UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL PROBLEMA DE LA RUINA PARA DISTRIBUCIONES CON EXPONENTE DE CRAMER-LUNDBERG Y DISTRIBUCIONES SUBEXPONENCIALES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

ADRIANA ROLDAN RODRIGUEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ANA MEDA GUARDIOLA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El Problema de la Ruina para distribuciones con exponente de Cramér-Lundberg y distribuciones subexponenciales"

realizado por Adriana Roldán Rodríguez

con número de cuenta 09610557-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Ana Meda Guardiola	
Propietario	Dra. María Asunción Begoña Fernández Fernández	Begoña Fernández
Propietario	Dr. Mogens Bladt Petersen	Bladt
Suplente	Dr. Luis Antonio Rincón Solís	
Suplente	M. en C. Hugo Villaseñor Hernández	

Consejo Departamental de
Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla
Coordinador de la carrera de Actuaría

Agradecimientos

A Ana le agradezco por toda su confianza y apoyo, por todos sus consejos, su paciencia y dedicación para la realización de este trabajo. Gracias por compartir tus conocimientos y experiencias.

A mis sinodales, la Dra. Begoña Fernández Fernández, el Dr. Mogens Bladt Petersen, el Dr. Luis Antonio Rincón Solís y el M. en C. Hugo Villaseñor Hernández, les agradezco todas las observaciones valiosas hechas dentro y fuera de este trabajo.

A mi papá y a mi mamá les agradezco por todo su infinito amor, por todo su apoyo en todos los ámbitos, por su confianza y por impulsarme en todo momento. Muchas Gracias.

A Betito, mi hermano, le agradezco por su amor, su apoyo y por los muchos momentos divertidos y de reflexión.

A Andrés le agradezco su paciencia, su amor y su ayuda. Gracias corazón.

A mi papá Daniel, mi mamá Chata, mi abuelito y mi mamá Rebeca les agradezco por todos sus consejos tan sabios y por quererme mucho.

A todos mis tíos, tías, primos y primas les agradezco su cariño.

A mis amigas y amigos de la Facultad de Ciencias y también a los que no son de ella les agradezco su ayuda y cooperación, pues han influido en mi formación.

A todas aquellas personas que por ahora no recuerdo, pero han contribuido en alcanzar esta meta les doy las gracias.

Y para cerrar con broche de oro le agradezco por todas las vivencias en nuestra Universidad Nacional Autónoma de México, por esto y muchísimo más a Dios. Gracias.

Contenido

Introducción

El objetivo de este trabajo es analizar el Problema de la Ruina con horizonte infinito para el Proceso de Riesgo clásico con diferentes distribuciones de probabilidad para las reclamaciones: colas ligeras y subexponenciales. El Proceso de Riesgo que consideramos es el clásico y modela el capital de una compañía de seguros.

El Problema de la Ruina se ha analizado desde muchos puntos de vista. Por ejemplo, en un juego donde dos jugadores, A y B, apuestan lanzando volados. En cada lanzamiento si sale sol, A gana una unidad del capital de B, mientras que si sale águila A paga una unidad a B. Esto continúa hasta que uno de ellos pierda todo su capital, es decir, se *arruine*. Una pregunta que se plantea es:

¿Cuál es la probabilidad de que A pierda todo su capital, o se arruine, si inicia con m unidades de capital y B inicia con $N - m$ unidades?,

o

¿Cuántos lanzamientos en promedio se tienen que hacer para que A se arruine?

Este problema es el Problema de la Ruina del Jugador.

Otro ejemplo, el caso de una compañía aseguradora. Un *seguro* es un contrato con el que una compañía aseguradora acepta cubrir el impacto financiero que trae consigo la realización de un evento. En lugar de tener dos jugadores, tenemos por un lado a la compañía aseguradora y por el otro a sus asegurados, pero a diferencia de los volados, en este caso el beneficio de una parte no necesariamente implica una pérdida de su contraparte. Ambas partes también tienen su respectivo capital involucrado, por parte de la compañía se tiene una cantidad de capital que dispone en ese momento y por parte de los asegurados sus respectivos pagos periódicos establecidos. A estos pagos se les llaman *primas*. La compañía se compromete a asegurar por determinados eventos a sus asegurados. Esta situación no depende del lanzamiento de una moneda, pero cuándo y cuánto paga la compañía sí son eventos inciertos, por lo que se modelan usando Probabilidad.

En caso de que ocurran esos eventos o accidentes a los asegurados entonces es cuando los asegurados pedirán a la compañía que se les remunere el pago convenido, es decir, se hacen las "*reclamaciones*".

Con las primas cobradas la compañía tiene que cubrir sus gastos e incluso debe hacer un fondo para sus posibles gastos inesperados y para sus ganancias. A este fondo se le llama *reserva*. Y cómo lo utiliza la compañía no nos atañe aquí. Lo que nos interesa es el capital con el que cuenta al momento $t \geq 0$, es decir, el *excedente*. El excedente de la compañía al momento $t \geq 0$ es

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

donde $u \geq 0$ es el capital inicial ($u = U(0)$), $c \geq 0$ es la tasa de entrada de primas y $S(t) \geq 0$ es la suma de todas las reclamaciones hechas a la compañía hasta el momento t. A la compañía se le pueden presentar muchas reclamaciones o una reclamación de un monto muy grande, y por ello el monto total de las reclamaciones puede rebasar el excedente de la compañía, haciendo que, para alguna t, $U(t) \leq 0$. Si esto sucede, la compañía se arruina.

A U se le conoce como el Proceso de Riesgo, y es el que nos interesa en este trabajo. Para este Proceso usamos el proceso de Poisson compuesto. Del proceso de Riesgo surgen preguntas como:

¿Cuál es la probabilidad de que la compañía no se arruine antes del tiempo t si empezó con un capital u?

o simplemente, con horizonte infinito,

¿Cuál es la probabilidad de que la compañía no se arruine si tiene u de capital inicial?

Aunque los resultados son más generales, en este trabajo cualquier integral $\int g(x)\, dF(x)$ será entendida como una integral de Riemann-Stieltjes.

A continuación describiremos la estructura de este trabajo.

En el capítulo 1 definimos el modelo de Cramér-Lundberg, el proceso de Riesgo, los tiempos de ruina y las probabilidades de ruina. Para ese capítulo se consultaron los libros de Asmussen [1], Cramér [3] y Embrechts, Klüppelberg y Mikosch [4]. El capítulo 2 es fundamental para los subsiguientes capítulos, porque se enuncian y demuestran los Teoremas de Renovación, los cuales nos permiten obtener los resultados asintóticos que probamos en el capítulo 3. La bibliografía consultada para el capítulo 2 es Basu [2], Feller [5], Laha y Rohatgi [8] y Resnick [9].

El Teorema de Cramér-Lundberg para distribuciones con exponente de Cramér-Lundberg se demuestra en el capítulo 3. Esta es una clase de distribuciones que también se conoce como distribuciones para reclamaciones pequeñas.

Las distribuciones subexponenciales son distribuciones que también se conocen como distribuciones para reclamaciones grandes. Verificamos que las distribuciones subexponenciales no tienen estimador de Cramér-Lundberg. Los libros consultados para el capítulo 3 son Embrechts, Klüppelberg y Mikosch [4], Grandell [6] y Hogg y Kluggman[7]. El análisis de las distribuciones subexponenciales se hace en el capítulo 4 y también mencionamos el Teorema de Cramér-Lundberg correspondiente a estas distribuciones. Para este último desarrollo necesitamos de la Teoría de Variación Regular. Para este último capítulo se consultaron los libros de Asmussen [1], Embrechts [4] y Rolski, Schmidli, Schmidt y Teugels [10].

En el Apéndice A se muestran resultados relacionados con la Convolución y la Transformada de Laplace que se usan en gran parte de este trabajo. El Apéndice B hace referencia a definiciones y resultados útiles para el capítulo 2.

En este trabajo utilizamos frecuentemente las siguientes notaciones: Si f es una función real de variable real,

- $f \sim g$ denota que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$,
- $o(h)$ denota una función que tiende a cero más rápidamente que h cuando h tiende a cero, es decir, $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$,
- $O(h)$ denota que existe $M > 0$ tal que $\limsup_{h\to 0} \frac{|O(h)|}{h} \leq M$. En particular, $f(x) = O(1)$ quiere decir que f es acotada,
- $[x]$ denota la parte entera del número x, es decir, $[x] = \sup\{y \in \mathbb{Z} : \ y \leq x\}$.

Capítulo 1

Modelo Clásico de Riesgo

En este capítulo se define el proceso clásico del Riesgo. Para ello, primero se define un proceso que modela el número de reclamaciones en el intervalo de tiempo $(0, t]$. Después se define otro proceso que modela el monto que se ha reclamado hasta el tiempo $t \geq 0$. La combinación de estos dos procesos se conoce como *proceso de Poisson compuesto.* Por último, se define el *modelo de Cramér-Lundberg* y llegamos al *proceso de Riesgo* que nos interesa.

También vemos definiciones de *Probabilidades de Ruina* y *tiempos de Ruina.* Usando un lema se define la *condición de beneficios netos*, la cual se usa bastante en los capítulos 3 y 4.

1.1 El modelo de Cramér-Lundberg

El modelo que se define aquí resultó de las contribuciones de Filip Lundberg y de Harald Cramér y se convirtió en el modelo básico del riesgo asegurable. Se conoce como el *modelo de Cramér-Lundberg*, cuya contribución esencial es considerar el proceso de Poisson compuesto.

Consideremos la totalidad de los asegurados vigentes en una compañía de seguros dentro de un intervalo de tiempo fijo, $(0, t]$. Sea $N(t)$ el número de reclamaciones hasta el momento t, de tal manera que definimos a $N(t)$ como:

$$N(t) = \begin{cases} \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{si } \{n \geq 1 : T_n \leq t\} = \emptyset. \end{cases} \tag{1.1}$$

Así, si ocurren reclamaciones en los instantes de tiempo $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$, entonces

$N(t)$ pasará de 0 a 1 en $t = T_1$, de 1 a 2 en $t = T_2$, y así sucesivamente. Los montos reclamados X_1, X_2, X_3,... correspondientes a cada reclamación son positivos e independientes entre ellos y del número de reclamaciones.

Con esto, podemos definir el *modelo de Cramér-Lundberg*, que se define como:

Definición 1 *El* ***modelo de Cramér-Lundberg*** *está dado por las condiciones (a)-(e):*

(a) *El proceso de los montos reclamados:*

Sean las magnitudes de cada reclamación $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución continua* F*, con media finita* $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

(b) *Los tiempos de reclamación:*

La n-ésima reclamación T_n *ocurre en un instante aleatorio del tiempo, y*

$$0 < T_1 < T_2 < \cdots \qquad \textit{casi seguramente},$$

es decir, el conjunto donde $\{T_i = T_{i+1},\ i \in \mathbb{N}\}$ *tiene probabilidad cero.*

(c) *El proceso de llegada de las reclamaciones:*

El número de reclamaciones en el intervalo $[0, t]$ *es:*

$$N(t) = \begin{cases} \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, & t \geq 0, \\ 0, & \textit{si } \{n \geq 1 : T_n \leq t\} = \emptyset. \end{cases}$$

(d) *Los tiempos entre reclamaciones:*

$$Y_1 = T_1, \qquad Y_k = T_k - T_{k-1}, \qquad k = 2, 3, ..., \tag{1.2}$$

son independientes, idénticamente distribuidos exponencialmente y tienen media finita $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

(e) *Las sucesiones* $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *son independientes entre sí (por consiguiente* $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *también son independientes).*

Observaciones :

1. Existe un modelo generalizado para esta definición y es el *modelo de renovación,* el cual no estudiamos en este trabajo. Este modelo está dado por (a)-(c), (e) y pide además que los tiempos entre arribos Y_k dados como en (1.2) sean independientes e idénticamente distribuidos con media finita $\mathbb{E}(Y_1) = \gamma$, es decir, que no necesariamente se distribuyan exponencialmente.

2. Gráficamente un ejemplo del proceso de Poisson compuesto es así:

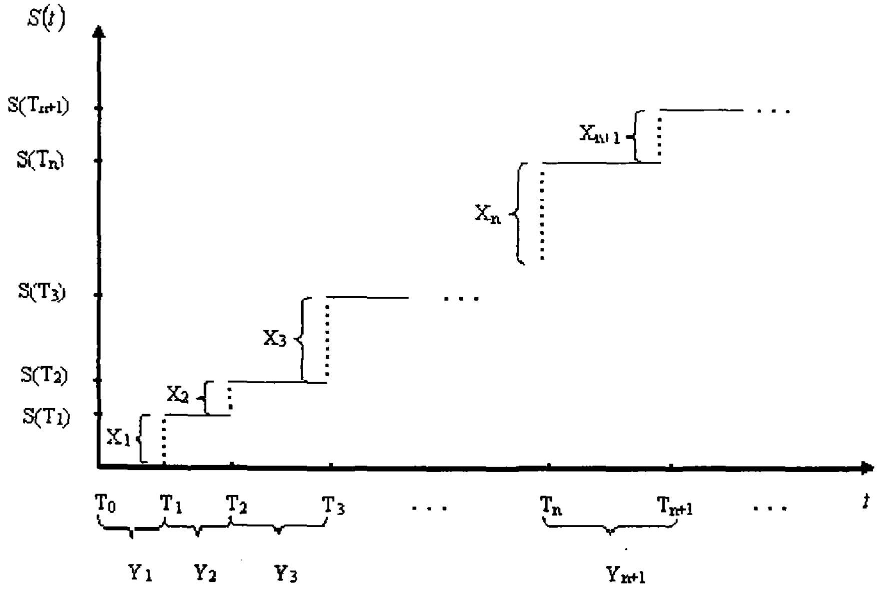

Figura 1-1: Proceso de Poisson compuesto

Definición 2 *El* ***proceso del monto reclamado*** $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es:*

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{si } N(t) > 0, \\ 0 & \text{si } N(t) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

En particular $S(0) = 0$, c.s.

El proceso de llegada de las reclamaciones $N(t)$, es un proceso de Poisson. Recordemos qué es un proceso de Poisson:

Definición 3 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad.* $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *es un* ***proceso de Poisson homogéneo con intesidad*** $\lambda > 0$ *definido en este espacio de probabilidad y* $\mathbb{N}$ *su espacio de estados, si cumple:*

(a) *en el estado inicial* $B(0) = 0$,

(b) *tiene incrementos estacionarios, es decir, para cualquier* $E \in \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\mathbb{P}((B(t+h) - B(t)) \in E) = \mathbb{P}(B(h) \in E),$$

e independientes, es decir, para $n \in \mathbb{N}$, *sean* $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq \cdots \leq t_{2n-1} < t_{2n}$, *entonces las variables* $\{(B(t_{2j}) - B(t_{2j-1}))\}_{j=1}^{n}$ *son independientes. En particular, para cualesquiera* E_k, $E_l \in \mathcal{N}$, *se cumple que*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((B(k+h) - B(k)) \in E_k, (B(l+r) - B(l)) \in E_l) \\ = \ & \mathbb{P}((B(k+h) - B(k)) \in E_k) \cdot \mathbb{P}((B(l+r) - B(l)) \in E_l), \end{aligned}$$

siempre que $(k, k+h] \cap (l, l+r] = \emptyset$.

(c) $\mathbb{P}(B(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, $\mathbb{P}(B(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ *y* $\mathbb{P}(B(h) > 1) = o(h)$, *cuando h tiendo a cero, es decir, la probabilidad de que no haya ninguna ocurrencia es* $1 - \lambda h + o(h)$, *mientras que la probabilidad de exactamente una ocurrencia es de* $\lambda h + o(h)$ *y la probabilidad de que hayan más de una ocurrencia es* $o(h)$, *cuando h tiende a cero.*

Ahora demostramos que efectivamente $N(t)$ es un proceso de Poisson.

Proposición 4 *El proceso* $N(t)$ *es un proceso de Poisson.*

Demostración Se hace la demostración de acuerdo al orden de los incisos dados en la definición del proceso de Poisson:

(a) Por convención tenemos que $N(0) = 0$.

(b) Iniciaremos con la estacionariedad, sea $E \in \mathcal{N}$, entonces

$$\mathbb{P}\left((N(t+h) - N(t)) \in E\right) = \sum_{n \in E} \mathbb{P}\left(N(t+h) - N(t) = n\right),$$

usando la definición (1.1) de $N(t)$, vemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left((N(t+h) - N(t)) \in E\right) \\ = & \sum_{n \in E} \mathbb{P}\left((\sup\{\alpha \geq 1 : T_\alpha \leq t+h\} - \sup\{\alpha \geq 1 : T_\alpha \leq t\}) = n\right), \end{aligned}$$

sabemos que $\mathbb{P}(T_n > s+t \mid T_n > t) = \mathbb{P}(T_n > s+t, T_n > t)\left[\mathbb{P}(T_n > t)\right]^{-1}$, para toda $s, t \geq 0$. Como $\{T_n > s+t, T_n > t\} = \{T_n > s+t\}$, entonces $\mathbb{P}(T_n > s+t \mid T_n > t) = \mathbb{P}(T_n > s+t)\left[\mathbb{P}(T_n > t)\right]^{-1}$, y tenemos que T_n se distribuye exponencial para toda n, así llegamos a que $\mathbb{P}(T_n > s+t)\left[\mathbb{P}(T_n > t)\right]^{-1} = e^{-\lambda(s+t)}\left[e^{-\lambda t}\right]^{-1} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T_n > s)$. Por lo tanto, T_n no tiene memoria para toda n, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((N(t+h) - N(t)) \in E\right) &= \sum_{n \in E} \mathbb{P}\left(\sup\{\alpha \geq 1 : T_\alpha \leq h\} = n\right) \\ &= \sum_{n \in E} \mathbb{P}(N(h) = n) \\ &= \mathbb{P}(N(h) \in E). \end{aligned}$$

Ahora demostremos que $N(t)$ tiene incrementos independientes. Para ilustrar esto veamos con dos intervalos cualesquiera tales que $(k, k+h] \cap (l, l+r] = \emptyset$. Debido a que los incrementos son estacionarios, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left((N(k+h) - N(k)) \in E_k, (N(l+r) - N(l)) \in E_l\right) \\ = & \mathbb{P}\left(N(h) \in E_k, N(r) \in E_l\right) \\ = & \sum_{n \in E_k} \sum_{m \in E_l} \mathbb{P}\left(N(h) = n, N(r) = m\right) \\ = & \sum_{n \in E_k} \sum_{m \in E_l} \mathbb{P}\left(\sup\{\alpha \geq 1 : T_\alpha \leq h\} = n, \sup\{\beta \geq 1 : T_\beta \leq r\} = m\right), \end{aligned}$$

como las $\{T_n\}_{n\geq 1}$ son independientes, entonces

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left(N\left(k+h\right)-N\left(k\right)\right)\in E_k,\left(N\left(l+r\right)-N\left(l\right)\right)\in E_l\right) \\
= & \sum_{n\in E_k}\sum_{m\in E_l}\mathbb{P}\left(\sup\left\{\alpha\geq 1: T_\alpha\leq h\right\}=n\right)\cdot\mathbb{P}\left(\sup\left\{\beta\geq 1: T_\beta\leq r\right\}=m\right) \\
= & \sum_{n\in E_k}\sum_{m\in E_l}\mathbb{P}\left(N\left(h\right)=n\right)\cdot\mathbb{P}\left(N\left(r\right)=m\right),
\end{aligned}
$$

por ser los incrementos estacionarios,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left(N\left(k+h\right)-N\left(k\right)\right)\in E_k,\left(N\left(l+r\right)-N\left(l\right)\right)\in E_l\right) \\
= & \sum_{n\in E_k}\sum_{m\in E_l}\mathbb{P}\left(N\left(k+h\right)-N\left(k\right)=n\right)\cdot\mathbb{P}\left(N\left(l+r\right)-N\left(l\right)=m\right) \\
= & \mathbb{P}\left(\left(N\left(k+h\right)-N\left(k\right)\right)\in E_k\right)\cdot\mathbb{P}\left(\left(N\left(l+r\right)-N\left(l\right)\right)\in E_l\right).
\end{aligned}
$$

Del mismo modo procedemos para tres o más intervalos cualesquiera tales que sean ajenos entre sí.

