



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“Producto inversivo y polígonos hiperbólicos”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :  
M A T E M Á T I C O  
P R E S E N T A :

AVILA BAEZ VICTOR MANUEL



DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

2005



m. 343648

FACI



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA II  
MEXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:


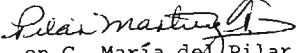

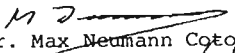

"Producto inversivo y polígonos hiperbólicos."

realizado por Avila Báez Victor Manuel

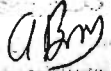
con número de cuenta 09950049-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:  
Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director   
Propietario Dr. Antonio Lascurain Orive.  
Propietario   
M. en C. María del Pilar Martínez Téllez.  
Propietario   
Dr. Guillermo Sienra Loera.  
Suplente   
Dr. Max Neumann Coto.  
Suplente   
M. en C. Francisco Struck Chávez.

Consejo Departamental de Matemáticas.

  
ABM

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.



# Agradecimientos

Doy gracias a mi Madre, a mi Hermano, a mi familia, a mis abuelos, tíos y primos por confiar en mí y permitirme terminar con éxito mi carrera, muchas gracias. También agradezco a la fundación Cristina (mi mamá otra vez) por el apoyo económico totalmente incondicional.

Al Dr. Antonio Lascurain Orive, por las clases y meses invertidos en mí, especialmente por mostrar mucha paciencia y animarme en mis errores y logros.

A mi novia Rosaura, por su apoyo y cariño durante todo este tiempo.

A mis amigos, pues esos ratos de estudio con ellos forman ahora parte de mi educación y calidad humana (Rosaura, Conchita, Mariana, Gabriela, Gisela, Magy, Esmirna, Sandra, Leticia, Eli, Silvia, Olga, Adriana, Analía, Abelardo, René, Manuel, Pedro, Francisco, Ártico, Guillermo y Marcos).



# Introducción

En las últimas décadas la geometría hiperbólica ha sido objeto de múltiples estudios, desde diferentes puntos de vista. Es notable su importancia en muchas de las ramas de las matemáticas, en particular en la topología 3-dimensional (cf. [8]).

En esta tesis se estudia primero el grupo general de Möbius actuando en  $\mathbb{R}^n$ . Se prueba que las funciones de este grupo son continuas con la métrica cordal. Se muestra también que estas funciones son conformes y que preservan la familia de esferas y planos. Posteriormente se hace un análisis detallado del elegante producto inversivo que incluye las interpretaciones geométricas. Algunos de estos resultados se usan posteriormente en el estudio de los Polígonos.

La médula de esta tesis son los resultados que describen la existencia de polígonos convexos con determinados ángulos (Teorema 2.2.1 y Teorema 2.2.3). Estos resultados, junto con la trigonometría básica de los triángulos hiperbólicos permiten probar importantes resultados sobre Cuadriláteros, Pentágonos y Hexágonos (Teorema 2.3.7, Teorema 2.4.1 y Teorema 2.5.2). En estos teoremas el resultado sobre Hexágonos (Teorema 2.5.2) se basa en el resultado para Pentágonos (Teorema 2.4.1) y este a su vez en el de Cuadriláteros (Teorema 2.3.7).

Aunque no se prueba a detalle todos los resultados básicos de la geometría hiperbólica que se usa en el texto, sí se demuestran los hechos que no son elementales, por ejemplo, el teorema de Pitágoras hiperbólico (Teorema 2.1.4), o la fórmula de la distancia de un punto a una geodésica (Teorema 2.3.3).





# Índice general

<b>1. Funciones de Möbius en <math>\mathbb{R}^n</math>.</b>	<b>1</b>
1.1. Proyección Estereográfica . . . . .	1
1.2. Reflexiones . . . . .	5
1.3. Métrica Cordal . . . . .	11
1.4. Grupo general de Möbius . . . . .	16
1.5. Producto Inverso . . . . .	25
1.5.1. Expresiones explícitas . . . . .	26
1.5.2. Interpretaciones Geométricas . . . . .	27
<b>2. Polígonos hiperbólicos</b>	<b>43</b>
2.1. Preliminares . . . . .	43
2.1.1. $PSL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	43
2.1.2. Densidad y Área hiperbólica . . . . .	45
2.1.3. Triángulos Hiperbólicos. . . . .	48
2.1.4. Modelo de Klein y Convexidad . . . . .	52
2.2. Área de un polígono hiperbólico . . . . .	55
2.3. Cuadriláteros . . . . .	61
2.4. Pentágonos . . . . .	71
2.5. Hexágonos . . . . .	75



# Capítulo 1

## Funciones de Möbius en $\mathbb{R}^n$ .

### 1.1. Proyección Estereográfica

Primero encajamos  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de manera natural, es decir, dada

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

se le asocia  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Queremos identificar los puntos de  $\mathbb{R}^n$  con los de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\},$$

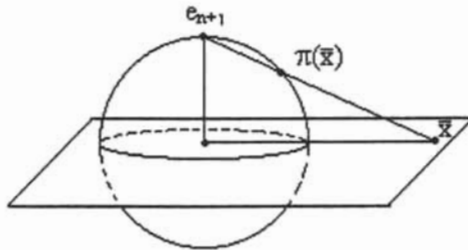


Figura 1.1: La proyección estereográfica

Para esto proyectamos desde  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$  a  $\bar{x}$ , para encontrar el punto de intersección en la esfera, si denotamos a este punto por  $\pi(x)$ , analíticamente se tiene (véase la Figura 1.1)

$$\pi(\bar{x}) = \bar{x} + t(e_{n+1} - \bar{x}),$$

donde

$$|\pi(\bar{x})|^2 = 1,$$

por lo que

$$\begin{aligned}(\bar{x} + t(e_{n+1} - \bar{x})) \cdot (\bar{x} + t(e_{n+1} - \bar{x})) &= 1 \\ |\bar{x}|^2 - 2t|\bar{x}|^2 + t^2(1 + |\bar{x}|^2) &= 1 \\ (1 + |\bar{x}|^2)t^2 - 2|\bar{x}|^2t + |\bar{x}|^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, se tiene

$$t = \frac{2|\bar{x}|^2 \pm \sqrt{4|\bar{x}|^4 - 4(|\bar{x}|^4 - 1)}}{2(1 + |\bar{x}|^2)} = \frac{|\bar{x}|^2 \pm 1}{|\bar{x}|^2 + 1}.$$

Si  $t=1$ , entonces  $\pi(\bar{x}) = e_{n+1}$ , por lo cual

$$t = \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}$$

y

$$\pi(\bar{x}) = \bar{x} + \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}(e_{n+1} - \bar{x}).$$

Ahora, si  $j < n+1$

$$[\pi(\bar{x})]_j = x_j + \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}(-x_j) = \frac{x_j|\bar{x}|^2 + x_j - x_j|\bar{x}|^2 + x_j}{|\bar{x}|^2 + 1}$$

$$[\pi(\bar{x})]_j = \frac{2x_j}{|\bar{x}|^2 + 1}$$

y

$$[\pi(\bar{x})]_{n+1} = x_{n+1} + \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}(1 - x_{n+1}) = \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}$$

Por lo tanto la función buscada  $\pi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{S}^n - \{e_{n+1}\}$  está dada por

$$\pi(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right). \quad (1.1)$$

Resulta que  $\pi$  es una biyección de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{S}^n - \{e_{n+1}\}$ . Checamos primero la inyectividad.

Si  $\pi(x) = \pi(y)$ , entonces

$$[\pi(x)]_{n+1} = [\pi(y)]_{n+1},$$

esto es

$$\frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}.$$

Ahora la función

$$\varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad t > 0$$

es creciente inyectiva, ya que

$$\varphi'(t) = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} > 0,$$

por lo tanto  $|x| = |y|$ . Por consiguiente, como  $[\pi(x)]_j = [\pi(y)]_j$ , se tiene

$$\frac{x_j}{|x|^2 + 1} = \frac{y_j}{|y|^2 + 1}$$

y  $x_j = y_j$ , por lo cual  $x = y$ . Por lo tanto  $\pi$  es inyectiva.

Para checar que  $\pi$  es suprayectiva en  $S^n - \{e_{n+1}\}$  basta checar que  $\pi$  tiene una inversa derecha, es decir, que existe  $\psi : S^n - \{e_{n+1}\} \mapsto \mathbb{R}^n$ , tal que  $\pi \circ \psi = Id$ .

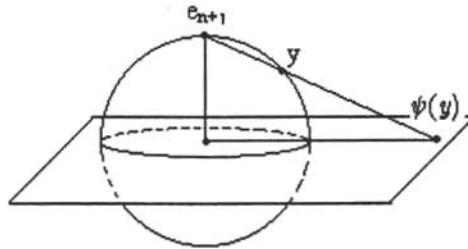


Figura 1.2: Proyección estereográfica

Para construir  $\psi$  si  $y$  es un punto en la esfera, trazando la recta por este punto y  $e_{n+1}$ , se busca la intersección de esta recta con  $\mathbb{R}^n$ , que denotamos por  $\psi(y)$ , (véase la Figura 1.2).

Escribiendo

$$\psi(y) = e_{n+1} + t(y - e_{n+1}) \in \mathbb{R}^n,$$

se debe cumplir,

$$\psi(y) \cdot e_{n+1} = 0,$$

es decir,

$$(e_{n+1} + t(y - e_{n+1})) \cdot e_{n+1} = 1 + ty_{n+1} - t = 0,$$

por lo cual

$$t = \frac{1}{1 - y_{n+1}}$$

y

$$\psi(y) = e_{n+1} + \frac{1}{1 - y_{n+1}}(y - e_{n+1}).$$

Por lo tanto la función  $\psi : S^n - \{e_{n+1}\} \mapsto \mathbb{R}^n$  está dada por

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \longrightarrow \left( \frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \frac{y_2}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right). \quad (1.2)$$

Finalmente calculamos  $\pi\psi$ .

$$\begin{aligned} [\pi(\psi(y))]_j &= \frac{\frac{2y_j}{1 - y_{n+1}}}{\left| \frac{y}{1 - y_{n+1}} \right|^2 + 1} = \frac{2y_j(1 - y_{n+1})}{|y|^2 + (1 - y_{n+1})^2} \\ &= \frac{2y_j(1 - y_{n+1})}{2 - 2y_{n+1}} = y_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [\pi(\psi(y))]_{n+1} &= \frac{|\psi(y)|^2 - 1}{|\psi(y)|^2 + 1} = \frac{\frac{|y|^2}{(1 - y_{n+1})^2} - 1}{\frac{|y|^2}{(1 - y_{n+1})^2} + 1} \\ &= \frac{|y|^2 - (1 - y_{n+1})^2}{|y|^2 + (1 - y_{n+1})^2} = \frac{1 - y_{n+1}^2 - 1 + 2y_{n+1} - y_{n+1}^2}{2 - 2y_{n+1}} = y_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo cual  $\pi \circ \psi = Id$ .

Obsérvese también que se sigue de la biyectividad de  $\pi$ , que también se tiene  $\psi \circ \pi = Id$ .

Es conveniente incluir al  $\infty$  en el estudio de las transformaciones de Möbius, se denota  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  al conjunto

$$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

De esta manera se tiene una biyección de  $S^n$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , asociando el polo norte  $e_{n+1}$  a  $\infty$ .

## 1.2. Reflexiones

Una esfera en  $\mathbb{R}^n$  está definida por la siguiente ecuación:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\},$$

denotamos a esta esfera por  $S(a, r)$ .

Se quiere definir la inversión o reflexión en la esfera  $S(a, r)$ , para esto dada  $x \neq a$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , se proyecta desde  $a$ , obteniéndose la ecuación (véase la Figura 1.3)

$$|t(x - a)||x - a| = r^2,$$

por lo que  $t = \frac{r^2}{|x - a|^2}$ .

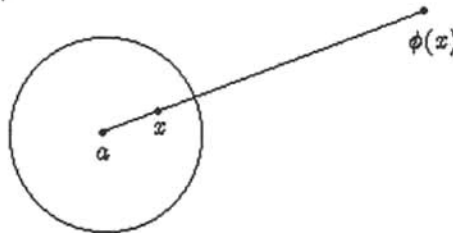


Figura 1.3: Inversión de la esfera.

Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1** Sea  $S(a, r)$  una esfera en  $\mathbb{R}^n$ , se define la reflexión en  $S(a, r)$  como la función  $\phi: \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  dada por

$$x \rightarrow \begin{cases} a + r^2 \frac{(x - a)}{|x - a|^2}, & \text{si } x \neq a. \\ \infty, & \text{si } x = a. \end{cases}$$

En particular si  $a = 0$  y  $r = 1$  se obtiene

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2},$$

denotamos

$$x^* = \frac{x}{|x|^2}.$$

**Proposición 1.2.1** *Sea  $T(x) = x + a$ ,  $\psi(x) = x^*$  y  $H(x) = rx$ , entonces la reflexión en la esfera  $S(a, r)$  está dada por*

$$TH\psi H^{-1}T^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} TH\psi H^{-1}T^{-1}(x) &= TH\psi H^{-1}(x - a) = TH\psi\left(\frac{x - a}{r}\right) \\ &= TH\left(\frac{\frac{x - a}{r}}{\left|\frac{x - a}{r}\right|^2}\right) = T\left(\frac{r^2(x - a)}{|x - a|^2}\right) \\ &= a + r^2\frac{(x - a)}{|x - a|^2} \end{aligned}$$

□

Obsérvese que si  $\phi$  es la reflexión en  $S(a, r)$ , entonces

$$\phi(x) = x \iff x \in S(a, r).$$

Esto se sigue, ya que

$$x = a + r^2\frac{(x - a)}{|x - a|^2}$$

si y sólo si

$$(x - a) = r^2\frac{(x - a)}{|x - a|^2}$$

si y sólo si

$$r^2 = |x - a|^2$$



También  $\phi$  es una involución, esto es,  $\phi \circ \phi = Id$ . Usando la Proposición 1.2.1 basta checar que si  $\phi(x) = x^*$ , entonces  $\phi \circ \phi = Id$ . lo cual es inmediato, ya que

$$\frac{\frac{x}{|x|^2}}{\left| \frac{x}{|x|^2} \right|^2} = x$$

Definimos ahora los planos en  $\mathbb{R}^n$ . Un plano en  $\mathbb{R}^n$  está definido por la siguiente ecuación

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = t\} \cup \{\infty\}, a \neq 0, a \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede suponer sin perder generalidad que  $|a| = 1$ . Denotamos al plano por  $P(a, t)$ . Como el punto  $ta \in P(a, t)$  y dado  $w \in P(a, t)$ ,  $w \neq ta$ , se obtiene un triángulo rectángulo con vértices  $0, ta, w$  (véase la Figura 1.4) se sigue del teorema de Pitágoras que es el punto más cercano al origen del plano.

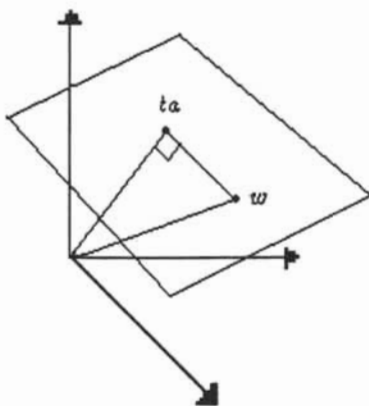


Figura 1.4: Distancia al plano.

Se quiere definir la reflexión  $\phi$  en  $P(a, t)$ , para esto se pide que el punto medio de  $x$  y  $\phi(x)$  esté en  $P(a, t)$ , (véase la Figura 1.5), donde  $\phi(x)$  es de la

forma

$$\phi(x) = x + ma,$$

donde  $m \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\frac{(x + x + ma)}{2} \in P(a, t),$$

esto es

$$\frac{1}{2}(2x + ma) \cdot a = t,$$

por lo cual

$$m = 2(t - x \cdot a).$$

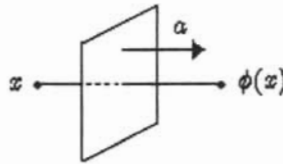


Figura 1.5: Reflexión del plano

Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 2** Sea  $P(a, t)$  un plano en  $\mathbb{R}^n$ , se define la reflexión en  $P(a, t)$  como la función  $\phi: \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi(x) = x + 2(t - x \cdot a)a, & \text{si } x \neq \infty. \\ \infty, & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

En particular si  $t = 0$ , se obtiene

$$\phi(x) = x - 2(x \cdot a)a.$$

**Proposición 1.2.2** Sean  $T(x) = x + ta$  y  $\psi(x) = x - 2(x \cdot a)a$ , entonces la reflexión en el plano  $P(a, t)$  está dada por

$$T \psi T^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} T \psi T^{-1}(x) &= T \psi(x - ta) = T(x - ta - 2((x - ta) \cdot a)a) \\ &= x - ta - 2(x \cdot a - ta \cdot a)a + ta \\ &= x - 2(x \cdot a - t)a \end{aligned}$$

□

Observese que si  $\phi$  es la reflexión en  $P(a, t)$ , entonces

$$\phi(x) = x \iff x \in P(a, t)$$

Esto se sigue ya que

$$x = x - 2(x \cdot a - t)a$$

si y sólo si

$$0 = x \cdot a - t.$$

La función  $\phi$  también es una involución. Para probar esto se sigue de la Proposición 1.2.2, ya que por lo anterior basta probar este hecho para planos por el origen. Para esto sea  $\phi(x) = x - 2(x \cdot a)a$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi(\phi(x)) &= \phi(x) - 2(\phi(x) \cdot a)a \\ &= x - 2(x \cdot a)a - 2[(x - 2(x \cdot a)a) \cdot a]a \\ &= x - 2(x \cdot a)a - 2(x \cdot a)a + 4(x \cdot a)a \\ &= x \end{aligned}$$

Es importante mencionar que si  $\phi$  es una reflexión sobre un plano por el origen, entonces  $\phi$  es lineal y ortogonal. La función  $\phi$  es lineal, ya que por una parte

$$\phi(\lambda x) = \lambda x - 2(\lambda x \cdot a)a = \lambda \phi(x)$$

y también

$$\begin{aligned} \phi(x + y) &= x + y - 2((x + y) \cdot a)a \\ &= \phi(x) + \phi(y). \end{aligned}$$

Es función  $\phi$  y además es ortogonal, puesto que

$$|\phi(x)|^2 = (x - 2(x \cdot a)a) \cdot (x - 2(x \cdot a)a)$$

$$\begin{aligned} &= |x|^2 - 2(x \cdot a)(x \cdot a) - 2(x \cdot a)(x \cdot a) + 4(x \cdot a)(x \cdot a)a \cdot a \\ &= |x|^2 \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que la proyección estereográfica  $\pi$ , es la restricción de una reflexión en una esfera.

