UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNA PROPUESTA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES LINEALES EN EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN PEDAGOGIA

P R E S E N T A :

FRANCISCO RIVERA RAMOS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JESÚS AGUIRRE CÁRDENAS

PROLOGO

Desde tiempos inmemoriales la educación matemática ha sido una preocupación ingente de la humanidad. Al buscar soluciones a las diversas preguntas que estas cuestiones han planteado el hombre ha ido produciendo diversos filones y fulgurantes aristas de la cultura matemática, cristalizadas en obras que han permeado la enseñanza de las mismas, tal es el caso de las enseñanzas de la geometría plasmadas en los *Elementos de Euclides*, obra de la Grecia clásica, que aun hoy es objeto de estudio y que permea la enseñaza de las matemáticas elementales. Al estudiante del bachillerato las ecuaciones lineales le son familiares, de alguna manera, desde que curso la secundaria, no obstante es menester considerar la importancia que tiene el retomar estas en un nuevo nivel que supera lo que el estudiante debe manejar y lo prepara para que si es su vocación seguir el estudio de las matemáticas a un nivel riguroso vuelva a considerar el estudio de las ecuaciones lineales en cursos de algebra lineal, con una base sólida en su formación matemática inicial.

La situación actual de las ramas del conocimiento que convergen en la pedagogía permite replantear las formas de adecuar la enseñanza de las diversas ciencias que son motivo del trabajo cotidiano en el aula y en el laboratorio. La didáctica como parte medular de la pedagogía, cuyo objetivo es el de prever el instrumental necesario aplicable a los objetivos y estructura del sistema educativo; implica una combinación de niveles teórico, técnico, instrumental en el análisis y elaboración de los problemas del ámbito del nivel medio superior de la educación y particularmente de la enseñanza de las matemáticas; lo que supone una interrelación permanente entre la indagación teórica y la práctica educativa.

Este trabajo es una Propuesta Didáctica que parte de la considerar la forma en que se manifiestan los contenidos a fin de lograr las metas establecidas se vehiculiza a través de un supuesto sobre las formas como aprenden y como deben aprender los alumnos. El aprendizaje se da mediante procesos deductivos, inductivos, analíticos, sintéticos, etc. Es menester considerar la manera como se organizan los estudiantes para aprender e incluso la forma como se dispone el espacio.

Es importante considerar el papel que han de desempeñar el maestro y los estudiantes. El proceso para el aprendizaje en el aula debe ser interactivo, dinámico, comunicativo, participativo, dialéctico. La escuela tiene como fin la formación integral del estudiante, incluyendo la adquisición de métodos de estudio y de trabajo.

Se tiene la intención de preparar al alumno para que sea autónomo en su aprendizaje. La escuela debe propiciar el aprender a aprender.

Propiciemos en el alumno el desarrollo del análisis, sentido crítico entendiendo este como el poder hacer acopio de todo lo aprendido para resolver un problema dado, estimulo para la creación. Para propiciar la formación de los alumnos debemos tener claridad de la importancia del compromiso que esto implica. La elaboración de diversos instrumentos pedagógicos y particularmente didácticos empleados que faciliten la adquisición de conocimientos es una tarea indispensable en el qué hacer educativo.

INTRODUCCION

Abrimos nuestro trabajo *“Una propuesta didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales en el bachillerato”* con un repaso sucinto de las teorías pedagógicas de la enseñanza señalando sus características fundamentales y sus principales vínculos, subrayando los conceptos como aprendizaje significativo, resolución de problemas, inteligencias múltiples, etc. Concomitantemente destacamos algunos de los conceptos principales de las diversas corrientes psicológicas, comenzando por las del constructivismo, siguiendo brevemente por el constructivismo Piagetiano, continuando con la corriente Vigotskiana. De manera superficial se describen los intentos que llevan a la psicología a replantear a constituir el estudio y la aplicación en la enseñanza de las inteligencias múltiples.

Abordamos la explicación de la enseñanza de las ecuaciones lineales, especialmente los conceptos de la ramas de las matemáticas, los métodos de la misma concordantes con la propuesta didáctica, la geometría euclidiana , etc., para entrelazar estos con las propiedades de las igualdades, las ecuaciones lineales y con los conceptos didácticos, para posibilitar la comprensión de la propuesta.

Al tratar las concepciones de las diversas corrientes psicológicas, exponemos esquemáticamente el aspecto elemental de las acepciones constructivitas, tales como las desarrolladas por Ausubel, Piaget, Vigotsky, etc., ejemplificando estrategias de aprendizaje aplicables a los diversos momentos del desarrollo de un curso. Así, como de preguntas para la planeación en inteligencia múltiples. Ejemplificando la construcción de un modelo matemático, que se construye como planteamiento de un problema "real" dado y que se expresa desde este inicio como una ecuación lineal en n variables reales ($n = 1, 2, ..., m$) o que puede ser un sistema de dos o mas ecuaciones lineales en dos o mas variables reales. Y que como modelo es la solución de una ecuación lineal en una, dos o más variables o de un sistema de dos o más ecuaciones lineales en dos o mas variables.

En otra parte del trabajo exponemos ejemplos estrategias que tienen la intención de imprimir un carácter lúdico en la enseñanza de las matemáticas, y que son susceptibles de aplicarse en momentos adecuados del desarrollo de la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Mencionamos la importancia que tienen los diversos cursos que la Universidad Nacional Autónoma de México, en la formación docente del nivel medio.

Finalmente queremos decir que este trabajo esta impregnado de la preocupación central que nos mueve: la adecuación pedagógica de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato.

CAPITULO 1. LA ESCUELA Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

La escuela tiene como fin la formación integral del estudiante, incluyendo la adquisición de métodos de estudio y de trabajo. Se tiene la intención de preparar al alumno para que sea autónomo en su aprendizaje. La escuela debe propiciar el aprender a aprender. Propiciemos en el alumno el desarrollo del análisis, sentido crítico entendiendo este como el poder hacer acopio de todo lo aprendido para resolver un problema dado, estimulo para la creación. Para propiciar la formación de los alumnos debemos tener claridad de la importancia del compromiso que esto implica. La elaboración de diversos instrumentos pedagógicos y particularmente didácticos empleados que faciliten la adquisición de conocimientos es una tarea indispensable en el qué hacer educativo.

La enseñanza de las matemáticas tiene un papel fundamental en cada uno de los niveles del sistema educativo, en particular en el bachillerato mediante la enseñanza de las ciencias y en especial de las matemáticas en cuya enseñanza se puede propiciar el desarrollo integral del alumno.

Es necesario considerar en las reformas de la educación en general y en la enseñanza de las matemáticas en particular que propicien en el estudiante el interés por las mismas, haciendo uso incluso de aspectos lúdicos en su presentación en el aula.

Se requiere propiciar en el aula que los alumnos pregunten, observen, etc. Se debe generar la capacidad de razonar científicamente, que comprendan los conceptos que estudian, que no solo memoricen, que puedan resolver los problemas que se les presenten. Es necesario propiciar su participación activa en clase, que propongan sus verdades, que se den tiempo para entender lo que conocen.

A partir de ciertas investigaciones pedagógicas se están haciendo propuestas con respecto a una nueva concepción de la educación en la ciencia y en particular de las matemáticas, la cual resalta las aptitudes y habilidades que los alumnos requieren para tener éxito en sus estudios.

El desarrollo de la inteligencia en todas sus fases (inteligencias múltiples), que se manifiesta en la adquisición y ejercitación de habilidades esenciales para el trabajo efectivo en todas las áreas de conocimiento. Ellas proporcionan el vínculo que articula entre si a las disciplinas del conocimiento. Estas se manifiestan en la lectura, la escritura, la capacidad para expresarse verbalmente, la capacidad para escuchar, la capacidad de componer música, poesía, la capacidad de dramatizar etc.; comprender y utilizar las matemáticas como lenguaje, la capacidad de razonar y el estudio de una cultura computacional, todas estas habilidades se pueden englobar con la capacidad de comunicar (hablar, escuchar, escribir, leer) y representar, etc.

“En general, es preciso que prestemos atención a la transmisión de la ciencia de una generación a otra, a la formación del espíritu científico de nuestros alumnos. Es preciso mantener el interés por el pensamiento científico; para esto, es necesario integrar la cultura científica a la cultura general”. (Gastón Bachelard)

El desarrollo vertiginoso de la ciencia y la tecnología hace necesario fijar con exactitud el nacimiento de los problemas, determinar la síntesis global donde se originan los problemas.

Es menester, considerar los estudios de la historia de las matemáticas que abunda en enseñanzas para la pedagogía.

La adquisición del conocimiento, para el alumno, de los tópicos y situaciones que originan la teoría en estudio, es nodal en la formación de un espíritu de formulación de los problemas que le permitan aprender la realidad. Aunado a la insistencia que se de en la enseñanza de las matemáticas, en proporcionar a los alumnos las técnicas de medida y de calculo directamente utilizables, mediante la experimentación tan variada como sea posible, permitirá que la aprensión de la realidad sea eficaz.

Se puede elaborar material audiovisual utilizando software común, tal como lo es la hoja de cálculo electrónica, presentación de temas en un programa de diapositivas, y software especial de matemáticas, como el que han elaborado en la Universidad de Texas, Geolab software Matemático interactivo preparado por los investigadores del Instituto de Matemáticas de la UNAM Elena de Oteyza[1] entre otros.

Se debe elaborar software libre mediante el uso de sistemas como Linux, con este se puede enseñar a los alumnos los motores de un procesador de texto, de una hoja de calculo, etc.; aprovechando las oportunidades que brinda la Dirección General de Servios de Cómputo Académico de la UNAM y diversas instituciones.

Estas materiales se pueden elaborar en los laboratorios de cualquier plantel del bachillerato, mediante el uso de Red UNAM.

[1] En colaboración con Emma Lam Osnaya, Carlos Hernández García Diego, Ángel Manuel Carrillo Hoyo, y Arturo Ramírez Flores.

La situación humana actual exige que la escuela proporcione a los estudiantes una cultura matemática que les permita estar adecuadamente informados, capaces de entender los avances cotidianos de una sociedad tecnológica. Las metodologías aplicadas en el aula deben contemplar la experimentación y comunicación de las nociones y conceptos matemáticos, de manera que permitan la representación idónea de las ideas que posibiliten su mejor comunicación.

Se puede considerar de manera abierta a su comprensión y posible aplicación las metas que se proponen actualmente, el alumno debe lograr:

- Ser capaz de resolver problemas matemáticos.
- Aprender a comunicarse matemáticamente.
- Aprender a dialogar matemáticamente.
- Aprender a analizar la naturaleza matemáticamente.
- Aprender a vincular la música con las matemáticas.
- Aprender a razonar matemáticamente.
- Saber valorar las matemáticas.
- Tener confianza en su capacidad de hacer matemáticas.

Estas metas implican que los estudiantes experimenten diversas situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre si, que los lleven a valorar las actividades y tareas matemáticas, desarrollar hábitos, cambiar algunos hábitos[2] adquiridos en sus estudios previos que han cimentado su forma de aprender por imitación del docente, y comprender y apreciar el papel que las matemáticas

[22] Pues sabido es que el hombre primero fabrica sus hábitos y después los hábitos fabrican al hombre.

juegan en el acontecer humano; que debe estimularles a explorar, predecir e incluso reconocer errores y propiciar corregirlos de manera que adquieran confianza en el desarrollo de su propia capacidad de resolver problemas, que deben leer, escribir, y discutir sobre matemáticas y deben formular hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre su validez. Deben desarrollar sus inteligencias múltiples en el desarrollo de sus capacidades matemáticas.

1.1. TENDENCIA ACTUAL DE LAS MATEMATICAS

La ***tendencia actual de la enseñanza de las matemáticas*** establece que el núcleo de conocimientos básico que debe proporcionar el bachillerato a sus estudiantes debe incluir:

1.1.1. La naturaleza y utilidad de la matemática.

1.1.1.1. Apreciar que el estudio de las matemáticas contribuye al desarrollo de un pensamiento analítico, estructurado y lógico, así como a elevar la autoestima, la seguridad en si mismo y la formación integral de su personalidad.

1.1.1.2. Valorar que la preparación matemática permite resolver problemas y situaciones de diversa índole.

1.1.1.3. Reconocer que el conocimiento matemático y su desarrollo están influenciados por los avances y problemas científicos, tecnológicos y sociales, y a la vez, reconocer que las matemáticas impulsan las innovaciones científicas y tecnológicas, y que constituyen un campo de conocimiento en desarrollo permanente.

1.1.1.4. Comprender que la utilización de nuevas tecnologías contribuye a investigar y verificar modelos matemáticos que permiten acceder y trabajar con problemas más complejos.

1.1.2. Respecto al lenguaje matemático.

1.1.2.1 Valorar el lenguaje matemático para el estudio de fenómenos naturales y sociales.

1.1.2.2. Reconocer que en la actualidad, el lenguaje matemático forma parte importante de las habilidades comunicativas.

1.1.2.3. Emplear el lenguaje y la notación matemática para representar ideas, establecer o demostrar relaciones y formular generalizaciones.

1.1.3. Solución de problemas.

1.1.3.1. Emplear el razonamiento y el lenguaje matemático para valorar conclusiones y argumentos y construir otros.

1.1.3.2. Valorar la aplicación y desarrollo de modelos matemáticos para resolver problemas de diversas disciplinas y de la vida cotidiana.

1.1.3.3. Proponer diversos métodos o procedimientos para la solución de problemas.

1.1.3.4. Explicar y justificar el procedimiento empleado para la resolución de un problema, obtener el resultado e interpretarlo.

1.1.3.5. Transladar el procedimiento de solución de un problema a situaciones similares.

1.1.3.6. Emplear en lo posible, la calculadora y la computadora como herramientas para auxiliarse en la solución de problemas.

1.1.3.7. Inferir, conjeturar y generalizar ideas matemáticas fundamentales y emplearlas para la solución de problemas.

1.1.4. Notación y conceptos básicos de conjuntos.[3]

1.1.4.1. Comprender el concepto de conjunto y su notación matemática.

1.1.4.2. Comprender y ejemplificar la igualdad entre conjuntos.

1.1.4.3. Construir subconjuntos a partir de un conjunto universal conocido.

1.1.4.4. Efectuar las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento.

1.1.4.5. Representar operaciones mediante diagramas de Venn – Euler.

1.1.4.6. Valorar la utilidad de los conjuntos para facilitar el estudio de las matemáticas así como para la resolución de problemas de la vida cotidiana.

1.1.5. El sistema de los números reales.

1.1.5.1 Propiedades y aplicaciones

1.1.5.1. Conocer las aplicaciones algebraicas de los números reales.

---

[3] En el bachillerato la teoría de conjuntos solo se requiere como herramienta auxiliar para otros apartados de la matemática, por lo cual su tratamiento debe ser elemental y por lo mismo no se ha de enfatizar.

1.1.5.2. Identificar algunos subconjuntos importantes: naturales, enteros, racionales, y algunos subconjuntos de éstos, como el de los primos[4].

1.1.5.3. Conocer varias maneras de representarlos, incluyendo la forma radical y exponencial, y poder operar con ellos[5].

1.1.5.4. Utilizar la notación científica para representar y operar con magnitudes muy grandes y muy pequeñas.

1.1.5.5. Realizar la conversión de notación científica a notación ordinaria y viceversa.

1.1.5.6. Reconocer las propiedades de orden de los números reales, y saber operar con el valor absoluto.

1.1.5.7. Utilizar números reales para resolver problemas de su vida cotidiana, dentro fuera del contexto matemático.

1.1.5.8. Resolver problemas de proporcionalidad, interés simple, interés compuesto y divisibilidad.

1.1.6. Intervalos

1.1.6.1. Reconocer que un intervalo es un conjunto formado por números reales.

1.1.6.2. Realizar operaciones de unión, intersección y diferencia con intervalos abiertos, cerrados, cerrados-abiertos, abiertos-cerrados.

1.1.6.3. Representar los intervalos en la recta numérica.

---

[4] Referirse más al conocimiento de los subconjuntos que a la forma en que estos se obtienen, en particular en el caso de los números irracionales.

[5] Se incluyen las leyes de los signos.

1.5. Álgebra

1.1.5.1. Expresiones algebraicas

1.1.5.1.2. Reconocer los términos algebraico.

1.1.5.1.3. Distinguir entres monomio y polinomio (binomio, trinomio, etc.).

1.1.5.1.4. Determinar el grado de un monomio y de un polinomio.

1.1.5.1.5. Identificar términos semejantes.

1.1.5.1.6. Obtener el valor numérico de una expresión algebraica.

1.1.5.1.7. Realiza operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación y división con polinomios.

1.1.5.1.8. Traduce el lenguaje cotidiano a expresiones algebraicas, y viceversa.

1.1. 5.2. **Productos notables**

1.1.5.2.1 Obtener y aplicar las reglas para desarrollar el producto de:

- Binomio al cuadrado.
- Binomio al cubo.
- Binomios conjugados.
- Binomios con término común.

1.1.5.3. Factorización

1.1.5.3.1. Comprender la conveniencia de expresar un polinomio como un producto de dos o más factores.

1.1.5.3.2. Factorizar expresiones algebraicas:

- Diferencia de cuadrados.
- Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
- Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
- Por factor común.
- Por asociación.

1.1.5.6. Ecuaciones

1.1.5.6.1. Comprender el concepto de ecuación y distinguir una ecuación de una identidad.

1.1.5.6.2. Identificar los elementos de una ecuación y clasificar a las ecuaciones por grado y número de variables.

1.1.5.6.3. Comprender que las ecuaciones resultan muy útiles para describir relaciones.

1.1.5.6.4. Aplicar las propiedades algebraicas para encontrar la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1.1.5.6.5. Comprender el significado de la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita.

1.1.5.6.6. Comprender que la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita puede no tener sentido en la solución de un problema determinado.

1.1.5.6.7. Resolver problemas de otras disciplinas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1.1.5.6.8. Resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

1.1.5.6.9. Comprender el significado de la o las soluciones de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

1.1. 5.6.10. Resolver problemas simples de otras disciplinas que involucran ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

1.1.5.6.11. Comprender que algunas de las soluciones de una ecuación de segundo grado puede no tener sentido, en la resolución de un problema determinado.

1.1.5.6.12. Interpretar el sentido que puede tener la o las soluciones, o la ausencia de soluciones en los números reales, de una ecuación de segundo grado.

1.1.5.6.13. Resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

1.1.5.6.14. Comprender el significado de la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

1.1.5.6.15. Interpretar el sentido que puede tener la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, así como el caso tenga una infinidad de soluciones, o ninguna solución.

1.1.5.6.16. Resolver sistemas que involucran una ecuación cuadrática y una lineal con dos incógnitas.

1.1.5.6.17. Interpretar el sentido que puede tener la o las soluciones, o la ausencia de soluciones en los números reales, de los sistemas de ecuaciones mencionados en el punto anterior.

1.1.5.6.18. Comprender la problemática inherente a la obtención de las soluciones de ecuaciones de grado superior a dos, con una incógnita, y obtener, en cada caso sencillo sus raíces.

1.1.5.6.19. Interpretar geométricamente las soluciones de las ecuaciones.

1.1.5.7. Desigualdades y sistemas de desigualdades.

1.1.5.7.1. Comprender el concepto de desigualdad y la notación que se emplea.

1.1.5.7.2. Resolver desigualdades con una incógnita, y representar gráficamente el conjunto solución.

1.1.5.7.3. Resolver algunas desigualdades de primer grado con una incógnita, con valor absoluto.

1.1.5.7.4. Resolver gráficamente desigualdades de segundo grado con una incógnita.

1.1.5.7.5. Resolver gráficamente sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas y representar gráficamente el conjunto solución.

1.1.5.7.6. Resolver problemas sencillos de otras disciplinas que involucran sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas, e interpretar el sentido del conjunto solución.

1.1. 5.8. Matrices

1.1.5.8.1. Comprender el concepto de matriz y su notación.

1.1. 5.8.2. Reconocer y obtener algunas matrices especiales como la idéntica y la inversa.

1.1.5.8.3. Realizar operaciones de suma resta, multiplicación por un escalar, y el producto de matrices, con matrices de orden

$mxn(\text{m por n}),\ \text{con}\ n \le 3(n\ menor\ o\ igual\ que\ 3), m \le 3(m\ menor\ o\ igual\ que\ 3)$.

1.1.5.8.4. Reconocer que el empleo de matrices facilita el registro y manipulación de datos y la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

1.1.5.8.5. Aplicar las operaciones con matrices para la solución de problemas sencillos de otras disciplinas.

1.1.5.9. Relaciones y funciones

1.1.5.9.1. Reconocer la importancia del concepto de función.

1.1.5.9.2. Distinguir entre función y relación.

1.1.5.9.3. Comprender los conceptos de dominio, contradominio, rango y regla de correspondencia.

1.1.5.9.4. Comprender que una función real de variable real, está determinada por una regla de correspondencia que asocia a cada elemento del dominio, uno y solamente un elemento del contradominio.

1.1.5.9.5. Realizar operaciones de suma, resta, multiplicación, división, composición de funciones.

1.1.5.9.6. Asociar funciones algebraicas, logarítmicas o exponenciales con modelos matemáticos sencillos relativos a fenómenos físicos, económicos, biológicos, etc., y determinar su dominio.

1.1.5.9.7. Representar la función por medio de su gráfica

1.1.5.9.8. Interpretar la gráfica de la función.

1.1.5.9.9. Reconocer que la computadora puede ser un apoyo para mostrar el comportamiento de algunos tipos de funciones.

1.1. 6. Geometría

1.1.6.1 Reconocer que la geometría contribuye a desarrollar las habilidades de lógica y de razonamiento.

1.1.6.2. Comprender el concepto de ángulo y las unidades de medida: grados y radianes.

1.1.6.3. Reconocer los tipos de ángulos; tales como recto, agudo, obtuso, complementario y suplementario.

1.1.6.4. Desarrollar argumentos convincentes informales, oralmente y por escrito para justificar relaciones angulares entre ángulos formados por líneas paralelas cortadas por una transversal, como: alternos internos, alternos externos, correspondientes y opuestos por el vértice. Aplicar estos conocimientos en la solución de problemas de la vida real.

1.1.6.5. Reconocer los tipos de triángulos y las rectas y los puntos notables de estos: altura, bisectriz, mediana, mediatriz; y baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro.

1.1.6.6. Construir ángulos, triángulos, y las rectas notables con regla y compás.

1.1.6.7. Identificar, describir, dibujar y clasificar polígonos, utilizando atributos especiales como: convexo, cóncavo, regular e irregular.

1.1.6.8. Construir polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia.

1.1.6.9. Encontrar la suma de los ángulos internos de polígonos.

1.1.6.10. Aplicar propiedades de congruencia y semejanza empleando modelos y dibujos para encontrar medidas desconocidas de figuras, con o sin calculadora (computadora). Aplicar estos conocimientos en la solución de problemas de la vida real.

1.1.6.11. Verificar el teorema de Pitágoras empleando construcciones geométricas.

1.1.6.12. Aplicar el teorema de Pitágoras para resolver problemas de otras disciplinas y de la vida real.

1.1.6.13. Interpretar, dibujar y construir cuerpos geométricos.

1.1.6.14. Utilizar razones y proporciones para resolver problemas que involucran propiedades de figuras bidimensionales semejantes.

1.1.6.15. Determinar perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos regulares y resolver problemas.

1.1.6.16. Realizar gráfica y/o mentalmente transformaciones de figuras geométricas bidimensionales, como translaciones, rotaciones o reflexiones. Predecir el resultado de la transformación.

1.1.6.17. Reconocer que la computadora puede ser una herramienta para la construcción de ángulos, triángulos y sus rectas notables, y para las transformaciones de figuras geométricas.

1.1.7. Trigonometría

1.1.7.1**.** Comprender el significado de las razones trigonométricas.

1.1.7.2. Resolver problemas que involucran razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

1.1.7.3. Obtener las razones trigonométricas de ángulos especiales ($30^\circ, 45^\circ$ y 60°).

1.1.7.4. Conocer y aplicar algunas identidades trigonométricas importantes: Pitagóricas, reciprocas y seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos.

1.1.7.5. Conocer y aplicar la ley de los senos y la ley de los cosenos en la resolución de problemas.

1.1.7.7. Construir las gráficas de funciones trigonométricas.

1.1.7.8. Reconocer a nivel general las aplicaciones de las funciones trigonométricas en las ciencias en general y en las artes.

1.1.8. Geometría analítica

1.1.8.1. Comprender el concepto de lugar geométrico.

1.1.8.2. Reconocer y resolver los dos problemas de la geometría analítica:

- Dada una ecuación determinar su lugar geométrico.
- Teniendo las características o descripción de un lugar geométrico determinar su ecuación: recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

1.1.8.3. Determinar simetrías con respecto a un eje, intersecciones, dominio, rango y asíntotas de una curva.

1.1.8.4. Calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera de un plano.

1.1.8.5. Determinar las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada.

1.1.8.6. Calcular la pendiente de una recta, y el ángulo entre dos rectas.

1.1.8.7. Obtener y aplicar los criterios para determinar el paralelismo y la perpendicularidad entre dos rectas.

1.1.8.8 Obtener la ecuación de la recta.

1.1.8.9. Identificar los elementos básicos de las cónicas.

- Circunferencia: centro y radio, ecuación ordinaria y ecuación general.
- Parábola: foco, directriz, vértice, lado recto, eje de simetría, ecuación ordinaria y ecuación general.

- Elipse: centro, focos, vértices, eje mayor, eje menor, excentricidad, ecuación ordinaria y ecuación general.
- Hipérbola: centro, focos, vértices, eje conjugado, eje transverso, asíntotas, ecuación ordinaria y ecuación general.

1.1.8.10. Resolver problemas sencillos de aplicación que involucran circunferencia, pasabola o elipse.

1.1.9.11. Reconocer que el uso de translación o rotación de ejes simplifica problemas de geometría analítica.

1.1.9. Precálculo

1.1.9.1. Comprender los conceptos de sucesión y serie.

1.1.9.2. Distinguir cuándo una progresión es aritmética y cuándo es geométrica.

1.1.9.3. Desarrollar y emplear modelos sencillos basados en sucesiones y series.

1.1.9.4. Desarrollar y aplicar procedimientos para obtener el valor de series aritméticas y geométricas, finitas e infinitas.

1.1.9.5. Utilizar el concepto y cálculo de sujeciones para encontrar e interpretar límites.

1.1.9.6. Manejar una idea intuitiva de límite.

1.1.9.7. Investigar el límite mediante el examen de sucesiones infinitas, series y áreas bajo la curva.

1.1.9.8. Determinar los puntos máximo y mínimo de una gráfica e interpretar los resultados en problemas de aplicación. (No se trata de aplicar derivadas. Se puede apoyar usando computadora o calculadoras gráficas).

1.1.9.9. Aplicar el cálculo de límites al estudio de algunos fenómenos naturales.

1.1.9.10. Manejar el concepto de rapidez de cambio y aplicarlo a algunos conceptos asociados, como la velocidad media, la aceleración media, el crecimiento de una población, etc.

1.1.10. Estadística y probabilidad básicas

1.1.10.1. Comprender y valorar a la estadística como una herramienta que permite recopilar, organizar, analizar y presentar información de carácter cuantitativo.

1.1.10.2. Comprender los conceptos de población, muestra, variable discreta y variable continua.

1.1.10.3. Emplear diversas formas para organizar y representar datos (tablas, gráficas, diagramas, etc.).

1.1.10.4. Comprender los conceptos de intervalo, frecuencia, rango y marcas de clase.

1.1.10.5. Comprender el significado, determinar y utilizar medidas de posición: deciles, cuartiles y percentiles.

1.1.10.6. Comprender el significado, determinar y utilizar medidas fundamentales de tendencia central: media aritmética, media ponderada, moda y mediana.

1.1.10.7. Comprender el significado y utilizar medidas de dispersión: desviación estándar y varianza.

1.1.10.8. Comprender la noción de regresión y de correlación.

1.1.10.9. Comprender las limitaciones de la estadística para interpretar los resultados, formular conclusiones, hacer predicciones, y asumir una actitud crítica ante estás.

1.1.10.10. Comprender y valorar a la teoría de la probabilidad como una herramienta muy útil para estudiar fenómenos aleatorios, tanto de las ciencias naturales como de las sociales.

1.1.10.11. Comprender los conceptos de evento aleatorio, probabilidad, incertidumbre y distribución.

1.1.10.12. Distinguir los eventos o sucesos independientes y su relación con la probabilidad condicional.

1.1.10.13. Comprender conceptos de eventos complementarios y los mutuamente excluyentes.

1.1.10.14. Resolver problemas sencillos de conteo, utilizando conceptos de combinatoria.

1.1.10.15. Comprender las limitaciones de la teoría de las probabilidades para interpretar resultados, formular conclusiones y hacer predicciones.

1.1.10.16. Comprender los conceptos básicos de la inferencia estadística.

2. CAPITULO 2.

EL PROBLEMA.

Las matemáticas en cualquiera de sus acepciones ramas, corrientes de pensamiento y niveles escolares se manifiestan mediante dos formas fundamentales las cuales son:

1. Expresiones matemáticas. Una expresión es cualquier símbolo o bien una cadena de símbolos de una teoría particular. Es el término más común en todos los elementos del cálculo formal, como son formulas, nombres, variables, predicados, relaciones, frases y secuencias (sucesiones).
2. Ecuaciones. Una ecuación es una igualdad condicional, la cual es verdadera para ciertos valores de las variables (las raíces de la ecuación), por ejemplo $x^2 - 3 = 1$, es una ecuación cuyas raíces son $x = 2$ y $x = -2$.

Todo estudiante de bachillerato debe conocer y aun dominar las ecuaciones lineales. Es una parte esencial de las matemáticas elementales que hasta cierto nivel son requisito para abordar con éxito el estudio de las matemáticas que son base para estudios del nivel medio superior y mas aun estudios posteriores, no obstante lo anterior al efectuar examen de diagnostico a los estudiantes de primer ingreso se hace patente la deficiencia e ineficiencia del conocimiento de este tema.

El examen diagnostico sobre ecuaciones lineales permite planificar[6] de manera mas idónea cada una de las clases que se imparten en el desarrollo de la unidad correspondiente a las ecuaciones lineales.

Como punto de partida de esta tesis se considera el examen de diagnostico aplicado en el periodo comprendido de 1999 a 2004. Dicho examen se aplico anualmente a tres grupos diferentes de bachillerato, cabe señalar que cada año comprendido en el periodo de tiempo mencionado, al menos uno de los grupos fue elegido del Colegio de Ciencias y Humanidades de La Universidad Nacional Autónoma de México.

NOTAS:

1. Considero necesario presentar los resultados (aciertos) de 18 grupos[7] a los que se les aplico el examen de diagnostico (de 25 reactivos), tres grupos por año; durante el periodo comprendido de 1999 a 2004.
2. Se presenta el concentrado de los 18 grupos (muestra), de cuyos datos se exponen ciertas medidas de tendencia central; que son a saber: media aritmética, mediana y moda. Así, como la dispersión estándar.
3. Se presentan también histogramas de los datos, considerando marcas de clase de 0-5, 5-10, 10-15, 15-20 y 20-25.

[6] En el anexo 7 se incluyen ejemplos de plan de clase.
[7] Los grupos se eligieron al azar a partir de una tabla de datos aleatorios, considerando una población de 100 000 estudiantes de bachillerato se tomaron muestras de tamaño 50, tres por año en el periodo de tiempo que va de 1999 a 2004.

4. Para cada grupo examinado mediante el instrumento diagnostico, se registran los aciertos obtenidos por cada uno de los alumnos. De cada grupo se determino la media aritmética (promedio), la mediana y la moda.
5. En el anexo 1 se expone el examen diagnóstico aplicado a estudiantes de bachillerato.

2.2 Grupo 1999 -1.

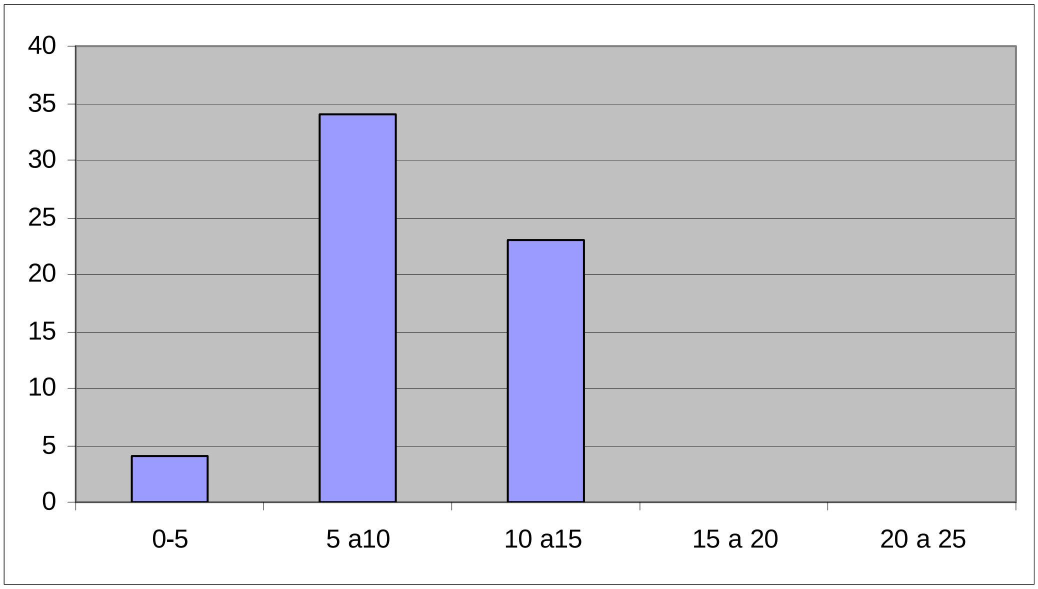
ALUMNO	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A17	A16
ACIERTOS	10	10	9	12	7	8	9	10	5	12	8	9	7	1	10	9	12

ALUMNO	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30	A31	A33	A32
ACIERTOS	9	13	12	12	10	12	8	9	10	12	12	13	9	9	12	10

ALUMNO	A34	A35	A36	A37	A38	A39	A40	A41	A42	A43	A44	A45	A46	A47	A48	A49	A50
ACIERTOS	10	9	12	10	12	10	10	7	9	5	6	7	7	8	8	8	9

Tabla 1

Modo(a)	10
PROMEDIO(Media aritmética)	9
Mediana	9



Histograma 1

2.3 Grupo 1999 -2.

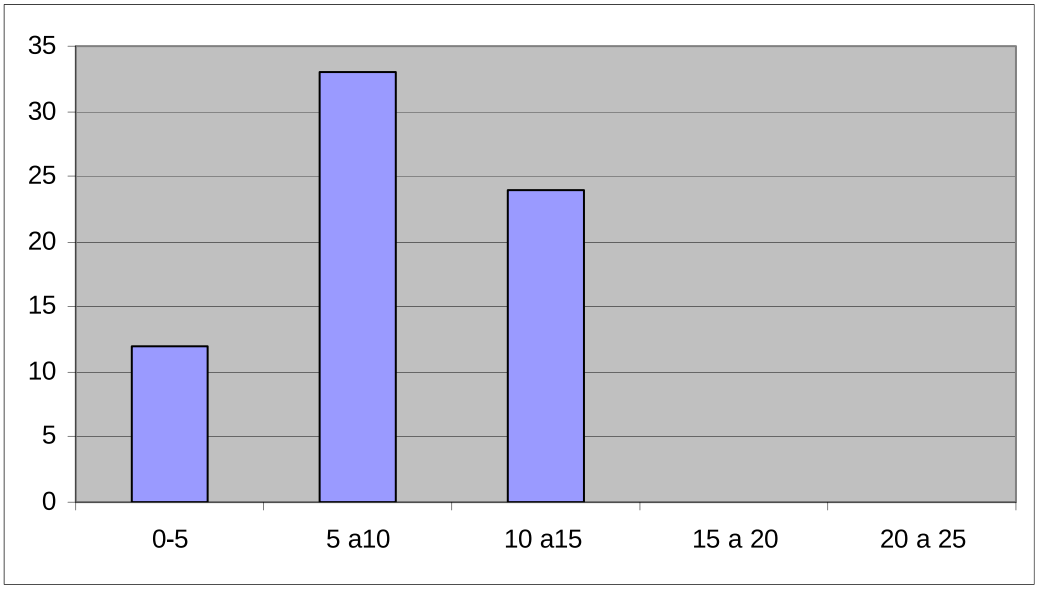
ALUMNO	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16	B17	B18
ACIERTOS	10	5	6	12	4	12	5	5	9	9	8	12	10	5	5	12	10	9

ALUMNO	B19	B20	B21	B22	B23	B24	B25	B26	B27	B28	B29	B30	B31	B32	B33	B34
ACIERTOS	9	5	4	8	8	7	2	9	15	12	10	5	12	10	12	5

ALUMNO	B35	B36	B37	B38	B39	B40	B41	B42	B43	B44	B45	B46	B47	B48	B49	B50
ACIERTOS	7	8	8	9	4	9	10	12	7	7	8	9	9	12	10	9

Tabla 2

Promedio(media aritmética)	8
Mediana	9
Moda	9



Histograma 2

2.4 Grupo 1999 -3.

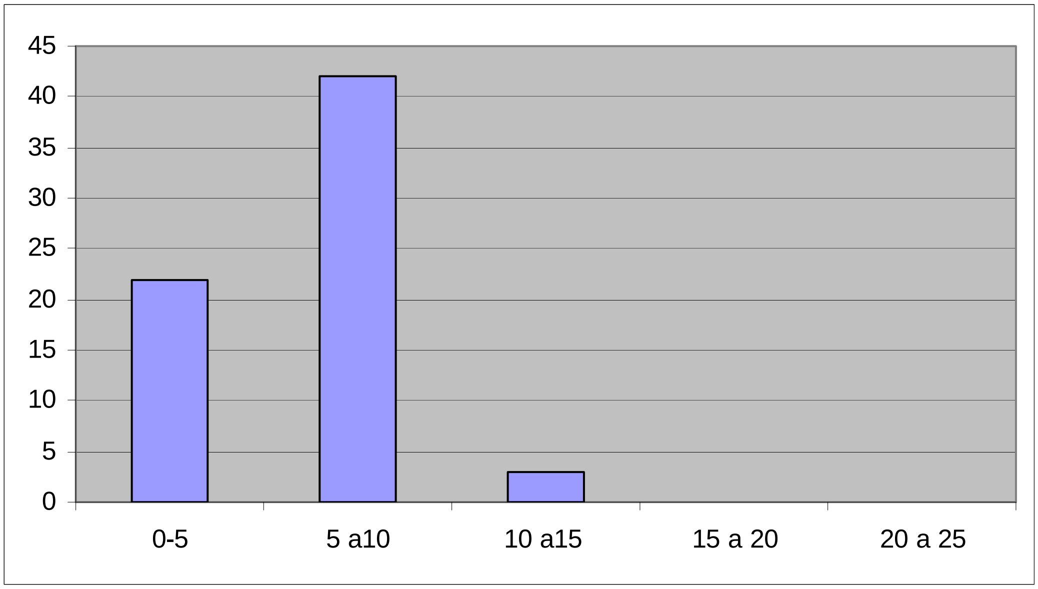
ALUMNO	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17
ACIERTOS	10	5	6	5	5	8	5	8	6	4	8	5	5	5	6	8	4

ALUMNO	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24	C25	C26	C27	C28	C29	C30	C31	C32	C33
ACIERTOS	6	5	5	6	6	4	4	6	5	5	5	5	5	4	4	6

ALUMNO	C34	C35	C36	C37	C38	C39	C40	C41	C42	C43	C44	C45	C46	C47	C48	C49	C50
ACIERTOS	5	10	12	3	7	8	8	8	7	7	8	8	9	9	9	8	10

Tabla 3

Promedio(media aritmética)	6
Mediana	6
Modo(a)	5



Histograma 3

4.5 Grupo 2000 -1.

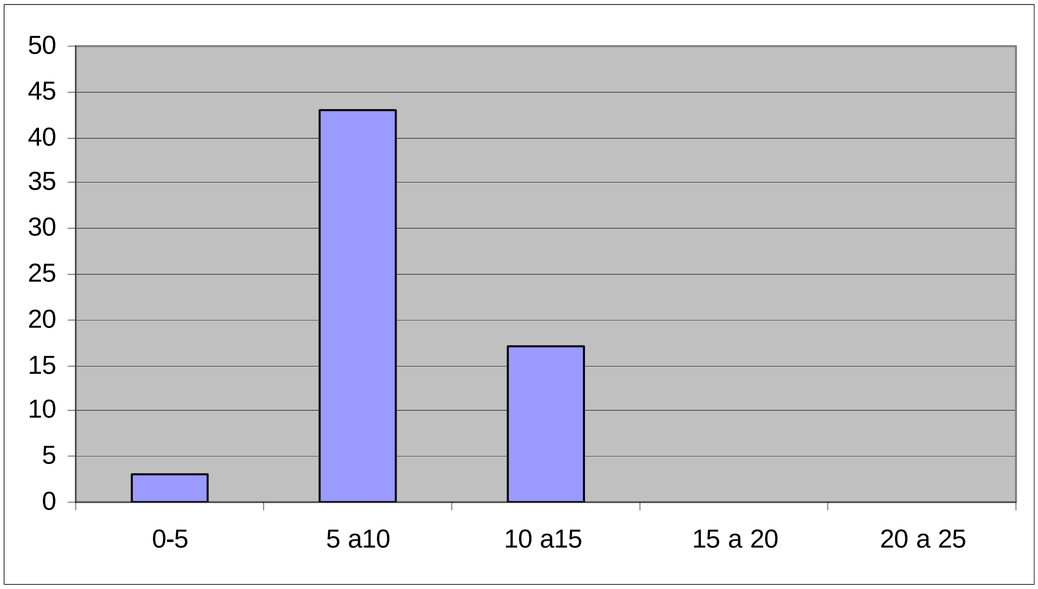
ALUMNO	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17
ACIERTOS	10	5	9	10	9	9	8	8	7	4	5	10	12	6	7	8	10

ALUMNO	D18	D19	D20	D21	D22	D23	D24	D25	D26	D27	D28	D29	D30	D31	D32	D33
	6	6	8	8	9	10	13	12	10	13	10	9	8	8	9	9

ALUMNO	D34	D35	D36	D37	D38	D39	D40	D41	D42	D43	D44	D45	D46	D47	D48	D49	D50
ACIERTOS	12	10	7	7	9	12	10	9	9	9	10	9	13	10	9	8	8