(c) Tomando en cuenta que T_n se distribuye exponencialmente para toda n y como $\{N\left(t\right)=n\}=\{T_{n+1}>t\geq T_n\}$, para $n\geq 2$, tenemos que

$$\mathbb{P}\left(N\left(h\right)=0\right)=\mathbb{P}\left(T_1>h\right)=e^{-\lambda h},$$

usando la expansión de Taylor de $e^{-\lambda h}$, llegamos a que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N\left(h\right)=0\right) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\lambda h\right)^i}{i!}=1-\lambda h+\frac{\left(\lambda h\right)^2}{2!}-\cdots \\
&= 1-\lambda h+o\left(h\right).
\end{aligned}
$$

Mientras que por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N\left(h\right)=1\right) &= \mathbb{P}\left(T_1\leq h\right)=1-\mathbb{P}\left(T_1>h\right) \\
&= \lambda h+o\left(h\right).
\end{aligned}
$$

Por último,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(h)>1) &= 1-\mathbb{P}(N(h)\leq 1)\\ &= o(h).\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\mathbb{P}(N(h)=0)=1-\lambda h+o(h)$, $\mathbb{P}(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$ y $\mathbb{P}(N(h)>1)=o(h)$.

Por lo que al probar los incisos (a), (b) y (c) obtenemos que $N(t)$ es un proceso de Poisson homogeneo con intensidad $\lambda>0$. ■

Otra manera de definir a $N(t)$ es:

$$N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{I}_{[0,t]}(T_n),$$

y son equivalentes esta forma y la otra dada en (1.1), porque

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{I}_{[0,t]}(T_n) &= \mathbb{I}_{[0,t]}(T_0)+\cdots+\mathbb{I}_{[0,t]}(T_n)+\cdots\\ &= \begin{cases} n, & \text{si } t\geq 0,\ T_n\leq t<T_{n+1},\ n\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{si } T_n>t,\ \forall n\in\mathbb{N},\end{cases}\\ &= \begin{cases}\sup\{n\geq 1: T_n\leq t\}, & t\geq 0,\\ 0, & \text{si } \{n\geq 1: T_n\leq t\}=\emptyset.\end{cases}\end{aligned}$$

1.2 El proceso de Riesgo

La prima que cobra la compañía aseguradora a sus asegurados es una cantidad que está por encima de la cantidad en riesgo, porque con ella se cubren: gastos de administración, comisiones, una parte que se destina para la reserva, etc. A menudo las primas son determinadas por todas las pólizas de la compañía y también por las tarifas de la competencia. Supongamos que el ingreso de las primas es continuo en el tiempo y que este ingreso es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo, simplemente previendo el monto total que la compañía recibirá en, por ejemplo, un año, y linealizando.

Así se da lugar al *proceso de Riesgo* que es el capital que tiene la compañía aseguradora al tiempo $t \geq 0$.

Definición 5 *El **proceso de riesgo** $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ se define como*

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geq 0, \tag{1.4}$$

donde $u \geq 0$ denota el capital inicial, $c \geq 0$ representa la tasa de ingreso de primas (la pendiente de la recta explicada arriba) y $S(t)$ el proceso del monto reclamado definido en (1.3).

Observación Un ejemplo de este proceso de riesgo lo podemos ver gráficamente de la siguiente forma, donde $M = \sup_{0 \leq t < \infty} \{S(t) - ct\}$ y $\tau(u)$ se define en la definición 7:

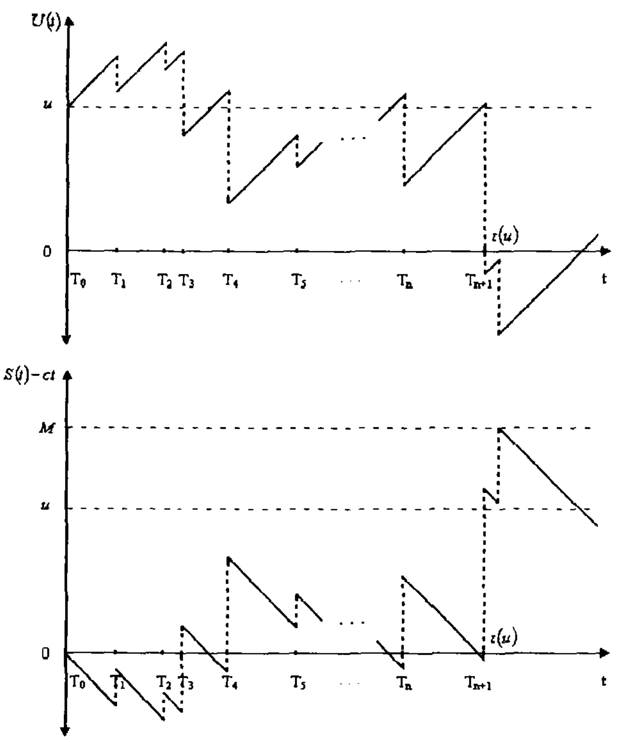

Figura 1-2: Proceso de Riesgo

Una cantidad importante para las variables aleatorias $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es la *distribución del monto reclamado* hasta el momento t,

$$
\begin{aligned}
G_t(x) &= \mathbb{P}(S(t) \leq x) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\right),
\end{aligned}
$$

usando probabilidad condicional,

$$
\begin{aligned}
G_t(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x | N(t) = n\right) \cdot \mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) \cdot \mathbb{P}(N(t) = n),
\end{aligned}
$$

por independencia,

$$
G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},
$$

por ser $N(t)$ un proceso de Poisson y donde $F^{n*}(x) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x)$ es la n-ésima convolución de F y también por independencia (ver la propiedad 6 de la convolución en el Apéndice A.1). Así, tenemos que

$$
G_t(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x), \qquad x \geq 0,\ t \geq 0. \tag{1.5}
$$

Para un función de distribución F en $(-\infty, \infty)$, definimos

$$
F^{0*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}
$$

$F^{1*}(x) = F(x)$ y F^{n*} como en el párrafo anterior.

Definición 6 *La **cola de la función de distribución** F se define como*

$$
\overline{F}(x) = 1 - F(x),
$$

para $x \in \mathbb{R}$.

La cola de la función de distribución F es la probabilidad de que el monto de una reclamación sea mayor que x, es decir, $\mathbb{P}(X > x)$.

Como tenemos que $X \geq 0$, entonces usando la definición de la cola de la función de distribución F obtenemos que,

$$\int_0^\infty \overline{F}(x)\, dx = \mathbb{E}(X). \tag{1.6}$$

Verifiquemos este resultado al integrar por partes la integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \overline{F}(x)\, dx &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^\infty \int_x^\infty 1dF(t)\, dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^t dx dF(t) \\
&= \int_0^\infty t dF(t) = \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

1.3 La Ruina

El principal objetivo de la compañía aseguradora en este primer modelo es que $U(t)$ se mantenga por encima de cierto capital al tiempo $t \geq 0$, o simplemente que no se tenga $U(t) \leq 0$, porque esto significa que la compañía está arruinada. En esta sección definimos la probabilidad de este evento y los *tiempos de ruina en tiempo finito* e *infinito*. El lema que demostramos aquí nos permite definir la *condición de beneficios netos* que es importante para este trabajo.

Las siguientes cantidades resultan relevantes:

Definición 7 *Sea $U(t)$ el proceso de Riesgo definido en (1.4).*

1. *La* ***probabilidad de ruina en tiempo finito*** *(o con horizonte finito) es:*

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(U(t) \leq 0, \quad \textit{para alguna } t \leq T),$$

donde $0 < T < \infty$ *y* $u \geq 0$.

2. *La* ***probabilidad de ruina en tiempo infinito*** *(o con horizonte infinito) es:*

$$\psi(u) = \psi(u, \infty) = \mathbb{P}(U(t) \leq 0, \quad \textit{para algún } t \geq 0),$$

con $u \geq 0$.

3. Los ***tiempos de ruina*** *son:*

$$\tau(u,T) = \begin{cases} \inf\{t : 0 \leq t \leq T,\ U(t) < 0\}, \\ \infty, \qquad si\ \{t : 0 \leq t \leq T,\ U(t) < 0\} = \emptyset, \end{cases}$$

donde $0 < T \leq \infty$ *y* $u \geq 0$. *En particular, cuando* $T = \infty$, $\tau(u,\infty) = \tau(u)$.

Si vemos a $\psi(u)$ como una función de la variable u, entonces $\psi(u)$ se llama la *función de ruina.*

El siguiente resultado es elemental y se debe a la independencia en el modelo de Poisson utilizado:

Lema 8 *Para el modelo de Cramér-Lundberg tenemos que,*

$$\mathbb{E}(U(t)) = u + ct - \lambda\mu t \tag{1.7}$$

y para el modelo renovado,

$$\mathbb{E}(U(t)) = u + ct - \mu\mathbb{E}(N(t)). \tag{1.8}$$

Demostración Tenemos que $U(t) = u + ct - S(t)$, $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(t)) &= \mathbb{E}(u + ct - S(t)) \\ &= u + ct - \mathbb{E}(S(t)). \end{aligned}$$

Veamos la esperanza $\mathbb{E}(S(t))$ y recordemos que $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, si $N(t) > 0$. Usemos esperanza condicional, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(S(t)\,|N(t) = k)\,\mathbb{P}(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,|N(t) = k\right)\mathbb{P}(N(t) = k), \end{aligned}$$

por ser independientes $\{X_i\}$ y $\{T_i\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) \mathbb{P}(N(t)=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{P}(N(t)=k),
\end{aligned}$$

como $\{X_i\}$ se distribuyen idénticamente con esperanza μ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu \mathbb{P}(N(t)=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\mu \mathbb{P}(N(t)=k) \\
&= \mu \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(N(t)=k) \\
&= \mu \mathbb{E}(N(t)).
\end{aligned}$$

Como en el modelo de Cramér-Lundberg $N(t)$ es un proceso de Poisson homogéneo, entonces $\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t$, por lo tanto

$$\mathbb{E}(S(t)) = \mu \mathbb{E}(N(t)) = \mu\lambda t.$$

■

1.3.1 Condición de beneficios netos

El último lema es importante porque da una primera idea de cómo debe de ser la tasa de ingresos de primas c en (1.4), y la determinación de esta tasa depende de la solvencia de una compañía sobre un periodo de tiempo dado. La tasa de ingresos de primas c se podría elegir de manera que $\psi(u,T)$ resulte pequeña, con u y T dadas, y así la compañía aseguradora pueda minimizar la probabilidad de la ruina.

Tenemos por el lema anterior que para el modelo de Cramér-Lundberg,

$$\mathbb{E}(U(t)) = u + (c - \lambda\mu)\,t.$$

Entonces, lo que quiere la compañía aseguradora es que $\mathbb{E}(U(t)) > 0$, cuando t tiende a infinito, es decir, que la media de los egresos menos la media de los ingresos no rebase el capital inicial u, cuando t tiende a infinito.

Por la ley fuerte de los grandes números tenemos que $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{S(t)-ct}{t} = \lambda\mu - c$, casi seguramente. Si tenemos que $c - \lambda\mu < 0$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{S(t)-ct}{t} > 0$, casi seguramente. De lo cual podemos inferir que $\lim\limits_{t\to\infty} (S(t) - ct) = \infty$, casi seguramente, y así llegamos a que $\sup\limits_{0\leq t<\infty} \{S(t) - ct\} = \infty$, casi seguramente. En el capítulo 3, probamos que $\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup\limits_{0\leq t<\infty} \{S(t) - ct\} > u\right)$. Con esto vemos que $\psi(u) = 1$, siempre que $c - \lambda\mu < 0$, es decir, la compañía de seguros seguramente se arruinará. Por lo que es necesario suponer que $c - \lambda\mu > 0$. Esto implica también que $\mathbb{E}(U(t))$ sea positiva para t grande. Así obtenemos la *condición de beneficios netos* ρ básica en el modelo de Cramér-Lundberg:

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0. \tag{1.9}$$

La constante ρ es llamada también *carga de seguridad* definida como la cantidad relativa en la que la tasa de ingresos de primas c excede $\lambda\mu$. Con esto podemos ver la utilidad de las primas en el periodo $[0, t]$, es decir, $ct = (1 + \rho)\lambda\mu t$.

1.4 Conclusiones

Ya establecidas las definiciones para el modelo de Cramér-Lundberg, el proceso de Riesgo involucrado, las Probabilidades de Ruina y la condición de beneficios netos, podemos llegar a resultados en el cálculo de las Probabilidades de Ruina. Con lo visto aquí, aún no es suficiente para cumplir este objetivo, sino que es necesario conocer algunos resultados de la Teoría de Renovación, que es el siguiente capítulo, y con estos resultados se nos permite llegar a nuestro objetivo.

Capítulo 2

Teoría de Renovación

En el presente capítulo se define un *proceso de renovación.* Retomamos el proceso de conteo $N(t)$ para definir la *función de renovación.* También definimos una *ecuación de renovación.* Esta ecuación es un elemento clave para los *Teoremas de Renovación.* Además se resuelve esta ecuación y comprobamos que su solución es única. Se postulan los *Teoremas de Renovación* y los demostramos. Por último, se hace una transformación a una ecuación de renovación y a la ecuación resultante se le aplica un Teorema de Renovación, y obtenemos implicaciones interesantes, las cuales aplicaremos en el siguiente capítulo al Problema de la Ruina.

Iniciemos suponiendo que $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes que toman valores no negativos (es decir, $\mathbb{P}[Y_n < 0] = 0$). También supongamos que la sucesión de variables aleatorias es idénticamente distribuida con función de distribución F, la cual es llamada *función entre arribos* o *de tiempos de espera.* No es necesario que Y_0 tenga esta misma distribución. Supongamos también que, para toda $n \geq 1$, $\mathbb{P}[Y_n = 0] < 1$.

Como se establece en el modelo de Cramér-Lundberg, estos tiempos de espera $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ o tiempos entre las reclamaciones son independientes y se distribuyen exponencialmente con media finita $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$. Es preciso decir que para este capítulo usamos las hipótesis del modelo renovado, que es más general que el de Cramér-Lundberg, pues es necesario que las variables aleatorias $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ sean independientes e idénticamente distribuidas con valores no negativos y con media finita $\gamma = \mathbb{E}(Y_1)$.

2.1 Función y Ecuación de Renovación

Primero definimos un *proceso de renovación*. Recordamos el proceso de conteo y demostramos que tiende a infinito casi seguramente cuando t tiende a infinito. Con este proceso definimos la *función de renovación* y demostramos que es finita. También definimos la *ecuación de renovación* y probamos que tiene una única solución finita.

Definición 9 *Sea* $T_n = Y_0 + ... + Y_n$. *La sucesión* $\{T_n\}_{n\geq 0}$ *se le llama una* ***sucesión de renovación*** *ó* ***proceso de renovación****. Las cantidades* T_n *son los tiempos de ocurrencia del* $n - ésimo$ *fenómeno y son llamadas* ***tiempos de renovación****.*

Tomemos en cuenta que para $n \geq 1$, $Y_n = T_n - T_{n-1}$ y $Y_0 = T_0$.

Definición 10 *Un proceso se llama* ***proceso de renovación puro*** *si* $Y_0 = T_0 = 0$, *es decir, el tiempo cero es un tiempo de renovación. Si no es así, entonces es un* ***proceso de renovación con retraso****.*

Veamos dos ejemplos clásicos en la Teoría de Renovación en función de las definiciones hechas.

Ejemplo 11 *Proceso de reemplazo: Se tienen cierto tipo de artículos, los cuales se observan secuencialmente (por ejemplo, un foco hasta que ya no sirve). Entonces se reemplaza instantáneamente el foco que expiró por uno nuevo. Este proceso se repite varias veces de igual manera. Los tiempos de deterioro de los focos* $\{T_n\}_{n\geq 0}$ *son variables aleatorias. Si el foco inicial es nuevo, entonces tenemos un proceso de renovación puro, si no el modelo apropiado es un proceso de renovación con retraso.* ■

Ejemplo 12 *Proceso prendido-apagado: Consideremos los periodos operativos de una máquina que alternan con los periodos de mínima duración en los cuales las reparaciones se hacen. Supongamos que todos los periodos son independientes, los periodos de operación son independiente e idénticamente distribuidos y también los periodos de las reparaciones. Dos procesos de renovación distintos pueden ser identificados:*

1) *Los tiempos cuando la máquina no está operando.*

2) *Los tiempos cuando se completa el servicio y la máquina está operando.* ∎

En la Teoría de Renovación se considera el proceso puntual asociado para contar las renovaciones, es decir, la función de conteo

$$N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,t]}(T_n),$$

que nos permite contar el número de renovaciones en el intervalo $[0,t]$ y como ya vimos es equivalente a (1.1). Si tomamos la esperanza a este proceso obtenemos una función y una herramienta básica en la Teoría de Renovación, que interpretamos como el número esperado de tiempos de renovación en el intervalo $[0,t]$.

Definición 13 *A la función V se le llama* ***función de renovación****, donde*

$$V(t) = \mathbb{E}(N(t)), \tag{2.1}$$

para $t \geq 0$.

Veamos que si $T_0 = 0$, $t = 0$, es considerado un tiempo de renovación y en este caso la función de renovación es

$$V(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,t]}(T_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t).$$

Mientras que en el caso del proceso de renovación con retraso, si $T_0 = Y_0$, $Y_0 \neq 0$, y tiene distribución G, entonces la función de renovación es

$$V'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{n*}(t) = G * V(t).$$

Notemos que $\{T_n\}$ y $\{N(t)\}$ están muy relacionados pues $N(t)$ depende de $\{T_n\}$, así vemos que los siguientes conjuntos son iguales para cualquier $n \geq 0$,

$$\{w \in \Omega : N(t) = n\} = \{w \in \Omega : T_{n+1} > t \geq T_n\}, \tag{2.2}$$

de esto tenemos que

$$\{N(t) < n\}_{n\geq 0} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{N(t) = k\} = \{T_n > t\}_{n\geq 0}, \tag{2.3}$$

donde t está fija.

Lema 14 *Sea $N(t)$ un proceso de conteo. Entonces*

$$N(t) \to \infty, \text{ casi seguramente,}$$

cuando t tiende a infinito.

