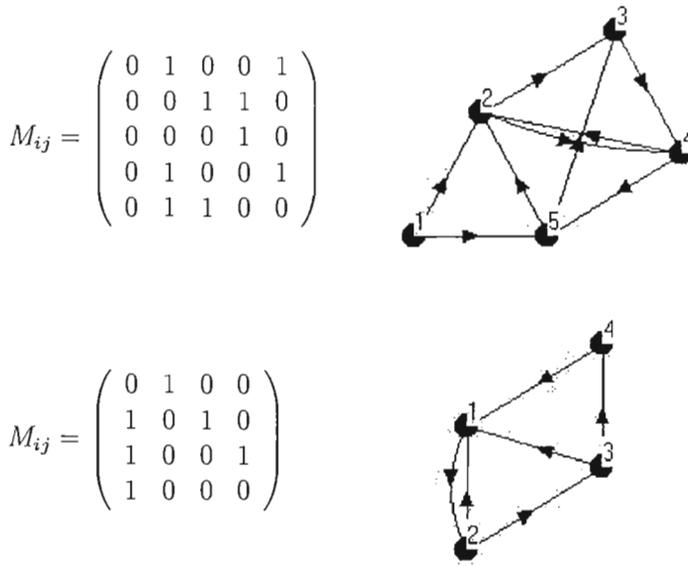


Figura 2.1

Por definición de matriz de adyacencia, ésta cumple con las dos propiedades siguientes:

- i) Todas las entradas son 0 o 1.
- ii) Todas las entradas sobre la diagonal principal son 0.

Por otra parte toda matriz que cumpla con estas dos propiedades determina una digráfica única con vértices etiquetados desde 1, ...,  $n$  para la cual, dicha matriz  $M$  es la matriz de adyacencia.

Por ejemplo, la matriz  $M$  determina a la digráfica de la figura 2,2:

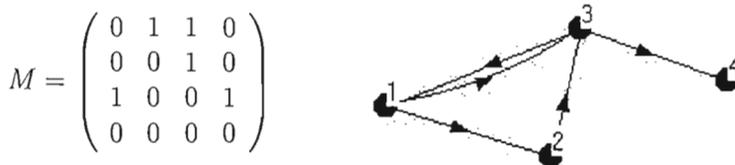


Figura 2.2

En este ejemplo se puede observar que la diagonal de la matriz se encuentra formada por 0, y en las demás entradas por 0 o 1.

**Ejemplo 3** Una cierta familia esta formada por la madre, el padre, una hija y dos hijos. La influencia o el poder que cada uno de sus miembros ejerce sobre

cada uno de los otros se describe a continuación: la madre sobre la hija y el hijo mayor, el padre sobre los dos hijos, la hija sobre el padre, el hijo mayor sobre el hijo menor y el hijo menor sobre la madre. Un modelo del patrón de influencia en esta familia se obtiene con una digráfica cuyos vértices son los cinco miembros de la familia. Si el miembro  $A$  ejerce influencia sobre el miembro  $B$ , se escribirá  $A \rightarrow B$ . En la figura 2,3 aparece la digráfica resultante, donde los diferentes miembros de la familia han sido llamados de la siguiente forma: madre por  $M$ , padre por  $P$ , hija por  $A$ , hijo mayor por  $B$  y el hijo menor por  $C$ . Así se tiene que la matriz de adyacencia correspondiente es:

$$\begin{array}{ccccc}
 & M & P & A & B & C \\
 \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

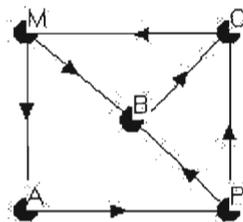


Figura 2.3

En el ejemplo anterior, el padre no tiene influencia directa sobre la madre, es decir  $M \rightarrow P$  no es cierta. Sin embargo, tiene influencia sobre su hijo menor, quien a su vez, la tiene sobre la madre. Esto se escribe  $P \rightarrow C \rightarrow M$ , y se dice que hace un camino de dos pasos entre  $P$  y  $M$ . En una forma análoga,  $M \rightarrow A$ , es un camino de un paso y  $P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M$  es un camino de tres pasos. Ahora, se verá la forma de determinar el número de caminos de  $r$  pasos ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) que hay entre un vértice  $v_i$  y otro  $v_j$  de una digráfica cualquiera. (Se incluirá el caso en que  $v_i$  y  $v_j$  coinciden). El número de caminos de 1 paso entre  $v_i$  y  $v_j$  es simplemente,  $m_{ij}$ . Es decir, puede haber una o ningún camino de un paso de  $v_i$  a  $v_j$ , dependiendo de que  $m_{ij}$  sea cero o uno.

Si se desea obtener el número de caminos de dos pasos en una digráfica, se utiliza el cuadrado de la matriz de adyacencia. Así  $m_{ij}^{(2)}$  es el elemento de orden  $(i, j)$  de  $M^{(2)}$ , de esta forma se tiene

$$m_{ij}^{(2)} = m_{i1}m_{1j} + m_{i2}m_{2j} + \dots + m_{in}m_{nj}. \quad (1,1)$$

Ahora, si  $m_{i1} = m_{1j} = 1$ , hay un camino de dos pasos,  $v_i \rightarrow v_1 \rightarrow v_j$ , entre  $v_i$  y  $v_j$ . Pero si una de las dos,  $m_{i1}$  ó  $m_{1j}$ , es cero, este camino no existe. En consecuencia,  $v_i \rightarrow v_1 \rightarrow v_j$  es un camino de dos pasos si y sólo si,  $m_{i1} m_{1j} = 1$ . De forma semejante, para cualquier valor  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $v_i \rightarrow v_k \rightarrow v_j$  es un camino de dos pasos entre  $v_i$  y  $v_j$  si y sólo si, el término  $m_{ik}m_{kj}$  del segundo miembro de (1,1) vale uno; en caso contrario, el término es cero. En consecuencia, el segundo miembro de (1,1) da el total de caminos de dos pasos que hay entre  $v_i$  y  $v_j$ .

Lo anterior se incluye en el siguiente resultado:

**Teorema 2** Si  $M$  es la matriz de adyacencia de una digráfica y  $m_{ij}^{(r)}$  es el elemento  $(i, j)$  de  $M^r$ , entonces  $m_{ij}^{(r)}$  es el número de caminos de  $r$  pasos que hay entre  $v_i$  y  $v_j$ .

**Demostración.** ( Por inducción sobre  $r$ )

Para  $r = 1$ .

Se tiene que  $M_{ij}$  es la matriz de adyacencia, que muestra cuales son los caminos de un solo paso entre  $v_i$  y  $v_j$ .

Suponemos que es válido para  $r = n$ .

Por hipótesis,

$M_{ij}^n =$  No. de caminos con  $n - \text{arcos}$  que van de  $v_i \rightarrow v_j$ .

Queremos demostrarlo para  $r = n + 1$ .

Por demostrar,  $M_{ij}^{n+1} =$  No. de caminos con  $(n + 1) - \text{arcos}$  que van de  $v_i \rightarrow v_j$ .

Se tiene que:

$$M_{ij}^{n+1} = (M^n M)_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}^n m_{kj}.$$

Por hipótesis de inducción un camino de  $v_i \rightarrow v_j$  con  $(n + 1) - \text{arcos}$ , es un camino con  $n - \text{arcos}$  de  $v_i \rightarrow v_k$  seguida de un arco de  $v_k$  a  $v_j$ .

$\therefore M_{ij}^{n+1} =$  No. de caminos con  $(n + 1) - \text{arcos}$  que van de  $v_i \rightarrow v_j$ . ■

**Ejemplo 4** La figura 2,4 es el mapa de las rutas de una pequeña línea aérea que da servicio a cuatro ciudades  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Como es una digráfica, la matriz de los vértices será:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

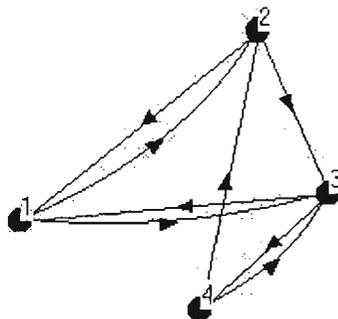


Figura 2.4

Por otra parte:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se quiere saber cuántas conexiones hay entre las ciudades  $v_4$  y  $v_3$ , esto se puede determinar mediante el resultado anterior. Como  $m_{43} = 1$ , hay una conexión o arco de 1 paso: como  $m_{43}^{(2)} = 1$ , hay una conexión de 2 pasos, y como  $m_{43}^{(3)} = 3$ , hay tres conexiones de 3 pasos. Para verificarlo, ver la *figura(2,4)*:

Conexiones de 1 paso de  $v_4$  a  $v_3$  :

$$v_4 \longrightarrow v_3$$

Conexiones de 2 pasos de  $v_4$  a  $v_3$  :

$$v_4 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3$$

Conexiones de 3 pasos de  $v_4$  a  $v_3$  :

$$v_4 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_3$$

$$v_4 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_3$$

$$v_4 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_3$$

**Ejemplo 5** Sea  $G$  la digráfica de la figura 2,5, con una matriz de adyacencia dada de la siguiente forma:

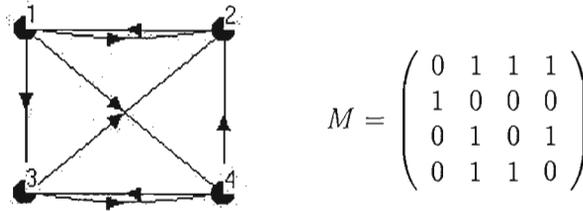


Figura 2.5

A partir de esta gráfica queremos ver cuántos caminos de 1, 2 y 3 pasos hay entre el vértice  $v_1$  y  $v_2$ .

Primero se calculan las matrices  $M^2$  y  $M^3$ .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, en la matriz  $M$  se puede observar que la entrada  $m_{12} = 1$ , lo que indica que sólo hay un camino de un paso de  $v_1$  a  $v_2$ . En el caso de  $M^2$  se tiene que  $m_{12}^{(2)} = 2$ , por lo tanto hay dos caminos de dos pasos que van de  $v_1$  a  $v_2$  y para  $M^3$  se tiene que  $m_{12}^{(3)} = 3$  entonces existen tres caminos de tres pasos de  $v_1$  a  $v_2$ .

Con la gráfica de la figura 2,5 se puede comprobar que los caminos de  $v_1$  a  $v_2$  son las siguientes:

Los caminos de 1 paso de  $v_1$  a  $v_2$  son:

$$v_1 \longrightarrow v_2$$

Los caminos de 2 pasos de  $v_1$  a  $v_2$  son:

$$\begin{aligned} v_1 &\longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2 \\ v_1 &\longrightarrow v_4 \longrightarrow v_2 \end{aligned}$$

Los caminos de 3 pasos de  $v_1$  a  $v_2$  son:

$$\begin{aligned} v_1 &\longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_2 \\ v_1 &\longrightarrow v_4 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2 \\ v_1 &\longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \end{aligned}$$

## 2.1. Clanes

Considérese la siguiente definición:

**Definición 16** *Un subconjunto del conjunto de los vértices de una digráfica recibe el nombre de asociación o clan, si satisface las siguientes condiciones:*

- i)* El subconjunto contiene por lo menos tres vértices.
- ii)* Para cada par de vértices  $v_i$  y  $v_j$  del subconjunto, se tiene que  $v_i \longrightarrow v_j$  y  $v_j \longrightarrow v_i$ .
- iii)* Este subconjunto debe ser máximo, esto quiere decir, que no se puede agregar otro vértice sin dejar de satisfacer la condición (ii).

Esta definición sugiere que los clanes son subconjuntos máximos dentro de los cuales existe una comunicación perfecta. Entendiéndose por esta (como ejemplo), el caso en que los vértices de una gráfica  $G$  representen ciudades y se cumpla que  $v_i \longrightarrow v_j$  y  $v_i \longleftarrow v_j$  esto quiere decir que hay un vuelo directo entre  $v_i$  y  $v_j$ , así como entre  $v_j$  y  $v_i$ , entonces hay un vuelo directo entre dos ciudades cualesquiera del clan y en cualesquiera de las dos direcciones.

**Ejemplo 6** *La digráfica que aparece en la figura 2,1,1, que podría representar el mapa de las rutas de una línea aérea, tiene dos clanes:*

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \text{y} \quad \{v_3, v_4, v_6\}.$$

En este ejemplo se observa que en una digráfica puede haber más de un clan y que un vértice puede pertenecer simultáneamente a dos o más de ellos.

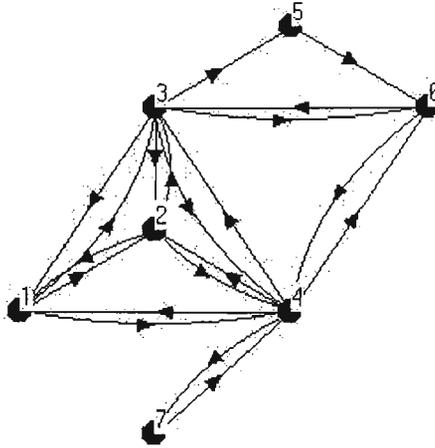


Figura 2.1.1

En las digráficas pequeñas, los clanes pueden encontrarse por inspección, pero para los casos complicados conviene tener un procedimiento que permita detectarlos. A continuación se analizará, un teorema que identifica los vértices que pertenecen a un clan y para ello se definirá una matriz  $S = [s_{ij}]$  que está relacionada con una digráfica de la siguiente forma:

$$S = [s_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \longrightarrow v_j \text{ y } v_j \longrightarrow v_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La matriz  $S$  determina una digráfica que se diferencia de la original en que han desaparecido o se han eliminado los arcos que sólo tienen una flecha. Por ejemplo, si la digráfica original es la que se ilustra en la *figura 2,1,2a*, la digráfica que tiene a  $S$  como matriz de adyacencia es la que aparece en la *figura 2,1,2b*. Como alternativa,  $S$  se puede obtener a partir de la matriz de adyacencia,  $M$ , de la digráfica original, haciendo que  $s_{ij} = 1$  cuando  $m_{ij} = m_{ji} = 1$  y en caso contrario,  $s_{ij} = 0$ .