**Proposición 1.2.3** *Sea  $\phi$  la reflexión en  $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$  y  $\pi$  la proyección estereográfica definida en (1.1), entonces si:*

$$\bar{x} = (x, 0) \in \mathbb{R}^n$$

se tiene

$$\phi(\bar{x}) = \pi(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue directo de la ecuación (1.1) ya que como

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}) &= e_{n+1} + \frac{2}{|x - e_{n+1}|^2}(\bar{x} - e_{n+1}) \\ &= e_{n+1} + \frac{2}{|x|^2 + 1}(\bar{x} - e_{n+1}), \end{aligned}$$

se tiene que si  $j < n+1$

$$[\phi(\bar{x})]_j = \frac{2x_j}{|\bar{x}|^2 + 1}$$

y si  $j=n+1$

$$[\phi(\bar{x})]_{n+1} = \frac{|\bar{x}|^2 + 1 - 2}{|\bar{x}|^2 + 1} = \frac{|\bar{x}|^2 - 1}{|\bar{x}|^2 + 1}.$$

□

Obsérvese que como  $\phi$  es una involución  $\bar{x} = \phi \circ \phi(\bar{x}) = \phi \circ \pi(x)$ , entonces  $\phi|_{\mathbb{S}^n}$  es precisamente la función inversa  $\psi$  definida en (1.2). El siguiente resultado exhibe la distorsión de las distancias bajo una reflexión en una esfera.

**Teorema 1.2.4** *Sea  $\phi$  la reflexión en  $S(a, r)$ , entonces*

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \frac{r^2|x - y|}{|x - a||y - a|}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\phi(x) = a + r^2(x - a)^*,$$

entonces

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)|^2 &= |a + r^2(x - a)^* - a - r^2(y - a)^*|^2 \\ &= r^4 |(x - a)^* - (y - a)^*|^2 \\ &= r^4 [((x - a)^* - (y - a)^*) \cdot ((x - a)^* - (y - a)^*)] \\ &= r^4 (|(x - a)^*|^2 + |(y - a)^*|^2 - 2(x - a)^*(y - a)^*) \\ &= r^4 \left( \frac{1}{|x - a|^2} + \frac{1}{|y - a|^2} - \frac{2(x - a)(y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \left( \frac{|x - a|^2 - 2(x - a)(y - a) + |y - a|^2}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= \frac{r^4}{|x - a|^2 |y - a|^2} [((x - a) - (y - a)) \cdot ((x - a) \cdot (y - a))] \\ &= \frac{r^4}{|x - a|^2 |y - a|^2} [(x - y) \cdot (x - y)] = \frac{r^4 |x - y|^2}{|x - a|^2 |y - a|^2} \end{aligned}$$

□

### 1.3. Métrica Cordal

Ahora queremos mostrar la continuidad de las reflexiones en planos y esferas, para esto se necesita definir una métrica en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .

**Definición 3** La métrica cordal en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  está definida por

$$|\pi(x) - \pi(y)|,$$

donde  $\pi$  es la función definida en (1.1)

Se puede dar una fórmula explícita de esta métrica. Se denota por  $d_c(x, y)$  a la distancia cordal de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .

**Proposición 1.3.1** *La métrica cordal está dada por*

$$d_C(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, & \text{si } x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n. \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |x|^2}}, & \text{si } y = \infty. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

*Caso 1:*  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Como  $\pi(x) = \phi(x)$ , donde  $\phi$  es la reflexión en  $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ , se sigue de la Proposición 1.2.3 que

$$d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| = \frac{2|x - y|}{\sqrt{|x|^2 + 1}\sqrt{|y|^2 + 1}}$$

*Caso 2:*  $y = \infty$ .

Se tiene que  $\pi(y) = e_{n+1}$ , por lo que basta probar que

$$(\pi(x) - e_{n+1}) \cdot (\pi(x) - e_{n+1}) = \frac{4}{1 + |x|^2},$$

esto se sigue ya que

$$\begin{aligned} |\phi(x) - e_{n+1}|^2 &= \left| e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|(x - e_{n+1})|^2} - e_{n+1} \right|^2 \\ &= \left| \frac{2(x - e_{n+1})}{|(x - e_{n+1})|^2} \right|^2 = \frac{4}{|x - e_{n+1}|^2} = \frac{4}{1 + |x|^2} \end{aligned}$$

□

Observese que la Métrica Cordal es efectivamente una métrica ya que la esfera  $S(0, 1)$  hereda la métrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El siguiente resultado muestra que las métricas euclidianas y cordal definen la misma topología en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, definen los mismos abiertos.

**Teorema 1.3.2** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces  $f$  es continua con la métrica cordal si y sólo si es continua con la métrica euclideana.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que la función identidad

$$Id : \mathbb{R}_E^n \longrightarrow \mathbb{R}_C^n,$$

es un homeomorfismo, donde  $\mathbb{R}_E^n$  denota  $\mathbb{R}^n$  provista de la métrica euclidéana y  $\mathbb{R}_C^n$  con la cordal.

Sea  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una sucesión en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $x_n \longrightarrow x$  en  $\mathbb{R}_E^n$ , como la función  $\pi$  definida en 1.1 es continua se tiene, cuando  $n \longrightarrow \infty$

$$\pi(x_n) \longrightarrow \pi(x),$$

por lo tanto

$$d_c(x_n, x) \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, si  $d_c(x_n, x) \longrightarrow 0$ , cuando  $n \longrightarrow \infty$ , se tiene que

$$|\pi(x_n) - \pi(x)| \longrightarrow 0$$

y como la función  $\psi$  definida en 1.2 es continua y es la inversa de  $\pi$ , se tiene que

$$|x_n - x| = |\psi\pi(x_n) - \psi\pi(x)| \longrightarrow 0.$$

□

**Proposición 1.3.3** *Sea  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , una sucesión en  $\mathbb{R}^n$ , entonces*

$$d_c(x_n, \infty) \longrightarrow 0 \iff |x_n| \longrightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero la necesidad, hay que probar que dada  $M > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que si  $n > N$ , entonces

$$|x_n| > M$$

Para esto si

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{1+M^2}},$$

existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que si  $n > N$ , entonces

$$\frac{2}{\sqrt{1+|x_n|^2}} < \frac{2}{\sqrt{1+M^2}},$$

por lo cual

$$\sqrt{1 + |x_n|^2} > \sqrt{1 + M^2}$$

y

$$|x_n| > M.$$

Para probar la suficiencia dada  $\varepsilon > 0$  (se puede suponer  $\varepsilon < 2$ ), sea

$$M = \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1},$$

entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$  se tiene que

$$|x_n| > \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1},$$

por lo cual

$$\sqrt{|x_n|^2 + 1} > \frac{2}{\varepsilon}$$

y finalmente

$$\frac{2}{\sqrt{1 + |x_n|^2}} < \varepsilon$$

□ Con esta nueva herramienta es fácil probar que las reflexiones son autohomeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .

**Proposición 1.3.4** *La reflexión  $\phi$  en la esfera  $S(a, r)$  es continua en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de manera inmediata de la definición 1 que  $\phi$  es continua en  $\mathbb{R}^n - a$ , por lo que basta checar la continuidad en  $a$  e  $\infty$ . Para probar la continuidad en  $a$ , usamos la Proposición 1.3.3 y basta mostrar que si  $x_n \rightarrow a$ , entonces  $|\phi(x_n)| \rightarrow \infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Esto último se sigue, cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que

$$|\phi(x_n) - a| = \left| \frac{(x_n - a)}{|x_n - a|^2} r^2 \right| \leq |\phi(x_n)| + |a|,$$

y

$$\left| \frac{(x_n - a)}{|x_n - a|^2} r^2 \right| = \frac{r^2}{|x_n - a|} \rightarrow \infty,$$

cuando  $x_n \rightarrow a$ .



Finalmente, si  $x_n \rightarrow \infty$

$$d(\phi(x_n), \phi(\infty)) = \frac{2|\phi(x_n) - a|}{\sqrt{1 + |\phi(x_n)|^2} \sqrt{1 + |a|^2}} \leq 2|\phi(x_n) - a| \rightarrow 0,$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , puesto que

$$|\phi(x_n) - a| = \frac{r^2}{|x_n - a|} \rightarrow 0,$$

ya que  $x_n \rightarrow \infty$ . □

Ahora probamos la continuidad de las reflexiones en planos.

**Proposición 1.3.5** *La reflexión  $\phi$  en el plano  $P(a, t)$  es continua en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de manera inmediata de la definición 2 que si  $\phi$  es la reflexión en  $P(a, t)$ , entonces  $\phi$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ , por lo que basta checar la continuidad en  $\infty$ . Usando la Proposición 1.2.2, basta probar la continuidad en reflexiones sobre planos por el origen y traslaciones. Para esto, sea  $x_n$  una sucesión, tal que  $x_n \rightarrow \infty$  y  $\psi$  la reflexión en  $P(a, 0)$ , por ser  $\psi$  ortogonal se sigue la afirmación, ya que

$$|\psi(x_n)| = |x_n|.$$

Finalmente, si  $T(x) = x + a$ , sea  $-b = a$ ,  $x_n$  una sucesión, tal que

$$x_n \rightarrow \infty,$$

$M \in \mathbb{R}^+$  y  $M' = M + |b|$ . Se sigue entonces que existe  $N$ , tal que si  $n > N$

$$|x_n| > M + |b|,$$

por lo cual

$$|T(x_n)| = |x_n - b| \geq |x_n| - |b| > M.$$

□

## 1.4. Grupo general de Möbius

**Definición 4** Una transformación de Möbius actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es una composición finita de reflexiones en esferas y planos.

Se sigue de las Proposiciones 1.3.4 y 1.3.5, que cualquier transformación de Möbius es un homeomorfismo de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Obsérvese que cualquier composición finita de Möbius es de Möbius. Además, si

$$\phi = \phi_1 \phi_2 \dots \phi_m,$$

donde  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , son reflexiones, se tiene que

$$\phi^{-1} = \phi_m \dots \phi_1$$

de Möbius. Por consiguiente, estas transformaciones forman un grupo llamado grupo general de Möbius, denotado por  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ . Introducimos ahora el concepto de conformalidad.

**Definición 5** Sea  $A$  abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diferenciable en  $x \in A$ , se dice que  $f$  es conforme en  $x$  si  $Df(x)$  es un múltiplo escalar positivo de una matriz ortogonal, al escalar se le llama el factor de conformalidad y se le denota por  $\mu_f(x)$  o simplemente  $\mu(x)$ .

El siguiente resultado muestra como encontrar el factor de conformalidad en las funciones conformes.

**Proposición 1.4.1** Sea  $A$  abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  conforme en  $x \in A$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} = \mu_f(x)$$

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese primero que

$$\left| \frac{|f(x+h) - f(x)| - |Df(x)h|}{|h|} \right| \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)h}{|h|} \right|,$$

además, como  $Df(x) = \mu_f(x)IA$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal, se sigue que

$$\left| \frac{|f(x+h) - f(x)| - |Df(x)h|}{|h|} \right| = \left| \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} - \frac{|\mu_f(x)IA(h)|}{|h|} \right|$$

$$= \left| \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} - \mu_f(x) \right|,$$

Finalmente, dada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $|h| < \delta$ , entonces

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)h}{|h|} \right| < \varepsilon$$

y por lo tanto se sigue de las observaciones anteriores que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} - \mu_f(x) \right| = 0.$$

Por consiguiente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} = \mu_f(x)$$

□

El Teorema 1.2.4 nos permite encontrar el factor de conformalidad en la reflexión en la esfera.

**Proposición 1.4.2** *Sea  $\phi$  la reflexión en  $S(a, r)$ , entonces el factor de conformalidad de  $\phi$  está dado por*

$$\frac{r^2}{|x - a|^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 1.2.4 que

$$\frac{|\phi(x+h) - \phi(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x+h-a||x-a|},$$

por lo cual

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi(x+h) - \phi(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x-a|^2}.$$

□

Mostraremos ahora que las reflexiones son conformes e invierten la orientación, para esto necesitamos la siguiente definición.

**Definición 6** *Sea  $f$  una función diferenciable y  $Df(x) \neq 0$ , se dice que  $f$  preserva la orientación en una vecindad de  $x$ , si  $\text{Det}(Df(x)) > 0$ , y que la invierte si  $\text{Det}(Df(x)) < 0$ .*

El siguiente resultado prueba la conformalidad.

**Teorema 1.4.3**

- (i) Sea  $\phi$  la reflexión en el plano  $P(a, t)$ , entonces  $\phi$  es conforme en  $\mathbb{R}^n$ .  
(ii) Sea  $\psi$  la reflexión en la esfera  $S(a, r)$ , entonces  $\psi$  es conforme en  $\mathbb{R}^n - \{a\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero (i), se sigue de la Proposición 1.2.2 que  $\phi$  es de la forma

$$TfT^{-1},$$

donde  $T$  es una traslación y  $f$  es la reflexión en el plano  $P(a, 0)$ . En consecuencia  $\phi$  es la composición de funciones conformes ya que

$$DT(x) = Id$$

y  $f$  es ortogonal.

Para probar (ii), sea  $\psi$  la reflexión en la esfera  $S(a, r)$ , se sigue de la Proposición 1.2.1 que  $\psi$  es de la forma

$$THgH^{-1}T^{-1},$$

donde  $T$  es una traslación,  $H$  una homotecia y  $g(x) = x^*$ . Como la diferencial de una traslación es la identidad se sigue de la regla de la cadena que basta probar que  $g$  es conforme en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Ahora, la entrada  $i, j$  de  $Dg(x)$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \right)}{\partial x_j} &= \frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{(\sum_{j=1}^n x_j^2)^2} \\ &= \frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por lo que

$$Dg(x) = |x|^{-2}(I - 2Q_x) \quad (1.4)$$

Donde  $Q_x$  es la matriz cuya entrada  $i, j$  está dada por

$$\frac{x_i x_j}{|x|^2}.$$

Ahora  $Q_x^2 = Q_x$ , ya que

$$[Q_x^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \frac{x_i x_k x_k x_j}{|x|^4} = \frac{x_i x_j}{|x|^2} = [Q_x]_{i,j},$$

por consiguiente  $I - 2Q_x$  es ortogonal, puesto que al ser  $Q_x$  simétrica

$$(I - 2Q_x)^t = I - 2Q_x$$

y

$$(I - 2Q_x)(I - 2Q_x) = I - 4Q_x + 4Q_x = I.$$

En consecuencia se sigue de (1.4) que  $g$  es conforme en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . □

Ahora mostremos que las reflexiones invierten la orientación.

**Teorema 1.4.4** *Las reflexiones invierten la orientación.*

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero que si  $\phi_a$  es la reflexión en el plano  $P(a, t)$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , entonces  $\phi$  invierte la orientación. Se tiene que

$$\phi_a(x) = x - 2((x \cdot a) - t)a,$$

si  $n = 1$ ,

$$\phi_a(x) = -x + 2ta$$

y

$$\phi'_a(x) = -1.$$

Para el caso general se fija  $x$  y se considera la función de  $\mathbb{S}^n$  en  $\{1, -1\}$  definida por

$$a \mapsto \text{Det}(D\phi_a(x)). \tag{1.5}$$

Ahora, la entrada  $i, j$  de  $D\phi_a(x)$  está dada por

$$\delta_{ij} - 2a_j a_i,$$

por lo que la función dada por (1.5) es continua en  $\mathbb{S}^n$ . Ahora, como  $\mathbb{S}^n$  es conexo los valores de  $\text{Det}(D\phi_a(x))$  son todos 1 o todos -1. Tomando  $a = e_1$ , se tiene

$$[D\phi_{e_1}]_{i,j} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{si } (i, j) \neq (1, 1) \\ -1, & \text{si } (i, j) = (1, 1). \end{cases}$$

Por lo tanto  $\text{Det}(D\phi_{e_1}(x)) = -1$  y por conexidad esto es cierto para toda  $a$ . Variando la  $x$  esto se cumple para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Ahora si  $\psi$  es la reflexión en  $S(a, r)$  se sigue de la Proposición 1.2.1, que basta probar que  $g(x) = x^*$  invierte la orientación. Ahora, se sigue de (1.3) que, si  $n > 1$ , la función

$$x \mapsto \text{Det}(Dg(x)),$$

de  $\mathbb{R}^n - \{0\} \mapsto \mathbb{R}^n - \{0\}$  es continua. Como  $\mathbb{R} - \{0\}$  no es conexo y  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  sí lo es, necesariamente los valores de esta función son todos positivos o todos negativos, tomando  $x = e_1$ , se tiene de (1.4) que

$$Dg(x) = |e_1|^{-2}(I - 2Q_{e_1}),$$

donde

$$Q_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,  $\text{Det}(Dg(x)) = -1$ , y se sigue el resultado.

Para el caso  $n = 1$

$$g(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

y

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x.$$

□

Podemos ahora definir al subgrupo del grupo general de Möbius que preserve la orientación, se le denota por  $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ . Observese que las funciones de este subgrupo consta de la composición de un número par de reflexiones en planos o esferas.

Para fines prácticos se usará el término “esfera” para denotar un plano o una esfera. La siguiente proposición exhibe la ecuación general de las “esferas”.

**Proposición 1.4.5** *Una ecuación de la forma*

$$a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0, \quad |a|^2 > a_0a_{n+1} \quad (1.6)$$

*representa una “esfera” en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  y viceversa toda “esfera” tiene una representación de dicha forma, donde  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $a_0, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Es claro que cualquier plano se puede definir por la ecuación en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$

$$0|x|^2 - 2x \cdot a + a_{n+1} = 0 \quad |a|^2 > 0,$$

ahora la esfera  $S(a, r)$  está dada por

$$(x - a) \cdot (x - a) = r^2,$$

esto es,

$$|x|^2 - 2x \cdot a + |a|^2 - r^2 = 0,$$

y se tiene  $|a|^2 > |a|^2 - r^2$ .

Para probar el recíproco, supongamos que se tiene una ecuación como en (1.6), si  $a_0 = 0$  la ecuación representa un plano. Finalmente, si  $a_0 \neq 0$  la ecuación se puede reescribir como

$$|x|^2 - 2 \left( x \cdot \frac{a}{a_0} \right) + \frac{a_{n+1}}{a_0} = 0,$$

es decir,

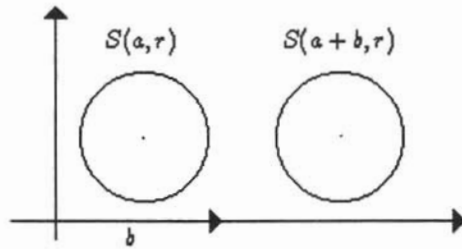
$$\left| x - \frac{a}{a_0} \right|^2 = \frac{|a|^2 - a_0a_{n+1}}{a_0^2},$$

y la ecuación representa una esfera, ya que  $|a|^2 > a_0a_{n+1}$ . □

Ahora mostremos que las transformaciones de Möbius mandan “esferas” en “esferas”.