Demostración Para cada $w \in \Omega$ fija, $N(t,w)$ es no decreciente, por lo que $\lim_{t\to\infty} N(t,w)$ es igual a infinito o es finito. Supongamos que $\mathbb{P}\left[w : \lim_{t\to\infty} N(t) < \infty\right] > 0$. Entonces existe una $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\infty)} N(t) < M\right] > 0.$$

Usemos (2.3) y llegamos a que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\infty)} T_M > t\right] > 0.$$

Por lo que $\mathbb{P}[T_M = \infty] > 0$ y esto contradice que T_M es finito casi seguramente. Por lo tanto $N(t)$ tiende a infinito, casi seguramente, cuando t tiende a infinito. ■

Teorema 15 *Sea $N(t)$ un proceso de conteo. Supongamos que $\gamma = \mathbb{E}(Y_1)$, $0 < \gamma < \infty$. Entonces cuando t tiende a infinito,*

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\gamma}, \text{ casi seguramente.} \tag{2.4}$$

Demostración Tomemos en cuenta (2.2), entonces para cada $w \in \Omega$, tenemos que

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}.$$

Como $N(t)$ tiende a infinito, casi seguramente, cuando t tiende a infinito, podemos elegir una t lo suficientemente grande tal que $N(t) > 0$. Entonces

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

A partir de la ley fuerte de los grandes números seguimos que cuando t tiende a infinito,

$$\gamma \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \gamma,$$

casi seguramente. Por lo que (2.4) se cumple. ■

El siguiente teorema es útil, porque más adelante necesitamos que la función de renovación definida en (2.1) sea finita.

Teorema 16 *Sea $V(t)$ una función de renovación, entonces $V(t) < \infty$, para toda $t \geq 0$.*

Demostración Recordemos que $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Existe algún número $x \geq 0$ tal que $F(x) < 1$. Sabemos que $F(x-t) \leq F(x)$, para toda $t \in [0,x]$, $x \geq 0$, entonces

$$\int_0^x F(x-t)\,dF(t) \leq \int_0^x F(x)\,dF(t),$$

por lo que $F^{2*}(x) \leq F^2(x)$, $x \geq 0$. Supongamos que esto se cumple para $n \geq 1$, esto es, que $F^{n*}(x) \leq F^n(x)$, $x \geq 0$. Entonces $F^{n*}(x-t) \leq F^n(x)$, para toda $t \in [0,x]$ y por lo tanto,

$$\int_0^x F^{n*}(x-t)\,dF(t) \leq \int_0^x F^n(x)\,dF(t),$$

lo cual equivale a que $F^{(n+1)*}(x) \leq F^{n+1}(x)$, para toda $n \geq 1$ y para toda $x \geq 0$. Entonces para cada x existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $F^r(x) < 1$. Los términos donde $n = r, r+1, r+2, \ldots$ para $F^n(x)$ forman una subserie geométrica, la cual converge, esto implica la convergencia de toda la serie $\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$, debido a que $F^{n*}(x) \leq F^n(x)$. Por lo tanto, tenemos que se cumple $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) < \infty$. ■

Desafortunadamente $V(t) = \mathbb{E}(N(t))$ no es fácil de calcular explícitamente. Los siguientes dos ejemplos son casos donde sí se puede obtener este cálculo.

Ejemplo 17 *Supongamos que F es la distribución exponencial. Su densidad es*

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0.$$

Sabemos que la suma de n variables exponenciales con parámetro α se distribuye como una Gama (n, α). Entonces tenemos para $n \geq 1$,

$$F^{n*}(dx) = \alpha (\alpha x)^{n-1} \frac{e^{-\alpha x}}{(n-1)!}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \alpha (\alpha s)^{n-1} \frac{e^{-\alpha s}}{(n-1)!} ds \\
&= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (\alpha s)^{n-1} \frac{e^{-\alpha s}}{(n-1)!} ds \\
&= \int_0^x \alpha e^{-\alpha s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \\
&= \int_0^x \alpha ds = \alpha x.
\end{aligned}$$

Verificando la definición de $F^{0*}(x)$ en la propiedad 4 del Apéncice A.1, obtenemos que

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) = 1 + \alpha x.$$

■

Ejemplo 18 *Si F tiene densidad*

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x > 0.$$

Veamos la densidad de $\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)$: su transformada de Laplace es

$$\left(\widehat{\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)} \right)(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d \left(\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF^{n*}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\widehat{F^{n*}}\right)(\lambda),
\end{aligned}
$$

por la propiedad 2 del Apéndice A.2 observemos que la transformada de Laplace de $F^{n*}(x)$ se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)}\right)(\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\widehat{F(\lambda)}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x),
\end{aligned}
$$

como $f(x) = xe^{-x}$, $x > 0$, entonces

$$
\left(\widehat{\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)}\right)(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} xe^{-(\lambda+1)x} dx,
$$

integrando por partes, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)}\right)(\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{e^{-(\lambda+1)x}}{(1+\lambda)^2}\right]_0^{\infty} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left((1+\lambda)^{-2}\right)^n \\
&= \frac{(1+\lambda)^{-2}}{1-(1+\lambda)^{-2}} \\
&= \frac{1}{1+2\lambda+\lambda^2-1} \\
&= \frac{1}{\lambda(\lambda+2)} \\
&= \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2(\lambda+2)} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{1}{2} dx - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{1}{2} e^{-2x} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}\right) dx
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)\right) dx.$$

Como sabemos que a cada distribución de probabilidad le corresponde una única transformada de Laplace (ver propiedad 1 en el Apéndice A.2), entonces obtenemos la densidad de $\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)$, *que es* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, *y tenemos que*

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) \\ &= 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2s}\right) ds \\ &= \frac{3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}. \end{aligned}$$

■

La función de renovación está muy ligada a una ecuación, que se llama *ecuación de renovación.*

Definición 19 *A la ecuación de la siguiente forma*

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)\, dF(y) \tag{2.5}$$

se le llama ***ecuación de renovación****, donde a z la suponemos conocida y no negativa, mientras que F es una distribución en $(0,\infty)$ tal que* $\lim_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = 1$.

Suponemos que z y Z toman valores no negativos, por lo que es posible reemplazar los límites de integración por $-\infty$ e ∞, y así podemos escribir a esta ecuación en la forma de la ecuación de convolución

$$Z = z + F * Z,$$

que es la ecuación de renovación en una notación compacta.

Consideremos algunos ejemplos de la ecuación de renovación. Generalmente la función z se origina a partir de condicionar a la primera renovación posterior al tiempo t, y el término de convolución de la ecuación de renovación se obtiene condicionando al tiempo de la primera renovación y moviendo el origen del tiempo hasta el primer tiempo de renovación.

Ejemplo 20 *Consideremos la función de renovación $V(t)$. Tenemos entonces*

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + F * V(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

y tenemos la ecuación de renovación con $Z = V$ y $z = F^{0*}(t)$. ∎

Ejemplo 21 *Supongamos que los individuos de una población viven una cantidad aleatoria de tiempo determinada por una función de distribución G. Al tiempo de morir un individuo se reproduce en k individuos con probabilidad p_k, $k \geq 0$. Supongamos que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, y la reproducción es independiente de la duración de vida. Además, los individuos diferentes se comportan independientemente uno de otro. Finalmente, supongamos que la población inicia al tiempo cero con un progenitor de edad cero. Supongamos que $X(t)$ es el tamaño de la población al tiempo t y sea $Z(t) = \mathbb{E}(X(t))$. Sea L_1 el tiempo de vida del progenitor y supongamos que N es el número de individuos procreados por el progenitor. Entonces $\mathbb{P}(N = k) = p_k$, $k \geq 0$. Sea $m = \mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$. Finalmente, sean $\{X_i(t);\ t \geq 0,\ i \geq 1\}$ el número de copias de un progenitor X, que son independientes e idénticamente distribuidas. Entonces*

$$Z(t) = \mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}\left(X(t)\mathbb{I}_{\{L_1 \leq t\}}\right) + \mathbb{E}\left(X(t)\mathbb{I}_{\{L_1 > t\}}\right).$$

En el conjunto $\{L_1 > t\}$ tenemos que $X(t) = 1$ y en el conjunto $\{L_1 \leq t\}$ tenemos que

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(t - L_1)\mathbb{I}_{\{L_1 \leq t\}}.$$

Por lo tanto,

$$Z(t) = \mathbb{P}(L_1 > t) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N} X_i(t - L_1)\mathbb{I}_{\{L_1 \leq t\}}\right).$$

Para el segundo término (interpretamos $\sum_{i=1}^{0}=0$), usemos probabilidad condicional,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N}X_i\left(t-L_1\right)\mathbb{I}_{\{L_1\leq t\}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N}X_i\left(t-L_1\right)\mathbb{I}_{\{L_1\leq t\}}|N=k\right)\mathbb{P}\left(N=k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(N=k\right)\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k}X_i\left(t-L_1\right)\mathbb{I}_{\{L_1\leq t\}}\right),\end{aligned}$$

por ser las variables $X_i(t)$, $i\geq 1$, independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N}X_i\left(t-L_1\right)\mathbb{I}_{\{L_1\leq t\}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k\mathbb{P}\left(N=k\right)\mathbb{E}\left(X_1\left(t-L_1\right)\mathbb{I}_{\{L_1\leq t\}}\right),$$

como $\mathbb{E}(N)=m$, usemos una vez más probabilidad condicional con respecto a L_1, el tiempo de vida del progenitor, y llegamos a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N}X_i\left(t-L_1\right)\mathbb{I}_{\{L_1\leq t\}}\right) &= m\int_0^t\mathbb{E}\left(X_1\left(t-L_1\right)|L_1=y\right)d\mathbb{P}\left(L_1\left(y\right)\right)\\ &= m\int_0^t Z\left(t-y\right)d\mathbb{P}\left(L_1\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

y sumando tenemos que

$$Z\left(t\right)=\mathbb{P}\left(L_1>t\right)+m\int_0^t Z\left(t-y\right)d\mathbb{P}\left(L_1\left(y\right)\right).$$

■

Teorema 22 *Supongamos $z(t)=0$, para $t<0$, y que z está acotada. Entonces una solución finita de la ecuación de renovación (2.5) es*

$$Z\left(x\right)=V*z\left(x\right)=\int_0^x z\left(x-t\right)V\left(dt\right)\tag{2.7}$$

y es única.

Demostración Primero veamos que es finita. Para $T>0$ tenemos que

$$\sup_{0\leq x\leq T}V*z\left(x\right) = \sup_{0\leq x\leq T}\int_0^x z\left(x-t\right)V\left(dt\right)$$

$$\leq \sup_{0\leq x\leq T} \int_0^x \sup_{0\leq x\leq T} z\left(x-t\right) V\left(dt\right)$$

como $V\left(t\right)<\infty$ y es monótona para toda t, entonces

$$\sup_{0\leq x\leq T} V * z\left(x\right) \leq \left(\sup_{0\leq x\leq T} z\left(s\right)\right) V\left(T\right)<\infty.$$

Ahora verifiquemos que sea solución. Tomando el resultado obtenido en (2.6), vemos que

$$V\left(t\right)-F^{0*}\left(t\right)=F*V\left(t\right),$$

donde $F^{0*}\left(x\right)=\mathbb{I}_{[0,\infty)}\left(x\right)$, entonces por la propiedad 4 de la convolución (ver Apéndice A.1) tenemos que

$$\begin{aligned} F*(V*z) &= (F*V)*z \\ &= \left(V-F^{0*}\right)*z \\ &= V*z-z, \end{aligned}$$

así llegamos a que

$$V*z=z+F*(V*z)$$

y $V*z$ es una solución de (2.5).

Veamos la unicidad de la solución. Sean Z_1 y Z_2 dos soluciones finitas de (2.5), es decir

$$Z_i=z+F*Z_i, \tag{2.8}$$

$i=1,2$. Sea $H=Z_1-Z_2$, y H también es finita. Al hacer la diferencia entre las ecuaciones (2.8), entonces

$$H=Z_1-Z_2=F*(Z_1-Z_2)=F*H,$$

haciendo iteraciones para alguna $n\geq 1$, tenemos que

$$H=F^{n*}*H.$$

Por lo tanto, para $T > 0$ y usando la propiedad 2 de la convolución (ver Apéndice A.1): $\sup_{0 \leq s \leq t} |F * g(s)| \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \right) F(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left(Z_1(t-y) - Z_2(t-y) \right) F^{n*}(dy) \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} H(t) F^{n*}(T), \end{aligned}$$

y $\sup_{0 \leq t \leq T} H(t) F^{n*}(T)$ tiende a cero, cuando n tiende a infinito, porque H es finita y $V(T) < \infty$. Así $H \equiv 0$ y $Z_1 = Z_2$. ■

Los siguientes ejemplos dan muestra del resultado de este último teorema.

Ejemplo 23 *Si* $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x > 0$,

$$V(t) = 1 + \alpha t,$$

como lo hicimos en el ejemplo 12. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V * z(t) &= \alpha \int_0^t z(t-y)\, dy \\ &= \alpha \int_0^t z(u)\, du. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 24 *Si* $f(x) = xe^{-x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, *entonces del ejemplo 18 tenemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{n*}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} dF^{n*}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x},\ x > 0$$

y en este caso

$$V * z(t) = \int_0^t z(t-y) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right] dy.$$

■

2.2 Teoremas de Renovación

Establecemos y demostramos los Teoremas de Renovación en esta sección. Probamos que el *Teorema de Renovación* y el *Teorema Clave de Renovación* son equivalentes. Por último, probamos una proposición que es consecuencia de estos teoremas.

Primero, veamos el *Teorema Elemental de Renovación*, que es imprescindible en esta sección.

Teorema 25 ***Teorema Elemental de Renovación*** *Sean $N(t)$ un proceso de conteo y $V(t)$ su correspondiente función de renovación definida en (2.1). Sea $\gamma = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\gamma}.$$

Demostración Por (2.4) tenemos que

$$\frac{1}{\gamma} = \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right],$$

usemos el lema de Fatou y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right] &\leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right] \\ &= \liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$\frac{1}{\gamma} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t}. \tag{2.9}$$

Para la desigualdad inversa, sea $a > 0$ arbitraria y sea

$$Y_i^a = \begin{cases} Y_i & \text{si } Y_i \leq a, \\ a & \text{si } Y_i > a. \end{cases}$$

Pongamos nuestra atención en el proceso $\{Y_i^a\}_{i\geq 0}$. Sean T_n^a y $N^a(t)$ los tiempos de renovación y el proceso de conteo, respectivamente, para este proceso de renovación truncado

$\{Y_i^a\}_{i\geq 0}$. Como Y_i^a, $i \geq 0$, están acotadas por a, entonces $t+a \geq T^a_{N^a(t)+1}$. Por lo tanto

$$t+a \geq \mathbb{E}\left[T^a_{N^a(t)+1}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N^a(t)+1} Y_i^a\right],$$

usemos probabilidad condicional, entonces tenemos que

$$t+a = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N^a(t)+1} Y_i^a | N^a(t) = n\right] \mathbb{P}\left[N^a(t) = n\right],$$

como Y_i^a, $i \geq 0$, y $N^a(t)$ son independientes llegamos a que

$$t+a = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}\left[Y_i^a\right] \mathbb{P}\left[N^a(t) = n\right]$$

por ser Y_i^a, $i \geq 0$, idénticamente distribuídas, entonces

$$t+a = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1} \gamma^a \mathbb{P}\left[N^a(t) = n\right],$$

donde $\gamma^a = \mathbb{E}\left[Y_i^a\right] = \int_0^a \overline{F}(x)\,dx$,

$$\begin{aligned} t+a &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\gamma^a \mathbb{P}\left[N^a(t) = n\right] \\ &= \gamma^a \left(\mathbb{E}\left[N^a(t)\right] + 1\right). \end{aligned}$$

Con $\mathbb{E}\left[N^a(t)\right] = V^a(t)$, llegamos a

$$t+a \geq \gamma^a \left(V^a(t) + 1\right). \tag{2.10}$$

Observemos que $Y_i^a \leq Y_i$, entonces $N^a(t) \geq N(t)$, por lo que $V^a(t) \geq V(t)$. Retomando (2.10), tenemos que

$$t+a \geq \gamma^a \left(V^a(t) + 1\right) \geq \gamma^a \left(V(t) + 1\right),$$

reordenando esto, obtenemos que

$$\frac{1}{t}V(t) \leq \frac{1}{\gamma^a} + \frac{1}{t}\left(\frac{a}{\gamma^a} - 1\right).$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leq \frac{1}{\gamma^a},$$

para cualquier $a > 0$. Veamos que

$$\lim_{a\to\infty} \gamma^a = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \overline{F}(x)\, dx = \int_0^\infty \overline{F}(x)\, dx = \gamma.$$

Así obtenemos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\gamma^a} = \frac{1}{\gamma}. \tag{2.11}$$

Las desigualdades (2.9) y (2.11) en conjunto implican que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\gamma}.$$

■

Algunos de los resultados más importantes de la Teoría de Renovación son el Teorema de Renovación o Teorema de Blackwell, y el Teorema Clave de Renovación.

El siguiente lema es útil en la demostración del Teorema de Renovación.

Lema 26 *Si $F(b) < 1$ entonces $V(t) - V(t-b) \leq (1 - F(b))^{-1}$, para toda $t \geq b$, y si $t \geq b$ se tiene que $\sup_{t\geq 0} \{V(t) - V(t-b)\} \leq (1 - F(b))^{-1} < \infty$.*

Demostración Consideremos la ecuación de renovación $V = F^{0*} + F * V$, donde $F^{0*}(x) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$, entonces despejando tenemos que

$$\begin{aligned} F^{0*}(t) &= V(t) - F * V(t) = V(t) - V * F(t) \\ &= V * (1 - F)(t) = \int_0^t (1 - F(t-s))\, V(ds) \\ &\geq \int_{t-b}^t (1 - F(t-s))\, V(ds). \end{aligned}$$

Como $F(t-s) \leq F(b)$, con $s \in (t-b, t)$, entonces

$$\int_{t-b}^{t} F(t-s)\, V(ds) \leq \int_{t-b}^{t} F(b)\, V(ds),$$

sumemos en ambos lados una cantidad finita, entonces tenemos que

$$\int_{t-b}^{t} V(ds) - \int_{t-b}^{t} F(t-s)\, V(ds) \geq \int_{t-b}^{t} V(ds) - \int_{t-b}^{t} F(b)\, V(ds),$$

que es equivalente a

$$\int_{t-b}^{t} (1 - F(t-s))\, V(ds) \geq (1 - F(b)) \int_{t-b}^{t} V(ds)$$

y desarrollando obtenemos que

$$\int_{t-b}^{t} (1 - F(t-s))\, V(ds) \geq (1 - F(b)) \left[V(t) - V(t-b)\right],$$

entonces $F^{0*}(t) \geq (1 - F(b)) \left[V(t) - V(t-b)\right]$. Como $t \geq 0$, vemos que $F^{0*}(t) = 1$, entonces $1 \geq (1 - F(b)) \left[V(t) - V(t-b)\right]$, por lo tanto al despejar tenemos que para toda $t \geq b$,

$$V(t) - V(t-b) \leq (1 - F(b))^{-1}.$$

De esto obtenemos que si $t \geq b$, entonces $\sup\limits_{t \geq 0} \{V(t) - V(t-b)\} \leq (1 - F(b))^{-1}$ ∎

Definición 27 *Una función F es* ***aritmética*** *si su correspondiente variable aleatoria X toma valores en un conjunto de la forma* $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, ...$ *y* $\mathbb{P}(X = k\lambda) = p_k$.

Ahora establecemos los Teoremas de Renovación.