Tabla 4

Promedio(media aritmética)	9
Mediana	9
Moda	9



Histograma 4

2.6 Grupo 2000 -2.

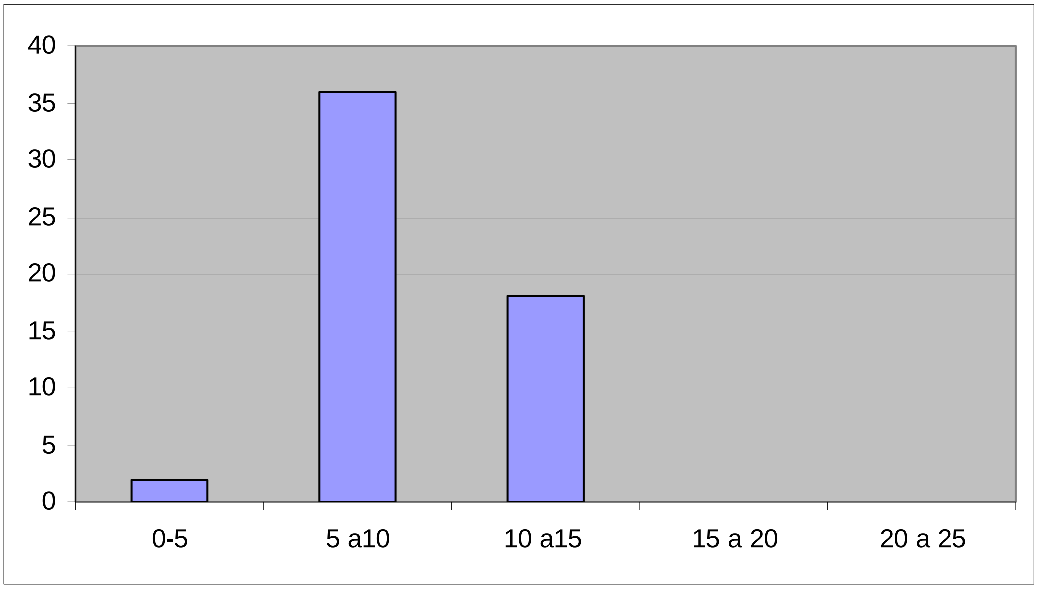
ALUMNO	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17
ACIERTOS	6	12	9	14	5	12	10	10	9	9	13	12	10	9	9	9	5

ALUMNO	E18	E19	E20	E21	E22	E23	E24	E25	E26	E27	E28	E29	E30	E31	E33	E32
ACIERTOS	7	7	12	6	7	9	9	5	6	10	11	9	9	9	9	5

ALUMNO	E34	E35	E36	E37	E38	E39	E40	E41	E42	E43	E44	E45	E46	E47	E48	E49	E50
ACIERTOS	10	10	10	6	9	10	12	12	9	10	9	8	8	5	7	9	10

Tabla 5

Promedio(media aritmética)	9
Mediana	9
Moda	9



Histograma 5

4.7 Grupo 2000 -3.

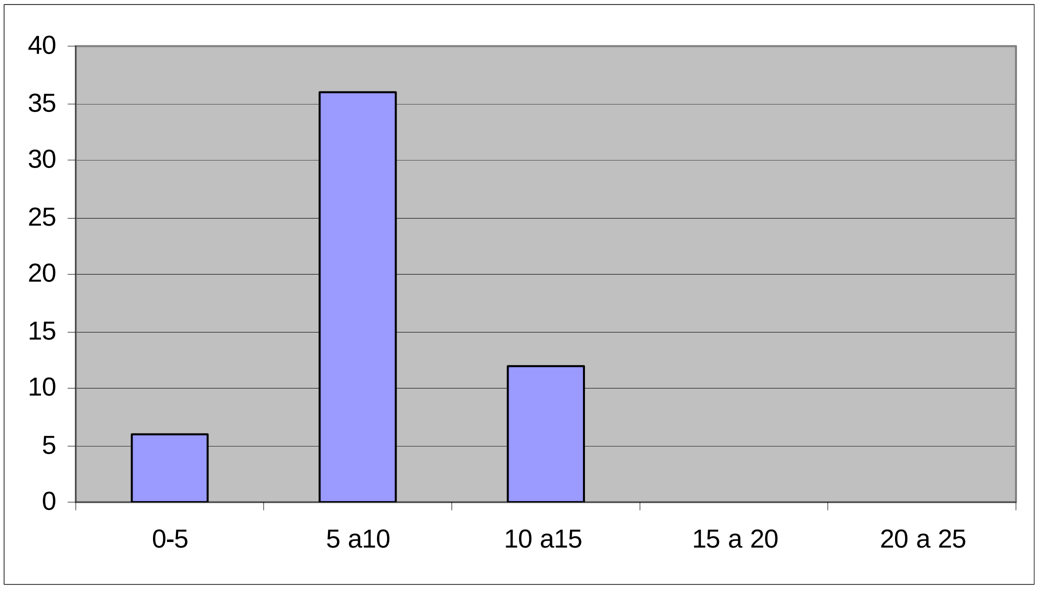
ALUMNO	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15	L16	L17
ACIERTOS	7	4	7	7	9	8	8	10	15	12	9	9	7	9	8	8	10

ALUMNO	L18	L19	L20	L21	L22	L23	L24	L25	L26	L27	L28	L29	L30	L31	L32	L33
ACIERTOS	12	9	7	7	7	10	9	9	12	6	6	8	8	9	10	12

ALUMNO	L34	L35	L36	L37	L38	L39	L40	L41	L42	L43	L44	L45	L46	L47	L48	L49	L50
ACIERTOS	3	9	9	9	10	12	9	8	12	9	9	12	9	12	9	9	10

Tabla 6

PROMEDIO(MEDIA ARITMETICA)	9
MEDIANA	9
MODA	9



Histograma 6

2.8 Grupo 2001 -1.

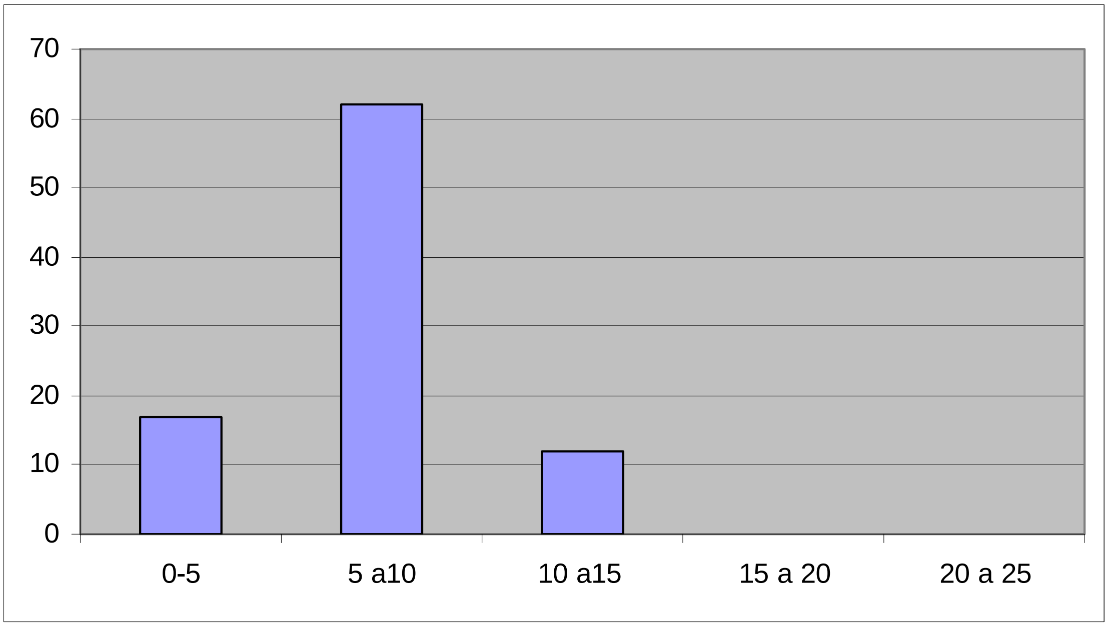
ALUMNO	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16	G18	G17
ACIERTOS	5	5	5	3	6	7	7	4	4	4	8	8	5	6	9	5	5	10

ALUMNO	G19	G20	G21	G22	G23	G24	G25	G26	G27	G28	G29	G30	G31	G32	G34	G33
ACIERTOS	5	6	6	6	7	7	8	5	8	8	8	10	15	5	7	7

ALUMNO	G35	G36	G37	G38	G39	G40	G41	G42	G43	G44	G45	G46	G47	G48	G49	G50
ACIERTOS	5	4	4	7	7	2	8	8	8	8	8	8	7	7	7	5

Tabla 7

Promedio(media aritmética)	7
MEDIANA	7
MODA	8



Histograma 7

2.9 Grupo 2001 -2.

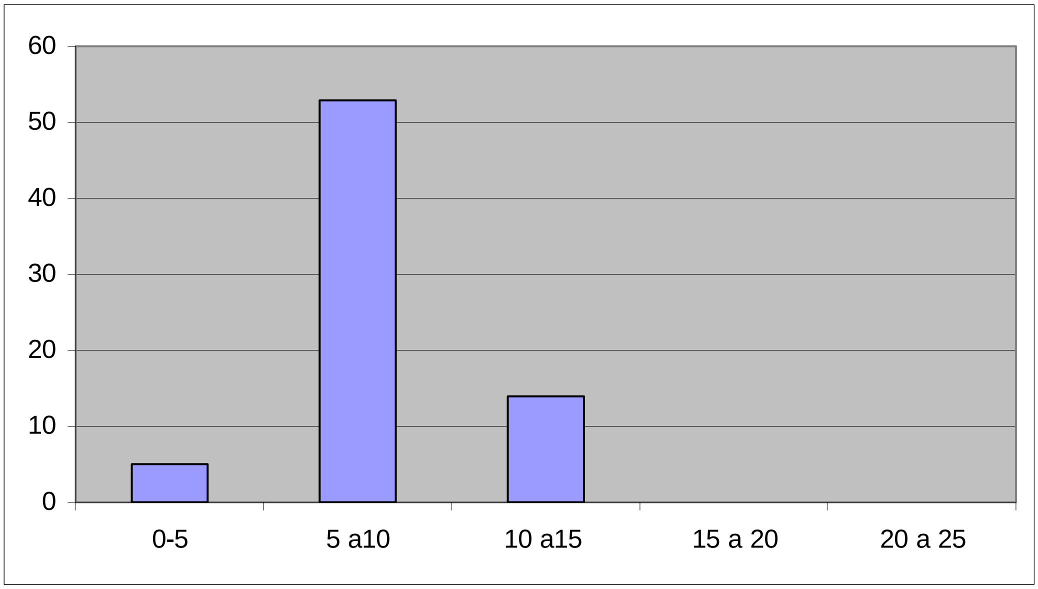
ALUMNO	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10	H11	H12	H13	H14	H15	H16	H17
ACIERTOS	8	8	9	5	10	4	12	10	9	9	7	8	8	10	12	13	9

ALUMNO	H18	H19	H20	H21	H22	H23	H24	H25	H26	H27	H28	H29	H30	H31	H32	H33
ACIERTOS	5	10	9	9	4	7	7	8	9	10	7	8	8	9	9	9

ALUMNO	H34	H35	H36	H37	H38	H39	H40	H41	H42	H43	H44	H45	H46	H47	H48	H49	H50
ACIERTOS	9	10	12	12	11	11	7	9	9	9	8	7	7	4	5	6	10

Tabla 8

Promedio(media aritmética)	9
Mediana	9
Moda	9



Histograma 8

2.10 Grupo 2001 -3.

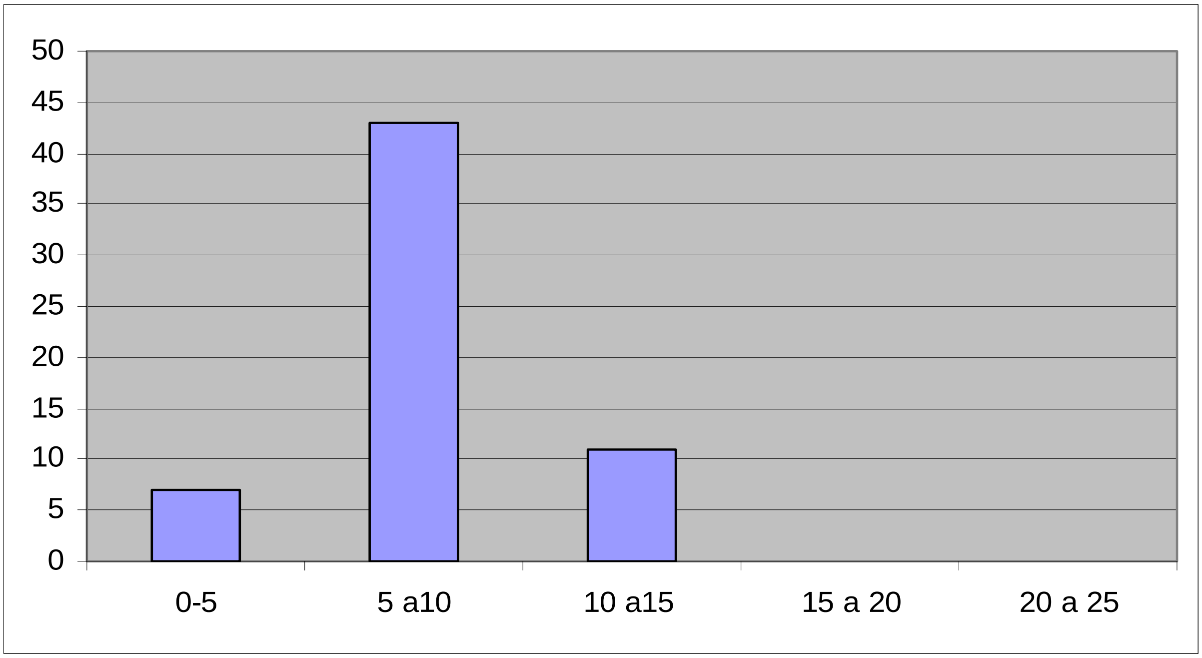
ALUMNO	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17
ACIERTOS	9	5	5	9	9	8	9	8	7	7	6	12	6	10	9	9	8

ALUMNO	I18	I19	I20	I21	I22	I23	I24	I25	I26	I27	I28	I29	I30	I31	I32	I33
ACIERTOS	9	10	12	9	6	6	8	8	10	12	5	9	10	12	5	7

ALUMNO	I34	I35	I36	I37	I38	I39	I40	I41	I42	I43	I44	I45	I46	I47	I48	I49	I50
ACIERTOS	8	9	9	12	12	6	6	7	7	8	9	9	10	5	5	9	10

Tabla 9

Promedio(media aritmética)	8
Mediana	9
Moda	9



Histograma 9

2.11 Grupo 2002 -1.

ALUMNO	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12	J13	J14	J15	J16	J17
ACIERTOS	9	9	8	5	5	4	9	10	12	9	9	8	8	7	8	9	10

ALUMNO	J18	J19	J20	J21	J22	J23	J24	J25	J26	J27	J28	J29	J30	J31	J32	J33
ACIERTOS	9	9	9	10	4	5	7	8	10	6	9	7	7	5	5	4

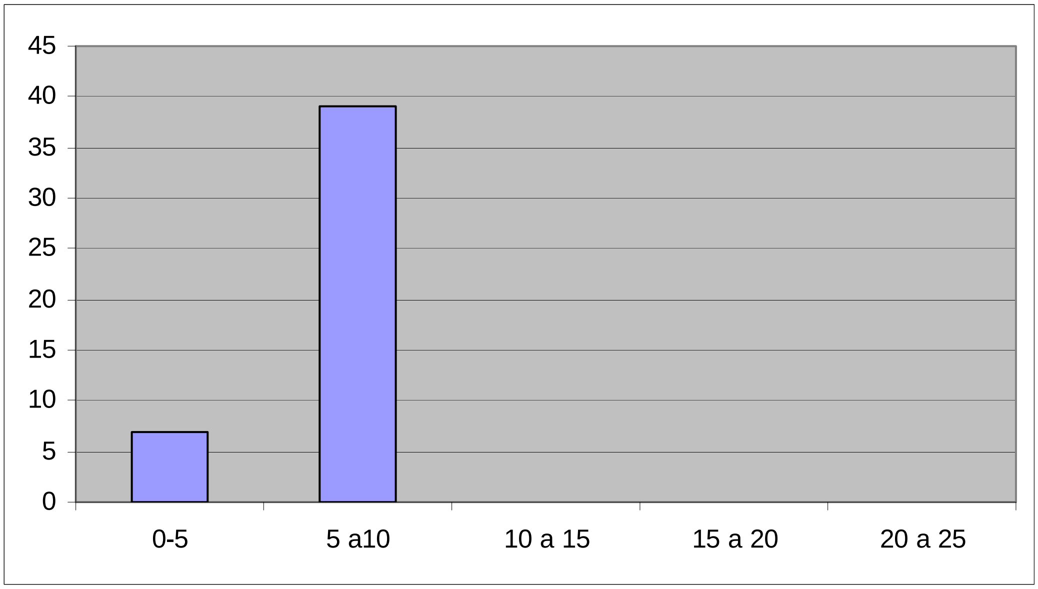
ALUMNO	J34	J35	J36	J37	J38	J39	J40	J41	J42	J43	J44	J45	J46	J47	J48	J49	J50
ACIERTOS	9	10	10	12	6	6	3	12	12	9	9	9	10	10	10	9	10

Tabla 10

Promedio(media aritmética) 8

Mediana 9

Moda 9



Histograma 10

2.12 Grupo 2002 -2.

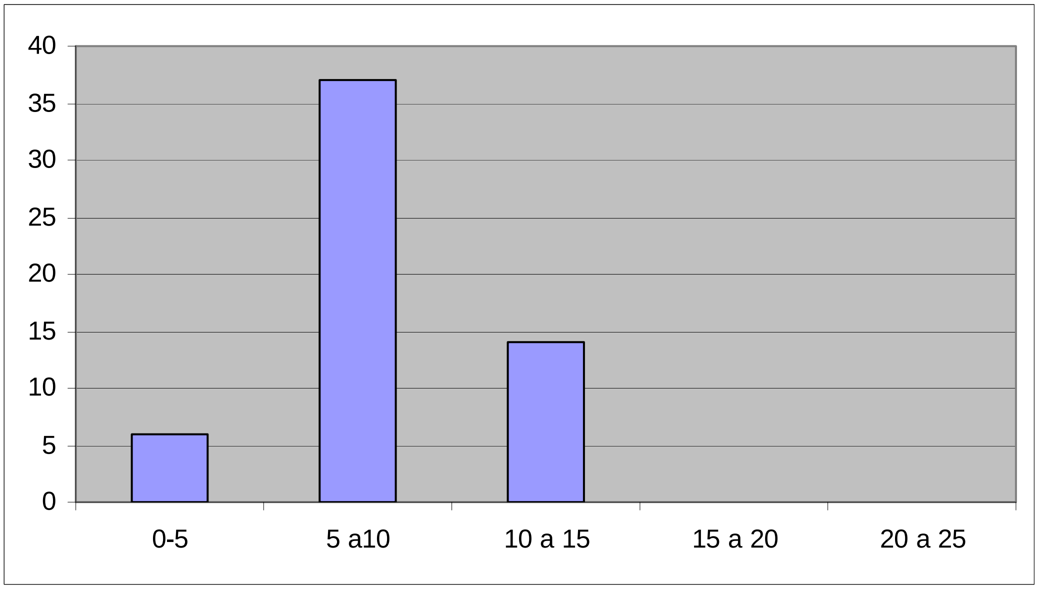
ALUMNO	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	K11	K12	K13	K14	K15	K16	K17
ACIERTOS	5	5	8	7	7	9	10	10	10	12	3	9	9	6	7	7	9

ALUMNO	K18	K19	K20	K21	K22	K23	K24	K25	K26	K27	K28	K29	K30	K31	K32	K33
ACIERTOS	10	11	11	2	6	9	9	9	8	10	5	4	7	7	9	10

ALUMNO	K34	K35	K36	K37	K38	K39	K40	K41	K42	K43	K44	K45	K46	K47	K48	K49	K50
ACIERTOS	6	6	8	9	7	7	6	9	8	8	12	10	11	9	9	10	10

Tabla 11

Promedio(media aritmética)	8
Mediana	9
Moda	9



Histograma 11

2.13 Grupo 2002 -3.

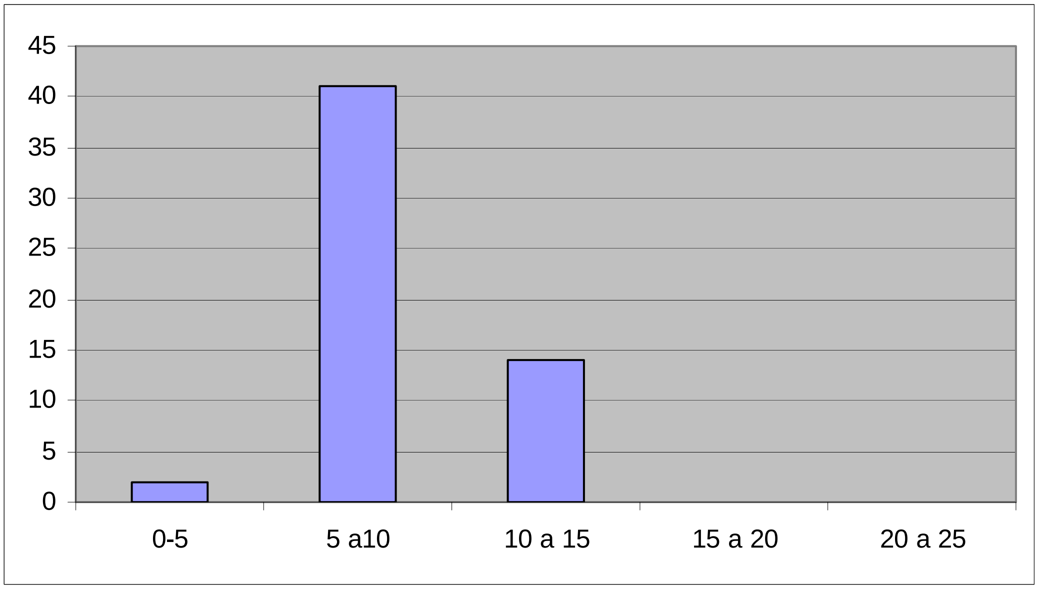
ALUMNO	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15	L16	L17
ACIERTOS	7	4	7	7	9	8	8	10	15	12	9	9	7	9	8	8	10

ALUMNO	L1	L1	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L3	L3	L3	L3
	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
ACIERTOS	12	9	7	7	7	10	9	9	12	6	6	8	8	9	10	12

ALUMNO	L34	L35	L36	L37	L38	L39	L40	L41	L42	L43	L44	L45	L46	L47	L48	L49	L50
ACIERTOS	3	9	9	9	10	12	9	8	12	9	9	12	9	12	9	9	10

Tabla 12

Promedio(media aritmética)	9
Mediana	9
Moda	9



Histograma 12

2.14 Grupo 2003 -1.

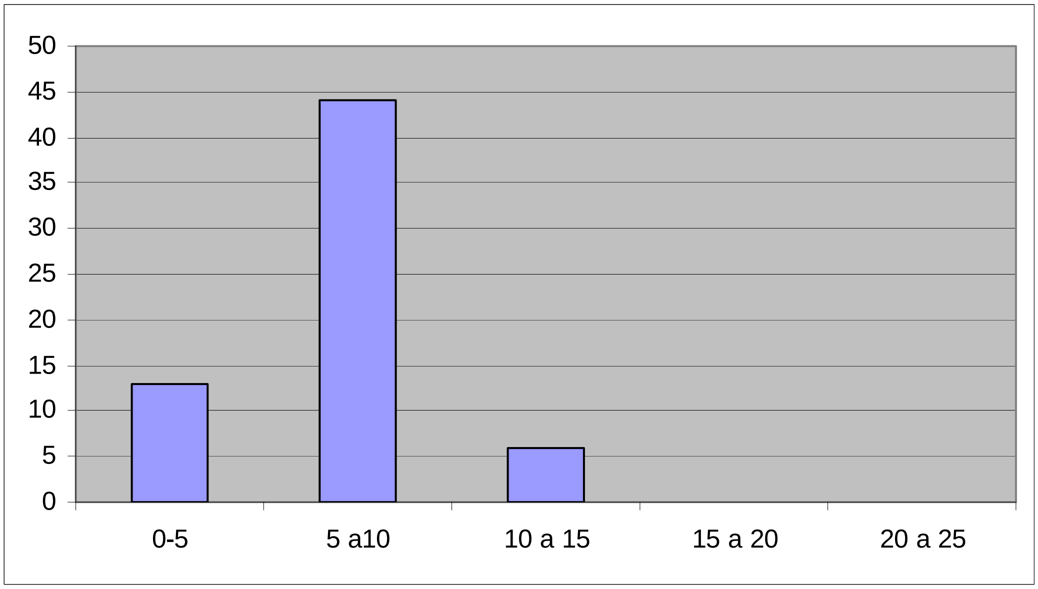
ALUMNO	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15	M16	M17
ACIERTOS	12	9	9	7	8	8	9	10	4	5	6	6	12	4	5	9	9

ALUMNO	M18	M19	M20	M21	M22	M23	M24	M25	M26	M27	M28	M29	M30	M31	M33	M34
ACIERTOS	5	5	6	6	7	7	8	8	4	4	4	8	10	8	9	10

ALUMNO	M32	M35	M36	M37	M38	M39	M40	M41	M42	M43	M44	M45	M46	M47	M48	M49	M50
ACIERTOS	9	10	5	5	4	9	7	7	7	6	6	6	9	5	7	7	8

Tabla 13

Promedio(media aritmética)	7
Mediana	7
Moda	9



Histograma 13

2.15 Grupo 2003 -2.

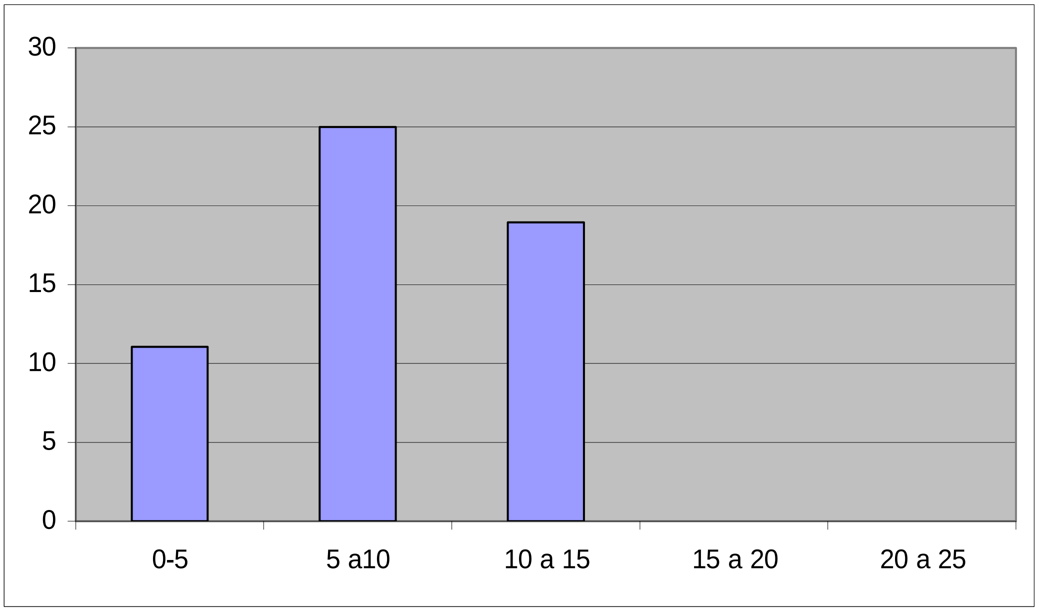
ALUMNO	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12	N13	N14	N15	N16	N17	N18	N19
ACIERTOS	4	4	6	7	5	5	5	9	6	5	5	10	6	4	3	3	6	4	10

ALUMNO	N20	N21	N22	N23	N24	N25	N26	N27	N28	N29	N30	N31	N32	N33	N36
ACIERTOS	9	2	2	9	9	6	5	5	5	8	8	4	4	7	8

ALUMNO	N34	N35	N38	N39	N40	N41	N42	N43	N44	N45	N46	N47	N48	N49	N50
ACIERTOS	7	7	6	6	4	4	6	7	7	5	7	7	7	7	10

Tabla 14

Promedio(media aritmética)	6
Mediana	6
Moda	7



Histograma 14

2.16 Grupo 2003 -3.

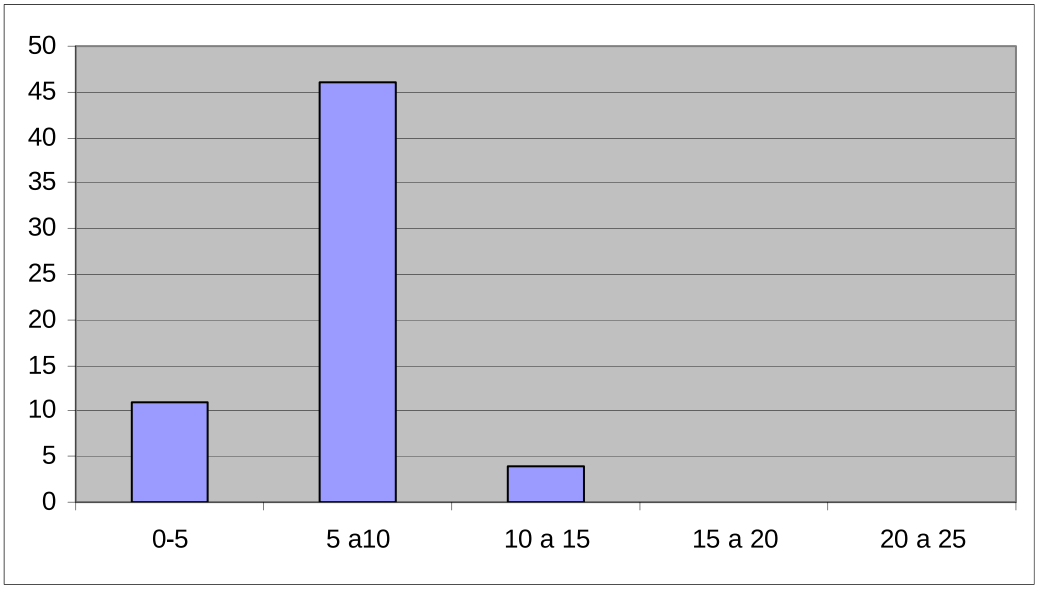
ALUMNO	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12	O13	O14	O15	O16	O17
ACIERTOS	9	9	7	7	7	6	8	8	9	10	5	5	5	6	6	6	7

ALUMNO	O18	O19	O20	O21	O22	O23	O24	O25	O26	O27	O28	O29	O30	O31	O32	O33
ACIERTOS	7	8	8	9	10	14	6	6	5	5	6	7	8	8	9	2

ALUMNO	O34	O35	O36	O37	O38	O39	O40	O41	O42	O43	O44	O45	O46	O47	O48	O49	O50
ACIERTOS	4	6	6	7	7	10	7	5	5	5	8	5	6	8	8	9	6

Tabla 15

Promedio(media aritmética)	7
Mediana	7
Moda	6



Histograma 15

2.17 Grupo 2004 -1

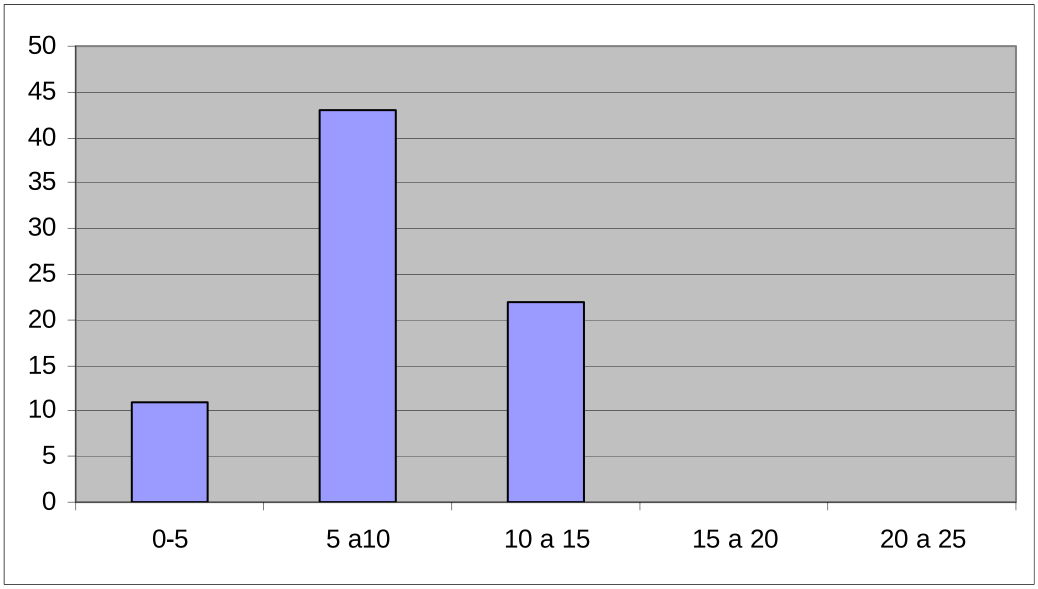
ALUMNO	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17
ACIERTOS	6	6	7	4	5	10	7	7	7	6	8	8	5	5	6	7	7

ALUMNO	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	P28	P29	P30	P31	P32	P33
ACIERTOS	12	10	5	5	7	7	8	8	4	8	2	12	5	10	7	7

ALUMNO	P34	P35	P36	P37	P38	P39	P40	P41	P42	P43	P44	P45	P46	P47	P48	P49	P50
ACIERTOS	8	6	7	7	7	5	8	6	2	6	6	6	7	6	6	6	4

Tabla 16

Promedio(media aritmética)	7
Mediana	7
Moda	7



Histograma 16

2.18 Grupo 2004 -2.

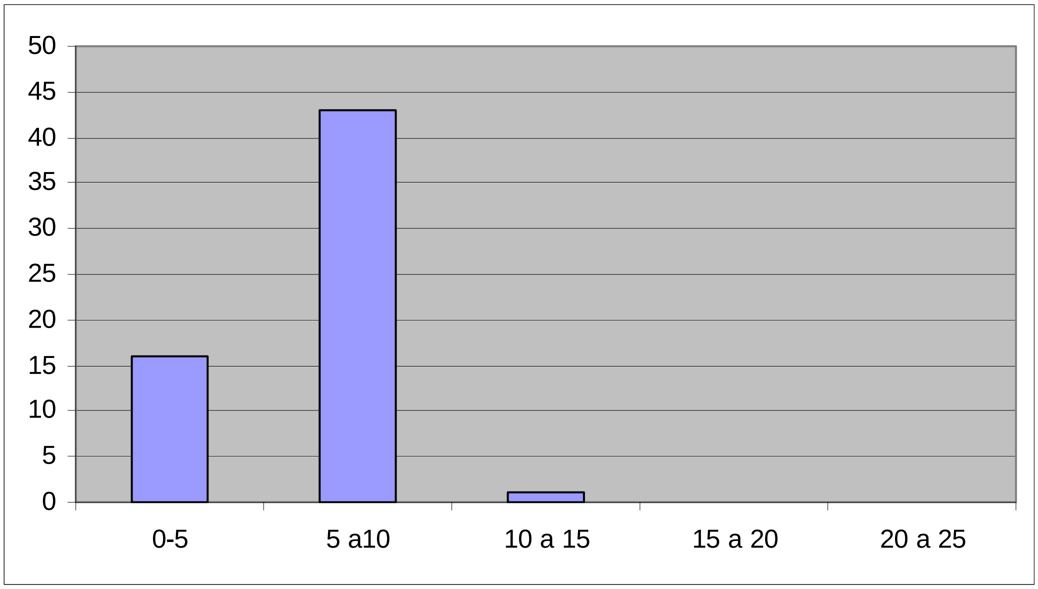
ALUMNO	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17
ACIERTOS	5	5	5	7	7	8	7	5	5	2	6	4	8	8	6	6	7

ALUMNO	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24	R25	R26	R27	R28	R29	R30	R31	R32	R33
ACIERTOS	5	5	5	4	6	4	6	8	8	8	8	5	4	4	3	9

ALUMNO	R34	R35	R36	R37	R38	R39	R40	R41	R42	R43	R44	R45	R46	R47	R48	R49	R50
ACIERTOS	10	9	9	3	6	7	7	9	9	5	6	4	6	5	9	9	9

Tabla 17

Promedio(media aritmética)	6
Mediana	6
Moda	5



Histograma 17

2.19 Grupo 2004 -3.

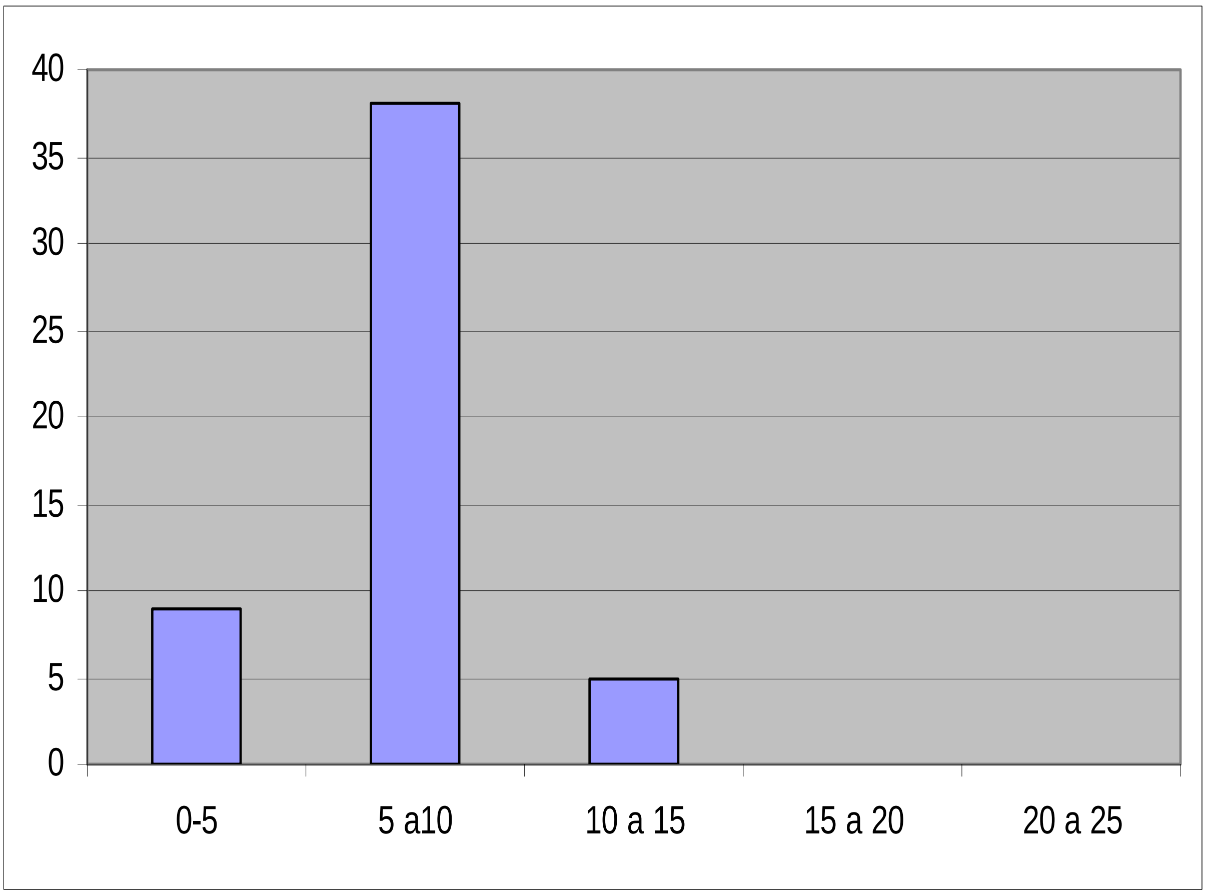
ALUMNO	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q18	Q17
ACIERTOS	8	7	7	7	2	5	5	4	6	6	7	7	9	5	4	5	7	2

ALUMNO	Q19	Q20	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25	Q26	Q27	Q28	Q29	Q30	Q31	Q32	Q34	Q33
ACIERTOS	7	8	9	9	11	4	6	6	7	6	5	6	6	7	6	8

ALUMNO	Q35	Q36	Q37	Q38	Q39	Q40	Q41	Q42	Q43	Q44	Q45	Q46	Q47	Q48	Q49	Q50
ACIERTOS	6	12	10	4	8	8	9	9	6	8	6	10	12	6	6	6

Tabla 18

Promedio(media aritmética)	7
Mediana	7
Moda	6



Histograma 18

2. 20 Totales

ALUMNOS	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17
1999-1	10	10	9	12	7	8	9	10	5	12	8	9	7	1	10	12	9
1999-2	10	5	6	12	4	12	5	5	9	9	8	12	10	5	5	12	10
1999-3	5	5	7	7	8	8	12	4	5	8	8	9	9	10	10	9	9
2000-1	10	5	9	10	9	9	8	8	7	4	5	10	12	6	7	8	10
2000-2	6	12	9	14	5	12	10	10	9	9	13	12	10	9	9	9	5
2000-3	7	4	7	7	9	8	8	10	15	12	9	9	7	9	8	8	10
2001-1	5	5	5	3	6	7	7	4	4	4	8	8	5	6	9	5	10
2001-2	8	8	9	5	10	4	12	10	9	9	7	8	8	10	12	13	9
2001-3	9	5	5	9	9	8	9	8	7	7	6	12	6	10	9	9	8
2002-1	9	9	8	5	5	4	9	10	12	9	9	8	8	7	8	9	10
2002-2	5	5	8	7	7	9	10	10	10	12	3	9	9	6	7	7	9
2002-3	7	4	7	7	9	8	8	10	15	12	9	9	7	9	8	8	10
2003-1	12	9	9	7	8	8	9	10	4	5	6	6	12	4	5	9	9
2003-2	4	4	6	7	5	5	5	9	6	5	5	10	6	4	3	3	6
2003-3	9	9	7	7	7	6	8	8	9	10	5	5	5	6	6	6	7
2004-1	6	6	7	4	5	10	7	7	7	6	8	8	5	5	6	7	7
2004-2	5	5	5	7	7	8	7	5	5	2	6	4	8	8	6	6	7
2004-3	8	7	7	7	2	5	5	4	6	6	7	7	9	5	4	5	2

Tabla 2(sección 1)

2.21

ALUMNOS	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	x29	x30	x31	x32	x33	x34
1999-1	9	13	12	12	10	12	8	9	10	12	12	13	9	9	10	12	10
1999-2	9	9	5	4	8	8	7	2	9	15	12	10	5	12	10	12	5
1999-3	9	8	8	8	7	7	6	4	5	5	5	9	9	10	9	7	7
2000-1	6	6	8	8	9	10	20	12	10	13	10	9	8	8	9	9	12
2000-2	7	7	12	6	7	9	9	5	6	10	11	9	9	9	5	9	10
2000-3	12	9	7	7	7	10	9	9	12	6	6	8	8	9	10	12	3
2001-1	5	5	6	6	6	7	7	8	5	8	8	8	10	15	5	7	7
2001-2	5	10	9	9	4	7	7	8	9	10	7	8	8	9	9	9	9
2001-3	9	10	12	9	6	6	8	8	10	12	5	9	10	12	5	7	8
2002-1	9	9	9	10	4	5	7	8	10	6	9	7	7	5	5	4	9
2002-2	10	11	11	2	6	9	9	9	8	10	5	4	7	7	9	10	6
2002-3	12	9	7	7	7	10	9	9	12	6	6	8	8	9	10	12	3
2003-1	5	5	6	6	7	7	8	8	4	4	4	8	10	8	9	9	10
2003-2	4	10	9	2	2	9	9	6	5	5	5	8	8	4	4	7	7
2003-3	7	8	8	9	10	23	6	6	5	5	6	7	8	8	9	2	4
2004-1	12	10	5	5	7	7	8	8	4	8	2	12	5	10	7	7	8
2004-2	5	5	5	4	6	4	6	8	8	8	8	5	4	4	3	9	10
2004-3	7	7	8	9	9	11	4	6	6	7	6	5	6	6	7	8	6

Tabla 2(sección 2)

2.22

ALUMNOS	x35	x36	x37	x38	x39	x40	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x50
1999-1	9	12	10	12	10	10	7	9	5	6	7	7	8	8	8	9
1999-2	7	8	8	9	4	9	10	20	7	7	8	9	9	12	10	9
1999-3	7	3	3	5	9	10	6	6	6	4	8	5	8	8	6	4
2000-1	10	7	7	9	12	10	9	9	9	10	9	20	10	9	8	8
2000-2	10	10	6	9	10	12	12	9	10	9	8	8	5	7	9	10
2000-3	9	9	9	10	12	9	8	12	9	9	12	9	12	9	9	10
2001-1	5	4	4	7	7	2	8	8	8	8	8	8	7	7	7	5
2001-2	10	12	12	11	11	7	9	9	9	8	7	7	4	5	6	10
2001-3	9	9	12	12	6	6	7	7	8	9	9	10	5	5	9	10
2002-1	10	10	12	6	6	3	12	12	9	9	9	10	10	10	9	10
2002-2	6	8	9	7	7	6	9	8	8	12	10	11	9	9	10	10
2002-3	9	9	9	10	12	9	8	12	9	9	12	9	12	9	9	10
2003-1	10	5	5	4	9	7	7	7	6	6	6	9	5	7	7	8
2003-2	7	8	5	6	6	4	4	6	7	7	5	7	7	7	7	10
2003-3	6	6	7	7	10	7	5	5	5	8	5	6	8	8	9	6
2004-1	6	7	7	7	5	8	6	2	6	6	6	7	6	6	6	4
2004-2	9	9	3	6	7	7	9	9	5	6	4	6	5	9	9	9
2004-3	6	12	10	4	8	8	9	9	6	8	6	10	12	6	6	6

Tabla 3(sección 3)

Promedio(media aritmética)	8
Mediana	8
Moda	9
Desviación estándar	3

2.23 El instrumento diagnóstico permitió establecer las condiciones reales de los alumnos. Se aplico el examen diagnóstico y una vez evaluado el instrumento se procedió a hacer un análisis estadístico sencillo (histograma, media, mediana, desviación estándar).