**Proposición 1.4.6** *Sea  $\phi \in M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  y  $\Sigma$  una “esfera” entonces  $\phi(\Sigma)$  es una “esfera”.*

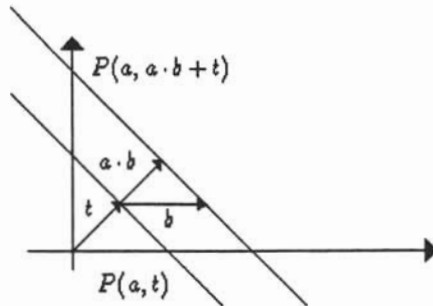
**DEMOSTRACIÓN.** Se sigue de las Proposiciones 1.2.1 y 1.2.2, que basta probar el resultado para las traslaciones, homotecias, reflexiones en los planos por el origen y la reflexión en la esfera  $S(0, 1)$ .

Figura 1.6: Traslación de la esfera  $S(a,r)$ 

Si  $T(x) = x + b$ ,  $T$  transforma la esfera  $S(a,r)$  en  $S(a+b,r)$  ya que

$$|x - a| = r \iff |y - (a + b)| = r,$$

donde  $y = x + b$ , es decir,  $y \in S(a+b,r) \iff x \in S(a,r)$  (véase la Figura 1.6).

Figura 1.7: Traslación del plano  $P(a,t)$ 

También  $T$  transforma el plano  $P(a,t)$ , en  $P(a, a \cdot b + t)$ , esto se sigue, ya que

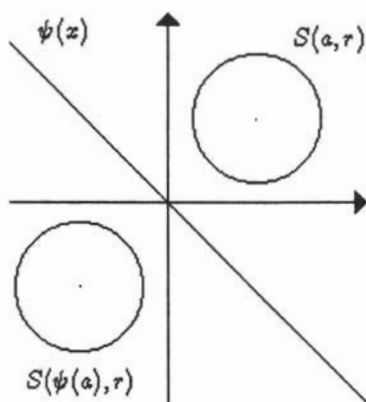
$$x \cdot a = t \iff y \cdot a = t + a \cdot b,$$

donde  $y = x + b$  (véase la Figura 1.7).

Por otra parte, si  $\psi$  es la reflexión en el plano  $P(a,0)$ ,  $\psi$  es una función ortogonal, preserva normas y el producto escalar por lo que  $\psi$  transforma  $S(a,r)$  en  $S(\psi(a),r)$  (véase la Figura 1.8), ya que

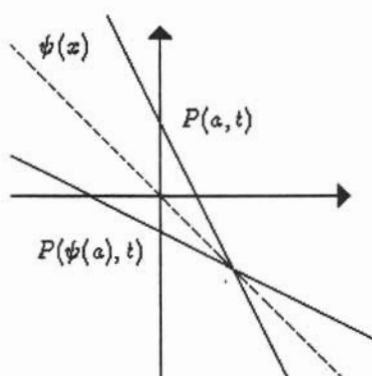
$$|x - a| = |\psi(x) - \psi(a)| = r.$$



Figura 1.8: Reflexión de la esfera  $S(a,r)$ 

También,  $\psi$  transforma  $P(a,t)$  en  $P(\psi(a),t)$  (véase la Figura 1.9), ya que

$$x \cdot a = \psi(x) \cdot \psi(a) = t.$$

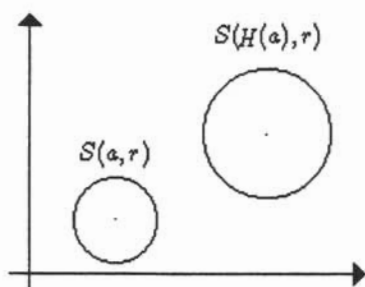
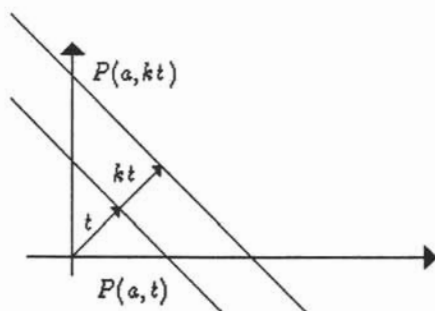
Figura 1.9: Reflexión del plano  $P(a,t)$ 

Ahora, si  $H(x) = kx$ ,  $H$  manda “esferas” en “esferas”, ya que

$$|x - a| = r \iff |kx - ka| = kr \iff |H(x) - H(a)| = kr$$

(véase la Figura 1.10). Más aun  $H$  transforma planos en planos, ya que

$$x \cdot a = t \iff kx \cdot a = kt.$$

Figura 1.10: Homotecia de la esfera  $S(a, r)$ Figura 1.11: Homotecia del plano  $P(a, t)$ 

(véase la Figura 1.11).

Finalmente, mostramos que  $\phi(x) = x^*$  transforma “esferas” en “esferas”. Sea  $\Sigma$  definida por

$$a_{n+1}|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_0 = 0,$$

donde  $|a|^2 > a_0 a_{n+1}$ . Si  $x \neq 0, \infty$ , esta ecuación se puede escribir como

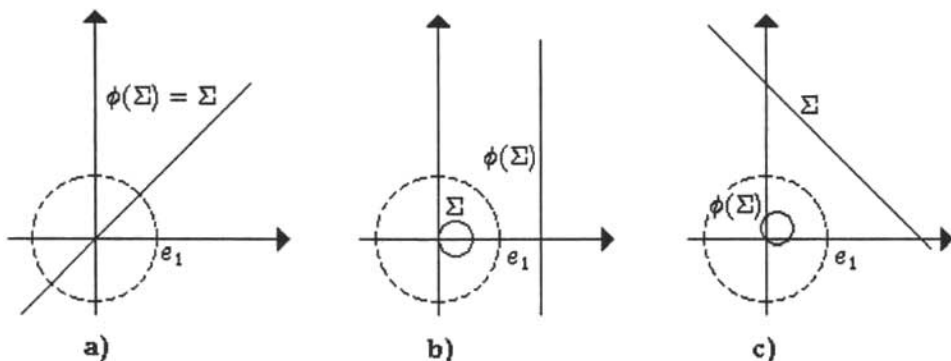
$$a_{n+1} - 2(x^* \cdot a) + \frac{a_0}{|x|^2} = 0,$$

escribiendo  $y = x^*$ , se tiene que

$$a_{n+1} - 2(y \cdot a) + a_0|y|^2 = 0 \tag{1.7}$$

que también es una “esfera”, ya que  $|a|^2 > a_{n+1}a_0$ . Falta checar el comportamiento en  $0$  e  $\infty$ , se tienen tres casos:

- a) Si  $0, \infty \in \Sigma$ , entonces  $\Sigma$  es un plano por el origen ( $a_0 = a_{n+1} = 0$ ) y  $\phi(\Sigma) = \Sigma$ .
- b) Si  $0 \in \Sigma$  y  $\infty \notin \Sigma$ , entonces  $\Sigma$  es una esfera que pasa por el origen ( $a_0 = 0$  y  $a_{n+1} \neq 0$ ) y  $\phi(\Sigma)$  es un plano que no pasa por el origen, ya que  $\phi(0) = \infty \in \phi(\Sigma)$ , pero  $\phi(\infty) = 0 \notin \phi(\Sigma)$ , lo cual es consistente con (1.7).
- c) Si  $0 \notin \Sigma$  y  $\infty \in \Sigma$ , entonces  $\Sigma$  es un plano que no pasa por el origen ( $a_0 \neq 0$  y  $a_{n+1} = 0$ ) y su imagen es una esfera por el origen, lo cual es consistente con (1.7) (véase la Figura 1.12).

Figura 1.12: Comportamiento en  $0$  e  $\infty$ 

□

## 1.5. Producto Inversivo

Introduciremos un concepto importante relacionado con la conformalidad, el producto inversivo de 2 “esferas”  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . Una “esfera”  $\Sigma$  dada por  $a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0$ , está determinada por el vector coeficiente en  $\mathbb{R}^{n+2}$ ,  $a' = (a_0, a, a_{n+1})$ , donde  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , es claro que este vector determina a  $\Sigma$  salvo un múltiplo escalar real.

**Definición 7** Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  “esferas” determinadas por los vectores  $(a_0, a, a_{n+1})$  y  $(b_0, b, b_{n+1})$ , el producto inversivo de  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , denotado por  $(\Sigma, \Sigma')$ , se define por

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2a \cdot b - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} \quad (1.8)$$

Obsérvese que esta definición no depende de la elección de los vectores coeficientes, esto se sigue, ya que si  $a' = s(a_0, a, a_{n+1})$  y  $b' = t(b_0, b, b_{n+1})$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{|2sa \cdot tb - sa_0 t b_{n+1} - sa_{n+1} t b_0|}{2(|sa|^2 - sa_0 sa_{n+1})^{\frac{1}{2}} (|tb|^2 - t b_0 t b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} &= \frac{|s||t||2a \cdot b - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2|s||t|(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|2a \cdot b - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Se define una forma bilineal  $q : \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera

$$q(x, y) = 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) - (x_0 y_{n+1} + x_{n+1} y_0)$$

Es evidente que  $q$  es bilineal, además si  $a' = (a_0, a, a_{n+1})$  y  $b' = (b_0, b, b_{n+1})$ , determinan dos “esferas”  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , entonces el producto inversivo de  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , se puede expresar como

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|q(a', b')|}{|q(a', a')|^{\frac{1}{2}} |q(b', b')|^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.9)$$

ya que  $(q(a', a'))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}}$ .

### 1.5.1. Expresiones explícitas

**Caso 1** Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  esferas, se puede suponer sin perder generalidad que sus vectores coeficientes están dados por

$$a' = (1, a, |a|^2 - r^2) \quad \text{y} \quad b' = (1, b, |b|^2 - r^2),$$

respectivamente, entonces se sigue directamente de (1.8)

$$\begin{aligned} (\Sigma_1, \Sigma_2) &= \frac{|2a \cdot b - (|a|^2 - r^2) - (|b|^2 - r^2)|}{2(|a|^2 - (|a|^2 - r^2))^{\frac{1}{2}} (|b|^2 - (|b|^2 - r^2))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|r^2 + r^2 - |a - b|^2|}{2rt}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

**Caso 2** Sean  $\Sigma_1$  una esfera y  $\Sigma_2$  un plano, con vectores coeficientes

$$a' = (1, a, |a|^2 - r^2) \text{ y } b' = (0, b, 2t),$$

respectivamente, entonces se sigue directamente de (1.8)

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{|2a \cdot b - 2t|}{2r|b|} = \frac{|a \cdot b - t|}{r|b|}.$$

Si  $|b| = 1$ ,

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{|a \cdot b - t|}{r}. \quad (1.11)$$

**Caso 3** Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos planos, tales que sus vectores coeficientes son  $a' = (0, a, 2t)$ ,  $b' = (0, b, 2s)$ , respectivamente, entonces se sigue directamente de (1.8)

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{2|a \cdot b|}{2|a||b|} = \frac{|a \cdot b|}{|a||b|} = |\cos \theta|,$$

si  $|a| = |b| = 1$

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = |a \cdot b| = |\cos \theta|. \quad (1.12)$$

### 1.5.2. Interpretaciones Geométricas

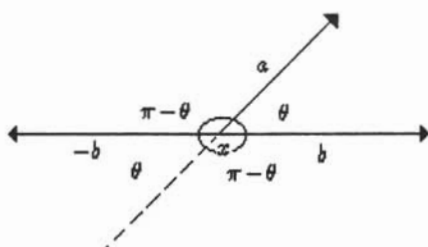
Si 2 esferas  $S(a, r)$  y  $S(b, t)$  se intersectan en un punto  $x$ , la intersección se puede medir, sin ambigüedad, con sus normales exteriores unitarias

$$\frac{x - a}{|x - a|} \text{ y } \frac{x - b}{|x - b|}$$

Ahora, si un plano  $P(b, t)$  se intersecta con una esfera  $S(a, r)$ , en un punto  $x$ , el ángulo de intersección puede ser el formado por  $b$ ,  $|b| = 1$ , y  $\frac{x - a}{|x - a|}$

o, por  $-b$  y  $\frac{x - a}{|x - a|}$ .

Finalmente, si queremos medir la intersección de dos planos  $P(a, t)$  y  $P(b, t)$ , se usa el ángulo formado por los vectores  $a$  y  $b$  o por los vectores  $-a$ ,  $b$ . En general, si  $\theta$  es el ángulo de intersección entre dos vectores  $a$  y  $b$ ,  $\pi - \theta$  es el ángulo de intersección entre  $a$  y  $-b$  y  $\cos \theta = -(\cos \pi - \theta)$  (véase la Figura 2.8). Por lo cual, tomando el valor absoluto de  $\cos \theta$  se pierde la ambigüedad.

Figura 1.13: Intersección de las normales en  $x$ 

**Proposición 1.5.1** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  “esferas” tales que se intersectan en un punto  $x$ , entonces

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\cos \theta|,$$

donde  $\theta$  es uno de los ángulos de intersección de las normales unitarias en  $x$ .

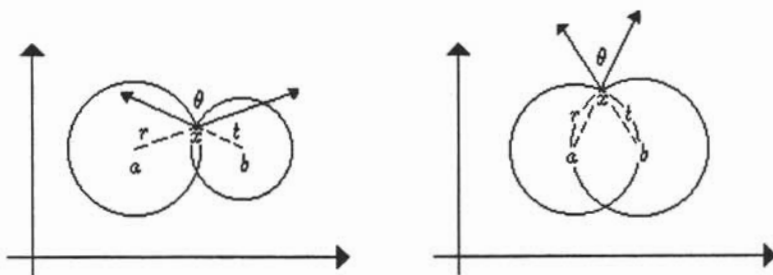


Figura 1.14: Medición del ángulo de 2 esferas

DEMOSTRACIÓN.

**Caso 1** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = S(b, t)$ , y  $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , se sigue que

$$\begin{aligned} |\cos \theta| &= \left| \frac{x-a}{|x-a|} \cdot \frac{x-b}{|x-b|} \right| \\ &= \frac{\frac{1}{2}(|x-a|^2 + |x-b|^2 - |(x-a) - (x-b)|^2)}{rt} \end{aligned}$$

$$= \frac{|r^2 + t^2 - |a - b|^2|}{2rt} = (\Sigma_1, \Sigma_2)$$

(veáse la Figura 1.14).

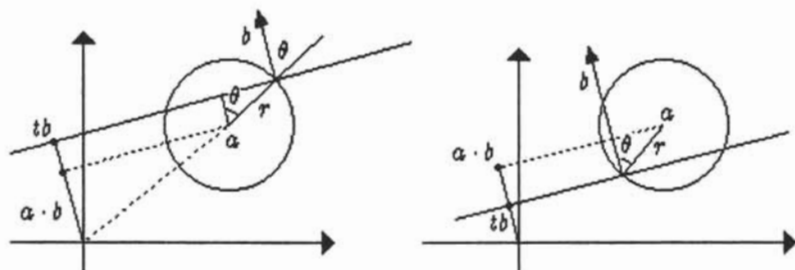


Figura 1.15: Medición del ángulo de  $S(a, r)$  y  $P(b, t)$

**Caso 2** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = P(b, t)$ , y  $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , se sigue que

$$\begin{aligned} |\cos \theta| &= \left| \frac{(x - a) \cdot b}{|x - a|} \right| = \frac{|x \cdot b - a \cdot b|}{r} \\ &= \frac{|t - a \cdot b|}{r} = (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{aligned}$$

(veáse la Figura 1.15).

**Caso 3** Sean  $\Sigma_1 = P(a, t)$  y  $\Sigma_2 = P(b, s)$ , y  $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , se puede suponer que  $a$  y  $b$  forman un ángulo agudo  $\theta$ , se sigue que

$$\cos \theta = a \cdot b = (\Sigma_1, \Sigma_2)$$

□

Observése que  $|\cos \theta|$ , no varía punto a punto. El siguiente resultado describe explícitamente la intersección de 2 esferas.

**Proposición 1.5.2** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos esferas en  $\mathbb{R}^n$ , supóngase también que  $y \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  y que  $\Sigma_1$  intersecta a  $\Sigma_2$  en más de un punto, entonces

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Pi \cap S(z, |z - y|),$$

donde  $z$  es la proyección de  $y$  en la recta por  $\overline{ab}$  y  $\Pi$  es el plano ortogonal a  $\overline{ab}$  por  $z$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = S(b, s)$ , y  $x \in \Pi \cap S(z, |z - y|)$  se sigue, aplicando el teorema de Pitágoras en los planos bidimensionales generados por  $x, a, z$  y por  $y, a, z$  que

$$|x - a|^2 = |a - z|^2 + |x - z|^2 = |a - z|^2 + |y - z|^2 = r^2,$$

por lo que  $x \in \Sigma_1$ , análogamente  $x \in \Sigma_2$ , (véase la Figura 1.16).

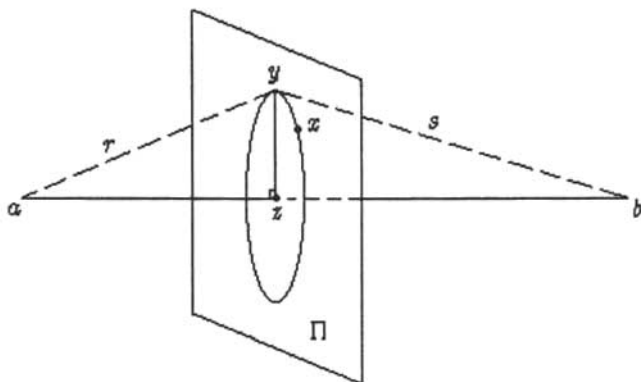


Figura 1.16: Intersección de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$

Ahora si  $w \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , su proyección  $u$  en  $\overline{ab}$  está unívocamente determinada, es decir, no depende de  $w$ , esta afirmación es cierta, ya que se tiene

$$|w - u|^2 + |u - a|^2 = |w - a|^2 = r^2$$

y

$$|w - u|^2 + |u - b|^2 = |w - b|^2 = s^2,$$

entonces

$$r^2 - s^2 = |u - a|^2 - |u - b|^2,$$

si  $u = a + k(a - b)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , se sigue

$$\begin{aligned} r^2 - s^2 &= |k(b - a)|^2 - |a - b + k(b - a)|^2 \\ &= |b - a|^2(2k - 1), \end{aligned}$$



y

$$k = \frac{r^2 - s^2}{2|b - a|^2} + 1.$$

Por consiguiente  $u = z$  y  $w \in \Pi$ . Además, por el teorema de Pitágoras  $w \in S(z, |z - y|)$ , ya que

$$|w - z|^2 = |w - a|^2 - |z - a|^2 = |y - a|^2 - |z - a|^2 = |y - z|^2.$$

□

Obsérvese que la intersección de dos esferas en  $\mathbb{R}^n$ , es una esfera de dimensión  $n - 2$ , esto se sigue ya que la intersección es una esfera en  $\Pi$  que es un plano de dimensión  $n - 1$ .