Teorema 28 ***Teorema de Renovación*** *Sea $\gamma = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$. Si F es no aritmética y $V(t) = \mathbb{E}(N(t))$ es una función de renovación, entonces*

$$V(t) - V(t-h) \longrightarrow \frac{h}{\gamma}, \quad t \to \infty \tag{2.12}$$

para toda $h > 0$. ∎

Teorema 29 ***Teorema Clave de Renovación*** *Sea $\gamma = \mathbb{E}(Y_1) < \infty$ y sea V la función de renovación asociada a una función de distribución no aritmética F. Si $z \geq 0$ es no creciente y $\int_0^\infty z(t)\,dt < \infty$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} V * z(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty z(s)\,ds.$$

■

En el Teorema Clave de Renovación se considera la solución $Z = V * z(x)$ de la ecuación de renovación $Z = z + F * Z$. De la Proposición 59 del Apéndice B tenemos que z también es directamente Riemann integrable. Como la función z es directamente Riemann integrable (ver Apéndice B), entonces $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t) = \lim\limits_{t\to\infty} V * z(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty z(s)\,ds$. La equivalencia entre el Teorema de Renovación y el Teorema Clave de Renovación, depende de esa condición para la función z en la ecuación (2.5). Cuando se quiere calcular $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t)$, para alguna función $Z(t)$, un método usual de renovación es primero escribir una ecuación de renovación para Z, luego se resuelve y finalmente se aplica el Teorema Clave de Renovación.

Supongamos que z satisface que $z \geq 0$ y $z(t) = 0$, $t < 0$, para la demostración de la equivalencia entre los Teoremas de Renovación. Ahora podemos proceder con la demostración del siguiente lema:

Lema 30 *El Teorema de Renovación es equivalente al Teorema Clave de Renovación.*

Demostración Iniciemos suponiendo cierto el Teorema de Renovación para demostrar el Teorema Clave de Renovación, es decir, si F es alguna función de distribución, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} [V(t+h) - V(t)] = \frac{h}{\gamma}$, $h > 0$. Esto implica que $\lim\limits_{t\to\infty} V * z(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty z(s)\,ds$, donde $z(t)$ es directamente Riemann integrable. Dentro de las hipótesis tenemos que $F(0) = 0$. Sabemos que $\gamma = \int_0^\infty xF(dx) < \infty$, y recordemos que F es la distribución entre arribos, V es la función de renovación de un proceso de renovación puro. Suponemos válido el Teorema de Renovación (Blackwell) y la demostración la haremos por pasos:

Paso 1: Supongamos que $z(t) = \mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t)$, para alguna $h < \infty$, entonces

$$z(t-s) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n-1)h \leq t-s \leq nh \text{ ó } t-nh < s \leq t-(n-1)h, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

usemos esta función y obtenemos que

$$\begin{aligned} V * z(t) &= \int_0^t z(t-s)\, V(ds) = \int_0^t \mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t-s)\, V(ds) \\ &= \int_0^t \mathbb{I}_{[t-nh,t-(n-1)h)}(s)\, V(ds) = V(t-(n-1)h) - V(t-nh), \end{aligned}$$

haciendo que t tienda a infinito y junto con el Teorema de Renovación, tenemos que

$$V(t-(n-1)h) - V(t-nh) \longrightarrow \frac{h}{\gamma} = \frac{\int_0^\infty z(s)\, ds}{\gamma}, \quad t \to \infty.$$

Paso 2: Supongamos que $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t)$, donde $c_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, también que h sea elegida de tal manera que $F(h) < 1$, entonces

$$\begin{aligned} V * z(t) &= V * \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} V * \left(c_n \mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)} \right)(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n V * \mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[V(t-(n-1)h) - V(t-nh) \right]. \end{aligned}$$

Para cada n tenemos que $V(t-(n-1)h) - V(t-nh)$ tiende a $\frac{h}{\gamma}$, cuando t tiende a infinito por el paso anterior, y del Lema 26 tenemos que $\sup_{t \geq 0} \{V(t) - V(t-b)\} \leq (1-F(b))^{-1} < \infty$. Por lo tanto, usando el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} V * z(t) &= \lim_{t \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[V(t-(n-1)h) - V(t-nh) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \to \infty} c_n \left[V(t-(n-1)h) - V(t-nh) \right], \end{aligned}$$

usemos el Paso 1, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V * z(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{h}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} c_n h \\ &= \frac{1}{\gamma}\int_0^{\infty} z(s)\,ds.\end{aligned}$$

Paso 3: Sea $z(t)$ directamente Riemann integrable y definimos

$$\begin{aligned}\overline{z}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(h)\,\mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t), \\ \underline{z}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(h)\,\mathbb{I}_{[(n-1)h,nh)}(t),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\underline{m}_n(h) &= \inf_{(n-1)h\leq x<nh} z(x), \\ \overline{m}_n(h) &= \sup_{(n-1)h\leq x<nh} z(x),\end{aligned}$$

y notemos que $\overline{z}(t)$ y $\underline{z}(t)$ son funciones del tipo considerado en el Paso 2. Por la definición de directamente Riemann integrable (ver Apéndice B) sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(h) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(h) < \infty,$$

entonces a partir del Paso 2 llegamos a que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V * \overline{z}(t) &= \frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(h)\,h =: \frac{1}{\gamma}\overline{\sigma}(h) \quad \text{y} \\ \lim_{t\to\infty} V * \underline{z}(t) &= \frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(h)\,h =: \frac{1}{\gamma}\underline{\sigma}(h),\end{aligned}$$

así $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$, y obtenemos que se cumple

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma}\underline{\sigma}(h) &= \lim_{t\to\infty} V * \underline{z}(t) \leq \liminf_{t\to\infty} V * z(t) \\ &\leq \lim_{t\to\infty} V * z(t)\end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{t\to\infty} V * z(t) \leq \lim_{t\to\infty} V * \overline{z}(t) = \frac{1}{\gamma}\overline{\sigma}(h),$$

para toda h. Ahora hagamos tender h a cero por la derecha, por la definición de directamente Riemann integrable se tiene que $\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)$ tiende a cero y $\overline{\sigma}(h)$ tiende a la integral $\int_0^\infty z(s)\,ds$, cuando h tiende a cero, entonces

$$\lim_{t\to\infty} V * z(t) = \frac{\overline{\sigma}(h)}{\gamma} = \frac{\int_0^\infty z(s)\,ds}{\gamma}.$$

Por lo tanto, el Teorema Clave de Renonación se cumple.

Ahora, supongamos que el Teorema Clave de Renovación se cumple. Procedemos a demostrar que el Teorema de Renovación también se cumple. Sea

$$z_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, \text{ si } 0 \leq x \leq h, \\ 0, \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$z_h(t-x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, \text{ si } t-h \leq x \leq t, \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Como el Teorema Clave de Renovación es válido y además $\int_0^\infty z_h(t)\,dt = \int_0^h \frac{1}{h}dt = 1$, vemos que

$$\frac{1}{\gamma} = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty z_h(t-x)\,dV(x)$$

desarrollamos y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} dV(x) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{h}\left[V(t) - V(t-h)\right], \end{aligned}$$

despejando llegamos a la conclusión del Teorema de Renovación:

$$\lim_{t\to\infty} \left[V(t) - V(t-h)\right] = \frac{h}{\gamma}.$$

Por lo tanto, los dos Teoremas de Renovación son equivalentes. ∎

Con esto, podemos usar los Teoremas de Renovación indistintamente, pero falta comprobar la validez de ellos. Lo siguiente que hacemos es demostrar el Teorema Clave de Renovación.

Demostración del Teorema Clave de Renovación Iniciemos con

$$\int_0^t z(t-x)\,dV(t) = \int_0^{\frac{t}{2}} z(t-x)\,dV(t) + \int_{\frac{t}{2}}^t z(t-x)\,dV(t) = I_1 + I_2,$$

donde $I_1 = \int_0^{\frac{t}{2}} z(t-x)\,dV(t)$ y $I_2 = \int_{\frac{t}{2}}^t z(t-x)\,dV(t)$. Como $z(t)$ es no creciente y no negativa, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_1 = \int_0^{\frac{t}{2}} z(t-x)\,dV(t) \\ &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} z\left(\frac{t}{2}\right) dV(t) \\ &= z\left(\frac{t}{2}\right)\left[V\left(\frac{t}{2}\right) - V(0)\right] \\ &= \frac{t}{2} z\left(\frac{t}{2}\right) \frac{V\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

como $\int_0^\infty z(t)\,dt < \infty$ y $z \geq 0$ es no creciente, entonces z es también directamente Riemann integrable. Por el Teorema Elemental de Renovación, entonces $\frac{V\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}$ converge a $\frac{1}{\gamma}$, cuando t tiende a infinito.

Sea $z_1 = \int_0^\infty z(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nh}^{nh+h} z(t)\,dt$. Como $z(nh+h) \leq z(t) \leq z(nh)$, para $nh \leq t \leq nh+h$, pues z es no creciente, entonces tenemos que

$$h\sum_{n=1}^\infty z(nh) = h\sum_{n=0}^\infty z(nh+h) \leq z_1 \leq h\sum_{n=0}^\infty z(nh) < \infty$$

y así obtenemos que

$$0 \leq z_1 - h\sum_{n=1}^\infty z(nh) \leq hz(0) < \varepsilon.$$

Si elegimos h tal que

$$0 < h < \frac{\varepsilon}{z(0)}, \tag{2.13}$$

y si $\left[\frac{t}{2h}\right] = N_0$, entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{t}{2}}^{t} z(t-x)\, dV(t) \\ &= \int_{0}^{\frac{t}{2}} z(s)\, dV(t-s) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \int_{nh}^{nh+h} z(s)\, dV(t-s), \end{aligned}$$

como $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$ es no decreciente, llegamos a que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh+h)\left[V(t-nh) - V(t-nh-h)\right] &\leq I_2 \qquad (2.14) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh)\left[V(t-nh) - V(t-nh-h)\right]. \end{aligned}$$

Ahora podemos elegir una t lo suficientemente grande tal que (por el Teorema de Renovación)

$$\left|\frac{V(t-nh) - V(t-nh-h)}{h} - \frac{1}{\gamma}\right| < \varepsilon \qquad (2.15)$$

y

$$h \sum_{n=N_0+1}^{\infty} z(nh) < \varepsilon. \qquad (2.16)$$

Notemos que si t es grande entonces N_0 también lo es. Usemos (2.15) y tenemos que

$$h\left(\frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right) < V(t-nh) - V(t-nh-h) < h\left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right),$$

entonces en (2.14) obtenemos

$$h \sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh+h)\left(\frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right) \leq I_2 \leq h \sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh)\left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right). \qquad (2.17)$$

Por otro lado, si usamos (2.16) tenemos que

$$z_1 - 2\varepsilon \leq z_1 - 2h \sum_{n=N_0+1}^{\infty} z(nh) \leq h \sum_{n=1}^{N_0} z(nh) = h \sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh+h), \qquad (2.18)$$

como $h\sum_{n=1}^{\infty} z(nh) \leq z_1$ y por (2.13) entonces vemos que $h\sum_{n=0}^{\infty} z(nh) \leq z_1+\varepsilon$. Sabemos que $h\sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh) \leq h\sum_{n=0}^{\infty} z(nh)$, entonces

$$h\sum_{n=0}^{N_0-1} z(nh) \leq z_1+\varepsilon. \tag{2.19}$$

Entonces al usar (2.18) y (2.19) obtenemos en (2.17) para una $\varepsilon > 0$ arbitraria y pequeña

$$\left(\frac{1}{\gamma}-\varepsilon\right)(z_1-2\varepsilon) \leq I_2 \leq \left(\frac{1}{\gamma}+\varepsilon\right)(z_1+\varepsilon).$$

Así, llegamos a que I_2 tiende a $\frac{z_1}{\gamma}$, cuando t tiende a infinito. Por lo tanto, cuando t tiende a infinito,

$$\int_0^t z(t-x)\,dV(t) \to \frac{1}{\gamma}\int_0^{\infty} z(t)\,dt.$$

■

En el caso cuando $F(\infty) < 1$, que no es nuestro caso, la ecuación $Z = z + F * Z$ es llamada *ecuación de renovación defectuosa.*

Recordemos que z es localmente acotada siempre, es decir, es acotada en intervalos compactos, y la existencia de $z(\infty)$ significa que $z(t)$ está acotada con $t \in [0,\infty)$. Por esto y usando el Teorema de Convergencia Dominada obtenemos que

$$Z(\infty) := \lim_{t\to\infty} Z(t) = z(\infty)\,V(\infty).$$

Entonces podemos seguir una transformación en el Teorema Clave de Renovación para refinar lo argumentado anteriormente.

Proposición 31 *Supongamos que existe $v \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\widehat{F}(-v) = \int_0^{\infty} e^{vx}dF(x) < \infty$$

y supongamos que Z satisface $Z = z + F * Z$. Definimos

$$Z^{\#}(t) = e^{vt}Z(t),$$

$$
\begin{aligned}
z^{\#}(t) &= e^{vt} z(t), \\
F^{\#}(dt) &= e^{vt} F(dt).
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
F^{\#}(\infty) = \int_0^\infty e^{vt} dF(t) = 1,
$$

(es decir, $F^{\#}$ es "propia") y que $Z^{\#}$ satisface

$$
Z^{\#} = z^{\#} + F^{\#} * Z^{\#},
$$

y si $z^{\#}$ es directamente Riemann integrable, entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} Z^{\#}(t) &= \frac{\int_0^\infty z^{\#}(t)\, dt}{\int_0^\infty t dF^{\#}(t)} \\
&= \frac{\int_0^\infty e^{vt} z(t)\, dt}{\int_0^\infty t e^{vt} dF(t)}.
\end{aligned}
$$

Demostración Tomemos la ecuación

$$
Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-s)\, dF(s)
$$

y multipliquemos por e^{vt} para obtener

$$
e^{vt} Z(t) = e^{vt} z(t) + \int_0^t e^{v(t-s)} Z(t-s)\, e^{vs} dF(s),
$$

es decir,

$$
Z^{\#}(t) = z^{\#}(t) + \int_0^t Z^{\#}(t-s)\, dF^{\#}(s)
$$

y usando el Teorema Clave de Renovación llegamos a

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} Z^{\#}(t) &= \frac{\int_0^\infty z^{\#}(t)\, dt}{\int_0^\infty t dF^{\#}(t)} \\
&= \frac{\int_0^\infty e^{vt} z(t)\, dt}{\int_0^\infty t e^{vt} dF(t)},
\end{aligned}
$$

que es el resultado que nos interesa. ∎

2.3 Conclusiones

Hemos dado las definiciones básicas en la Teoría de Renovación, que son la función de renovación y la ecuación de renovación. Al analizar esta ecuación junto con la propiedad de que $V(t) < \infty$, para toda t, se logra la demostración del Teorema Clave de Renovación y la equivalencia entre este teorema y el Teorema de Renovación. Pero por la condición de directamente Riemann integrable que se pide a z, nos resulta más útil el Teorema Clave de Renovación y sobre todo el obtener una proposición donde su resultado nos sirve en la obtención de cálculos asintóticos, como los hay en la demostración de un teorema del siguiente capítulo.

Capítulo 3

El estimador de Cramér-Lundberg

En este capítulo usamos los dos capítulos anteriores, como son las definiciones del segundo y el Teorema de Renovación del tercero. El objetivo es que si sabemos cuál es la distribución que tienen las reclamaciones, entonces encontremos un exponente, el cual nos permitirá obtener el comportamiento asintótico y una cota para la probabilidad de ruina $\psi(u)$. Todo esto se conoce como el *Teorema de Cramér-Lundberg.*

3.1 El Teorema de Cramér-Lundberg

Veamos primero que de acuerdo a lo que se establece en el modelo de Cramér-Lundberg definido en el capítulo 1, tenemos que $Y_k = T_k - T_{k-1}$, $k = 2, 3, ...$ y $Y_1 = T_1$, que son los tiempos entre las reclamaciones, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k. \tag{3.1}$$

Recordemos que para el proceso de riesgo $U(t) = u + ct - S(t)$, $t \geq 0$, descrito en (1.4), la probabilidad de ruina está dada por $\psi(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0, \text{ para alguna } t \geq 0)$. Entonces la ruina puede ocurrir solamente en el tiempo de reclamación T_n, para $u \geq 0$, y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \mathbb{P}(U(t) < 0, \text{ para alguna } t \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(u + ct - S(t) < 0, \text{ para alguna } t \geq 0) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}\left(u + cT_n - S(T_n) < 0, \text{ para alguna } n \geq 1\right),$$

vimos que $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(u + c\sum_{k=1}^{n} Y_k - S(T_n) < 0, \text{ para alguna } n \geq 1\right),$$

como $S(T_n) = \sum_{k=1}^{n} X_k$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \mathbb{P}\left(u + c\sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=1}^{n} X_k < 0, \text{ para alguna } n \geq 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - cY_k) > u, \text{ para alguna } n \geq 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{n} (X_k - cY_k)\right\} > u\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{n} (X_k - cY_k)\right\} > u\right). \tag{3.2}$$

Así, $\psi(u) < 1$ es equivalente a la condición

$$1 - \psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{n} (X_k - cY_k)\right\} \leq u\right) > 0, \qquad u \geq 0.$$

De (3.2) se sigue que, en nuestro modelo, la determinación de la *probabilidad de no ruina* $1 - \psi(u)$ se reduce al estudio de la función de distribución del supremo de una caminata aleatoria.

Podemos obtener una fórmula para $\psi(u)$ involucrando la función de distribución de las reclamaciones F explícitamente.

Definición 32 *Sea F una función de distribución y $0 < \mu < \infty$ su media ($F(0) = 0$). Denotaremos por la* ***distribución de la cola integrada*** *a*

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy\ , \tag{3.3}$$

donde

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad x \geq 0,$$

es la cola de la distribución F.

Los siguientes estimadores de Cramér-Lundberg de la probabilidad de ruina $\psi(u)$ son útiles en la Teoría de Riesgo.

Teorema 33 ***Teorema de Cramér-Lundberg*** *Consideremos el modelo de Cramér-Lundberg, definido en la sección 2.2, incluyendo la condición de beneficios netos $\rho > 0$. Supongamos que existe una $v > 0$ tal que*

$$\widehat{f}_I(-v) = \int_0^\infty e^{vx} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho. \tag{3.4}$$

Entonces, las siguientes relaciones se cumplen:

(a) *Para toda $u \geq 0$,*

$$\psi(u) \leq K e^{-vu}, \tag{3.5}$$

con $K > 0$ constante.

(b) *Si además*

$$\int_0^\infty x e^{vx} \overline{F}(x)\, dx < \infty, \tag{3.6}$$

entonces

$$\lim_{u \to \infty} e^{vu} \psi(u) = C < \infty, \tag{3.7}$$

donde

$$C = \left[\frac{v}{\rho\mu} \int_0^\infty x e^{vx} \overline{F}(x)\, dx \right]^{-1}. \tag{3.8}$$

Observación La hipótesis (3.4) se conoce como *condición de Cramér-Lundberg* y es equivalente a $\int_0^\infty e^{vx} \overline{F}(x)\, dx = \frac{c}{\lambda}$, pues

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{vx} dF_I(x) &= \int_0^\infty e^{vx} F_I'(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{vx} \overline{F}(x)\, dx. \end{aligned}$$

Demostración Primero veamos el inciso (b).