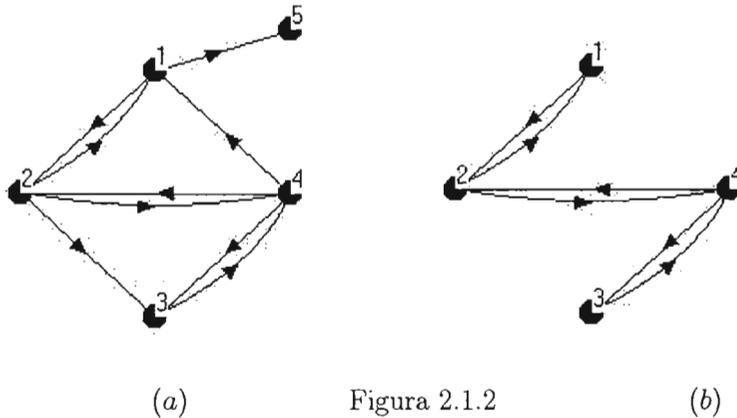


Figura 2.1.2

Usando la matriz  $S$ , el teorema 2 se enuncia de la siguiente forma:

**Teorema 3** Si  $s_{ij}^{(3)}$  es el elemento  $(i, j)$  de  $S^3$ , un vértice  $v_i$  pertenece a algún clan, si y solamente si,  $s_{ii}^3 \neq 0$ .

**Demostración.** Si  $s_{ii}^{(3)} \neq 0$ , entonces hay por lo menos un camino de 3 pasos que inicia y termina en  $v_i$ , en la digráfica modificada determinada por  $S$ . Supóngase que esta es  $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_i$ . En la digráfica modificada, los arcos son de dos direcciones, por lo que se tiene  $v_i \longleftrightarrow v_j \longleftrightarrow v_i$ . Esto significa que pueden suceder dos cosas, o que  $\{v_i, v_j, v_k\}$  es un clan, o bien que  $\{v_i, v_j, v_k\}$  es un subconjunto de un clan. En cualquiera de estos casos,  $v_i$  pertenece a un clan.

Si  $s_{ii}^{(3)} = 0$ , esto implica que no hay caminos de tres pasos de  $i$  a  $i$ .

$\therefore v_i$  no puede pertenecer a un clan. ■

**Ejemplo 7** Supóngase que una digráfica tiene por matriz de adyacencia (figura 2.1.3):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

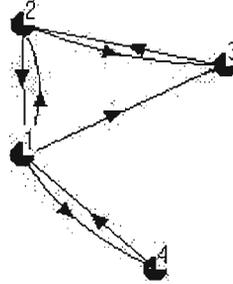


Figura 2.1.3

Entonces

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como todas las entradas de la diagonal de  $S^3$  son cero, por el teorema anterior, se puede decir que la gráfica no tiene ningún clan.

**Ejemplo 8** Suponga que una digráfica tiene por matriz de adyacencia (figura 2.1.4):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

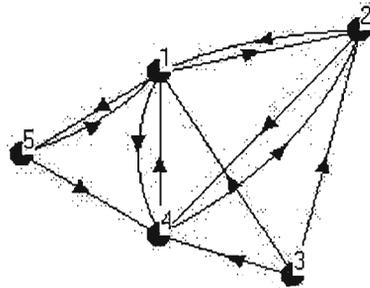


Figura 2.1.4

Entonces

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad S^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay entradas distintas de 0 en la diagonal de  $S^3$ , son  $s_{11}^{(3)}$ ,  $s_{22}^{(3)}$ , y  $s_{44}^{(3)}$ . En consecuencia, en la digráfica,  $v_1, v_2$  y  $v_4$  pertenecen a clanes. Como un clan debe tener por lo menos tres vértices, sólo habrá un clan, a saber,  $v_1, v_2, v_4$ .

**Ejemplo 9** *Determinar a partir de la matriz de adyacencia, si existe algún clan en su digráfica correspondiente.*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 8 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Algunas entradas de la diagonal de  $S^3 \neq 0$ , esto quiere decir que hay un clan dentro de la digráfica representada por la matriz  $M$ . Como las entradas en la diagonal distintas de cero son  $m_{33} = 2$ ,  $m_{44} = 2$  y  $m_{66} = 2$ , el clan que se puede encontrar en esta digráfica es el formado por los vértices  $v_3, v_4$  y  $v_6$ .

Esto puede corroborarse mediante la figura siguiente *figura 2,1,5* :

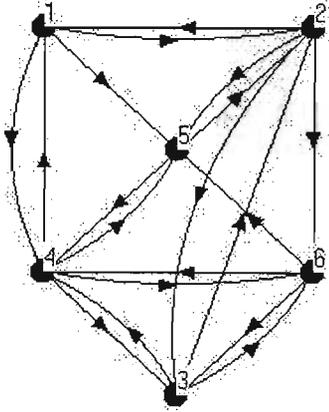
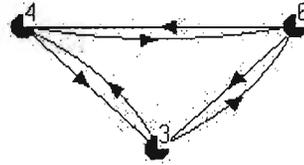
*Digráfica*

Figura 2.1.5

*Clan*

## 2.2. Digráficas de dominación

Hay muchos grupos de individuos o de animales en los que está bien definido un orden de dominación entre dos miembros cualesquiera. Casi siempre dados dos individuos  $A$  y  $B$ , sucede que  $A$  domina a  $B$  o bien  $B$  domina a  $A$ .

**Definición 17** Una digráfica de dominación es una digráfica tal que para cualquier par de vértices,  $v_i$  y  $v_j$ , se tiene que uno de los arcos  $v_i \rightarrow v_j$  o  $v_j \rightarrow v_i$  esta en  $D$ , pero no ambas.

Un ejemplo de una digráfica que cumple con esta definición es la que corresponde a un torneo de  $n$  equipos deportivos en la que cada equipo juega solo una vez contra todos los demás y donde no se permiten los empates. Si  $v_i \rightarrow v_j$  significa que el equipo  $v_i$  le gana al equipo  $v_j$  en la única vez que se encuentran durante el torneo, de inmediato se ve que la definición se satisface.

Por esta razón, a las gráficas de dominación, se les suele llamar torneos.

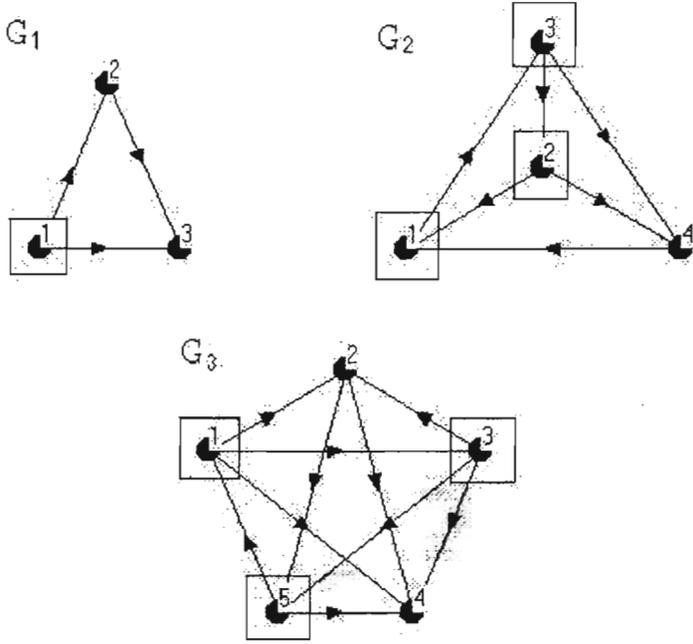


Figura 2.2.1

En la *figura 2,2,1* se muestran gráficas de dominación de tres, cuatro y cinco vértices. En ellas, los vértices señalados tienen una propiedad muy interesante, cada uno de ellos se une, por medio de un camino de 1 o 2 pasos, con cualquiera de los otros vértices de la gráfica. En cierto sentido, estos vértices son mas “potentes” que los que no tienen esta propiedad. En un torneo deportivo, un vértice de tal naturaleza corresponde a un equipo *A* que le gana a otro equipo *B* y además, a un equipo que le gana a *B*. A continuación, se enunciará y demostrará un teorema que establece que toda digráfica de dominación tiene por lo menos un vértice con esta propiedad.

**Teorema 4** *En toda digráfica de dominación hay por lo menos un vértice que alcanza con un camino de 1 o 2 pasos a cualquier otro vértice.*

**Demostración.** Sea  $v_1$  un vértice (puede haber varios) al que corresponde el mayor número de caminos de 1 o 2 pasos que lo unen con los otros vértices de la gráfica. Volviendo a enumerar (si hiciera falta),  $v_1$  puede ser el vértice así definido.

Si  $v_i$  es un vértice para el cual la expresión  $v_1 \rightarrow v_i$  no es cierta ni con caminos de 2 pasos, entonces  $v_i \rightarrow v_1$  si debe de ser cierta. Ahora, sea  $v_k$  cualquier vértice para el cual se verifica que  $v_1 \rightarrow v_k$ . Entonces  $v_k \rightarrow v_i$  no puede ser cierta porque existirá  $v_1 \rightarrow v_k \rightarrow v_i$  que es un camino de 2 pasos de  $v_1$  a  $v_i$ . En consecuencia, se debe verificar que  $v_i \rightarrow v_k$ , es decir,  $v_i$  tiene caminos de 1 paso con todos los vértices a los que  $v_1$  tiene también caminos de 1 paso. Así, el vértice  $v_i$  debe tener también caminos de 2 pasos a todos los vértices a los que  $v_1$  tenga caminos de 2 pasos. Pero como además,  $v_i \rightarrow v_1$ ,  $v_i$  tendrá más caminos de 1 y 2 pasos que  $v_1$ . Sin embargo esto contradice la forma en la que se definió  $v_1$  y por lo tanto, no puede haber ningún vértice  $v_i$  con el cual  $v_1$  no tenga ningún camino de 1 o 2 pasos. ■

Con esta demostración se ha comprobado que el vértice que tiene el mayor número de caminos de 1 o 2 pasos que lo unen con otros vértices, cumple con la propiedad enunciada en el teorema. Estos vértices se encuentran en forma sencilla con la matriz de adyacencia  $M$  y su cuadrado  $M^2$ . La suma de las entradas al renglón de orden  $i$  de  $M$ , es igual al número total de las caminos de 1 paso que conectan a  $v_i$  con otros vértices, y la suma de las entradas al renglón de orden  $i$  de  $M^2$ , es igual al número total de caminos de 2 pasos que conectan a  $v_i$  con otros vértices.

En consecuencia, la suma de las entradas al renglón de orden  $i$  de la matriz  $A = M + M^2$  es el número total de caminos de 1 o 2 pasos entre  $v_i$  y los otros vértices. En otras palabras, el renglón de la matriz  $A = M + M^2$  para el cual se obtiene el valor más alto de la suma de sus elementos, identifica a un vértice que cumple con la propiedad enunciada en el *teorema 4*.

**Ejemplo 10** Si cinco equipos de beisbol juegan de forma que cada uno de ellos se enfrenta una sola vez a todos los demás y los resultados son los indicados en la digráfica de dominación de la figura 2,2,2 se tendrá la siguiente

matriz de adyacencia.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

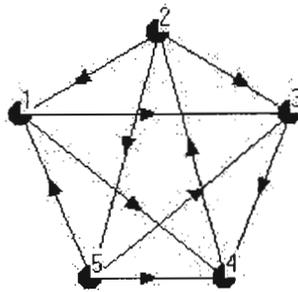


Figura 2.2.2

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} A = M + M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las sumas de los renglones de A son:

$$\begin{aligned} \text{suma del 1}^\circ \text{ renglón} &= 4 \\ \text{suma del 2}^\circ \text{ renglón} &= 9 \\ \text{suma del 3}^\circ \text{ renglón} &= 2 \\ \text{suma del 4}^\circ \text{ renglón} &= 4 \\ \text{suma del 5}^\circ \text{ renglón} &= 7 \end{aligned}$$

Como el segundo renglón es el que da la suma mayor, el vértice  $v_2$  tiene caminos de 1 o 2 pasos que lo conectan con todos los demás vértices, lo cual se verifica fácilmente observando la *figura 2,2,2*.

Informalmente, se ha sugerido que un vértice que tenga el mayor número de caminos de 1 o 2 pasos que lo unan con otros vértices, es un vértice “potente”. Este concepto se formaliza con la siguiente definición:

**Definición 18** *La potencia de un vértice de una digráfica de dominación, es el número total de las caminos de 1 y 2 pasos que los unen con otros vértices. Es decir, la potencia de un vértice  $v_i$  es la suma de las entradas del renglón  $i$  -ésimo de la matriz  $A = M + M^2$ , donde  $M$  es la matriz de adyacencia de la digráfica.*

**Ejemplo 11** *Clasificar los cinco equipos de beisbol del ejemplo 10, de acuerdo con su potencia. De las sumas de los renglones hechas en ese ejemplo, se tiene.*

Potencia del equipo  $v_1 = 4$

Potencia del equipo  $v_2 = 9$

Potencia del equipo  $v_3 = 2$

Potencia del equipo  $v_4 = 4$

Potencia del equipo  $v_5 = 7$

Por lo tanto, la clasificación de los equipos de acuerdo a su potencia es: primero,  $v_2$ ; segundo,  $v_5$ ; terceros  $v_1$  y  $v_4$  empate; quinto,  $v_3$ .

**Ejemplo 12** *Se llevó a cabo un torneo de canicas entre distintos equipos y los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes:*

*El jugador A le ganó al jugador B, C y D.*

*El jugador B venció al C y al E.*

*C le ganó a D y E.*

*D venció a B.*

*E le ganó a A y D.*

*Clasificar los equipos de acuerdo con las potencias de los vértices de la digráfica de dominación que corresponde a los resultados de los juegos.*

La digráfica de dominación que representa a este torneo es la siguiente (figura 2,2,3):

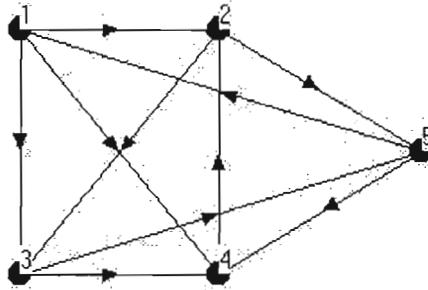


Figura 2.2.3

Donde el equipo  $A = v_1$ ,  $B = v_2$ ,  $C = v_3$ ,  $D = v_4$ , y  $E = v_5$ .

La matriz  $M$  y  $M^2$  correspondientes son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para poder determinar la potencia de cada uno de los vértices se debe obtener la matriz  $A$  que esta dada de la siguiente forma:

$$A = M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La potencia de cada uno de los equipos es:

Potencia del equipo  $v_1 = 8$

Potencia del equipo  $v_2 = 6$

Potencia del equipo  $v_3 = 5$

Potencia del equipo  $v_4 = 3$

Potencia del equipo  $v_5 = 5$

Se puede concluir que el equipo  $A$  quedó como campeón,  $B$  como segundo lugar,  $C$  y  $E$  empataron en tercero y  $D$  fué cuarto lugar.

Es necesario tomar en cuenta que el criterio que se enunció en el *teorema 4*, en el cual se afirma que el vértice con mayor “potencia” en una digráfica  $D$  alcanza por medio de caminos de uno o dos pasos a todos los demás vértices, no es válido para digráficas en general como se mostrará en el ejemplo siguiente.