**Proposición 1.5.3** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$ ,  $\Sigma_2 = P(b, t)$ , tales que se intersecan en un punto  $x$ , entonces

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = S(z, |z - x|) \cap \Sigma_2,$$

donde  $z$  es la proyección de  $a$  en  $\Sigma_2$ .

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema de Pitágoras en planos bidimensionales. Si  $y \in S(z, |z - x|) \cap \Sigma_2$ , entonces

$$|y - a|^2 = |y - z|^2 + |z - a|^2 = |x - z|^2 + |z - a|^2 = |x - a|^2 = r^2,$$

por lo tanto  $y \in S(a, r)$ . Viceversa, si  $y \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , entonces

$$|y - z|^2 + |z - a|^2 = |y - a|^2 = |x - a|^2$$

por lo cual

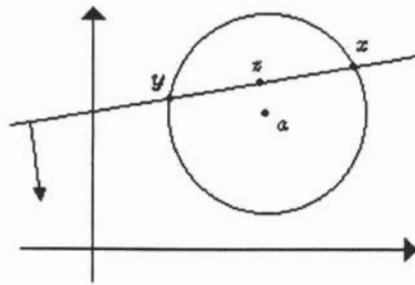
$$|y - z|^2 = |x - a|^2 - |z - a|^2 = |x - z|^2,$$

y  $y \in S(z, |z - x|)$ , (véase la Figura 1.17).

□

En la proposición anterior si  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  consiste de un solo punto, el resultado sigue siendo válido interpretando a  $S(z, |z - x|)$  como una esfera degenerada, es decir un punto.

**Corolario 1.5.4** Si 2 "esferas"  $\Sigma_1, \Sigma_2$  en  $\mathbb{R}^n$  se intersecan, el valor absoluto del ángulo de intersección no varía de punto a punto.

Figura 1.17: Intersección de  $S(a, r)$  y  $P(b, t)$ 

## DEMOSTRACIÓN.

**Caso 1** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$ ,  $\Sigma_2 = S(b, t)$ , medimos el ángulo de intersección con las normales exteriores unitarias, si  $n \geq 3$  se sigue de la Proposición 1.5.2 que  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  es una esfera de dimensión mayor o igual a 1, por lo cual la intersección es conexa. Ahora la función

$$x \rightarrow \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{|x-a|^2 |x-b|^2},$$

es una función continua en  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , por lo que se sigue de la Proposición 1.5.1 que los valores son  $\cos \theta$  o  $-\cos \theta$ . Por consiguiente, por conexidad son todos positivos o todos negativos. Si  $n = 2$ , el resultado es inmediato (véase la Figura 1.18).

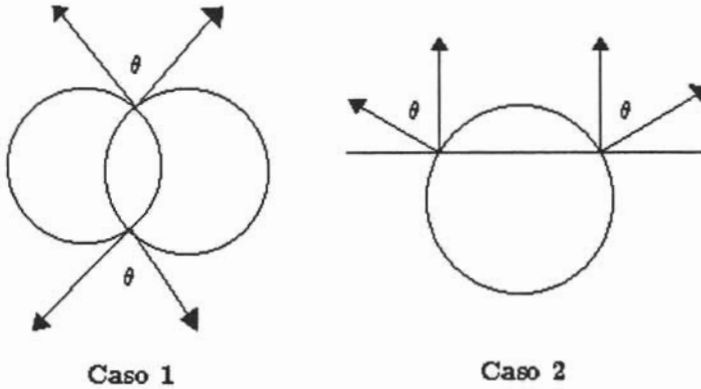
**Caso 2** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$ ,  $\Sigma_2 = P(b, t)$ . Si  $n \geq 3$ , utilizando el mismo argumento de continuidad y conexidad del caso 1 y de la Proposición 1.5.3, se sigue el resultado usando la función

$$x \rightarrow \frac{(x-a) \cdot b}{|x-a|},$$

tomando  $b$  fija y las normales exteriores unitarias. Si  $n = 2$ , el resultado es inmediato (véase la Figura 1.18).

**Caso 3** En 2 planos es evidente que la intersección se mide al fijar las normales y el ángulo es el mismo en todos los puntos.

□

Figura 1.18: Ángulo con  $n = 2$ 

**Proposición 1.5.5** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = P(b, t)$ , entonces

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{\delta}{r},$$

donde  $\delta$  es la distancia de  $a$  a  $P(b, t)$ .

DEMOSTRACIÓN. La distancia de  $a$  a  $P(b, t)$  se alcanza en un punto de la forma

$$a + \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

donde  $a + \lambda b \in P(b, t)$ , es decir

$$(a + \lambda b) \cdot b = t,$$

entonces

$$\lambda = t - a \cdot b,$$

obsérvese que  $|\lambda|$  es la distancia de  $a$  al plano, por lo cual se sigue la proposición de la relación (1.11), véase la Figura 1.15. □

Obsérvese que si dos planos  $P(a, t)$  y  $P(b, s)$  no se intersectan, entonces son paralelos. Esto es cierto, ya que de otra manera, consideramos el plano generado por  $a$  y  $b$  y las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , tales que  $l_1$  es ortogonal a  $a$  y pasa por  $ta$  y  $l_2$  es ortogonal a  $b$  y pasa por  $sb$ , se tiene que  $l_1$  intersecta a  $l_2$ , sin embargo  $l_1 \subset P(a, t)$  y  $l_2 \subset P(b, s)$ , (véase la Figura 1.19).

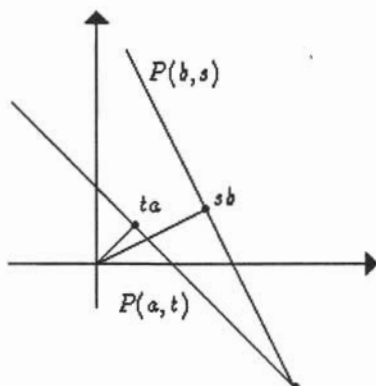


Figura 1.19: Intersección de  $P(a, t)$  y  $P(b, s)$

**Proposición 1.5.6** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos “esferas”, entonces

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = 0 \iff \Sigma_1 \text{ es ortogonal a } \Sigma_2$$

DEMOSTRACIÓN.

**Caso 1** Obsérvese primero que si  $\Sigma_1, \Sigma_2$  no se intersectan, entonces  $(\Sigma_1, \Sigma_2) > 1$ . Se tienen 2 subcasos de acuerdo a que una esfera esté en el interior de la otra o no. Si una esfera no está en el interior de la otra, esto se sigue ya que

$$|a - b|^2 > |r + s|^2,$$

entonces

$$|a - b|^2 - (r^2 + s^2) > 2rs$$

y

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{|a - b|^2 - (r^2 + s^2)}{2rs} > 1$$

(véase la Figura 1.20). Ahora, si una esfera se encuentra en el interior de la otra, la observación es cierta ya que

$$|r - s|^2 > |a + b|^2,$$

entonces

$$r^2 + s^2 - |a - b|^2 > 2sr,$$

por lo tanto

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{r^2 + s^2 - |a - b|^2}{2sr}$$

(véase la Figura 1.20). Por consiguiente podemos suponer que  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se intersectan. Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = S(b, s)$ , si suponemos que  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se intersectan, se sigue de la Proposición 1.5.1 que

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\cos \theta|$$

y  $|\cos \theta| = 0$  si y solo si  $\Sigma_1$  es ortogonal a  $\Sigma_2$ .

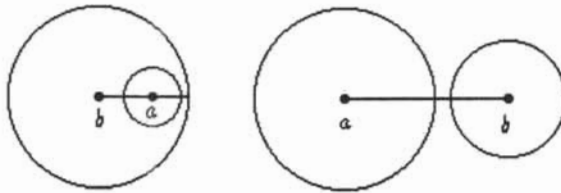


Figura 1.20: Ortogonalidad de  $S(a, r)$  y  $S(b, s)$

**Caso 2** Si suponemos que  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = P(b, t)$ , no se intersectan, entonces  $(\Sigma_1, \Sigma_2) > 0$ , ya que si  $(\Sigma_1, \Sigma_2) = 0$  se sigue que  $a \in P(b, t)$ , y en este caso  $\Sigma_1, \Sigma_2$  se intersectan en una esfera de dimensión  $n - 2$ .

En consecuencia se puede suponer que se intersectan, y se sigue de la Proposición 1.5.1 que

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{|t - a \cdot b|}{r} = 0$$

$$\iff t = a \cdot b \iff a \in P(b, t)$$

(véase la Figura 1.21)

Alternativamente  $(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\cos \theta|$  y  $|\cos \theta| = 0 \iff \Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son ortogonales.

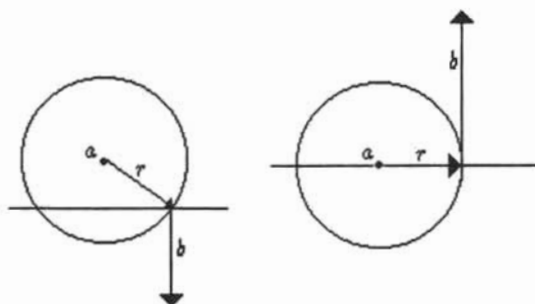


Figura 1.21: Ortogonalidad de  $S(a, r)$  y  $P(b, t)$

**Caso 3** Sean los planos  $\Sigma_1 = P(a, t)$  y  $\Sigma_2 = P(b, s)$ , si estos no se intersectan, entonces son paralelos y

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = |a \cdot b| = |a|^2 > 0.$$

Si se intersectan, se sigue de la Proposición 1.5.1

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = \cos \theta = 0 \iff a \text{ es ortogonal a } b.$$

□

Probamos un resultado análogo para “esferas” tangentes.

**Proposición 1.5.7** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos “esferas”, una de las cuales es una esfera, entonces

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = 1 \iff \Sigma_1 \text{ es tangente a } \Sigma_2$$

DEMOSTRACIÓN.

**Caso 1** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r), \Sigma_2 = S(b, s)$  esferas. Obsérvese primero que si  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ , se sigue la prueba de la proposición 1.5.6 caso 1 que  $(\Sigma_1, \Sigma_2) > 1$ . Por lo tanto  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se intersectan y  $(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\cos \theta|$  donde  $\theta$  es el ángulo de intersección. Si  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son tangentes en  $x$ , entonces se sigue que  $(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\cos \theta| = 1$  donde  $\theta$  es 0 o  $\pi$ .

**Caso 2** Sean  $\Sigma_1 = S(a, r)$  y  $\Sigma_2 = P(b, t)$ . Si  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi$ , entonces  $\delta > r$ , donde  $\delta$  es la distancia de  $\hat{a}$  al plano  $P(b, t)$ , y se sigue de la Proposición 1.5.5 que  $(\Sigma_1, \Sigma_2) > 1$ . Por consiguiente, podemos suponer que  $\Sigma_1$  intersecciona a  $\Sigma_2$  y es claro que como  $(\Sigma_1, \Sigma_2) = |\cos \theta|$ ,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son tangentes si y sólo si  $\theta = \pi, 0$ .

□

Obsérvese que si dos planos  $\Sigma_1 = P(a, t)$ ,  $\Sigma_2 = P(b, s)$  son tangentes entonces son el mismo, por lo que

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = |a|^2 = 1,$$

sin embargo si son paralelos también  $(\Sigma_1, \Sigma_2) = 1$ .

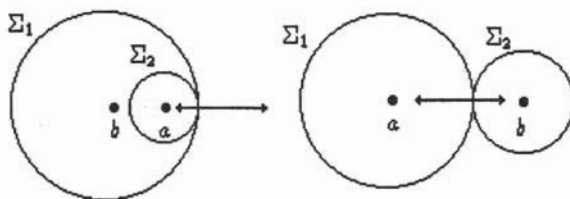


Figura 1.22: Tangencia de  $S(a, r)$  y  $S(b, s)$

A continuación, el siguiente resultado muestra que el producto inversivo es invariante bajo transformaciones de Möbius.

**Teorema 1.5.8** Sea  $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$  y  $\Sigma, \Sigma'$  "esferas", entonces

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma')$$

**DEMOSTRACIÓN.** Se sigue de las Proposiciones 1.2.1 y 1.2.2, que basta probar el resultado para las traslaciones, homotecias, reflexiones en planos por el origen y la reflexión en la esfera  $S(0, 1)$ .

Como las "esferas" están determinadas por sus vectores coeficientes y las transformaciones de Möbius mandan "esferas" en "esferas", entonces  $\phi$  induce una transformación  $\hat{\phi}$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$  en  $\mathbb{R}^{n+2}$  que manda los vectores coeficientes en vectores coeficientes, salvo un múltiplo escalar. Sean  $(a_0, a, a_{n+1})$  y  $(b_0, b, b_{n+1})$  los vectores coeficientes de  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , respectivamente.

**Caso 1** Si  $\phi(x) = x^*$ , se probó en el Teorema 1.4.6 que

$$a_0|x^*|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0$$

$$\iff a_{n+1}|y|^2 - 2(y \cdot a) + a_0 = 0, \text{ donde } y = x^*,$$

entonces

$$\widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})] = (a_{n+1}, a, a_0),$$

que es evidentemente lineal, además

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2(a \cdot b) - a_0b_{n+1} - a_{n+1}b_0|}{2(|a|^2 - a_0a_{n+1})^{\frac{1}{2}}(|b|^2 - b_0b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} = (\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')),$$

ya que  $\phi$  sólo intercambia  $a_0$  por  $a_{n+1}$  y  $b_0$  por  $b_{n+1}$ .

**Caso 2** Si  $\phi(x) = kx$ , multiplicando por  $k^2$  la ecuaciones de las esferas  $\Sigma, \Sigma'$  se obtiene

$$a_0|kx|^2 - 2(kx \cdot ka) + k^2a_{n+1} = 0,$$

por lo que, si  $y = \phi(x)$ , se tiene

$$a_0|y|^2 - 2(y \cdot ka) + k^2a_{n+1} = 0,$$

analogamente para  $\Sigma'$ . En consecuencia

$$\widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})] = (a_0, ka, k^2a_{n+1}),$$

que es bilineal, ya que

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}[(a_0 + b_0, a + b, a_{n+1} + b_{n+1})] &= (a_0 + b_0, (a + b)k, (a_{n+1} + b_{n+1})k^2) \\ &= (a_0, ak, a_{n+1}k^2) + (b_0, bk, b_{n+1}k^2) = \widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})] + \widehat{\phi}[(b_0, b, b_{n+1})], \end{aligned}$$

también, si  $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}[s(a_0, a, a_{n+1})] &= (sa_0, ska, sk^2a_{n+1}) \\ &= s(a_0, ka, k^2a_{n+1}) = s\widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})]. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} (\Sigma, \Sigma') &= \frac{|2(a \cdot b) - a_0b_{n+1} - a_{n+1}b_0|}{2(|a|^2 - a_0a_{n+1})^{\frac{1}{2}}(|b|^2 - b_0b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|2(ka \cdot kb) - k^2a_0b_{n+1} - k^2a_{n+1}b_0|}{2(|ka|^2 - k^2a_0a_{n+1})^{\frac{1}{2}}(|kb|^2 - k^2b_0b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} = (\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')). \end{aligned}$$



**Caso 3** Sea  $\phi$  la reflexión en un plano por el origen, entonces como  $\phi$  es una función lineal y ortogonal

$$\begin{aligned} a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} &= 0 \\ \iff a_0|\phi(x)|^2 - 2(\phi(x) \cdot \phi(a)) + a_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})] = (a_0, \phi(a), a_{n+1}),$$

que es bilineal, ya que  $\phi$  es lineal, además

$$\begin{aligned} (\Sigma, \Sigma') &= \frac{|2(a \cdot b) - a_0b_{n+1} - a_{n+1}b_0|}{2(|a|^2 - a_0a_{n+1})^{\frac{1}{2}}(|b|^2 - b_0b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|2(\phi(a) \cdot \phi(b)) - a_0b_{n+1} - a_{n+1}b_0|}{2(|\phi(a)|^2 - a_0a_{n+1})^{\frac{1}{2}}(|\phi(b)|^2 - b_0b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} = (\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')). \end{aligned}$$

**Caso 4** Si  $\phi(x) = x + u$  y  $x + u = y$ , entonces

$$\begin{aligned} a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} &= 0 \\ \iff a_0|y - u|^2 - 2[(y - u) \cdot a] + a_{n+1} &= 0 \\ \iff a_0|y|^2 - 2[y \cdot (a_0u + a)] + [a_0|u|^2 + 2a \cdot u + a_{n+1}] &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

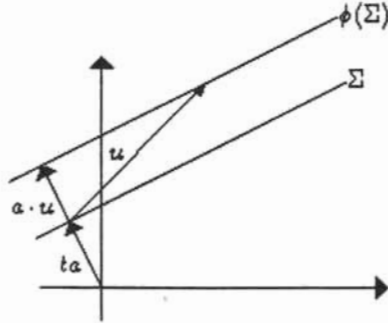
$$\widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})] = (a_0, a_0u + a, a_0|u|^2 + 2a \cdot u + a_{n+1}),$$

que es bilineal, ya que

$$\begin{aligned} &\widehat{\phi}[(a_0 + b_0, a + b, a_{n+1} + b_{n+1})] \\ &= (a_0 + b_0, (a_0 + b_0)u + (a + b), (a_0 + b_0)|u|^2 + 2(a + b) \cdot u + (a_{n+1} + b_{n+1})) \\ &= (a_0, a_0u + a, a_0|u|^2 + 2a \cdot u + a_{n+1}) + (b_0, b_0u + b, b_0|u|^2 + 2b \cdot u + b_{n+1}) \\ &= \widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})] + \widehat{\phi}[(b_0, b, b_{n+1})], \end{aligned}$$

también, si  $s \in \mathbb{R}$

$$= \widehat{\phi}[s(a_0, a, a_{n+1})] = (sa_0, s(a_0u + a), sa_0|u|^2 + 2sa \cdot u + sa_{n+1})$$

Figura 1.23: Traslación de  $P(b, t)$ 

$$= s(a_0, a_0u + a, a_0|u|^2 + 2a \cdot u + a_{n+1}) = s\widehat{\phi}[(a_0, a, a_{n+1})].$$

En este caso consideramos 3 subcasos de acuerdo a que  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  sean esferas o planos. Si  $\Sigma = P(a, t)$ , su vector coeficiente está determinado por  $(0, a, 2t)$  y se sigue que

$$\widehat{\phi}[(0, a, 2t)] = (0, a, 2t + 2a \cdot u),$$

y bajo  $\phi$  el vector normal es el mismo, (véase la Figura 1.23).