(b) Sea $\delta(u) = 1 - \psi(u)$. Entonces $\delta(u)$ se puede expresar por medio de la caminata aleatoria generada por $(X_i - cY_i)$,

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \mathbb{P}(U(t) \geq 0;\ \forall t > 0)\\ &= \mathbb{P}(S(t) - ct \leq u;\ \forall t > 0),\end{aligned}$$

de acuerdo con lo hecho en (3.2), entonces

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - cY_k) \leq u;\ \forall n \geq 1\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=2}^{n}(X_k - cY_k) \leq u + cY_1 - X_1;\ \forall n \geq 2,\ X_1 - cY_1 \leq u\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=2}^{n}X_k - c\sum_{k=2}^{n}Y_k \leq u + cY_1 - X_1;\ \forall n \geq 2,\ X_1 - cY_1 \leq u\right)\\ &= \mathbb{P}\left(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1;\ \forall t > 0,\ X_1 - cY_1 \leq u\right),\end{aligned}$$

donde $S'(t) = \sum_{k=2}^{n} X_k$. Así, usando probabilidad condicional tenemos que

$$\begin{aligned}&\delta(u)\\ &= \int_{\{(s,x):x-cy\leq u\}} \mathbb{P}\left(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1;\ \forall t > 0 | X_1 - cY_1 \leq u\right) d\mathbb{P}_{Y_1,X_1}(s,x)\\ &= \int_{\{(s,x):u+cs-x\geq 0\}} \mathbb{P}\left(S'(t) - ct \leq u + cs - x,\ \forall t > 0 | X_1 - cY_1 \leq u\right) d\mathbb{P}_{Y_1,X_1}(s,x),\end{aligned}$$

usemos la independencia de Y_1 y X_1,

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cs} \mathbb{P}\left(S'(t) - ct \leq u + cs - x,\ \forall t > 0\right) dF(x)\right] \lambda e^{-\lambda s} ds\\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^{u+cs} \delta(u + cs - x)\, dF(x)\right] \lambda e^{-\lambda s} ds.\end{aligned}$$

Sea $z = u + cs$, despejando se tiene que $s = \frac{z-u}{c}$, entonces $ds = \frac{1}{c}dz$. Por otro lado

$0 < s < \infty$, entonces $u < z < \infty$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} \lambda e^{-\lambda s}\delta(u+cs-x)\,dF(x)\,ds \\ &= \int_u^\infty \int_0^z \lambda e^{-\left(\frac{z-u}{c}\right)}\delta(z-x)\,dF(x)\,\frac{1}{c}dz \\ &= \frac{\lambda}{c}e^{\frac{u\lambda}{c}}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}}\int_0^z \delta(z-x)\,dF(x)\,dz.\end{aligned}$$

Derivando $\delta(u)$ se llega a

$$\begin{aligned}\delta'(u) &= \frac{\lambda}{c}\left[\frac{\lambda}{c}e^{\frac{u\lambda}{c}}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}}\int_0^z \delta(z-x)\,dF(x)\,dz\right] \\ &\quad +\frac{\lambda}{c}e^{\frac{u\lambda}{c}}\left[e^{-\frac{\lambda z}{c}}\int_0^z \delta(z-x)\,dF(x)\right]_u^\infty \\ &= \frac{\lambda}{c}\delta(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,dF(x).\end{aligned}$$

Observemos que la integral en este último renglón es una convolución. Integrando $\delta'(u)$ de 0 a t con respecto a la medida de Lebesgue se obtiene:

$$\int_0^t \delta'(u)\,du = \int_0^t \left(\frac{\lambda}{c}\delta(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,dF(x)\right)du,$$

entonces

$$\delta(u)\,|_0^t = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\,du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta(u-x)\,dF(x)\,du$$

y desarrollando

$$\delta(t)-\delta(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\,du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta(u-x)\,dF(x)\,du. \tag{3.9}$$

Integrando por partes, $-\int_0^u \delta(u-x)\,dF(x)$ es igual a

$$\begin{aligned}-\int_0^u \delta(u-x)\,dF(x) &= \left[\delta(u-x)(1-F(x))\right]_0^u + \int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dx \\ &= \delta(0)(1-F(u)) - \delta(u) + \int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dx.\end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la segunda integral del lado derecho de (3.9),

$$
\begin{aligned}
\delta(t)-\delta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\,du+\\
&+\frac{\lambda}{c}\int_0^t \left(\delta(0)(1-F(u))-\delta(u)+\int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dx\right)du\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\,du+\frac{\lambda}{c}\delta(0)\int_0^t (1-F(u))\,du-\frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\,du+\\
&+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dxdu\\
&= \frac{\lambda}{c}\delta(0)\int_0^t (1-F(u))\,du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dxdu,
\end{aligned}
$$

entonces tenemos que

$$
\delta(t)-\delta(0)=\frac{\lambda}{c}\delta(0)\int_0^t (1-F(u))\,du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dxdu. \quad (3.10)
$$

Hacemos un cambio de integración en ésta última doble integral, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^u \delta'(u-x)(1-F(x))\,dxdu &= \int_0^t\int_x^t \delta'(u-x)\overline{F}(x)\,dudx\\
&= \int_0^t \overline{F}(x)\int_x^t \delta'(u-x)\,dudx\\
&= \int_0^t \overline{F}(x)(\delta(t-x)-\delta(0))\,dx\\
&= \int_0^t \delta(t-x)\overline{F}(x)\,dx-\delta(0)\int_0^t \overline{F}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Entonces retomando lo hecho en (3.10) y sustituyendo esto último obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\delta(t)-\delta(0) &= \frac{\lambda}{c}\delta(0)\int_0^t (1-F(u))\,du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)(1-F(x))\,dx+\\
&-\frac{\lambda}{c}\delta(0)\int_0^t (1-F(x))\,dx\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)(1-F(x))\,dx\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)\overline{F}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Así, llegamos a que

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)\,\overline{F}(x)\,dx. \tag{3.11}$$

Notemos que $\delta(0)$ es desconocida. Sin embargo, cuando hacemos que t tienda a infinito y por la continuidad por abajo, se tiene que $\lim\limits_{t\to\infty} \delta(t) = \delta(\infty) = 1 - \psi(\infty)$, pues los conjuntos son crecientes. Por la ley de los grandes números tenemos que $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{ct-S(t)}{t} = c - \lambda\mu$, casi seguramente. Pero en el capítulo 1, sección 1.3, pedimos que $c > \lambda\mu$, entonces existe una T que depende de $N(t)$ y X_k, $k \in \mathbb{N}$, tal que $ct - S(t) > 0$, para toda $t > T$. Entonces sólo un número finito de reclamaciones puede ocurrir antes del tiempo T, y como $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{ct-S(t)}{t} = c - \lambda\mu > 0$, entonces tenemos que $\inf\limits_{t>0}(ct - S(t)) < \infty$, casi seguramente. Por lo tanto, $\mathbb{P}\left(\lim\limits_{t\to\infty} U(t) > 0, \forall t\right) = 1$, es decir, $\delta(\infty) = 1$, entonces haciendo que t tienda a infinito en (3.11) tenemos que

$$\delta(\infty) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \delta(\infty)\,\overline{F}(x)\,dx.$$

Por lo anterior, entonces llegamos a que $1 = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \overline{F}(x)\,dx = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\mu$, donde por (1.6) sabemos que $\int_0^\infty \overline{F}(x)\,dx = \mu$, despejando a $\delta(0)$ y usando la condición de beneficios netos, encontramos la condición inicial,

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Así, en (3.11) llegamos a que

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^t \delta(t-x)\,\frac{1}{\mu}\overline{F}(x)\,dx \\
&= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^t \delta(t-x)\,dF_I(x).
\end{aligned}$$

Y tenemos

$$\delta(t) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^t \delta(t-x)\,dF_I(x), \tag{3.12}$$

donde la distribución de la cola integrada F_I se define en (3.3). Ahora se reescribirá

(3.12) en términos de $\psi(u) = 1 - \delta(u)$, donde $\alpha = \frac{1}{1+\rho} < 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \delta(u) \\
&= 1 - \left[\frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \delta(u-x)\, dF_I(x)\right] \\
&= \frac{1}{1+\rho} - \alpha \int_0^u \delta(u-x)\, dF_I(x) \\
&= \alpha - \alpha F_I(u) + \alpha F_I(u) - \int_0^u \delta(u-x)\, d(\alpha F_I(x)) \\
&= \alpha(1 - F_I(u)) + \int_0^u d(\alpha F_I(x)) - \int_0^u \delta(u-x)\, d(\alpha F_I(x)) \\
&= \alpha \overline{F_I}(u) + \int_0^u (1 - \delta(u-x))\, d(\alpha F_I(x)) \\
&= \alpha \overline{F_I}(u) + \int_0^u \psi(u-x)\, d(\alpha F_I(x)).
\end{aligned}
$$

Para llegar así a

$$\psi(u) = \alpha \overline{F_I}(u) + \int_0^u \psi(u-x)\, d(\alpha F_I(x)). \tag{3.13}$$

Como $0 < \alpha < 1$, entonces esta ecuación es una *ecuación de renovación defectuosa*, ya que αF_I no es distribución. Entonces definamos la *función de densidad transformada de Esscher* $F_{I,v}$,

$$dF_{I,v}(x) = e^{vx} d(\alpha F_I(x)),$$

donde v es el exponente de Cramér-Lundberg que se menciona en la condición (3.4). Usemos esta notación en (3.13) para llegar a que

$$
\begin{aligned}
e^{vu}\psi(u) &= \alpha e^{vu}\overline{F_I}(u) + \int_0^u e^{vu}\psi(u-x)\, e^{v(x-x)} d(\alpha F_I(x)) \\
&= \alpha e^{vu}\overline{F_I}(u) + \int_0^u e^{v(u-x)}\psi(u-x)\, dF_{I,v}(x),
\end{aligned}
$$

que es una ecuación de renovación estándar (no defectuosa), porque $\alpha e^{vu}\overline{F_I}(u)$ es continua, por lo tanto directamente Riemann integrable y $F_{I,v}$ si es función de distribución. Usemos el Teorema de Renovación, o más especificamente, la Proposición

31 para llegar a que

$$\lim_{u\to\infty} e^{vu}\psi(u) = \frac{\int_0^\infty \alpha e^{vx}\overline{F_I}(x)\,dx}{\int_0^\infty x dF_{I,v}(x)} = \frac{C_1}{C_2},$$

desarrollemos cada una de las integrales. Hacemos un cambio de orden de integración en C_1 y tenemos que

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_0^\infty \alpha e^{vx}\overline{F_I}(x)\,dx \\
&= \frac{\alpha}{\mu}\int_0^\infty \int_0^y e^{vx}\overline{F}(y)\,dxdy \\
&= \frac{\alpha}{\mu}\int_0^\infty \overline{F}(y)\left(\frac{e^{vy}-1}{v}\right)dy \\
&= \frac{\alpha}{v\mu}\left[\int_0^\infty e^{vy}\overline{F}(y)\,dy - \int_0^\infty \overline{F}(y)\,dy\right] \\
&= \frac{\alpha}{v\mu}\left[\frac{c}{\lambda}-\mu\right] \\
&= \frac{\rho}{v(1+\rho)},
\end{aligned}$$

mientras que al sustituir la función de densidad transformada de Esscher en C_2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
C_2 &= \int_0^\infty x e^{vx} d(\alpha F_I(x)) \\
&= \int_0^\infty x e^{vx}\frac{\alpha}{\mu}\overline{F}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\mu(1+\rho)}\int_0^\infty x e^{vx}\overline{F}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{u\to\infty} e^{vu}\psi(u) = \left[\frac{v}{\mu\rho}\int_0^\infty x e^{vx}(1-F(x))\,dx\right]^{-1}.$$

(a) En el inciso anterior obtuvimos la siguiente igualdad:

$$e^{vu}\psi(u) = \alpha e^{vu}\overline{F_I}(u) + \int_0^u e^{v(u-x)}\psi(u-x)\,dF_{I,v}(x).$$

Esta ecuación es una ecuación de renovación y tiene una única solución, la cual de acuerdo con (2.7) está dada por:

$$g(u) = e^{vu}\psi(u) = \int_0^u \alpha e^{v(u-x)}\overline{F_I}(u-x)\,\lambda dx,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_0^u \alpha e^{-vx}\overline{F_I}(u-x)\,\lambda dx \\
&= \alpha\lambda \int_0^u e^{-vx}\frac{1}{\mu}\int_{u-x}^{\infty}\overline{F}(y)\,dydx,
\end{aligned}$$

hacemos un cambio de orden de integración y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \frac{\alpha\lambda}{\mu}\int_0^u \overline{F}(y)\int_{u-y}^{u} e^{-vx}dxdy + \frac{\alpha\lambda}{\mu}\int_u^{\infty}\overline{F}(y)\int_0^u e^{-vx}dxdy \\
&= \frac{\alpha\lambda}{\mu}\int_0^u \overline{F}(y)\left(-\frac{e^{-vu}-e^{-v(u-y)}}{v}\right)dy + \frac{\alpha\lambda}{\mu}\int_u^{\infty}\overline{F}(y)\left(-\frac{e^{-vu}}{v}+\frac{1}{v}\right)dy \\
&= -\frac{\alpha\lambda e^{-vu}}{v\mu}\int_0^u \overline{F}(y)\,dy + \frac{\alpha\lambda e^{-vu}}{v\mu}\int_0^u e^{vy}\overline{F}(y)\,dy + \\
&\quad -\frac{\alpha\lambda e^{-vu}}{v\mu}\int_u^{\infty}\overline{F}(y)\,dy + \frac{\alpha\lambda}{v\mu}\int_u^{\infty}\overline{F}(y)\,dy \\
&= -\frac{\alpha\lambda e^{-vu}}{v\mu}\int_0^{\infty}\overline{F}(y)\,dy + \frac{\alpha\lambda}{v\mu}\left[e^{-vu}\int_0^u e^{vy}\overline{F}(y)\,dy + \int_u^{\infty}\overline{F}(y)\,dy\right],
\end{aligned}$$

como en (1.6) llegamos a que $\int_0^{\infty}\overline{F}(y) = \mu$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= -\frac{\alpha\lambda e^{-vu}}{v\mu}\mu + \frac{\alpha\lambda}{v\mu}e^{-vu}\int_0^u e^{vy}\overline{F}(y)\,dy + \frac{\alpha\lambda}{v\mu}\int_u^{\infty}\overline{F}(y)\,dy \\
&= \frac{\alpha\lambda}{v\mu}\left[-\mu e^{-vu} + e^{-vu}\int_0^u e^{vy}\overline{F}(y)\,dy + \int_u^{\infty}\overline{F}(y)\,dy\right] \\
&\leq \frac{\alpha\lambda}{v\mu}\left[-\mu e^{-vu} + e^{-vu}\int_0^u e^{vy}\overline{F}(y)\,dy + \left(e^{-vu}\int_u^{\infty}e^{vy}\overline{F}(y)\,dy + \mu e^{-vu}\right)\right] \\
&= \frac{\alpha\lambda}{v\mu}e^{-vu}\int_0^{\infty}e^{vy}\overline{F}(y)\,dy,
\end{aligned}$$

pero sabemos cuál es el valor de esta integral,

$$\psi(u) \leq \frac{\alpha\lambda}{v\mu}e^{-vu}\frac{c}{\lambda}$$

y sustituyendo el valor de α, por lo tanto tenemosque

$$\psi(u) \leq \frac{\lambda}{v} e^{-vu},$$

para $u \geq 0$. ■

Para el modelo de Cramér-Lundberg bajo la condición de beneficios netos $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ tenemos que

$$1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} F_I^{n*}(u). \tag{3.14}$$

La fórmula (3.14) es la clave para estimar las probabilidades de ruina bajo la suposición de reclamaciones grandes. Esta fórmula se le conoce por *fórmula de Pollaczeck-Khinchine.*

Ahora procedemos con la demostración de la fórmula (3.14),

$$\begin{aligned}
1 - \psi(u) &= \delta(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_0^u \delta(u - x_1)\, dF_I(x_1) \\
&= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} \int_0^u \frac{\rho}{1+\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho} \int_0^{u-x_1} \delta(u - x_1 - x_2)\, dF_I(x_2)\right) dF_I(x_1) \\
&= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \int_0^u dF_I(x_1) + \\
&\quad + \frac{1}{(1+\rho)^2} \int_0^u \int_0^{u-x_1} \delta(u - x_1 - x_2)\, dF_I(x_2)\, dF_I(x_1),
\end{aligned}$$

hacemos lo mismo repetidas veces, entonces

$$\begin{aligned}
1 - \psi(u) &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \int_0^u dF_I(x_1) + \\
&\quad + \frac{\rho}{(1+\rho)^3} \int_0^u \int_0^{u-x_1} \delta\left(u - \sum_{i=1}^{2} x_i\right) dF_I(x_2)\, dF_I(x_1) + \\
&\quad + \frac{\rho}{(1+\rho)^4} \int_0^u \int_0^{u-x_1} \int_0^{u-x_1-x_2} \delta\left(u - \sum_{i=1}^{3} x_i\right) dF_I(x_3)\, dF_I(x_2)\, dF_I(x_1) + \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + \frac{\rho}{(1+\rho)^{n+1}} \int_0^u \cdots \int_0^{u - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \delta\left(u - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) dF_I(x_n) \ldots dF_I(x_1) + \cdots \\
&= \frac{\rho}{1+\rho} \left(1 + \frac{F_I(u)}{1+\rho} + \frac{F_I^{2*}(u)}{(1+\rho)^2} + \cdots + \frac{F_I^{n*}(u)}{(1+\rho)^n} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} F_I^{n*}(u) \ .$$

■

Ejemplo 34 *En el caso de una función de distribución exponencial $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$, tenemos que la probabilidad de supervivencia (3.14) se reduce a*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u\right\}, \qquad u \geq 0.$$

Si $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$ y tenemos que

$$\psi(u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} F_I^{n*}(u) .$$

Veamos quién sería $F_I(x)$,

$$\begin{aligned}
F_I(x) &= \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy = \frac{1}{\mu}\int_0^x \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{y}{\mu}}\right)\right) dy \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^x e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \frac{1}{\mu}\left[-\mu e^{-\frac{y}{\mu}}\right]_0^x \\
&= -e^{-\frac{x}{\mu}} + 1 \\
&= F(x) .
\end{aligned}$$

Ahora, la suma de variables aleatorias idénticamente distribuidas exponencialmente con parámetro $\frac{1}{\alpha}$, tiene una densidad $g_n(x) = \alpha\frac{(\alpha x)}{(n-1)!}e^{-\alpha x}$, $x > 0$, y una distribución $G_n(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) = 1 - e^{-\alpha x}\left(1 + \frac{\alpha x}{1!} + ... + \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, $x > 0$. Puesto que $F^{n*}(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right)$ es la n-ésima convolución de F, veamos lo que se obtiene al sustituir en (3.14) la n-ésima convolución de una exponencial,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} F_I^{n*}(u) \\
&= 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\left(1 - e^{-\alpha u}\left(1 + \frac{\alpha u}{1!} + \cdots + \frac{(\alpha u)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\frac{\rho}{1+\rho}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}-e^{-\alpha u}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\left(1+\frac{\alpha u}{1!}+\cdots+\frac{(\alpha u)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right]\\
&= 1-\frac{\rho}{1+\rho}\left[\frac{1+\rho}{\rho}-e^{-\alpha u}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\alpha u)^{i-1}}{(i-1)!}\right]\\
&= \frac{\rho}{1+\rho}e^{-\alpha u}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\alpha u)^{i}}{(i)!}\\
&= \frac{\rho}{1+\rho}e^{-\alpha u}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha u)^{i}}{(i)!}\sum_{n=i+1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\\
&= \frac{\rho}{1+\rho}e^{-\alpha u}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha u)^{i}}{(i)!}\frac{\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{i+1}}{\frac{\rho}{1+\rho}}\\
&= \frac{1}{1+\rho}e^{-\alpha u}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha u)^{i}}{(i)!}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{i}\\
&= \frac{1}{1+\rho}e^{-\alpha u}e^{\alpha u\frac{1}{1+\rho}}\\
&= \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{\rho}{1+\rho}\alpha u\right\}\\
&= \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{\rho}{(1+\rho)\mu}u\right\}.
\end{aligned}
$$

∎

Definición 35 *Dada una función de reclamación F (ó distribución), la constante $v > 0$ satisface*

$$\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}$$

y es llamada el ***exponente de Lundberg*** *o* ***coeficiente ajustado*** *de un proceso de riesgo.*

Usando la desigualdad de Markov, tenemos que

$$\overline{F}(x) \le e^{-vx}\mathbb{E}\left(e^{vX_1}\right), \qquad x > 0.$$

Esta desigualdad implica que las reclamaciones grandes son muy poco probables. Por esta razón (3.4) es a menudo llamada la *condición de reclamaciones pequeñas.*

3.2 Funciones de distribución de reclamaciones pequeñas y grandes

¿Qué distribuciones se ajustan a los datos de los montos de las reclamaciones? Sucede muy a menudo que las situaciones que se presentan se ajustan a una de las funciones de la siguiente tabla:

Nombre	Cola $\overline{F}$ o densidad f	Parámetros
Lognormal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	$\mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0$
Pareto	$\overline{F}(x)=\left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}$	$\alpha,\ k>0$
Burr	$\overline{F}(x)=\left(\frac{k}{k+x^{r}}\right)^{\alpha}$	$\alpha,\ k,\ r>0$
Benktander tipo I	$\overline{F}(x)=(1+2(\beta/\alpha)\ln x)\,e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}$	$\alpha,\ \beta>0$
Benktander tipo II	$\overline{F}(x)=e^{\alpha/\beta}x^{-(1-\beta)}e^{-\alpha x^{\beta}/\beta}$	$\alpha>0,\quad 0<\beta<1$
Weibull	$\overline{F}(x)=e^{-\alpha x^{r}}$	$\alpha>0,\quad 0<r<1$
Loggamma	$f(x)=\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1}$	$\alpha,\ \beta>0$

Tabla 3.1 Funciones de distribución para reclamaciones grandes.