A partir del análisis de los resultados se observa que las nociones que tiene la mayor parte de los alumnos, sobre los sistemas de ecuaciones lineales son deficientes e ineficientes, tanto para su condición actual como estudiantes de bachillerato como para su situación futura a nivel profesional. Acentuándose más si han de estudiar alguna de las ramas de las ciencias básicas.

Del análisis estadístico se desprende lo siguiente:

1 Observando la desviación estándar que resulto ser 3 calculada para la muestra dada (18 grupos) que es la medida de la dispersión de los valores respecto a la media (valor promedio) cuyo valor es de 8. La mediana que fue de 8, es un número que supera a los aciertos obtenidos por la mitad de la población, en el caso estudiado se especifica claramente la situación de carencia de los alumnos respecto al conocimiento de las ecuaciones lineales.

2 El grado con que el valor de una distribución de frecuencia se esparce alrededor de algún punto central, normalmente la media aritmética (promedio) en los valores de la distribución y es superada por la otra mitad.

La practica en la enseñanza de las ecuaciones lineales, las entrevistas didácticas a alumnos de un número considerable de estudiantes de bachillerato de diversas generaciones, la búsqueda permanente de soluciones a los problemas que plantea la educación en el nivel medio. Y la comprensión de que es posible hallar respuestas a los problemas educativos en la investigación pedagógica, me conducen a proponer una "*PROPUESTA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONE S LINEALES*"

El desarrollo de la sección correspondiente a ecuaciones lineales de un curso de matemáticas en el bachillerato es un proceso más complejo que la presentación lineal de conceptos, leyes, teorías (como la correspondiente a ecuaciones) y ejercicios. El desarrollo debe incluir principios que son básicos y que corresponden al concepto de unidades de aprendizaje.

1) En las matemáticas el conocimiento se construye en forma metódica. La producción de conocimiento es un conjunto de conceptos, axiomas, teoremas, etc., que permiten al cuerpo teórico permanecer siempre abierto y en transformación.

2) Destaca la estructura del proceso de enseñanza – aprendizaje, desde su sistematicidad y de su logia propia.

3) Como la enseñanza de las ecuaciones lineales es un proceso sistemático que se desenvuelve exclusivamente con el fin de garantizar que se produzca el proceso del aprendizaje de las mismas por parte de cada alumno, los contenidos de las unidades correspondientes deben apoyarse en las particularidades de este ultimo para ser efectiva.

3. CAPITULO 3

PRINCIPIOS DIDACTICOS ENERALES.

La didáctica puede concebirse como parte medular de la pedagogía, cuyo objetivo es el de prever el instrumental necesario aplicable a los objetivos y estructura del sistema educativo. La didáctica implica una combinación de niveles teórico, técnico, instrumental en el análisis y elaboración de los problemas de su ámbito; lo que supone una interrelación permanente entre la indagación teórica y la práctica educativa.

Así, las propuestas elaboradas desde la didáctica responden a un sistema de ideas definido. Las posibilidades de implementación de las mismas, quizá no aisladamente, pero si como planteo general dependen de la coincidencia o no entre la ideología que las inspira, y aquella que plantea el sistema educativo.

Las alternativas que ofrece la **Didáctica** para la transformación de la tarea educativa, deben considerar las posibilidades de aplicación en una situación concreta, determinando cómo se puede pautar el proceso o definir etapas, previendo formas de transición.

Hay aspectos de la instrumentación didáctica que son importantes tales como los objetivos de la educación, el planteamiento al nivel del aula, la evaluación y las técnicas didácticas.

El método didáctico es el conjunto de los procedimientos de instrucción, este debe en todos sus puntos responder a las leyes del pensamiento (momento lógico). Cada una de las fases del método debe fundarse en la observación del espíritu (momento psicológico), por lo tanto debe definirse el método como una reunión organizada (síntesis) de medidas didácticas que se fundan sobre conocimientos psicológicos claros, seguros y completos, y sobre leyes lógicas, y que realizadas con habilidad personal de artista, alcanzan sin rodeo el fin didáctico previamente fijado; se trata de encontrar formas metódicas, técnicas y procedimientos didácticos que resuelvan de manera eficiente y económica, la conducción de determinadas fases del proceso de aprendizaje. “El método didáctico en contraste con el método lógico: a) orienta y regula la marcha fundamental del aprendizaje de los alumnos; siguiendo sus pasos, estos llegan a conocer las verdades ya establecidas por el método lógico o adquieren los hábitos y habilidades, los ideales que se consideran valiosos para la vida y para el trabajo. Los métodos didáctico y lógico se complementan. En las fases iniciales del proceso educativo, predomina el método didáctico, el cual cede lugar al método lógico en los niveles medio y superior del sistema educativo.

Es menester reconocer la existencia de etapas en la evolución bio - psico - social, y el necesario adecuarse de la orientación del aprendizaje a las características específicas de cada una de las fases evolutivas. Pero en función de estas mismas etapas, se necesita recordar la existencia de una lógica natural del sujeto - como expresa Piaget[8]- y de una lógica del niño[9] que conduce a la lógica de las operaciones lógicas -formales e hipotético- deductivas. Estas formas de pensamiento no son radicalmente diferentes, sino sobre todo, en su nivel de concreción. Las ciencias y la investigación científica no están ausentes de la escuela a cualquier nivel.

---

[8] PIAJET, JEAN. El desarrollo de la inteligencia. ed. Psique. Buenos Aires, 1977.

[9] IDEM. Seis estudios de psicología. . ed. Psique. Buenos Aires, 1977.

Con el objeto de dar respuesta operativa para la situación de aprendizaje se deben trabajar aspectos esenciales del quehacer metodológico (los procedimientos, técnicas y recursos), en un planteo integral de sus relaciones con el proceso de aprendizaje y de pensamiento. Metodológicamente se debe poner en relación de manera práctica los medios y procedimientos con los objetivos o resultados propuestos. El método se debe concebir como elemento unificador de otras formas específicas a través de las cuales se concretiza, la dicotomía entre pensamiento real y quehacer metódico. El método es, asimismo, la disciplina “impuesta al pensamiento y a las acciones “para obtener mayor eficiencia en lo que se desea realizar.

Por otra parte el método es lo “que da sentido de unidad a todos los pasos de la enseñanza y el aprendizaje".

Se puede decir que existen “formas didácticas ", considerando que los procedimientos de instrucción y de enseñanza representan la conformación metódica que el maestro da a esas formas didácticas. Se da la equivalencia entre procedimientos y método, ya que “según el sentido de la palabra procedimiento significa el modo de avanzar en el camino del conocimiento; en el campo de la enseñanza equivale, pues, a método “. La situación del aprendizaje en el aula o laboratorio se resuelve mediante la referencia a los métodos, los procedimientos, las formas didácticas y las técnicas. Debe existir un criterio de unidad que permita dar coherencia a los diversos procedimientos y técnicas que se utilizan. Algunos de estos medios se analizan de modo particular y es posible encontrar prescripciones en cuanto a su modo de empleo; tal es el caso de las denominadas técnicas grupales. Se trata de los procedimientos convencionales: interrogación, exposición, conversación didáctica, etc.; las normas en cuanto a su uso deben ser precisas, primando en las mismas, consideraciones derivadas de la práctica docente: cómo y cuando utilizar el interrogatorio, cómo estructurar la exposición, las diferencias “sutiles” entre una conversación didáctica y una conversación instructiva. El método es valorizado en su carácter globalizador y definitorio de la organización escolar y la orientación del proceso de aprendizaje – como ejemplo esta el caso, entre otros, del método de proyectos y de los centros de interés[10] -.

Algunas metodologías particulares (por ejemplo, matemática y lenguaje), toman el problema del método estableciendo correspondencia e interrelación entre lo que ocurre en el proceso del pensamiento del alumno, con el objeto de conocimiento y las formas específicas de operar en el aula.

A las distintas fases del camino general del conocimiento y de la actividad práctica, corresponden diferentes procedimientos de investigación o actividades elementales: observación, descripción, experimentación, comparación, medición, inducción y deducción, análisis y síntesis, elaboración y generalización.

Cada campo de la ciencia o de la práctica elabora sus métodos particulares.

La instrumentación del método general, como de los métodos particulares en una situación concreta, requiere como instancia previa la elaboración de una metodología. Esta metodología implica una traducción de los principios generales, leyes y categorías aportados por el método en respuestas integradas a una situación dada y para ciertos precisos objetivos.

---

[10] Véase por ejemplo el Software elaborado para matemáticas, por el departamento de matemáticas de la Universidad de Arizona. EE.UU. (Larry Bakmo y otros. Debbie Yonic, Tucson Arizona. 85721). Parte de este Software se incluye en el anexo 8 en CD.

El método didáctico asume las características de método general, en tanto define los principios, leyes, categorías y normas básicas que deben orientar el proceso de aprendizaje en el bachillerato, independientemente del contenido específico que caracteriza dicho aprendizaje. Por otra parte estos principios, leyes, categorías y normas se elaboran en consonancia con aquellos que rigen todo proceso de conocimiento y de actividad práctica.

A partir del esquema general básico que aporta el método didáctico se elabora una metodología que sintetiza e integra todos los aspectos que hacen a la instrumentación del proceso de aprendizaje. Como concreción del método didáctico, esta metodología define constantes metodológicas desde las cuales se producen elaboraciones específicas, por su atención diferencial a campos de conocimiento y a etapas evolutivas, definiendo de éste modo la metodología especial.

El método y sus fases no se plantean en forma disociada y agregada, desde afuera, a la actividad humana concreta. Por el contrario, el ser humano opera sobre la realidad con un método. Este método se halla en constante transformación, por su interrelación con el medio y responde a las formas básicas del aprendizaje humano. Sus etapas son: Práctica - conocimiento teórico - práctica.

El hombre conoce las propiedades de los objetos para apropiarse de ellos y transformarlos. Estos objetos forman parte de una realidad objetiva. Es decir, de un mundo donde objetos y fenómenos están vinculados entre sí por los más diversos nexos y relaciones: causales, temporales, espaciales, condicionales, probabilísticas, etc. La realidad se manifiesta, por lo tanto, en objetos y fenómenos integrales.

La primera toma de contacto entre esa realidad objetiva y el ser humano se da a través de la experiencia, de la práctica. El hombre no puede tener una experiencia directa de todas las cosas y muchos conocimientos son producto de la experiencia de otros, vale decir: experiencias indirectas. Los datos de la experiencia son elaborados y generalizados por el pensamiento humano. La actividad del pensar se realiza en distintas formas: inducción y deducción, análisis y síntesis, formulación de hipótesis y teorías. Desempeñan así mismo, un gran papel en el conocimiento: la imaginación, la fantasía creadora y la intuición que permiten componer amplias representaciones generalizadoras sobre la naturaleza de las cosas partiendo de algunos datos de la experiencia.

Análisis y síntesis son las formas básicas del pensamiento que nunca se dan aisladas, sino que se realizan conjuntamente y a su vez, constituyen los elementos constructivos de las restantes formas del pensamiento: comparación, abstracción, generalización, concreción, inducción, deducción.

Para llegar al tratamiento específico de los aspectos instrumentales de la orientación del aprendizaje, es necesario analizar el proceso de aprendizaje. En la acción educativa, la cuestión radica en que el docente sea hábil como para propiciar una situación problemática, y generadora de actividad en el grupo de aprendizaje.

Seleccionar auténticas situaciones problemáticas es posible. Si se tiene en cuenta que son situaciones concretas las generadoras de problemas.

Al enfrentar un problema éste aparece en sus relaciones con otros problemas, en una realidad concreta donde todos ellos coexisten y sé interrelacionan. Por esto la práctica está en la iniciación del proceso, porque el que aprende es un sujeto concreto cuyas prácticas anteriores, inscriptas en su repertorio experencial, interfieren, enriquecen, se modifican, interrelacionan con la nueva situación.

Aun en los casos en que la práctica no aparece con claridad en el punto de partida, el sujeto se compromete con el proceso cuando percibe las relaciones entre ese aprendizaje y una ***práctica futura.***

Desde este enfoque el método didáctico, como método general, no puede entender el proceso como lineal, sino en su carácter dialéctico, con eventuales retrocesos y avances, producto de saltos cualitativos.

De ningún modo debe confundirse este planteo como asociacionista. Porque no se trata de arribar a un producto final por una sumatoria de elementos parciales. Los distintos tipos de análisis y síntesis, descriptos en párrafos anteriores, señalan los caracteres diferenciales y en especial el paulatino enriquecimiento cualitativo del análisis y la síntesis.

El método didáctico asume las características de método general, porque elabora los principios y normas básicas que rigen todo proceso de aprendizaje escolar, con independencia de las especificaciones que puedan plantearse en cada caso. En consecuencia, el método didáctico aporta un marco referencial que para transferirse a situaciones concretas, debe ser traducido en una metodología general e incluso a metodologías específicas.

La orientación del proceso de aprendizaje plantea, prioritariamente, una definición acerca del método como factor unificador, la explicitación en este sentido, como requisito previo permite la elaboración de una Metodología, única forma de dar coherencia al proceso y lograr resultados efectivos.

Ahora bien si para la implementación del método en situaciones concretas es necesaria una metodología como instancia intermedia, ¿cómo caracterizamos y que papel le asignamos a los procedimientos, técnicas y recursos? Los definimos como componentes operacionales del método; y al reconocer que éste no es observable, sólo puede inferirse a través de la utilización que de dichos componentes se hace.

Pero los procedimientos. Técnicas y recursos aislados, no actúan como indicadores en este sentido. La concepción de método que subyace en la orientación del proceso se revela a partir de:

a) La determinación de criterios para combinarlos;

b) La relación que a través de una metodología se da entre ellos y otros elementos en una situación de aprendizaje (objetivos, contenidos, formas y criterios de evaluación).

En la situación descripta, subyace una concepción del aprendizaje y, por tanto, un método.

Entendido en cambio como elemento unificador - sistematizador del proceso - el método define las líneas básicas para la elaboración del Plan y de los elementos que lo integran.

La Planificación organiza los elementos que intervienen en una situación concreta de aprendizaje, interesa analizar las derivaciones que surgen a partir de la concepción de método expuesta.

En primer término, toda Planificación debe considerar en cualquiera de sus niveles (plan anual, de unidad o de clase), las características que el método asigna a las etapas fundamentales en el proceso de conocimientos a fin de prever la atención a la especificidad de cada una. Por ello, se plantea la necesidad de contemplar en cada nivel las fases de apertura, desarrollo y culminación en correspondencia con las de práctica - teoría - práctica; síntesis - análisis - síntesis, tendiendo a las instancias básicas en el proceso de conocimiento.

¿Cómo incide esta concepción del método en los elementos que integran todo Plan?

Con respecto a los objetivos: el método incide de manera directa en el proceso de *determinación*; es decir, en la selección de las conductas más significativas que se intentarán desarrollar o reforzar en el grupo. Por otra parte, determina un criterio de ***organización y jerarquización*** de las pautas conductuales definidas como básicas, justamente con relación a los objetivos propios o conductas necesarias en cada etapa del proceso de elaboración activa del conocimiento.

De este modo se redefinen los objetivos. Y no se confunden con las informaciones o conocimientos sino que se trata de abarcar en ellos, toda la gama de conductas que en lo cognitivo, en lo motriz, en lo afectivo social, puede incorporar un sujeto. Se trata, además, de reforzar aquellas conductas que posibiliten una adaptación crítica del individuo al medio.

Con respecto a los ***contenidos***: estos dejan de ser una categoría básica, importante por sí misma: El eje sobre el cual se trabaja, ubica en primer término las actividades de aprendizaje que integran contenidos en experiencias significativas. Ya no se trata de trasladar mecánicamente a la escuela el contenido, tal como surge de la estructura de la matemática. Interesa al aprovechamiento de lo conceptual - teórico en situaciones problemáticas. Por lo tanto, el criterio organizativo que aparece como adecuado es el de la unidad de experiencia, en cuanto a síntesis de investigación - producción.

Con respecto a las ***formas metódicas*** (procedimientos, técnicas y recursos). Esta concepción les atribuye especial significado como componentes operativos del método. Este definiría, sobre todo, los criterios de selección y aplicación de los mismos. Primordialmente los criterios de combinación al aplicar las formas metódicas; porque partimos de este hecho: la instrumentación del método requiere un *complejo* de formas metódicas, ya que ninguna puede responder por sí sola al carácter multifacético de cada etapa en el proceso de conocimiento.

En lo que hace a la evaluación, se remarca su presencia como una constante en todas las etapas. Por una parte, da las bases para definir los otros elementos ya que posibilita (en su carácter de diagnóstico) una descripción, interpretación y explicación de la situación concreta sobre la que se va a operar.

Además, a lo largo del proceso, actúa como permanente retroalimentadora que facilita los ajustes necesarios; rectificaciones y/o refuerzos. La validez, en este sentido, de una forma metódica no puede determinarse aprioristicamente, por la sola consideración de sus características, sino atendiendo a los criterios para su implementación, al tipo de relaciones y comportamientos individuales y grupales estimulados y su adecuación a las diferentes fases del proceso de aprendizaje.

La evaluación, en este sentido, es fundamental por cuanto:

a) Permite que los criterios para la elaboración del plan surjan de la situación concreta y no de una determinación apriorística;

b) Convierte el Plan en un instrumento dinámico que favorece la necesaria movilidad del proceso.

Concluyendo el análisis de los aspectos instrumentales, nos interesa destacar brevemente que esta redefinición de la orientación del aprendizaje, para ser efectiva, requiere la modificación de los roles de docente y alumno. Transformaciones que deberán fundarse en una concepción dialéctica del conocimiento. No se trata sólo de incorporar conocimientos sino también capacidades, habilidades y destrezas. Esto implica una relación dialéctica sujeto - objeto en el proceso de conocimiento. Se lo entiende como proceso de búsqueda, de aproximación progresiva, indagación y verificación de hechos y relaciones.

Transferido a la situación de aprendizaje en el bachillerato el docente no puede ser ya el único emisor. Hay un intercambio permanente de roles; el alumno debe participar activamente en la elaboración del conocimiento. Como este no se considera algo acabado, terminado, se inscribe en la relación docente - alumno. Diferentes papeles se deben intercambiar entre ambos, según los requerimientos del proceso. Se trata entonces de una relación de colaboración, aunque sé de entre sujetos con diferentes funciones.

Esto plantea como requerimiento básico el intervenir de los alumnos en las tareas de planificación. La asimilación consciente y creadora requiere, sean partícipes en la determinación de metas y medios para alcanzarlas. Idéntico criterio surge con respecto a la evaluación. Se subraya el papel del alumno, no sólo en la selección de instrumentos, sino en el análisis de los resultados. La ***auto evaluación*** cobra especial importancia.

En síntesis, el instrumental requerido al orientar el proceso de aprendizaje no puede ser de manejo unilateral por parte del docente. Debe ser elaborado y aplicado también por los alumnos, ya que el proceso implica producción conjunta del conocimiento.

La evaluación didáctica contempla todos los elementos didácticos del proceso didáctico. Lo que se puede establecer simbólicamente como sigue:

$E \cong (P \cong C \cong M))$, es decir E es congruente a (P es congruente a C es congruente a M.

La evaluación es equivalente a la congruencia entre los propósitos del aprendizaje la estructura conceptual y la estructura metodológica. A continuación se señalan los elementos básicos:

C. Se refiere a la estructura conceptual o el cuerpo de conocimientos que constituyen la disciplina en cuestión en este caso las matemáticas en general y en particular el algebra elemental y específicamente las ecuaciones lineales.

P. Los propósitos de aprendizaje, derivados directamente de las características del estudiante del bachillerato (objetivos curriculares), manifiestan la tendencia que deberá seguir el proceso de aprendizaje (aspectos dinámicos) e incluyen los objetivos conductuales (logros, aspecto estático) a verificar en los cortes que se estipulen de acuerdo a las secuencias de aprendizaje o unidades de trabajo.

M. La estructura metodológica de la enseñanza deberá contemplar las estrategias de enseñanza aprendizaje concretas diseñadas tomando en cuenta los aspectos precisados para tal efecto, los propósitos de aprendizaje y las relaciones de horizontalidad, verticalidad y profundidad de la estructura conceptual.

La evaluación didáctica es un elemento de la evaluación curricular, y como tal retoma aspectos de está que le son pertinentes según la naturaleza de la didáctica, es decir se enfoca al análisis de las funciones del docente, del alumno, de los propósitos y objetivos, de los métodos de enseñanza aprendizaje y de los contenidos y de la interacción de todos ellos.

La evaluación didáctica tiene como funciones la obtención y el análisis de la información referente a esos tres momentos del proceso didáctico para la transformación o reforzamiento de todos o algunos de ellos.

Este modelo comprende una fase de recolección y obtención de la información (entrada); una fase de procesamiento y análisis de esa información (operaciones); y una fase en la que se presenta la información ya analizada y estructurada (salida).

a) Las entradas o insumos de la evacuación están dadas por los elementos de los diferentes momentos del proceso didáctico.

En la planeación se establecen:

i) La estructura del contenido.

2i) Los propósitos y objetivos.

3i) La estructura metodológica.

CAPITULO 4. LAS MATEMÁTICAS

Por ser las matemáticas las más desarrolladas en el aspecto teórico, las demás disciplinas se le vinculan estrechamente e incluso, al alcanzar un cierto desarrollo teórico, se confunden con ella.

Este nivel de desarrollo teórico - matemático puede ser alcanzado por las diferentes áreas del conocimiento. Así, podemos hablar de las matemáticas del espacio (geometría), las matemáticas del número y la cantidad (aritmética y álgebra), las matemáticas del cambio(cálculo diferencial e integral), las matemáticas de los conjuntos, de la lógica, del azar, de las diversas ramas de la física, del lenguaje, de la información y comunicación, de la regulación y el control, de los juegos y conflictos, de la evolución biológica, de las poblaciones, de la economía, etc.

Estas ramas de las matemáticas se bifurcan o integran en ramas que surgen de ellas, y en la actualidad se encuentran en diversos estados de desarrollo. Cabe hacer notar que muchos métodos matemáticos son aplicables en la mayoría de las ramas ya mencionadas. Esto permite a las matemáticas descubrir relaciones y analogías profundas entre distintas ramas del conocimiento humano, basándose en ellas proponer nuevos problemas y métodos.

Dentro de estas ramas de las matemáticas cabe destacar la del espacio, del número y de la cantidad, y la del cambio porque son las más desarrolladas (y por lo tanto pueden servir de ejemplo de la extensión y profundidad que pueden alcanzar las teorías científicas), y porque sus métodos y resultados son aplicables en la mayoría de los otras ramas ya mencionadas. Esta última característica la presentan las matemáticas de los conjuntos y de la lógica por su generalidad, y también en gran medida, las matemáticas del *azar y la probabilidad.*

La matemática está estrechamente vinculada con la experiencia y la actividad práctica del hombre, surge de la experiencia y se nutre de ella e influye sobre la actividad práctica, ya sea a través de las distintas ciencias ya sea como instrumento o método. Si bien algunas ramas de las matemáticas se adelantan enormemente a las necesidades prácticas del hombre de una época o región. Movidas principalmente por la curiosidad científica y por el impulso creador, intelectual y estético, estas ramas de las matemáticas son precisamente aquellas que están más firmemente enraizadas en la experiencia del hombre (a la cual debe recurrir en ocasiones, aunque sea indirectamente, en busca de conceptos y problemas para cumplir su desarrollo), y la actividad práctica se vincula con estos adelantos, (después de un cierto tiempo que, a medida que se desarrolla una sociedad, va siendo menor en general) a través del estímulo que estos representan, de las influencias que tienen sobre otras ramas de las matemáticas y de las ciencias, y sobre las concepciones científicas y filosóficas generales, y de apropiación de sus métodos y resultados (a este respecto ver “ las puras y las aplicadas ", revista Matemática, segunda serie, número cuatro, agosto de 1969).

La matemática tiene una historia, un desarrollo y un futuro. No es de ninguna manera un cúmulo de conocimientos exhaustivos e invariables, sino que presenta una amplia gama de posibilidades de desarrollo, una gran cantidad de cuestiones abiertas y serios problemas básicos que son aún objeto de estudio y discusión y sobre todos estos problemas se manifiestan en encontradas opiniones y corrientes.

Las matemáticas las hacen hombres de carne y hueso en condiciones históricas concretas y presentan actualmente, y seguirán presentando en el futuro, un campo fértil para el despliegue de la actividad creadora de los hombres. Es importante conocer esta historia y éste desarrollo para comprender el significado real de la matemática, para ubicarla dentro de la cultura y para contribuir a su futuro.

La matemática presenta una gran unidad. En el aspecto teórico las diversas ramas y especialidades de la matemática están estrechamente relacionadas y si bien hay etapas de su desarrollo que parecen distanciarse irremisiblemente, en otras etapas se vuelven acercar y entrelazar, y aparecen principios unificadores y nuevas ramas que se funden y sintetizan. En los aspectos históricos y de vinculación en la práctica, existe una sólida concatenación, y a veces un contacto directo entre los resultados y problemas actuales y los que se presentaban hace miles de años, y entre los resultados más puros y los que se hallan en estrecha relación con la actividad práctica.

Sobre la base de estos principios es que debe fundarse la enseñanza de las matemáticas a cualquier nivel. En los temas específicos debe hacerse resaltar lo más posible su carácter teórico, su vinculación con la práctica, su historia y unidad. Y es precisamente esta unidad la que permite relacionar los temas específicos con el panorama general[11].

En nuestro caso particular, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato, deben ser los de hacer captar al estudiante este panorama general de las matemáticas y el de familiarizarlo con los resultados y métodos básicos de algunas de las ramas más importantes.”

[11] LOPEZ DE MEDRANO SANTIAGO. Las matemáticas. Invierno de 1971

4.1 MÉTODOS MATEMÁTICOS[12] RELACIONADOS CON LA PROPUESTA.

4.1.1 *EL MÉTODO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS.*

Este método consiste en la construcción de un modelo de una situación concreta, el cual está formado generalmente por símbolos, tablas, instrumentos, etc. El modelo matemático puede ser considerado como el punto de contacto más directo de las matemáticas con los problemas concretos y también como la forma más primitiva de las matemáticas, a partir de la cual se desarrollan todas sus ramas y cuyo desarrollo propio genera la necesidad de otros métodos matemáticos más avanzados. Puede fundamentarse esta afirmación examinando la historia de las matemáticas, así como observando que en las investigaciones contemporáneas existe una preocupación profunda por el concepto de *modelo.* Por estos motivos es que se considera que este método debe ser el punto de partida de las matemáticas también desde el punto de vista pedagógico.

Otros métodos vinculados con éste son el estudio de la estructura, las simetrías y los invariantes de los modelos matemáticos. Estos métodos son más avanzados y tienen un carácter teórico.

4.1.2 *EL MÉTODO DE LOS LENGUAJES SIMBÓLICOS.*

Este consiste en la creación de un lenguaje general que puede ser utilizado para construir una gran cantidad de modelos matemáticos diferentes. El ejemplo más conocido de este método es el *lenguaje algebraico* que se utiliza para construir modelos matemáticos consistentes de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Este

---

[12] Es pertinente mencionar los métodos de demostración en matemáticas, los cuales son de: inducción matemática y deducción, que ya no son objeto de enseñanza en el nivel medio, aunque alguna vez lo fueron al menos en el CCH de la UNAM.

método está estrechamente ligado con el anterior, ya que consiste de una gran generalización de él, y éste adquiere su verdadera fuerza cuando esta sustentado por un lenguaje operativo.

Otros métodos relacionados con éste, son los de la formalización y el uso de ciertos símbolos especiales, así como los mencionados en el número 1, en relación con los modelos construidos con un lenguaje.

Estos dos primeros métodos forman una sola unidad, que podríamos llamar el método simbólico - operativo. Como instancias importantes se han incluyen los lenguajes simbólicos de los estocásticos (probabilidad)[13] y los lenguajes aritméticos y el álgebra, y la construcción de algunos modelos gráficos sencillos.

4.1.3. **EL MÉTODO TEÓRICO DEDUCTIVO.**

Los métodos teóricos son aquellos que permiten una comprensión de un modelo o de una colección de ellos, que va más allá de las meras reglas para manipularlos. Es el momento “reflexivo “de las matemáticas, a diferencia del momento “operativo” considerado anteriormente. Entre estos métodos se encuentran los mencionados al final del # 1, por ejemplo, el análisis de la estructura global de un modelo con relación a la posible existencia de una o varias soluciones, es un método teórico bien diferenciado de la simple manipulación mecánica del modelo como búsqueda de una solución.

Pero el método teórico más poderoso e importante es el lógico - deductivo, que consiste en relacionar lógicamente diversas propiedades de los modelos, los

---

[13] COLÍN, JESÚS .Intuición y probabilidad desde el punto de vista de Fischebein. CINVESTAV (cuadernos de investigación: No 26 año VII, noviembre de 1993). México.1980.

resultados principales de este método se expresan mediante proposiciones, teoremas, corolarios, etc. , los cuales se establecen a través de demostraciones. Parte importante de este método consiste en la elaboración de conceptos adecuados, y el establecimiento de una terminología mediante definiciones. Una forma más general y avanzada de este método es el que se conoce como método axiomático

Como instancias importantes de aplicación de este método se incluyen algunas teorías geométricas (euclidiana, analítica y otras) y algunas teorías algebraicas (de los números naturales y de los números reales, fundamentalmente).

4.1.4. **LOS MÉTODOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.**

Estos métodos consisten en el análisis de una situación, a través de una sucesión infinita de modelos que la van aproximando cuantitativamente, por lo que podríamos agruparlos bajo el nombre genérico de “ método de aproximaciones sucesivas ". El desarrollo de estos métodos conduce a los diversos conceptos de *límite*, que tiene como instancias importantes los conceptos de derivada e integral. Al rededor de estos métodos y conceptos el cual comprende el lenguaje y los principales conceptos y resultados teóricos del cálculo diferencial e integral, así como el estudio de los principales modelos que con ellos se construyen y analizan para la resolución de muy diversos problemas.

4.2. LENGUAJE MATEMÁTICO

El lenguaje matemático (lenguaje simbólico) es el conjunto de sonidos matemáticos articulados con que el hombre manifiesta lo que piensa y siente expresado matemáticamente. De ahí viene lengua matemática que es el sistema de expresión verbal. Y de ésta se deriva el estilo y modo de hablar de en y de la matemática en general y de cada una de las ramas de la matemática en particular.

No se sabe con exactitud cómo el hombre empezó a desarrollar los lenguajes simbólicos. Este desarrollo comenzó hace mucho tiempo y en su inicio estuvo mezclado con cuestiones místicas y religiosas.

Al principio el hombre creo modelos que estaban formados por guijarros, dedos, varas marcas de árbol, marcas en huesos de animales (lobo) etc. Realizando con esto un proceso de abstracción

El hombre inventa lenguajes simbólicos para poder representar situaciones reales, es decir para crear modelos de ellas.

En las matemáticas se utilizan lenguajes simbólicos. Muchas de las características de los lenguajes tienen que ver con las características de los modelos que se construyen con ellos.

Un lenguaje simbólico tiene sus símbolos y reglas para combinarlos. Una característica especial que tienen los lenguajes simbólicos que se utilizan para construir modelos simbólicos es que los elementos se van construyendo al mismo tiempo que el modelo. Generalmente “fabricamos” los símbolos a medida que los vamos necesitando: así, por ejemplo dibujamos puntos y líneas sobre un papel para crear graficas[14].

---

[14] López de Medrano Santiago. Teoría de graficas. ed. ANUIES, México, 1972.

Características de los lenguajes simbólicos.

Los símbolos que se utilizan para representar los elementos de un problema son arbitrarios. Por ejemplo en el problema 11[15]; para representar la medida real de las unidades que utiliza el dueño de la gasolinera para medir un “litro”. Pudimos haber utilizado la letra M o la Z o pudimos haber inventado símbolos especiales. Lo importante no es el símbolo sino sus relaciones con otros símbolos y con el elemento que representan.

Podemos utilizar el símbolo $=$ en lugar del 2.

Pero a pesar de que los símbolos son arbitrarios, a veces es conveniente escoger con cuidado los símbolos empleados o fijar los símbolos.

Otra necesidad que nos lleva a no usar símbolos arbitrarios en cada problema que ataquemos, sino por el contrario a fijar ciertos símbolos que se utilizan frecuentemente, es la de comunicar los resultados.

Lo anterior puede sintetizarse en la propiedad *arbitrariedad- convención*.

Otra propiedad de los lenguajes simbólicos es la: *Simbolización -operatividad*

Los lenguajes matemáticos tienen cierta vida propia Si conocemos las reglas precisas para manipular los símbolos, podemos manipularlos mecánicamente, sin tener que estar pensando en cada paso lo que los símbolos significan. Esta

---

[15] Problema 11. Anexo 3. problemas que conducen a ecuaciones lineales en una variable.

mecanización puede ser tan completa que una maquina puede realizar este procedimiento, sin la intervención de la mente humana.

Las reglas de formación de expresiones matemáticas y las reglas para transformarlas forman la sintaxis del lenguaje. La semántica del lenguaje es la relación que existe entre los símbolos y los elementos que representan.

Este proceso de especificar con toda precisión las reglas para formar expresiones y las reglas para transformarlas se llama la formalización del lenguaje.

En la antigüedad, en la India se dio el paso fundamental de la creación de un lenguaje simbólico, con la invención del cero y el uno en la notación decimal .Este sistema coincide con el que utilizamos actualmente, excepto por los símbolos particulares de los dígitos. Su mayor ventaja consiste en la gran facilidad con que permite realizar las operaciones aritméticas, las cuales se pueden efectuar mecánicamente, sin hacer referencia alguna a la realidad o a un modelo más concreto. Lo único que se necesita es conocer las tablas de sumar y multiplicar de los primeros 9 números para hacer cualquier operación en forma mecánica. Esto es, que se construyo un verdadero lenguaje simbólico, mediante el cual se pueden construir modelos con papel y lápiz de situaciones reales, con las características de rapidez, operatividad y economía que se puedan concebir.

El descubrimiento anterior permitió la creación de otros modelos y lenguajes simbólicos. Los árabes comenzaron ha desarrollar el álgebra. El desarrollo comercial e industrial del renacimiento planteo diversas necesidades. Esto hizo que se desarrollara el álgebra de los árabes. Durante un periodo de tiempo considerable se fue desarrollando el lenguaje simbólico del álgebra a una forma casi igual a la que hoy conocemos. El álgebra se introdujo en la geometría analítica de Descartes, comenzando así, una riquísima interrelación entre el desarrollo entre los modelos geométricos y los algebraicos. Esto fue esencial para el desarrollo de un nuevo lenguaje simbólico el cálculo “infinitesimal” (o cálculo diferencial e integral), se convirtió en el lenguaje de la ciencia, transformo la técnica y cambio la concepción que el hombre tenía del universo y de si mismo.

Entre los nuevos lenguajes que se descubrieron, cabe destacar el de la lógica matemática y el de los conjuntos. En la actualidad los problemas de la programación de las computadoras han hecho necesaria la creación de muchos lenguajes simbólicos y el desarrollo de una teoría de los lenguajes. Esta teoría ha llegado incluso a ser de gran utilidad para comprender mejor la estructura de los lenguajes humanos.

Algunos símbolos especiales de los lenguajes simbólicos

En la igualdad Muchas veces se utilizan distintos símbolos para denotar un mismo elemento o podemos tener distintas expresiones del lenguaje para denotar la misma situación.

En general cuando se escribe el signo “=” entre dos símbolos o dos expresiones, es para expresar lo mismo, es decir, que son dos formas de expresar lo mismo. La igualdad es un símbolo de relación entre símbolos, no entre objetos o situaciones reales. Al escribir A= B, no estamos diciendo que los dos símbolos sean iguales, solo decimos que son dos nombres distintos para el mismo objeto.

La utilización del signo”=” puede obedecer a muchos fines. Puede servir simplemente para establecer el hecho de que los símbolos representan lo mismo. Por ejemplo al escribir 1+2 = 3 solo estamos diciendo que es otra forma de escribir el 3. Esto se puede también utilizar para sustituir en 3 cualquier expresión en que aparezca 1+2.

Otra forma de usar el signo “=” es al expresar las condiciones particulares de un problema. Aquí no quiere decir que las dos expresiones del lenguaje se utilicen para denotar lo mismo. Este es el punto fundamental sobre el que se baza la utilización de las ecuaciones para resolver problemas.

La relación de igualdad entre símbolos satisface ciertas propiedades[16] muy simples que se deducen inmediatamente de la definición:

$x = x$ (Propiedad reflexiva)

Si $x = y$; entonces $y = x$ (propiedad simétrica)

Si $x = y$ y $y = z$; entonces $x = z$ (propiedad transitiva)

Estas propiedades pueden interpretarse como reglas de transformación del lenguaje. Por ejemplo, si en un modelo dado aparece la expresión $3x + 7 = 4x + 1$ ésta la podemos transformar automáticamente en la expresión $4x + 1 = 3x + 7$

Índices

Muchas veces dos o más elementos de un problema juegan un papel similar, ya sea por una simetría o por simple analogía. En estos casos es muy conveniente que la forma misma de los símbolos nos recuerde estas relaciones, para poder operar con mayor facilidad. Si los dos elementos juegan exactamente el mismo papel, muchas veces es posible usar el mismo símbolo para los dos.

[16] Otras propiedades que se usan al manipular ecuaciones se incluyen en la pagina 181.

Por ejemplo para escribir dos ecuaciones literales que forman un sistema, como las siguientes: $\begin{matrix} ax+by=c \\ ax+by=c \end{matrix}$. En matemáticas se utiliza mucho poner una coma arriba y a la derecha del símbolo. Así, el sistema anterior quedaría como sigue:

$$\begin{matrix} ax+by=c \\ a`x+b`y=c` \end{matrix}$$

O mejor aun usando subíndices:

$$\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}$$

4.1.5 LAS ECUACIONES LINEALES.

Al estudiante del bachillerato las ecuaciones lineales le son familiares, de alguna manera, desde que curso la secundaria.

Una ecuación lineal en dos variables es una ecuación donde las variables solo aparecen con grado[17]uno. Una ecuación lineal es de la forma $Ax+By+C=0$, con la condición de que al menos uno de los coeficientes $A\ o\ B$ sea distinto de cero. Geométricamente la ecuación $Ax+By+C=0$ representa una línea recta y de hecho a esta ecuación se le denomina ecuación general de la recta.

Los coeficientes de la forma general de la recta contienen información geométrica:

Sí $B\neq 0$, despejando y de la ecuación general esta toma la forma $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, que comúnmente se expresa como $y=mx+b$, donde m es la pendiente de la recta: la tangente del ángulo θ que forma la recta con la dirección positiva del eje

[17] Nota: El grado de una ecuación lo determina el término de mayor grado, este depende del exponente que tengan la o las literales incluidas en los términos.

x, y b es la ordenada al origen, es decir, la ordenada de la intersección de la recta con el eje y.