Considérese la digráfica y la matriz de adyacencia de la *figura 2,2,4* :

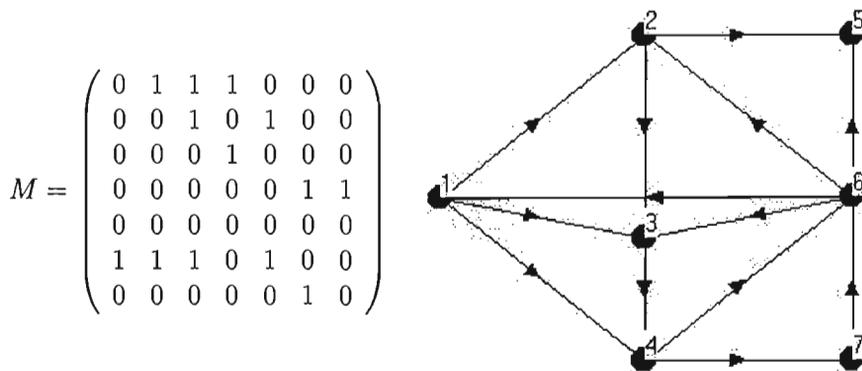


Figura 2.2.4

Si se calculan la matriz  $M^2$  y  $A$  se obtiene:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con estas matrices se puede observar que la potencia de cada uno de los vértices es la siguiente:

- Potencia del vértice  $v_1 = 8$
- Potencia del vértice  $v_2 = 3$
- Potencia del vértice  $v_3 = 3$
- Potencia del vértice  $v_4 = 7$
- Potencia del vértice  $v_5 = 0$
- Potencia del vértice  $v_6 = 10$
- Potencia del vértice  $v_7 = 5$

En la tabla anterior se muestra que el vértice  $v_6$  (con respecto a los demás) es el que cuenta con el mayor número de caminos de uno y dos pasos, por lo tanto es el vértice más "potente" en la digráfica. Con esto se podría concluir

que este vértice es el que puede alcanzar a todos los demás mediante caminos de uno y dos pasos, pero si se consideran las figuras siguientes (*figura 2,2,5*) en las cuales sólo se muestran los arcos que salen de los vértices  $v_6$  y  $v_1$ .

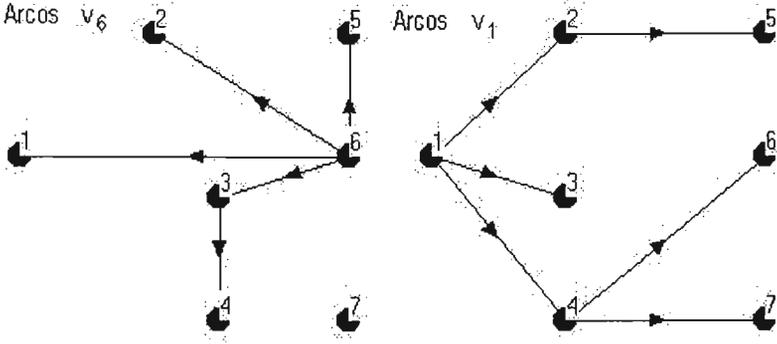


Figura 2.2.5

Se puede observar que el vértice  $v_6$  (que había sido considerado como el más "potente") no alcanza al vértice  $v_7$ , entonces el vértice  $v_6$  no cumple con la propiedad de alcanzar a todos lo demás vértices por medio de caminos de uno o dos pasos, mientras que el vértice  $v_1$  si cumple con esta propiedad pero no es el vértice más "potente" dentro de este conjunto.

# Capítulo 3

## La Matriz de Incidencia

Sea  $G$  una gráfica, con  $n$  vértices y  $m$  aristas.

**Definición 19** La matriz de incidencia de una gráfica  $G$ , es la matriz  $B = (b_{ij})_{n \times m}$  en donde:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } v_i \text{ es incidente a la arista } u_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de incidencia de la gráfica de la *figura 3,1* es:

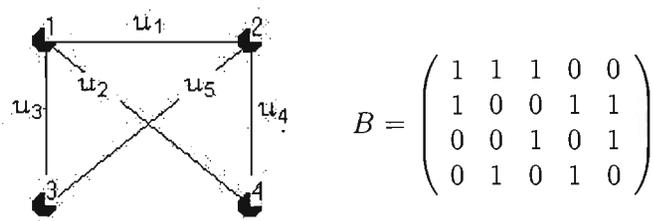


Figura 3.1

Se pueden hacer una serie de observaciones respecto de una gráfica y de su matriz de incidencia  $B$ .

i) Existe una correspondencia uno a uno entre los vértices y aristas de una gráfica y las matrices binarias que tienen exactamente dos unidades en cada columna.

ii) Cualquier conjunto con  $n - 1$  renglones de  $B$  determina su gráfica correspondiente. Esto se debe a que cada renglón de  $B$  es la suma de todos los demás renglones de  $B$  (módulo 2)

iii) Cada columna de  $B$  consta de exactamente dos unos.

iv) Un renglón con todas sus entradas son cero corresponde a un vértice aislado.

v) Un renglón con un solo uno en sus entradas corresponde a un vértice terminal.

vi) El número de unos por cada entrada en un renglón  $i$  de  $B$  es igual al grado correspondiente del vértice  $v_i$ .

vii) Las permutaciones de cualesquiera dos renglones (columnas) de  $B$  corresponden a una reetiquetación de los vértices (aristas) de  $G$ .

viii) Dos gráficas son isomorfas si y sólo si sus matrices de incidencia correspondientes difieren sólo por una permutación de renglones o columnas.

**Lema 1** Si  $G$  es un árbol con  $n$  vértices,  $u$  aristas y matriz de incidencia  $B$ , entonces:

$$r(B) \geq n - 1$$

Donde  $r()$  denota el rango de una matriz.

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 2$ .

La matriz de incidencia asociada a esta gráfica es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $r(B) = 1 = n - 1$ .

Paso inductivo.

Supóngase que  $n \geq 3$  y que esta afirmación es cierta para árboles con menos de  $n$  vértices.

Considérese una trayectoria máxima  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $G$  y considérese la gráfica  $G' = G - v_n$ , donde  $v_n$  es un vértice pendiente (*e.d. terminal*) en  $G$ , por lo tanto  $G'$  también será un árbol.

Sea  $B'$  la matriz de incidencia del árbol  $G$ . Como  $G'$  es un árbol con respecto a  $G$  el número de renglones linealmente independientes en  $G'$  son  $n - 2$ , pues  $G'$  es un árbol con  $n - 1$  vértices y por hipótesis de inducción el  $r(B') \geq n - 2$ .

Si se agrega en  $B'$  el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna correspondientes a  $v_n$ , el rango de  $B'$  se incrementa en una unidad así:

$$\begin{aligned} r(B) &\geq r(B') + 1 \\ r(B) &\geq (n-2) + 1 \\ \therefore r(B) &\geq n-1 \end{aligned}$$

■

**Observación 2** Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $m$  aristas y matriz de incidencia  $B$ , entonces:

$$r(B) \geq n - 1$$

Si  $G$  es una gráfica conexa existe el menos un árbol generador  $T$  en  $G$ . Entonces por el lema 1 si  $T$  es un árbol,  $r(B) \geq n - 1$  y como los renglones de  $B$  representan a cada uno de los vértices de  $T$ , cuando se aumentan aristas en  $T$  el número de columnas en  $B$  aumenta, pero los renglones continuarán siendo linealmente independientes.

Por otro lado, si  $G$  es una gráfica con  $k$  componentes,  $r(B) \geq n - k$ .

Como  $r = \text{rango}(B)$ , el espacio vectorial generado por los renglones de la matriz  $B$  tiene una base  $\beta$  formada con  $r$  elementos. Es natural definir la matriz  $B_r$  que se obtiene al eliminar los renglones que no corresponden a  $\beta$ .

Se pueden realizar algunas observaciones con respecto a la matriz  $B_r$  :

i) Los renglones de  $B_r$  son linealmente independientes.

ii) Si  $G$  es un árbol con  $n$  vértices, entonces  $r(B_r) = (n - 1)$ .

La matriz de incidencia también se encuentra definida para el caso de digráficas.

**Definición 20** La matriz de incidencia  $B = (b_{ij})_{n \times m}$  de una digráfica  $D$ , con  $n$  vértices y  $m$  arcos, es la matriz de  $n \times m$  donde:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } j \text{ sale directamente de } v_i. \\ -1 & \text{si el arco } j \text{ entra directamente en } v_i. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un ejemplo de esta matriz es el siguiente (figura 3,2):

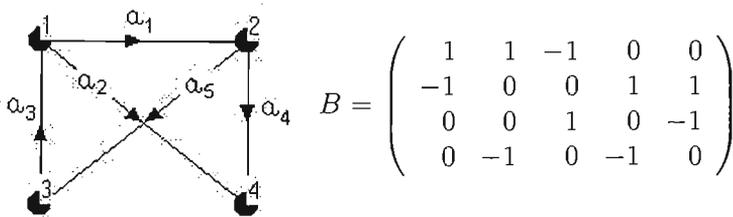


Figura 3.2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de incidencia para digráficas cumple con observaciones similares a las de la matriz de incidencia de gráficas no dirigidas.

i) Existe una correspondencia uno a uno entre los vértices y los arcos de una digráfica y las matrices que en cada una de sus entradas tomen los valores 1, 0, -1.

ii) Cualquier conjunto con  $n - 1$  renglones de  $B$  determina su gráfica correspondiente. Esto se debe a que cada renglón de  $B$  es la suma de todos los demás renglones de  $B$  (mod 2)

iii) Cada columna de  $B$  consta exactamente de un 1 y un -1.

iv) Un renglón con todas sus entradas son cero corresponde a un vértice aislado.

v) Un renglón con un solo 1 o -1 en sus entradas corresponde a un vértice terminal.

vi) El número de unos en los valores absolutos de las entradas, en un renglón  $i$  de  $B$  es igual al grado correspondiente del vértice  $v_i$ .

vii) Las permutaciones de cualquiera dos renglones (columnas) de  $B$  corresponden a una reetiquetación de los vértices (aristas) de  $D$ .

viii) Dos digráficas son isomorfas si y sólo si sus matrices de incidencia correspondientes difieren sólo por una permutación de renglones o columnas.

**Lema 2** Si  $D$  es un árbol dirigido con matriz de incidencia  $B$ ,  $n$  vértices y  $m$  aristas, entonces

$$r(B) = n - 1$$

Donde  $r()$  denota el rango de una matriz.

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 2$ .

La matriz de incidencia asociada a esta digráfica es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $r(B) = 1 = n - 1$ .

Paso inductivo.

Súpongase que esta afirmación es válida para árboles dirigidos con menos de  $n$  vértices.

Por hipótesis,  $T$  tiene  $n$  vértices, considérese a  $v_i$  como un vértice terminal de  $T$  siendo  $v_i$  adyacente a  $v_j$ .

Tómese una ordenación de los vértices de  $T$  considerando a  $v_i$  como el último vértice del camino.

Entonces:

$$B = \begin{pmatrix} B' \text{ Matriz de} & | & 0 \\ \text{incidencia de} & | & \vdots \\ T \setminus \{v_i\} & | & 1 \\ \hline 0 \dots \dots \dots, 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues  $r(B') = n - 2$  y por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} r(B) &= r(B') - 1 = n - 2 + 1 \\ \therefore r(B) &= n - 1 \end{aligned}$$

■

**Observación 3** Si  $D$  es una digráfica con  $n$  vértices,  $m$  aristas y matriz de incidencia  $B$ , entonces:

$$r(B) = n - 1$$

Sea  $D$  una digráfica débilmente conexa. Entonces al menos existe un árbol dirigido  $T$  en  $D$ . Por el lema 2 si  $T$  es un árbol dirigido, entonces  $r(B) = n - 1$  y como los renglones de  $B$  representan a cada uno de los vértices de  $T$ , cuando se aumenta una arista en  $T$  el número de columnas en  $B$  aumenta, pero los renglones continuarán siendo linealmente independientes.

Así pues, si  $D$  es una digráfica con  $k$  componentes, entonces  $r(B) = n - k$ .

Como  $r = \text{rango}(B)$ , el espacio vectorial generado por los renglones de la matriz  $B$  tiene una base  $B$  formada con  $r$  elementos. Es natural definir la matriz  $B_r$  que se obtiene al eliminar los renglones que no pertenecen a  $B$ .

Como en el caso de gráficas se puede hacer un par de observaciones con respecto a la matriz  $B_r$  :

i) Si  $D$  es debilmente conexa, los renglones de  $B_r$  son linealmente independientes.

ii) Si  $D$  es un árbol dirigido con  $n$  vértices, entonces  $r(B_r) = (n - 1)$ .

# Capítulo 4

## La Matriz de Ciclos

**Definición 21** La matriz de ciclos  $C = (c_{i,j})$  correspondiente a una gráfica  $G$ , está dada de la siguiente forma:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo ciclo de } G \text{ contiene a la arista } u_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

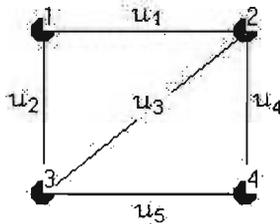
Si una arista no pertenece a un ciclo en  $G$  no aparece en la matriz  $C$ .  
Los ciclos correspondientes a la gráfica  $G$  de la figura 4,1 son:

$$H_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$H_2 = \{u_3, u_4, u_5\}$$

$$H_3 = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

Así, la matriz de ciclos de la figura 4,1 es la siguiente:

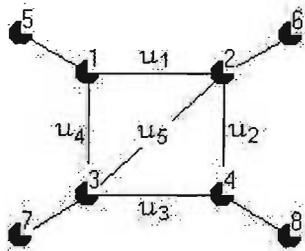


$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

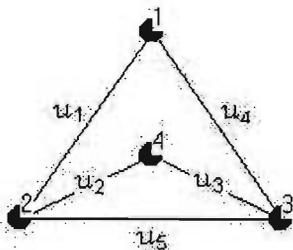
Figura 4.1

La matriz de ciclos  $C$  de una gráfica  $G$  cumple con distintas propiedades como son:

i)  $C$  no determina un isomorfismo con  $G$ . Esto se debe a que pueden existir dos gráficas no isomorfas, pero que tengan la misma matriz de ciclos. Lo anterior se puede corroborar en las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la *figura 4.2*.



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.2

En ambas gráficas se tiene que sus conjuntos de ciclos son  $\{u_1, u_4, u_5\}$ ,  $\{u_2, u_3, u_5\}$  y  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  por lo tanto la matriz de ciclos es la misma para  $G_1$  y  $G_2$ , pero estas no son isomorfas como se comprueba al considerar el número de vértices terminales para cada caso.

ii) El número de unidades en cada renglón corresponde al número de aristas en el ciclo que representa el renglón.

iii) Una permutación en los renglones (columnas) en  $C$  corresponde a una retiquetación de los ciclos (aristas) de  $G$ .