En la siguiente tabla se encuentran aquellas distribuciones a las cuales les podemos aplicar el Teorema de Cramér-Lundberg en la versión que acabamos de probar

Nombre	Cola $\overline{F}$ o densidad f	Parámetros
Exponencial	$\overline{F}(x)=e^{-\alpha x}$	$\alpha>0$
Gamma	$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$	$\alpha,\ \beta>0$
Weibull	$\overline{F}(x)=e^{-\alpha x^{r}}$	$\alpha>0,\ r\geq 1$
Normal truncada	$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}$	–

Tabla 3.2 Funciones de distribución para reclamaciones pequeñas.

Supongamos que tenemos un portafolio que sigue el modelo de Cramér-Lundberg y también conocemos la distribución por la cual pueden ser modeladas las reclamaciones, entonces lo que haremos es usar la condición de Cramér-Lundberg (3.4), para poder determinar el exponente de Lundberg v y así obtener las estimaciones para la probabilidad de ruina $\psi(u)$. Pero puede pasar que no exista el exponente de Lundberg v, entonces tenemos que recurrir a otro tipo de teoría para obtener resultados satisfactorios en la estimación deseada.

Todas las funciones de la tabla 3.2 toman en cuenta la construcción del exponente de Lundberg, pero para las funciones de la tabla 3.1 no existe este exponente. Veamos que en cada una de las funciones esto se cumple. Y usaremos la siguiente notación:

Función de densidad (f.d): $f(x)$

Función de distribución (F.D): $F(x)$

Esperanza: $\mathbb{E}[X]$

Función Gama: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

Función Gama incompleta: $\Gamma(\alpha; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}e^{-y}dy$

Función de densidad Normal: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Función de distribución Normal: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

1. **LOGNORMAL**

   Soporte: $x > 0$

   Parámetros: $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

   f.d.: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

   F.D.: $F(x) = \Phi(\ln x - \mu)$, y verificamos que

$$\begin{aligned}
\overline{F}(x) &= 1 - F(x) \\
&= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_x^\infty \frac{1}{y}e^{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)}dy.
\end{aligned}$$

   Sea $u = \ln y - \mu$, entonces

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\ln x-\mu}^\infty e^{-u^2/(2\sigma^2)}du.$$

   Esperanza: $\mathbb{E}[X] = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \int_0^\infty e^{vx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\ln x-\mu}^\infty e^{-u^2/(2\sigma^2)}dudx,$$

como $\ln x - \mu < u < \infty$, despejando tenemos $xe^{-\mu} < e^u < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty\int_0^{e^{u+\mu}} e^{vx}e^{-u^2/(2\sigma^2)}dxdu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/(2\sigma^2)}\int_0^{e^{u+\mu}} e^{vx}dxdu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/(2\sigma^2)}\left[\frac{e^{vx}}{v}\right]_0^{e^{u+\mu}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/(2\sigma^2)}\left[\frac{e^{ve^{u+\mu}}}{v}-\frac{1}{v}\right] du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-u^2/(2\sigma^2)}e^{ve^{u+\mu}}}{v}du - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-u^2/(2\sigma^2)}}{v}du\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-u^2/(2\sigma^2)}e^{ve^{u+\mu}}}{v}du - \frac{2}{v}\int_0^\infty e^{-u^2/(2\sigma^2)}du\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_0^\infty \frac{e^{ve^{u+\mu}}}{ve^{u^2/(2\sigma^2)}}du + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ve^{u+\mu}}}{ve^{u^2/(2\sigma^2)}}du - \frac{2}{v}\sqrt{2\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_0^\infty \frac{e^{ve^{u+\mu}}}{ve^{u^2/(2\sigma^2)}}du + \alpha - \frac{2}{v}\sqrt{2\pi}\right],
\end{aligned}$$

pero $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{e^{ve^{u+\mu}}}{ve^{u^2/(2\sigma^2)}} = \infty$ y $\alpha = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ve^{u+\mu}}}{ve^{u^2/(2\sigma^2)}}du < \infty$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\infty + \alpha - \frac{2}{v}\sqrt{2\pi}\right] \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que no se puede encontrar una $v > 0$ para la Lognormal que satisfaga (3.4).

2. **PARETO**

Soporte: $x > 0$

Parámetros: α, $k > 0$

f.d.: $f(x) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$, $\qquad k \leq x < \infty,\ \alpha > 1$

F.D.: $F(x) = 1 - \left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{k}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$

Ahora veamos $\widehat{f_I}(-v)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^{\infty} e^{vx}\left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha} dx \\
&= k^{\alpha}\left[\frac{e^{vx}}{v}(k+x)^{-\alpha}\right]_0^{\infty} + k^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{v}e^{vx}(k+x)^{-(\alpha+1)}\,dx \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

De igual modo que en la anterior no existe $v > 0$.

3. **BURR**

Soporte: $x > 0$

Parámetros:$\alpha,\ k,\ r > 0$

f.d.: $f(x) = \frac{\alpha r k^{\alpha}}{(k+x^{r})^{\alpha+1}} x^{r-1}$

F.D.: $F(x) = 1 - \left(\frac{k}{k+x^{r}}\right)^{\alpha}$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] = k^{\frac{1}{r}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma(\alpha)}$, $\qquad \alpha r > 1$

Ahora veamos $\widehat{f_I}(-v)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^{\infty} e^{vx}\left(\frac{k}{k+x^{r}}\right)^{\alpha} dx \\
&= k^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{vx}(k+x^{r})^{-\alpha}\,dx,
\end{aligned}$$

integrando por partes, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \left[\frac{e^{vx}}{v}\frac{1}{(k+x^{r})^{\alpha}}\right]_0^{\infty} + \frac{\alpha}{v}\int_0^{\infty}\frac{e^{vx}}{(k+x^{r})^{\alpha+1}} r x^{r-1} dx \\
&= \infty + \frac{\alpha}{v}\int_0^{\infty}\frac{e^{vx}}{(k+x^{r})^{\alpha+1}} r x^{r-1} dx \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que no se puede encontrar una $v > 0$ que cumpla con (3.4).

4. **BENKTANDER TIPO I**

Soporte: $x > 1$

Parámetros: α, $\beta > 0$

f.d.: $f(x) = \frac{1}{x}\left((1 + 2(\beta/\alpha)\ln x)(2\beta\ln x - \alpha - 1) - \frac{2\beta}{\alpha}\right) e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}$

F.D.: $F(x) = 1 - (1 + 2(\beta/\alpha)\ln x) e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha}$

Ahora veamos $\widehat{f_I}(-v)$,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_1^\infty e^{vx}(1 + 2(\beta/\alpha)\ln x) e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}dx \\ &= \int_1^\infty e^{vx}e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}dx \\ &\quad + \int_1^\infty e^{vx}(2(\beta/\alpha)\ln x) e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}dx,\end{aligned}$$

integrando por partes vemos que

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \left[\frac{e^{vx}}{v}e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}\right]_1^\infty + \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{e^{vx}}{v}\left[\frac{2\beta}{x}(\ln x) + \frac{(\alpha+1)}{x}\right] e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}dx + \\ &\quad + \int_1^\infty e^{vx}(2(\beta/\alpha)\ln x) e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}dx,\end{aligned}$$

hacemos un cambio de variable $u = \ln x$, entonces

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= -\frac{1}{v} + \int_0^\infty e^{ve^u}[2\beta u + (\alpha+1)] e^{-\beta u^2-(\alpha+1)u}du + \\ &\quad +2(\beta/\alpha)\int_0^\infty ue^{ve^u+u}e^{-\beta u^2-(\alpha+1)u}dx,\end{aligned}$$

pero $\lim\limits_{u\to\infty} e^{ve^u}[2\beta u + (\alpha+1)] e^{-\beta u^2-(\alpha+1)u} = \infty$, y $\lim\limits_{u\to\infty} ue^{ve^u+u}e^{-\beta u^2-(\alpha+1)u} = \infty$, por lo tanto

$$\int_1^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \infty.$$

Por lo que no se puede encontrar una $v > 0$.

5. **BENKTANDER TIPO II**

Soporte: $x > 0$

Parámetros: $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$

f.d.: $f(x) = \left((1-\beta) + \alpha x^{-(1-\beta)}\right) e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta}$

F.D.: $F(x) = 1 - e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta}$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha/\beta}$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^{\infty} e^{vx} e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta} dx \\
&= e^{\alpha/\beta} \int_0^{\infty} e^{vx} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta} dx,
\end{aligned}$$

hacemos un cambio de variable $u = x^{\beta}$ y tenemos que

$$\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha/\beta} \int_0^{\infty} e^{vu^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha u/\beta} du,$$

sea $\gamma = \left(\frac{1}{v} + \frac{\alpha}{\beta v}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \frac{1}{\beta} e^{\alpha/\beta} \left[\int_0^{\gamma} e^{vu^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha u/\beta} du + \int_{\gamma}^{\infty} e^{vu^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha u/\beta} du\right] \\
&\geq \frac{1}{\beta} e^{\alpha/\beta} \int_{\gamma}^{\infty} e^{vu^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha u/\beta} du \\
&\geq \frac{1}{\beta} e^{\alpha/\beta} \int_{\gamma}^{\infty} e^{u} du \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha/\beta} [\infty] \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que no se puede encontrar una $v > 0$ que satisfaga la condición de Cramér-Lundberg.

6. **WEIBULL**

Soporte: $x > 0$

Parámetros: $\alpha > 0, \quad 0 < r < 1$

f.d.: $f(x) = \alpha r x^{r-1} e^{-\alpha x^r}$

F.D.: $F(x) = 1 - e^{-\alpha x^r}$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \int_0^\infty e^{vx}e^{-\alpha x^r}dx$$

sea $\gamma = \left(\frac{c}{v-1}\right)^{\frac{1}{1-r}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^\gamma e^{vx}e^{-\alpha x^r}dx + \int_\gamma^\infty e^{vx}e^{-\alpha x^r}dx \\
&\geq \int_\gamma^\infty e^{vx}e^{-\alpha x^r}dx \\
&\geq \int_\gamma^\infty e^{x}dx \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

De igual modo que en la anterior no existe $v > 0$.

7. **LOGGAMA**

Soporte: $x > 1$

Parámetros: $\alpha, \beta > 0$

f.d.: $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1}, \qquad k \leq x < \infty, \alpha > 1$

F.D.: $F(x) = \Gamma(\alpha;\beta\ln x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\beta\ln x} y^{\alpha-1}e^{-y}dy$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{vx}\int_x^\infty \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln y)^{\beta-1}y^{-\alpha-1}dydx \\
&= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_x^\infty e^{vx}(\ln y)^{\beta-1}y^{-\alpha-1}dydx.
\end{aligned}$$

Sea $u = \ln y$, entonces

$$\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\int_{\ln x}^{\infty} e^{vx}u^{\beta-1}e^{-\alpha u}dudx$$

hacemos un cambio de orden de integración,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{e^u} e^{vx}u^{\beta-1}e^{-\alpha u}dxdu \\
&= \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{\infty} u^{\beta-1}e^{-\alpha u}\left[\frac{e^{vx}}{v}\right]_0^{e^u} du \\
&= \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{\infty} u^{\beta-1}e^{-\alpha u}\left(\frac{e^{ve^u}-1}{v}\right) du \\
&= \frac{\alpha^{\beta}}{v\Gamma(\beta)}\left(\int_0^{\infty} u^{\beta-1}e^{-\alpha u}\left(e^{ve^u}-1\right)du + \int_{-\infty}^{0} u^{\beta-1}e^{-\alpha u}\left(e^{ve^u}-1\right)du\right) \\
&= \frac{\alpha^{\beta}}{v\Gamma(\beta)}(\infty+0) = \infty.
\end{aligned}$$

Entonces no existe $v > 0$ que cumpla con (3.4).

Ahora veamos las funciones de distribución en las que sí se puede encontrar el exponente de Lundberg $v > 0$ del Teorema de Cramér-Lundberg, entonces iniciemos con:

1. **EXPONENCIAL**

   Soporte: $x > 0$

   Parámetros: $\alpha > 0$

   f.d.: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

   F.D.: $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$

   Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha}$

   Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^{\infty} e^{vx}e^{-\alpha x}dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-v)x}dx,
\end{aligned}$$

si $\alpha > v$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \left[-\frac{e^{-(\alpha-v)x}}{\alpha-v}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\alpha-v}.\end{aligned}$$

Tenemos que la condición de beneficios netos es $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$, y sabemos también que $\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}$, entonces con esto y lo que se obtuvo tenemos que

$$\frac{c}{\lambda} = \int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{1}{\alpha-v}.$$

Entonces despejando tenemos que $v = \alpha - \frac{\lambda}{c}$. Así, si $c = \frac{\lambda}{\alpha-1}$, entonces $v = 1$.

2. **GAMA**

Soporte: $x > 0$

Parámetros: α, $\beta > 0$

f.d.: $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$

F.D.: $F(x) = \Gamma(\alpha;\beta x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\beta\lambda x} y^{\alpha-1}e^{-y}dy$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\beta}$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{vx}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{\beta x}^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy\right]dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\int_{\beta x}^\infty e^{vx}y^{\alpha-1}e^{-y}dydx,\end{aligned}$$

cambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{\beta}} e^{vx}y^{\alpha-1}e^{-y}dxdy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\int_0^{\frac{y}{\beta}} e^{vx}dxdy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\frac{1}{v}\left[e^{\frac{v}{\beta}y}-1\right]dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{v\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}e^{\frac{v}{\beta}y}dy - \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy\right] \\
&= \frac{1}{v\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}e^{\frac{v}{\beta}y}dy - \Gamma(\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{v\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y\left(1-\frac{v}{\beta}\right)}dy - \frac{1}{v},
\end{aligned}
$$

haciendo un cambio de variable $x = y\left(1 - \frac{v}{\beta}\right)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \frac{1}{v\Gamma(\alpha)}\frac{1}{1-\frac{v}{\beta}}\int_0^\infty \left(\frac{x}{1-\frac{v}{\beta}}\right)^{\alpha-1} e^{-x}dx - \frac{1}{v} \\
&= \frac{1}{v\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1-\frac{v}{\beta}}\right)^{\alpha}\int_0^\infty (x)^{\alpha-1}e^{-x}dx - \frac{1}{v} \\
&= \frac{1}{v\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1-\frac{v}{\beta}}\right)^{\alpha}\Gamma(\alpha) - \frac{1}{v} \\
&= \frac{1}{v}\left[\left(\frac{\beta}{\beta-v}\right)^{\alpha} - 1\right].
\end{aligned}
$$

Tenemos la condición de beneficios netos $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$, y además tenemos que $\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}$, entonces con esto y con lo que obtuvimos llegamos a que

$$
\frac{c}{\lambda} = \int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{1}{v}\left[\left(\frac{\beta}{\beta-v}\right)^{\alpha} - 1\right].
$$

Por lo tanto, con respecto a los valores de los parámetros, podemos determinar la $v > 0$. Por ejemplo, si $\alpha = 1$, entonces $\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{v}\left[\frac{\beta}{\beta-v} - 1\right]$, por lo que la v correspondiente es $v = \beta - \frac{\lambda}{c}$.

3. **WEIBULL**

   Soporte: $x > 0$

   Parámetros: $\alpha > 0, \quad r \geq 1$

   f.d.: $f(x) = \alpha r x^{r-1}e^{-\alpha x^r}$

   F.D.: $F(x) = 1 - e^{-\alpha x^r}$

   Esperanza: $\mathbb{E}[X] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \int_0^\infty e^{vx}e^{-\alpha x^r}dx,$$

usando la expansión de Taylor de e^{vx}, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(vx)^k}{k!}e^{-\alpha x^r}dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{v^k}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-\alpha x^r}dx
\end{aligned}$$

hacemos un cambio de variable $t = \alpha x^r$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \sum_{k=0}^\infty \frac{v^k}{k!}\int_0^\infty \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{k}{r}} e^{-t}\frac{1}{r}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{r}-1}dt \\
&= \frac{1}{r}\sum_{k=0}^\infty \frac{v^k}{k!}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{k+1}{r}-1}\int_0^\infty t^{\frac{k+1}{r}-1}e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{r}\sum_{k=0}^\infty \frac{v^k}{k!}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{k+1}{r}-1}\Gamma\left(\frac{k+1}{r}\right).
\end{aligned}$$

Entonces de acuerdo con los valores de los parámetros que tengamos, podemos determinar la $v > 0$. Supongamos, por ejemplo, que $r = 1$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx &= \sum_{k=0}^\infty \frac{v^k}{k!}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k\Gamma(k+1) \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{v}{\alpha}\right)^k.
\end{aligned}$$

Pedimos que $v < \alpha$ y obtenemos que

$$\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha - v}.$$

Pero sabemos que $\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}$, entonces $\frac{c}{\lambda} = \frac{\alpha}{\alpha - v}$. Por lo tanto, $v = \alpha - \frac{\alpha\lambda}{c} = \frac{\alpha(c-\lambda)}{c}$.