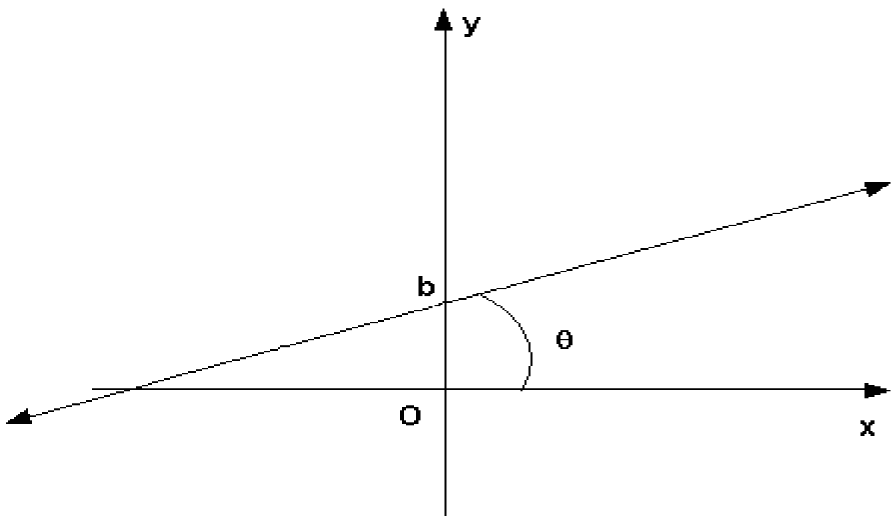


Figura 1. Una recta en el plano cartesiano.

Comparando la ecuación $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ con la ecuación $y=mx+b$ tenemos que la pendiente de la recta es $m=-\frac{B}{A}$, y su ordenada al origen es $b=-\frac{C}{B}$.

Así, si $B=0$, la ecuación se reduce a $Ax+C=0$, es decir $x=-\frac{C}{A}$. El lugar geométrico asociado a esta ecuación esta formado por los puntos cuya abscisa tiene el valor constante $-\frac{C}{A}$, que corresponden a puntos de la recta paralela al eje y la cual corta al eje x en el punto $\left(-\frac{C}{B},0\right)$.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la forma:

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

Una solución del sistema es una solución común a las dos ecuaciones. Esta solución común de ambas ecuaciones es el par ordenado de números reales (x_0, y_0) y es tal que al sustituirse en el lado izquierdo de cada ecuación verifica la igualdad con cero. Al punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema es la solución de dicho sistema y corresponde (x_0, y_0).

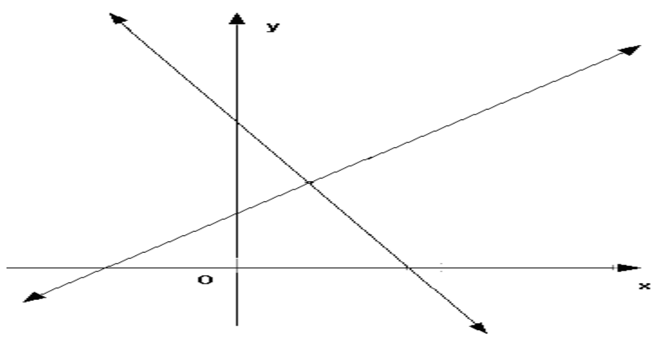


FIGURA 2. DOS RECTAS QUE SE CORTAN

Una ecuación lineal en tres variables es una ecuación de primer grado en las variables $x, y,$ y z; tiene la forma

$Ax+By+Cz+D=0$. Donde A,B,C y D son números reales y los tres primeros son distintos de cero.

Una solución de la ecuación es una tercia ordenada de números reales (x_0, y_0, z_0) tal que al ser sustituida en la ecuación satisfacen la igualdad igual a cero.

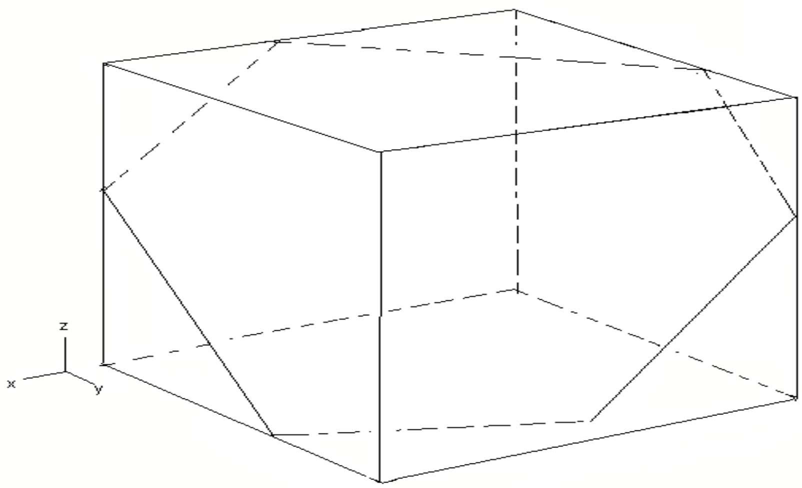


FIGURA 3. Gráfica de una ecuación en tres variables**.**

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables es un conjunto de tres ecuaciones en las tres variables x, y, z.

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad \text{(S1)}$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + C_3 = 0$$

Las cuales deben satisfacerse simultáneamente, es decir se ha de encontrar una tercia ordenada de números reales (x_0, y_0, z_0) que sea solución de las tres ecuaciones.

Este tipo de sistemas aparecen, aun en el trabajo diario, al plantear una gama de problemas. Así, aparecen en todos aquellos problemas en los que las incógnitas tienen relaciones lineales con los datos. Estas son como las de S1, en la cual las incógnitas aparecen solas, sin multiplicarse entre si y elevadas a la primera potencia.

El desarrollo que tendrá la evaluación en el proceso de enseñanza de las ecuaciones lineales como parte de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato se basa en cuatro operaciones fundamentales que se interrelacionan:

1. La definición precisa de la ecuación(o sistema de ecuaciones) y del método correspondiente a su resolución que se va a evaluar, que se debe definir mediante el establecimiento del aspecto que se medirá y del propósito que cumplirá la medición.

2. La definición operacional del aspecto de la ecuación o del sistema de ecuaciones, así, como del método de resolución; es decir la formulación de conceptos, nociones, etc., pertinentes a dicho aspecto. En la evaluación del rendimiento del alumno, correspondería a la especificación de los objetivos que se medirán.

3. La selección y elaboración de los instrumentos y procedimientos de evaluación más adecuados para dicho conjunto de conceptos y suposiciones matemáticas referidas a las ecuaciones lineales.

4. La revisión continua de acuerdo con la información obtenida en la aplicación de los instrumentos y procedimientos diseñados (operación 4); de la definición del aspecto referido a las ecuaciones lineales (operación 1); de los conceptos y suposiciones formuladas (operación 2), y de los instrumentos y procedimientos desarrollados (operación 3).

El problema metodológico es el problema de la organización de los elementos y actividades del proceso de enseñanza – aprendizaje de un modo tal que se posibilite la transformación de las estructuras de la matemática (ecuaciones lineales) en estructuras subjetivas del alumno. El método debe ser tal que marque un camino para que las estructuras objetivas de la matemática (ecuaciones lineales) se conviertan en estructuras subjetivas del alumno capacitándolo para ser un sujeto transformador.

En el aprendizaje de las matemáticas y particularmente de las ecuaciones lineales, se deben dar las siguientes características:

i) Es un proceso de cambio en la concepción y manejo de las matemáticas (ecuaciones lineales), ya que aprender es modificar algún aspecto de la conducta o de la personalidad en relación a las mismas.

2i) Implica una modificación estable de la conducta referida a las matemáticas (ecuaciones lineales), que se mantendrá por un largo tiempo[18].

3i) Implica una situación nueva que desarrolla respuestas estructuradas, hasta encontrar el modelo más adecuado. Estas respuestas son el resultado de un proceso de comprensión, donde asimilación y acomodación a nuevos esquemas son actividades conjuntas que se dan durante todo el proceso.

4i) Es un proceso que se refiere al alumno como totalidad, por la tanto el aprendizaje es multifacético. Esto implica que aunque el contenido dominante para aprender sean las ecuaciones lineales, en ese proceso también se modifican formas de percibir, pensar, sentir y actuar del sujeto, que tiene incidencia en toda su estructura de personalidad.

---

[18] De hecho se mantiene de por vida, solamente cambia si el alumno de bachillerato se forma como matemático, ingresando para ello a la Facultad de Ciencias de la UNAM o a cualquier otra institución que imparta la carrera de matemático.

5. **CAPÍTULO 5. DIDACTICA ESPECIAL PARA LAS MATEMATICAS.**

5.1 LA ENSEÑANZA DESDE LA POSTURA POSITIVISTA.

Desde el paradigma positivista el papel del docente es facilitar la enseñanza del estudiante ayudándolo a aprender. La enseñanza es una actividad racional supeditada a la superación mediante la investigación y el desarrollo del profesorado en ejercicio. Algunos de estos modelos de enseñanza son:

- Los que acentúan la modificación de la conducta.
- Aquellos que se fundamentan en la psicología del training, estos se centran en las últimas actividades de ejecución con pasos que incluyen el análisis y la síntesis.
- Los que se derivan de la psicología cibernética, cuyo modelo parte de suponer que el cerebro humano funciona de forma similar a una maquina electrónica.
- De micro enseñanza que en sus orígenes pretendían reducir la complejidad de la enseñanza reduciendo la tarea de la enseñanza a proporciones manejables y comprensibles.
- De enseñanza programada. Estos modelos se sustentan en la psicología conductista y han tenido una aplicación considerable.

5. 2 CONSTRUCTIVISMO

En la actualidad existen varias acepciones del constructivismo, cada una con su perspectiva a cerca de cómo facilitar mejor el proceso de construcción del conocimiento. Así, se pueden mencionar un constructivismo radical y organismico e incluso un constructivismo social y contextualizado.

Para el constructivismo radical el alumno aprende a través de una secuencia, uniforme de organizaciones internas, cada una más completa e integradora que las que le preceden. Para promover el aprendizaje el docente trata de acelerar el proceso del aprendizaje ayudando al estudiante mediante estrategias adecuadas a examinar sus actuales formas de pensar. En el constructivismo social se sostiene que la creación del conocimiento es una experiencia más grupal que individual. La interacción entre el organismo y el ambiente posibilita el que surjan nuevos caracteres y rasgos, en una relación reciproca y compleja entre el individuo y el medio ambiente. En esta acepción se identifica una perspectiva situada, en la cual el sujeto y el entorno posibilitan una actividad, la adaptación se da como un sistema formado por el sujeto y el ambiente que se modifican mutuamente en una interacción dinámica. Confluyen diversas posturas, desde las neo-marxistas hasta la concepción que converge en el enfoque iniciado por Vigotsky, y aun es posible identificar la acepción cibernética e incluso al rescate del pragmatismo debido a Dewey.

5.3 CONSTRUCTIVISMO PIAGETIANO.

Piaget Concibe el desarrollo del conocimiento como la construcción de una serie de estructuras intelectuales que definen los intercambios del sujeto con el medio ambiente. La construcción ordenada de esas estructuras tiene un carácter universal y se da una equilibración por asimilación y acomodación. Lo que implica que cada estructura que logra el sujeto en el proceso de desarrollo intelectual incluye una mayor capacidad de aprendizaje.

En el nivel bachillerato se tiene la intención ayudar a que los alumnos progresen alcanzando un nivel adecuado a los requerimientos de su aprendizaje.

En ese sentido distinguimos:

- Aprendizaje normal. Con el cual se adquiere información del medio ambiente.
- Aprendizaje amplificado. Progreso continuo y permanente de las estructuras cognitivas mediante los procesos de equilibración.

De acuerdo a esta forma:

- El conocimiento cambia y evoluciona.
- El conocimiento se da como consecuencia de la interacción entre sujeto y objeto.
- El conocimiento se construye.

En la iteración se reconocen dos procesos.

Asimilación. El sujeto interpreta la información en función de las estructuras conceptuales que tiene en un momento dado.

Acomodación. El sujeto adapta la información en una modificación de los esquemas recién construidos.

El proceso de equilibración es mediante la asimilación y acomodación dialéctica es una característica propia de los seres orgánicos.

Además de la equilibración como factor de desarrollo en el proceso cognitivo, existen otros factores, los cuales son a saber:

Maduración.

Interacción con objetos o cosas.

Interacción con otras personas.

La equilibración se manifiesta en tres niveles:

- Entre esquemas y objetos que se asimilan.
- Entre los diversos esquemas que han de asimilarse y acomodarse mutuamente.
- Integración a una etapa superior de esquemas previamente diferenciados.

Los tres niveles están integrados jerárquicamente. De tal manera que un desequilibrio en un nivel dado provoca conflictos en los niveles dependientes.

El constructivismo Piagetiano destaca los procesos individuales y manifiesta la actividad autoestructurante del alumno como un camino óptimo para que el estudiante desarrolle un aprendizaje adecuado a las circunstancias actuales. Lo que implica una acción pedagógica que permita crear un ambiente propicio para que el estudiante despliegue su actividad de aprendizaje. Para lo cual el estudiante requiere de un apoyo especial del docente.

5.4 **TEORÍA EPISTEMOLÓGICA GENÉTICA.**

La epistemología genética estudia los mecanismos y procesos mediante los cuales se transita de los estados de menor conocimiento a los de mayor conocimiento.

El nivel de competencia en un instante dado depende de:

- La naturaleza propia de los esquemas.
- El número de los mismos.
- La manera en que se combinan y coordinan entre si.

El desarrollo cognitivo es una sucesión de estadios caracterizados por la forma en que los esquemas se organizan y combinan entre si dando lugar a las estructuras. Un estadio es más o menos avanzado según su proximidad al conocimiento científico. Los niveles de desarrollo cognitivo son:

1. Sensorio motor 0-2 años.
2. Preoperatorio

   Pensamiento simbólico 2 -4 años.

   Pensamiento intuitivo 4 -7 años.
3. Operaciones concretas 7 – 11 años.
4. Operaciones formales 12 años.

En la primera etapa del primer año de vida los esquemas son mínimos, gran parte del aprendizaje implica asociaciones entre estímulos externos sensaciones internas y una respuesta que se manifiesta antes estas. El niño aprende a sostener un objeto a producir ruido con otro objeto, a buscar un objeto que se le pierde de vista. Estas son conductas sensomotoras que corresponden a la estructura preoperacional (sensoriomotora).

Aunque Piaget considera que el desarrollo de la inteligencia como capacidad de adaptarse al medio, pasa por una serie de etapas de maduración, que se pueden distinguir en dos, siendo una de ellas la que va desde el nacimiento hasta los dos años. En esta primera etapa el uso el lenguaje y los símbolos que el niño usa están en una incipiente formación son de hecho acciones preverbales.

La fase sensoriomotora incluye seis etapas del desarrollo intelectual del niño. Cuatro de estas primeras etapas se alcanzan durante el primer año de vida. Todos los niños recorren en estas la misma sucesión de estadios y siguen el ciclo desde las primeras hasta las últimas, en el mismo orden, variando la velocidad del avance según la diversidad de los niños.

Al final de las primeras cuatro etapas del periodo sensoriomotor se reviste mayor complejidad, la estructura intelectual del niño se va más objetiva y se orienta más a la realidad. Es aquí donde ya se manifiestan la intención, la direccionalidad y la orientación, aunque estas se redefinen propiamente con más énfasis en las etapas quinta y sexta. Es en esta etapa donde el niño puede ser ayudado en su desarrollo con un programa educativo adecuado para hacer reaccionar al niño a situaciones nuevas que no solo tiendan a madurar sus logros sino a superarlos promoviendo el salto a la próxima etapa. Al final de este periodo de manifiestan un conjunto de imágenes que son una representación inicial.

La etapa que va desde el nacimiento hasta el primer año es una etapa caracterizada por los reflejos innatos que se van haciendo más eficientes, estas conductas de adaptación del organismo, no son aprendidas, y son el fundamento de la conducta de adaptación del organismo.

La etapa de reacciones circulares primarias, es la segunda etapa en la que se manifiesta la aparición de actos que se repiten por si mismos. Como ejemplos estas reaccione son el chupeteo, al abrir y cerrar del puño, y el manoseo insistente de un objeto dado, sin intención aparente.

Durante la tercera etapa de reacciones circulares, que va de los cuatro a los seis meses, el niño repite actos cuyas respuestas producen resultados que parecen interesarle al niño. Por ejemplo a menear con la mano o patear un objeto (colgado) que este su alcance.

De los siete a los 10 meses, se da la cuarta etapa de coordinación de reacciones circulares, el niño utiliza una respuesta aprendida para obtener algo que desea, haciendo de un objeto una extensión de si mismo, tal es el caso de tirar un objeto para obtener otro que el primero esconde.

La quinta etapa de reacciones circulares terciarias que comprendida de los 11 a los 18 meses, el niño manifiesta la esencia de la solución de problemas. Ensaya nuevas respuestas para obtener una meta percibida como tal. Así, por ejemplo el niño puede usar un objeto como medio para alcanzar otro. En esta etapa el niño descubre algún acontecimiento nuevo que le excita y que trata de prolongar y de repetir. En esta etapa el niño acomoda (modifica y varía) sus movimientos de manera progresiva y deliberada. En esta etapa el niño se vuelve activo en la exploración por ensayo y error.

La sexta etapa del periodo sensoriomotor que se da aproximadamente a los 18 meses, se caracteriza básicamente por la invención de nuevos medios, que el niño logra a través de combinaciones mentales internas, que exterioriza en sus acciones. En esta etapa el niño desarrolla una representación de una serie de imágenes que el infante utiliza en la solución de problemas Los proceso de representación y de invención que se manifiestan en esta etapa de desarrollo intelectual del niño son los fundamentos en los que se asienta la sexta etapa. El niño ya es capas de simbolizar (mentalmente) acciones y acontecimientos antes de ejecutarlos. En esta etapa el niño también reproduce de memoria la conducta desplegada en un modelo ausente.

Con la capacidad de representarse acciones que no necesariamente se ejecutan, el niño finaliza su periodo sensoriomotor, y es entonces cuando esta preparado para un aprendizaje que aunque análogo es superior, es en este inicio de una nueva sucesión de adaptaciones, por acomodación y asimilación, intelectuales que darán lugar a un desarrollo en un escenario simbólico – conceptual.

El periodo preoperacional, es un periodo de desarrollo cognoscitivo, se distingue por el uso del lenguaje y de la función simbólica; estos procesos se basan en la representación. Todos los niños adquieren una variedad de conceptos (esquemas mentales). Tales como la existencia de un objeto que se ve en un momento y que al instante siguiente se pierde de vista. Cuando el niño adquiere la permanencia (existencia) de un objeto dado, el niño es capaz de percibir que un objeto real dado permanece y no deja de existir cuando este no se ve.

Se puede decir que en el desarrollo mental del niño en su primer año de vida predominan los actos sensoriomotores. No obstante el desarrollo sensoriomotor de un niño de un año, no necesariamente implica que este indique la capacidad lingüística o numérica de años posteriores.

La asimilación es la incorporación de un objeto dado o de estímulos nuevos o de esquemas existentes. El sujeto en cualquier edad posee un conjunto determinado de acciones o de operaciones que ha asimilado y acomodado en su estructura interna y qu le son propias, las nuevas ideas y los nuevos objetos se asimilan a las ya existentes.

La acomodación es la tendencia de ajuste o de acomodación a un objeto o una situación nueva, para lo cual es necesario cambiar los esquemas propios ya existentes en la estructura interna del sujeto para que asimile (incorpore) el nuevo objeto (situación).

El desarrollo mental (Piaget), es el resultado de resolver la tensión entre la asimilación y la acomodación, solucionar el conflicto entre usar respuestas anteriores para situaciones nuevas y crear respuestas nuevas para enfrentar estas.

De los siete a los 12 años de edad el niño atraviesa la etapa de operaciones concretas. En esta etapa el niño que se encuentra en esta etapa ha adquirido un conjunto de reglas que le capacitan para producir la imagen mental de una serie de acciones y se da cuenta de la relación que guardan dos objetos dados, puede razonar a cerca de un todo (finito) y de sus partes simultáneamente y puede ordenar objetos en una dimensión (longitud y peso), ha aprendido reglas que le permiten adaptarse adecuadamente al ambiente.

De los 12 años en adelante[19], el sujeto pasa la etapa de las operaciones formales. El pensamiento del sujeto en esta etapa lo capacita para pensar en todas las soluciones posibles de un problema dado, es decir tiene la tendencia a generar y explotar de manera sistemática todas las hipótesis posibles de solución y de examinarlas, a fin de establecer su validez. De hecho el pensamiento del adolescente es deductivo y parecido al de un científico en su quehacer de investigación. El adolescente es capaz de pensar en demostraciones por reducción al absurdo, es decir es capaz de suponer proposiciones hipotéticas que en un razonamiento dado dan lugar a una contradicción.

Piaget quien trabajo cierto tiempo en la comprensión de los conceptos matemáticos y físicos[20], hace hincapié en la importancia de la reversibilidad, de la inclusión de clase, de las operaciones de ordenamiento serial y de las estructuras combinatorias, que es pertinente para la matemática y la física

Por otro lado Piaget estableció que el desarrollo de la inteligencia que culmina con la etapa de operaciones formales se da en estructuras que son isomorfas[21] con la estructura matemática de retículo[22].

---

[19] Actualmente, en México los adolescentes ingresan al bachillerato entre los 15 y 17 años de edad en promedio.

[20] Lo cual se puede apreciar en textos tales como: PIAGET, ET AL. La enseñanza de las matemáticas modernas. Ed., Alianza editorial, Madrid, 1978.

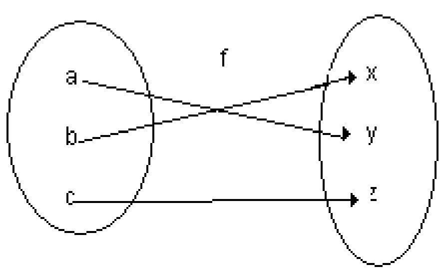
[21] Se dice que dos conjuntos ordenados son isomorfos si existe entre sus elementos una correspondencia biunívoca que preserva la relación de orden.

5.5 EL APRENDIZAJE COMO REESTRUCTURACIÓN

El aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos, etc., que el sujeto posee en su estructura cognitiva en un momento dado. El aprendizaje es sistemático, dado que es un fenómeno complejo que no se reduce asociaciones memorísticas. Diferencia los tipos de aprendizaje que ocurren en un lugar dado.

1. La que se refiere a la forma en que se adquiere el conocimiento.

Sea f una aplicación de A en B. f es inyectiva si elementos distintos de B corresponden a elementos distintos de A, es decir, si elementos distintos de A tienen imágenes distintas.
Por ejemplo la función $f : R \rightarrow R$, definida por la fórmula $f(x) = x^3$, es decir la función que hace corresponder a un número real su cubo, es una aplicación inyectiva, puesto que los cubos de dos números reales distintos son distintos ellos mismos.
Sea f una función de A en B. El dominio de imágenes $f(A)$ de la función f es un subconjunto de B, esto es $f(A) \subset B$. Si $f(A) = B$, es decir si todo elemento de A es imagen de al menos un elemento de A, se dice entonces que f es una función sobreyectiva de A en B. o que f es una función de A sobre B, o bien que A aplica sobre B. Por ejemplo La función definida por el diagrama



Es inyectiva y sobreyectiva.
[22] Un conjunto parcialmente ordenado A tal que para cualquier elemento $a,b \in A$ existen $\inf\{a,b\}$ y $\sup\{a,b\}$, se llama retículo.

2. La relativa a la forma en que el conocimiento es subsecuentemente incorporado en la estructura cognitiva del alumno.

Dentro de la primera encontramos dos tipos de aprendizaje posible: por recepción y por descubrimiento; y en la segunda se dan dos modalidades: por repetición y significativo. La interacción de estas dos dimensiones se traduce en las denominadas situaciones del aprendizaje escolar: aprendizaje por recepción repetitiva, por descubrimiento repetitivo, por recepción significativa o por descubrimiento significativo.

El aprendizaje significativo es importante en lo que se refiere a situaciones académicas, ya que posibilita la adquisición de amplios cuerpos de conocimiento que tengan sentido y relación.

La estructura cognitiva incluye conceptos, hechos y proposiciones organizados.

La estructura cognitiva esta integrada por esquemas de conocimiento. Estos esquemas son abstracciones o generalizaciones que los sujetos hacen mediante las interacciones con objetos hechos conceptos, etc.

Condiciones para logar aprendizajes significativos:

- El material que ha de aprenderse debe ser potencialmente significativo.
- Se debe disponer de los conocimientos previos que permitan procesar el nuevo aprendizaje.
- Actitud mental positiva respecto al aprendizaje nuevo.

Vigotsky propone una psicología basada en la actividad del sujeto, en un proceso de transformación del medio mediante el uso de instrumentos.

Los instrumentos son:

- Herramientas. Las que actúan materialmente sobre el estímulo, transformándolo.
- Signos. Modifican al sujeto que los utiliza como mediador, actuando sobre la interacción persona – entorno. Los sistemas de signos están constituidos por conceptos, nociones y estructuras de conceptos organizados.

Las herramientas y los signos son consecuencias de la cultura y la persona ha de interiorizarlos. Ello se da por la ley de doble formación.

Formación ínterpsicológica. El aprendizaje de signos o funciones psicológicas se da a través de la actividad práctica e instrumental, en interacción social.

Formación intrapsicológica. Se produce una generalización de la palabra aprendida e interiorizada es el origen del concepto.

Vigotsky Sostiene que:

"En el desarrollo cultural del infante toda función se manifiesta dos veces, primero a nivel social, y posteriormente, a nivel individual; primero entre personas (ínterpsicológica) y mas tarde en el interior del niño (intrapsicológica)"

Vigotsky intenta demostrar que las funciones mentales superiores (pensamiento, atención, conciencia, etc.) tienen su origen en la vida social, y que estas funciones el sujeto las interioriza paulatinamente después.

Vigotsky sostiene que el desarrollo es un producto derivado del aprendizaje.

Los mediadores interiorizados forman el nivel de desarrollo efectivo, este nivel determina lo que un sujeto logra realizar de forma autónoma, es el conjunto desarrollos ya establecidos, lo que el sujeto logra hacer con el auxilio de mediadores externos, es el nivel de desarrollo potencial.

Entre estos dos niveles debe darse un desajuste óptimo, de forma que si el contenido que ha de aprender el sujeto está excesivamente alejado de sus posibilidades de comprensión, no se producirá un desequilibrio entre los esquemas o bien producirá un desequilibrio tal que el cambio resultará imposible. La diferencia entre ambos niveles en la que se da este desajuste óptimo es la llamada “Zona de Desarrollo próximo”

Dicha zona de Desarrollo próximo es la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver un problema de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la guía de un adulto o en colaboración de otro compañero mas capaz.

Por otro lado Bruner formula el concepto de andamiaje a partir del concepto de zona de desarrollo próximo. El supuesto fundamental del andamiaje es que las intervenciones tutórales del adulto deben mantener una relación inversa con el nivel de competencia en la tarea del educando (menos nivel – más ayuda, más nivel – menos ayuda).

En la metáfora de las andamio se evidencia el carácter necesario y transitorio de las ayudas.

El profesor debe ser eficaz en consecuencia debe tener una formación idónea en relación al alumno y a la metodología educativa, porque el grupo con el que trabaja determinará las formas de ayuda que debe proporcionar.

El constructivismo se nutre de las aportaciones de diversas corrientes psicológicas asociadas genéricamente a la psicología cognitiva, tales como la psicogenética Piagetiana, la teoría ausbeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo, la psicología sociocultural vigotskiana.

De acuerdo al constructivismo el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, siendo fundamentales los instrumentos que utiliza el sujeto para dicha construcción.

El proceso de construcción depende de dos aspectos esenciales:

- Los conocimientos previos o representación que se tenga de la nueva información o de la actividad o tarea a resolver.
- De la actividad interna o externa que el educando realice al respecto.

La intención del constructivismo en el aprendizaje escolar es promover los procesos de crecimiento personal del estudiante en el contexto del grupo en el que esta inmerso, con trabajo en equipo y secuencias didácticas planeadas previamente se pretende lograr en el alumno la construcción del conocimiento propuesto. En este sentido se postula que:

- ♦ El alumno es el responsable de su propio proceso de aprendizaje.
- ♦ La actividad mental constructiva del alumno se aplica a aprendizajes (contenidos) que poseen un grado considerable de elaboración.
- ♦ El docente organiza los procesos de construcción del alumno con el saber cultural colectivo.

La construcción del conocimiento en la escuela es un proceso de elaboración. Así para aprender un contenido el alumno le atribuye un significado, crea una representación mental a través de imágenes o proposiciones verbales, es decir elabora un modelo mental como explicación de ese conocimiento.

Algunos aspectos que favorecen el proceso de enseñanza en el aula son:

- El logro del aprendizaje significativo.
- La comprensión de los contenidos.
- La aplicabilidad de lo aprendido.

5.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En la enseñanza de las matemáticas, la solución de problemas es fundamental. La solución de problemas debe ser el espíritu de las matemáticas en el ámbito escolar.

Considero que las investigaciones sobre la resolución de problemas que se exponen a continuación, son los más afines a esta propuesta didáctica.

5.7 LA HEURÍSTICA.

El tratado de Polya está centrado básicamente a la solución de problemas matemáticos, a la estructuración de solución, fundamentalmente expone los llamados heurísticas. La propuesta de Polya se puede complementar con los trabajos de Krutetski sobre habilidades.

Según Polya existe un problema cuando se busca concientemente una acción apropiada para lograr una meta concebida pero no de alcance inmediato.

Polya considera que la resolución de un problema incluye cuatro fases:

1. Comprender un problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Aplicar la visión retrospectiva.

Las fases anteriores caracterizan al resolutor competente. Cada fase incluye una sucesión de preguntas con la intención de servir como guía para la acción. Preguntas que el alumno se debe hacer para la solución de un problema dado.

5.8 MICROCOSMOS EN EL AULA.

La obra de Schonfeld se refiere a la creación de un microcosmos en el aula, pone especial interés en el dominio del conocimiento, las estrategias metacognitivas, sistemas de creencias, ambiente de aprendizaje de los cuales se esclarecen por la comparación de la solución de un problema por un experto y la solución por un iniciado.

Schonfeld postula que existen cuatro dimensiones que el individuo posee y que pueden ser utilizados en la solución de un problema dado. Estos incluyen intuiciones y nociones (conocimiento informal del tema en el que esta inserto el problema), hechos, procedimientos algorítmicos, procedimientos habituales, comprensión (conocimiento prosicional) acerca de las reglas para trabajar en el contexto (dominio).

Heurísticas

Son estrategias para avanzar en la solución de problemas no comunes; reglas para la solución de problemas, incluyendo el dibujo de lo percibido, el uso de una notación adecuada al momento, aprovechar problemas similares, explotar analogías, utilizar problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema dado, especializar, generalizar, variar el problema tratado, trabajar en sentido inverso, inducir procedimientos de prueba y tales como demostración directa e incluso demostración por reducción al absurdo.

Control:

Son decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias.

Esta conducta se refiere a la forma en que el individuo usa la información que esta a su disposición. Concierne a decisiones de que hacer en el intento para resolver un problema dado, decisiones que pueden conducir a un éxito o un fracaso el intento por resolver un problema. Las conductas de interés incluye el planificar, seleccionar metas, evaluar soluciones a medida que se desarrollan, revisar e incluso abandonar planes cuando la revisión a si lo implica.

Sistema de creencias

Es la concepción que tiene el sujeto de las matemáticas, lo que determina la conducta de la persona respecto al mundo, de las matemáticas, incluso de si mismo.

Los sistemas de creencias respecto a las matemáticas, es la visión o perspectiva con la cual el individuo se enfrenta a las matemáticas. Dichas creencias determinan el campo en el cual operan los pensamientos el control y el pensamiento heurístico

El desarrollo de la habilidad de resolución de problemas es un proceso acumulativo que depende del historial de experiencias del estudiante en dicha actividad. La tarea misma es crucial para toda la experiencia en la resolución de problemas. Por lo tanto, es importante prestar una atención cuidadosa a las características de las tareas de problema a fin de avanzar en el conocimiento en la resolución de problemas.

La resolución de problemas es un proceso en el cual el aprendizaje por descubrimiento es la actividad dominante. Asumiendo como relación entre los conocimientos que se tienen y la manera especifica de resolver la situación problemática.

Para Polya resolver un problema significa buscar una conscientemente una actividad apropiada para lograr un objetivo concebido pero no alcanzable inmediatamente.

Para otros autores un problema es una situación a la que se enfrenta una persona o un grupo, que requiere solución, y para la que no se vislumbra un medio que conduzca a la misma.

De lo anterior se infiere que un problema debe satisfacer:

1. Aceptación. Debe existir un compromiso que puede tener motivaciones externas e internas.
2. Bloqueo. Los intentos habituales para resolver el problema no funcionan.
3. Exploración. El compromiso obliga a explorar nuevos métodos para abordar el problema.

Algunos investigadores clasifican los problemas de acuerdo a su estructura como:

Problema con texto. Contextualizado explícitamente en el texto. Tiene una formulación única y explicita; solución única y exacta; y el método es una combinación de algoritmos dados.

Ejercicio no incluye contexto Tiene una formulación única y explicita; solución única y exacta; y el método es una combinación de algoritmos dados.

Problemas reales. Contextualizado parcialmente en el enunciado, tiene una formulación dada parcialmente, diversas alternativas son posibles, tiene varias soluciones aproximadas; posibles; conlleva la creación de un modelo, y el método de solución es una exploración del contexto es decir una reformulación.

5.9 **INTELIGENCIAS MULTIPLES Y EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**

Howard Gardner, define la inteligencia como una capacidad por lo que la convierte en una destreza que se puede desarrollar. La inteligencia es una capacidad para resolver problemas. La Teoría de Inteligencias Múltiples es un modelo cognitivo que busca descubrir cómo los individuos usan sus inteligencias para resolver problemas. Toda persona desarrolla ocho inteligencias, pero cada una de ellas en distinto grado.

Las ocho inteligencias que identifica Gardner en su obra son;

1. Inteligencia lógico - matemática.
2. Inteligencia lingüística.
3. Inteligencia espacial.
4. Inteligencia cinético – corporal.
5. Inteligencia Musical.
6. Inteligencia Naturalista.
7. Inteligencia Interpersonal.
8. Inteligencia Intrapersonal.

Y en estudios recientes Howard Gardner ha identificado la *Inteligencia existencialista* como la novena inteligencia. Es necesario que empecemos a reconocer las inteligencias más desarrolladas de nuestros alumnos, para que su aprendizaje pueda producirse a través de sus inteligencias preferidas

En la Teoría de las Inteligencias Múltiples existe una buena cantidad de herramientas que van mucho más allá de la modalidad tradicional del cómo se pueden impartir las clases. Le proporcionan al maestro una oportunidad para desarrollar e innovar estrategias de enseñanza.

De esta manera, el maestro se podrá dirigir a la inteligencia más potente de cada uno de sus alumnos, al menos durante una parte de la clase. Con esto, esencialmente se abarca lo que los buenos maestros han hecho siempre: ir más allá del texto y del pizarrón para “despertar” las mentes de los alumnos.

La Teoría de las Inteligencias Múltiples permite que los maestros reflexionen sobre sus mejores métodos de enseñanza para incluir una gama más amplia de métodos, materiales y técnicas para enseñar a una diversidad de alumnos.

El maestro que se basa en las Inteligencias Múltiples, cambia todo el tiempo su método de presentación, del campo de lingüística al espacial, al musical y así a las demás inteligencias, combinándolas la mayoría de las veces. Se puede ocupar el pizarrón pero sin abusar de él; el docente debe ofrecer experiencias directas, hacerles que se levanten y muevan dentro del aula, hacer circular un objeto entre los alumnos para que el material estudiado cobre vida, o pedirles que construyan algo tangible que revele su comprensión del tema. También hace que los alumnos interactúen entre ellos de diferentes maneras: en parejas o en grupos; planifica tiempo para que los alumnos se dediquen a la autorreflexión, hagan trabajos a su propio ritmo o relacionen sus experiencias y sentimientos personales con el material que están estudiando.

5.10 **PROPUESTA**

La propuesta didáctica sobre la enseñanza de las ecuaciones lineales en el bachillerato se basa en la heurística y en la resolución de problemas, incluye la sección programática paginas 103 -110, el manejo del programa a través de los ejemplos de clase para cada sesión del anexo 7. Los ejemplos de diversas estrategias que permiten en diversos momentos del desarrollo de una unidad dada encausar el aprendizaje de los alumnos e incluso hacerlo lúdico.

Unidad 1.

ECUACIONES LINEALES en una variable.

Contenidos

1. Ecuaciones lineales en una variable. Ecuaciones de la forma: $ax + by + c = 0,\ con\ a \neq 0.$

Propósitos. El alumno:

- Resolverá problemas[23] que den lugar a ecuaciones de primer grado en una variable.
- Interpretar el enunciado del problema.
- Expresará la relación entre los datos y la incógnita mediante la ecuación lineal.
- Interpretar el significado de la solución.
- Generalizará el modelo determinado como solución de un problema, en la solución de otros problemas similares.

---

[23] Como los que se incluyen en los anexos 3, 4 y 5 que se refieren a ecuaciones lineales en una, dos y tres variables respectivamente.

- Comprenderá que las ecuaciones lineales con una incógnita, son un caso especial de igualdad entre expresiones algebraicas.

Sugerencias estratégicas:

En el planteamiento inicial de problemas, se debe cuidar que el alumno perciba la necesidad de trascender el uso de procedimientos aritméticos.

En ejercicios sobre resolución de ecuaciones debe darse en una secuencia que vaya aumentando el grado de dificultad, partiendo de ecuaciones con un solo término, hasta ecuaciones con expresiones racionales.

Se debe propiciar que el alumno analice en cada caso las diferencias del caso nuevo respecto al anterior a fin de que lo transforme al que ya conoce.

Es conveniente utilizar problemas de muy diversos contextos.[24]

Es conveniente seleccionar problemas y ejercicios de ecuaciones para trabajar tanto en clase como en casa.

Temática.

◊ Problemas que dan lugar a ecuaciones lineales en una variable (incógnita). Su resolución por métodos informales.

◊ Ecuaciones lineales con una incógnita, como:

a) Un caso especial de una igualdad entre expresiones algebraicas.

b) Una condición que debe satisfacer un número buscado.

c) Un caso particular de una función lineal.

---

[24] Se pueden considerar problemas como los propuestos en el anexo 3: Problemas que conducen a ecuaciones lineales en una variable.

◊ Resolución de ecuaciones lineales en una variable, por métodos algebraicos:

a) Operar con ambos miembros de la desigualdad.

b) Transponer términos.

◊ Reducción de ecuaciones de los siguientes tipos:

a) $ax = b,\ con\ a \neq 0,\ b \neq 0$.

b) $ax + b = c,\ con\ a \neq 0,\ b \neq 0$ y $c \neq 0$.

◊ interpretación grafica de la solución de una ecuación lineal en una variable.

◊ Construcción del modelo (planteamiento de la ecuación) de diversos contextos que den lugar a ecuaciones lineales con una incógnita.

Unidad 2[25].

Ecuaciones lineales en dos variables.

Contenidos:

Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.

Propósitos. El alumno:

- Creará tablas para explorar las condiciones de un sistema de ecuaciones determinado a partir del enunciado de un problema dado.
- Trazará las graficas que corresponden a cada una de las ecuaciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Verificará que una pareja ordenada de números reales es o no es solución de una ecuación lineal en dos variables.

[25] Esta unidad es susceptible de trabajarse en curso de nivelación (propedéuticos) en el bachillerato.

- Comprenderá que el punto de intersección de dos líneas rectas corresponde a la solución del sistema de ecuaciones dado.
- Distinguirá si la variable que se incluye en cada ecuación de un sistema de ecuaciones dado es discreta o continua.
- Obtendrá de amanera gráfica la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables.
- Identificará la ordenada y la abscisa al origen de una ecuación lineal en dos variables dada.
- Identificará a partir de la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales dado, si es compatible o incompatible.
- Inferirá los tipos de solución (compatibilidad) e incompatibilidad (no solución) de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables, considerando los parámetros de las ecuaciones.
- Transformará sistemas de ecuaciones dados, en otros equivalentes más sencillos por medio de un método que el alumno elija:

i) Suma y resta.

2i) Sustitución.

3i) Igualación.

Comentarios.

- ✓ Los contenidos de permiten una cierta profundización en los conceptos de ecuación – incógnita y función- variable.
- ✓ No se pretende obtener la ecuación de la recta ni estudiarla desde el punto de vista de la geometría analítica.

- ✓ A partir de lo que el alumno ya conoce sobre la graficación de funciones lineales se da un paso mas al manejar las intersecciones de las ecuaciones que forman el sistema con lo ejes coordenados.
- ✓ Con la solución de problemas que dan lugar a sistemas de ecuaciones en dos variables, de manera informal se introducen los conceptos de simultaneidad, sistema de ecuaciones y su solución.
- ✓ Es conveniente que se utilicen problemas que permitan distinguir gráficamente cuando se trata de variable discreta y cuándo de una variable continua.
- ✓ Se debe enfatizar la inexactitud de ciertos métodos de solución y hacer notar la necesidad de utilizar un método que no dependa de la precisión de los trazos.
- ✓ Es importante introducir el concepto de sistemas equivalentes antes de estudiar los métodos algebraicos de solución.
- ✓ Conviene analizar los casos de rectas coincidentes, paralelas[26] y secantes (rectas que se cortan). Su relación con las pendientes, las características algebraicas y su número de soluciones.
- ✓ Es pertinente que el estudiante pueda pasar de un registro a otro (verbal, tabular, gráfico y algebraico).

---

[26] Es importante propiciar que los estudiantes investigue conceptos geométricos y en ese sentido se les sugieren temas de estudio como los que se incluyen en el anexo 3, que permite conocer las formas de concepción de la geometría.

Temática

- ❖ Problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales y no lineales en dos variables. Su solución mediante una tabla.
- ❖ Gráfica de una ecuación lineal en dos variables. Pendiente, ordenada y abscisa al origen.
- ❖ Gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables, en un mismo plano cartesiano. Interpretación geométrica de la solución.
- ❖ Sistemas compatibles (consistentes) e incompatibles (inconsistentes).
- ❖ Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables. Condición de paralelismo.
- ❖ Sistemas equivalentes.
- ❖ Métodos algebraicos de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables: suma o resta, sustitución, igualación, determinantes, matricial.