Análogamente si  $\Sigma = S(a, r)$ , su vector coeficiente está determinado por  $(1, a, |a|^2 - r^2)$ , por lo que

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}[(1, a, |a|^2 - r^2)] &= (1, a + u, u^2 + 2(a \cdot u) + |a|^2 - r^2) \\ &= (1, a + u, |a + u|^2 - r^2), \end{aligned}$$

(véase la Figura 1.24).

Finalmente demostremos  $(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma')$

(i)  $\Sigma = S(a, r)$ ,  $\Sigma' = S(b, t)$  se sigue de la ecuación (1.10) que

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = \left| \frac{r^2 + t^2 - |a + u - (b + u)|^2}{2rt} \right| = (\Sigma, \Sigma').$$

(ii)  $\Sigma = S(a, r)$ ,  $\Sigma' = P(b, t)$  se sigue de la ecuación (1.11)

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = \left| \frac{(a+u) \cdot b - (t+b \cdot u)}{r} \right| = \left| \frac{a \cdot b - t}{r} \right| = (\Sigma, \Sigma').$$

(iii)  $\Sigma = P(a, t)$ ,  $\Sigma' = P(b, s)$  se sigue de la ecuación (1.12)

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = |a \cdot b| = (\Sigma, \Sigma').$$

□

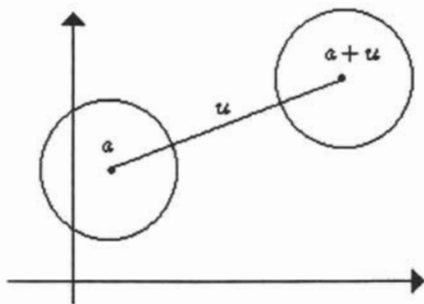


Figura 1.24: Traslación de  $S(a, r)$



# Capítulo 2

## Polígonos hiperbólicos

### 2.1. Preliminares

Para el estudio de los polígonos hiperbólicos se necesitan algunas definiciones y resultados que presentamos ahora.

#### 2.1.1. $PSL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{R})$ .

El grupo de transformaciones de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $ad - bc \neq 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , es llamado el grupo de transformaciones de Möbius complejas. Los coeficientes  $a, b, c, d$  están determinados salvo algún factor distinto de cero, es decir, si  $ad - bc = k$ , entonces la transformación  $T$  también se puede expresar como

$$z \rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}} + \frac{d}{\sqrt{k}}},$$

y en este caso

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1,$$

por lo que se puede suponer que  $ad - bc = 1$ . El grupo de matrices de  $2 \times 2$  con entradas complejas y determinante 1 se denota por  $SL(2, \mathbb{C})$

(Grupo Especial Lineal). Se define la proyectivización del subgrupo  $SL(2, \mathbb{C})$  como el cociente  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre su centro  $\pm Id$ . Este grupo denotado por  $PSL(2, \mathbb{C})$  es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas. La afirmación anterior es consecuencia de las últimas observaciones y del primer teorema de isomorfismo de grupos (cf. [3] p. 146), ya que si  $\mu_{\mathbb{C}}$  denota el grupo de transformaciones de Möbius, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pm Id \mapsto SL(2, \mathbb{C}) & \rightarrow & PSL(2, \mathbb{C}). \\ & \searrow & \mu_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Con base a esto identificaremos el grupo de las transformaciones de Möbius con  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Si  $T$  es de Möbius, entonces  $T$  es composición de rotaciones, traslaciones, homotecias y  $z \rightarrow 1/z$ .

Esto se sigue ya que si

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

si  $c = 0$ , entonces  $T$  es la transformación

$$z \rightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

que es claramente composición de las transformaciones descritas y si  $c \neq 0$ , entonces  $T$  es la transformación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

Una propiedad fundamental de las transformaciones de Möbius es que dados 3 puntos distintos  $z_1, z_2, z_3$  y otros 3 puntos distintos  $w_1, w_2, w_3$  existe una única transformación de Möbius  $T$  tal que  $T(z_i) = w_i$ , (cf. [5] p. 346).

Si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  fija un punto entonces a  $T$  se le llama parabólica, si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  fija exactamente 2 puntos,  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a la transformación  $S(z) = \alpha z$ .

- a) Si  $|\alpha| = 1$ , a  $\bar{T}$  se le llama *elíptica*.
- b) Si  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  a  $\bar{T}$  se le llama *hiperbólica*.
- c) Si  $|\alpha| \neq 1$  y  $\alpha \notin \mathbb{R}^+$  a  $\bar{T}$  se le llama *loxodrómica*.

Al subgrupo de las matrices en  $SL(2, \mathbb{C})$  con entradas reales se le denota por  $SL(2, \mathbb{R})$ . La misma prueba del caso complejo muestra que el centro de  $SL(2, \mathbb{R})$  es  $\pm Id$  y que se puede identificar a las transformaciones de Möbius definidas por estas matrices con  $PSL(2, \mathbb{R})$ , donde este último grupo es el cociente de  $SL(2, \mathbb{R})$  sobre su centro. Esta afirmación se sigue del siguiente diagrama, donde  $\mu_{\mathbb{R}}$  denota las transformaciones de Möbius definidas por las matrices en  $SL(2, \mathbb{R})$ .

$$\begin{array}{ccc} \pm Id & \longrightarrow & SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \\ & & \searrow \quad \cong \\ & & \mu_{\mathbb{R}} \end{array}$$

De ahora en adelante nos referiremos a estas transformaciones como los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

### 2.1.2. Densidad y Área hiperbólica

Sea  $A$  una región en  $\mathbb{R}^n$ , una *densidad* en  $A$  es una función continua  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Dada una densidad en una región  $A$  y  $\gamma$  una curva de clase  $C^1$  en  $A$  se define la  $\lambda$ -longitud de  $\gamma$  como

$$l_{\lambda}(\gamma) = \int_b^a \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ . Esta definición se extiende a curvas de clase  $C^1$  por tramos.

**Definición 8** Sea  $\lambda$  una densidad en una región  $A$ ,  $z_1, z_2 \in A$ , se define la distancia  $\rho_{\lambda}(z_1, z_2)$  como

$$\rho_{\lambda}(z_1, z_2) = \inf l_{\lambda}(\gamma),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas de clase  $C^1$  por tramos que unen  $z_1$  con  $z_2$ .

Resulta que la distancia  $\rho_\lambda$  define una métrica en  $A$ , (cf. [2] p. 7). Uno de nuestros principales ejemplos es el plano superior  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}.$$

A  $\mathbb{H}^2$  con esta métrica se le llama plano hiperbólico. A la métrica se le llama hiperbólica.

Exhibimos ahora un segundo modelo del plano hiperbólico, para esto probamos un resultado más general. Sean  $A, B$  regiones en  $\mathbb{R}^n$ , una función  $f$  tal que  $f: A \rightarrow B$  es una biyección conforme y  $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}^+$  una densidad, se define una densidad en  $\sigma$  en  $B$  de tal manera que  $f$  sea una isometría. Para esto se toma

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu_f(x)},$$

donde  $\mu_f(x)$  es el factor de conformalidad de  $f$  en  $x$ . Para probar que  $f$  es una isometría, sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  una curva de clase  $C^1$ , entonces

$$l_\sigma(f \circ \gamma) = \int_b^a |(f \circ \gamma)'(t)| \sigma(f \circ \gamma(t)) dt = \int_b^a \mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))} dt = l_\lambda(\gamma).$$

Esta observación implica de manera inmediata que  $f: A \rightarrow B$  es una isometría de  $A$  con densidad  $\lambda$  y  $B$  con densidad  $\sigma$ .

Este hecho nos permite derivar una densidad en  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  de tal manera que el disco unitario sea el segundo modelo del plano hiperbólico. Para esto se toma  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$  dada por

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

esta función  $f$  llamada de Cayley, es una biyección conforme de  $\mathbb{H}^2$  en  $\Delta$  (cf. [5] p. 364). Usando esta biyección y la observación anterior se obtiene una densidad  $\sigma$  en  $\Delta$  dada por

$$\sigma(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$



(cf. [2] p.127) Al disco unitario con esta métrica se le llama el disco de Poincaré y a la métrica se le llama también hiperbólica. Obsérvese que  $f$  es una isometría.

Ahora se calcula la distancia hiperbólica de  $i$  a  $ik$ ,  $k > 1$ , en el modelo del semiplano  $\mathbb{H}^2$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  una curva de clase  $C^1$  tal que  $\gamma(a) = i$ ,  $\gamma(b) = ki$  y  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , entonces

$$\begin{aligned} l_h(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_2'(t))^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt \\ &= \log(\gamma_2(t)) \Big|_a^b = \log(\gamma_2(b)) - \log(\gamma_2(a)) = \log k - \log 1 = \log k, \end{aligned}$$

(obsérvese que si  $\gamma$  no es un segmento vertical la desigualdad es estricta) este argumento se generaliza para curvas  $C^1$  por tramos.

Ahora, si  $\gamma(k) = ti$ ,  $\gamma : [1, k] \rightarrow \mathbb{H}^2$ , es claro que  $l_h(\gamma) = \log k$ , por lo tanto  $\rho(i, ik) = \log k$ , donde  $\rho$  denota la distancia hiperbólica.

Como  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa transitivamente en círculos ortogonales a la recta real (cf. [7], pag. 5) se sigue que si  $z, w \in \mathbb{H}^2$  y  $C$  es el único círculo que pasa por  $z, w$  y es ortogonal a la recta real, entonces  $\rho(z, w)$  se alcanza por la curva determinada por el segmento de círculo  $C$  que une  $z$  con  $w$ , (véase la Figura 2.1).

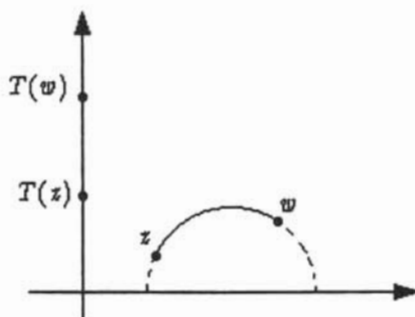


Figura 2.1: Geodésica

Se sigue de las observaciones anteriores que las *geodésicas* o curvas que minimizan la distancia hiperbólica son precisamente los círculos o rectas ortogonales a la recta real. El segmento de geodésica que une  $z$  con  $w$  lo denotaremos por  $[z, w]$ .

El siguiente teorema exhibe una fórmula de la distancia hiperbólica en  $\mathbb{H}^2$

**Teorema 2.1.1** Sean  $z, w \in \mathbb{H}^2$  entonces

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [7] p.7. Es importante destacar que las transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{R})$  son isometrías hiperbólicas (cf. [7] p. 4). Claramente también son conformes en  $\mathbb{H}^2$ . Usaremos también la fórmula de la distancia hiperbólica en  $\Delta$ .

**Teorema 2.1.2** Dados  $z, w \in \Delta$  se tiene

$$\sinh^2 \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

Una prueba de este resultado aparece en [2] p. 131 y en [7] p.15. A continuación definimos el área de una región  $R$  en  $\mathbb{H}^2$ .

**Definición 9** El área de una región  $R$  en  $\mathbb{H}^2$  se define como la integral de Lebesgue (o la integral de Riemman impropia)

$$\int_R \frac{dA}{(\operatorname{Im} z)^2}.$$

Se denota por  $A_h(R)$  el área.

Muchas definiciones y resultados que se mencionan en este capítulo para el semiplano superior se pueden también extender al disco de Poincaré  $\Delta$ , ya que la función  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$  es una isometría hiperbólica que es conforme.

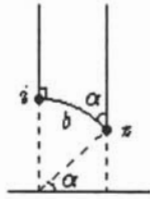
### 2.1.3. Triángulos Hiperbólicos.

En esta sección mencionaremos algunos resultados de la trigonometría de triángulos hiperbólicos. Mostremos una aplicación del Teorema 2.1.1 en un triángulo con ángulos  $\alpha, 0, \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha \neq 0$ , conocida como ángulo de paralelismo.

**Teorema 2.1.3** Sea  $T$  un triángulo con ángulos  $\alpha, 0, \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha \neq 0$ , entonces

$$\cosh b \tan \alpha = 1,$$

donde  $b$  es la longitud del lado finito.

Figura 2.2: Triángulo con vértice en  $\infty$ 

DEMOSTRACIÓN. Usando transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{R})$  se puede suponer que el triángulo es como aparece en la Figura 2.2, esto es,  $T$  tiene vértices  $x + iy$ ,  $\infty$ , e  $i$ , y se tiene  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x > 0$ . Obsérvese que  $y = \text{sen } \alpha$  (véase la Figura 2.2). Se sigue del Teorema 2.1.1 que

$$\cosh b = 1 + \frac{x^2 + (y-1)^2}{2y} = \frac{1}{y},$$

finalmente

$$\cosh b = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

□

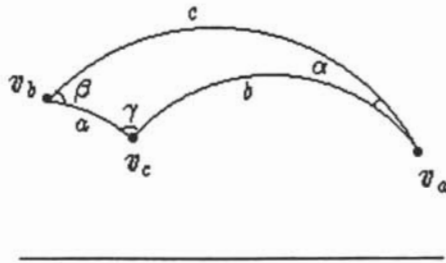


Figura 2.3: Triángulo hiperbólico

Dado un triángulo  $T$ , denotamos los vértices por  $v_a, v_b, v_c$  y los lados opuestos a los vértices por  $a, b, c$ , respectivamente, los ángulos interiores los denotaremos por  $\alpha, \beta, \gamma$ , (véase la Figura 2.3). Para el caso particular de un triángulo con un ángulo recto, escribimos  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ; usando una transformación de  $PSL(2, \mathbb{R})$  se puede suponer que  $v_c = i$  y con una transformación elíptica se puede rotar de tal manera que el segmento  $[v_c, v_a]$  esté contenido en el

círculo  $|z| = 1$ . Por lo que se puede suponer que  $v_c = i$ ,  $v_b = ik$ ,  $v_a = s + it$  donde  $k > 1$ ,  $s^2 + t^2 = 1$ , (véase la Figura 2.4). El siguiente teorema es el teorema de Pitágoras en su forma hiperbólica.

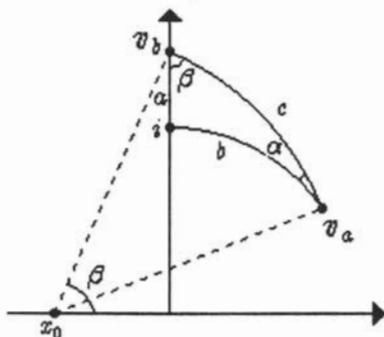


Figura 2.4: Triángulo con ángulo recto

**Teorema 2.1.4** Para cada triángulo con ángulos  $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ , se tiene

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el Teorema 2.1.1 se tiene que

$$\cosh c = \frac{1 + k^2}{2kt},$$

$$\cosh b = \frac{1}{t}$$

y

$$\cosh a = \frac{1 + k^2}{2k}.$$

□

Obsérvese que  $\tanh b = s$ . Como  $1 + k^2 > 2k$  y  $1 > t$ , se tiene que

$$\cosh c > \cosh a$$

y

$$\cosh c > \cosh b.$$

Esto es, la hipotenusa siempre es mayor que los catetos. Ahora, mostramos una relación entre dos lados y un ángulo.

**Teorema 2.1.5** Para cada triángulo con ángulos  $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$  se tiene

$$\tanh b = \sinh a \tanh \beta.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 2.1.4 que

$$\cosh^2 a - 1 = \sinh^2 a = \frac{(1 - k^2)^2}{4k^2}.$$

Por otro lado, si tomamos la distancia euclídeana de  $v_a$  y  $v_b$  al centro euclídeano  $x_0$  (véase la Figura 2.4), tenemos que

$$x_0^2 + k^2 = (s - k)^2 + t^2$$

y

$$k^2 = 1 - 2x_0s.$$

Por lo que,  $x_0 < 0$  y

$$x_0 = \frac{1 - k^2}{2s}.$$

Finalmente, como

$$\tan \beta = \frac{k}{|x_0|} = \frac{2sk}{(k^2 - 1)},$$

se tiene

$$\sinh^2 a \tan^2 \beta = s^2 = \tanh^2 b.$$

□

Usando este teorema se prueba un resultado dual que exhibe la relación entre dos ángulos y un lado.

**Teorema 2.1.6** Para cada triángulo con ángulos  $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$  se tiene

$$\cosh a \sin \beta = \cos \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema 2.1.5 se tienen las siguientes ecuaciones

$$\sinh a \tan \beta = \tanh b, \tag{2.1}$$

$$\sinh b \tan \alpha = \tanh a. \tag{2.2}$$

Sustituyendo  $\sinh^2 b = \cosh^2 b - 1$  en (2.2), se obtiene

$$\cosh^2 b = \frac{\tanh^2 a}{\tan^2 \alpha} + 1. \quad (2.3)$$

Por otro lado, la ecuación (2.1) se puede reescribir como

$$\tanh^2 b = \frac{\cosh^2 b - 1}{\cosh^2 b} = \sinh^2 a \tan^2 \beta. \quad (2.4)$$

Ahora, usando (2.3) en la segunda ecuación de (2.4), se sigue que

$$\frac{\tanh^2 a}{\tanh^2 a + \tan^2 \alpha} = \sinh^2 a \tan^2 \beta$$

y

$$\tan^2 \beta (\sinh^2 a + \tan^2 \alpha \cosh^2 a) = 1.$$

Finalmente se desarrolla en términos del  $\cosh a$ , siguiendo el resultado.  $\square$

Una prueba más detallada del resultado anterior se puede consultar en [7] p. 47. El área hiperbólica de un triángulo, está determinada por sus ángulos.

**Teorema 2.1.7** *Para cada triángulo  $T$  con ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ,*

$$A_h(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Una demostración de este conocido resultado aparece, por ejemplo, en [2] p. 154 y [6] p. 48.