4. NORMAL TRUNCADA

Soporte: $x > 0$

Parámetros: –

f.d.: $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}$

F.D.: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Esperanza: $\mathbb{E}[X] =$

Ahora veamos $\widehat{f}_I(-v)$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx} \overline{F}(x)\, dx &= \int_0^\infty e^{vx} \left[\int_x^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] dx \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{vx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dx,
\end{aligned}
$$

haciendo un cambio de orden de integración,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx} \overline{F}(x)\, dx &= \int_0^\infty \int_0^y e^{vx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_0^y e^{vxdx} dy \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{v} \left[e^{vy} - 1 \right] dy \\
&= \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{vy} dy - \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \\
&= \frac{1}{v} \left[\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{v^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2} + vy - \frac{v^2}{2}} dy - 2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \\
&= \frac{1}{v} \left[e^{\frac{v^2}{2}} 2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-v)^2} dy - 2\left(1 - \Phi(0)\right) \right],
\end{aligned}
$$

hacemos un cambio de variable $x = y - v$, entonces llegamos a que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{vx} \overline{F}(x)\, dx &= \frac{1}{v} \left[e^{\frac{v^2}{2}} 2 \int_{-v}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - 2\frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{v} \left[e^{\frac{v^2}{2}} 2\left(1 - \Phi(v)\right) - 1 \right].
\end{aligned}
$$

Tenemos que la condición de beneficios netos es $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$, y también tenemos que

$\int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}$, entonces con esto y lo que se obtuvo llegamos a que

$$\frac{c}{\lambda} = \int_0^\infty e^{vx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{1}{v}\left[e^{\frac{v^2}{2}}2\left(1-\Phi(v)\right)-1\right].$$

Por lo que el valor de v no podemos obtenerlo tan fácilmente. Y con este es muy notorio que vamos a tener problemas para encontrar el valor exacto de v. Para esto necesitamos técnicas numéricas, pero esto no entra en los objetivos de nuestro trabajo. Por lo tanto, el valor de $v > 0$ es aquel que cumpla con $\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{v}\left[e^{\frac{v^2}{2}}2\left(1-\Phi(v)\right)-1\right]$.

Así, concluimos con la búqueda del exponente de Cramér-Lundberg v de las distribuciones de cada una de las tablas dadas.

3.3 Conclusiones

Hemos demostrado el Teorema de Cramér-Lundberg, el cual nos permite dar una cota para la probabilidad de ruina y si además $\int_0^\infty xe^{vx}\overline{F}(x)\,dx < \infty$, entonces tenemos explícitamente la probabilidad de ruina. Pero todo esto se puede hacer siempre y cuando exista el exponente de Lundberg.

En las tablas 3.1 y 3.2 damos ciertas distribuciones y buscamos su exponente de Lundberg. Vimos que este exponente sólo existe para las distribuciones de la tabla 3.2. Como $\widehat{f_I}(-v) = \rho+1$, y $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$, no se puede cumplir con la condición (3.4) en las funciones de reclamaciones grandes, aunque tengamos la posibilidad de elegir una tasa de ingreso de primas c adecuada, no siempre es la mejor c en la práctica, aunque sea la adecuada matemáticamente, porque vamos a encontrar que esta tasa de primas ya está dada y posiblemente no sea conveniente en la práctica cambiar un valor de c por otro. Las funciones de la tabla 3.1 se utilizan cada vez más para modelar datos de reclamaciones, por lo que es necesario otro tipo de teoría para ellas. Mientras que las funciones de la tabla 3.2 si cumplen con el Teorema de Cramér-Lundberg, nos hemos percatado de que no es sencillo, aún así, encontrar el valor exacto de v y es necesario utilizar herramientas y técnicas numéricas para tener una aproximación de este valor.

Capítulo 4

La Ruina para distribuciones de colas pesadas

En este capítulo todas las variables aleatorias son no negativas. Como se vio en la tabla 3.1, hay funciones que no cumplen la condición de Cramér-Lundberg (3.4). ¿Qué se puede hacer con estas funciones? Para una clase de estas funciones se prueba un teorema de aproximación. Esto se logra usando la ecuación de Pollaczeck-Khinchine (3.14) y los lemas que se demuestran en este capítulo. También utilizamos algunos resultados de la Teoría de Variación Regular.

4.1 Algunos resultados preliminares

En esta sección definimos lo que es una *función que varía lentamente* y una *función que varía regularmente con índice* α, $\alpha > 0$. Vemos algunos resultados relacionados con estas últimas funciones. Con estos resultados obtenemos una aproximación de la probabilidad de ruina $\psi(u)$.

Definición 36 *Sea L una función medible positiva en $(0,\infty)$. Decimos que $L \in \mathcal{R}_0$, es decir, L **varía lentamente** si para toda $t > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

Definición 37 *Una función Lebesgue medible positiva h en $(0,\infty)$ es de* ***variación regular de índice*** $\alpha \in \mathbb{R}$, *si para toda $t > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^{\alpha}.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denota por $\mathcal{R}_\alpha$ la *clase de funciones que varían regularmente con índice α.* El caso $\alpha = 0$ corresponde a las *funciones de variación lenta.*

Ejemplos comunes de funciones de variación lenta son las constantes positivas y las funciones que convergen a una constante positiva, cuando x tiende a infinito, entre otras. Por otro lado, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$, las funciones x^α, $x^\alpha \ln(1+x)$, $(x\ln(1+x))^\alpha$, $x^\alpha \ln(\ln(1+x))$ son funciones de variación regular con índice α. Y ejemplos de funciones que no son de variación regular son $2 + senx$, $e^{[\ln(1+x)]}$.

Probaremos una propiedad de cerradura de la convolución para funciones de distribución con colas de variación regular. Primero notemos que si $g \in \mathcal{R}_0$, entonces $x^\alpha g(x) \in \mathcal{R}_\alpha$, pues si $h(x) = x^\alpha g(x)$, para $x \in (0,\infty)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(cx)^{-\alpha} g(cx)}{x^{-\alpha} g(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{c^{-\alpha} g(cx)}{g(x)} \\
&= c^{-\alpha} \lim_{x\to\infty} \frac{g(cx)}{g(x)} \\
&= c^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Ahora demostremos que si $g_i(x) \in \mathcal{R}_\alpha$, $i = 1,2$, entonces $g_1(x) + g_2(x) \in \mathcal{R}_\alpha$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{g_1(cx) + g_2(cx)}{g_1(x) + g_2(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{g_1(x)g_2(x)}}{\frac{1}{g_1(x)g_2(x)}} \frac{g_1(cx) + g_2(cx)}{g_1(x) + g_2(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{g_1(cx)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(cx)}{g_1(x)g_2(x)}}{\frac{g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{g_1(cx)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(cx)}{g_1(x)g_2(x)}}{\frac{1}{g_2(x)} + \frac{1}{g_1(x)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{c^{-\alpha}}{g_2(x)} + \frac{c^{-\alpha}}{g_1(x)}}{\frac{1}{g_2(x)} + \frac{1}{g_1(x)}} \\
&= c^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Lema 38 *Si F_1, F_2 son dos funciones de distribución tales que $\overline{F_i}(x) = x^{-\alpha} L_i(x)$ para alguna $\alpha > 0$ y $L_i \in \mathcal{R}_0$, $i = 1, 2$, entonces para*

$$G = F_1 * F_2,$$

se tiene que

$$\overline{G}(x) \sim x^{-\alpha} \left(L_1(x) + L_2(x) \right).$$

Demostración Sean X_1, X_2 variables aleatorias con función de distribución F_1 y F_2 respectivamente, tales que $\overline{F_i}(x) = x^{-\alpha} L_i(x)$ para alguna $\alpha > 0$ y $L_i \in \mathcal{R}_0$, $i = 1, 2$. Primero recordemos que $\overline{F_i} \in \mathcal{R}_\alpha, i = 1, 2$. Por lo que,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F_i}(cx)}{\overline{F_i}(x)} = \frac{1}{c^\alpha}. \tag{4.1}$$

Como se cumplen las siguientes contenciones, pues X_1, $X_2 \in (0, \infty)$,

$$
\begin{aligned}
\{X_1 \leq x - X_2\} &\subset \{X_1 \leq x\}, \\
\{X_2 \leq x - X_1\} &\subset \{X_2 \leq x\},
\end{aligned}
$$

intersectemos estos conjuntos y tenemos que

$$\{X_1 + X_2 \leq x\} \subset \{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\},$$

y entonces

$$\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}.$$

Usando esto último, obtenemos que

$$\overline{G}(x) \geq \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) - \overline{F_1}(x)\overline{F_2}(x) \tag{4.2}$$

$$= \left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right](1-o(1)).$$

Si $0<\delta<\frac{1}{2}$, se cumple que

$$\{X_1+X_2>x\}\subset\{X_1>(1-\delta)x\}\cup\{X_2>(1-\delta)x\}\cup\{X_1>\delta x, X_2>\delta x\}.$$

Usemos complementos y desarrollemos el lado derecho de la contención

$$\begin{aligned}
&\{X_1\le(1-\delta)x\}\cap\{X_2\le(1-\delta)x\}\cap\{\{X_1\le\delta x\}\cup\{X_2\le\delta x\}\}\\
=\ &((\{X_1\le(1-\delta)x\}\cap\{X_1\le\delta x\})\cup(\{X_1\le(1-\delta)x\}\cap\{X_2\le\delta x\}))\\
&\cap((\{X_2\le(1-\delta)x\}\cap\{X_1\le\delta x\})\cup(\{X_2\le(1-\delta)x\}\cap\{X_2\le\delta x\}))\\
\subset\ &\{X_1+X_2\le x\},
\end{aligned}$$

otra vez obtenemos los complementos y llegamos a que

$$\begin{aligned}
\overline{G}(x) &\le \overline{F_1}((1-\delta)x)+\overline{F_2}((1-\delta)x)+\overline{F_1}(\delta x)\overline{F_2}(\delta x)\\
&= \left[\overline{F_1}((1-\delta)x)+\overline{F_2}((1-\delta)x)\right](1+O(1)).
\end{aligned}$$

Entonces esto último y lo que obtuvimos en (4.2) nos dan

$$\left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right](1-o(1))\le\overline{G}(x)\le\left[\overline{F_1}((1-\delta)x)+\overline{F_2}((1-\delta)x)\right](1+O(1)).$$

Despejando, tenemos que

$$(1-o(1))\le\frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right]}\le\frac{\left[\overline{F_1}((1-\delta)x)+\overline{F_2}((1-\delta)x)\right]}{\left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right]}(1+O(1)),$$

saquemos el límite cuando x tiende a infinito, entonces

$$\begin{aligned}
1 &\le \liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right]}\le 0\\
&\le \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right]}\le\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\overline{F_1}((1-\delta)x)+\overline{F_2}((1-\delta)x)\right]}{\left[\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right]}.
\end{aligned}$$

recordemos que si $\overline{F_i}(x) \in \mathcal{R}_\alpha$, $i = 1, 2$, entonces $\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \in \mathcal{R}_\alpha$,

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)\right]} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)\right]} \leq (1-\delta)^{-\alpha},$$

pero a δ la podemos hacer tender a cero, con lo cual llegamos a que

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)\right]} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\left[\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)\right]} \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \overline{G}(x) &= \lim_{x\to\infty} \left[\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \left(L_1(x) + L_2(x)\right). \end{aligned}$$

■

Corolario 39 *Si* $\overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ *con* $\alpha \geq 0$ *y* $L \in \mathcal{R}_0$, *entonces para toda* $n \geq 1$,

$$\overline{F^{n*}}(x) \sim n\overline{F}(x). \tag{4.3}$$

Observación Este corolario es muy útil, ya que la cola de la n-ésima convolución de F es equivalente a sumar n veces la cola de la función F.

Demostración Supongamos que $X_1, ..., X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F. Sea la suma parcial de $X_1, ..., X_n$ denotada por

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

y su máximo por

$$M_n = \max\{X_1, ..., X_n\},$$

entonces para toda $n \geq 2$ sabemos que

$$\mathbb{P}(S_n > x) = \overline{F^{n*}}(x),$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n > x) &= \overline{F^n}(x) = 1 - F^n(x) \\ &= 1 + F^1(x) - F^1(x) + ... + F^{n-1}(x) - F^{n-1}(x) - F^n(x) \\ &= [1 + F(x) + ... + F^n(x)] - F(x)\left[1 + F(x) + ... + F^{n-1}(x)\right] \\ &= \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x),\end{aligned}$$

y también tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n > x) &= 1 - \mathbb{P}(M_n < x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, ..., X_n < x) \\ &= 1 - F^{n*}(x) = \overline{F^{n*}}(x) \\ &= \mathbb{P}(S_n > x).\end{aligned}$$

Entonces

$$\overline{F^{n*}}(x) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x).$$

Sabemos que $\lim_{x\to\infty} F^k(x) = 1$. Por lo tanto,

$$\overline{F^{n*}}(x) \sim n\overline{F}(x).$$

■

Este corolario implica que para funciones de distribución con colas de variación regular, la cola de la función de distribución de la suma S_n está determinada por la cola de la función de distribución del máximo M_n.

Ejemplo 40 *Supongamos que F es la distribución Burr, entonces $\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{x^r}\right)^\alpha$, $x^r \geq k$. Por lo que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(cx)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{k}{(cx)^r}\right)^\alpha}{\left(\frac{k}{x^r}\right)^\alpha} = \frac{1}{c^{r\alpha}}.$$

Por lo tanto, $\overline{F} \in \mathcal{R}_{r\alpha}$. ■

Ejemplo 41 *Sea F la distribución Pareto. Veamos si $\overline{F}(x) \in \mathcal{R}_\alpha$. Como $\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$, para $x \geq k$. Podemos reescribirla como $\overline{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$, con $L(x) = k$ y $L \in \mathcal{R}_0$. Entonces por el Corolario 39 tenemos que para toda $n \geq 1$, $\overline{F^{n*}}(x) \sim n\overline{F}(x)$. Por lo tanto*

$$\overline{F^{n*}}(x) \sim n\left(\frac{k}{x}\right)^\alpha,$$

para $x \geq k$. Por lo que $\overline{F} \in \mathcal{R}_\alpha$. ■

Por otro lado, veamos que la ecuación de Pollaczeck-Khinchine ya mencionada en (3.14) se sigue cumpliendo bajo la suposición de variación regular

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\overline{F_I^{n*}}(u), \quad u \geq 0, \tag{4.4}$$

donde $F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy$ y bajo la condición $\overline{F_I} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ para alguna $\alpha > 0$, entonces

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \lim_{u\to\infty}\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I}(u)},$$

usemos el Teorema de Convergencia Monótona y llegamos a que

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I}(u)},$$

por el Corolario 39, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}n \\
&= \frac{\rho}{1+\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}n(1+\rho)^{-n} - \frac{1+\rho}{\rho} + \frac{1+\rho}{\rho}\right) \\
&= \frac{\rho}{1+\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}n(1+\rho)^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+\rho}{\rho}\right) \\
&= \frac{-\rho}{1+\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-(n-1)(1+\rho)^{-n}\right) - \frac{1+\rho}{\rho}\right) \\
&= \frac{-\rho}{1+\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial(1+\rho)^{-(n-1)}}{\partial\rho} - \frac{1+\rho}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\rho}{1+\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-(n-1)} - \frac{1+\rho}{\rho}\right) \\
&= \frac{-\rho}{1+\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{(1+\rho)^2}{\rho} - \frac{1+\rho}{\rho}\right) \\
&= \frac{-\rho}{1+\rho}\left(\frac{2(1+\rho)}{\rho} - \frac{(1+\rho)^2}{\rho^2} - \frac{1+\rho}{\rho}\right) \\
&= 2 - \frac{(1+\rho)}{\rho} - 1 \\
&= \frac{1}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.5}
$$

Por lo que para funciones de reclamación con colas de variación regular, la probabilidad de ruina $\psi(u)$ con capital inicial u está determinada por la cola $\overline{F}(y)$ de la distribución de reclamación para valores grandes de y, es decir

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &\sim \frac{1}{\rho}\overline{F_I}(u), \\
&\sim \frac{1}{\rho\mu}\int_u^{\infty}\overline{F}(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

4.2 Teoría de Cramér-Lundberg para distribuciones subexponenciales

En lo anterior, el paso crucial para obtener (4.5) fue la propiedad $\overline{F_I^{n*}}(x) \sim n\overline{F_I}(x)$, cuando x tiende a infinito y $n \geq 2$. Esto nos lleva a una clase de funciones de distribución para una teoría muy general de estimación de ruina para reclamaciones grandes. El principal resultado de esta sección es el Teorema de Cramér-Lundberg para reclamaciones grandes.

Definición 42 *Una función de distribución F con soporte en $(0,\infty)$ es **subexponencial**, si para toda $n \geq 2$,*

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n \tag{4.6}
$$

La clase de funciones de distribución subexponencial será denotada por $\mathcal{S}$.

Observación Si vemos (4.3), para toda $n \geq 2$, y junto con la relación (4.6) da la siguiente caracterización intuitiva de subexponencialidad:

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(M_n > x). \tag{4.7}$$

Para verificar subexponencialidad no es necesario mostrar que se cumpla (4.6) para toda $n \geq 2$. El siguiente resultado muestra esto último. Para la demostración de este lema usamos el Lema 44, que demostramos más adelante.

Lema 43 ***(Una condición suficiente para subexponencialidad)*** *Si*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2,$$

entonces $F \in \mathcal{S}$.