Se denotará  $M^T$  la transpuesta de la matriz  $M$ .

**Teorema 5** Si  $B$  es la matriz de incidencia y  $C$  es la matriz de ciclos de una gráfica  $G$  donde las columnas de ambas están acomodadas utilizando el

mismo orden en las aristas entonces:

$$\begin{aligned} BC^T &\equiv 0 \pmod{2} & y \\ CB^T &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

**Demostración.** Se denotará como  $H_i$  al  $i$  -ésimo ciclo de  $G$ .

Considérese la  $p$  -ésima entrada en el  $i$  -ésimo renglón de  $C$  y la  $j$  -ésima columna de  $B^T$  (que es el  $j$  -ésimo renglón de  $B$  que corresponde a la arista  $a = \{v_k v_j\}$ ), ver figura 4.3. Ninguno de los dos será cero si y sólo si la arista  $u_p$  se encuentra en el  $i$  -ésimo ciclo  $H_i$ , y es incidente con el vértice  $v_j$ .

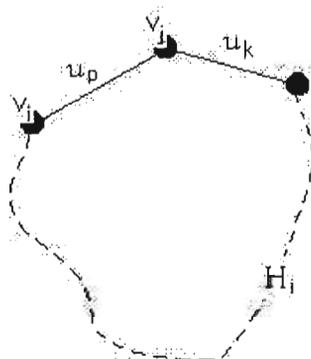


Figura 4.3

En el caso en que  $u_p \in H_i$  esta incide en  $v_j$ , entonces hay otra arista del ciclo  $H_i$  que incide en  $v_j$  así la entrada  $(i, j)$  de  $CB^T$  es  $1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ . ■

La matriz de ciclos  $C$ , también puede ser definida para digráficas que cuenten con ciclos con una orientación arbitraria y que estén etiquetados.

**Definición 22** La matriz de ciclos  $C = (c_{ij})$  de una digráfica  $D$ , es una matriz donde  $c_{ij} = 1$  si el ciclo  $H_i$  de  $D$  contiene al arco  $a_j$  en la misma dirección de  $H_i$  y  $c_{ij} = 0$  en otro caso.

Los ciclos correspondientes a la gráfica  $G$  de la figura 4.4 son los siguientes:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ H_2 &= \{a_1, a_2, a_4, a_5\} \end{aligned}$$

Con esto la matriz de ciclos  $C$  es de la siguiente forma:

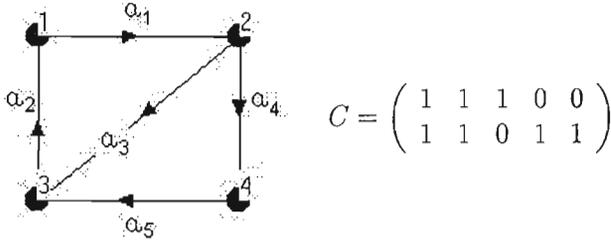


Figura 4.4

Como se señaló en la *sección de árboles*, un árbol generador es una subgráfica generadora conexa y acíclica. Si  $T$  es un árbol generador de  $G$ , llamaremos *cuerda* de  $G$  a los elementos de  $U(G) \setminus U(T)$ .

**Definición 23** Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ , entonces la adición de una cuerda a  $T$  creará exactamente un ciclo con respecto a  $T$  el cual recibe el nombre de ciclo fundamental (respecto a  $T$ ).

Debe notarse que en cada ciclo fundamental, sólo hay una cuerda. Así para cualquier árbol generador, la gráfica  $G$  con  $m$  aristas y  $n$  vértices tendrá tantas cuerdas como ciclos fundamentales. De esta forma cada árbol generador de  $G$  contará con un conjunto de  $m - n + 1$  ciclos fundamentales.

**Ejemplo 13** Para comprender mejor estas ideas considérese la gráfica conexa de la figura 4,5

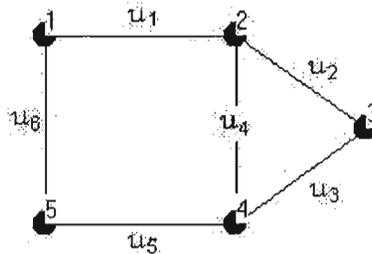


Figura 4.5

Sea  $T$  el árbol generador de la *figura 4,7* formado por el conjunto de aristas  $\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$ . Si a este árbol generador se le aumenta la cuerda  $u_2$  se obtiene el ciclo  $\langle u_2, u_3, u_4 \rangle$  y si se adhiere la cuerda  $u_6$  se tiene el ciclo  $\langle u_1, u_4, u_5, u_6 \rangle$ .

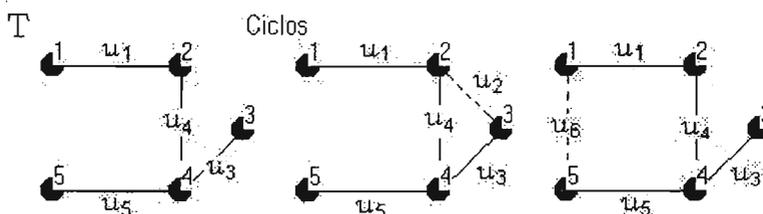


Figura 4.7

Se considera el árbol generador de la *figura 4,8* constituido por el conjunto de aristas  $\{u_1, u_2, u_5, u_6\}$ , de la misma gráfica  $G$ . Al aumentar a este árbol la arista  $u_4$  se obtiene el ciclo  $\langle u_1, u_4, u_5, u_6 \rangle$  y por otro lado al adherir la cuerda  $u_3$  se tiene el ciclo formado por  $\langle u_1, u_2, u_3, u_5, u_6 \rangle$ .

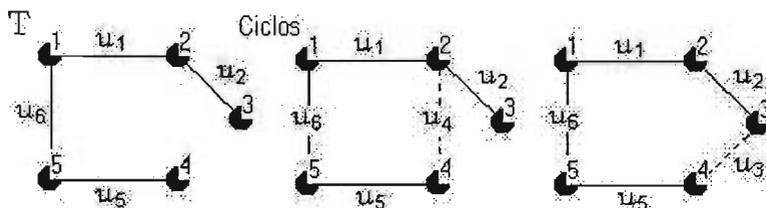


Figura 4.8

En los ejemplos anteriores se observa que los conjuntos de ciclos fundamentales en ambos árboles generadores son distintos, esto se debe a que los ciclos fundamentales de una gráfica dependen del árbol generador que se esté considerando.

**Definición 24** Una submatriz de la matriz de ciclos de una gráfica  $G$ , (que contiene a un conjunto  $S$  de ciclos fundamentales), donde cada renglón representa un ciclo fundamental de  $S$ , es llamada la matriz de ciclos fundamentales de  $G$  y se denota por  $C_f$ .

Un árbol generador como el de la *figura 4,9*, contiene las aristas  $u_1, u_3$  y  $u_4$ . Con respecto a este árbol generador, se tienen dos conjuntos de ciclos fundamentales:  $(u_1, u_2, u_3)$  y  $(u_3, u_4, u_5)$ . La matriz de ciclos fundamentales de la gráfica  $G$  respecto al árbol generador  $T$  es:

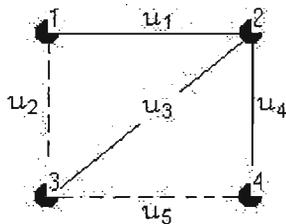


Figura 4.9

$$C_f = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Si  $G$  es una gráfica con  $n$  vértices,  $m$  aristas y conexa, entonces  $C_f$  es de dimensión  $[m - n + 1] \times m$ . Esto es porque cualquier árbol generador de  $G$  cuenta con  $n - 1$  ramas y  $m - n + 1$  cuerdas. Lo anterior se debe al hecho de que si se toma en cuenta que cada cuerda genera un ciclo fundamental, se tiene que  $C_f$  debe tener  $m - n + 1$  renglones.

Sea  $C_f$  la matriz de ciclos fundamentales de la *figura 4,9*, si se permutan las columnas de esta matriz, se puede observar que la submatriz de  $C_f$ , correspondiente a las columnas que representan las cuerdas de  $G$ , es la matriz identidad.

De esta forma la matriz resultante de estas permutaciones es:

$$\begin{matrix} & u_2 & u_5 & u_3 & u_4 & u_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De esta forma la matriz  $C_f$ , para toda gráfica conexa, podrá ser expresada como:

$$C_f = (I_\mu : C_t),$$

donde  $I_\mu$  es la matriz identidad de dimensión  $\mu = m - n + 1$  y  $C_t$  es una matriz de dimensión  $\mu \times (n - 1)$ , correspondiente al número de ramas de un árbol generador. Ahora es evidente por qué  $\mu = m - n + 1$  fue definido como el rango de la gráfica correspondiente. Esto es, porque  $r(C_f) = \mu$ . Como  $C_f$  una submatriz de  $C$ , el rango de  $C$  no es menor que  $m - n + 1$ .

Antes de continuar con el siguiente resultado se debe recordar que:

Para una función lineal  $T : V \longrightarrow W$ , se definen:

1.  $Nul(T) = \dim \ker(T)$  : y se le conoce como la nulidad de  $T$

2.  $rango(T) = \dim(T(V))$

Así para una función lineal  $T : V \longrightarrow W$ , con  $\dim(V) \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$Nul(T) + r(T) = \dim(V)$$

**Teorema 6** Si  $G$  es una gráfica conexa con  $m$  aristas y  $n$  vértices, entonces el rango de la matriz de ciclos  $C$  es  $m - n + 1$ .

**Demostración.** Sea  $B$  la matriz de incidencia de una gráfica  $G$ . Considérense  $r(B)$  y  $r(C)$  como los rangos de las matrices  $C$  y  $B$  correspondientes. Por el teorema 6 :

$$CB^T \equiv 0 \pmod{2}$$

Por otro lado se tiene que

$$r(B) \leq Nul(C)$$

Así

$$r(B) + r(C) \leq Nul(C) + r(C)$$

Pero se sabe que

$$Nul(C) + r(C) = m$$

Entonces

$$r(B) + r(C) \leq m$$

Y si  $G$  es una gráfica conexa,  $r(B) = n - 1$ . De esta forma:

$$r(C) \leq m - n + 1$$

Pero el rango de la submatriz  $C_f$ , de  $C$  es

$$\mu = m - n + 1$$

Se tiene que el rango de  $C$  no es menor que  $\mu$ , entonces

$$r(C) \geq \mu = m - n + 1$$

$$\therefore r(C) = m - n + 1$$

■

Este resultado se puede generalizar:

**Teorema 7** Si  $G$  es una gráfica con  $n$  vértices,  $m$  aristas, y  $k$  componentes conexas con una matriz de ciclos  $C$ , entonces:

$$r(C) = \mu = m - n + k.$$

**Demostración.** Sea  $B$  la matriz de incidencia de una gráfica  $G$ . Considérese  $r(B)$  y  $r(C)$  como el rango de las matrices  $C$  y  $B$  correspondientes. Por el teorema 6 :

$$CB^T \equiv 0 \pmod{2}$$

Por otro lado sabemos que

$$r(B) \leq Nul(C)$$

Así

$$r(B) + r(C) \leq Nul(C) + r(C)$$

Pero

$$Nul(C) + r(C) = m$$

Entonces

$$r(B) + r(C) \leq m$$

Y si  $G$  es una gráfica con  $k$  componentes,  $r(B) = n - k$ . De esta forma:

$$r(C) \leq m - n + k$$

Pero el rango de la submatriz  $C_f$ , de  $C$  es

$$\mu = m - n + k$$

Se tiene que el rango de  $C$  no es menor que  $u - n + k$ , es decir

$$r(C) \geq m - n + 1$$

$$\therefore r(C) = m - n + k$$

■

La matriz de ciclos fundamentales  $C_f$  también se puede definir para el caso de digráficas. En este caso cada ciclo fundamental está orientado de acuerdo con la dirección de la cuerda que lo genera. De esta forma un ejemplo de la matriz  $C_f$  de la gráfica de la *figura 4,10* tomando en cuenta el árbol generador formado por  $a_1, a_3, a_4$  es:

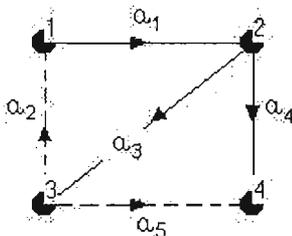


Figura 4.10

$$C_f = \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dentro de las digráficas existe una representación matricial que refleja los semiciclos dentro de una digráfica arbitraria.

**Definición 25** La matriz de semiciclos  $C = (c_{ij})$ , de una digráfica  $D$  es una matriz donde  $c_{ij} = 1$  si en el semiciclo  $H_i$  de  $D$  el arco  $a_j$  se encuentra directamente en la misma orientación de  $H_i$ ,  $c_{ij} = -1$  si  $H_i$  contiene al arco  $a_j$  en dirección opuesta a la orientación de  $H_i$ , y  $c_{ij} = 0$  en cualquier otro caso.

Como en el caso de gráficas los arcos de una digráfica  $D$ , que no forman parte de un árbol generador dirigido  $T$  con respecto a  $D$  reciben el nombre de *cuerdas*. Cuando una cuerda es aumentada en  $T$ , ésta crea un ciclo fundamental.

Para ilustrar estas ideas se tiene la digráfica del ejemplo siguiente.

**Ejemplo 14** Sea  $D = (V, A)$  la digráfica de la figura 4.11. Considérese como  $T$  el árbol dirigido formado por el conjunto de ramas  $\{a_2, a_3, a_5, a_6, a_7\}$ . Así el conjunto de cuerdas con respecto a  $T$  es  $\{a_1, a_4, a_8\}$ .

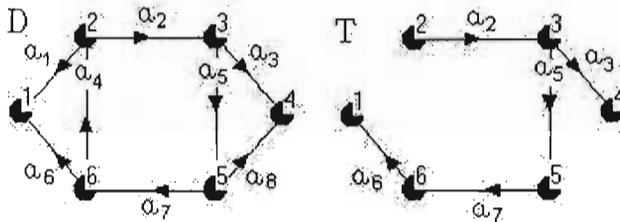


Figura 4.11

Entonces los semiciclos fundamentales con respecto a  $T$  son; el formado por la cuerda  $a_1$  que es  $H_1 = \langle a_1, a_2, a_5, a_6, a_7 \rangle$ , el de  $a_4$  es  $H_2 = \langle a_2, a_4, a_5, a_7 \rangle$  y por último la cuerda  $a_8$  genera a  $H_3 = \langle a_3, a_5, a_8 \rangle$ . En la figura 4.12 se comprueba que el conjunto  $\langle a_2, a_4, a_5, a_7 \rangle$  además de ser un semiciclo cumple con la propiedad de ser un ciclo. Las cuerdas respectivas a cada semiciclo se encuentran señaladas en forma punteada.