### 2.1.4. Modelo de Klein y Convexidad

Ahora describiremos el modelo de Klein, que es muy útil para trabajar con conjuntos convexos. Sea  $\tau$  la reflexión en el plano  $x_3 = 0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\phi_0$  la reflexión en la esfera  $S(e_3, \sqrt{2})$ , y

$$s = \phi_0 \circ \tau.$$

Obsérvese que  $s$  es una transformación de Möbius en  $GM(\widehat{\mathbb{R}^3})$  que transforma  $\mathbb{H}^3$  en la bola unitaria  $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ . Se sigue de los teoremas 1.4.3 y 1.4.6 que  $s$  es conforme en  $\mathbb{H}^3$  y manda “esferas” en “esferas”. Además  $s$  fija puntualmente el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$ , esto es,

el ecuador (véase la Figura 2.5). En particular  $s$  transforma el hemisferio norte

$$\mathbb{Q} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$$

en  $\Delta$ . Se sigue entonces de la conformalidad, que “semicírculos” en  $\mathbb{Q}$  ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^3$  se transforman en “semicírculos” en  $\Delta$  ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^3$ , es decir, al círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$ . La afirmación anterior es cierta, porque se sigue de la Proposición 1.4.6 que  $s$  manda “círculos” en “círculos”, ya que cada “círculo” es la intersección de dos “esferas” (Proposiciones 1.5.2 y 1.5.3).

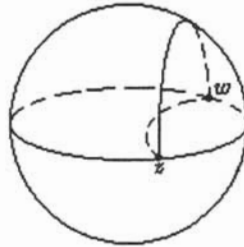


Figura 2.5: Geometría de  $s = \phi_0\tau$

Ahora, sea  $v : \mathbb{Q} \rightarrow \Delta$ , la proyección  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + ix_2)$ . Por lo tanto  $F = vs^{-1}$  es una transformación de  $\Delta$  en  $\Delta$ . Además  $s^{-1}$  fija  $\partial\Delta$  y dado un “semicírculo”  $L$  en  $\Delta$  ortogonal a  $\partial\Delta$ , se tiene que  $v(L)$  es un segmento de recta euclidiana, que une los puntos extremos de  $L$ . De esta manera usando este homeomorfismo  $v$  de  $\overline{\Delta}$  en  $\overline{\Delta}$  se define el modelo de Klein como el disco unitario  $\Delta$ , donde sus geodésicas son los segmentos euclidianos (véase la Figura 2.6).

Como la función  $F$  manda geodésicas de  $\Delta$  con la métrica de Poincaré en geodésicas en  $\Delta$  con el modelo de Klein, este permite probar resultados de convexidad usando geometría euclidiana.

#### CONJUNTOS CONVEXOS.

**Definición 10** Sea  $A \subset \mathbb{H}^2$  se dice que  $A$  es  $h$ -convexo si  $\forall z, w \in A$ , entonces  $[z, w] \subset A$ .

Obsérvese que si

$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} P_i,$$

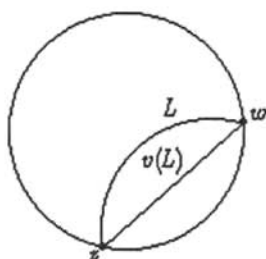


Figura 2.6: Las geodésicas  $L$  se transforman en segmentos euclidianos  $v(L)$

tal que cada  $P_i$  es un conjunto h-convexo, entonces  $P$  es h-convexo. También si  $l$  es una geodésica,  $\mathbb{H}^2 - l$  consiste de dos semiplanos que son h-convexos. En consecuencia, la región comprendida entre dos rectas verticales es h-convexa así como cualquier triángulo hiperbólico. Como la función de Cayley manda geodésicas en  $\mathbb{H}^2$  en geodésicas en  $\Delta$ , un conjunto  $A$  es convexo en  $\mathbb{H}^2$  si y sólo si  $F(A)$  lo es en  $\Delta$ . De las observaciones anteriores se sigue también que un disco hiperbólico es h-convexo, ya que es la intersección infinita de semiplanos (véase la Figura 2.7). El siguiente resultado exhibe condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea convexo.

**Teorema 2.1.8** *Sea  $P$  el plano Euclidiano o el plano hiperbólico cerrado. Un subconjunto cerrado  $E$  de  $P$  es convexo si y sólo si este es conexo y localmente convexo.*

Una prueba de este resultado se puede consultar en [2] p. 140 y de manera más detallada en [7] p. 34. Estas pruebas usan el modelo de Klein.

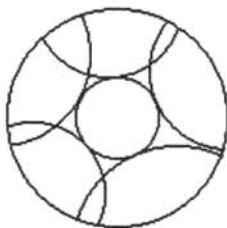


Figura 2.7: Convexidad de un disco hiperbólico



## 2.2. Área de un polígono hiperbólico

En este capítulo calculamos el área de un polígono, y mostramos la existencia de un polígono convexo con determinados ángulos.

**Definición 11** *Un polígono hiperbólico  $P$  es una región cuya frontera está dada por una unión a lo sumo numerable de segmentos de geodésicas.*

### ÁNGULOS.

A continuación describiremos los ángulos de la geometría hiperbólica en términos de la euclidea. Un rayo desde  $z$  es un segmento de geodésica  $[z, \alpha]$  donde  $\alpha \in \widehat{\mathbb{R}}$ . En la geometría hiperbólica, un ángulo en un punto  $z$  es un par cualesquiera de rayos  $L$  y  $L'$  desde  $z$  que denotaremos por  $\angle LL'$ .

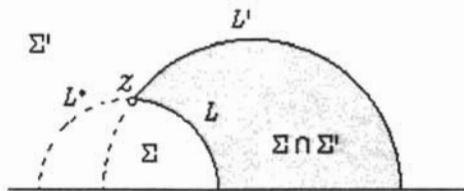


Figura 2.8: Ángulo hiperbólico

Sea  $\angle LL'$  un ángulo de  $z$  y supóngase también que  $L$  y  $L'$  no son el mismo rayo (véase la Figura 2.8). El rayo  $L$  determina una geodésica, que llamaremos  $L^*$ . Ahora  $L^*$  separa  $\mathbb{H}^2$  en dos semiplanos abiertos, denotaremos por  $\Sigma'$  áquel que contiene a  $L^* - \{z\}$ . Análogamente, la geodésica determinada por  $L'$  determina dos semiplanos, áquel que contiene a  $L - \{z\}$  lo denotamos por  $\Sigma$ . Ahora definimos el *interior del ángulo*  $\angle LL'$  como  $\Sigma \cap \Sigma'$ . Es claro que el interior de  $\angle LL'$  es una componente de  $L \cup L'$ , a la otra componente se le llama *exterior del ángulo*.

Ahora, como el interior del ángulo  $\angle LL'$  es la intersección de dos semiplanos convexos, se sigue que es convexo. Por otro lado el exterior de  $\angle LL'$  no puede ser convexo, ya que si pasara lo contrario existiría un segmento de geodésica que une un punto en  $L - \{z\}$  y otro en  $L' - \{z\}$ , que estaría contenido tanto en el exterior, como en el interior de  $\angle LL'$ . Se sigue que el

interior de  $\angle LL'$  está determinado por el intervalo  $[0, \pi)$  y el exterior por el intervalo  $(\pi, 2\pi]$ . En el argumento anterior se usa que si  $A$  es una región h-convexa la cerradura de  $A$  también lo es ([6] p. 27). Exhibimos ahora una fórmula para calcular el área de un polígono hiperbólico en términos de sus ángulos.

**Teorema 2.2.1** *Sea  $P$  un polígono con  $n$  lados y ángulos interiores  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , entonces*

$$A_h(P) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n).$$

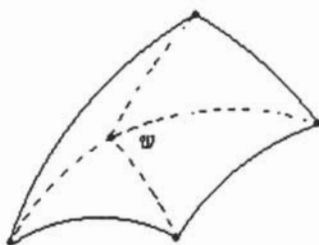


Figura 2.9: Polígono convexo

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $P$  es un triángulo hiperbólico, se sigue del Teorema 2.1.7 el resultado. Ahora, si  $P$  es convexo con vértices  $w_1, \dots, w_n$ , sea  $w$  un punto interior de  $P$ , como  $P$  es convexo los segmentos de geodésicas  $[w, w_i] \subset P$ . Obteniéndose así una triangulación de  $P$  en  $n$  triángulos hiperbólicos. Nótese que la suma de los ángulos de los triángulos alrededor de  $w$  es  $2\pi$ . Aplicando entonces el Teorema 2.1.7 se sigue el resultado, ya que

$$A_h(P) = n\pi - (2\pi + \theta_1 + \dots + \theta_n),$$

(véase la Figura 2.9).

Ahora, si  $P$  es no convexo, también se hacen subdivisiones en triángulos para probar el resultado. Para generar esta triangulación se procede de la siguiente manera. Se prolongan las geodésicas, que forman la frontera de  $P$ . De esta manera  $\mathbb{H}^2$  es dividido en un número finito de polígonos convexos (la

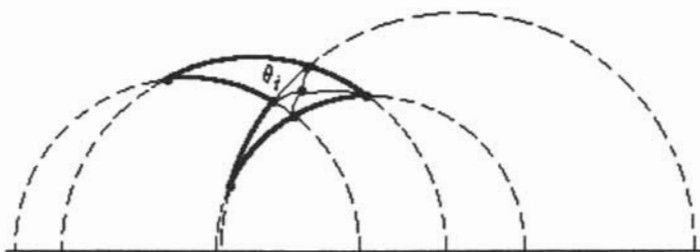


Figura 2.10: Polígono no convexo

convexidad se sigue ya que estos nuevos polígonos son intersección de semiplanos). El polígono  $P$  queda entonces subdividido en triángulos hiperbólicos y polígonos convexos (véase la Figura 2.10). A su vez estos polígonos convexos se subdividen en triángulos hiperbólicos como en el caso anterior. Usamos ahora la ecuación de Euler en el disco para la triangulación obtenida en  $P$

$$N - E + V = 1 \quad (2.5)$$

(cf. [4] p. 131). En esta fórmula  $N$  es el número de triángulos,  $E$  el número de lados y  $V$  el número de vértices de la triangulación (véase la Figura 2.10). Este resultado también es válido para polígonos ya que estos son homeomorfos al disco (cf. [1] p. 230). Obsérvese que los triángulos no se traslapan, además cada vértice de  $P$  es un vértice de algún  $T_i$ . Ahora, un lado es común a dos triángulos o es parte de un lado del polígono original  $P$ .

Denotemos por  $E_0$  al número de lados contenidos en  $\partial P$ . De esta manera se deduce que bajo esta triangulación  $E - E_0$  es el número de lados que están contenidos en dos triángulos. Se tiene entonces la siguiente relación entre número de triángulos y número de lados

$$3N = E_0 + 2(E - E_0).$$

Por consiguiente usando (2.5), se tiene que

$$3N + E_0 = 2E = 2(N + V - 1)$$

y

$$N + E_0 - 2V = -2. \quad (2.6)$$

Obsérvese que  $V - E_0$  es el número de vértices nuevos en el interior de  $P$  y  $E_0 - n$  es el número de vértices nuevos en la frontera de  $P$  (véase la Figura 2.10).

Finalmente sumamos los ángulos. Los ángulos de los  $n$  vértices de  $P$  suman  $\theta_1 + \dots + \theta_n$ , los ángulos en los nuevos vértices de la frontera de  $P$  contribuyen  $(E_0 - n)\pi$  y los ángulos de los vértices interiores suman  $2\pi(V - E_0)$ . Por lo cual usando el Teorema 2.1.7 y (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned} A_h(P) &= N\pi - (E_0 - n)\pi - (V - E_0)2\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n) \\ &= \pi(N - E_0 + n - 2V + 2E_0) - (\theta_1 + \dots + \theta_n) \\ &= \pi(n + N + E_0 - 2V) - (\theta_1 + \dots + \theta_n) \\ &= \pi(n - 2) - (\theta_1 + \dots + \theta_n). \end{aligned}$$

□

Obsérvese que el teorema anterior muestra que una condición para la existencia de un polígono con ángulos interiores  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , es que

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

**Teorema 2.2.2** *Sea  $P$  un polígono con ángulos interiores  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Entonces  $P$  es convexo si y sólo si cada  $\theta_j$  satisface  $0 \leq \theta_j \leq \pi$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La necesidad se sigue de los argumentos usados en la discusión de ángulos (véase la Figura 2.10).

Usamos el Teorema 2.1.8 para demostrar la suficiencia, por lo que basta probar que  $P$  es localmente convexo. Para esto sea  $z \in \tilde{P}$ , donde  $\tilde{P}$  denota la cerradura de  $P$  en  $\mathbb{H}^2$ . Si  $z$  está en el interior de  $P$  existe un disco hiperbólico contenido en el interior de  $P$ . Por otra parte, si  $z$  es un vértice de  $P$ , se puede tomar un disco hiperbólico  $N$  con centro en  $P$ , de tal manera que  $P \cap N$  es la intersección de dos semiplanos y  $P$  (véase la Figura 2.11). El caso cuando  $z$  está contenido en un lado de  $P$  es análogo (véase la Figura 2.11).

□

A continuación exhibimos una condición necesaria y suficiente para la existencia de un polígono convexo.

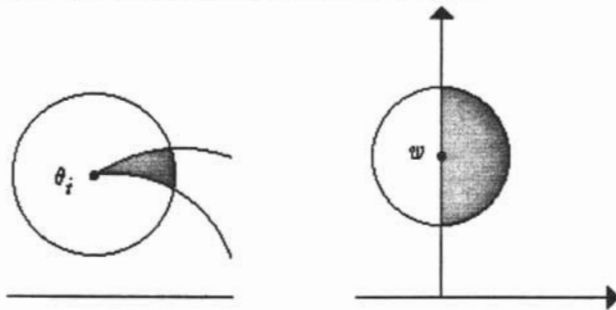


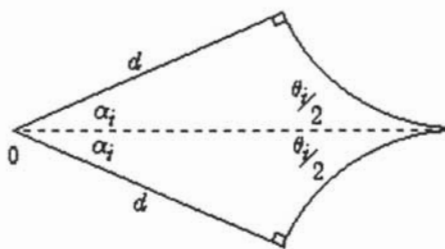
Figura 2.11: Convexidad local

**Teorema 2.2.3** Sean  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , tales que  $0 \leq \theta_j < \pi$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces existe en un polígono  $P$  con ángulos interiores  $\theta_1, \dots, \theta_n$  (apareciendo en ese orden) si y sólo si

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia es consecuencia inmediata de la observación que aparece después del Teorema 2.2.1.

Para probar la necesidad usamos el modelo de Poincaré. Se construyen cuadriláteros  $Q_1, \dots, Q_n$ , tales que cada uno tenga un vértice en el origen, como en la Figura 2.12. Probaremos que existe una distancia hiperbólica  $d$ ,  $0 < d < \infty$ , tal que la unión de estos cuadriláteros forman el polígono requerido.

Figura 2.12: Cuadrilátero  $Q_i$ 

Probamos primero que dada  $d$ , dicho cuadrilátero existe. Si denotamos  $0 < D < 1$  el punto cuya distancia hiperbólica al origen es  $d$ , es claro que existe un único círculo ortogonal a  $\partial\Delta$ , con centro en la recta real y que

pasa por  $D$ , esto se verifica analíticamente tomando como centro del círculo al punto

$$a = \frac{1 + D^2}{2D}$$

(obsérvese que el radio de este círculo  $r$  es  $a - D$ ). Denotamos a este círculo por  $C$ . Considerando las rectas por el origen se quiere mostrar que una de ellas intersecta al círculo  $C$  en un ángulo  $\theta/2$ . Sea  $\delta$  la distancia euclidiana de la recta  $l = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid y - tx = 0\}$  al centro  $a$  y  $\beta$  es el ángulo de intersección de  $l$  con  $C$  (véase la Figura 2.13). En virtud de la Proposición 1.5.5 el producto inversivo de las rectas por el origen que intersectan a  $C$  está dado por  $\delta/r$ , por lo que este valor varía de 0 a 1. Por consiguiente usando ahora la Proposición 1.5.1 se tiene que existe una recta  $l$  para la cual el ángulo de intersección  $\beta$  es precisamente  $\theta/2$ . Por lo cual, reflejando en  $l$  el triángulo determinado por  $0$ ,  $D$  y el ángulo  $\theta/2$ , se obtiene el cuadrilátero buscado  $Q_i$  de la Figura 2.12. Obsérvese que  $Q_i$  está determinado por  $d$  y  $\theta/2$ , por lo tanto basta probar que existe  $d$ , tal que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = \pi.$$

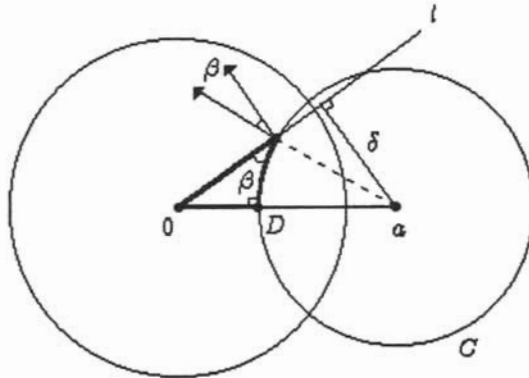


Figura 2.13: Construcción del cuadrilátero  $Q_i$

Usando el teorema 2.1.6, se tiene

$$\operatorname{sen} \alpha_j = \frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\cosh d}.$$

Ahora, analizamos la función

$$g(t) = \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\cosh t} \right),$$

donde  $t \geq 0$ . Como

$$0 < \frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\cosh t} \leq 1,$$

se puede tomar la función  $\operatorname{sen}^{-1}$  con valores en el intervalo  $(0, \pi/2]$ . Como la función seno en  $(0, \pi/2)$  es creciente, entonces  $\operatorname{sen}^{-1}$  también lo es. Claramente  $g$  es continua y decreciente, ya que  $g(t) \rightarrow 0$ , si  $t \rightarrow +\infty$ . Finalmente como

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n-2)\pi,$$

se sigue que

$$\frac{1}{2}(n\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)) > \pi.$$

Al evaluar a  $g$  en 0, como  $\operatorname{sen}^{-1}(\cos \gamma) = \pi/2 - \gamma$ , se sigue que

$$g(0) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\pi - \theta_j}{2} \right) = \frac{1}{2}(n\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)) > \pi.$$

Por consiguiente, usando el teorema del valor intermedio existe  $d$ , tal que  $g(d) = \pi$ .

□

Obsérvese que en la prueba del teorema anterior se muestra la existencia de un círculo de radio  $D$  inscrito en  $P$ , es decir, que toca todos los lados de  $P$  (véase la Figura 2.13). Nótese también que el teorema anterior, implica que existe un polígono de  $n$  lados con todos sus ángulos rectos si y sólo si  $n \geq 5$ .