Unidad 3.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES EN TRES VARIABLES

Contenidos.

Ecuaciones lineales en tres variables reales.

Propósitos. El alumno:

- Reconocerá cuándo un sistema de ecuaciones dado es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas.

- Aplicará el método de reducción para reducir un sistema dado de tres ecuaciones con tres incógnitas a uno de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de este a una ecuación con una incógnita.
- Identificara cuándo un sistema dado de tres ecuaciones lineales en tres variables, está escrito en forma triangular y explicará las ventajes que aporta esta forma para resolverlo.
- Dado un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables, utilizara el método de suma o resta para transformarlo a la forma triangular y a partir de ahí obtener su solución.
- A través de la ultima ecuación de un sistema de ecuaciones escrito en forma triangular, identificará si este es independiente y compatible, o bien si es incompatible.
- Apreciará que el álgebra es útil para obtener información respecto al comportamiento de algunos objetos matemáticas, como el saber si dos graficas se intersectan o no, cuántas veces y en donde.

SUGERENCIAS

- Los estudiantes deben resolver problemas como que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos contemplados en la temática respectiva[27].

[27] El anexo 5 incluye problemas que se pueden resolver mediante sistemas de tres ecuaciones en tres variables (sistemas 3x3)

- Conviene retomar los sistemas 2x2 que el alumno ya conoce a fin de reafirmar el número de soluciones y pasar posteriormente a los sistemas 3x3.
- Graficar sistemas lineales 2x2 para refirmar el método de solución, los números de soluciones, y pasar a los sistemas 3x3.
- Relacionar lo anterior con la configuración triangular del sistema.
- Introducir el método de solución por determinantes de un sistema 2x2 dado, y extenderlo al de orden 3x3.
- A partir de un sistema 2x2 dado, introducir su forma matricial y de ahí extender el método[28] a un sistema 3x3.

TEMÁTICA

- Situaciones que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales.
- Sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables.

a) Compatibles e independientes.

b) Con ecuaciones dependientes.

c) Incompatibles.

- Sistemas de ecuaciones equivalentes.

a) Concepto.

b) Forma triangular

- Métodos de reducción y substitución.

---

[28] Para los determinantes y matrices se puede usar el software matemático incluido en el anexo 10 en CD.

- Método de Gauss – Jordan.
- Métodos matriciales sencillos.

CAPITULO 6. CONCLUSIONES.

La propuesta es viable para obtener un resultado con probabilidades de éxito, como comprobó con el grupo al que se le aplicó la propuesta, incluso se puede señalar el hecho de que la mayoría de alumnos a quienes que se les aplico examen al final del experimento (propuesta)[29] lo aprobaron. Lo que implica un mejor aprendizaje de temas relacionados con las ecuaciones lineales.

La viabilidad de la propuesta se hizo a través del plan de clase para cada una de las sesiones en la que se desarrollo la unidad correspondiente a las ecuaciones lineales[30].

El grupo control se trabajo bajo la concepción tradicional de la enseñanza, el cual tiene la exposición como técnica dominante: Esta forma de manejo del grupo se utiliza desde tiempos inmemoriales en las instituciones educativas, desde inicios del siglo XX pocos pedagogos admiten la validez de este sistema, no obstante un sector amplio de profesores de enseñanza media sigue utilizándolo.

Los métodos activos aplicados al grupo experimental tienen como principio fundamental las concepciones señaladas en este documento. Y corresponden al desarrollo actual de la pedagogía, disciplina que recoge los logros que la

[29] Ver resultados del examen (postest) parcial correspondiente a las ecuaciones lineales. Anexo 8.

[30] El anexo 7 incluye ejemplos de plan de clase.

matemática en particular y las ciencias en general van logrando en su desarrollo histórico[31].

Consideramos desde la perspectiva pedagógica aplicada al grupo experimental que es valido hacer las siguientes afirmaciones:

a) Los resultados que se pueden obtener al tratar con una propuesta didáctica idónea la enseñanza de las ecuaciones son efectivos. Y aplicando esta a otros grupos, probablemente se obtendrán los resultados que ha todo pedagogo y a todo docente de matemáticas elementales(bachillerato) le gustaría obtener.

Considerando aplicar una propuesta equivalente a la propuesta en esta tesis, para lo cual se considera importante que sean pocos los alumnos que resulten con deficiencias, ya que de otra manera seguirá agudizándose el problema de las fallas den la enseñanza de las ecuaciones lineales y en general de las matemáticas

Por lo cual además de lo anterior decidimos aceptar la probabilidad determinada de que se de el caso de tres alumnos deficientes y aceptar los 9 restantes como eficientes de un total de 12.

Determinamos que con 12 alumnos tenemos 220 muestras de tamaño 3.

---

[31] Un ejemplo interesente lo tenemos en las teorías de la información, la psicolingüistica, la simulación por computadora y la inteligencia artificial que sustentan el marco conceptual de los procesos y estructuras cognitivas. La corriente cognitiva mediante el aprendizaje del discurso escrito incide en el diseño de procedimientos que confluyen en mejorar el aprendizaje significativo.

Existen $\binom{6}{3}$ de tener 3 alumnos deficientes a partir de 6 alumnos dados. Por lo tanto, la probabilidad de que en un conjunto de 12 alumnos se encuentren 6 deficientes es de $\frac{20}{220} = \frac{1}{11} \approx 0.0909$

La tabla 19, se construyó de acuerdo con los resultados para cada cierto número de alumnos deficientes.

NUMERO DE ALUMNOS DEFICENTES	NUMERO DE MUESTRAS SIN ALUMNOS DEFICIENTES	PROBABILIDAD DE ÉXITO
0	220	1
1	165	0.75
2	120	0.545
3	84	0.382
4	56	0.255
5	35	0.159
6	20	0.091
7	10	0.045
8	4	0.018
9	1	0.05
10	0	0
11	0	0
12	0	0

Tabla 19

Consideremos un conjunto de 1300 alumnos de bachillerato en grupos de 12 estudiantes, a los cuales se les enseña ecuaciones lineales en forma didáctica adecuada.

Si suponemos que 100 grupos no tienen alumnos deficientes, 100 incluyen un alumno deficiente, 100 contienen 2,..., 100 contienen 12.

Considerando la tabla 19 se tiene que la probabilidad de que se tenga un alumno deficiente en un grupo de 12, es de 0.750 por lo que el número esperado de grupos con un alumno deficiente es de 75. La probabilidad de tener un grupo con 2 alumnos deficientes es de $0.545 x 100 = 54$, etc. Los resultados para cada (de 0 a 10) caso se muestran en la tabla 20.

ALUMNOS DEFICIENTES	PROBABILIDAD DE ÉXITO	NUMERO ESPERADO DE ALUMNOS DEFICIENTES ACPTADOS DE LOS 100 GRUPOS
0	1	0
1	0.75	75
2	0.545	109
3	0.382	115
4	0.255	102
5	0.159	80
6	0.091	55
7	0.045	32
8	0.018	14
9	0.05	5
10	0	0
		587

Tabla 20

b) Se puede inferir [32]que la probabilidad de encontrar un alumno deficiente es muy baja.

Puesto que es importante no tener alumnos deficientes, el aplicar un procedimiento pedagógico adecuado a la enseñanza de las ecuaciones lineales en particular y de las matemáticas en general reduce considerablemente ese número.

[32] Con las tablas y comentarios del anexo 10 se puede comprender la importancia del tratamiento didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones lineales y por ende de cualquier tema tratado pedagógicamente.

Si bien el desarrollo del trabajo actual partiendo de la didáctica general converge en la didáctica para las matemáticas en sus diversas acepciones incidiendo en la resolución de problemas. Se aprecian en este, las tres variedades de aprendizaje descritas por Pierre Greco en su articulo “Aprendizaje y estructuras intelectuales”:

1. Los aprendizajes que el sujeto adquiere determinan una conducta nueva, adaptada a una situación que inicialmente desconoce en su totalidad.

2. El Aprendizaje es tal que el alumno realiza “inducción de leyes” en los que la función es confirmar o desmentir hipótesis.

En algunos casos, particularmente en los que se producen aprendizajes que involucran actividades cognoscitivas complejas, el proceso se inicia cuando aparece el “conflicto conceptual” es decir cuando el interrogante ya no se puede resolver con la información que el sujeto posee. Como es el caso del método de determinantes y el uso de matrices utilizados para resolver ecuaciones de dos o tres ecuaciones con dos o tres incógnitas. En el caso de matrices tanto las operaciones básicas de suma y producto de matrices como el obtener la matriz inversa de una matriz dada, se puede resolver eligiendo sistemas de ecuaciones sencillos que incluyan coeficientes de las variables que sean enteros y próximos a cero, a fin de que el estudiantes pueda efectuar las operaciones que se han realizar sin distraerse en las operaciones a realizar ya que estas se reducen a las operaciones aritméticas conocidas desde la escuela primaria.

Una vez comprendidas las formas de resolver lo esencial de determinantes y matrices, los estudiantes pueden utilizar software matemático[33] para realizar de

[33] Aunque existe software matemático actual, como el maple en su versión 9. El que se incluye en el CD (Linalg) contiene todas lo referente a matrices y

manera automática las operaciones con determinantes y matrices incluyendo para tal caso ecuaciones cuyas variables tienen coeficientes de n cifras(n=2,3,...).

El interés por resolver este conflicto conceptual es lo que se denomina "curiosidad epistémica" o fuerza que impulsa las acciones de resolución.

La existencia de un conflicto conceptual permite tomar conciencia de la existencia de un problema y realizar un consecuente análisis de la situación.

Este análisis permite promover estrategias de acción, donde el sujeto opera transformaciones para llegar al objetivo propuesto.

a) El razonamiento se da cuando el estudiante se limita a combinar esquemas de referencia a estímulos que los contraríen modifiquen. Son todas las operaciones intelectuales que a partir de un punto de partida permiten llegar a afirmaciones y decisiones que se plantean sin referencia a nuevas comprobaciones.

b) La resolución de un problema dado, se da cuando el alumno realiza una combinación de proceso de inducción y deducción. Resolver un problema es abordar la situación con un cierto número de esquemas de respuestas que se intentan aplicar, pero que muestran no ser eficaces y deben ser modificadas o reemplazadas por otros que el alumno invente. Existe un problema cuando el estudiante se encuentra verdaderamente desarmado ante los estímulos, de donde deriva la importancia que se atribuye a la invención.

El aprendizaje es un proceso de adaptación, que va a ir creando estructuras cada vez más complejas, y que el estudiante las va a utilizar cuando las necesite en forma meditada, razonada y no de memoria.

---

determinantes para el bachillerato, es fácil de utilizar y cabe en un disquete de $3\frac{1}{2}$ pulgadas, 1.44 MB.

Un medio educativo eficaz es usar problemas adecuados a la madurez del estudiante de bachillerato, para que piensen adecuadamente y se propicie el razonamiento matemático[34].

En el anexo 8, se expone el examen postet correspondiente a la unidad de ecuaciones lineales al aplicar la propuesta didáctica objeto de esta tesis a dos grupos siendo uno tomado como grupo control y otro como grupo experimental. El grupo control fue tratado en sus diversos aspectos en forma tradicional. El grupo experimental fue objeto de un tratamiento didáctico de acuerdo a lo expuesto en esta tesis. Para su evaluación de acuerdo al examen diagnostico y al examen postet se considero lo que se estable en la definición de la implicación (proposición condicional) lógica que se muestra en la tabla 21.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

[34] .
Anexo 3, problemas que conducen a ecuaciones lineales en una variable. Anexo 4 problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales en dos variables.

Anexo 5. Problemas que se pueden resolver mediante sistemas de tres ecuaciones en tres variables.

Tabla 21

En la tabla 19, V significa verdadero, F significa falso. P y Q son proposiciones cualesquiera. $P \Rightarrow Q$: “P implica Q”, que puede expresarse también como si P entonces Q, y en la cual P es la hipótesis (antecedente) y Q la tesis (consecuente). Además:

Si P implica Q

Y P entonces Q

Planteado de manera sencilla a la investigación diría que: si se da tratamiento didáctico adecuado a un grupo de bachillerato respecto a la enseñanza de las ecuaciones lineales los alumnos aprenden este tema (contenido) de forma tal que lo dominan, de acuerdo a los requerimientos propios del mismo. Los resultados obtenidos en el examen parcial sobre ecuaciones lineales aplicado los grupos experimental y control se exponen en las tablas 23, y 24 así como en los histogramas correspondientes.

6.1 GRUPO EXPERIMENTAL

ALUMNO	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E14	E17
ACIERTOS	10	20	15	10	24	23	16	10	17	23	21	24	15	21

E18	E19	E20	E21	E22	E23	E24	E25	E26	E27	E28	E29	E30	E32	E33	E31

23	23	18	20	19	18	23	25	23	19	21	20	20	23	21	21

E34	E35	E36	E37	E38	E39	E40	E41	E42	E43	E44	E45	E46	E47	E48	E49	E50
24	23	25	18	15	19	21	20	23	18	21	24	23	19	21	20	22

Tabla 22

PROMEDIO	20.06
MODA	23
MEDIANA	21

6.2 Grupo

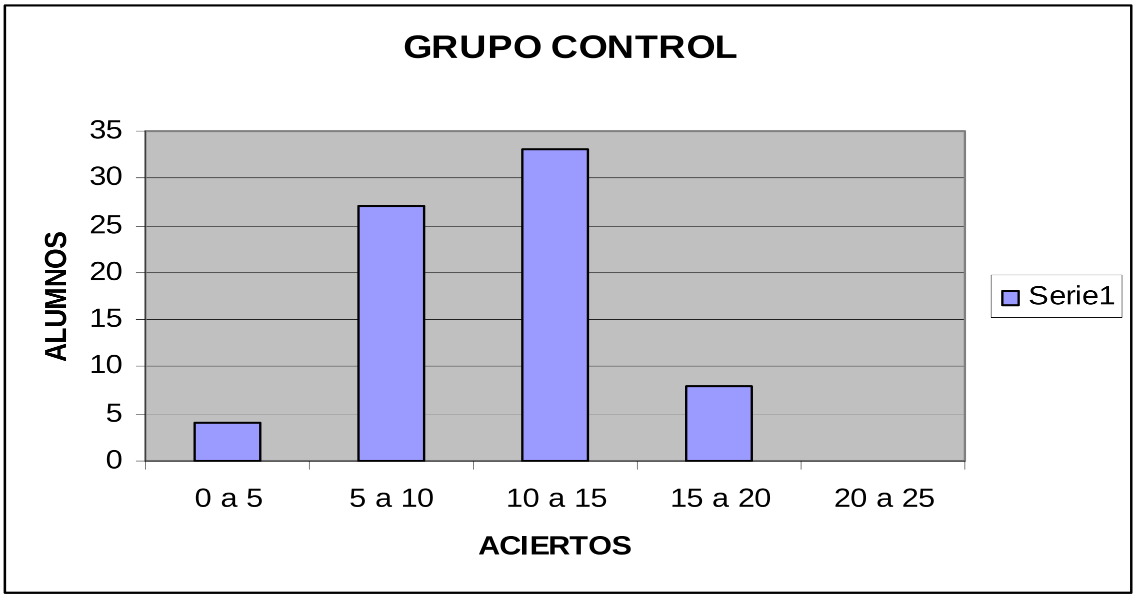
GRUPO CONTROL

ALUMNO	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15
ACIERTOS	10	12	12	10	13	15	10	9	9	10	12	15	17	15	14

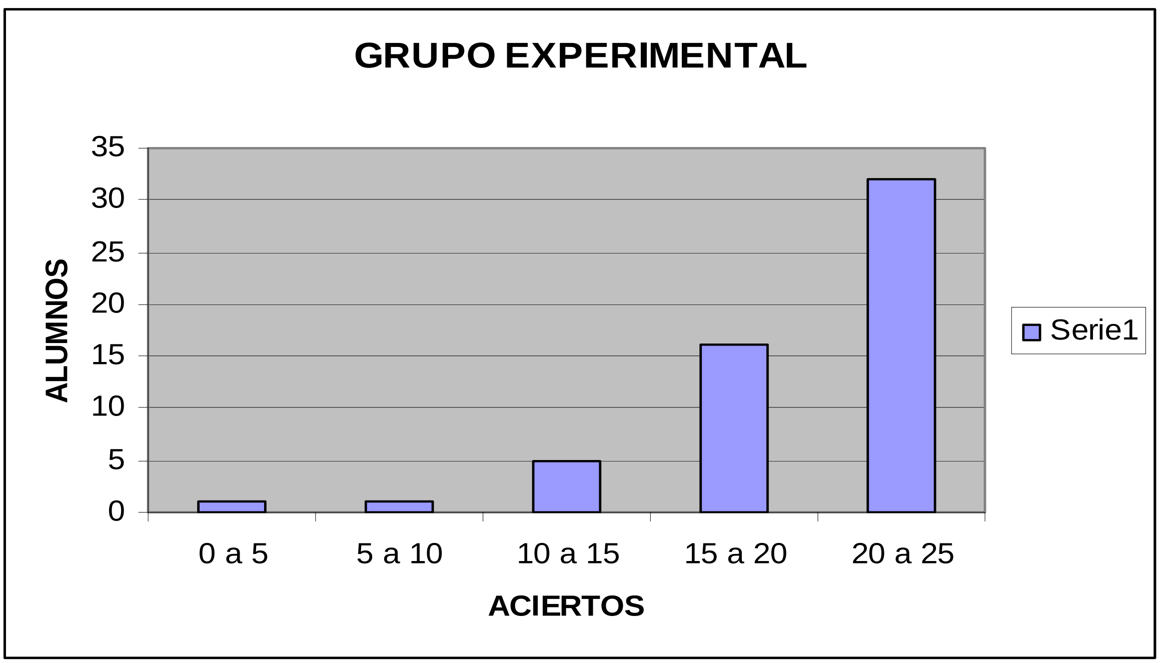
C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24	C25	C26	C27	C28	C29	C30	C31	C32
12	13	12	16	17	12	10	9	12	10	9	12	10	12	12	10	12

C33	C34	C35	C36	C37	C38	C39	C40	C41	C42	C43	C44	C45	C46	C47	C48	C49	C50
15	10	12	10	12	12	12	12	10	15	15	14	10	9	13	10	12	14

Tabla 23



Histograma grupo control



Histograma grupo experimental

7 BIBLIOGRAFIA

ÁLVAREZ, CARLOS ET AL. El silencio del saber. ed., Nueva Imagen, México, 1979.

ARMSTRONG, THOMAS, *Las Inteligencias Múltiples en el Aula,* Buenos Aires, ed. Manantial, 1999, 238 p.

AUSUBEL, DAVID P. *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. ed., Trillas, México, 1976.

BACHELARD, GASTON. *El compromiso racionalista.* ed., Siglo XXI, México, 1976.

BALDOR, AURELIO. *Álgebra.* 1ª ed, 1983, ed., México, 1983.

BARNNETT RAYMOND A. *Precálculo: álgebra, Geometría Analítica y trigonometría*, ed. Limos, México, 1992.

BELTH, MARC. La educación como disciplina científica. ed., Ateneo, Buenos Aires, 1973.

BENNETTI ALBERT B, JR. ET AL. *Mathematics an informal approach.* Boston, 1979.

BOSCH G CARLOS, ET AL. *Álgebra*. ed. Santillana, México, 1998.

BERNABE FLORES, M. *Curiosidades matemáticas*. ed. Labor, Barcelona, 1990.

BOLT, B. *Divertimentos matemáticos*. ed. Labor, Barcelona, Barcelona 1987.

BOLT, B. *Actividades matemáticas*. ed. Labor, Barcelona, Barcelona 1989.

IDEM. Más *actividades matemáticas*. ed. Labor, Barcelona, Barcelona 1988.

IBIDEM. Aun más *actividades matemáticas*. ed. Labor, Barcelona, Barcelona 1989.

BRANDRETH, G. *Juegos con números*. ed. Gedisa, Barcelona, 1989.

IDEM. *Acertijos Creativos*. ed. Selector, México, 1997.

CAMOUS, H. Problemas y juegos con la matemática. ed. Gedisa, Barcelona, 1999.

CAMPBELL, B. Y CAMPBELL, D. Inteligencias Múltiples en el Aula. Usos prácticos para la enseñanza y el aprendizaje. Buenos Aires, ed. Troquel, 2000,

COSSU, MENOTTI. *Juegos de la mente.* ed., Pirámide, Madrid, 1990.

CORBALAN, F. *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato.* ed. Síntesis, Madrid 1994.

CROUSE, R. J. ET AL. *mathematics teacher.* May, 1991.

DÍAZ BARRIGA, F. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. ed. Mac. Graw Hill, México, 1998.

DÍAZ JOSÉ LUIS. *El ábaco, la Lira y La rosa, Las regiones del conocimiento.* (La ciencia para todos/152). ed., SEP-Fondo de Cultura Económica, México, 1997.

DOLCIANI MARY P. ET AL. *Álgebra Moderna: Estructura y método*. Libro 1, ed. Publicaciones cultural, México, 1986.

E. I, IGNATIEV. *En el reino del ingenio.* Ed., Mir., Moscú, 1986.

EUCLIDES. *Elementos de geometría, III-IV-V.* (Biblioteca Scritorum Graecorum et Romanorum Mexicana). ed., UNAM (Publicaciones de la coordinación de Humanidades), México, 1992.

F., AGOSTINI. *Juegos de Lógica y matemáticas*. ed. Pirámide, Madrid, 1987.

FERNÁNDEZ SUCASAS ET AL. *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*. ed. Síntesis, Madrid, 1989.

FOURREY, E. *Rècrèations , aritmètiquse.* ed., Libraire Nony, París, 1901.

FULLER, GORDON. *Álgebra elemental*. ed. CECSA, 1977.

GARCÍA AZCÁRATE, ANA. *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas.* ed., García, Madrid, 1999.

GARCIA SOLANO, R. *Matemáticas mágicas.* ed. Escuela Española, Madrid, 1988.

GARCIA, J. *Carnaval matemático.* ed. García editores.

GARDNER, HOWARD, *Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica.* México, ed. Paidós, 1995, 313 p.

GOBRAN ALFOSE. Álgebra elemental. ed. Grupo Editorial Iberoamericana, 1997.

GORDON FULLER. . *Álgebra elemental*. ed. CECSA, México, 1986.

GROVAN, ALFONSE, *Algebra elemental.* tr., Eduardo Ojeda. ed., Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

GRUPO AZARQUIEL. *Matemáticas 1º de E. S. O .*ed. De la Torre, Madrid, 1996.

IDEM. *Matemáticas 2º de E. S. O .*ed. De la Torre, Madrid, 1997.

IBIDEM. *Matemáticas 3º y 4º de E. S. O .*ed. De la Torre, Madrid, 1998.

GUIK, E. YA. *Juegos matemáticos recreativos.* ed., Mir., Moscú, 1987.

HEAT, THOMAS L., SIR. The thirteen Books of Euclid's Element's. Dover Publications Company, Amsterdam, 1960.

HOLT, M. *Matemáticas recreativas 2ª* ed., Martínez Roca, Barcelona, 1988.

IDEM. *Matemáticas 2º de E. S. O .*ed. De la Torre, Madrid, 1997.

IBIDEM. *Matemáticas 3º y 4º de E. S. O .*ed. De la Torre, Madrid, 1998.

HOSCOVICS, NICOLAS. Constructing Meaning for concept of Equation. Mathematics teacher, Nov., 1980.

KLEINE, MORRIS. El fracaso de la matemática moderna. ed. Siglo XXI editores, México, 1976.

KRIATCHIK, M. *Matemáticas recreativas.* ed., El Ateneo, Buenos Aires, 1946.

KRIATCHIK, M. *Matemáticas recreativas.* ed., El Ateneo, Buenos Aires, 1946.

LAFOURCADE. D., PEDRO. *Evaluación de los aprendizajes*. ed. kapelusz Buenos Aires, 1973.

LARSON, RONALD E. ET AL. *Álgebra elemental*. ed. Publicaciones Cultural, México, 1996.

LANDER, I. *Magia matemática.* ed., Labor, Barcelona, 1985.

LARROYO, FRANCISCO, Historia comparada de la educación en México. ed. Porrua, México, 1973.

LEHMANN CHARLES. *Geometría analítica*. Ed. Limusa, México, 2002.

LÓPEZ DE MEDRANO, SANTIAGO. *Modelos matemáticos.* ed., ANUIES, México, 1972.

IDEM. *Lenguajes Simbólicos.* ed., ANUIES, México, 1972

IBIDEM. *Sistemas de ecuaciones.* ed., ANUIES, México, 1972.

LLUIS RIERA, EMILIO ET AL. *Apuntes de geometría*. ed., CECSA, México, 1975.

MERANI, ALBERTO. *Psicología y* Pedagogía. (*Las ideas pedagógicas de Henry Wallon)* .ed., Grijalbo, México, 1969.

MCKENZIE, NORMAN ET. AL. *Aprendizaje y enseñanza*, tomo III, ed., Sepsetentas, México, 1874.

N. ABBAGNANO. *Historia de la pedagogía.* ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1964.

NEWMAN, JAMES R. Matemática, Verdad, Realidad. ed., Grijalbo, Barcelona, 1974.

N. ABBAGNANO, ET AL. *Historia de la pedagogía*. ed. Fondo de Cultura Económica, México 1964.

NOVOKV, VADIMIR. *Rey, Dama, Valet. (Biblioteca Nabokov, Panorama de narrativas).* tr. Jesús Pardo, *ed.,* Anagrama, Barcelona, *1987*.

PERELMAN, Y. L. *Algebra recreativa.* ed., Mir, Moscú, 1980.

IDEM. *Matemáticas recreativas 3.* ed., Martínez Roca, Barcelona, 1988.

PIAGET JEAN. *La enseñanza de las matemáticas modernas.* ed., Alianza Editorial, Madrid, 1978.

IDEM. *Psicología, lógica e inteligencia.* ed. Psique. Buenos Aires, 1973.

IBIDEM. Psicología del espacio. ed. Psique. Buenos Aires, 1977.

PIAJET, ET AL. El *desarrollo de la inteligencia*. ed. Psique. Buenos Aires, 1977.

PIAGET ET AL. *Perspectivas del espacio*. Seix Barral, Madrid, 1978

PIAGET, JEAN. *Seis estudios de psicología.* ed., Seix Barral, Madrid, 1978.

PINGAUD, F. ET AL. *50 Jeux avec du papier et des crayons.* ed., Editions du rocher, Monaco, 1984.

PONCARE, HENRY. Filosofía de la ciencia. (Nuestros clásicos). ed., UNAM, México, 1964.

PUIG ADAM, P. La matemática y su enseñanza actual. ed., M. E. C., Madrid, 1960.

ROSE, J. *La revolución cibernética.* tr., Sergio Fernández Everest. 1ª ed, 1974, ed., Fondo de Cultura Económica, México, 1974.

SANTALÓ SORS, MARCELO. *Matemática para nuestra época. (Revista matemática, número V, enero de 1959). ed., Sociedad Matemática Mexicana, México 1959.*

SILVERMAN, ROBERT. *Enseñanza programada. Como preparar un programa,* ed., Pax, México, 1968.

SKOLNIK, DAVID ET AL. *Dynamic solid geometry.* ed., D. Van Nostrand Company, Inc. New Jersey, 1952.

SAWYER, W. W .An Unorthodox Point of entry, vision in Elementary Mthas., ed. Penguin Book, New York, 1964.

SCHOENFELD, ALAN. Heuristic in the classroom, problem solving in school Mathematics, NCTM, ed. Yearbook, New Cork, 1980.

SMILLAN, RAYMOND. *What is the name of this Book? (the riddle of dracula and other logical puzzles).* ed., Prentice Hall, New jersey, 1978.

STEINHAUS, H. *Instantáneas matemáticas.* ed., Salvat, Barcelona, 1986.

STUDAM, MARILYN. Untangling cloes from research on problem solving, problem solving in school mathematics. ed. NCTM, Yearbook, New York, 1980.

TAHAN, M. *El hombre que calculaba.* ed., Ediciones Antalbe, Barcelona, 1982.

THE TEERTHIN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS. (Volume 1, introduction and Books I y II).tr. Heat, Thomas L, Sir, ed., Dover publications, Inc., 2ª ed., (1956)

VILLALPANDO, JOSÉ MANUEL. *Pedagogía comparada*. Ed. Porrua, México 1972.

VILLORO, LUIS. Creer, saber y conocer. ed., Siglo XXI, México, 1983.

VIVES, P., *Juegos de ingenio2.* ed., Martínez Roca, Barcelona, 1986.

VIGOTSKI, V. *Psicología. ed., Mir, Moscú, 1980.*

WELLS, D. *The penguin dictionary of curios and interesting numbers.* ed., Penguin Books, London 1987.

WETHERFORD WILLIS, D. *Fines de la educación superior.* ed., UTEHA, México, 1963.

WILDER, RAYMOND l., introduction to the Foundation of mathematics, 2ª ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

ZUBIETA BADILLO, GONZALO. Geometría dinámica (*Enseñanza de las matemáticas con tecnología).* ed., SEP (educación secundaria).

8. ANEXO 1. EXAMEN DIAGNOSTICO.

EXAMEN DE DIAGNOSTICO DE MATEMÁTICAS SECCIÓN CORRESPONDIENTES A ECUACIONES LINEALES.

1. Una ecuación lineal es de la forma:

$a)\ ax+by+c=0\ (\ ),$ b) $ax+by+zc+d=0(\ ),$ c) Las dos anteriores ( ) d) ninguna de las anteriores ( ).

2. En una ecuación lineal dada, escrita en términos de x, y, Las variables se clasifican como sigue:

a) x es variable dependiente, y es variable independiente ( ) b) x es Variable independiente, y es variable dependiente ( ) c) ninguna de las Anteriores ( )

3. Una ecuación lineal en dos variables se corresponde:
   a) Con una línea recta. ( ) , b) Con un plano ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )
   b)

4. La ecuación $3x+4y+1=0$, tiene:

a) Una solución única ( ) b) Un conjunto infinito de soluciones ( ) c) No tiene solución ( )

5. Las ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x+4y+1=0 & (1) \\ 6x+8y+2=0 & (2) \end{cases}$, son.

a) Equivalentes ( ) b) Inconsistentes ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

6. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5x+7y=10 & (1) \\ 4x+7y=-12 & (2) \end{cases}$ es

a) Soluble ( ) b) Irresoluble ( )

7. Los métodos de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones en dos variables son:

a) Reducción ( ) b) Sustitución ( ) c) Igualación ( )

Los tres anteriores ( ) d) Ninguno de los anteriores ( )

8. Para resolver por suma o resta el sistema $\begin{cases} 9x+7y=25 & (1) \\ 8x+6y=-15 & (2) \end{cases}$, se requiere determinar el:

a) Máximo común divisor (m, c, d) de 9 y 8 o bien el de 7 y 6. ( )

b) Mínimo común múltiplo (m, c, m) de 9 y 8 o bien el de 7 y 6. ( )

c) Ninguno de los anteriores ( )

9. Para resolver el sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$ por igualación, primero se debe:

a) Despejar x en ambas ecuaciones ( )

b) Despejar y en ambas ecuaciones ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

10. A fin de resolver cualquier sistema de ecuaciones, como el que se da a continuación $\begin{cases} 10x+13y=-17 & (1) \\ 23x-12y=23 & (2) \end{cases}$, mediante sustitución, habiendo despejado una incógnita de una de las dos ecuaciones, el resultado obtenido de sustituye en:

a) La misma ecuación de donde se despejo ( ) b) En la otra ecuación ( )

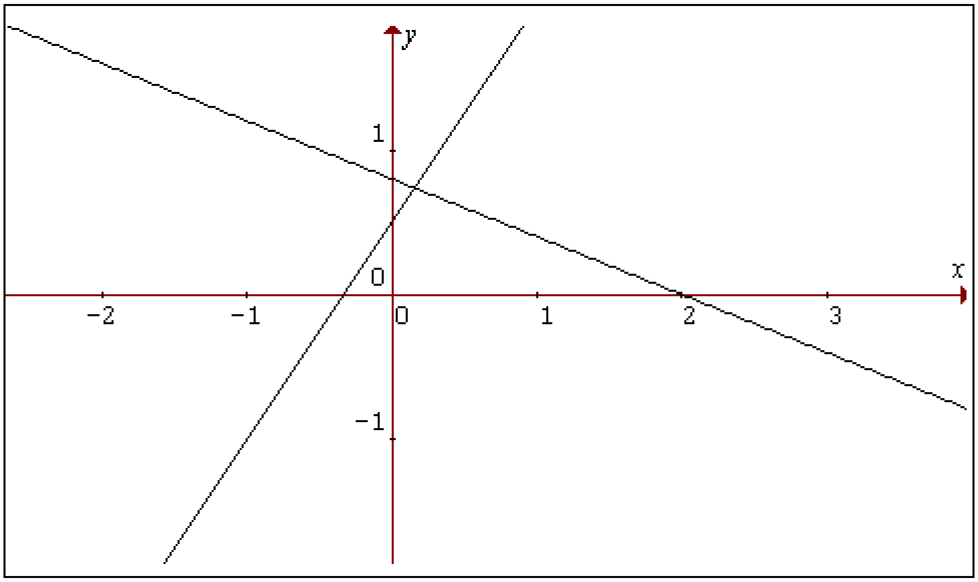
11. Un determinante cuadrado de orden 2x2 se define como sigue:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$ b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - a_1b_2$ c) ninguna de las anteriores ( )

12. La solución de $\begin{vmatrix} 130 & 457 \\ -392 & 400 \end{vmatrix}$ es:

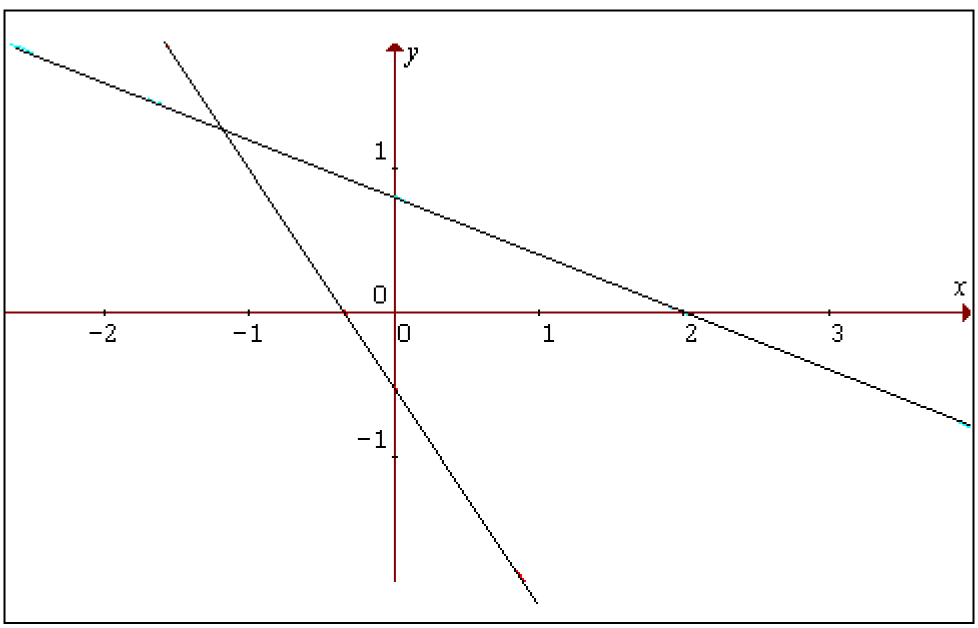
a) 231144 ( ) b) -231144 ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

13. La solución grafica del sistema $\begin{cases} 2x+5y=4 & (1) \\ 3x-2y=-1 & (2) \end{cases}$ es:



GRAFICA 1

a) ( )



GRAFICA 2

b) ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

14. Al resolver el problema siguiente: “La suma dos números es 48 y su diferencia es 35. El modelo matemático(planteamiento) que se obtiene es:

a) $\begin{cases} x+y=48 & (1) \\ x-y=35 & (2) \end{cases}$ ( ) b) $\begin{cases} x+y=48 & (1) \\ y-x=35 & (2) \end{cases}$

c) Las dos anteriores ( ) d) Ninguna de las anteriores ( )

15. La solución del sistema $\begin{cases} 3x+2y+5z=92 & (1) \\ 4x-2y+6z=100 & (2) \\ 7x+7y-9z=500 & (3) \end{cases}$ es.

a) $x=\frac{7046}{147}$,y=$\frac{988}{147}, z=-\frac{279}{21}$ ( ) b) $x=\frac{7046}{147}$,y=-$\frac{988}{147}, z=\frac{279}{21}$ ( )

c) $x=-\frac{7046}{147}$,y=$\frac{988}{147}, z=\frac{279}{21}$ ( ) d) Ninguna de las anteriores ( )

16. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 204x+345y+125z=745 & (1) \\ 277x+476y+602z=340 & (2) \\ 865x-123y-129z=-160 & (3) \end{cases}$ el determinante del sistema es:

a) $\begin{vmatrix} 204 & 345 & 125 \\ 277 & 476 & 602 \\ 665 & -123 & 129 \end{vmatrix}$ ( ) b) $\begin{vmatrix} 345 & 204 & 125 \\ 476 & 277 & 602 \\ -123 & 665 & 129 \end{vmatrix}$ ( ) c) $\begin{vmatrix} 204 & 125 & 345 \\ 277 & 602 & 476 \\ 665 & 129 & -123 \end{vmatrix}$

d) Los tres anteriores(a, b y c) ( ) e) ninguno de los anteriores ( )

17. La matriz extendida para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 44x+65y+87z=74 & (1) \\ 77x+32y+60z=-40 & (2) \\ 86x-22y-19z=18 & (3) \end{cases}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 44 & 65 & 87 & . & 74 \\ 77 & 32 & 60 & . & -40 \\ 86 & -22 & -19 & . & 8 \end{bmatrix}$ ( ) $\begin{bmatrix} 44 & 65 & 87 \\ 77 & 32 & 60 \\ 86 & -22 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 \\ -40 \\ 18 \end{bmatrix}$

c) ninguna de las anteriores ( )

18. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es matriz:

a) Idéntica ( ) b) Escalonada ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

19. Dado un sistema de 2 0 3 ecuaciones con dos o tres incógnitas, el resultado de que Δ_s sea igual a cero implica que el sistema dado:

a) No tiene ninguna solución ( ), b) Tiene muchas soluciones ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

20. La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x+5y+=74 & (1) \\ 9x+6y=-5 & (2) \end{cases}$ es:

a) $x=-22.\overline{3}, y=32.6666666666666666666666666667$ ( )

b) $x=-22.\overline{3}, y=32.\overline{6}$ ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

21. En el sistema $\begin{cases} 3x+2y=q \\ 2x+y=r \end{cases}$ l:

a) Las incógnitas son x, y ( ) b) Las incógnitas son p, q ( )

22. La matriz transpuesta de $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ es la matriz:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ ( ) b) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ ( ) c) ninguna de las anteriores ( )

23. La matriz inversa de $\begin{vmatrix} -20 & 15 \\ 40 & 11 \end{vmatrix}$ es :

a) $\begin{vmatrix} 0.01829 & -00341 \\ 0.04878 & 0.024339 \end{vmatrix}$ ( ) b) $\begin{vmatrix} 00341 & -0.01829 \\ 0.04878 & 0.02439 \end{vmatrix}$ ( ) c) ninguna de las anteriores ( )

24. Dado la ecuación $5x+8y+=-4$, completa la tabla siguiente:

x	-5	-4.5	-4	-3.5	-3									
y														

Tabla 24

25. Despeja y de la ecuación: $\frac{5x}{4}+\frac{8y}{5}=2$

9. ANEXO 2. LA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Un aspecto importante es considerar algunos aspectos sobre la geometría que necesariamente influyen en la representación de las ecuaciones lineales y de sus soluciones. La geometría enseñada actualmente en el nivel medio del sistema educativo es el resultado de siglos de desarrollo matemático. Los matemáticos de la *Grecia clásica* dejaron su impronta con la deducción como método ingente para la obtención de nuevos resultados. Un cambio importante se produjo en el siglo VI A. C., también influyo el procedimiento de estructuración del cuerpo de conocimientos conocido como *"Los elementos de Euclides"*.

Este proceder no se limitó a la geometría, otros cuerpos de conocimiento intentaron vincularse con ese patrón. Así, por ejemplo Arquímedes utilizó el mismo método en sus libros en los que fundamenta la mecánica teórica

Aun en los escritos de Aristóteles encontramos una formulación acerca de lo que debe ser cualquier ciencia demostrativa.

En el devenir del continuo del tiempo encontramos que él método establecido en los Elementos de Euclides a permeado todo ideal que tiende al estudio riguroso de todo conocimiento. Esto se puede comprobar analizando algunas obras tales como "Los principia de Newton" (1686), La obra de Lagrange acerca de la mecánica analítica (1778) es otro ejemplo de la influencia de los Elementos de Euclides. También en los tratados de ética de Spinoza, se utilizan los mismos principios de articulación exposición y demostración. En el siglo XX se intenta estructurar toda la matemática fundamentándola en el método axiomático.

En los elementos de Euclides se encuentran definiciones como las siguientes:

1. Un punto es aquello que no tiene parte.
2. Una línea es una longitud "sin ancho".
3. Una superficie es aquello que tiene únicamente longitud y ancho.
4. Un ángulo plano es la inclinación entre dos rectas de un plano que se corta en un punto y que no están contenidas en una línea recta.

…, 23. Líneas rectas paralelas son aquellas que siendo extendidas indefinidamente en el mismo plano, no se cortan en ninguna de las direcciones.

Cabe señalar que en la *matemática moderna* no se definen los términos a partir de los cuales se van a construir las nociones restantes.

Los términos indefinidos vienen a ser una especie de alfabeto, en el lenguaje matemático, con los que se construyen todos los demás términos de toda teoría matemática. Dando términos primarios lo único que se afirma es que ellos se relacionan entre si mediante proposiciones, los axiomas. Todos los objetos o conceptos que también se toman como iniciales que verifiquen tales afirmaciones, se plasman en un modelo de la teoría axiomática específicamente creada.

Actualmente las teorías matemáticas modernas al contrario de los Elementos de Euclides, se inician con una lista de términos no definidos[35]. Las definiciones se presentan mas adelante, para sustituir un nuevo término más simple, a una expresión creada a partir de los términos no definidos,

[35] Al respecto, a los estudiantes del bachillerato se les puede recomendar el estudio del libro: Santiago López de medrano. Teoría de gráficas. Ed. ANUIES, México, 1972.

posteriormente, en las nuevas definiciones se construyen al considerar estas últimas y algunos otros términos no definidos antes.