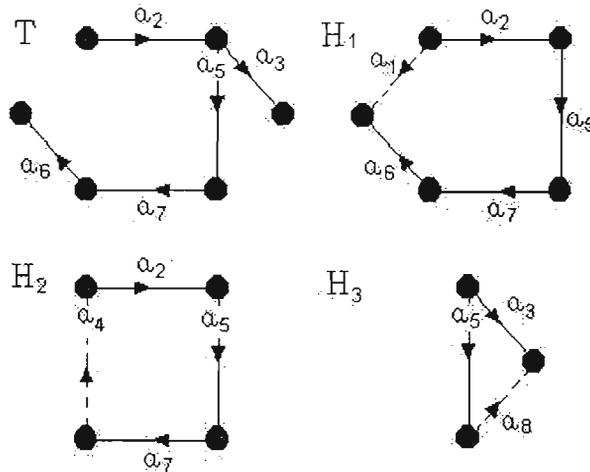


Figura 4.12

Los renglones de la matriz de semiciclos  $C$  de una digráfica  $D = (V, A)$ , contienen un árbol generador dirigido  $T$ , el cual corresponde a los semiciclos fundamentales con respecto a  $T$ , esto constituye una submatriz de  $C$  conocida como la *matriz de semiciclos fundamentales*  $C_f$  con respecto a  $T$ .

La orientación de un semiciclo fundamental se encuentra dada por la dirección de la cuerda que lo forma, con respecto al árbol generador  $T$  que se esté considerando. Esto se ilustra a continuación con la matriz de semiciclos fundamentales de la digráfica  $D$  de la *figura 4,12*.

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $D$  tiene  $n$  vértices y  $m$  arcos el número de semiciclos con respecto a cualquier árbol generador  $T$  estará dado por  $\mu = m - n + 1$ . Como en el caso de gráficas, la matriz de ciclos  $C$  y todos los semiciclos de una digráfica pueden ser generados si se toman combinaciones lineares de la matriz  $C_f$ . Se debe notar que para el caso de la matriz de ciclos algunos renglones representan semiciclos que no son ciclos, estos se encuentran indicados por las entradas con valores  $-1$ .

**Ejemplo 15** Para ilustrar esta idea se tiene la digráfica de la *figura 4,13* en la cual se muestra el árbol generador y los semiciclos correspondientes de

dicha digráfica.

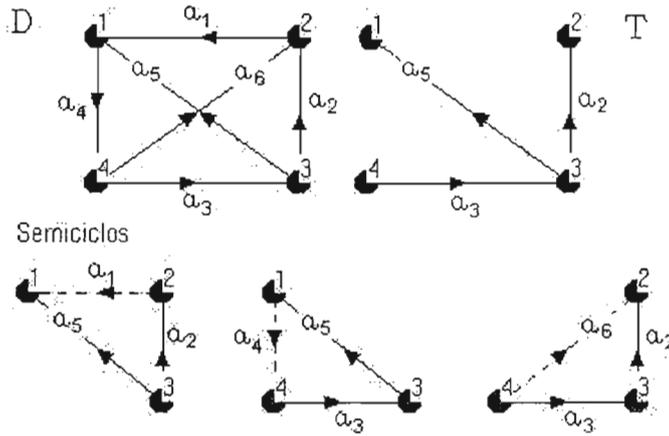


Figura 4.13

En esta digráfica la matriz de semicyclos fundamentales es la siguiente:

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si en la matriz  $C_f$  de una digráfica  $D$  se realizan una serie de permutaciones de columnas,  $C_f$  puede ser escrita de la forma  $(I_\mu : C_t)$ , como se observa en la siguiente matriz basada en la figura 4,13.

$$C_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 & : & a_2 & a_3 & a_5 \\ 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & : & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se puede generar la matriz de semicyclos  $C$  si se realizan las combinaciones lineales correspondientes entre los distintos renglones de  $C_f$ . Así el cuarto renglón de la matriz  $C$  estará dado por  $H_1 + H_2 = H_4$  y el quinto renglón es  $H_1 + H_2 - H_3 = H_5$  obteniendo como matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{matrix}$$

Esto se puede confirmar mediante la *figura 4,15* en la que se muestran todos los ciclos y semiciclos correspondientes a la digráfica del *ejemplo 15*.

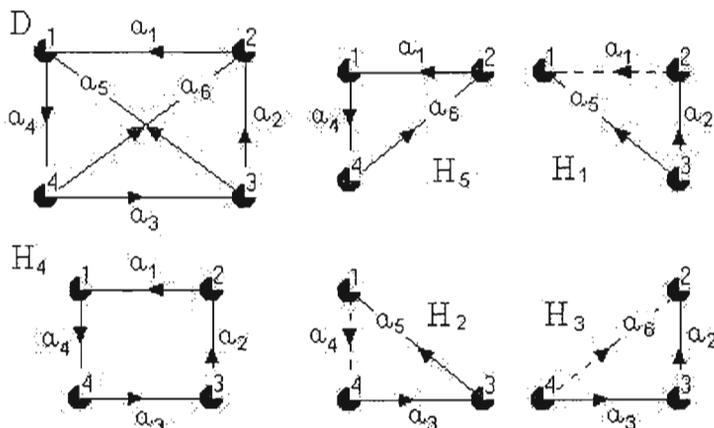


Figura 4.15

Se puede hacer un par de observaciones con respecto a la matriz  $C$  para una digráfica arbitraria  $D$ :

i) Una columna en la que cada una de sus entradas es cero corresponde a un arco que no pertenece a ningún semiciclo en  $D$ .

ii) El número de entradas distintas de cero en un renglón de  $C$  es igual a la cantidad de arcos que forman el ciclo que el renglón representa.

Existen algunos resultados en digráficas que son similares a los demostrados para el caso de gráficas.

**Teorema 8** Sea  $D$  una digráfica con matriz de incidencia  $B$  y matriz de semiciclos  $C$ , donde las columnas se encuentran arregladas de acuerdo al mismo orden de los arcos. Entonces

$$\begin{aligned} BC^T &= 0 \quad y \\ CB^T &= 0. \end{aligned}$$

**Demostración.** Considérese el producto punto del  $i$  - *ésimo* renglón de  $B$  por el  $k$  - *ésimo* renglón de  $C$  :

$$B_i C_k = \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{kj}$$

Si la  $j$  - *ésima* entrada del renglón  $C_k$  es cero, esto implica que la arista  $a_j$  no pertenece al  $k$  - *ésimo* ciclo de  $G$  y por lo tanto  $B_i C_k = 0$ .

Supóngase que:

$$b_{ij} = 1 \quad y \quad c_{kj} = 1$$

Esto quiere decir que la arista  $a_j$  incide con el vértice  $v_i$  y se encuentra orientada en la misma dirección del semiciclo  $C_k$ . Ver *figura 4,16*.

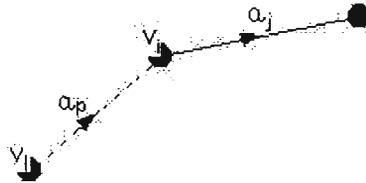


Figura 4.16

Sean  $\{v_l, v_i\}$  los extremos del arco  $a_p$  con el que termina el semiciclo que pasa por  $v_i$ , por lo tanto se deben considerar dos casos:

- i) La orientación de  $a_p$  es de  $v_l \rightarrow v_i$ .
- ii) La orientación de  $a_p$  es de  $v_i \rightarrow v_l$ .

Caso i)  $v_l \rightarrow v_i$

Para este caso en la  $j$  - *ésima* entrada del  $k$  - *ésimo* renglón de  $C$  se encontrará un 1, pues la arista  $a_j$  pertenece al ciclo  $k$  y como la arista  $a_p$  se encuentra orientada en la misma dirección del ciclo  $k$ , la  $p$  - *ésima* entrada de este mismo renglón estará formada por 1. Así:

$$C_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

Por otra parte en la  $j$  - *ésima* entrada del  $i$  - *ésimo* renglón de  $B$  se tendrá un  $-1$ , ya que la arista  $a_j$  sale del vértice  $v_i$  y como la arista  $a_p$  se

dirige directamente al vértice  $v_i$  la  $p$ -ésima entrada de este mismo renglón será igual a 1 :

$$B_k = (0, 0, \dots, -1, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

Entonces:

$$B_i C_k = -1 + 1 = 0$$

Caso *ii*)  $v_i \rightarrow v_l$

Como la arista  $a_j$  pertenece al ciclo  $k$  en la  $j$ -ésima entrada del  $k$ -ésimo renglón de  $C$  se tendrá un 1 y al encontrarse la arista  $a_p$  en dirección contraria a la del ciclo la  $p$ -ésima entrada del ciclo  $k$  estará formada por  $-1$  :

$$C_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, -1, 0, \dots)$$

Por otro lado tanto la arista  $a_j$  como  $a_p$  salen directamente de  $v_i$  por esta razón en la  $j$ -ésima entrada del  $k$ -ésimo renglón de  $B$  se encontrará un 1, así como también en la  $p$ -ésima entrada de este mismo renglón:

$$B_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

Entonces:

$$B_i C_k = 1 + (-1) = 0$$

Si se considera el caso para el cual  $B_{ij} = -1$  el análisis es análogo.

$$\therefore BC^T \equiv 0$$

■

**Definición 26** El rango de una digráfica  $D$  se define como el rango de su matriz de incidencia.

Se pueden realizar una serie de observaciones con respecto a las relaciones entre  $B$  y  $C$  para una digráfica  $D$  con  $n$  vértices y  $m$  aristas.

- i*)  $r(B) = n - 1$  para cualquier digráfica (por el lema 2)
- ii*)  $r(C) = m - n + 1$  (la demostración es análoga a la del teorema 7)
- iii*)  $r(B) + r(C) = m$ . Esto se cumple por las observaciones *i*), *ii*).

## Capítulo 5

# La Matriz de Conjuntos de Corte

Para poder comenzar con esta sección definimos lo que es un conjunto de corte.

**Definición 27** *Un conjunto de corte en una gráfica conexa  $G = (V, U)$ , es un conjunto mínimo de aristas de  $U$  tales que si se eliminan de  $G$ , vuelve a la gráfica resultante desconexa..*

En la gráfica  $G$  de la *figura 5,1* el conjunto de aristas  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  constituye un conjunto de corte de  $G$ .

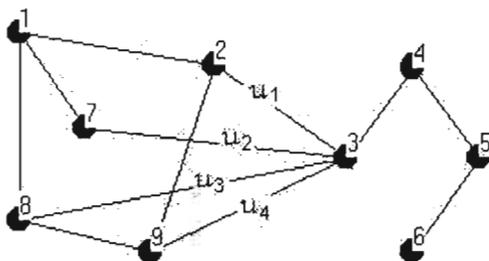


Figura 5.1

La matriz que se tratará a continuación está definida con base en el concepto de conjunto de corte.

**Definición 28** *La matriz de conjuntos de corte  $K = (k_{ij})$ , de una gráfica  $G$  es la matriz donde:*

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo conjunto de corte de } G \text{ contiene a la arista } u_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así la matriz de conjuntos de corte de la figura 5,2 es la siguiente:

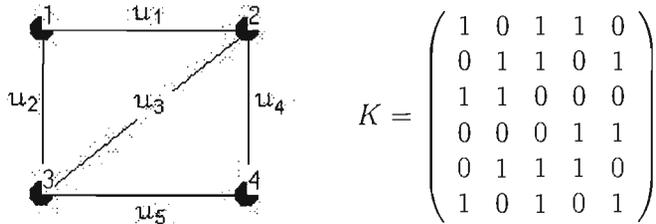


Figura 5.2

Los conjuntos asociados a la matriz de corte de la figura 5,2 son los de la figura 5,2 A :

$$\begin{aligned} k_1 &= \{u_1, u_3, u_4\} & k_4 &= \{u_4, u_5\} \\ k_2 &= \{u_2, u_3, u_5\} & k_5 &= \{u_2, u_3, u_4\} \\ k_3 &= \{u_1, u_2\} & k_6 &= \{u_1, u_3, u_5\} \end{aligned}$$

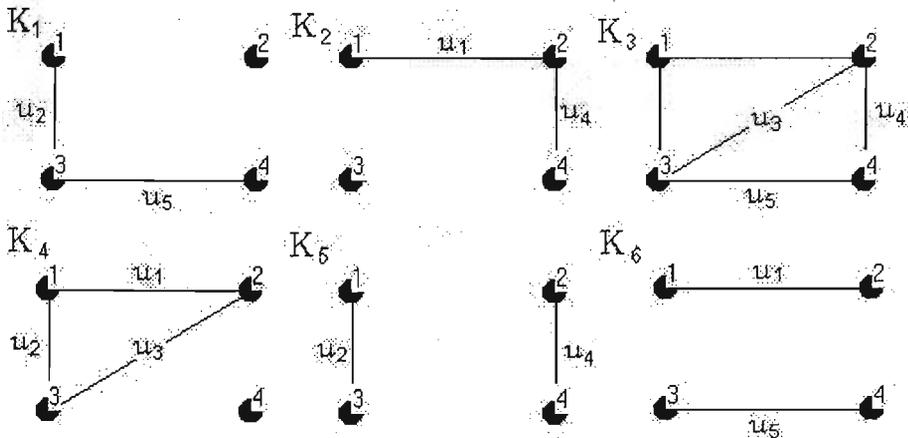


Figura 5.2A

Antes de mostrar el siguiente resultado es necesario hacer referencia al siguiente teorema.

**Teorema 9** *En una gráfica  $G$  el número de aristas en común entre cualquier conjunto de corte y cualquier ciclo, siempre es par.*

**Demostración.** Supóngase que  $G$  es una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $m$  aristas que forman un conjunto de corte  $k$ . Entonces  $G \setminus k$  se vuelve disconexa, así esta quedará dividida en dos componentes conexas que serán denotadas por  $G_1$  y  $G_2$ .

Sea  $u_j$  una arista que pertenece a  $k$  y a un ciclo dentro de  $G$ .

Supongamos que la arista  $u_j = \{v_j v_i\}$  une al vértice  $v_j$  con el vértice  $v_i$ . Por ser  $u_j$  una arista que pertenece a un conjunto de corte, entonces el vértice  $v_j$  pertenecerá a la primer componente  $G_1$  y el vértice  $v_i$  a  $G_2$  la segunda componente de  $G$  (o *viceversa*). Supongamos que recorremos el ciclo al que pertenece  $u_j$  comenzando con  $v_j$ , siguiendo con  $v_i$  y procediendo con la misma dirección. Cada vez que “atrasamos” una arista del conjunto de corte que se dirige de  $G_1$  a  $G_2$  o de  $G_2$  a  $G_1$ . Como empezamos y terminamos en  $v_j$ , (e.d. en  $G_1$ ) el número de aristas en  $k$  y en el ciclo debe ser par.