## 2.3. Cuadriláteros

Una consecuencia directa del Teorema 2.2.3 es la existencia de un cuadrilátero en  $\Delta$  con ángulos  $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \theta$  si y sólo si  $0 \leq \theta < \pi/2$  (véase la Figura 2.14). A este cuadrilátero se le llama cuadrilátero Lambert. En este capítulo analizaremos el cuadrilátero Lambert y la relación que hay entre sus lados opuestos y  $\theta$ , así como lados adyacentes y  $\theta$ . Usaremos los siguientes resultados para el estudio de este cuadrilátero.

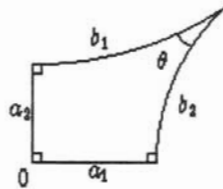
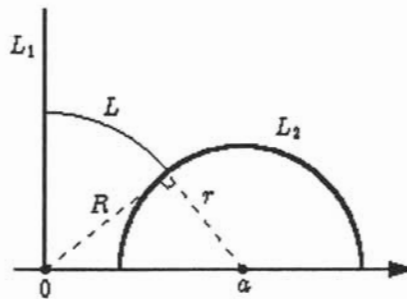


Figura 2.14: Cuadrilátero Lambert

**Proposición 2.3.1** Sean  $L_1, L_2 \in \mathbb{H}^2$  dos geodésicas disjuntas, entonces existe una única geodésica  $L \in \mathbb{H}^2$  ortogonal a  $L_1$  y  $L_2$ .

DEMOSTRACIÓN. Utilizando transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{R})$  y la función  $-\bar{z}$ , se puede suponer que  $L_1$  es el eje imaginario positivo y  $L_2 = S(a, r)$ ,  $a > r$  (véase la figura 2.15). Como se pide que la geodésica  $L$  sea ortogonal a  $L_1$  y  $L_2$ , entonces su centro está en el origen, por lo que  $L = S(0, R)$  y  $R^2 = a^2 - r^2$ . La unicidad es inmediata ya que  $L_2$  está determinada por los valores fijos  $r$  y  $a$ .

□

Figura 2.15: Geodésicas  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$ 

Se define la distancia de un punto  $z \in \mathbb{H}^2$  a la geodésica  $L \in \mathbb{H}^2$  como

$$\rho(a, L) = \inf\{\rho(z, w) \mid w \in L\}.$$

Mostramos que si  $L$  es el eje imaginario positivo

$$\inf\{\rho(z, w) \mid w \in L\} = \rho(z, i|z|), \quad (2.7)$$



$z = x + iy$  (véase la Figura 2.16). Se sigue del Teorema 2.1.1 que

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{x^2 + (y-t)^2}{2yt} = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} \\ &= \frac{|z|}{2y} \left( \frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y}. \end{aligned}$$

Nótese que la igualdad se cumple si y sólo si  $t = |z|$ , ya que para toda  $|z|$  se tiene que

$$\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \geq 2.$$

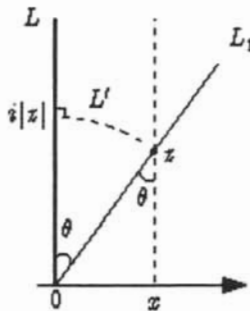


Figura 2.16: Distancia de  $z$  a una geodésica  $L$

De (2.7) se sigue que la distancia más corta de un punto  $z \in \mathbb{H}^2$  a una geodésica  $L$ , es el segmento de geodésica  $L'$  que contiene a  $z$  y es ortogonal a  $L$ . Una aplicación de esta propiedad es la siguiente proposición

**Proposición 2.3.2** Sean  $z \in \mathbb{H}^2$  y  $L \in \mathbb{H}^2$  como en la figura 2.16. Entonces

- i)  $\cosh \rho(z, L) = \frac{1}{\cos \theta}$ ;
- ii)  $\sinh \rho(z, L) = \tan \theta$ ;

DEMOSTRACIÓN. Para probar i) se sigue de (2.7) que

$$\cosh \rho(z, L) = \cosh \rho(z, i|z|) = 1 + \frac{x^2 + (y - |z|)^2}{2y|z|} = \frac{|z|}{y} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Finalmente para demostrar *ii*), utilizamos *i*)

$$\sinh^2 \rho(z, L) = \cosh^2 \rho(z, L) - 1 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta.$$

□

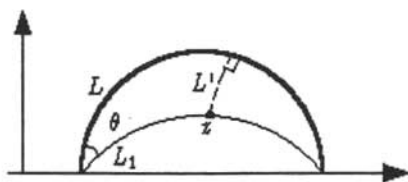


Figura 2.17:  $\cosh \rho(z, L) \cos \theta = 1$

Se sigue del hecho de que  $PSL(2, \mathbb{R})$  es un grupo de isometrías conforme que es transitivo en geodésicas, que la Proposición 2.3.2 se cumple para cualquier geodésica (véase la Figura 2.17). Exhibimos ahora otra fórmula de la distancia de un punto a una geodésica cuando ésta es un círculo

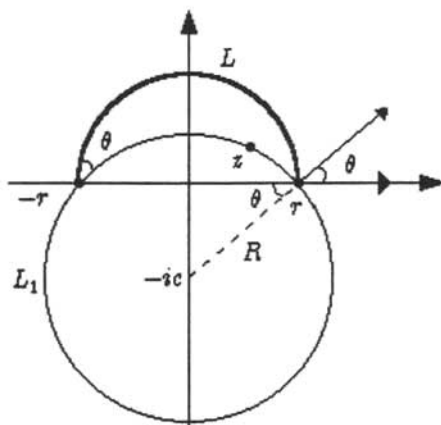


Figura 2.18: Distancia de  $z$  a una geodésica  $L$

**Teorema 2.3.3** Sean  $z \in \mathbb{H}^2$  y  $L$  la geodésica  $\{w \in \mathbb{H}^2 \mid |w| = r\}$ . Entonces

$$\sinh \rho(z, L) = \left| \frac{|z|^2 - r^2}{2yr} \right|.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos primero el caso  $|z| < r$ . Sea  $L_1$  el círculo que pasa por  $-r, r$  y  $z$ , y  $\theta$  el ángulo que forman  $L_1$  y  $L$ . Si  $-ic$  es el centro del círculo  $L_1$  y  $R$  su radio, se tiene entonces

$$c = r \tan \theta \quad \text{y} \quad R = r / \cos \theta$$

(véase la Figura 2.18). Por lo que  $L_1$  está definida por la ecuación

$$|z + ir \tan \theta|^2 = r^2 / \cos^2 \theta,$$

esto es

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2ry \tan \theta + r^2 \tan^2 \theta &= r^2 / \cos^2 \theta, \\ |z|^2 \cos^2 \theta + 2ry \cos^2 \theta \tan \theta + r^2 \sin^2 \theta - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\cos^2 \theta (|z|^2 - r^2) + 2ry \cos^2 \theta \tan \theta = 0$$

y

$$\tan \theta = \frac{r^2 - |z|^2}{2ry}.$$

Analizamos ahora el caso  $|z| > r$ , se calcula la ecuación del círculo  $L_2$  que pasa por  $-r, r$  y  $z$ . Se tiene ahora

$$c = r \tan \theta$$

y

$$R = r / \cos \theta$$

(véase la Figura 2.19). De esta manera la ecuación del círculo  $L_2$  está dada por

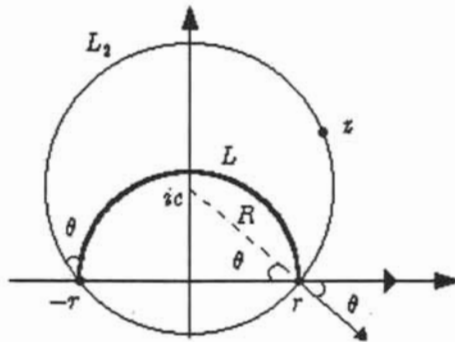
$$|z - ir \tan \theta|^2 = r^2 / \cos^2 \theta.$$

Desarrollando de la misma manera que en el caso anterior se tiene que

$$\tan \theta = \frac{|z|^2 - r^2}{2ry}.$$

Finalmente usando la Proposición 2.3.2, *ii*) se sigue el teorema. □

Nótese que el Teorema 2.3.3 se generaliza fácilmente para geodésicas de la forma  $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z - a| = r\}$ . Ahora, se define la distancia entre dos geodésicas disjuntas

Figura 2.19: Distancia de  $z$  a una geodésica  $L$ 

**Definición 12** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos geodésicas disjuntas se define la distancia entre ellas como

$$\rho(L_1, L_2) = \inf\{\rho(z, w) \mid z \in L_1, w \in L_2\}.$$

El siguiente resultado muestra que la distancia entre dos geodésicas es la longitud hiperbólica del segmento de geodésica ortogonal a ambas.

**Proposición 2.3.4** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos geodésicas disjuntas, entonces la distancia  $\rho(L_1, L_2)$  está dada por  $\rho(u, v)$ , donde  $u \in L_1$ ,  $v \in L_2$  y el segmento  $[u, v]$  corta ortogonalmente a  $L_1$  y  $L_2$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Usando transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{R})$ , se puede suponer que la geodésica  $L$  ortogonal a  $L_1$  y  $L_2$  es el eje imaginario positivo (véase la Figura 2.20). Utilizando el Teorema 2.3.3 se cumple que para toda  $z$  en  $L_1$  y  $w$  en  $L_2$ ,  $z = x + iy$ , se tiene

$$\sinh \rho(z, w) \geq \sinh \rho(z, L_2) = \left| \frac{|z|^2 - r^2}{2yr} \right| \geq \left| \frac{R^2 - r^2}{2rR} \right| = \sinh \rho(ir, iR).$$

□

Otra demostración de la Proposición 2.3.4 es utilizando la observación que aparece después del Teorema 2.1.4. Esto se sigue ya que para cada par de puntos  $z \in L_1$  y  $w \in L_2$ , si  $[z, w]$  no corta ortogonalmente a  $L_2$ , entonces existe  $z' \in L_2$ , tal que  $[w, z']$  es ortogonal a  $L_2$  y

$$\rho(z, w) > \rho(z, w')$$

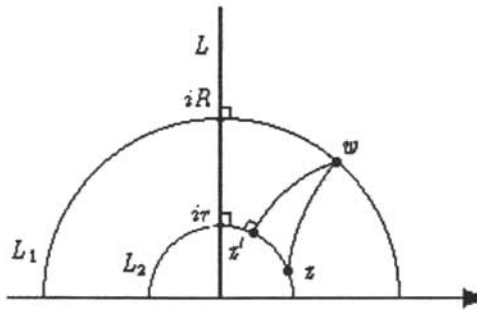


Figura 2.20: Distancia de  $L_1$  a  $L_2$

(véase la Figura 2.20). También, si  $[z, w]$  no corta ortogonalmente a  $L_1$ , entonces existe  $w' \in L_1$ , tal que  $\rho(z', w') > \rho(z', w)$  etcétera. Se sigue de las observaciones anteriores que el único segmento de geodésica que minimiza la distancia hiperbólica de  $L_1$  y  $L_2$ , es aquél que es ortogonal a ambas geodésicas. A continuación probamos dos lemas que se necesitan para establecer el resultado principal sobre cuadriláteros.

**Lema 2.3.5** *Sea  $L$  una geodésica en  $\Delta$  con centro euclidiano  $z_0$  y radio  $r$ , y  $w$  el punto en  $L$  más cercano al origen. Entonces*

$$\sinh \rho(0, w) = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad \cosh \rho(0, w) = \frac{|z_0|}{r}.$$

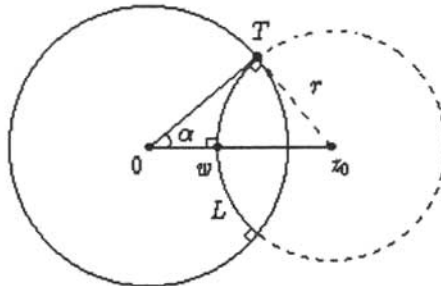


Figura 2.21: Paralelismo en  $T$

DEMOSTRACIÓN. Dada  $L$  ortogonal a  $\Delta$  se tiene

$$|w| = |z_0| - r \quad \text{y} \quad |z_0|^2 = r^2 + 1$$

(véase la Figura 2.21). Usando el Teorema 2.1.2 se sigue que

$$\sinh^2 \frac{1}{2}\rho(w, 0) = \frac{|w|^2}{1 - |w|^2}$$

y

$$\cosh^2 \frac{1}{2}\rho(w, 0) = \frac{1}{1 - |w|^2},$$

entonces

$$\sinh \rho(w, 0) = 2\sinh \frac{1}{2}\rho(w, 0)\cosh \frac{1}{2}\rho(w, 0) = \frac{2|w|}{1 - |w|^2}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \sinh \rho(w, 0) &= \frac{2(|z_0| - r)}{1 - |z_0 - r|^2} = \frac{2(|z_0| - r)}{1 - r^2 - |z_0|^2 + 2|z_0|r} \\ &= \frac{2(|z_0| - r)}{-2r^2 + 2|z_0|r} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

y

$$\cosh^2 \rho(w, 0) = \frac{1}{r^2} + 1 = \frac{1 + r^2}{r^2} = \frac{|z_0|^2}{r^2}.$$

□

Otra demostración del Lema 2.3.5 se sigue aplicando el paralelismo (Teorema 2.1.3) en el triángulo determinado por  $0$ ,  $w$  y  $T$ ; obteniéndose

$$\cosh \rho(0, w)\sin \alpha = 1$$

(véase la Figura 2.21). Como  $\sin \alpha = r/|z_0|$ , se tiene

$$\cosh \rho(0, w) = \frac{|z_0|}{r}$$

y

$$\sinh^2 \rho(0, w) = \frac{|z_0|^2}{r^2} - 1 = \frac{1}{r^2}.$$

**Lema 2.3.6** Sean  $L_1$  y  $L_2$  geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ , entonces el producto inversivo  $(L_1, L_2)$  es

$$\cosh \rho(L_1, L_2), 1, \cos \theta;$$

conforme a que  $L_1$  y  $L_2$  sean disjuntas, paralelas o se intersecten en un ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $L_1$  y  $L_2$  son disjuntas, usando el Teorema 1.10 se puede suponer que  $L_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = r\}$  y  $L_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = R\}$ , respectivamente (véase la Figura 2.20). Se sigue de la relación (1.10) que

$$(L_1, L_2) = \frac{R^2 + r^2}{2Rr}.$$

Por otro lado

$$\cosh \rho(L_1, L_2) = 1 + \frac{|R - r|^2}{2Rr} = \frac{R^2 + r^2}{2Rr}.$$

Finalmente, si  $L_1$  y  $L_2$  se intersectan o son paralelas el resultado se sigue de las Proposiciones 1.5.1 y 1.5.7. □

Ahora, aplicamos los Lemas 2.3.5 y 2.3.6 en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.7** *Sea el cuadrilátero de Lambert determinado por  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  y  $\theta$ , como en la Figura 2.14. Entonces*

- (i)  $\sinh a_1 \sinh a_2 = \cos \theta$ ;
- (ii)  $\cosh a_1 = \cosh b_1 \sen \theta$ .

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero (i). Sin perder generalidad, se puede suponer que  $a_1$  y  $a_2$  están en los ejes real e imaginario positivo (véase la Figura 2.14). Obsérvese que las geodésicas  $L_1 = \{z \in \Delta \mid |z - u| = r\}$  y  $L_2 = \{z \in \Delta \mid |z - iv| = R\}$  contienen a  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente. Se sigue del Lema 2.3.5 que

$$\sinh a_1 \sinh a_2 = \frac{1}{rR}.$$

Por otro lado, usando el Lema 2.3.6 se obtiene

$$(L_1, L_2) = \cos \theta$$

y de la relación (1.10), se tiene que

$$(L_1, L_2) = \frac{|r^2 + R^2 - |u - iv|^2|}{2Rr} = \frac{|r^2 + R^2 - u^2 - v^2|}{2Rr} = \frac{1}{Rr},$$

puesto que  $u^2 = 1 + r^2$  y  $v^2 = 1 + R^2$ .

Para probar (ii), se puede suponer, sin perder generalidad, que el vértice

con ángulo  $\theta$  esté en el origen y que el lado cuya longitud hiperbólica es  $b_2$  esté contenido en el eje  $x$  (véase la Figura 2.22). Sea  $L_1$  el círculo que contiene a la geodésica cuya longitud hiperbólica es  $a_2$ , denotamos a su centro euclidiano por  $te^{i\theta}$  y su radio por  $r$ . Ahora, se refleja este cuadrilátero de Lambert sobre el eje  $x$ , obteniéndose dos cuadriláteros de Lambert que forman un pentágono; si  $L_2$  es el círculo reflejado de  $L_1$ , su centro euclidiano es  $te^{-i\theta}$  y su radio  $r$  (véase la Figura 2.22).

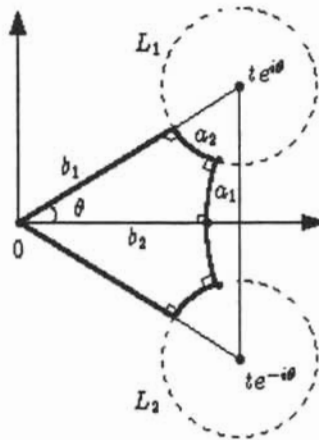


Figura 2.22: Cuadrilátero Lambert

Como  $L_1$  y  $L_2$  no se intersectan, se sigue del Lema 2.3.6 que

$$(L_1, L_2) = \cosh 2a_1, \quad (2.8)$$

y también que

$$|te^{i\theta} - te^{-i\theta}| > 2r$$

Por otra parte, usando la relación (1.10) se tiene

$$(L_1, L_2) = \left| \frac{|te^{i\theta} - te^{-i\theta}|^2 - 2r^2}{2r^2} \right| = \frac{2t^2 \operatorname{sen}^2 \theta - r^2}{r^2} = 2 \frac{t^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta - 1.$$

Finalmente, se sigue del Lema 2.3.5 y la relación (2.8) que

$$2\cosh^2 b_1 \operatorname{sen}^2 \theta - 1 = \cosh 2a_1,$$



es decir

$$\cosh^2 b_1 \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{\cosh 2a_1 + 1}{2} = \cosh^2 a_1.$$

□

Nótese que si rotamos el cuadrilátero, de tal manera que la geodésica cuya longitud hiperbólica es  $b_1$  esté contenida en el eje real, la misma prueba muestra que

$$\cosh a_2 = \cosh b_2 \operatorname{sen} \theta.$$

Esto es, el cociente de los cosenos hiperbólicos de las longitudes de lados opuestos en el cuadrilátero de Lambert es constante ( $\operatorname{sen} \theta$  o  $1/\operatorname{sen} \theta$ ). Esta propiedad de proporcionalidad la cumplen todos estos cuadriláteros de Lambert.