Las definiciones expuestas por Euclides al principio de los elementos son descripciones empíricas simples, similares a las se dan en los diccionarios. En los que A se define en función de B, B en función de C y finalmente C se define en función de A.

Como ejemplo considérese la definición euclidiana de línea recta: “La que descansa igualmente sobre todos sus puntos”

En los elementos de Euclides después de las veintitrés definiciones iniciales, se encuentran los postulados:

1) Es posible trazar una línea recta que vaya de un punto dado a otro, también dado.
2) Es posible trazar una sola línea recta a partir de un segmento finito.
3) Es posible construir un círculo con cualquier punto (centro) y una distancia (radio).
4) Los ángulos rectos son iguales entre si.
5) Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos interiores menores que dos rectos, las dos líneas si se prolongan, se cortarán del lado que están los ángulos cuyas suma es menor que dos rectos.

Más adelante se introducen las nociones comunes, las que son a saber:

I. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
II. Si a iguales sumas lo mismo, obtendremos iguales.

III. Si a iguales restamos lo mismo, obtendremos iguales.

IV. Cosas que coinciden con otras son iguales entre sí.

V. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Los postulados I – IV, manifiestan la posibilidad de hacer construcciones con regla y compás. Lo cual es verificable empíricamente. También se puede constatar que experimentalmente que la suma de dos ángulos es menor que dos ángulos rectos. No obstante lo que escapa a la posibilidad sensorial de cualquier persona es lo siguiente:"si se prolongan dos rectas paralelas, no se cortarán…"

La asimetría anterior se refuerza al considerar que Euclides pudo pasar sin el quinto postulado a tratar las demostraciones de las primeras veintiocho proposiciones, entre las que se mencionan:

Proposición 1- 27: Si una recta, que corta a otras dos, forma ángulos alternos internos iguales, dichas rectas serán paralelas.

Proposición 1- 28: si una recta, que corta a otras dos, forma ángulos rectos correspondientes iguales o internos colaterales iguales a dos rectas, dichas rectas serán paralelas.

Estas proposiciones afirman que si la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos, entonces las rectas son paralelas, es decir no se cortan.

La ***simetría*** es perfecta: si se niegan las premisas (que la suma sea igual a dos rectos), se puede pensar que también se deben negar las consecuencias (las rectas no son paralelas), tal y como lo afirma el quinto postulado.

Un espíritu de simetría y de congruencia exigiría la demostración del quinto postulado.

La preocupación de poder probar el quinto postulado se ahondo por la continua reflexión de los matemáticos por el mismo en el transcurso del tiempo. Como ejemplo se puede leer, en los comentarios de Proclo (31 años A. C.), aparece el axioma de “Playair” (Véase Proposición 1- 27[36], libro 1, p. 22º):

“Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela”.

Si se parte del Teorema de Tales[37] , se puede, con el uso de otras proposiciones, deducir el teorema acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo; y viceversa, partir de esto último para demostrar el Teorema de Tales. Así, mismo si se admite el quinto postulado, se puede probar el axioma “Playfair” y, al revés, si se comienza con este, se puede demostrar el quinto postulado.

En los textos de matemáticas modernas, se prefiere el axioma “Playfair” en lugar del quinto postulado.

El quinto postulado se puede sustituir con una de las siguientes alternativas:

- Si una línea intersecta una de las líneas paralelas también cortará a la otra.
- Líneas paralelas a una tercera línea son líneas paralelas.

En lo libros de Proclo se encuentra esta forma de escribir el axioma Playfair.

❖ Existen líneas rectas que en todos lados son equidistantes (Pasidonius y Geminus).

---

[36] THE TEERTHIN BOOKS OF EUCLID’S ELEMENTS.(Volume 1, introduction and Books I y II).tr., Heat, Thomas L, Sir, ed., Dover publications, Inc., 2ª ed., (1956)

[37] Tales es uno de los siete sabios de Grecia, los otros seis son: Solón, Quilón, Bias, Pitáco, Periandro y Cleobulo.

- Existe un triangulo en el que la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos (Legendre).
- Dada cualquier figura, existe una figura similar a ella de cualquier tamaño que se quiera (Wallis, Carnot, Laplace).
- A través de cualquier punto que se encuentre dentro de un ángulo menor que las dos terceras partes de un ángulo recto, siempre se puede trazar una línea recta que corte los dos lados del ángulo (Legendre).
- Dados tres puntos no colineales, existe una circunferencia que pasa por ellos (Legendre, W. Bolyai).
- Si dada cualquier área, se pudiera probar que existe un triángulo rectángulo que la “contenga”, se estaría en la posibilidad de probar perfecta y rigurosamente toda la geometría (Gauss en una carta a W. Bolilla, 1799).
- Si en un cuadrilátero tres de los ángulos son rectos, el cuarto es también recto (Clairut, 1741).
- Dos líneas paralelas interceptan, en cada transversal que pase por el punto medio de un segmento incluido entre ellas, en otro segmento cuyo punto medio es el punto medio del primer segmento (Ingrami, 1904).

La lista anterior permite apreciar que durante mucho tiempo, la independencia del quinto postulado de Euclides fue una preocupación de los matemáticos

10. ANEXO 3.

PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE.

1. El perímetro de un rectángulo es de 96, si el largo es 8 más que el ancho. ¿Cuánto mide cada lado?
2. Santiago tiene $500.00 y Guillermo $200.00. Si ambos reciben la misma suma de dinero, Santiago tiene $\frac{3}{5}$ de lo de Guillermo. ¿Cuál es la suma?
3. Un adulto pone 30 problemas de matemáticas a su hijo con la condición de que por cada problema que resuelva gana $50.00 y por cada problema que no resuelva perderá $16.00. Después de trabajar en los 30 problemas el joven recibe $1256.00 ¿Cuántos problemas resolvió y cuantos no?
4. Un hombre recorrió 1280 kilómetros. En auto recorrió una distancia triple que ha caballo y a pie, 300 kilómetros menos que a caballo. ¿Cuántos kilómetros recorrió de cada modo?
5. Un terreno tiene triple largo que ancho. Si el largo disminuye en 50 y el ancho aumenta en 30, la superficie no varia. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
6. la diferencia de dos números es 49 y su suma es el triple de su diferencia. ¿Cuáles son los números?

7. ¿Cuánto mide un ángulo interior de una estrella de 5 puntas?
8. Una persona compró 67 discos duros de a \$800.00 y de a \$1100.00, pagando por todos \$29000.00 ¿Cuántos discos de cada precio compro?
9. Dividir 289 en tres partes tales que la segunda sea el doble de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 40.
10. Una persona gasta $\frac{3}{5}$ de su sueldo anual en atenciones de su casa, $\frac{1}{8}$ en ropa, $\frac{1}{20}$ en paseos y ahorra \$3000.00 al año. ¿Cuál es su sueldo anual?
11. En una gasolinera el dueño gana el 40% usando medidas falsas. ¿Cuál es la medida real de su unidad de un litro?
12. Un estudiante compró cierto número de libros por \$5000.00, Si hubiera comprado $\frac{1}{4}$ mas del número de libros que compró por el mismo dinero, cada libro le habría costado \$25.00 menos ¿Cuántos libros compró y cuanto pagó por cada uno?
13. Problema escalones y correlones.[38] Pedro y Luís suben caminando por una escalera mecánica en movimiento. Cuando pedro llega arriba ha subido 28 escalones, mientras que Luís, quien camina con una velocidad que es el doble de la de Pedro, ha subido 42. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

---

[38] Jueves 9. Anne Alberro. Problemas del calendario matemático 2003, (Problemas de enero), pp. 2 y 37. ed. Subsecretaria de educación Superior e Investigación Científica, Dirección general de educación superior.

11. ANEXO 4.

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES (SISTEMAS 2X2).

1. Una palanca es equilibrada en un fulcro (punto de apoyo de la palanca) con un peso de 40 Kg., a un extremo y un peso de 25 Kg., al otro. Si un se agregan 15 Kg., al peso más ligero, el fulcro debe moverse 3/4 m., para equilibrar la palanca de nuevo. Encuentre las longitudes de los brazos del remolque al principio.

2. En la figura cualquier círculo es tangente a los otros dos. ¿Cuál es el radio de cualquier circulo? si $AB = 4cm, AC = 5cm$ y $BC = 7cm$.

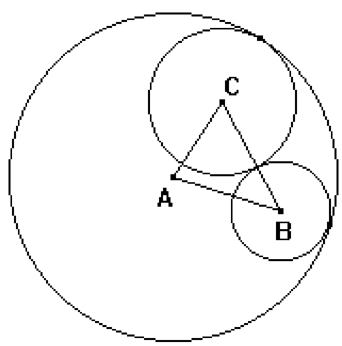


Figura 4

3. Dos números están en la relación de 7 a 8. si el menor se aumenta en 3 y el menor se disminuye en 7 la relación es de 10 a 17 ¿Cuáles son los números?

4. La juventud de Diofanto duró una sexta parte de su vida. Se dejó crecer la barba después de un doceavo más. Al pasar un séptimo más de su vida, se caso y cinco años después tuvo un hijo. El hijo vivió exactamente la mitad que Diofanto, que murió cuatro años después de su hijo. Todos estos son los años que vivió Diofanto. ¿Cuántos años vivió Diofanto?[39]

5. Una aleación dada contiene 10% zinc y 20% cobre. Cuántas libras de zinc y de cobre deben fundirse con 1000 lb., de sal disuelta. ¿Qué volumen debe tomarse de cada tanque y debe combinarse para constituir 40 gal de solución que tiene una concentración de sal de 1.5 lb. /gal?

6. La Temperatura Fahrenheit = m (temperatura centígrada)+n, o F = mC+n, donde m y n, son constantes. En una presión de atmósfera, el agua del punto de ebullición es de 212 F o 100C y el punto helado de agua es de 32F o 0=C. a) Determine m y n. ¿b) Qué temperatura en grados Fahrenheit corresponde a -273C, la temperatura más baja asequible?

7. Cuándo empiezan a jugar M y N, la relación de lo que tiene M y que tiene N es de 15 a 36. Después de que M ha ganado $100.00 a N, la

[39] Diofanto de Alejandría fue un prominente matemático griego que probablemente vivió un par de siglos antes de nuestra era. Poco se sabe de su vida destaca una rima que apareció en una colección de problemas matemáticos griegos, que forman el enunciado de este problema 4.

relación de lo que tiene M y lo que le queda a N es de 9 a 10. ¿Cuánto tenia al empezar a jugar cada uno?

8. La suma de las cifras de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 42, y si al número se resta 23, las cifras se invierten. ¿Cuál es el número?

9. Con \$15500.00 compre 42 libros de \$150.00 y de \$250.00. ¿Cuántos libros de cada precio compre?

10. Una persona rema río bajo 59 Km., en $2\frac{3}{4}$ horas y río arriba 20 Km., en 1 hora. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río?

11. Antes de la batalla, las fuerzas de dos ejércitos estaban en la relación de 5 a 7. El ejército de la resistencia perdió 1700 combatientes y el del imperio 300000 invasores. Si la relación en un segundo momento es 14 a 15. ¿Cuantos soldados tenia cada ejército antes de la batalla?

12. Si una persona tiene \$89.70 en 84 monedas de a 50¢ y de10¢. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene?

13. Una persona pago $425.00 por un tramo de tela de lana a $55.00 y otro tramo de seda a $86.00 el metro. ¿Cuántos metros de lana y cuántos de seda compro?

14. Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 4 el residuo 6, y si 7 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 3 y el residuo 19.Hallar los números.

15. Dos ángulos son suplementarios y el doble del menor excede en 46^0 al mayor. Encontrar la magnitud de los ángulos.

16. En un grupo escolar hay 51 alumnos entre varones y señoritas. El número de señoritas excede en 16 al doble de los jóvenes. ¿Cuántas señoritas hay en el grupo y cuántos jóvenes?

17. Una línea de carretera de 54 Km., está pintada de amarillo y rojo. La parte roja es 4 Km., menor que la parte pintada de negro. ¿Cuál es la longitud de cada parte?

18. Una mascota y su collar costaron $1584.00, si la mascota costo 9 veces lo que su collar. ¿Cuánto costo la mascota y cuánto costo el collar?

19. En una elección en que había tres candidatos A, B y C se emitieron 90000 votos. A obtuvo 5000 votos menos que B y 8000 votos más , que C. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato ganador?

20. Una persona tiene dos inversiones, una que le deja anualmente un interés de 4% y otra de 7%. El ingreso total causado por las inversiones es de $478.00. Si se intercambian las razones de interés, el interés total anual sería de $600.00 ¿Cuál es el monto de cada inversión?

21. Un aeroplano viaja 460 millas a favor del viento, en una hora y veinticinco minutos y retorna contra el viento en 2 horas y 10 minutos. Encuentre la rapidez del avión en aire tranquilo y la rapidez del viento.

22. Dos robots de diferente marca, A y B pueden armar una microcomputadora si A trabaja 3 minutos y B trabaja 7minutos o pueden armar la PC si A trabaja 8 minutos y B trabaja 4 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría cada robot en armar la PC él sólo?

23. Un comerciante ha vendido 70 artículos de tipo A y 345 de tipo B a un comprador en $148070.00 y con a los mismos precios ha vendido 60 artículos de tipo A y 196 de tipo B por $150890.00. ¿Cuáles son los precios de cada uno de los tipos de artículos vendidos?

12. ANEXO 5.

PROBLEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER MEDIANTE SISTEMAS DE TRES ECUACIONES EN TRES VARIABLES (SISTEMAS 3X3)

1. En una fábrica se desea planear la producción de tres artículos para los siguientes tres años. Durante este tiempo el equipo no se aumentará y la producción durante este periodo de tiempo será constante; es decir serán producidas x, y, z unidades del primer, segundo y tercer artículos, respectivamente. Los datos son:

Artículo	Primer año	Segundo año	Tercer año
Primero	$3,500.00	$3,700.00	$4,200.00
Segundo	$6,000.00	$7,450.00	$9,000.00
Tercero	$8,000.00	$9,800.00	$9,780.00

Tabla 25

1) Los precios que tendrá cada artículo serán los de la tabla 23:

2) Se venderá toda la producción.

¿Cuántas unidades de cada artículo se deben de producir para que con las ventas se obtengan los ingresos que se establecen en la tabla 24?

1er año	$5,980,600.00
2^{o} año	$7,986,578.00
3er año	$8,678,945.00

Tabla 26

Para resolver el problema se debe encontrar es alguna solución del sistema:

$$\begin{aligned} 3500x + 600y + 8000z &= 5980600 \\ 3700x + 7450y + 9800z &= 7986578 \\ 4200x + 9000y + 9780z &= 8678945 \end{aligned}$$

2. Un agricultor necesita 1200 kilos de un compuesto de tres tipos que debe contener tres tipos de fertilizantes igual cantidad de Sulfato de amonio que de fertilizante de Borrego(A) y tres de Azufre (B). Si el fertilizante se vende en sacos de 70 kilos para el tipo Azufre, de 50 kilos para el de borrego y de 40 kilos para el sulfato de amonio(C). ¿Cuántos sacos de cada tipo necesita comprar para obtener la mezcla deseada?

3. La suma de los tres ángulos es 180^0. El mayor excede al menor en 55^0 y el menor excede en 23^0 a la diferencia entre el mayor y el mediano. Hallar los ángulos.

4. Un granjero gasta $100,000.00 en comprar 100 animales de tres tipos diferentes. Cada vaca le cuesta $500.00, cada cerdo $60,00 y cada chivo $40.00. Si compra al menos 10 animales de cada tipo, ¿Cuántos animales compro?

13. ANEXO 6. Ejemplos de estrategias c susceptibles de insertarse en diversos momentos de clase cuando el trabajo ha realizarse lo amerita.

Estrategia es el Arte de dirigir las operaciones militares. Se puede aceptar también como el arte (traza) para dirigir un asunto. En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento.

Didácticamente una estrategia permite dirigir el aprendizaje y llevarlo a una condición optima.

Las teorías de la información, la psicolingüistica, la simulación por computadora y la inteligencia artificial sustentan el marco conceptual de los procesos y estructuras cognitivas. La corriente cognitiva mediante el aprendizaje del discurso escrito incide en el diseño de procedimientos que confluyen en mejorar el aprendizaje significativo.

Esta tendencia de modificación converge en dos líneas: la **aproximación impuesta** que reformula la estructura del material de aprendizaje; y la **Aproximación inducida** cuya tendencia es fomentar el aprendizaje autónomo en el aprendiz

Mediante la aproximación impuesta al aprendiz se le proporcionan ayudas mediante estrategias de aprendizaje, que permitan al estudiante facilitar el desarrollo de un proceso más profundo del aprendizaje.

El aprendizaje estratégico se manifiesta a través de modelos de intervención que mediante actividades efectivas dotan al estudiante de destrezas y habilidades para el logro de su aprendizaje.

Las principales estrategias de enseñanza son:

- Objetivos o propósitos del aprendizaje.
- Resúmenes.
- Ilustraciones.
- Organizadores previos.
- Preguntas intercaladas.
- Pistas tipográficas y discursivas.
- Analogías.
- Mapas conceptuales y redes semánticas.
- Uso de estructuras conceptuales.

Según el momento de uso curricular o docente se pueden definir estrategias antes, durante o después.

Las estrategias previas predisponen al estudiante en cuanto a que y como va a aprender. Los objetivos y el organizador son **preinstruccionales típicas**.

Las estrategias **coinstruccionales** cubren funciones tales como detección de la información principal, conceptualización de contenidos, etc. Aquí se incluyen ilustraciones, redes semánticas, mapas conceptuales y analogías.

Las estrategias **posinstruccionales** se presentan después del contenido que se ha de aprender, permiten al alumno elaborar una visión sintética y critica del material. Algunas estrategias de este tipo son: pospreguntas intercaladas, resúmenes finales, redes semánticas y mapas conceptuales.

Los **procesos cognitivos** que las estrategias elicitan para promover mejores aprendizajes permiten desarrollar estrategias para(o generar) conocimientos previos y para establecer expectativas adecuadas en los alumnos.

Estas estrategias se dirigen a fin de activar los conocimientos previos de los alumnos o generarlos cuando no existan. Aquí se pueden incluir las que se concentran en lo que el profesor pretende lograr al término de la situación educativa.

Estrategias para orientar la atención de los alumnos.

Son los recursos que el profesor utiliza para focalizar y mantener la atención de los aprendices durante una sesión. Los procesos de atención selectiva son actividades fundamentales para el desarrollo del aprendizaje. Preferentemente deben ser estrategias de tipo coinstruccional. Algunas estrategias de este rubro son: las preguntas insertadas, el uso de pistas o claves, y el uso de ilustraciones.

La activación del conocimiento previo permite al docente conocer lo que saben sus alumnos y promover nuevos aprendizajes. Estas estrategias son de tipo preinstruccional. Las preinterrogantes, la actividad generadora de información previa, la enunciación de objetivos, etc.

Estrategias para organizar la información que se ha de aprender.

Permiten dar mayor contexto organizativo a la información nueva que se aprenderá al presentarla en forma grafica o escrita. Se pueden emplear en distintos momentos de la enseñanza. Se pueden incluir en esta a las de representación visoespacial, como mapas o redes semánticas, y a las de representación lingüística, como resúmenes o cuadros sinópticos.

Estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la nueva información que se ha de aprender.

Son estrategias destinadas a crear o potenciar enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva que ha de aprenderse. Se recomienda utilizar tales estrategias antes o durante la instrucción. Estrategias de este tipo de inspiración ausubeliana son los organizadores previos (comparativos y expositivos) y las analogías.

Las situaciones educativas que ocurren en la escuela deben planificarse, concretizarse y aclararse con un mínimo de error.

Las funciones de los objetivos son:

- Actuar como elementos orientadores de los procesos de atención y de aprendizaje.
- Servir como criterios para poder discriminar los aspectos relevantes de los contenidos curriculares (sea por vía oral o escrita), sobre los que hay que realizar un mayor esfuerzo y procesamiento cognitivo.
- Permitir generar expectativas apropiadas acerca de lo que se va a aprender.
- Permitir a los alumnos formar un criterio sobre qué se esperará de ellos al término de la clase, episodio o curso.
- Mejorar considerablemente el aprendizaje intencional; el aprendizaje es más exitoso si el aprendiz es conciente del objetivo.
- Proporcionar al aprendiz los elementos indispensables para orientar sus actividades de automonitoreo y de autoevaluación.

ILUSTRACIONES.

Son más recomendables que las palabras para comunicar ideas de tipo concreto o de bajo nivel de abstracción.

Las funciones de las ilustraciones en texto de enseñanza son:

- Dirigir y mantener la atención de los alumnos.
- Permitir la explicación en términos visuales de lo que seria puramente verbal.
- Favorecer la retención de la información: se ha demostrado que los humanos recordamos con más facilidad imágenes que ideas verbales o impresas.
- Permitir integrar, en un todo, información que de otra forma quedaría fragmentada.
- Permitir clarificar y organizar la información.
- Promover y mejorar el interés y la motivación.

Los tipos de ilustraciones más usuales en materiales impresos son:

- Descriptiva
- Expresiva.
- Construccional.
- Funcional.
- Lógico-matemática.
- Algorítmica.
- Arreglo de datos.

RESÚMEN

Es una versión breve del contenido que habrá de aprenderse.

Puede ser una estrategia Preinstruccional, posinstruccional o bien Coinstruccional.

Las funciones de un resumen son:

- Ubicar al alumno dentro de la estructura o configuración general del material que se habrá de aprender.
- Enfatizar la información importante.
- Introducir al alumno al nuevo material de aprendizaje y familiarizarlo con su argumento central (cuando funciona previamente).
- Organizar, integrar y consolidar la información adquirida por el alumno (en el caso de resumen posinstruccional).
- Facilitar el aprendizaje por efecto de la repetición y familiarización con el contenido.

Preguntas intercaladas

Son aquellas que se le plantean al alumno a lo largo del material o situación de enseñanza y tienen como intención facilitar su aprendizaje. Se redactan bajo la modalidad de reactivos de respuesta breve.

Con ellas se evalúan los siguientes aspectos:

a) La adquisición de conocimientos.

b) La comprensión.

c) Incluso la aplicación de los contenidos aprendidos.

Sus principales funciones son:

- ✓ Mantener la atención y nivel de "activación" del estudiante a lo largo del estudio de un material.
- ✓ Dirigir sus conductas de estudio hacia la información más relevante.
- ✓ Favorecer la práctica y reflexión sobre la información que se ha de aprender.
- ✓ En el caso de preguntas que valoren comprensión o aplicación, favorecer el aprendizaje significativo del contenido.

Analogías

Es una proposición que indica que una cosa o evento es semejante a otro.

Según Curtis y Reigeluth, una analogía se compone generalmente de cuatro elementos:

- El tópico o contenido que el alumno debe aprender, por lo general abstracto y complejo.
- El vehículo que es el contenido familiar y concreto para el alumno, con el que establecerá la analogía.
- El conectivo, que une al tópico y al vehículo:"es similar a", "se parece a", "puede ser comparado con", etc.
- La explicación de la relación analógica, donde además se aclaran los limites de ella.

Las funciones de las analogías son:

- Incrementar la efectividad de la comunicación.
- Proporcionar experiencias concretas o directas que preparan al alumno par experiencias abstractas y complejas.
- Favorecer el aprendizaje significativo a través de la familiarización y concretización de la información.
- Mejorar la comprensión de contenidos abstractos y complejos.

Pistas tipográficas y discursivas.

Se refieren a los “avisos” que se dan durante el texto para organizar y/o enfatizar ciertos elementos de la información contenida.

Pistas tipográficas comúnmente usadas:

- Manejo alternado de mayúsculas y minúsculas.
- Uso de distintos tipos (negritas, cursivas etc.) y tamaños de letras.
- Subrayados, enmarcados y/o sombreados de contenidos principales (palabras clave, ejemplos, definiciones, etc.)
- Inclusión de notas al calce o al margen par enfatizar la información clave.
- Empleo de logotipos (avisos).
- Manejo de diferentes colores en el texto.
- Uso de expresiones aclaratorias.

Ejemplos de estrategias para utilizar en la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Propiedades de las ecuaciones.[40]

Estas se pueden usar como – estrategia preinstruccional dejando a los alumnos su estudio como tarea previa.-, también se puede incluir como estrategia coinstruccional haciendo preguntas intercaladas durante el desarrollo de la sesión (clase).

- Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces x + a = y + a$
- Si a ambos miembros de una ecuación se les resta un mismo número, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces\ x - a = y - a$
- Si a ambos miembros de una ecuación se les multiplica por un mismo número distinto de cero, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces\ xa = ya, a \neq 0$
- Si a ambos miembros de una ecuación se les divide por un mismo número distinto de cero, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces\ \frac{x}{a} = \frac{y}{a}, a \neq 0$

Al aplicar estas propiedades en una ecuación dada, se obtienen otras ecuaciones equivalentes a la original. Son ecuaciones equivalentes las que tienen la misma solución. Resolver una ecuación dada es transformarla en

[40] Analizando el anexo 2": La geometría euclidiana", puede observarse que en los elementos de Euclides ya se incluían estas propiedades, cabe señalar que originalmente estaban escritas en griego antiguo, los grandes matemáticos griegos no conocieron el lenguaje matemático tal y como lo conocemos en la actualidad. Esto puede ser un motivo para que los estudiantes investiguen este hecho histórico y lo comparen con las propiedades que se incluyen en textos de algebra y geometría recientes.

otras ecuaciones cada vez más sencillas mediante una sucesión de pasos hasta obtener su solución.

13.1 Cuadrados mágicos:

En el cuadrado mágico 1, de orden 3x3, que tiene a 15 como número mágico, exprese en términos de la incógnita x, las tres casillas con los signos de interrogación. Nota: todas las líneas, horizontales, verticales, y diagonales deben sumar 15. ¿Cuál es el valor de x ?, utilizando este valor, encuentre los números que faltan.

2		6
	x	
	6	7
?	?	?

CUADRADO MAGICO 1

Solución En la primera fila (de arriba), al sumar 15 las tres casillas lo que falta es un 7.

Utilizando este dato, se obtiene para las tres casillas del tercer renglón (abajo):

$$
\begin{aligned}
(9-x)+(8-x)+(13-x) &= 15 \\
-3x+30 &= 15 \\
-3x &= 15-30 \\
-3x &= -15 \\
x &= 5.
\end{aligned}
$$

13.2

SOPAS DE LETRAS

Sopa de letras 1.

La fantasía es algo connatural a la lectura de cualquier texto, por elemental que éste pueda ser. Hay que profundizar en cada palabra por separado a fin de descubrir plenamente la relación en la que se encuentra en cada caso. Agudice, púes, su vista para descubrir una de las combinaciones de letras, una palabra que conocemos y que se escribe con esas mismas letras en otro orden y es de un concepto o ente matemático.

1 **COUINEC 2 AGDOR** 3 **ALIENL** 4 **RMIEPR** 5 **MASISET**

6 IAAATCCDRU 7 **EIORNTMS** 8 **RNCEAADDOOS** 9 **EUROMN**

10 **GIOSSN** 11 **YEESL 12 IIEEEOCCSSTNR N 13 OEAIARTSSCN**

14 **ELESAR** 15 **EAINSSVR** 16 **ECSTRO** 17 **SGFAAICR**

18 **NSCTUEAADR** 19 **SECILSOONU** 20 **NEEEAUIQTVSL**

21 **MIIAATEEDSNRND** 22 **LMSTCEOPAIB** 23 **EOOSDML** 24. **ASCUDTERAN**

25 **CCINEODUR**. 26. **UOAAINIGLC**. 27 **IIAANCDLN**

Solución:

1. Ecuación. 2. Grado. 3. Lineal. 4. Primer. 5. Sistema.

5. Cuadrática. 7. Términos. 8. Coordenadas. 9. Número. 10. Signos

9. Leyes. 12. Intersecciones. 13. Cartesianas. 14. Reales. 15. Inversas.

16. Cortes. 17. Graficas. 18. Cuadrantes. 19. Soluciones. 20. Equivalentes.

21. Indeterminadas. 22. Compatibles. 23. Modelos. 24. Cuadrantes.

25. Reducción. 26. Igualación. 27. Inclinada.

13.3 Crucigrama matemático

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		1	3	14	15	16	17	18	19	20	21
1		S	I	G	N	O	S																
2																					S		
3				R																	I		C
4	D	E	T	E	R	M	I	N	A	N	T	E									M		R
5	A			C		A						J									B		U
6	T			T		T					T	E	R	M	I	N	O				O		C
7	O			A		R								E				U			L		E
8	S					I								T				M	E	N	O		S
9						Z					A			O				A					
10											N			D		S							
11											G			O		U							
12							G				U					S							
13							A				L					T							
14							U				O					I							
15					M	A	S									T							
16							S									U							
17																C							
18															D	I	M	E	N	S	I	O	N
19																O							
20							I	G	U	A	L	A	C	I	O	N							

CRUCIGRAMA 1

Dicho crucigrama se puede definir así:

Horizontales:

1. También tienen su ley. 4. Cierto suma alternada de números enteros.

6. Singular de polinomio.

8. Indica substracción.

9. Símbolo que indica una operación.

15. Se cumple tanto para la suma como para el cociente.

20. Uno de los métodos de eliminación. 18. Característica de los espacios matemáticos.

Verticales:

1. Concepto primitivo no definido de la geometría Euclidiana, por dos puntos pasa una y solo una. 5. Arreglo rectangular de elementos obtenidos de un campo y referidos como escalares, expresado en renglones.

7. Físico y astrónomo alemán.

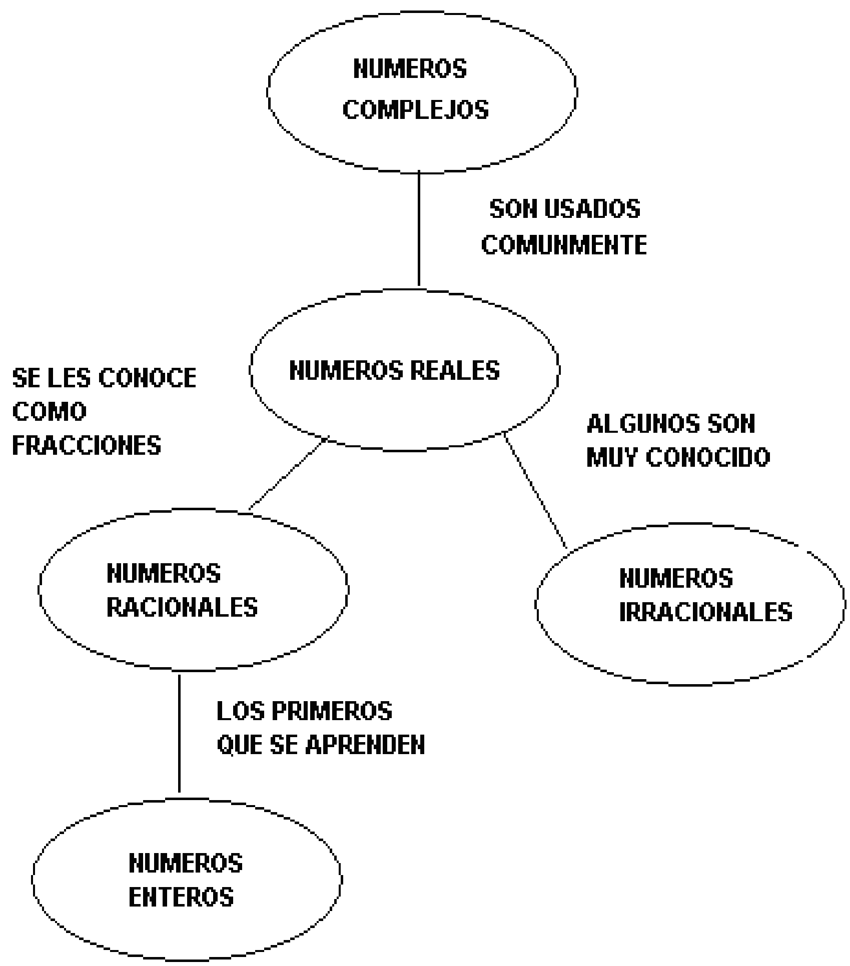
11. Figura geométrica formada en una superficie por dos líneas que convergen en un mismo vértice; o también la formada en el espacio por dos superficies que convergen en una misma línea.

13. Línea divisoria 14. Método de solución de un sistema. . 21. Sinónimo de intersecciones.

19. Representa a un número, cantidad, función, relación, variable, etc.

13.4. **MAPA CONCEPTUAL.**

Este mapa muestra a nivel básico la jerarquía entre los números:



Mapa conceptual 1

13.5

BINGO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (2X2)

$x + y = 1$ $x - y = 1$	$x + y = 3$ $x - 2y = 0$	$x + y = 6$ $x - y = 0$	$2x + 5y = -2$ $x - y = 6$	$x + y = 22$ $-x + y = -2$
$x + 2y = 7$ $2x - 3y = 0$	$5x - y = 40$ $2x + y = 9$	$x + 2y = 26$ $-x + y = -2$	$x + 2y = 24$ $x - y = -3$	$3x + 5y = 40$ $x - y = 8$
$2x + 2y = 88$ $6x - 2y = 0$	$3x + 3y = 75$ $-4x + 4y = -4$	$x + y = 92$ $6x - y = -1$	$x + y = 128$ $8x - y = -2$	$3x + 3y = 90$ $-2x + 2y = 0$

BINGO MATEMATICO 1

Material:

15 Tarjetas con quince ecuaciones de primer grado que presentan soluciones 1, 2, 3,…,15., en una de sus variables.

Tarjetas de bingo vacías, dos o tres para cada alumno.

Instrucciones (reglas):

- Juego para todo el grupo.

- Se reparte una hoja por alumno con las tarjetas de bingo vacías.

- Una persona es designada para dirigir (llevar el juego).

- Cada alumno rellena una tarjeta con nueve números diferentes escogidos entre el 1 y el 15.

- Cada vez que se saca una carta, se escribe la ecuación correspondiente en el pizarrón, dejando cierto tiempo entre una ecuación y otra.

- Los alumnos van señalando en sus tarjetas de bingo las soluciones de las ecuaciones que van saliendo.

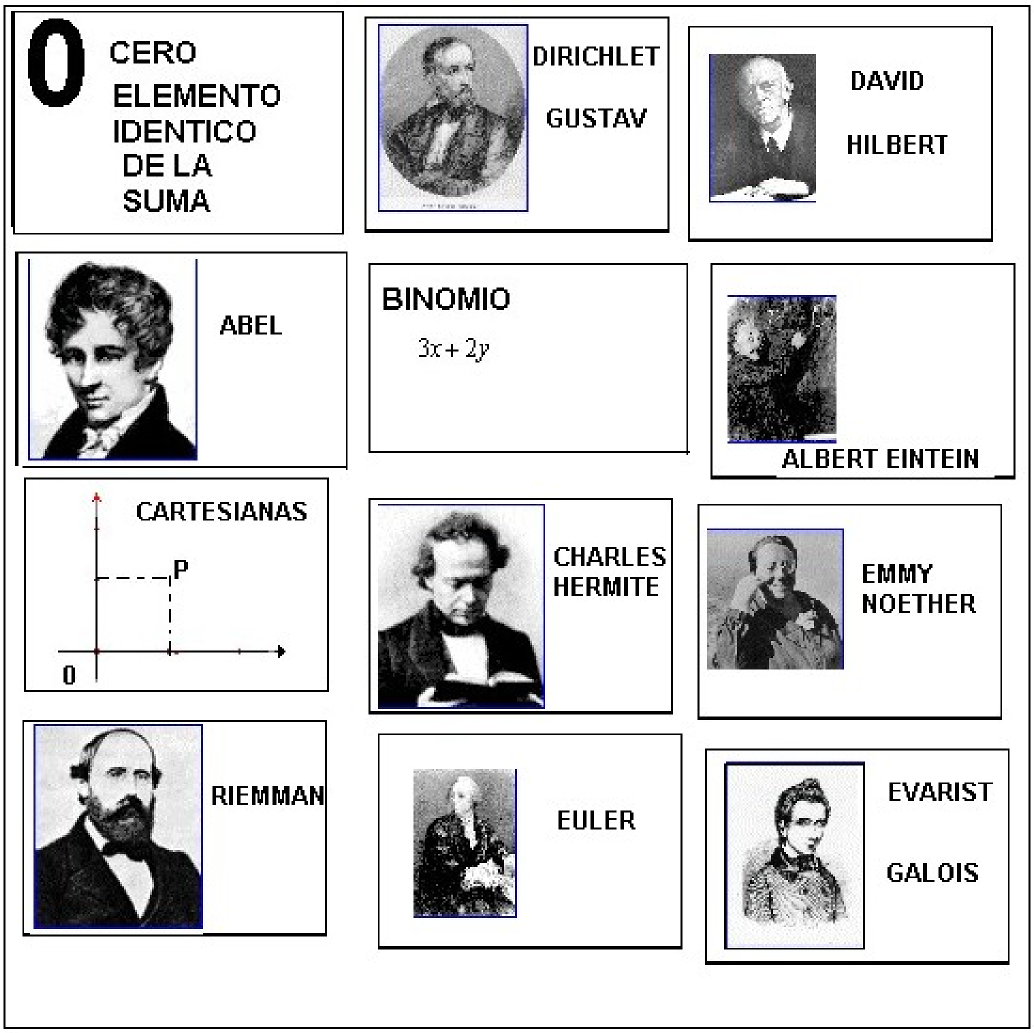
- Gana el primero que haga dos líneas completas (aunque tenga un número en común).

- Se puede repetir el juego tres veces.

13.6

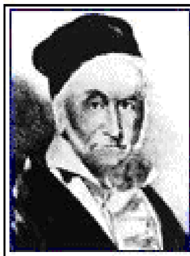
LOTERIA[41] MATEMATICA

Para el ocio en el quehacer matemático de los estudiantes o para jugarla en clase, cuando las circunstancias así lo ameritan.

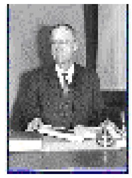


CARTILLA 1

[41] Con este modelo (cartillas) se pueden hacer variadas combinaciones definidas estadísticamente.