$\therefore$  El número de aristas en común entre un conjunto de corte y un ciclo siempre es par. ■

Para el caso de digráficas  $D = (V, A)$  la demostración es análoga.

De esta forma, podemos demostrar el resultado siguiente.

**Teorema 10** *Si  $C$  es la matriz de ciclos y  $K$  es la matriz de conjuntos de corte de una gráfica  $G$ , en donde las columnas están arregladas respecto al mismo orden de las aristas, entonces:*

$$\begin{aligned} CK^T &\equiv 0 \pmod{2} & y \\ KC^T &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

**Demostración.** Sabemos que en una gráfica  $G$  el número de aristas en común entre cualquier conjunto de corte y de ciclos es un número par. Así todo renglón de  $K$  es ortogonal (mod 2) a cada renglón de  $C$  y el mismo argumento se puede utilizar para las columnas de  $K$  y de  $C$ .

$$\therefore KC^T \equiv 0 \pmod{2}$$

■

Se define la matriz de conjuntos de corte fundamentales considerando a  $T$  como un árbol generador de  $G$  y  $b = v_i v_j$  una rama de  $T$  tal que  $b$  define un corte de  $G$ . Al conjunto de aristas de  $G$ , entre los vértices de cada componente de  $T \setminus \{b\}$  se le conoce con el nombre de corte fundamental y este contiene exactamente una rama de  $T$  y esta definido con respecto a  $T$ .

**Definición 29** La matriz de conjuntos de corte fundamentales de una gráfica  $G$ , es la matriz  $K_f = (k_{ij})_{(n-1) \times u}$  donde  $k_{ij} = 1$ , si el  $i$ -ésimo conjunto fundamental de corte en  $G$  contiene a la  $j$ -ésima arista y  $k_{ij} = 0$  en otro caso.

**Corolario 1** Sea  $K_f$  la matriz de conjuntos de corte fundamentales y  $C_f$  la matriz de ciclos fundamentales de una gráfica  $G$ , entonces:

$$\begin{aligned} C_f K_f^T &\equiv 0 && (\text{mod } 2) && y \\ K_f C_f^T &\equiv 0 && (\text{mod } 2) \end{aligned}$$

**Demostración.** Se tiene que en una gráfica  $G$ , el número de aristas en común entre cualquier conjunto de corte y cualquier conjunto de ciclos es un número par. Así que todo renglón de  $K_f$  es ortogonal (mod 2) a cada renglón de  $C_f$  y se puede decir lo mismo para las columnas de  $K_f$  y de  $C_f$ .

$$\therefore K_f C_f^T = 0$$

■

**Teorema 11** Si  $G$  es una gráfica conexa con  $n$  vértices,  $m$  aristas y con matriz de conjuntos de corte fundamentales  $K_f$  entonces:

$$r(K_f) = n - 1$$

**Demostración.** Sea  $T$  un árbol generador con respecto a  $G$ , numeremos las aristas de  $G$  comenzando con las de  $T$  así se tiene  $u_1, \dots, u_{n-1}, \dots$

Para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $T \setminus \{u_i\}$  es una gráfica disconexa con dos componentes conexas cuyos conjuntos de vértices se denotarán por  $V_{i,1}$  y  $V_{i,2}$ .

Considérese a  $C_i$  como el conjunto de todas las aristas en  $G$  que unen a  $V_{i,1}$  con  $V_{i,2}$ , así  $u_i \in C_i$ ,  $C_i$  es un conjunto de corte para  $G$  (figura 5,3).

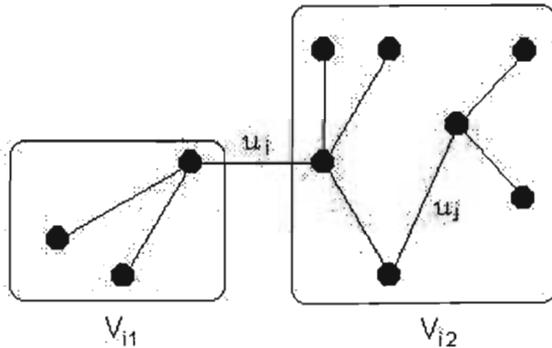


Figura 5.3

Si se toma la matriz de cortes fundamentales se obtiene:

$$K_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & : & \dots & : \\ : & 0 & \dots & : & \dots & : \\ : & : & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Pues  $u_i \in C_j$  si y sólo si  $i = j$ , pues  $u_j$  une dos vértices de  $V_{i,1}$  o bien une dos vértices de  $V_{i,2}$  ya que en un árbol no hay ciclos.

Por hipótesis,  $T$  es un árbol generador de  $G$  con  $n - 1$  aristas y se sabe que cada una de las ramas de  $T$  genera únicamente un conjunto fundamental de corte, entonces dentro de la matriz  $K_f$  encontraremos una submatriz identidad de  $(n - 1) \times (n - 1)$ , entonces:

$$\therefore r(K_f) = n - 1$$

■

**Teorema 12** Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n$  vértices,  $m$  aristas y matriz de conjuntos de corte  $K$ , entonces:

$$r(K) = n - 1$$

**Demostración.** *i)* Por demostrar  $r(K) \geq n - 1$

Como la matriz de cortes fundamentales es una submatriz de la matriz de conjuntos de corte, entonces:

$$r(K) \geq r(K_f)$$

Por otro lado por el *teorema* 12 se tiene que:

$$r(K_f) = n - 1$$

$$\therefore r(K) \geq n - 1$$

*ii)* Por demostrar  $r(K) \leq n - 1$

Se tiene por el *teorema* 10 que:

$$CK^T \equiv 0 \quad (\text{mod } 2)$$

Así que las columnas de  $K^T$  pertenecen al núcleo de  $C \bullet \_$  (donde se tiene que  $C \bullet \_ : Z_2^u \rightarrow Z_2^{(\# \text{ de cortes})}$ ) y además sabemos que si  $F$  es una función lineal, entonces  $Nul(F) + r(F) = \dim [Dom(F)]$ , entonces:

$$Nul(C) + r(C) = m$$

por otro lado:

$$Nul(C) + r(C) \geq r(C) + r(K)$$

y como  $G$  es conexa por el *teorema 7* :

$$r(C) = m - n + 1$$

Entonces:

$$m \geq m - n + 1 + r(K)$$

$$\therefore r(K) \leq n - 1$$

$$\therefore r(K) = n - 1$$

■

Si  $D = (V, A)$  es una digráfica es análogo demostrar  $r(K) = n - 1$

Ahora se ilustrarán estas nociones por medio del árbol de la *figura 5,4* mostrado a continuación:

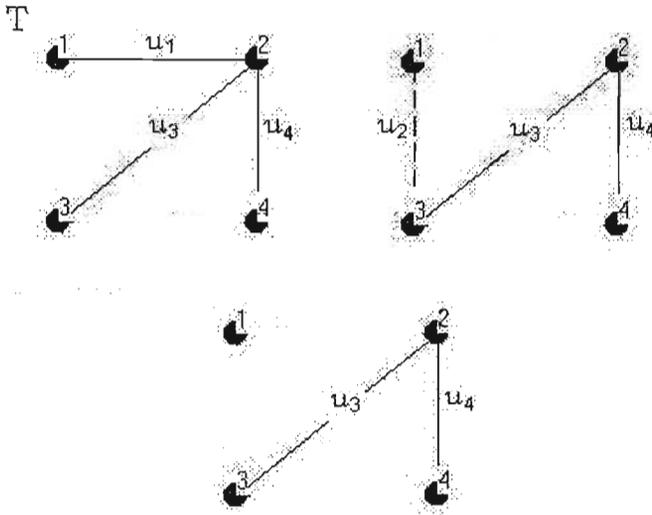


Figura 5.4

Sea  $T$  el árbol generador basado en la gráfica  $G$  de la *figura 5,2*, que esta formado por las ramas que pertenecen al conjunto  $T = \{u_1, u_3, u_4\}$ . Eliminemos la rama  $b = u_1$ , particionando a  $V$  en  $V_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$  y  $V_2 = \{v_1\}$ . Así, la única cuerda que conecta a  $V_1$  y  $V_2$  es  $u_2$ . De esta forma obtenemos un conjunto de corte fundamental dado por  $\{u_1, u_2\}$ . Con esto se tiene que la matriz de conjuntos de cortes fundamentales de la gráfica  $G$  está dada de la siguiente forma:

$$K_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cualquier árbol generador  $T$  en una gráfica conexa, cada rama de  $T$  determina un conjunto de corte fundamental único. De esta forma ahora desarrollaremos la relación que existe entre los ciclos fundamentales y los conjuntos de corte fundamentales.

**Teorema 13** *Sea  $d$  una cuerda con respecto a un árbol generador  $T$ , en una gráfica  $G$  conexa. Supongamos que  $d$  determina un ciclo fundamental  $C$  en  $G$ . Entonces  $d$  pertenece a todos los conjuntos de corte fundamentales generados por las ramas de  $C$  y no pertenece a ningún otro conjunto de corte fundamental de  $G$ .*

**Demostración.** Sea  $d_i$  una cuerda con respecto a un árbol generador  $T$  en una gráfica  $G$  conexa.

Supóngase que el ciclo fundamental creado por  $d_i$ , con respecto a  $T$  es:

$$c = \langle d_i, b_1, b_2, \dots, b_l \rangle,$$

donde  $b_j$  es una rama de  $T$  y  $j = 1, 2, \dots, l$ .

Supóngase que el conjunto de corte fundamental creado por  $b_j$ , donde  $b_j \in C_f$ , con respecto a  $T$ , es:

$$k = \langle b_j, d_1, d_2, \dots, d_n \rangle,$$

donde  $d_h$  es una cuerda con respecto a  $T$  y  $h = 1, 2, \dots, n$ .

Como cada ciclo tiene un número par de aristas en común con cualquier conjunto de corte (*Teorema 10*),  $c$  y  $k$  tienen un número par de aristas en común. Como  $b_j$  es la única rama que se encuentra tanto en  $c$  como en  $k$ , tiene que haber al menos una cuerda en ambos conjuntos. Como  $d_i$  es la única cuerda en  $c$  también debe estar en  $k$ . Entonces  $d_i$  es una de las cuerdas de  $k$ .

Este argumento puede ser utilizado para todos los  $b_j$  con  $j = 1, 2, \dots, l$ . Así  $d_i$  pertenece a todo conjunto de corte fundamental generado por las ramas de  $T$ .

Sin embargo,  $d_i$  no pertenece a ningún otro conjunto de corte fundamental, digamos  $k'$ . Esto es porque ninguna de las ramas de  $c$  está en  $k'$ . Así sólo el arco  $d_i$  puede estar tanto en  $k'$  como en  $c$ . Esto contradice el hecho de que todo ciclo y todo conjunto de corte tienen un número par de aristas en común. ■

**Ejemplo 16** Este teorema puede ser ilustrado por medio de la gráfica y las matrices  $C_f$  y  $K_f$ , mostradas en la figura 5,5.

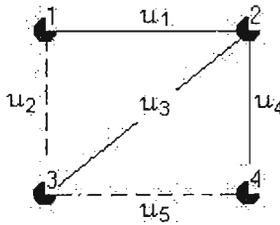


Figura 5.5

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos el árbol generador  $T$ , conformado por las aristas:  $u_1, u_3, u_4$  y las cuerdas  $u_2$  y  $u_5$ . Sea  $d_i = u_2$  la cuerda escogida con respecto a  $T$ , la cual crea el ciclo fundamental:

$$c_f = \langle u_2, u_3, u_1 \rangle,$$

se puede constatar que este corresponde al primer renglón de  $C_f$  en la figura 5,5.

Los conjuntos de corte fundamentales generados por las ramas de  $C_f$  son:

$$\begin{aligned} \text{Para } b_j &= u_3, \quad k_f = \{u_2, u_3, u_5\}, \\ \text{y para } b_j &= u_1, \quad k_f = \{u_1, u_2\} \end{aligned}$$

Estos conjuntos corresponden al tercer y primer renglón de la matriz  $K_f$  en la *figura 5,5*. Se puede constatar que la cuerda  $u_2$  pertenece a estos dos conjuntos de corte fundamentales y no pertenece al otro, pues existe un cero en la entrada  $(2, 2)$  de la matriz  $K_f$ .

**Teorema 14** *Si  $b$  es una rama con respecto a un árbol generador en una gráfica  $G$  conexa, y éste determina un conjunto de corte fundamental  $k$ , entonces  $b$  pertenece a cada uno de los ciclos fundamentales creados por las cuerdas de  $k$  y no pertenece a ningún otro ciclo fundamental.*

**Demostración.** Sea  $b_i$  una rama con respecto a un árbol generador  $T$  en una gráfica conexa  $G = (V, U)$ .

Supóngase que el conjunto de corte fundamental generado por la rama  $b_i$ , con respecto a  $T$  es:

$$k = \{b_i, d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

donde  $d_j$  es una cuerda de  $T$  con  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Sea  $c$  el ciclo fundamental generado por la cuerda  $d_j \in k$  con respecto a  $T$ :

$$c = \{d_j, b_1, b_2, \dots, b_t\},$$

con cada  $b_l$  rama de  $T$  con  $l = 1, 2, \dots, t$ .

Se sabe por el *Teorema 10* que todo conjunto de corte tiene un número par de aristas en común con cualquier ciclo, por lo tanto  $k$  y  $c$  tienen un número par de aristas en común.

Como  $d_j$  es la única cuerda que pertenece tanto a  $k$  como a  $c$ , debe existir al menos una rama en ambos conjuntos. Como  $b_i$  es la única rama en  $k$ , tiene que pertenecer también a  $c$ . Así  $b_i$  es una de las ramas de  $C$ . Este argumento puede ser repetido para cada una de las cuerdas  $d_j$  con  $j = 1, 2, \dots, t$ . Así pues,  $b_i$  pertenece a cada ciclo fundamental generado por las cuerdas de  $T$ .

Por otro lado  $b_i$  no pertenece a ningún otro ciclo fundamental  $c'$ . Pues si  $b_i$  es arista de  $c'$  y  $c'$  está inducida por una cuerda  $d_s \notin k$ . Entonces  $d_s$  une dos puntos en la misma componente conexa de  $G \setminus \{k\}$  (y lo mismo vale para los demás elementos de  $c'$ ) por lo que ninguna de las cuerdas de  $k$  están en  $c'$ . Así  $b_i$  es la única arista que forma parte tanto de  $k$  como de  $c'$ , pero esto contradice el hecho de que cada conjunto de corte tiene un número par de aristas en común con cualquier ciclo. ■

Para ilustrar el resultado anterior, utilizaremos la gráfica y las matrices de la *figura 5,5*. Sea  $b = u_3$  una de las ramas del árbol generador  $T =$

$\{u_1, u_3, u_4\}$ . La rama  $u_3$ , determina al conjunto del ciclo fundamental  $k_f = \langle u_2, u_3, u_5 \rangle$  representado por el tercer renglón de la matriz  $K_f$  de la *figura 5,5*.