## 2.4. Pentágonos

En este capítulo examinaremos los pentágonos con cuatro ángulos rectos. Claramente dos cuadriláteros de Lambert forman un pentágono como en la Figura 2.22, sin embargo, cualquier pentágono no es necesariamente la reflexión de dos cuadriláteros de Lambert (véase la Figura 2.23).

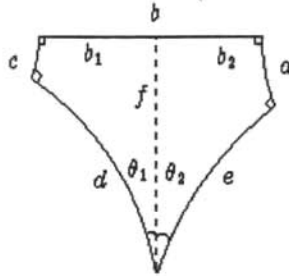


Figura 2.23: Pentágono hiperbólico

El Teorema 2.2.3 garantiza la existencia de un pentágono  $P$  con cuatro ángulos rectos y un ángulo  $\theta \in [0, \pi)$ . Para este pentágono  $P$  se puede construir una geodésica que surga del vértice con ángulo  $\theta$  y que corta ortogonalmente al lado opuesto (véase la Figura 2.23). Se afirma que dicho segmento de geodésica está contenido en el interior del pentágono. Para probar esto denotamos por  $L_x$  el segmento de geodésica que tiene longitud hiperbólica  $x$ , y nos referimos a la notación del pentágono descrito en la

Figura 2.23. Se puede suponer que  $L_b$  es el eje imaginario, por lo que  $L_a$  y  $L_c$  son geodésicas concéntricas. También, sin perder generalidad,  $L_a$  y  $L_c$  aparecen como en la Figura 2.24. Como  $L_d$  corta a  $L_c$  ortogonalmente, el segmento  $L_d$  está en el exterior del círculo que determina  $L_c$ , en caso contrario  $P$  no sería convexo. Como  $L_e$  es ortogonal a  $L_a$ , entonces, también por convexidad  $L_e$  está en el interior del círculo determinado por  $L_a$ . Por consiguiente la intersección de  $L_e$  y  $L_d$  ocurre entre las geodésicas determinadas por  $L_a$  y  $L_c$ , y claramente hay una geodésica  $L_f$  ortogonal a  $L_b$  en el interior del pentágono (véase la Figura 2.24).

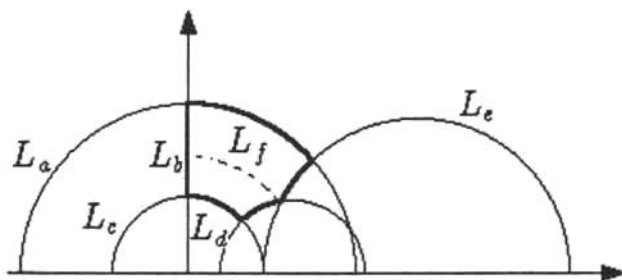


Figura 2.24: Pentágono hiperbólico

Nótese que el segmento  $L_f$  de la Figura 2.23, subdivide el ángulo  $\theta$  en  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y el segmento  $L_b$  se subdivide en dos segmentos de longitud hiperbólica  $b_1$  y  $b_2$ .

**Teorema 2.4.1** *Sea  $P$  un pentágono como en la Figura 2.23. Entonces se cumple*

$$(i) \cosh a \cosh c + \cos \theta = \sinh a \cosh b \sinh c,$$

$$(ii) \text{ Si } \theta = \pi/2, \text{ entonces}$$

$$\tanh a \cosh b \tanh c = 1; \tag{2.9}$$

$$\sinh a \sinh b = \cosh d. \tag{2.10}$$

**DEMOSTRACIÓN.** Para probar (i) nótese que se sigue del Teorema 2.3.7 las siguientes relaciones

$$\cosh a = \cosh f \sen \theta_1, \tag{2.11}$$

$$\cosh c = \cosh f \sen \theta_2, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{senh} a \operatorname{senh} b_2 = \cos \theta_1, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{senh} c \operatorname{senh} b_1 = \cos \theta_2. \quad (2.14)$$

Usando (2.11) y (2.12) se tiene

$$\operatorname{cosh} a \operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{cosh} c \operatorname{sen} \theta_1 = 0 \quad (2.15)$$

para simplificar la prueba denotaremos a  $\operatorname{cosh} x$  como  $c(x)$  y  $\operatorname{senh} x$  por  $s(x)$ . Ahora, desarrollemos la siguiente identidad

$$[c(a)c(c) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2]^2.$$

Usando la relación (2.15), se tiene

$$\begin{aligned} [c(a)c(c) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2]^2 &= [c(a)c(c) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2]^2 - [c(a) \operatorname{sen} \theta_2 - c(c) \operatorname{sen} \theta_1]^2 \\ &= c^2(a)c^2(c) + \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 - c^2(a) \operatorname{sen}^2 \theta_2 - c^2(c) \operatorname{sen}^2 \theta_1 \\ &= c^2(c)[c^2(a) - \operatorname{sen}^2 \theta_1] - \operatorname{sen}^2 \theta_2 [c^2(a) - \operatorname{sen}^2 \theta_1] \\ &= [c^2(a) - \operatorname{sen}^2 \theta_1][c^2(c) - \operatorname{sen}^2 \theta_2] \\ &= [s^2(a) + 1 - \operatorname{sen}^2 \theta_1][s^2(c) + 1 - \operatorname{sen}^2 \theta_2] \\ &= [s^2(a) + \cos^2 \theta_1][s^2(c) + \cos^2 \theta_2]. \end{aligned}$$

Aplicando las relaciones (2.13) y (2.14) se tiene que

$$\begin{aligned} [c(a)c(c) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2]^2 &= [s^2(a) + s^2(a)s^2(b_2)][s^2(c) + s^2(c)s^2(b_1)] \\ &= s^2(a)s^2(c)c^2(b_2)c^2(b_1), \end{aligned}$$

por lo que

$$c(a)c(c) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 = s(a)s(c)c(b_1)c(b_2). \quad (2.16)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} c(a) c(c) + \cos \theta &= c(a) c(c) + \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &= c(a) c(c) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2, \end{aligned}$$

Finalmente usando las relaciones (2.13), (2.14) y (2.16) se sigue (i).

$$c(a) c(c) + \cos \theta = s(a) s(c) c(b_1) c(b_2) + s(a) s(b_1) s(c) s(b_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= s(a) s(c) [c(b_1) c(b_2) + s(b_1) s(b_2)] = s(a) s(c) c(b_1 + b_2) \\
 &= s(a) c(b) s(c).
 \end{aligned}$$

Para probar (ii) sustituimos  $\theta = \pi/2$  en (i) obteniéndose

$$\cosh a \cosh c = \sinh a \cosh b \sinh c$$

y

$$\tanh a \cosh b \tanh c = 1$$

(véase la Figura 2.25). Ahora, aplicando (2.9) tres veces (cíclicamente), se tiene

$$(1) \tanh a \cosh b \tanh c = 1;$$

$$(2) \tanh c \cosh d \tanh e = 1;$$

$$(3) \tanh e \cosh a \tanh b = 1.$$

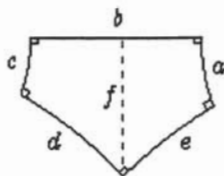


Figura 2.25:  $\tanh a \cosh b \tanh c = 1$

Dividiendo a la identidad (2), la identidad (3), se tiene

$$\frac{\tanh c \cosh d}{\tanh b \cosh a} = 1.$$

Finalmente, se sigue de la identidad (1) que

$$\frac{\tanh c \cosh d}{\tanh b \cosh a} = \tanh a \cosh b \tanh c,$$

por lo cual

$$\cosh d = \tanh a \cosh b \tanh b \cosh a = \sinh a \sinh b.$$

□

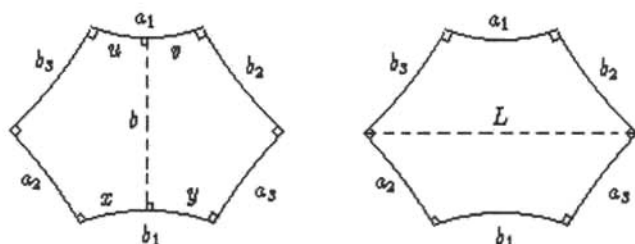
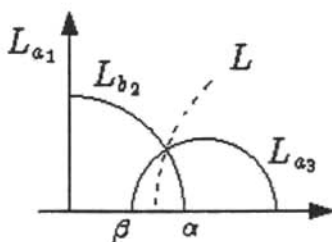


Figura 2.26: Hexágono hiperbólico

## 2.5. Hexágonos

En este capítulo estudiaremos a los hexágonos con seis ángulos rectos. La existencia de estos hexágonos la garantiza el Teorema 2.2.3. Probamos primero que dado un hexágono  $E$  como en la Figura 2.26, se tiene que geodésicas “opuestas” son disjuntas. Para probar esto trazamos una geodésica  $L$  que une el vértice  $L_{b_3} \cap L_{a_2}$  con el vértice  $L_{b_2} \cap L_{a_3}$  (véase la Figura 2.26). Si usamos el modelo  $\mathbb{H}^2$  podemos suponer que la geodésica determinada por  $L_{a_1}$  es el eje imaginario, y la geodésica determinada por  $L_{b_2}$  es concéntrica al origen y corta a la recta real en un punto  $\alpha$ . Ahora, como necesariamente  $L_{a_3}$  y  $L_{a_1}$  son disjuntas, se sigue que  $L_{a_3}$  intersecta a la recta real en un punto  $\beta$ , tal que  $0 < \beta < \alpha$  (véase la Figura 2.27). Por consiguiente cualquier geodésica que pase por la intersección de  $L_{b_2}$  y  $L_{a_3}$  corta la recta real en un punto en  $(\beta, \alpha)$ , por lo que  $L$  es disjunta a  $L_{a_1}$ . Análogamente,  $L_{b_1}$  y  $L$  son disjuntas. Es claro entonces por conexidad que  $L_{a_2}$  y  $L_{b_1}$  son también disjuntas. Lo cual prueba la existencia de una ortogonal común que denotaremos por  $L_b$  (véase la Figura 2.27).

Figura 2.27: Geodésica  $L$

Se afirma también que la geodésica  $L_b$  corta el interior del hexágono  $E$ , como en la Figura 2.27. Para mostrar esto se traza una geodésica que une el vértice  $L_{a_2} \cap L_{b_1}$  con el vértice  $L_{a_1} \cap L_{b_3}$  y otra geodésica que une  $L_{a_1} \cap L_{b_2}$  y  $L_{b_1} \cap L_{a_3}$ . A la primera geodésica la denotamos por  $L_1$  y a la segunda por  $L_2$  (véase la Figura 2.28).

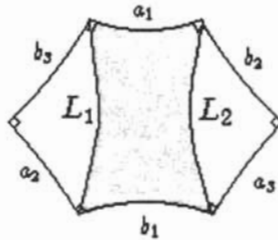


Figura 2.28: Cuadrilátero  $Q$

De esta manera se forma un cuadrilátero  $Q$  en el interior de  $H$ . Nótese que los ángulos internos de este cuadrilátero son todos menores a  $\pi/2$ . Finalmente, si la geodésica  $L_b$  no interseca a  $L_{a_1}$  y  $L_{b_1}$  como en la Figura 2.27, se tendría una contradicción al Teorema 2.2.3. Esto se sigue, ya que si por ejemplo,  $L_b$  interseca  $L_{a_1}$  “fuera” del hexágono existiría un triángulo con un ángulo recto y un ángulo obtuso, o si  $L_b$  interseca tanto  $L_{a_1}$  como  $L_{b_1}$  “fuera” del hexágono, existiría un cuadrilátero con dos ángulos rectos y dos ángulos obtusos (véase la Figura 2.29).

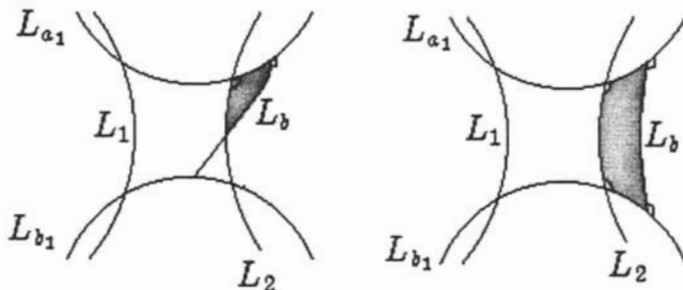


Figura 2.29: Geodésica  $L_b$

El siguiente resultado exhibe una propiedad de proporcionalidad en los lados opuestos de un hexágono.

**Teorema 2.5.1** *Sea  $P$  un hexágono como en la figura 2.26, entonces*

$$\frac{\sinh a_1}{\sinh b_1} = \frac{\sinh a_2}{\sinh b_2} = \frac{\sinh a_3}{\sinh b_3}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 2.4.1 que

$$\sinh b_2 \sinh a_3 = \cosh b = \sinh a_2 \sinh b_3.$$

Por simetría, existe otra geodésica de longitud  $b'$  común a  $L_{a_3}$  y  $L_{b_3}$ , tal que

$$\sinh b_2 \sinh a_1 = \cosh b' = \sinh a_2 \sinh b_1.$$

El resultado se sigue entonces de las observaciones anteriores. □

Para concluir esta tesis se prueba un teorema que dice que las longitudes de todos los lados de un hexágono hiperbólico, con seis ángulos rectos, están determinadas por cualesquiera tres lados no consecutivos.

**Teorema 2.5.2** *Sea  $P$  un hexágono como en la Figura 2.26, entonces*

$$\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 = \cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3.$$

DEMOSTRACIÓN. Nos referimos a la Figura 2.26 y denotamos  $\cosh x = c(x)$  y  $\sinh x = s(x)$ . La idea de la prueba es usar un resultado para Pentágonos (Teorema 2.4.1), para intercambiar las cantidades en  $b_1$  ( $x$  y  $y$ ) por las cantidades en  $a_1$  ( $u$  y  $v$ ).

*Paso 1* Usaremos las siguientes identidades del pentágono (Teorema 2.4.1)

$$s(x) s(a_2) = c(u), \tag{2.17}$$

$$s(y) s(a_3) = c(v), \tag{2.18}$$

$$s(u) s(b) = c(a_2), \tag{2.19}$$

$$s(v) s(b) = c(a_3). \tag{2.20}$$

*Paso 2* Aquí se intercambia la información de un producto que está en términos de  $x$  y  $a_2$  por una suma en términos de  $u$  y  $a_3$ , análogamente para  $y$  y  $v$ . De la relación (2.17) se tiene

$$s^2(x) s^2(a_2) = (c^2(x) - 1) s^2(a_2)$$

$$= c^2(x) s^2(a_2) - s^2(a_2) = c^2(u)$$

y

$$c^2(x) s^2(a_2) = s^2(a_2) + c^2(u). \quad (2.21)$$

Análogamente de la relación (2.18) se sigue que

$$c^2(y) s^2(a_3) = s^2(a_3) + c^2(v). \quad (2.22)$$

*Paso 3* También se necesita probar la siguiente identidad trigonométrica ya que ordena la información de  $a_2$  y  $a_3$  por un lado y de  $u$  y  $v$  por otro.

$$[c^2(a_2) + s^2(u)][c^2(a_3) + s^2(v)] = [c(a_2) c(a_3) + s(u) s(v)]^2 \quad (2.23)$$

Esto se sigue usando las relaciones (2.19) y (2.20), ya que

$$\begin{aligned} [c^2(a_2) + s^2(u)][c^2(a_3) + s^2(v)] &= [s^2(u) s^2(b) + s^2(u)][s^2(v) s^2(b) + s^2(v)] \\ &= [s(u) s(v) (s^2(b) + 1)]^2 = [s(u) s(v) s^2(b) + s(u) s(v)]^2 \\ &= [c(a_2) c(a_3) + s(u) s(v)]^2. \end{aligned}$$

Con esta información la prueba se desarrolla fluidamente.

*Paso 4*

$$c(b_1) s(a_2) s(a_3) = c(x + y) s(a_2) s(a_3)$$

$[c(x) c(y) + s(x) s(y)] s(a_2) s(a_3) = c(x) s(a_2) c(y) s(a_3) + s(x) s(y) s(a_2) s(a_3)$ , como se quiere remplazar  $x, y$  por  $u, v$  usando las relaciones (2.17) y (2.18), se tiene

$$c(b_1) s(a_2) s(a_3) = [c(x) s(a_2)][c(y) s(a_3)] + c(u) c(v).$$

En este momento se ve la necesidad del *Paso 2*, esto es, (2.21) y (2.22)

$$\begin{aligned} c(b_1) s(a_2) s(a_3) &= [s^2(a_2) + c^2(u)]^{1/2} [s^2(a_3) + c^2(v)]^{1/2} + c(u) c(v) \\ &= [c^2(a_2) - 1 + c^2(u)]^{1/2} [c^2(a_3) - 1 + c^2(v)]^{1/2} + c(u) c(v) \\ &= [c^2(a_2) + s^2(u)]^{1/2} [c^2(a_3) + s^2(v)]^{1/2} + c(u) c(v). \end{aligned}$$

Finalmente aquí se constata la utilidad del *Paso 3*, usando (2.23), se obtiene

$$\begin{aligned} c(b_1) s(a_2) s(a_3) &= c(a_2) c(a_3) + s(u) s(v) + c(u) c(v) \\ &= c(a_2) c(a_3) + c(u + v) = c(a_2) c(a_3) + c(a_1). \end{aligned}$$

□

Nótese la peculiaridad de la geometría hiperbólica en contraste con la Euclidiana donde un polígono convexo con 4 ángulos rectos es necesariamente un rectángulo.



# Bibliografía

- [1] AHLFORS, L.V., *Complex Analysis*, Mc Graw - Hill Book Company, 1979.
- [2] BEARDON, A.F., *The geometry of Discrete groups*, Graduate Texts in Math., 91, Springer Verlag, 1995.
- [3] FRALEIGH, J.B., *Algebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1982.
- [4] GREENBERG, M.J., HARPER J.D., *Algebraic Topology a first Course*, Benjaming/Cumming Publishing Company, Inc., 1981.
- [5] HOFFMAN, M.J., MARSDEN J.E, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, S.A. de C.V., 1996.
- [6] LEHNER, J., *Short Course Automorphic Funcions*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.
- [7] MOZO CRUZ, A., *Trigonometría de Triángulos Hiperbólicos*, Tesis de Licenciatura, 2001, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [8] THURSTON, W.P., *Three Dimensional Geometry and Topology vol. 1*, Edited by Silvio Levy, Princeton Mathematical Series, 35, Princeton University Press, 1997.