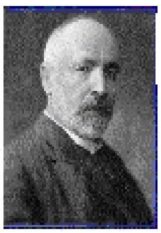


GAUSS



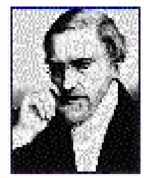
BIRKHOFF

JEAN B. J.
BARON DE
FOURIER

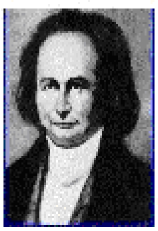


GEORG F.
LWDWIG
PHILIP
CANTOR

HENRY
LEON
LEBESGUE

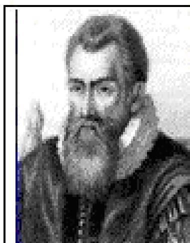


J. VICTOR
PONCELET

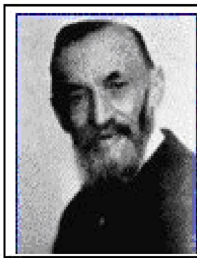


JACOBI K.
GUSTAV
JAKOV

GOTFRIED
WHILHELM
LEIBNIZ

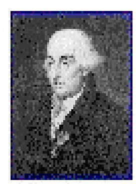


JHON
NAPIER



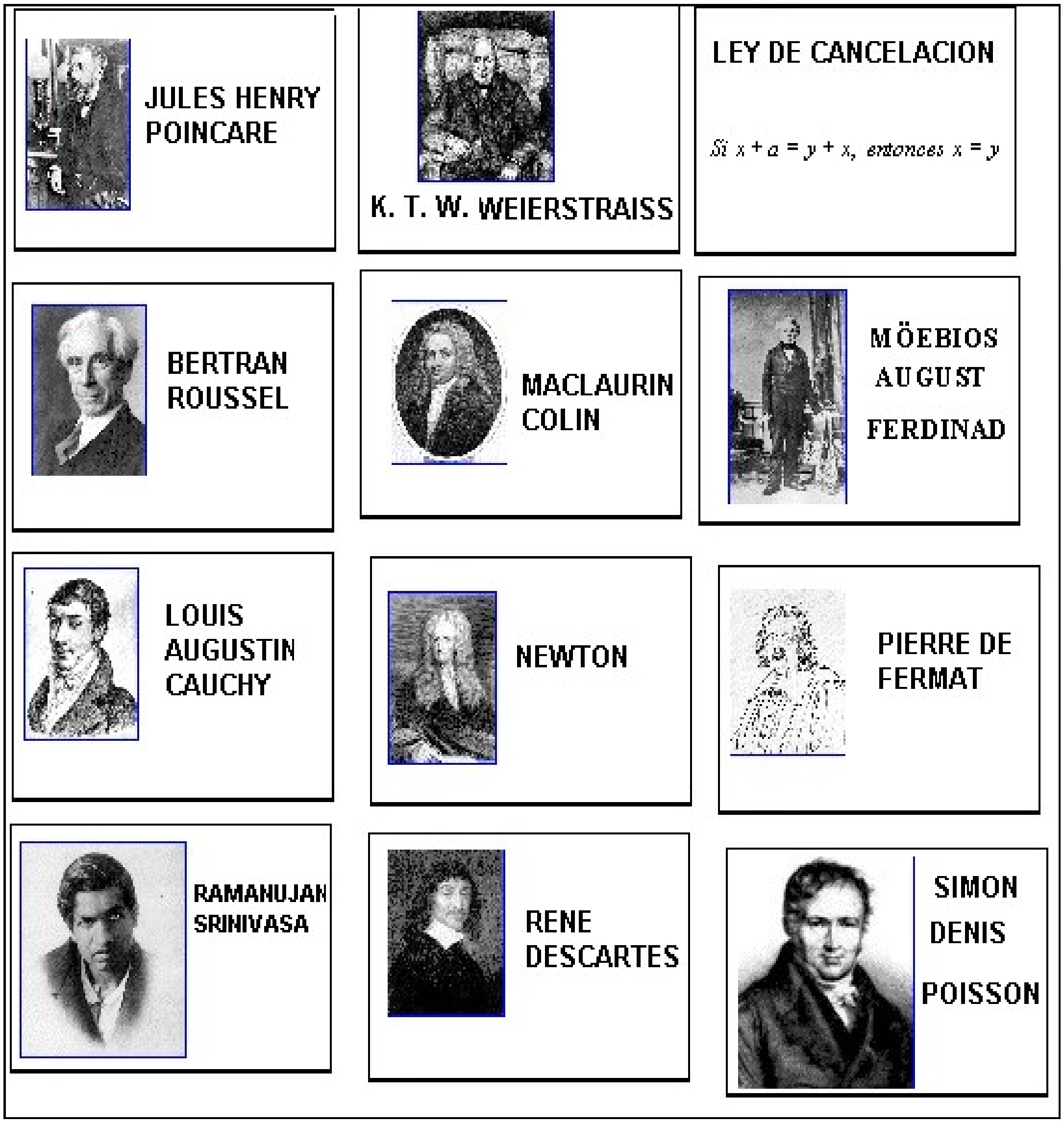
GISEPPE
PEANO

JADAMAR
JACQES
SALOMON

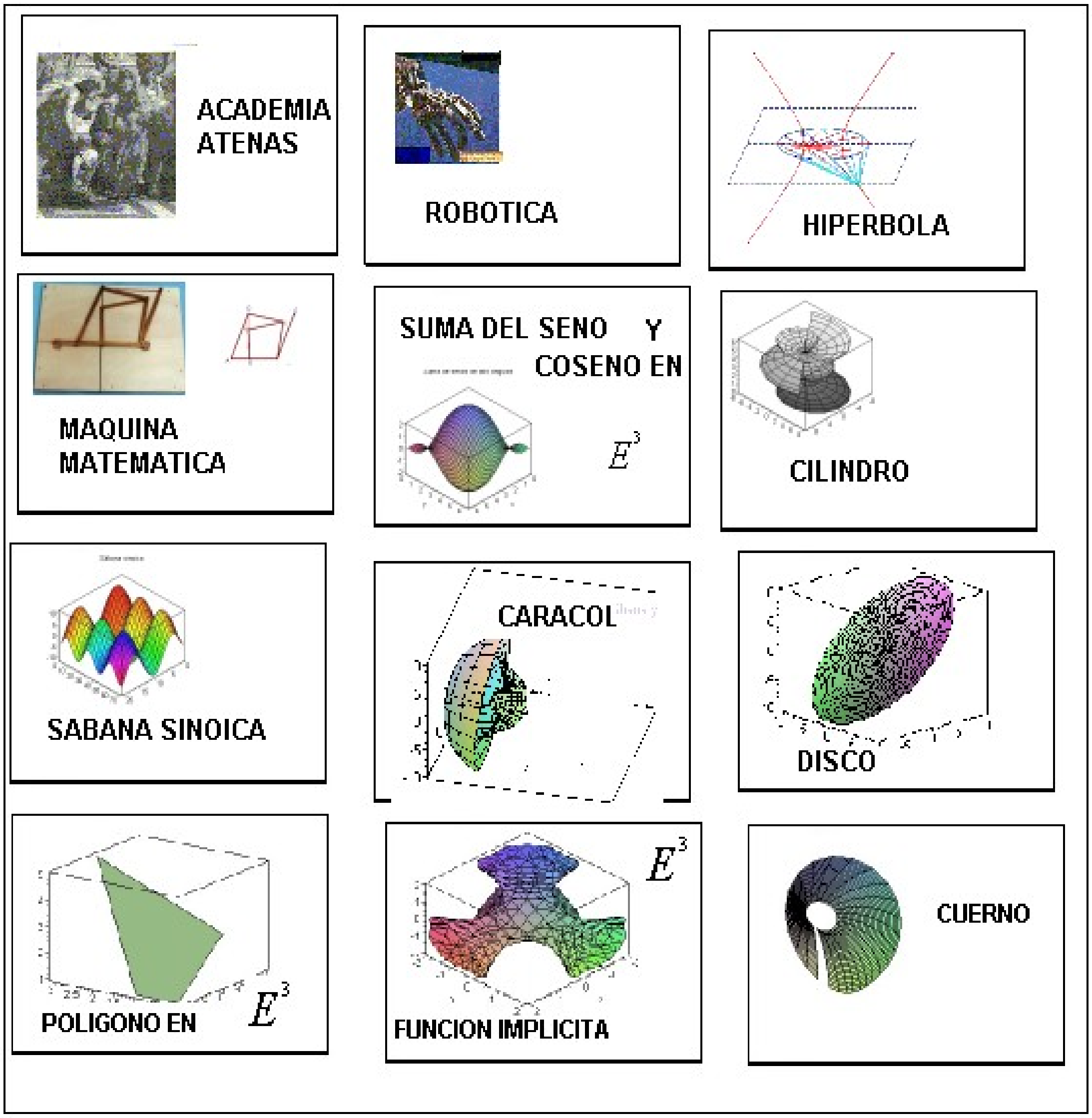


JOSEPH L.
COMTE DE
LAGRANGE

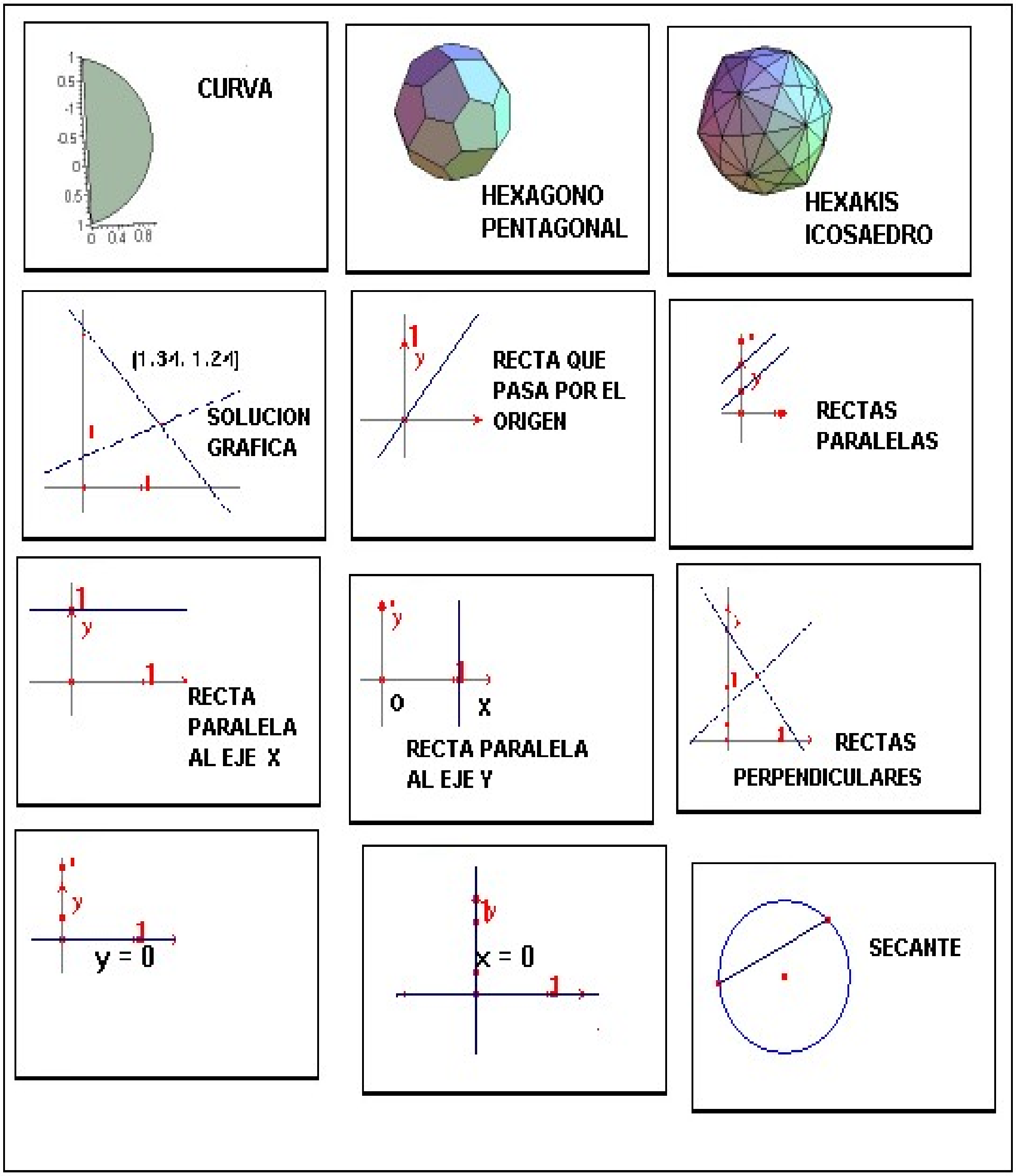
CARTILLA 2


JULES HENRY POINCARE
K. T. W. WEIERSTRAISS
LEY DE CANCELACION
Si $x + a = y + x$, entonces $x = y$
BERTRAN ROUSSEL
MACLAURIN COLIN
MÖEBIOS AUGUST FERDINAD
LOUIS AUGUSTIN CAUCHY
NEWTON
PIERRE DE FERMAT
RAMANUJAN SRINIVASA
RENE DESCARTES
SIMON DENIS POISSON

CARTILLA 3


ACADEMIA
ATENAS
ROBOTICA
HIPERBOLA
MAQUINA
MATEMATICA
SUMA DEL SENO Y
COSENO EN
E^3
CILINDRO
SABANA SINOICA
CARACOL
DISCO
POLIGONO EN
E^3
E^3
FUNCION IMPLICITA
CUERNO

CARTILLA 4


CURVA
HEXAGONO PENTAGONAL
HEXAKIS ICOSAEDRO
[1.34, 1.24]
SOLUCION GRAFICA
RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN
RECTAS PARALELAS
RECTA PARALELA AL EJE X
RECTA PARALELA AL EJE Y
RECTAS PERPENDICULARES
y = 0
x = 0
SECANTE

CARTILLA 5

FORMA GENERAL

$$Ax + By + C = 0$$

PUNTO Y PENDIENTE

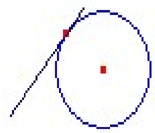
$$y = mx + b$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

MATRIZ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

PENDIENTE

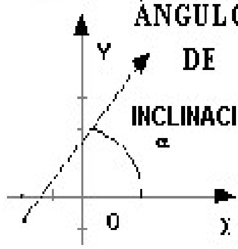


TANGENTE

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 19 \\ -23 & 100 & \frac{13}{25} \\ 1 & 67 & 4 \end{vmatrix}$$

DERMINANTE

ÁNGULO DE INCLINACION



DEFINICION DE PENDIENTE

$$m = \tan \alpha$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases}$$

DOS ECUACIONES EQUIVALENTES

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACIONES

$$3x + 2y = 4$$

TIENE
n
soluciones

$$(+)(+) = +,\quad (+)(-) = -$$

$$(-)(-) = +,\quad (-)(+) = -$$

LEY DE LOS SIGNOS

CARTILLA 6

13.7 Poesías matemáticas.

"El pensamiento es un mono que salta de rama en rama" (Novokov[42])

1. Regocijándose los monos

divididos en dos bandos

octava parte del bando blanco se adhería

a la séptima del gris en tres docenas

en el bosque se solaza en gritería

con alegres auyidos varios tonos

grises y blancos en total 200 saltan

y atronando el campo están

¿Sabes cuántos monos hay en la manada total?

2. **EL ENJAMBRE**

Un grupo de abejas de un apiario, en número

igual al triple de un colmenar menor

en lejano lugar diez mil con hambre

de polen zumbaban con amor

del menor la mitad de todo su enjambre se posó sobre un jazmín,

habiendo con raigambre dejado

muy atrás a $\frac{2}{9}$ al colmenar menor;

sólo se aparto una exploradora del apiario al otro enjambre por rumor

que revoloteaba en torno a un loto, por lo cercano al jazmín

sumándose al primero atraídas por el zumbido de una de sus amigas

que cayó imprudente en la trampa de las florecillas,

dulce fragancia percibió el menor enjambre que con ansias

se precipito al polen que el jazmín les ofertaba sin rubor

y ellas en total sencillas eran treinta mil triple al fin.

¿Cuántas abejas formaban el menor enjambre?

[42] NOVOKOV, Y. *Rey dama, valet. ed.,* Anagrama, Barcelona, 1987.

14. ANEXO 7. **EJEMPLOS DE PLAN DE CLASE.**[43]

14.1

MATEMÁTICAS_

Grupo ____UNIDAD __.

Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 1) 1[44].

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos el alumno:

En esta sesión se pretende sensibilizar a los alumnos en la proceso de plantear y resolver un problema dado en el que intervienen incógnitas, para lo cual se espera propiciar un acercamiento de los conceptos de ecuación indeterminada, simultaneidad, sistema de ecuación, y solución del mismo.

Actividades comunes[45]**.**

---

[43] Se recomienda que cada ecuación o sistema de ecuaciones propuesto en clase se genere como modelo matemático de un problema dado.

[44] Nota: En el caso de usar esta sesión como modelo, se recomienda imprimirla sin los pies de página, ya que en estas se incluyen entre otras cosas las estrategias que el docente aplica en los diferentes momentos de la misma.

[45] Son estrategias que el profesor define en tres momentos diferentes del desarrollo de la clase durante el periodo de desarrollo de la unidad.

Previas a la clase:

- Estudiar los temas, conceptos, etc. que se incluyen en este documento antes de abordarlo en textos de la bibliografía.
- Disponer del material requerido, para abordar con éxito las actividades de clase. A saber cuaderno de notas, lápiz, compás, regla, discos flexibles[46] (vírgenes) de 3.5 pulgadas 1. etc.

Durante la clase.

Individualmente lo indicado preparando y exponiendo tu trabajo (síntesis), ordenada y responsablemente a los compañeros de tu equipo: Discutiendo las conclusiones obtenidas, etc.

◊ Analiza y sintetizar en equipo las soluciones a cada uno de los puntos aquí tratados.

◊ Exponer al grupo los logros alcanzados en el equipo. Nota eligiendo las conclusiones obtenidas en tú equipo.

◊ Escribe los resultados y conclusiones obtenidos.

◊ Entregar tu disquete al final de la clase al profesor, para su revisión posterior a la clase.

Posteriores a la clase.

♦ Completar lo realizado en clase, corrigiendo, aumentando, incluso pasando en limpio lo anotado, resolver las tareas propuestas por el docente.

---

[46] Si la sesión de trabajo se da en un laboratorio de cómputo como los que hay en cada plantel del bachillerato de la UNAM.

Actividad 1(Aquí y ahora).

En equipos:

Determinar los pesos o puntos, considerando una escala de 0 a 10, a cada uno de tres aspectos señalados en una evaluación dada. Estos aspectos son, a saber:

1) Fichas de trabajo expresadas en una actividad de clase propuestas para el alumno.

2) Investigación del alumno sobre un aspecto de las ecuaciones lineales.

3) Participación del alumno en clase.

1. ¿Cuáles son las tres incógnitas que se tienen en este problema?[47]

2. ¿Qué ecuación se obtiene con las incógnitas anteriores?

Una vez obtenida una ecuación tal como la siguiente:

$x+y+z=10$, donde x, y, z [48]

a) ¿Qué tipo de solución tiene esta ecuación[49]

---

[47] Es muy probable que con poca ayuda (estrategia coinstruccional) los alumnos perciban que los tres elementos deben sumar 10, e incluso formular (quizás con otros símbolos) una ecuación, en donde las literales (letras) representen respectivamente los elementos involucrados en el problema.

[48] Aquí el alumno la escribiría con las literales que el haya elegido. Estas pueden ser en número tantas como alumnos estén en clase.

b) ¿Qué clase de números, dentro del contexto hay que considerar? ¿Cuáles no?[50]

c) ¿Qué ejemplos pueden dar en cada caso?

d) ¿En qué se diferencia esta ecuación de las que anteriormente has visto?

e) ¿Recuerdas algún caso similar que desees comentar?

En cuanto a las ternas de números.

¿Cómo saber cuál de todas las ternas de números son solución de ella?

i) ¿Cuáles ternas no son solución de la ecuación? Escribe al menos tres ejemplos.

ii) ¿Qué necesitarían para poder decidir? [51]

Considera el diagrama1[52]

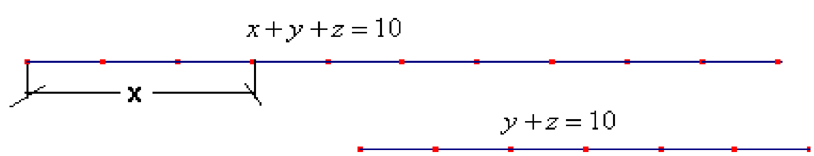


Diagrama 1

---

[49] Con estas preguntas intercaladas se le ayuda a los alumnos, que requieran, hacia la solución estimada.

[50] Aquí se les puede dar un mapa conceptual sobre los conjuntos de números, un ejemplo es el mapa conceptual 1 de la pagina 85.

[51] Es posible, que pidan más información; el docente podría agregar un número asignado a la suma de máximos asignados a los elementos incluidos en el problema, por ejemplo 7.

[52] En el caso de que no puedan encontrar el valor de x o bien no encuentren argumentos, se les puede ayudar con un diagrama como el número 1, que aquí se expone. Y si no fuera así, podríamos intercalar otras preguntas.

a) ¿Qué pasa ahora con la ecuación $x+y+z=10$?

b) ¿Es indeterminada esta ecuación?

c) ¿Cuáles serían todas sus soluciones en el contexto del problema si y, z son enteros?

d) A partir de estas soluciones, c), ¿Cuáles serían todas las posibles ternas que resolverían el problema?[53]

Recuerda que respecto al problema que estamos resolviendo aquí, requerimos determinar una única terna de números (x_0, y_0, z_0),

e) ¿Se redujo el número de posibilidades?

f) ¿es lo mismo la solución $(4,5,2)$ que $(2,5,4)$?

Puesto que ya se tienen el valor de x, y la terna buscada depende de que encontremos los valores de y "y" z [54]

¿Qué necesitarían para hacerlo? [55]

---

[53] Se le puede sugerir que elabore una tabla en la que consigne las ternas que son satisfacen las condiciones. Si usa calculadora o computadora, se le pide que analice y explique cada terna que verifique la ecuación.

[54] Se les puede comentar que conviene para simplificar el problema debemos centrarnos en determinar dos únicos valores. Y se inserta otra pregunta.

[55] Si los alumnos piden más información, se les podía decir que la diferencia entre los puntajes máximos de y "y" z es un punto (donde y es el mayor). Con esto seguramente resolverán el problema, sin necesidad de plantear esta última ecuación, no obstante es hay que pedirles que lo hagan a fin de hacer una recapitulación que lleve a introducir el concepto de sistemas de ecuaciones

Actividad 2.

De manera análoga a como hiciste en el tema de ecuaciones lineales en una variable (de primer grado con una incógnita) Redacta (inventa) al menos dos problemas.

Actividad 3[56]

Tarea para hacer en casa:

a) En un solo sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, localiza los puntos correspondientes a todas las parejas que determinaron en clase para cada una de las ecuaciones $y + z = 7$ y $y - z = 1$, usar dos colores diferentes para poder distinguir los puntos de cada ecuación.
b) Redactar (inventar) un problema en el que intervengan dos cantidades desconocidas y formular las ecuaciones correspondientes.
c) Describir los modelos obtenidos a partir de los problemas inventados.
d) ¿Qué tipo de ecuaciones se incluyen en los modelo

y su solución, haciendo énfasis en la satisfacción simultánea de las condiciones y en la necesidad de contar con tantos “datos” (ecuaciones) como incógnitas se tengan.
Se podría ahondar en que la ecuación $y - z = 1$ aislada de las demás, también es indeterminada e incluso se les pediría que enlistaran las parejas de números enteros del 1 al 9, que serian soluciones de la misma.

[56] Esta es una estrategia de tipo posintruccional.

14.2

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 2).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

En esta sesión se trata de que los alumnos reafirmen los conceptos vistos en la clase previa, en especial los de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema y simultaneidad. Se iniciara también, relacionándolo con estos conceptos el estudio del significado grafico de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables.

Por otra parte, se desea fomentar en el alumno la capacidad de redactar (inventar) problemas, e ilustrar que un sistema de ecuaciones puede representar a un conjunto de problemas con diversos enunciados y con ello, hacer ver que situaciones como está forman parte del poder que tiene la matemática en particular en lo que se refiere a los modelos matemáticos (ecuaciones) y los lenguajes simbólicos (el algebra).

Actividad 1. Revisión de la tarea[57]

¿Porqué la solución que se había obtenido para y y z está representada como el punto común de las dos series de puntos de la gráfica correspondiente?

1. ¿Cómo explicar que cualquiera de los otros puntos no es solución del problema?

2. ¿Qué tipo de ecuaciones se están manejando?

3. ¿Cuántas y cuáles las variables que se incluyen en cada ecuación?

¿Si tuvieran un problema que diera lugar a dos ecuaciones con dos variables, les serviría hacer la gráfica para encontrar la solución? [58]

Actividad 1. Trabajo en equipo:

Encuentren la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=4 \end{cases}$$

---

[57] A partir del primer ejercicio de la tarea además de recordar qué es la grafica de una ecuación lineal, se puede poner énfasis en los conceptos que se pretenden enseñar en esta sesión; el profesor podría hacer preguntas u observaciones como las que se exponen.

[58] En esta parte, se les podría comentar que un conjunto de ecuaciones de este tipo recibe el nombre de sistema de ecuaciones lineales en n (2) variables y pedirles que digan cómo definirse; quizás puedan llegar a una formulación como la siguiente que es suficiente para este nivel educativo.

“Un sistema de ecuaciones lineales, en dos o más variables(incógnitas), encontrados los valores de estas, dichos valores deben satisfacer simultáneamente a ambas ecuaciones”

a) Exponga cada miembro la solución, a fin de arribar a una solución común.

b) Escriban un enunciado (formulen) un problema que de origen a este sistema.

Trabajo grupal

1. ¿Cuántas soluciones se determinaron? Escriba cada uno sus respuestas en su cuaderno de notas.
2. ¿Qué opinan de las dos soluciones? [59]. Escriba cada uno sus respuestas en su cuaderno de notas.
3. 1) Solución algebraica $x = 9, y = 5$. ¿Cómo se obtuvo esta solución? Escriba cada uno sus respuestas en su cuaderno de notas.

2) Solución gráfica [60] Analicen esta, y descríbanla cada uno por escrito en su cuaderno de notas.

Explicar[61] verbalmente las respuestas a las siguientes preguntas:

---

[59] Si la mayoría uso el método gráfico, aun el caso de que algún equipo no haya trazado las gráficas correspondientes para resolver el sistema y pudo haber encontrado esta solución con enteros del 0 al 14: sería pertinente comentar las dos soluciones y hacer notar algunos inconvenientes del primer método.

[60] Esta solución puede presentarse como una ilustración, y se puede acompañar de preguntas insertadas tales como las siguientes:

1. ¿Cuál es la ecuación que corresponde a la recta L_1 ?
2. ¿Cuál es la ecuación que corresponde a la recta L_2 ?
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto I?
4. ¿Qué significan los números que x “y” y respecto a las dos ecuaciones?

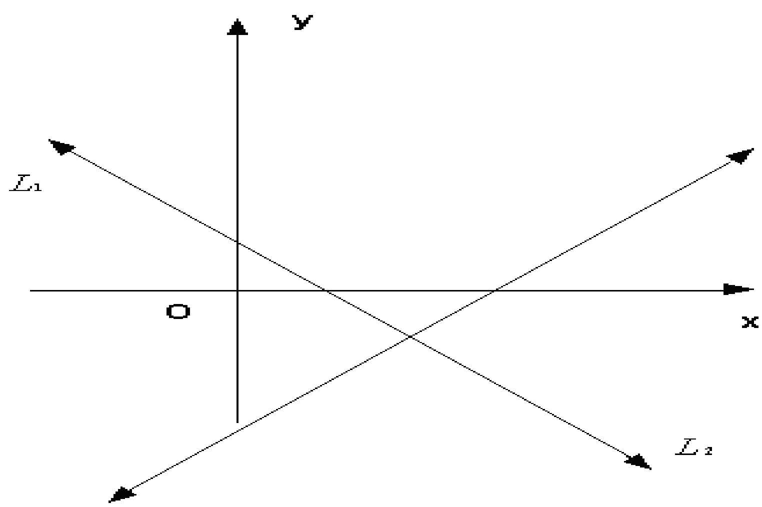
[61] Es necesario que el profesor formule preguntas relacionadas con los aspectos que se están desarrollando.

1. ¿Qué método usaron para resolver algebraicamente el sistema?

2. ¿Por qué eligieron ese método?

3. ¿Cuál es la interpretación gráfica de la solución?

4. ¿Cómo se interpreta gráficamente a cada una de las ecuaciones del sistema dado?
5. ¿Qué opinan de cada uno de los métodos utilizados para resolver el sistema?



GRAFICA 3

$$1)\ \begin{cases} x+y=14 \\ 3x-y=10 \end{cases},\ 2)\ \begin{cases} y=6-x \\ 3x+3y=18 \end{cases},\ 3)\ \begin{cases} x=y \\ x-y=10 \end{cases}$$

Actividad 2.

En equipos escriban el guión de un drama en el cual los personajes son cada una de las dos ecuaciones formando un sistema. Y en el que se resalte que este puede representar y servir para "solucionar" muy diversas situaciones y resaltar el papel que juega la matemática en el estudio de otras disciplinas. Y actuaran según el guión[62] escrito.

Actividad 3.

Respecto a la formulación del problema, podrían leerse los diferentes enunciados y corregir, los errores correspondientes, si los hubo[63]

[62] Sea experimentado esto en grupos del CCHA, con la participación libre y espontánea de los alumnos.

[63] Se puede comentar que una parte importante del conocimiento de la naturaleza y la sociedad radica en identificar aquellas cosas que deseamos conocer, sus comportamientos, las interrelaciones que se dan entre ellas, saber interpretarlas y poder formular problemas que permitan conocerlas.

Actividad 4.

De la primera ecuación del sistema que surgió como redacción (invención) del problema conserven la primera ecuación, y modifiquen la redacción de su problema de acuerdo a una nueva ecuación que algún alumno proponga.

Tarea para resolver en casa.

a) Encontrar la solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones a través del método gráfico.

$$1)\ \begin{cases} x+y=14 \\ 3x-y=10 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} y=6-x \\ 3x+3y=18 \end{cases},$$

$$3)\ \begin{cases} x=y \\ x-y=10 \end{cases},\quad 4)\begin{cases} 2x+5y=-11 \\ x-y=20 \end{cases},$$

$$5)\begin{cases} 7x+2y=-9 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

b) Redactar un problema que de lugar a un sistema de dos ecuaciones lineales (de primer grado con dos incógnitas) Aparte, en una hoja para entregar, escribir únicamente la redacción del problema y su nombre.

c) Describir los elementos que constituyen el modelo matemático del problema y de la polución del mismo.

14.3

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 3).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

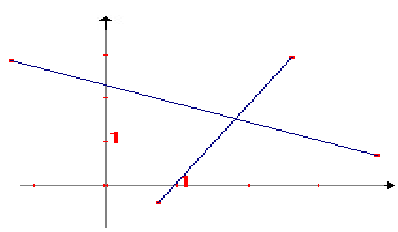
Propósitos:

Introducir los conceptos de ecuaciones equivalentes, sistemas compatibles, incompatibles, determinados e indeterminados[64]

Recuerda que:

1. Que un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen soluciones comunes.

Dos ecuaciones con dos o más incógnitas son simultáneas cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas



[64] No se espera que en esta sesión se agote la cabal comprensión de los conceptos que son propósito de la misma, estos se seguirán asumiendo como aprendizajes conforme se vaya desarrollando el tema.
Se puede analizar qué es lo que se está afirmando en cada una de las ecuaciones, a fin de hacer destacar que en un caso dado las dos ecuaciones son equivalentes ya que proporcionan exactamente la misma información (y por ello tienen la misma solución), y en el otro, la información que dan se contradice mutuamente, por lo que no pueden satisfacerse las dos a la vez.

Actividad 1.

Dada la ecuación:

$x + 2y = 7$

1. ¿Cómo formularían a partir de ella un sistema con muchas soluciones?
2. ¿Qué harían para obtener otro sistema, sin solución?
3. ¿Cómo se enunciaría un problema similar al que origina la ecuación?
4. ¿Cuáles son los elementos que la componen?

Actividad 2[65]

1. Cada quien anote en su cuaderno un sistema 2x2 del tipo que quieran.

Hacen una pequeña ronda en la que cada alumno lee el sistema que formulo y otro dice Cuántas soluciones tiene Porqué[66].

2. Cada alumno explica el sistema de ecuaciones que escribió.
3. El estudiante explica porque tiene o no solución.
4. El alumno propone un ejemplo más general del que dio anteriormente.

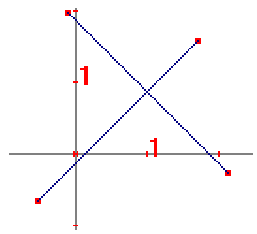
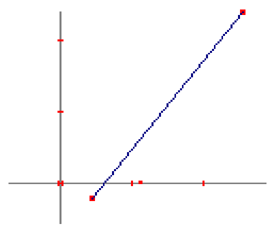
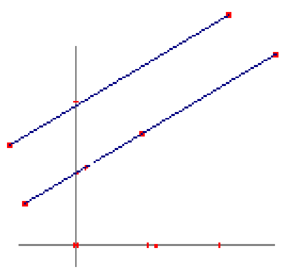
---

[65] Teniendo en cuenta la clave de que lo necesario es construir una ecuación equivalente y anexarla tal cual, en un caso, o bien modificar el resultado y agregarla a la ecuación dada.

[66] Después de lo anterior se podría hacer que resuelvan el comportamiento de los tres casos posibles de sistemas 2x2.

5. En equipos analizan cada ejemplo y dan su opinión respecto a lo expuesto antes.

Sistemas 2x2

	Situación grafica	Características	Ejemplo
1) Solución única		Dos ecuaciones diferentes y no contradictorias	Ejemplo 1) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$
2) Muchas soluciones		Dos ecuaciones Equivalentes, una es múltiplo de la otra.	2) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$
3) Ninguna solución		Dos ecuaciones Contradictorias. Una establece un resultado diferente del que correspondería a un múltiplo de la otra.	3) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$

Responde por escrito a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué otros podrían considerarse para ser incluidos en la clasificación anterior?

2. ¿Cómo serian las ecuaciones correspondientes?

3. ¿Tendrían solución?

4. ¿Qué métodos se utilizaran para resolverlas?

5. ¿Cuáles de los métodos anteriormente escritos serian mas convenientes de aplicar?

6. ¿Qué diferencias tienen entre si los métodos anteriores?

7. ¿Cuál método consideras que es mas avanzado?

Actividad 3.

En equipos resolverán un problema dado, y expondrán la solución obtenida; así, como las ventajas del método elegido respecto a otros métodos conocidos.

14.4

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 4).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

Se inicia aquí el estudio de al concepto de sistemas equivalentes y al tipo de transformaciones (modificaciones) que se pueden hacer a un sistema de ecuaciones, a fin de obtener otro equivalente más sencillo de resolver.

También se trata de, hacer notar al alumno de destacar la utilidad de un método algebraico por las limitaciones que puede tener el método gráfico.

Actividad 1.

Trabajo grupal.

En equipo resolver el siguiente problema, escribiendo el procedimiento paso a paso.

Una chalana (Embarcación menor, de fondo plano, proa aguda y popa cuadrada, que sirve para transportes en aguas de poco fondo.) emplea $1\frac{3}{4}$ horas en recorrer $48\frac{3}{5}$ Km., río abajo y en $3\frac{1}{2}$ horas río arriba recorre $24\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la velocidad de la embarcación en agua tranquila y cuál es la velocidad del río?

6. ¿Cómo se simbolizan las cantidades desconocidas?

7. ¿Son $\begin{cases} \dfrac{\frac{243}{5}}{x+y} = \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{\frac{171}{7}}{x-y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ las ecuaciones que se obtienen como modelo del problema? ¿Por qué?

8. ¿Este sistema se transformaría en el sistema equivalente $\begin{cases} x + y = \dfrac{972}{35} \\ x - y = \dfrac{114}{7} \end{cases}$?

9. ¿Cómo se resuelve el sistema gráficamente[67]?

10. ¿Qué método permitiría resolver el sistema de ecuaciones[68]?

Actividad 2.

Identifique cuáles de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes, y explique porqué son o no equivalentes.

$1)\ \begin{cases} x + y = 6 \\ -x - y = -12 \end{cases},\ 2)\ \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases},\ 3)\ \begin{cases} 5x + 2y = 6 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases} 4)\ \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases},\ 5)\ \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{32} \end{cases}$

Tarea para hacer en casa escriba:

1) 5 pares de ecuaciones que sean equivalentes entre si.

2) 5 pares de ecuaciones que no sean equivalentes entre si

67 Aquí se hace necesario que el docente trate de conducir a lo alumnos a percibir la dificultad y limitaciones del método gráfico.

68 Por la experiencia del profesor en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales, observaría que los alumnos resolverían el sistema por el método de suma o resta.

15.5

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 5).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Actividad 1[69].

Ensalada[70] de letras

La fantasía es algo connatural a la lectura de cualquier texto, por elemental que éste pueda ser. Hay que profundizar en cada palabra por separado a fin de descubrir plenamente la relación en la que se encuentra en cada caso. Agudice, púes, su vista para descubrir una de las combinaciones de letras, una palabra que

1 **COUINEC 2 RGDAO** 3 **ALIENL** 4 **RMIEPR** 5 **MASISET**

6 **IAAATCCDRU** 7 **EIORNTM** 8 **ESNOOAOCR** 9 **EUROMN**

10 **IOSGN** 11 **YEESL 12 OOOSNPPIRIC 13 OEAIARTSSCN**

14 ELESAR 15 AMOUFLR 16 EAISRC 17 SGFAAICR18 SRTIENSECIENCO 19 OIIINNCCNLA 20 SEIEAQNVTULE

---

69 Es posible incluir estrategias según el momento y la necesidad percibida en un instante dado de una clase. Ver ejemplos de estas en el anexo 5.

70 Se puede insertar como una estrategia coinstruccional, en un momento que se perciba cansancio o tensión.

Actividad 2. Explicar verbal y por escrito las respuestas.

Dado el sistema $\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$:

1) ¿Cómo es este sistema respecto al sistema $\begin{cases} x + y = \dfrac{972}{35} \\ x - y = \dfrac{114}{7} \end{cases}$?

2) ¿En que difieren?

Si $m = 20$ y $n = 30$:

a) ¿Qué sucede con el sistema $\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$?

b) ¿Cuál seria la solución grafica[71] de este sistema?

c) ¿Cómo quedaría el enunciado del problema de la chalana con estos cambios?

d) ¿Cuál seria la solución si m=1 y n=1?

Tarea para hacer en caso:

Dado el sistema: $\begin{cases} mx + ny = m^2 + n^2 \\ x - y = 2mn \end{cases}$

1. ¿Cuáles son las incógnitas?
2. ¿Cómo se resuelve por suma o resta?
3. ¿Cuál es la solución?

14.6

[71] Para estudiar este caso gráficamente, pueden incluso recurrir incluso al uso de software matemático diverso; por ejemplo el programa Linear systems que se incluye como anexo en CD, el programa Gramática para Windows 32, o cualquier otro como el Geolab.

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 6).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

- Que los alumnos resuelvan sistemas por el método de reducción (suma o resta)
- Que los alumnos interpreten la ecuación que resulta al restar o sumar las dos ecuaciones del sistema, y que analicen si tiene o no tiene ninguna solución o bien si tiene muchas soluciones.

Actividad 1.

1. Resolver el problema siguiente.

Una persona rema rió abajo a Km., en t_1 horas y río arriba b Km., en t_2 horas. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila y cuál es la velocidad del río?

1. ¿Cómo es el sistema de ecuaciones que se obtiene?
2. ¿Por qué el sistema obtenido representa a una familia de sistemas de ecuaciones?
3. ¿Se puede escribir el término independiente usando m y n para cada uno de los respectivos términos independientes?

4. ¿Cómo es la solución del sistema aplicando el método de suma o resta?

¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se obtiene como modelo del problema?

Revisión de la tarea, lo que permite destacar que la diferencia de los sistemas estudiados en clase es que el segundo sistema un sistema literal. En tanto que el primero es una generalización obtenida a partir de un problema dado. Lo que permite valorar la importancia del lenguaje algebraico; que en este caso se manifiesta en la generalidad de los sistemas.

Actividad 2.

Analizar el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = m \\ 4x + 3y = n \end{cases}$$

5. ¿Qué representa la primera ecuación?
6. ¿Qué representa la segunda ecuación?
7. ¿Qué se ecuación se obtiene si se resta la segunda ecuación de la primera?

8. ¿Cuántas variables tiene la ecuación obtenida en el paso anterior?

Actividad 3.

Trabajo en equipos

1. Resolver en equipo por reducción (suma o resta) los siguientes sistemas anotando encada caso los sistemas equivalentes respectivos que se obtienen.

$$1)\ \begin{cases} 3v + s = 4 \\ v - 2s = 2 \end{cases},\ 2)\ \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases},\ 3)\ \begin{cases} 2a + b = 12 \\ a - 2b = 3 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 7m + 5n = 50 \\ 2m + n = 13 \end{cases}$$

2. Describir por escrito el procedimiento que siguieron para resolver un sistema 2x2 dado.

3. Resolver por este método sistemas explicando por escrito los resultados obtenidos[72]**:**

4. $$1)\ \begin{cases} 3v + s = 4 \\ v - 2s = 2 \end{cases},\ 2)\ \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - \dfrac{2}{3}y = \dfrac{7}{3} \end{cases},\ 3)\ \begin{cases} 2x + 6y = 7 \\ 6x + 18b = 21 \end{cases}$$

Tarea para resolver en casa.

Hacer un cuadro sinóptico que sintetice el comportamiento de los sistemas 2x 2 de acuerdo al número de soluciones.

[72] Se trataría de conducirlos, con preguntas insertadas, para que obtengan ecuaciones equivalentes. Y que interpreten el comportamiento de esos sistemas.

14.7

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 7).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- Introducir literales en algunos términos de las ecuaciones, analizar y resolver el sistema así formado.

Actividad 1. Revisión de la tarea en común por el docente y los alumnos.

Se debe verificar la información incluida en un cuadro sinóptico.

A partir de un problema que tenga como modelo geométrico un rectángulo cuyas dimensiones pueden variar. Este da lugar a la inserción de una familia de sistemas lineales en dos variables, tal como el siguiente:

$$\begin{cases} 3x+2y=m \\ 2x+y=n \end{cases} \quad (1)$$

Se propone a los alumnos que resuelvan el sistema mediante el método de suma o resta.

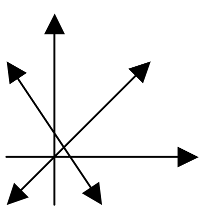
Se tendría como ejemplo de solución:

$$x=m-n$$
$$y=m-3n$$

Se les propone completar la tabla[73]:

m	n	y	x
10	28		

Tabla 27



Se pregunta a los alumnos.

1) ¿Cómo es el sistema considerado como modelo?

2) ¿Cuántas soluciones tendría?

3) ¿Cuántos valores podrían asignarse a m y n?

[73] Es importante introducir números racionales e incluso irracionales, sobre todo en alumnos que usan solamente enteros; pues esto da margen para discutir con ellos los conceptos involucrados en su inclusión, tales como el concepto de infinito, y el del sistema extendido de los números reales.

Se propone a los estudiantes que resuelvan el sistema (1) para m=4 y n= 8.

A fin de propiciar la iniciativa de que los alumnos formulen y perciban las ampliaciones de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones se les propone resolver problemas como el siguiente:

La Temperatura Fahrenheit = m (temperatura centígrada)+n, o F = mC+n, donde m y n, son constantes. En una presión de atmósfera, el agua del punto de ebullición es de 212 F o 100C y el punto helado de agua es de 32F o 0=C. a) Determine m y n. ¿b) Qué temperatura en grados Fahrenheit corresponde a -273C, la temperatura más baja asequible?

Se les propone que completen la tabla 4, amplificándola tanto como lo consideren necesario:

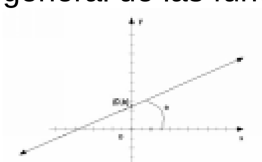
Celsius	Fahrenheit	
-273^0		

Tabla 28

Se les propone responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el punto de congelación del agua?
2. ¿Cuál es el punto de ebullición del agua?
3. ¿Cuál es el valor en grados Celsius de la temperatura máxima que soporta una persona, sin sufrir daños?

La ecuación $y = mx + b$ Determina la forma general de las funciones lineales.



Se les conduce mediante preguntas a formular el sistema:

$$1)\ \begin{cases} 0x + y = 32 \\ 100x + y = 212 \end{cases}$$

Tarea:

Investigar en que lugares de la Tierra se producen las temperaturas: a) más bajas y b) las más bajas. Y de la misma manera como varia la temperatura en un lugar determinado, el transcurso de un día, medida esta en intervalos de tiempo.

14.8

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 8).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

Analizar los métodos de sustitución e igualación para resolver sistemas lineales en dos variables.

El alumno:

- ❖ Resolverá sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.
- ❖ Simplificará sistemas 2x2 dados a fin de obtener una ecuación con una incógnita.

Actividad 1. Después de revisar la tarea con participación común docente alumnos.

Se les propone resolver en equipo un sistema como el siguiente:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Preguntándoles cual es la similitud de éste sistema con los vistos en sesiones previas.

Una vez que lo han resuelto se les pregunta ¿Cuál fue el método que utilizaron?

Actividad 2.

Si aun persiste el hábito de resolver los sistemas de ecuaciones por suma o resta se les propone la solución de otro sistema similar como el siguiente:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$$

Se les pregunta:

1. ¿Cuál es la diferencia en cada sistema dado?
2. ¿En que consiste esa diferencia?
3. ¿Qué significa que una variable esté despejada en una ecuación dada?
4. ¿Cómo se utilizó el hecho anterior para obtener una ecuación con una incógnita?

Se les pregunta ¿Cómo son los sistemas que se dan a continuación?

$$1)\ \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 4x + 4y = 12 \end{cases},\quad b)\begin{cases} x = 3y \\ 4x + 4y = 12 \end{cases}$$

Se les pide también que expliquen el porque de su respuesta a la pregunta previa.

i) ¿Cómo se describe el método que se utilizo para resolver el sistema del inciso a?

ii) ¿Qué es lo primero que se haría al aplicar este nuevo método?

iii) ¿Cómo se utilizaría ahora lo que se obtuvo al despejar una variable? ¿Por qué?

iv) Describe por escrito y verbalmente, detalladamente, el procedimiento que se sigue en este método de resolución.

Actividad 3.