Así los dos ciclos fundamentales creados por las cuerdas de  $k_f$  son:

$$\begin{aligned} \text{Para } d_i &= u_2, c_f = \{u_3, u_2, u_1\}, \\ \text{y para } d_i &= u_5, c_f = \{u_3, u_4, u_5\} \end{aligned}$$

estos dos conjuntos son los correspondientes a los dos renglones de la matriz  $C_f$  mostrada en la *figura 5,5*. Se puede comprobar fácilmente el teorema anterior pues la rama  $u_3$  se encuentra contenida en ambos conjuntos.

Sea  $G$  una gráfica conexa, con rango  $\mu$ , y un árbol generador  $T$ . Considérense las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} C_f &= [I_\mu : C_t] \\ K_f &= [K_p : I_{n-1}] \end{aligned}$$

tomando en cuenta que las aristas de ambas matrices están dadas en el mismo orden. Donde  $p$  son las columnas de la matriz asociadas a las cuerdas generadas por  $T$  y de la misma forma  $t$  son las columnas de la matriz asociadas a las ramas de  $T$ . Removiendo uno de los renglones de la matriz de incidencia  $B$  podemos obtener la matriz de incidencia reducida  $B_r$ , y acomodando las columnas de la misma forma que en las matrices anteriores. Se puede partir la matriz  $B_r$  como:

$$B_r = [B_p : B_t]$$

así  $B_t$  esta formado por  $n - 1$  columnas que representan las ramas del árbol generador  $T$  y  $B_p$  comprende las  $m - n + 1$  columnas que representan a las cuerdas con respecto al árbol generador  $T$ .

Sabemos por el *teorema 4* que:

$$B_r C_f^T \equiv 0 \pmod{2}$$

se tiene que:

$$[B_p : B_t] ([I_\mu : C_t])^T \equiv 0 \pmod{2}$$

entonces:

$$B_p + B_t C_t^T = 0$$

Multiplicando por la inversa de  $B_t$  :

$$B_t^{-1} [ B_p + B_t C_t^T ] = 0.$$

Así,

$$B_t^{-1} B_p = -C_t^T \equiv C_t^T \pmod{2} \quad (*)$$

Por el corolario 1 se tiene que:

$$C_f K_f^T \equiv 0 \pmod{2}.$$

Así

$$[K_p : I_{n-1}] ([I_\mu : C_t])^T \equiv 0 \pmod{2}.$$

Se tiene que:

$$K_p + C_t^T = 0,$$

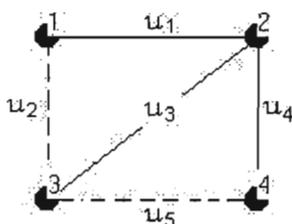
entonces:

$$K_p = -C_t^T = C_t^T \pmod{2}.$$

Por (\*):

$$K_p = B_t^{-1} B_p$$

**Ejemplo 17** Considérese la gráfica  $G$  de la figura 5.6. En la cual el árbol generador considerado es el formado por  $T = \{u_1, u_3, u_4\}$  y donde las matrices  $B$ ,  $C_f$ , y  $K_f$  asociadas a esta gráfica son las siguientes:



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 5.6

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminando el cuarto renglón de la matriz  $B$  se tiene que la matriz  $B_r$  asociada a la gráfica  $G$  de la figura 5,6, esta dada de la siguiente forma:

$$B_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Acomodando las columnas de las matrices conforme a las cuerdas y ramas del árbol generador  $T$  se tiene que:

$$B_r = [B_p : B_t] = \begin{matrix} & u_2 & u_5 & & u_1 & u_4 & u_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$C_f = [I_\mu : C_t] = \begin{matrix} & u_2 & u_5 & & u_1 & u_4 & u_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$K_f = [K_p : I_{n-1}] = \begin{matrix} & u_2 & u_5 & & u_1 & u_4 & u_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Entonces:

$$B_t^{-1}B_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así:

$$B_t^{-1}B_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv C_t^T \pmod{2}$$

y

$$K_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv C_l^T \pmod{2}$$

Por último, aumentando las matrices identidad correspondientes:

$$C_f = [I_\mu : C_l] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_f = [K_p : I_{n-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando las permutaciones de columnas, convenientes:

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que las matrices  $C_f$  y  $K_f$  corresponden a las mostradas en la *figura 5,6*, con esto se puede concluir que para un árbol generador  $T$ , y una submatriz  $B_l$  de  $B_r$ , se cumple que:

- i) A partir de la matriz  $B_r$ , se puede construir la matriz  $C_f$ .
- ii) A partir de la matriz  $B_r$ , se puede construir la matriz  $K_f$ .
- iii) A partir de la matriz  $C_f$ , se puede construir la matriz  $K_f$ .
- iv) A partir de la matriz  $K_f$ , se puede construir la matriz  $C_f$ .

La matriz de conjuntos de corte  $K = (k_{ij})$  puede ser también definida para el caso de digráficas débilmente conexas  $D = (V, A)$ , donde los renglones de  $K$  corresponden a los conjuntos de corte de  $D$  y las columnas a los arcos de la misma. Sea  $k_i$  el  $i$ -ésimo conjunto de corte de  $D$ . Supóngase que  $k_i$  parte  $V$  en dos conjuntos de vértices tales que  $V_i$  y  $V_j$  sean distintos del vacío. La orientación de  $a_j$  puede ser definida: de  $V_i$  a  $V_j$  o de  $V_j$  a  $V_i$ . Supóngase que se selecciona la orientación de  $V_i$  a  $V_j$ . Entonces diremos que la orientación del arco  $a_j$  del conjunto de corte  $k_i$ , estará dada por los extremos  $v_r v_p$  de  $a_j$  donde  $v_r \in V_i$  y  $v_p \in V_j$  o en sentido contrario, así se tiene una definición de la matriz de corte en una forma más precisa.

**Definición 30** La matriz de conjuntos de corte  $K = (k_{ij})$  para una digráfica  $D$  esta dada como  $k_{ij} = 1$  si el arco  $a_j$  del conjunto de corte  $k_i$  esta

en la misma dirección de  $k_i$ ,  $k_{ij} = -1$  si el arco  $a_j$  del conjunto de corte  $k_i$  está en la dirección opuesta de  $k_i$  y  $k_{ij} = 0$  en cualquier otro caso.

**Ejemplo 18** Considérese la digráfica  $D$  de la figura 5,7, los conjuntos de corte correspondientes son los siguientes:

$$\begin{aligned} k_1 &= \{a_1\} \\ k_2 &= \{a_2, a_5\} \\ k_3 &= \{a_3, a_4\} \\ k_4 &= \{a_2, a_3, a_6\} \\ k_5 &= \{a_4, a_5, a_6\} \\ k_6 &= \{a_2, a_4, a_6\} \\ k_7 &= \{a_3, a_5, a_6\} \end{aligned}$$

La matriz de conjuntos de corte para esta digráfica es:

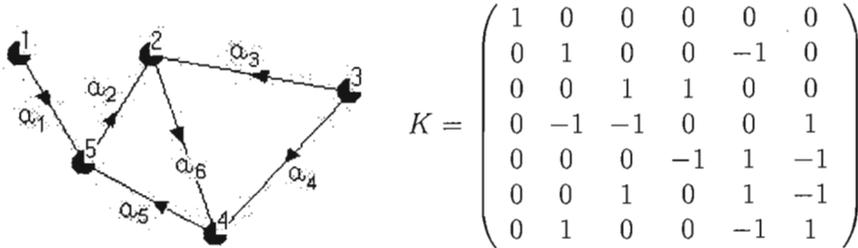


Figura 5.7

Se pueden considerar un par de resultados con respecto a la matriz de conjuntos de corte  $K$  de una digráfica  $D$  debilmente conexa con  $n$  vértice y  $m$  aristas.

**Teorema 15** Si  $D$  es una digráfica y sus arcos se encuentran acomodados en el mismo orden tanto en la matriz  $C$  como en  $K$ , entonces:

$$\begin{aligned} CK^T &= 0 \quad y \\ KC^T &= 0 \end{aligned}$$

**Demostración.** Sabemos por el Teorema 10 que en una digráfica  $D$ , el número de aristas en común entre cualquier conjunto de corte y de ciclos es

un número par. Así todo renglón de  $K$  es ortogonal a cada renglón de  $C$  y el mismo argumento se puede utilizar para las columnas de  $K$  y de  $C$ .

$$\therefore KC^T = 0$$

■

Como en el caso de la matriz de semiciclos, es conveniente definir la matriz de conjuntos de cortes fundamentales de una digráfica  $D$ .

De la misma forma que en gráficas al remover un arco  $a_j = v_r v_p$ , (también denominado *rama*) de un árbol generador dirigido de  $D$ , parte los vértices de una digráfica  $D$  en dos conjuntos disjuntos  $V_i$  y  $V_j$ .

Al remover la arista  $a_j$  de  $D$  se genera un conjunto de corte que estará dado de la siguiente forma:

- i) Se dirige de  $V_i$  a  $V_j$  si  $v_r \in V_i$  y  $v_p \in V_j$  o por otro lado
- ii) Se dirige de  $V_j$  a  $V_i$  si  $v_p \in V_i$  y  $v_r \in V_j$ .

Este conjunto de corte se conoce como *conjunto de corte fundamental*. Por supuesto no todas las cuerdas en  $k_i$  necesariamente tendrán la misma orientación que  $v_r v_p$ . Considerando esto la orientación de un conjunto de corte fundamental estará dada por la dirección de la rama que lo genera. Por otro lado si todas las cuerdas de  $k_i$  están orientadas en la dirección de  $v_r v_p$  se dirá que el conjunto  $k_i$  está *dirigido*.

**Ejemplo 19** Considérese la digráfica de la figura 5.8, con  $T$  un árbol generador dirigido formado por el conjunto de aristas  $\{a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_9\}$ .

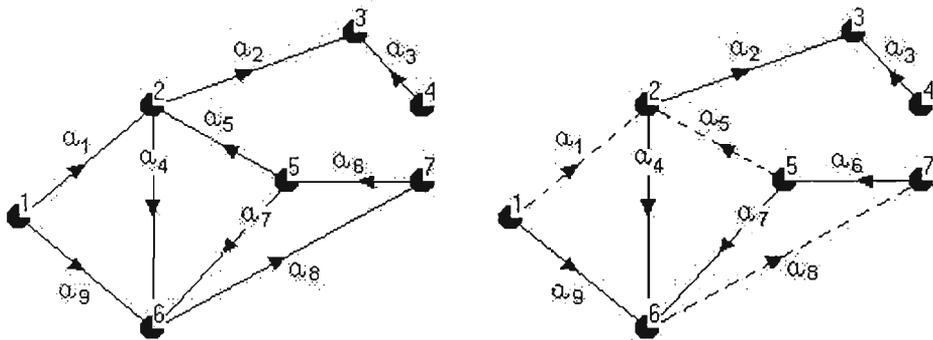


Figura 5.8

El conjunto de corte fundamental generado por la rama  $a_2$  es  $k_1 = \{a_2\}$ , el de  $a_3$  es  $k_2 = \{a_3\}$ , con  $a_4$  se tiene  $k_3 = \{a_1, a_4, a_5\}$ , por  $a_6$  es  $k_4 = \{a_6\}$ ,

con  $a_7$  el  $k_5 = \{a_5, a_7, a_8\}$  y por último el formado por  $a_9$  es  $k_6 = \{a_9, a_1\}$ . La matriz  $K_f$  correspondiente se muestra a continuación.

$$K_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $K_f$  puede generarse a partir de la matriz de conjuntos de corte fundamentales  $K$ , si se eliminan de  $K$  todos los renglones que no corresponden a un conjunto de corte fundamental con respecto a un árbol generador dirigido  $T$ , por esta razón  $K_f$  es una submatriz de  $(n-1) \times a$ , donde cada renglón representa un conjunto de corte fundamental único con respecto a  $T$ .

Como en el caso de la matriz de semiciclos fundamentales, los renglones de cualquier matriz de conjuntos de corte fundamentales  $K_f$ , pueden ser permutados para crear una matriz de la forma:

$$[K_p : I_{n-1}]$$

Donde  $K_r$  es una matriz de  $(n-1) \times (e-n+1)$ , donde sus columnas corresponden a las cuerdas de  $T$  y de  $I_{n-1}$  es la matriz identidad de orden  $n-1$  en la cual sus columnas corresponden a las ramas de  $T$ . Sea  $D$  una digráfica debilmente conexa con un árbol generador dirigido  $T$ . Ahora se pueden deducir las relaciones entre la matriz  $C_f$ ,  $K_f$ , y  $B_r$  (donde  $B_r$  es la matriz de incidencia reducida en la cual se ha removido un renglón arbitrario para que sus renglones sean linealmente independientes). Con anterioridad se ha visto que:

$$\begin{aligned} C_f &= [I_\mu : C_t] & y \\ K_f &= [K_p : I_{n-1}] \end{aligned}$$

aquí  $t$  corresponde a las ramas de  $T$  y  $p$  a las cuerdas de  $T$ . Se debe suponer que los arcos tanto en  $C_f$ ,  $B_r$ , y  $K_f$  están acomodados en un mismo orden. Partirse a  $B_r$  como:

$$B_r = [B_p : B_t]$$

donde  $B_p$  es una submatriz de  $(n-1) \times (e-n+1)$  donde las columnas corresponden a las cuerdas de  $T$  y  $B_t$  es una submatriz de  $(n-1) \times (n-1)$

en la cual sus columnas representan las ramas de  $T$ . Como:

$$BC^T = 0$$

por medio de un razonamiento análogo al caso de gráficas se puede deducir que para el caso de digráficas también se cumple que:

$$K_p + C_t^T = 0$$

Entonces:

$$K_p = -C_t^T = C_t^T$$

y así

$$K_p = B_t^{-1}B_p$$

Para ilustrar estas propiedades se puede analizar el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 20** Sea  $D = (V, A)$  la digráfica de la figura 5,9, con un árbol generador dirigido  $T = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_8\}$  y con sus respectivas matrices  $B$ ,  $K_f, C_f$ .