Ahora, resuelve aplicando este método los siguientes sistemas:

$$1 \begin{cases} 5x = 10 \\ x - 3y = 9 \end{cases}, \ 2 \quad 1 \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 4 \end{cases}, \ 3 \begin{cases} -2x + y = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Una vez concluida esta actividad, se pide a los estudiantes que:

Discutan en equipo las ventajas y desventajas que tiene este método y que expongan sus conclusiones.

El profesor dirige la reelaboración de un cuadro sinóptico, y explica haciendo participar a los estudiantes haciendo una síntesis de los conocimientos que se han estado construyendo.

Tarea para realizar en casa:

Analiza la disposición de los siguientes sistemas y resuélvelos con un método diferente a los estudiados.

$$1) \begin{cases} x = 9 \\ x = y + 2 \end{cases}, \ 2) \quad \begin{cases} y = x + 5 \\ y = 3x \end{cases}, \ 3) \begin{cases} 2x + 7y = 11 \\ 3x - 6y = 14 \end{cases}$$

14.9

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 9).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- Que el alumno concluya lo estudiado en la sesión previa.
- Que resuelva ecuaciones sistemas de dos ecuaciones en dos variables (2x2) por el método de igualación.

Actividad 1.

Revisión de la tarea

A fin de aclarar la elección de las variables se analiza el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 11 \\ 3x - 6y = 14 \end{cases}$$

Actividad 2.

1. ¿Qué aspectos se han tratado respecto a sistemas de ecuaciones?

2. ¿En general?

3. ¿En particular?

4. ¿Cuáles son los conceptos relacionados?

5. ¿Cómo se clasifican las ecuaciones de acuerdo al número de soluciones?

6. ¿Cuáles son las características de cada una de las situaciones anteriores?

7. ¿Cuáles son los métodos de solución estudiados?

8. ¿Cuántos son los métodos algebraicos basados en una estrategia general?

Guiados por el maestro se lleva a los alumnos a la compresión de la siguiente conclusión:

Sinopsis:

Aspectos que se han tratado sobre sistemas de ecuaciones:

I. En general: Definición

II. En particular para sistemas 2x2

a) Conceptos relacionados:
   1) Ecuaciones indeterminadas.
   2) Ecuaciones equivalentes
   3) Sistemas equivalentes
   4) Simultaneidad.
   5) Solución de un sistema dado.

b) Clasificación de acuerdo al número de soluciones:
   1) Una solución.
   2) Muchas soluciones.
   3) Ninguna solución.

   Para cada una de tres situaciones, se cuenta con:
   - Características de la estructura del sistema.
   - Una interpretación gráfica.
   - Una interpretación de los resultados al aplicar el método algebraico.

c) Métodos de resolución:
   1) Usando diagramas.
   2) Método gráfico.
   3) Tres métodos algebraicos basados en una estrategia general son:
      - ✓ Suma o resta(reducción)
      - ✓ Sustitución.
      - ✓ Igualación.

Actividades realizadas en torno a problemas

1. Redacción del problema.
2. A partir de un problema dado, se construye el sistema(modelo) que lo resuelve.
3. Dentro del contexto de algunos problemas se analizo:

3.1 El tipo de números que pueden ser solución o no del problema.

3.2 Las características de las condiciones que llevarían a que el problema no tenga solución, o tenga muchas.

4. A través de un problema especifico dado, se ha ilustrado:

4.1 Una forma de extenderlo(hacerlo mas general)

4.2 La manera de **plantear** el problema inverso.

Se les propone que ellos mismos describan en paráfrasis los conceptos vertidos en los cuadros previos. Escribiendo ejemplos que sean pertinentes para su aprendizaje. En tal caso retomaran en cada ejemplo un problema, preferentemente inventado por ellos, y a partir de este describirán todo el proceso desde el modelo inicial (planteamiento) hasta la solución e incluso la comprobación de esta.

14.10

MATEMÁTICAS__

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 10).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- El alumno deducirá el método de determinantes en sistemas 2x2, como una síntesis de los tres métodos algebraicos anteriores[74].
- Que al alumno desarrolle una manipulación mas amplia de y abstracta de los sistemas y métodos con los han estado estudiando.

Actividad 1. En equipo:

Dado el sistema 2x2, siguiente:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \text{…Ecuación 1} \\ a_2x+b_2y=c_2 & \text{…Ecuación 2} \end{cases}$$

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué representa este sistema?
2. ¿Qué papel juegan las literales en cada una de las expresiones algebraicas?
3. Resuelve por suma o resta el sistema, procediendo como sigue.

1) Primero elimina y. ¿Qué obtuviste?

2) Ahora elimina x. ¿Qué obtuviste?

---

74 Ilustrando con ello un procedimiento que es común en el quehacer matemático.

Con la ayuda del docente los alumnos deben llegar a:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \text{...Ecuación 1} \\ a_2x+b_2y=c_2 & \text{...Ecuación 2} \end{cases}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\ \mathrm{y}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Actividad 2. Resuelvan en equipo los sistemas siguientes:

$$1)\ \begin{cases} 12x+17y=13 \\ 13x-16y=14 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} x+8=y+9 \\ y-4=x+2 \end{cases},$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=-\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=-\dfrac{7}{12} \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=12 \end{cases}$$

¿Qué opinas sobre el poder de las fórmulas?

En equipo obtengan las fórmulas anteriores.

Tarea para hacer en casa Analizar (y escribir las conclusiones de este análisis):

1. ¿Cómo son los numeradores?
2. ¿Cómo son los denominadores?
3. ¿Cuáles coeficientes intervienen en cada caso?
4. Representen con flechas, colores o de alguna otra forma significativa, las operaciones establecidas en las fórmulas las operaciones establecidas para x y y considerando los siguientes esquemas:

$$x:\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\qquad \mathrm{y}:\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

14.11

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 11).

Propósitos:

- Que el aluno arribe a la conclusión de la obtención de los determinantes de orden 2x2
- Obtengan la simbolización para los determinantes usados en los sistemas 2x2

Actividad1. Revisión de la tarea: se analizan los diversos diagramas resueltos.

.Se propone que los alumnos analicen en equipo diagramas tales como los que se presentan a continuación:

1. ¿Cómo son los dos denominadores?
2. ¿Cómo se obtienen?
3. ¿Cómo son los dos numeradores?
4. ¿Cómo se obtienen?

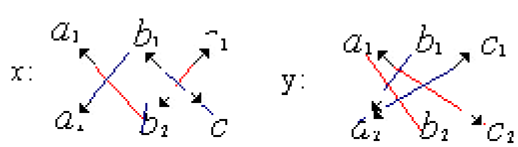
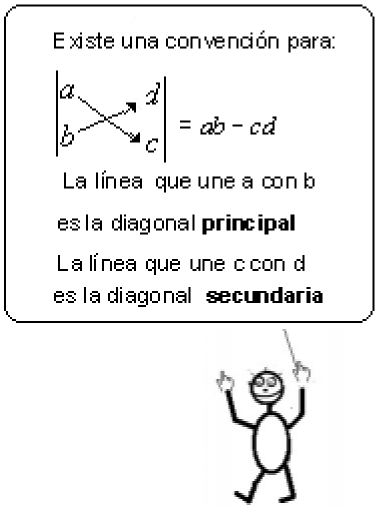


DIAGRAMA 2

1. ¿Qué puedes decir al observar y analizar los diagramas anteriores?

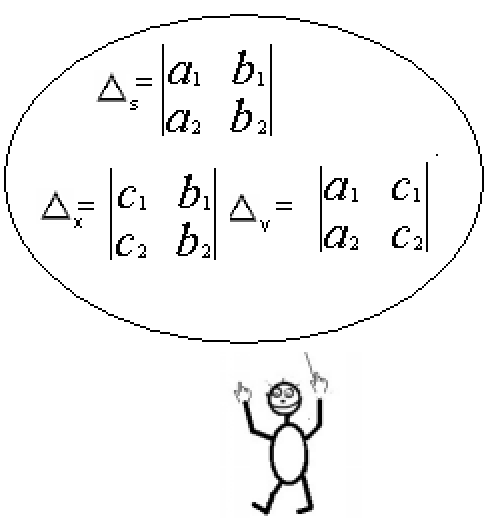


Observa la siguiente conclusión:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$\text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_2c_2 - a_2c_1$$

1. ¿Cómo se obtienen cada uno de los determinantes y su resultado?



La solución general de un sistema 2x2, de la forma.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Está dada por la llamada regla de kramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

O más brevemente:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad y=\frac{\Delta y}{\Delta s}$$

Analiza los resultados obtenidos y explica como se obtienen estos.

Tarea:

Resuelve por determinantes los sistemas siguientes:

$$1)\ \begin{cases} 7x+8y=49 \\ 5x+11y=36 \end{cases}, \quad 2)\ \begin{cases} 3x-28y=34 \\ 7y-5y=-6 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{y-6}{5}-\dfrac{2x-7}{8}=\dfrac{7}{6} \\ \dfrac{y-9}{7}-\dfrac{3x-2}{5}=0 \end{cases}, \quad 4)\ \begin{cases} 32x-27y=-2 \\ 8x=-9y \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 3x+2y=m \\ 2x+y=n \end{cases}$$

14.12

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 12).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- El alumno Establecerá relaciones en el valor nulo o no del determinante de un sistema 2x2 y el número de soluciones que tenga.
- También comprenderá la generalización del comportamiento de un determinante.

Actividad 1. Revisión común de la tarea, por el profesor y lo alumnos. Para ver, entre otras cosas, el tratamiento dado al sistema 5, ya que en este los términos independientes son literales y pudo haber causado ciertas dificultades en su tratamiento.

Actividad 1.

Trabajo en equipo. Cada alumno debe escribir un sistema de tal forma que:

1. Tenga una solución única. 2. No tenga solución. 3. Tenga muchas soluciones.

Después cada alumno debe elaborar una tabla análoga a la siguiente:

	Δ_S	$\underline{\Delta_X}$	Δ_y
1. Solución única			
2. Sin solución			
3. Muchas soluciones			

Tabla 29

En cada equipo:

1. Comparen los resultados obtenidos. ¿Cuáles son los hechos comunes?
2. ¿Cuáles son las relaciones de un sistema 2x2 y el comportamiento de los valores de los determinantes: Δ_S, $\underline{\Delta_X}$, Δ_y si estos son cero o no lo son?
3. ¿Cuál es el significado de que Δ_S sea cero?
4. Es decir si $\Delta_S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ significa que $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ lo que es equivalente a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ¿Porque? Recuerda que dos fracciones son equivalentes si $a_1 b_2 = a_2 b_1$ que implica $a_2 = k a_1$ y $b_2 = k b_1$ ¿Recuerdas que es lo que estableciste en el cuadro sinóptico?

Tarea para casa:

a) Relacionar de alguna manera el número de soluciones de un sistema 2x2, con la interpretación gráfica y con los determinantes.

b) Inventar (redactar) un problema que incluya tres variables (incógnitas

14.13

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 13).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- El alumno resolverá sistemas de tres ecuaciones con tres variables.

Actividad 1. En equipos, analizar y resolver el siguiente enigma:

Los números en los círculos grandes son la suma de los números que están en los círculos pequeños adyacentes a él. ¿Cuál es la suma de los números en los círculos pequeños?

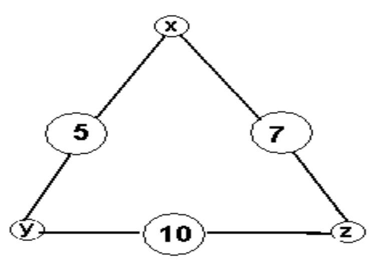


Figura 5

¿Cuáles es el modelo matemático que se obtiene al resolver el enigma?

Inventa otros dos triangulas similares al anterior.

1. ¿Qué obtienes al considerar los tres triángulos?

2. ¿Cómo se resuelve un sistema 3x3? Sugerencia obtengan dos ecuaciones con dos incógnitas por algún método conocido.

Actividad 2. En equipos:

Analizar las siguientes ecuaciones: $$\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ y+z=6 \\ y+z=7 \end{array}$$

.

1. ¿Cómo esta compuesto esté sistema?
2. ¿Cuántas variables incluye?
3. ¿Qué dices de la segunda y tercera ecuación?
4. ¿Se podría escribir el sistema anterior como sigue? $$\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ 0x+y+z=6 \\ 0x+y+z=7 \end{array}$$
5. ¿Para qué se escribiría así?

Dados los sistemas:

$$1.\ \begin{cases} x+2y=-3 \\ y+2=1 \\ 3y+2z=-2 \end{cases},\quad 2.\ \begin{cases} x+y=5 \\ y+z=-1 \\ z+x=-9 \end{cases} \text{,y}\quad 3.\ \begin{cases} x+2y=-3 \\ y+2=1 \\ 3y+2z=-2 \end{cases}$$

a) ¿Cómo se escribirían con todas y cada una de las variables cada uno de los sistemas?

b) ¿Para qué se haría lo anterior?

Actividad 2. En equipo obtener el modelo matemático del problema que se presenta a continuación.

Problema: Un agricultor necesita 1200 kilos de un compuesto de tres tipos que debe contener tres tipos de fertilizantes igual cantidad Sulfato de amonio que de fertilizante de Borrego(A) y tres de Azufre (B). Si el fertilizante se vende en sacos de 70 kilos para el tipo Azufre, de 50 kilos para el de borrego y de 40 kilos para el sulfato de amonio(C). ¿Cuántos sacos de cada tipo necesita comprar para obtener la mezcla deseada?

Total de fertilizantes, 1200 kilos.

1. ¿Cuál es la ecuación que se obtiene al considerar la cantidad de sacos de cada tipo de fertilizantes y la cantidad total del compuesto?
2. ¿Qué ecuación se deduce al ponderar las proporciones indicadas de de los fertilizantes de tipo A y C?
3. ¿Qué ecuación se plantea al observar la porción de fertilizante A en relación a la cantidad del fertilizante de tipo B?
4. ¿Cuál es el sistema 3x3 que se ha establecido como modelo del problema?

L a solución[75] $70x + 50y + 60z = 1200$

Las proporciones indicadas determinan dos ecuaciones: como debe haber la misma cantidad del fertilizante A que de C:

$70x = 40Z$

Y como debe haber 3 partes de fertilizante A por 2 partes del fertilizante B:

$$\frac{70x}{3} = \frac{40y}{2}$$

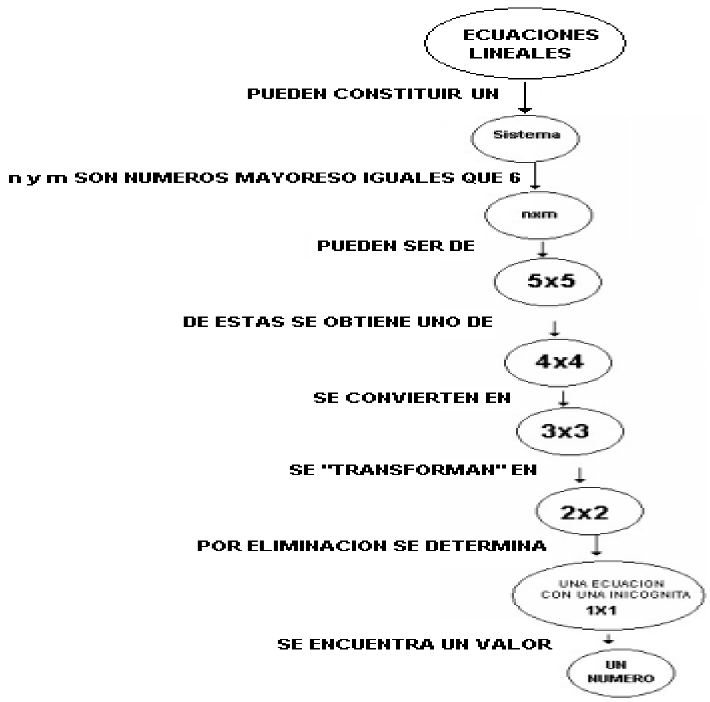
Se obtiene el sistema:

$$70x + 50y + 60z = 1200$$
$$70x - 40z = 0$$
$$140x - 120y = 0$$

[75] El profesor guiaría a los alumnos para que arribaran al sistema 3x3 requerido.

Actividad 3.En equipo

Resolver por el método de eliminación por suma o resta el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+2z=3 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$



Mapa conceptual 2

Tarea para hacer en casa. Resolver los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+2z=6 \\ x-y-3z=4 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 3x-z=12 \\ y+z=-2 \\ z+x=-8 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} y+z=-10 \\ 2x+z=7 \\ x+y=1 \end{cases}$

Explicando el procedimiento seguido, paso a paso, sin omitir ningún detalle. Investigar como se aplican y calculan los determinantes[76] para resolver sistemas 3x3.

---

[76] El alumno puede consultar software matemático que le permita confirmar sus aprendizajes y/o comparar sus resultados, y acceder a la solución de

14.14

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (de primer grado con dos incógnitas).

Clase (sesión 14).

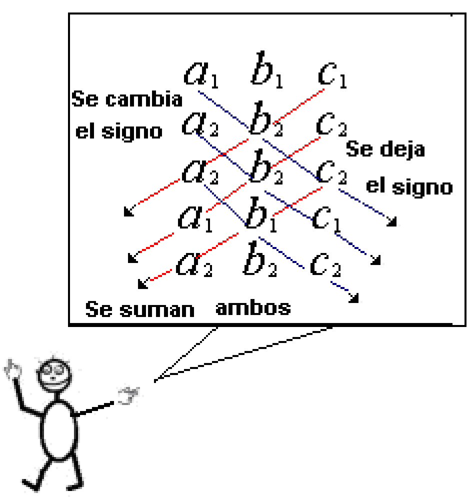
Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- El alumno resolverá sistemas de tres ecuaciones con tres variables por determinantes.

Revisión de la tarea. El docente en comunidad con los alumnos revisará los ejercicios que hayan trabajado los alumnos, y despejará las dudas planteando otras con la finalidad que el alumno avance en su aprendizaje.



---

determinantes y matrices de orden mayor nxm, n= 2, 3, 4,… m= 2, 3, 4,…. Un software sencillo de utilizar es el que desarrollaron investigadores de la Universidad de Texas, ver anexo 8(Disco flexible).

Actividad 1. En equipo resolver el siguiente problema:

5 kilos de azúcar, 3 de café y 4 de frijoles cuestan $380.00; 4 de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles $410.00; 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan $40.00 ¿Cuál es el precio de un kilo de cada mercancía?

1. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se obtiene como modelo matemático del problema?
2. ¿Cuáles son los determinantes que se obtienen a partir del sistema?
3. ¿Cuál es le valor de Δ_s, Δ_x, Δ_y?
4. ¿Cuál es el valor de x, y "y" z?
5. ¿Cuánto vale cada kilo de azúcar, café y fríjol?

Actividad 2. En equipo resuelve por determinantes cada uno de los siguientes sistemas:

$$1)\ \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=-4 \\ y-z=-1 \end{cases}\quad 3)\ \begin{cases} 12x+25y=29 \\ 24y+32z=100 \\ 12x-43y-89z=200 \end{cases}$$

Actividad 2. En equipo escriban una composición respecto a las ventajas del método de solución por determinantes.

Elabora un mapa conceptual respecto a los sistemas de ecuaciones y su solución por determinantes.

Tarea para hacer en casa.

1. ¿Cómo se resolvería un sistema de más de tres ecuaciones con más de tres variables?
2. ¿Cómo se resolvería un sistema de más de tres ecuaciones con más de tres variables, por determinantes?
3. Investiga el significado de matriz

14.15

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en tres variables (3x3).

Clase (sesión 15).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

- Conozca el concepto y la aplicación de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- El alumno resolverá sistemas de ecuaciones lineales, 2x2 y 3x3, mediante matrices.

Actividad 1. Revisión de la tarea.

1. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas del método de determinantes según la configuración que tenga el sistema que se va resolver?
2. Considerando que los productos que se calculan para obtener un determinante siempre están conformados por factores que son coeficientes de distintas variables en distinta ecuación:

2.1 ¿Cómo es la dificultad en el caso 4x4 4n adelante?

2.2 ¿Esto dificulta la aplicación del método?

3. ¿Existirá otro método diferente a los vistos hasta aquí en clase que sea más eficiente?

Actividad 2. En equipos analizar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
2x + 3y - 2z &= 3 \\
x \;+\; y + 2z &= 4 \\
x \;+\; y + \;z &= 4
\end{aligned}
$$

1. ¿Qué sucede si se cambian (intercambian) de lugar las ecuaciones?
2. ¿Afectaría la solución del sistema el intercambio de ecuaciones?
3. ¿Cómo es el sistema respecto al que se obtiene al intercambian dos ecuaciones de lugar, por ejemplo la 2 y la 3?

$$
\begin{array}{lclcl}
2x + 3y - 2z = 3 & & x + y + 2z = 4 & & x + y + 2z = 4 \\
x \;+\; y + 2z = 4 & \text{son equivalentes} & 0x + y - \;z = 0 & \text{son equivalentes} & 0x + y + \;0z = 1 \\
x \;+\; y + \;z = 4 & & 0x + 0y + z = 1 & & 0x + 0y + z = 1
\end{array}
$$

Tarea para resolver en casa:

1. Escriba V (verdadero) o F (falso), en cada uno de los pares de sistemas siguientes[77]:

$$
a) \begin{cases} 5x-3z=12 \\ 5x+3y=0 \\ x+4z=13 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x+0y-3z=12 \\ 5x+3y+0z=0 \\ 5x+0y+20z=65 \end{cases} (\_\_)\; b) \begin{cases} 5x+0y-3z=12 \\ 5x+3y+0z=0 \\ -5x0y-20z=-65 \end{cases} \sim \begin{cases} 0x-+0y23z=-53 \\ 5x+3y0z=0 \\ x+0y+4z=13 \end{cases} (\_\_)
$$

$$
c) \begin{cases} 5x+0y-3z=12 \\ 5x+3y+0z=0 \\ x+0y+4z=13 \end{cases} \sim \begin{cases} x+0y+0z=\frac{6}{5} \\ 0x+y+0z=-2 \\ 0x+0y+z=\frac{59}{20} \end{cases} (\_\_)\; d) \begin{cases} 5x+0y-3z=12 \\ 5x+3y+0z=0 \\ -5x0y-20z=-65 \end{cases} \sim \begin{cases} x+0y+0z=\frac{6}{5} \\ 0x+y+0z=-2 \\ 0x+0y+z=\frac{59}{20} \end{cases} (\_\_)
$$

Justifique su respuesta por escrito y en clase verbalmente.

1. Resolver los siguientes sistemas por matrices[78]: $a) \begin{cases} x+2y-3z=8 \\ 5x-3z=2 \\ 2z-y=-7 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+2z=3 \\ -x+y+z=7 \end{cases}$

[77] Pueden usar cualquier software matemático sobre algebra lineal para resolver las matrices, no obstante el razonamiento para sus respuestas es independiente del uso de cualquier máquina.

14.16

MATEMÁTICAS__

Grupo _____

UNIDAD __. Sistemas de ecuaciones lineales en tres variables (3x3).

Clase (sesión 16).

Fecha_____________ Hora______

Nombre del alumno ____

Propósitos:

La aplicación del método de Gauss-Jordan.

Revisión de la tarea, como actividad común, a fin de confirmar la correcta aplicación del método correspondiente.

Resolver el problema 1:

5. En una fábrica se desea planear la producción de tres artículos para los siguientes tres años. Durante este tiempo el equipo no se aumentará y la producción durante este periodo de tiempo será constante; es decir serán producidas x, y, z unidades del primer, segundo y tercer artículos, respectivamente. Los datos son:

1er año	$5,980,600.00
2o año	$7,986,578.00
3er año	$8,678,945.00

Tabla 30

3) Los precios que tendrá cada artículo serán los de la tabla 31:

---

[78] Para comprobar y comparar, se puede utilizar el software matemático. O cualquier otro equivalente, anexo 10, En CD.

4) Se venderá toda la producción.

¿Cuántas unidades de cada artículo se deben de producir para que con las ventas se obtengan los ingresos que se establecen en la tabla 31?

Artículo	Primer año	Segundo año	Tercer año
Primero	$3,500.00	$3,700.00	$4,200.00
Segundo	$6,000.00	$7,450.00	$9,000.00
Tercero	$8,000.00	$9,800.00	$9,780.00

Tabla 31

Lo que se debe encontrar es alguna solución del sistema[79]:

$$\begin{aligned} 3500x + 600y + 8000z &= 5980600 \\ 3700x + 7450y + 9800z &= 7986578 \\ 4200x + 9000y + 9780z &= 8678945 \end{aligned}$$

Se hace una sesión de laboratorio[80] de computación y se resuelve este sistema usando un software matemático idóneo.

Se pide a los alumnos que revisen la solución paso a paso.

Dejando a los alumnos su estudio como tarea previa.-, también se puede incluir como estrategia coinstruccional haciendo preguntas intercaladas durante el desarrollo de la sesión (clase).

---

[79] El alumno puede usar software matemático (algebra lineal), no obstante debe explicar los procedimientos que llevan a la determinación del resultado.

[80] En las Preparatorias y en los CCH de la UNAM; así, como en cualquier plantel de bachillerato se cuenta con laboratorio de computación para tal efecto.

- Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces x + a = y + a$

- Si a ambos miembros de una ecuación se les resta un mismo número, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces\ x - a = y - a$

- Si a ambos miembros de una ecuación se les multiplica por un mismo número distinto de cero, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces\ xa = ya, a \neq 0$

- Si a ambos miembros de una ecuación se les divide por un mismo número distinto de cero, la ecuación no se altera: $Si\ x = y,\ entonces\ \frac{x}{a} = \frac{y}{a}, a \neq 0$

Al aplicar estas propiedades en una ecuación dada, se obtienen otras ecuaciones equivalentes a la original. Son ecuaciones equivalentes las que tienen la misma solución. Resolver una ecuación dada es transformarla en otras ecuaciones cada vez más sencillas mediante una sucesión de pasos hasta obtener su solución

15. **ANEXO 8**. EXAMEN PARCIAL EXPERIMENTAL (POSTEST).

EXAMEN PARCIAL (EXPERIMENTAL) DE MATEMÁTICAS SECCIÓN CORRESPONDIENTES A ECUACIONES LINEALES. Aplicado al concluir la aplicación de la propuesta didáctica.

1. Una ecuación lineal es de la forma:

$a)$ $\mathrm{b}xy + cy + dx + f = 0$ ( ), b) $ax + by + zc + d = 0$( ), c) Las dos anteriores ( )

d) ninguna de las anteriores ( ).

2. La ecuación lineal general $\mathrm{A}x + By + C = 0$, define implícitamente a y en función de x, si $B \neq 0$. De ahí se tiene que la forma explicita de la función lineal cuya forma es pendiente y ordenada al origen es:

a) $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ( ) b) $y = -\frac{C}{B}x - \frac{A}{B}$ ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

3. La ecuación lineal $\mathrm{m}x + ny + p = 0;\ m, n$ no ambas cero :

a) Tiene dos soluciones ( ), b) Tiene tres soluciones ( ) c) Tiene muchas soluciones. ( )

4. La ecuación $\frac{7x}{4}-\frac{3y}{8}+\frac{1}{2}=0$, corta a los ejes coordenados en los puntos:

a) $\left(0,\frac{4}{3}\right),\left(\frac{2}{7},0\right)$ ( ) b) $\left(0,\frac{4}{3}\right),\left(-\frac{2}{7},0\right)$ ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

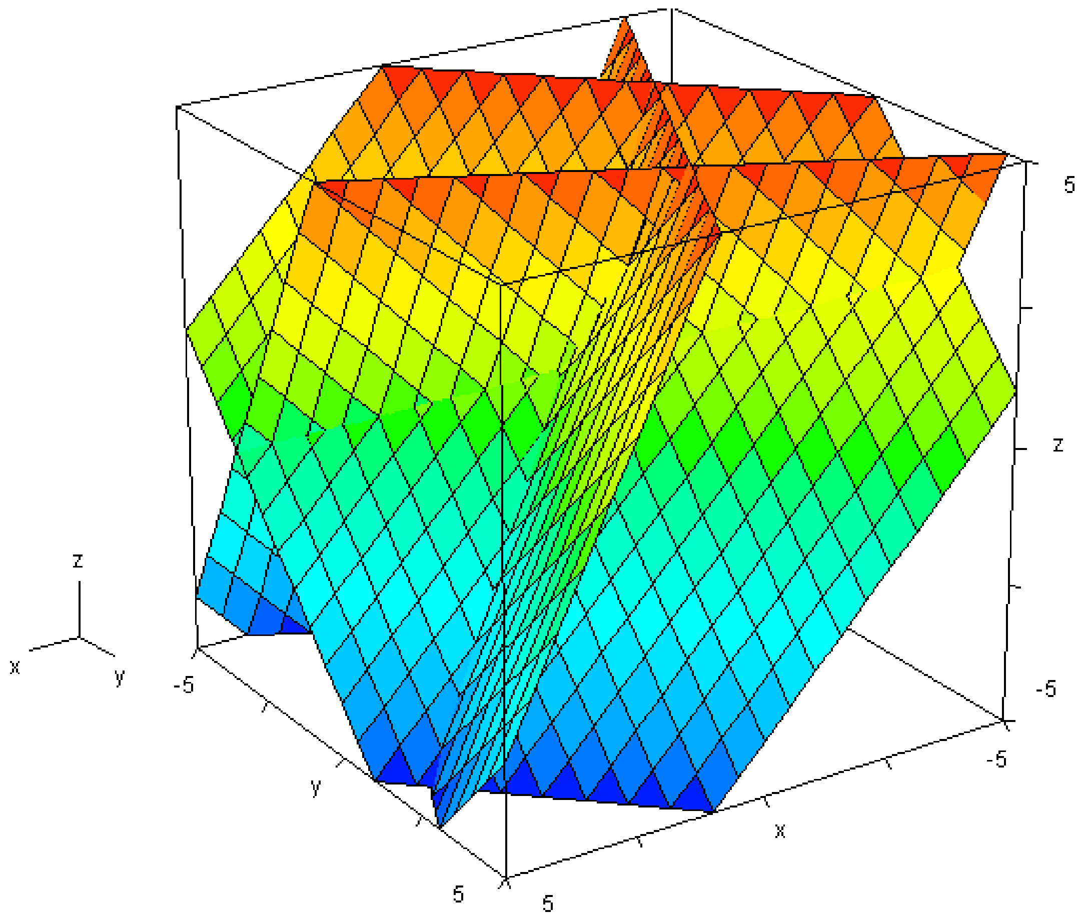
5. El sistema $\begin{cases} 3x+10y+7z+1=0 & (1) \\ -12x+2y-6z=4 & (2) \\ 5x+11y+z-2=0 & (3) \end{cases}$, tiene como solución a la terna ordenada de números reales:

a) $\left(\frac{56}{97},\frac{8}{97},\frac{174}{97}\right)$ ( ) b) $\left(\frac{56}{97},\frac{8}{97},-\frac{174}{97}\right)$ ( ) c) $\left(\frac{56}{97},-\frac{8}{97},\frac{174}{97}\right)$ ( )

d) $\left(-\frac{56}{97},\frac{8}{97},\frac{174}{97}\right)$ e) Ninguna de las anteriores ( )

6. La representación grafica del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x+2y-z=-1 & (2) \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ es

La grafica tridimensional de la figura:



GRAFICA 4

a) Falso ( ) b) Verdadero ( )

7. La suma de dos números es 234 y su diferencia es 123 ¿Cuáles son dichos números? La solución es:

a) $x=\frac{237}{2}, y=\frac{11}{2}$ ( ) b) $x=-\frac{237}{2}, y=-\frac{11}{2}$ ( ) c) Ninguna de las anteriores( )

8. El determinante de la matriz $\begin{bmatrix} -70 & -66 \\ 28 & 120 \end{bmatrix}$ es igual a:

a) -6552 ( ) b) 6552 ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

9. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 100 & -122 \\ 256 & -435 \end{bmatrix}$ Su matriz inversa es

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0346 & -0.00994 \\ 0.02087 & -0.00815 \end{bmatrix}$ ( ) b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0346 & 0.00994 \\ 0.02087 & 0.00815 \end{bmatrix}$ ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

10. Para resolver el sistema $\begin{cases} 200x + 300y - 356z = 515 & (1) \\ 252x - 123y + 246z = -427 & (2) \\ 456x + 654y + 165z = -678 & (3) \end{cases}$ se puede escribir mediante la matriz extendida siguiente:

a) $\begin{bmatrix} 200 & 300 & -356 & . & 515 \\ 252 & -123 & 246 & . & -427 \\ 456 & 654 & 165 & . & -678 \end{bmatrix}$ ( )

b) $\begin{bmatrix} 200 & 300 & -356 \\ 252 & -123 & 246 \\ 456 & 654 & 165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 515 \\ -427 \\ -678 \end{bmatrix}$ ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

11. A fin de resolver cualquier sistema de ecuaciones, como el que se da a continuación $\begin{cases} 12x+53y+45z=47 & (1) \\ 20x-15y+89z=56 & (2) \\ 35x-64y+123z=90 & (3) \end{cases}$, mediante eliminación por reducción (suma o resta):

a) Se reduce el sistema de tres ecuaciones a dos y de dos a una y se resuelve esta ultima ( ) b) Se sustituyen el valor obtenido de una incógnita en una ecuación de dos incógnitas y después el valor de dos en una ecuación de tres incógnitas ( )

c) Las dos anteriores ( ) d) Ninguna de las anteriores ( )

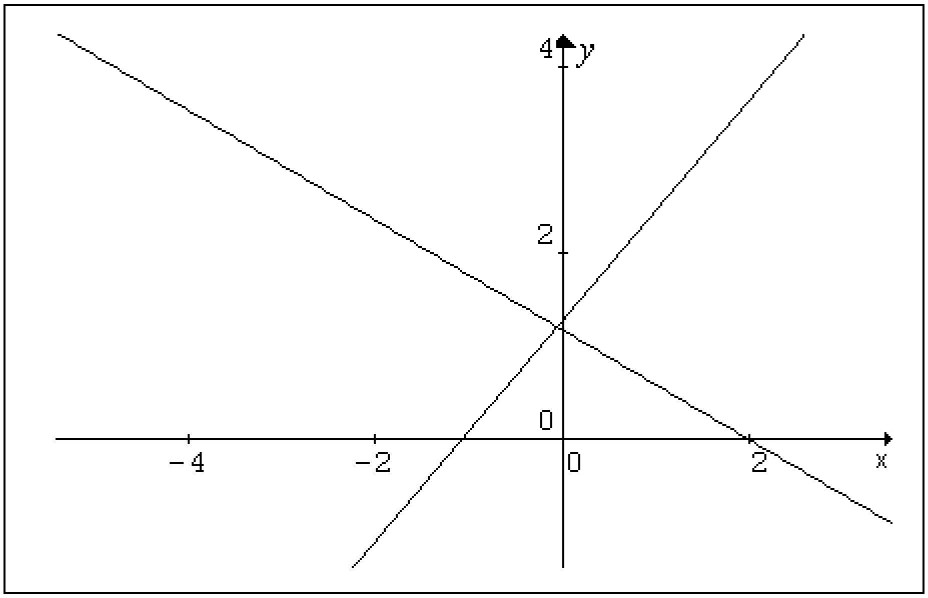
12. La suma de los determinantes $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}$ es el determinante:

a) $\begin{vmatrix} a_1m_1+a_2n_1 & a_1m_2+a_2n_2 \\ b_1m_1+b_2n_1 & b_1m_2+b_2n_2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_1m_1+a_2m_2 & a_1n_1+a_2n_2 \\ b_1m_1+b_2m_1 & b_1n_1+b_2n_2 \end{vmatrix}$ c) ninguna de las anteriores ( )

13. La solución de $\begin{vmatrix} 234 & -543 & 765 \\ 893 & 876 & 235 \\ 1000 & 567 & 980 \end{vmatrix}$ es:

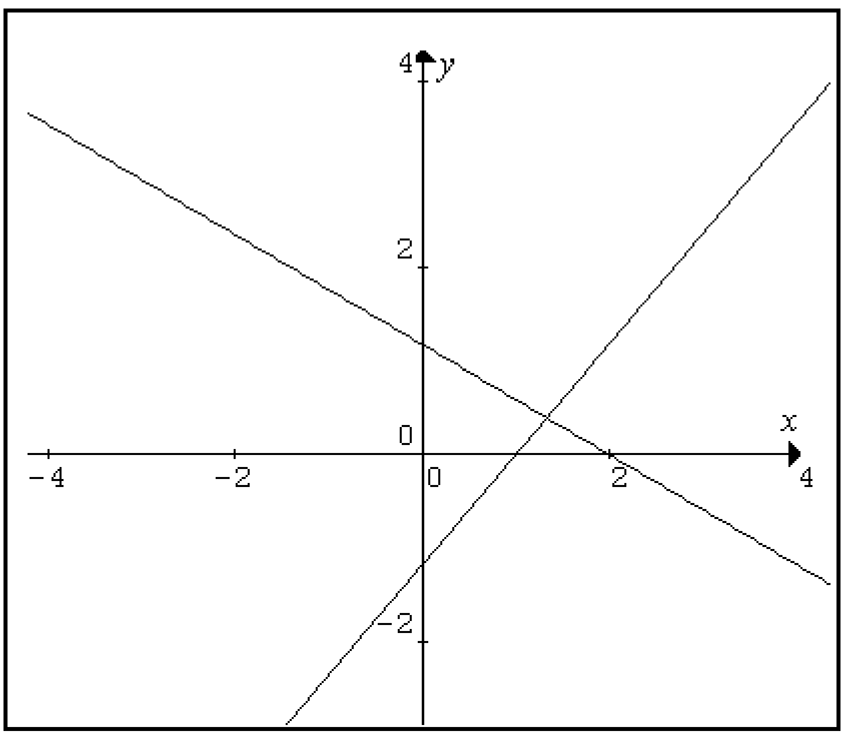
a) -2345042 25 ( ) b) 2345042 25 ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

14. La solución grafica del sistema $\begin{cases} 10x+17y=20 & (1) \\ 13x-11y=-14 & (2) \end{cases}$ es:



GRAFICA 5

a) (   )



GRAFICA 6

b) (   )

c) Ninguna de las anteriores (   )

15. Al resolver el problema siguiente: “La suma dos números es 48 y su diferencia es 15 el modelo matemático que se obtiene al inicio de la solución es:

a) $\begin{cases} x+y=48 & (1) \\ x-y=35 & (2) \end{cases}$ ( ) b) $\begin{cases} x+y=48 & (1) \\ y-x=35 & (2) \end{cases}$

c) Las dos anteriores ( ) d) Ninguna de las anteriores ( )

16. La solución del sistema $\begin{cases} 3x+2y+5z=92 & (1) \\ 4x-2y+6z=100 & (2) \\ 7x+7y-9z=500 & (3) \end{cases}$ es.

a) $x=\frac{7046}{147}$,y=$\frac{988}{147}, z=-\frac{279}{21}$ ( ) b) $x=\frac{7046}{147}$,y=-$\frac{988}{147}, z=\frac{279}{21}$ ( )

c) $x=-\frac{7046}{147}$,y=$\frac{988}{147}, z=\frac{279}{21}$ ( ) d) Ninguna de las anteriores ( )

17. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 400x+300y+120z=740 & (1) \\ 200x+412y+600z=344 & (2) \\ 800x-249y-222z=-444 & (3) \end{cases}$ el determinante del sistema es:

a) $\begin{vmatrix} 400 & 300 & 120 \\ 200 & 412 & 600 \\ 800 & -249 & -222 \end{vmatrix}$ ( ) b) $\begin{vmatrix} 740 & 300 & 120 \\ 344 & 412 & 600 \\ -444 & -249 & -222 \end{vmatrix}$ ( ) c) $\begin{vmatrix} 400 & 740 & 120 \\ 200 & 344 & 600 \\ 800 & -444 & -222 \end{vmatrix}$ ( )

d) Los tres anteriores(a, b y c) ( ) e) ninguno de los anteriores ( )

26. La matriz extendida para el sistema de

ecuaciones $\begin{cases} 44x+65y+87z=74 & (1) \\ 77x+32y+60z=-40 & (2) \\ 86x-22y-19z=18 & (3) \end{cases}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 44 & 65 & 87 & . & 74 \\ 77 & 32 & 60 & . & -40 \\ 86 & -22 & -19 & . & 8 \end{bmatrix}$ ( ) $\begin{bmatrix} 44 & 65 & 87 \\ 77 & 32 & 60 \\ 86 & -22 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 \\ -40 \\ 18 \end{bmatrix}$

c) ninguna de las anteriores ( )

18. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es matriz:

a) Escalonada ( ) b) Idéntica ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )

19. Dado un sistema de 2 0 más ecuaciones con dos o más incógnitas, el resultado de que Δ_s sea igual a cero implica que el sistema dado:

a) No tiene ninguna solución ( ), b) Tiene muchas soluciones ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

20. Al resolver por igualación el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+7y+=45 & (1) \\ 8x+3y=-51 & (2) \end{cases}$$ es:

a) $x=\frac{50}{47}, y=-\frac{55}{47}$ ( ) b) $x=-\frac{50}{47}, y=\frac{55}{47}$ ( )

c) Ninguna de las anteriores ( )

21. En el sistema $\begin{cases} 3xp+2yq=r \\ 2xm+yn=s \end{cases}$ I:

a) Las incógnitas son x, y ( ) b) Las incógnitas son p, q ( ) c) Las incógnitas son r, s ( ) d) Las incógnitas son m, n ( ) e) Ninguna de las anteriores ( )

22. La matriz transpuesta de $\begin{vmatrix} 120 & -600 \\ 700 & 110 \end{vmatrix}$ es la matriz:

a) $\begin{vmatrix} 120 & 700 \\ -600 & 110 \end{vmatrix}$ ( ) b) $\begin{vmatrix} 700 & 120 \\ -600 & 110 \end{vmatrix}$ ( ) c) ninguna de las anteriores ( )

23. La matriz inversa de $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ es :

a) $\begin{vmatrix} -0.04545 & 0.22727 \\ 0.18182 & 0.09091 \end{vmatrix}$ ( ) b) $\begin{vmatrix} 0.04545 & 0.22727 \\ 0.18182 & 0.09091 \end{vmatrix}$ ( ) c) ninguna de las anteriores ( )

27. Dado la ecuación $3x+7y+=-5$, completa la tabla siguiente:

Abscisa	Ordenada
-5	
-4.5	
-4	
-3.5	

Tabla 32

24. Despeja y de la ecuación: $\frac{9x}{5}-\frac{7y}{4}=3$

25. En ecuación $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$ esta escrita en su forma:

a) Normal ( ) b) Simétrica ( ) c) Ninguna de las anteriores ( )