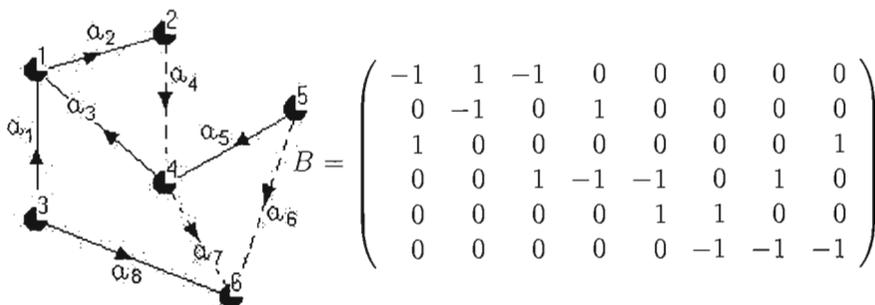


Figura 5.9

$$K_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eliminando el cuarto renglón de la matriz  $B$  se obtiene la matriz  $B_r$ .  
Entonces:

$$B_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si se ordenan las columnas de cada una de las matrices conforme a las cuerdas de  $D$  con respecto al árbol generador dirigido, donde  $p$  serán las cuerdas y  $t$  las ramas correspondientes a  $T$ :

$$B_r = [B_p : B_t] = \begin{pmatrix} & a_4 & a_6 & a_7 & & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_f = [I_\mu : C_t] = \begin{pmatrix} & a_4 & a_6 & a_7 & & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 & a_8 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_f = [K_p : I_{n-1}] = \begin{pmatrix} & a_4 & a_6 & a_7 & & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 & a_8 \\ 0 & -1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_t^{-1}B_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$B_t^{-1}B_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = K_p = C_t^T$$

Aumentando la identidad a  $K_p$  y  $C_t$  se tiene:

$$C_f = [I_\mu : C_t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$K_f = [K_p : I_{n-1}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se realizan tanto las operaciones como las permutaciones de columnas correspondientes se pueden obtener las matrices  $C_f$  y  $K_f$  que se tenían desde un principio. Además cabe recordar que por medio de combinaciones lineales de la matriz  $K_f$  se puede obtener la matriz de corte  $K$ .

Así se pueden hacer una serie de observaciones con respecto a la relación entre las matrices  $B_r$ ,  $C_f$  y  $K_f$  de una digráfica  $D$ , las cuales son similares a las discutidas para el caso de gráficas  $G$ :

- i) A partir de  $B_r$ , puede ser contruída  $C_f$ .
- ii) A partir de  $B_r$ , puede ser contruída  $K_f$ .
- iii) A partir de  $C_f$ , puede ser contruída  $K_f$ .
- iv) A partir de  $K_f$ , puede ser contruída  $C_f$ .

# Capítulo 6

## La Matriz de Trayectorias

Sea  $G = (V, U)$  una gráfica conexa con aristas etiquetados.

**Definición 31** Para cada par distinto de vértices  $w, v \in V$ , la matriz de trayectorias  $P_{wv} = [p_{i,j}]$ , de una gráfica  $G = (V, U)$ , cuenta con un renglón por cada trayectoria entre  $w, v$ , y una columna por cada arista en  $E$ , donde  $p_{ij} = 1$ , si la  $j$  - ésima arista pertenece a la  $i$  - ésima trayectoria que hay entre  $w$  y  $v$  en  $G$ , y  $p_{ij} = 0$ , en otro caso.

**Ejemplo 21** Este resultado puede ser mejor entendido si se toma la gráfica  $G$  mostrada en la figura 6,1, considerando  $w = v_2$  y  $v = v_3$ .

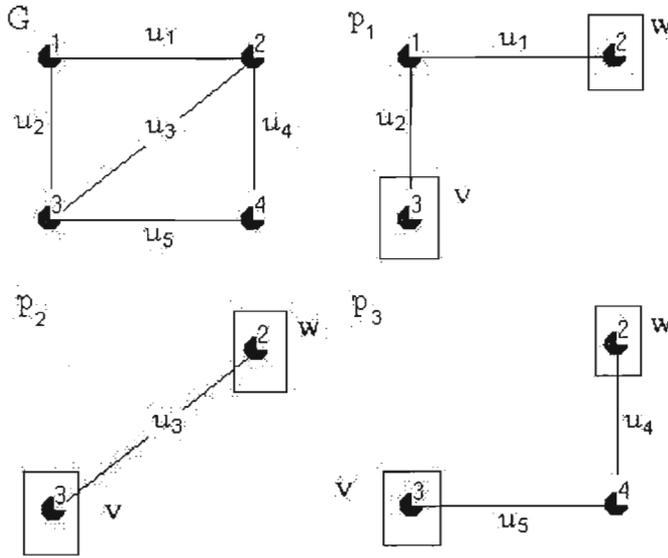


Figura 6.1

De esta forma, a partir de la figura se puede observar que hay tres trayectorias distintas que se dirigen de  $w$  a  $v$ . Son las siguientes:

$$p_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$p_2 = \langle u_3 \rangle$$

$$p_3 = \langle u_4, u_5 \rangle$$

La matriz de trayectorias correspondiente es:

$$P_{13} = \begin{pmatrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Antes de mencionar algunas de las propiedades con las que cumple esta matriz es necesario conocer la siguiente definición:

**Definición 32** Sea  $G$  una gráfica conexa, una trayectoria euleriana es una trayectoria abierta de  $G$  que contiene una sola vez a todas las aristas de  $G$ .

Así, esta matriz cumple con la siguientes propiedades:

i) La suma de cada renglón determina el número de aristas que pertenecen a cada trayectoria.

ii) Un renglón en el cual todas sus entradas sean igual a uno, representa una caminata que es unicursable en el sentido de ser una trayectoria abierta de Euler.

iii) Cada renglón debe contener al menos un uno.

iv) Una columna en la cual todas sus entradas son iguales a uno, representa una arista que pertenece a todas las trayectorias entre  $w$  y  $v$ .

v) Una columna en la cual todas sus entradas sean igual a cero representa una arista que no pertenece a ninguna trayectoria entre los vértices  $w$  y  $v$ .

**Teorema 16** Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $m$  aristas, matriz de trayectorias  $P_{wv}$  y matriz de incidencia  $B$ , entonces:

$$\begin{aligned}BP_{wv}^T &\equiv Q \pmod{2} \quad \text{y} \\P_{wv}^T B &\equiv Q \pmod{2}\end{aligned}$$

Donde  $Q$  es una matriz en la cual todas sus entradas son cero con excepción de dos renglones formados unicamente por unos en cada entrada y que corresponden a los vértices que son los extremos de la trayectoria.

**Demostración.** Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $m$  aristas, matriz de trayectorias  $P_{wv}$  y matriz de incidencia  $B$ . Por otro lado  $B_i$  es el  $i$  - ésimo renglón de la matriz  $B$  y  $P_k$  el  $k$  - ésimo renglón de la matriz  $P_{wv}$ , por demostrar:

$$B_i P_k = \sum_{a_j} B_{ij} P_{kj} \equiv Q_{ik} \pmod{2}$$

Si

$$\sum_{a_j} B_{ij} P_{kj} \equiv 0 \pmod{2}$$

Existen dos posibilidades:

i)  $v_i \notin P_k$  y entonces:

$$\sum_{a_j} B_{ij} P_{kj} = 0 \equiv 0 \pmod{2}$$

También  $Q_{ik} = 0$  pues  $v_i$  no es uno de los extremos de  $P_k$

ó

ii) Existe un número par de aristas  $a_j$  en  $P_k$  que contienen a  $v_i$  (ver figura 6,2) esto significa que  $v_i \in P_k$  y  $v_i$  no es extremo de  $P_k$ .

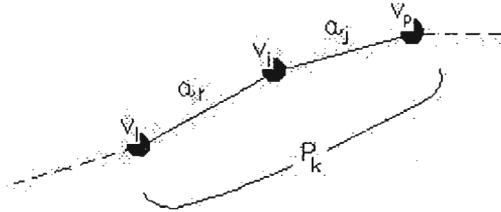


Figura 6.2

Entonces  $v_i$  pertenece exactamente a dos aristas de  $P_k$ , digamos  $a_j$  y  $a_r$ .

$$\therefore \sum_{a_j} B_{ij}P_{kj} = B_{ij}P_{kj} + B_{ir}P_{kr} = 1 * 1 + 1 * 1 = 2 \equiv 0 \pmod{2}$$

También sucede que  $Q_{ik} = 0$  pues  $v_i$  no es extremo de  $P_k$  como se noto anteriormente.

Análogamente:

Si

$$\sum_{a_j} B_{ij}P_{kj} \equiv 1 \pmod{2}$$

Entonces hay un número impar de aristas en  $P_k$  que contienen a  $v_i$ . Esto significa que  $v_i$  es uno de los extremos de  $P_k$ . Entonces  $v_i$  pertenece a una sola arista  $a_j$  de  $P_k$ .

$$\therefore \sum_{a_j} B_{ij}P_{kj} = B_{ij}P_{kj} = 1 * 1 = 1$$

También  $Q_{ik} = 0$ , por definición de  $Q$ .

Así:

$$B_i P_k = \begin{cases} 0 & \text{si la trayectoria } P_k \text{ no pasa por el vértice } v_i. \\ 1 & \text{si el vértice } v_i \text{ es extremo de la trayectoria } P_k. \\ 2 & \text{si la trayectoria } P_k \text{ pasa por el vértice } v_i \text{ y este} \\ & \text{no es extremo de } P_k. \end{cases}$$

$$\therefore B P_{wv}^T \equiv Q \pmod{2}$$

■

Con el siguiente ejemplo se puede ver como se cumple esta propiedad. Considérese la gráfica de la *figura 6,1*:

$$BP_{23}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Así:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mod}2)$$

Se definirá la matriz de semitrayectorias para digráficas de una forma análoga a la matriz de trayectorias de una gráfica.

**Definición 33** La matriz de semitrayectorias  $P(w, v) = (p_{i,j})$ , de una digráfica  $D = (V, A)$ , donde  $w, v \in V$ , es la matriz que en cada renglón representa una semitrayectoria distinta de  $w$  a  $v$  y las columnas representan los arcos de  $D$ , así que  $p_{ij} = 1$  si la  $i$ -ésima semitrayectoria contiene al  $j$ -ésimo arco,  $p_{ij} = -1$  si la  $i$ -ésima semitrayectoria contiene al  $j$ -ésimo arco inverso, y  $p_{ij} = 0$  en cualquier otro caso.

**Ejemplo 22** Sea  $D = (V, A)$  la digráfica de la *figura 6,3*, y considérese  $w = v_1$  y  $v = v_3$ .

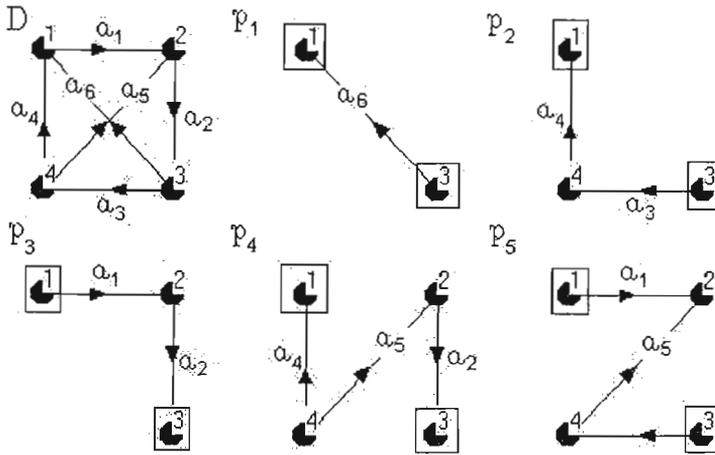


Figura 6.3

Así su matriz de semitrayectorias es la siguiente:

$$P(v_1, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pueden hacer una serie de observaciones con respecto a la matriz  $P$ .

i) Si  $P(w, v)$  contiene una columna en la cual cada una de sus entradas es cero entonces la arista que la representa no pertenece a ninguna de las semitrayectorias entre  $w$  y  $v$ .

ii) Cuando una de las columnas de  $P(w, v)$  se encuentra formada en cada una de sus entradas por una unidad implica que la arista que esta columna representa forma parte de todas las semitrayectorias entre  $w$  y  $v$ .

iii) El número de entradas distintas de cero en cualquier renglón de  $P(w, v)$  es igual al número de arcos en la semitrayectoria representada por el renglón.

# Índice alfabético

- arbol, 18
  - dirigido, 22
  - generador, 23
- bosque generador, 24
- camino, 6
  - cerrado, 7
- camino dirigido, 14
- ciclo, 7
  - fundamental, 56
- clan, 33
- conexa fuerte, 16
  - debilmente, 17
  - unilateralmente, 16
- conjunto de corte, 69
- cuerdas, 23
- digrafica, 4
  - aciclica, 15
  - de dominacion, 38
- grado, 5
  - exterior, 5
  - interior, 5
- grafica, 2
  - aciclica, 8
  - completa, 12
  - conexa, 11
  - disconexa, 11
- isomorfas, 8
- matriz de
  - adyacencia, 27
  - ciclos, 53
  - conjuntos de corte, 69
  - incidencia, 47
  - trayectorias, 89
- ramas, 23
- rango matriz de
  - ciclos, 59
  - incidencia, 48
- semicamino
  - semiciclo, 15
  - semipaseo, 15
  - semiciclo, 15
- subgrafica, 10
  - generadora, 10
  - inducida, 10
- trayectoria, 7
- vertice, 4
  - aislado, 6
  - de corte, 13
  - potente, 41
  - terminal, 5

# Bibliografía

- [1] Biggs, Norman y Lloyd, Keith., "Graph Theory". New York: Oxford University, 1976.
- [2] Chartrand, Gary, "Introductory Graph Theory". New York: Dover Publications Inc., 1997.
- [3] Foulds, L.R., "Graph Theory Applications". New York: Springer, 1992.
- [4] Hernández Ayuso, Ma. del Carmen, "Introducción a la Teoría de Redes". México: Sociedad Matemática Mexicana, 1997.
- [5] Marshall, Clifford W., "Applied Graph Theory". E.U. Eiley Interscience, 1971.
- [6] Reinhard, Diestel, "Graph Theory". New York: Springer-Verlag, 1997.
- [7] Rincón Mejía Hugo, "Algebra Lineal". México D.F: Prensas de Ciencias UNAM, 2001.
- [8] Rorres, Chris y Howard Anton., "Applications of Linear Algebra". New York: Wiley, 1979.
- [9] Thompson, Robert C. y Adil Yaqub., "Introducción al Algebra Abstracta y Lineal". México: Union Tipográfica Editorial Hispano-Americana, 1976.
- [10] Thulasiraman, K. y S. Swamy "Graphs: Theory and Algorithms". New York: Wiley-Interscience Publication, 1992.
- [11] Wallis W.D., "A Beginner's Guide to Graph Theory Boston ". Boston: Birkhäuser, 2000.