Demostración Tenemos que $\overline{F^{n*}}(x) = \overline{F^{n}}(x)$, cuando x tiende a infinito. Supongamos que $n = 2$ y tenemos que $F^{2*}(x) \leq F^2(x)$, para toda $x \geq 0$, entonces $\overline{F^2}(x) \leq \overline{F^{2*}}(x)$, para toda $x \geq 0$, así obtenemos que

$$\liminf_{x\to\infty} \overline{F^2}(x) \leq \liminf_{x\to\infty} \overline{F^{2*}}(x),$$

en (4.3) tenemos que $\overline{F^{n*}}(x) \sim n\overline{F}(x)$, cuando x tiende a infinito, entonces

$$\liminf_{x\to\infty} 2\overline{F}(x) = \liminf_{x\to\infty} \overline{F^2}(x) \leq \liminf_{x\to\infty} \overline{F^{2*}}(x),$$

despejando tenemos que

$$2 = \liminf_{x\to\infty} 2 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)}. \tag{4.8}$$

Junto con la hipótesis, si $n = 2$, entonces $F \in \mathcal{S}$. Usemos el principio de inducción y veamos esto mismo para $(n+1)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{F(x) - F^{(n+1)*}(x)}{\overline{F}(x)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{\int_0^x dF(t)-\int_0^x F^{n*}(x-t)\,dF(t)}{\overline{F}(x)}\\
&= 1+\frac{\int_0^x \overline{F^{n*}}(x-t)\,dF(t)}{\overline{F}(x)}.
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos que

$$
\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)}=1+\frac{\int_0^x \overline{F^{n*}}(x-t)\,dF(t)}{\overline{F}(x)}. \tag{4.9}
$$

Para $y\geq 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1+\frac{1}{\overline{F}(x)}\left[\int_0^{x-y}\overline{F^{n*}}(x-t)\,dF(t)+\int_{x-y}^{x}\overline{F^{n*}}(x-t)\,dF(t)\right]\\
&= 1+\int_0^{x-y}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&\quad+\int_{x-y}^{x}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= 1+I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

Veamos a I_1,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{x-y}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= \int_0^{x-y}\left(\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}-n+n\right)\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= \int_0^{x-y}\left(\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}-n\right)\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)+\int_0^{x-y}n\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= \int_0^{x-y}(-o(1))\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)+\int_0^{x-y}n\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= (n-o(1))\int_0^{x-y}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t).
\end{aligned}
$$

Ahora vamos con I_2, y del mismo modo que en I_1 obtenemos que

$$
I_2=(n-o(1))\int_{x-y}^{x}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t).
$$

Por otro lado, veamos la siguiente integral tomando a $\int_{x-y}^{x}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)=J(x,y)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{x-y}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) &= \int_{0}^{x}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)-\int_{x-y}^{x}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= \int_{0}^{x}\frac{1-F(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)-J(x,y)\\
&= \frac{1}{\overline{F}(x)}\left[\int_{0}^{x}dF(t)-\int_{0}^{x}F(x-t)\,dF(t)\right]-J(x,y)\\
&= \frac{F(x)-F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)}-J(x,y)\\
&= \frac{\overline{F^{2*}}(x)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}-J(x,y)\\
&= \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)}-1-J(x,y).
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que pasa con $J(x,y)$,

$$
\begin{aligned}
J(x,y) &= \int_{x-y}^{x}\frac{1-F(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\\
&= \frac{1}{\overline{F}(x)}\left[\int_{x-y}^{x}dF(t)-\int_{x-y}^{x}F(x-t)\,dF(t)\right]\\
&= \frac{1}{\overline{F}(x)}\left[F(x)-F(x-y)+\frac{F^{2}(0)}{2}-\frac{F^{2}(y)}{2}\right]\\
&\le \frac{F(x)-F(x-y)}{\overline{F}(x)}=\frac{\overline{F}(x-y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}\\
&= \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}-1.
\end{aligned}
$$

Usemos el Lema 44 (a), que dice que si $F\in\mathcal{S}$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1$, llegamos a que

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}-1\right)=1-1=0,
$$

así tenemos que $0\le J(x,y)\le\left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}-1\right)=0$, cuando x tiende a infinito, entonces $J(x,y)=0$, cuando x tiende a infinito. Regresemos con la integral $\int_{0}^{x-y}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)$ y retomando lo que habíamos obtenido, hacemos que x tienda a infinito, entonces

$$\int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) = \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - J(x,y),$$

usando nuestra hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) &= (2 - o(1)) - 1 - 0 \\ &= 1 - o(1). \end{aligned}$$

Volvamos con las integrales I_1 y I_2, entonces cuando x tiende a infinito,

$$\begin{aligned} I_1 &= (n - o(1)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &= (n - o(1))(1 - o(1)) \\ &= n + o(1), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I_2 &= (n - o(1)) \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &\leq (n - o(1)) J(x,y) = 0, \end{aligned}$$

cuando x tiende a infinito. Pero $I_2 \geq 0$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty} I_2 = 0$. Finalmente, cuando x tiende a infinito,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + I_1 + I_2 \\ &= 1 + n + o(1) \\ &= 1 + n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n+1$, es decir, $F \in \mathcal{S}$. ■

Observación La condición en este Lema 43 es necesaria para que $F \in \mathcal{S}$.

En el inicio de la prueba anterior usamos que para la función de distribución F de una variable aleatoria positiva, siempre tenemos que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2.$$

Podemos mostrar en este caso que, para toda $n \geq 2$,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2,$$

suponiendo que $S_n \geq M_n$, así

$$\overline{F^{n*}}(x) = \mathbb{P}(S_n > x) \geq \mathbb{P}(M_n > x) = \overline{F^n}(x).$$

Por lo tanto,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^n}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

El siguiente lema es crucial si queremos obtener (4.5) a partir de (4.4) para F_I subexponencial.

Lema 44 *Estas son algunas propiedades de las distribuciones subexponenciales:*

(a) *Si $F \in S$, entonces para $y \in (0, \infty)$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1. \tag{4.10}$$

(b) *Si (4.10) se cumple, entonces para toda $\varepsilon > 0$,*

$$e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \longrightarrow \infty,$$

cuando x tiende a infinito.

(c) *Si $F \in S$, entonces dada $\varepsilon > 0$, existe una constante K tal que para toda $n \geq 2$,*

$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n, \quad x \geq 0. \tag{4.11}$$

Demostración La demostración la hacemos en el orden de las propiedades.

(a) Para $x \geq y > 0$ y usando (4.9), cuando $n = 1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \frac{\int_0^x \overline{F}(x-t)\,dF(t)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{\int_0^y \overline{F}(x-t)\,dF(t) + \int_y^x \overline{F}(x-t)\,dF(t)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{1}{\overline{F}(x)}\left\{\left[F(t) + \frac{F^2(x-t)}{2}\right]_0^y + \left[F(t) + \frac{F^2(x-t)}{2}\right]_y^x\right\} \\
&= 1 + \frac{1}{\overline{F}(x)}\left\{F(y) + \frac{F^2(x-y)}{2} - \frac{F^2(x)}{2} + F(x) - F(y) + \frac{F^2(x-t)}{2}\right\} \\
&= 1 + \frac{1}{\overline{F}(x)}\left\{F(y) + F(x) - F(y) - \frac{F^2(x)}{2}\right\},
\end{aligned}
$$

como $F(x) \geq F(y)$, entonces elijamos una "y" lo suficientemente grande o cerca de x de manera que $F(y) \geq \frac{F(x)}{2}$, por lo que $F(x)F(y) > \frac{F^2(x)}{2}$ (pues $F(x) - F(y) \neq 0$). Por otro lado, $F(y) - F(x) \leq 0$, entonces $(F(y) - F(x))F(x-y) < 0$. Con esto continuemos con los cálculos y tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \frac{1}{\overline{F}(x)}\left\{F(y) + F(x) - F(y) - \frac{F^2(x)}{2}\right\} \\
&\geq 1 + \frac{\{F(y) + F(x) - F(y) - F(x)F(y) + (F(y) - F(x))F(x-y)\}}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{\{F(y)(1 - F(x)) + F(x) - F(y) - (F(x) - F(y))F(x-y)\}}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + F(y) + \frac{1}{\overline{F}(x)}\{(F(x) - F(y))(1 - F(x-y))\} \\
&= 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)),
\end{aligned}
$$

entonces $\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y))$ y despejando llegamos a que

$$
\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right)(F(x) - F(y))^{-1}.
$$

Sabemos que $F(x) \geq F(x-y)$, entonces $\overline{F}(x) \leq \overline{F}(x-y)$, así tenemos que

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right)(F(x) - F(y))^{-1},$$

y tomando el límite cuando x tiende a infinito, vemos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \\ &\leq \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right)(F(x) - F(y))^{-1}, \end{aligned}$$

como $F \in \mathcal{S}$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq (2 - 1 - F(y))(1 - F(y))^{-1} = 1.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1.$

(b) Tomemos $0 < \delta < \varepsilon$, y del inciso (a) tenemos que: $\frac{\overline{F}(n-1)}{\overline{F}(n)} \leq e^{\delta}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $e^{-\delta}\overline{F}(n-1) \leq \overline{F}(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y observemos que

$$\begin{aligned} \overline{F}(n) &\geq e^{-\delta}\overline{F}(n-1) \geq e^{-\delta}\left(e^{-\delta}\overline{F}(n-2)\right) = e^{-2\delta}\overline{F}(n-2) \qquad (4.12) \\ &\geq \cdots \\ &\geq e^{-(n-1)\delta}\overline{F}(1) \geq e^{-(n-1)\delta}\left(e^{-\delta}\overline{F}(0)\right) = e^{-n\delta}\overline{F}(0), \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\overline{F}(n) \geq e^{-n\delta}\overline{F}(0)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Así llegamos a que $\overline{F}(0) \leq e^{n\delta}\overline{F}(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $1 \leq e^{n\delta}\overline{F}(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces por (4.12) tenemos que $e^{n\delta}\overline{F}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, es una función creciente. Por lo que $e^{n\varepsilon}\overline{F}(n)$ tiende a infinito, cuando n tiende a infinito. Ahora, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria tal que x_n tiende a infinito, cuando n tiende a infinito. Entonces

$$\begin{aligned} e^{x_n\delta}\overline{F}(x_n) &= \frac{\overline{F}(x_n)}{\overline{F}([x_n])}\overline{F}([x_n])\, e^{[x_n]\delta} e^{(x_n-[x_n])\delta} \\ &\geq \frac{\overline{F}(x_n)}{\overline{F}(x_n-1)}\overline{F}([x_n]), \end{aligned}$$

donde $\frac{\overline{F}(x_n)}{\overline{F}(x_n-1)}\overline{F}([x_n])$ tiende a infinito, cuando n tiende a infinito. Por lo tanto $e^{x\varepsilon}\overline{F}(x)$ tiende a infinito, si x tiende a infinito.

(c) Sea $\alpha_n = \sup\limits_{x\geq 0}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)}$, y elijamos $T\geq 0$, tal que $\sup\limits_{x\geq T}\frac{F(x)-F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)}\leq 1+\frac{\varepsilon}{2}$. Si usamos (4.9) entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \sup_{x\geq 0}\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} = \sup_{x\geq 0}\left(1+\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\right) \\
&\leq 1+\sup_{0\leq x<T}\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)+\sup_{x\geq T}\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \\
&= 1+I_1+I_2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

primero veamos la primera integral I_1,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sup_{0\leq x<T}\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \\
&= \sup_{0\leq x<T}\frac{1}{\overline{F}(x)}\left[\int_0^x dF(t)-\int_0^x F^{n*}(x-t)\,dF(t)\right] \\
&= \sup_{0\leq x<T}\frac{1}{\overline{F}(x)}\left[F(x)-F^{(n+1)*}(x)\right] \\
&= \frac{F(T)-F^{(n+1)*}(T)}{\overline{F}(T)} \\
&\leq \frac{1}{\overline{F}(T)},
\end{aligned}$$

entonces $\sup\limits_{0\leq x<T}\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\leq\frac{1}{\overline{F}(T)}$. Ahora, veamos la segunda integral I_2,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sup_{x\geq T}\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \\
&= \sup_{x\geq T}\int_0^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \\
&\leq \sup_{x\geq T}\int_0^x\sup_{x\geq 0}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \\
&= \sup_{x\geq 0}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)}\sup_{x\geq T}\int_0^x\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t) \\
&= \alpha_n\sup_{x\geq T}\int_0^x\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)
\end{aligned}$$

$$= \alpha_n \sup_{x\geq T} \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)}.$$

Entonces $\sup_{x\geq T} \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \leq \alpha_n \sup_{x\geq T} \frac{F(x)-F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)}$. Sea $A(T) = \frac{1}{\overline{F}(T)}$ y retomando los cálculos en (4.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &\leq 1+ \sup_{0\leq x<T} \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) + \sup_{x\geq T} \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\
&\leq 1 + A(T) + \alpha_n \sup_{x\geq T} \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&\leq 1 + A(T) + \alpha_n \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq 1 + A(T) + ... + (1 + A(T)) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \\
&\leq \frac{(1 + A(T))(1+\varepsilon)^{n+1}}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

entonces $\alpha_n \leq \frac{(1+A(T))(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon}$. Por lo tanto al sustituir α_n obtenemos

$$\sup_{x\geq 0} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{(1 + A(T))(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon},$$

donde $K = \frac{(1+A(T))}{\varepsilon}$. ■

Observación El Lema 44 (b) justifica el nombre de "subexponencial" para $F \in \mathcal{S}$; pues $\overline{F}(x)$ decrece más lentamente que cualquier exponencial $e^{-\varepsilon x}$, $\varepsilon > 0$. Sin embargo, para $\varepsilon > 0$,

$$\int_y^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) \geq e^{\varepsilon y} \overline{F}(y), \quad y \geq 0.$$

Esto se sigue a partir del Lema 45 (b) pues para que F sea subexponencial es necesario que

$$\widehat{f}(-\varepsilon) = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

La siguiente proposición nos da un ejemplo importante de distribuciones subexponenciales:

Teorema 45 *Cualquier función de distribución F con cola variando regularmente, es decir, $\overline{F} \in \mathcal{R}_\alpha$, es subexponencial.*

Demostración Supongamos que $\overline{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$, con L variando lentamente con $\alpha > 0$ y también que X_i, $i = 1, 2$, son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F. Sea $0 < \delta < \frac{1}{2}$, si $X_1 + X_2 > x$, entonces, una de las X_i excede $(1-\delta)x$, o bien ambas exceden δx. Usemos la desigualdad en (4.2), entonces

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} &\leq \limsup_{x\to\infty} \frac{2\overline{F}((1-\delta)x) + \left(\overline{F}(\delta x)\right)^2}{\overline{F}(x)} \\
&= \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{2\overline{F}((1-\delta)x)}{\overline{F}(x)} + \frac{\left(\overline{F}(\delta x)\right)^2}{\overline{F}(x)} \right) \\
&= \limsup_{x\to\infty} \frac{\frac{2L((1-\delta)x)}{((1-\delta)x)^\alpha}}{\frac{L(x)}{x^\alpha}} + 0 \\
&= \frac{2}{(1-\delta)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Ahora hacemos δ tender a cero, entonces obtenemos que $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2$. Junto con (4.8), que dice que $\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2.$$

■

Ejemplo 46 *En los ejemplos 40 y 41 obtuvimos que las colas de las distribuciones Burr y Pareto estan variando regularmente. Entonces por el Teorema 45 tenemos que las funciones de distribución Burr y Pareto son de la familia subexponencial.*

Para el siguiente resultado tomemos en cuenta la siguiente *función tasa hazard* $\lambda(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$, donde F es una función de distribución y f su correspondiente densidad.

Teorema 47 *Sea F una función de distribución que tiene densidad f y $\lambda(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ la tasa hazard tal que $\lambda(x)$ es decreciente para $x \geq x_0$ con límite a cero, cuando x tiende a infinito. Entonces $F \in S$ siempre que*

$$\int_0^\infty e^{x\lambda(x)} f(x)\, dx < \infty.$$

Demostración Supongamos que $\lambda(x)$ es decreciente. Sea $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(y)\,dy$, entonces $\overline{F}(x) = e^{-\Lambda(x)}$. Por (4.9) que dice: $\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{\int_0^x \overline{F^{n*}}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)}$, para $n=1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 &= \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} f(y)\,dy \\
&= \int_0^x e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)} \lambda(y)\,\overline{F}(y)\,dy,
\end{aligned}$$

usemos el hecho de que $\overline{F}(x) = e^{-\Lambda(x)}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 &= \int_0^x e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)} \lambda(y)\,dy \\
&= \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)} \lambda(y)\,dy + \int_{\frac{x}{2}}^x e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)} \lambda(y)\,dy,
\end{aligned}$$

hacemos un cambio de variable $u = x - y$ en la segunda integral,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 &= \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)} \lambda(y)\,dy + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-\Lambda(u)+\Lambda(x)-\Lambda(x-u)} \lambda(x-u)\,du \\
&= \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)} \left(\lambda(y) + \lambda(x-y)\right) dy.
\end{aligned}$$

Para $0 < y < \frac{x}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Lambda(x) - \Lambda(x-y) &= \int_0^x \lambda(u)\,du - \int_0^{x-y} \lambda(u)\,du \\
&= \int_{x-y}^x \lambda(u)\,du \\
&\leq \lambda(x-y) \int_{x-y}^x du = y\lambda(x-y).
\end{aligned}$$

Esta desigualdad se debe a que $\lambda(x)$ es decreciente, entonces por esto mismo llegamos a que

$$\Lambda(x) - \Lambda(x-y) \leq y\lambda(x-y) \leq y\lambda(y), \tag{4.14}$$

$0 < y < \frac{x}{2}$. Ahora, con esto vemos que

$$e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)} \lambda(y) \leq e^{y\lambda(y)-\Lambda(y)} \lambda(y)$$

retomando que $\overline{F}(x) = e^{-\Lambda(x)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)}\lambda(y) &= e^{y\lambda(y)}\overline{F}(y)\lambda(y) \\ &= e^{y\lambda(y)}f(y), \end{aligned}$$

pero esta función es integrable por suposición. Pero también tenemos de (4.14) que

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)}\lambda(y) &\leq e^{y\lambda(x-y)-\Lambda(y)}\lambda(y) \\ &= e^{y\lambda(x-y)}f(y), \end{aligned}$$

si hacemos que x tienda a infinito, entonces $e^{y\lambda(x-y)}f(y) \sim f(y)$, pues $\lambda(x)$ es decreciente. Por el Teorema de Convergencia Dominada tenemos que $\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)}\lambda(y)\,dy$ tiene límite 1. Como $\lambda(x-y) \leq \lambda(y)$, para $0 < y < \frac{x}{2}$, entonces para la otra integral, $\int_{\frac{x}{2}}^{x} e^{-\Lambda(x-y)+\Lambda(x)-\Lambda(y)}\lambda(y)\,dy$, su integrando esta dominado por la misma función integrable, solo que en este caso este tiene límite cero. Por lo tanto $F \in S$. ■

Ejemplo 48 *Sea* $\overline{F}(x) = e^{-\alpha x^r}$, $0 < r < 1$ *y* $\alpha > 0$, *es decir,* F *es la distribución Weibull. Entonces su correspondiente tasa hazard es*

$$\lambda(x) = \frac{r\alpha x^{r-1}e^{-\alpha x^r}}{e^{-\alpha x^r}} = r\alpha x^{r-1}.$$

Veamos si se cumple que $\int_0^\infty e^{x\lambda(x)}f(x)\,dx < \infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{x\lambda(x)}f(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{r\alpha x^r}r\alpha x^{r-1}e^{-\alpha x^r}dx \\ &= \int_0^\infty r\alpha x^{r-1}e^{-\alpha(1-r)x^r}dx, \end{aligned}$$

hacemos un cambio de variable $u = \alpha x^r$, *entonces*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{x\lambda(x)}f(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{-(1-r)u}du \\ &= \frac{1}{1-r} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distribución Weibull es subexponencial. ■

Ejemplo 49 *Supongamos que F es la distribución Benktander II con parámetros $0 < \beta < 1$ y $\alpha > 0$. Entonces su correspondiente tasa hazard es*

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \frac{\left((1-\beta)x^{-1} + \alpha x^{-(1-\beta)}\right) e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta}}{e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta}} \\ &= (1-\beta)x^{-1} + \alpha x^{-(1-\beta)}.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{x\lambda(x)} f(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{((1-\beta)+\alpha x^{\beta})} \left((1-\beta)x^{-1} + \alpha x^{-(1-\beta)}\right) e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^{\beta}/\beta} dx \\ &= e^{\alpha/\beta + (1-\beta)} \int_0^\infty e^{-(\alpha/\beta - \alpha)x^{\beta}} \left((1-\beta)x^{-(2-\beta)} + \alpha x^{-2(1-\beta)}\right) dx,\end{aligned}$$

como el integrando es decreciente, entonces

$$\int_0^\infty e^{x\lambda(x)} f(x)\,dx < \infty,$$

por lo tanto $F \in \mathcal{S}$. ■

Con el siguiente ejemplo notemos que hay una clase de funciones de distribución la cual este trabajo no cubre. Debido a que son funciones con colas más pesadas que en el caso de las subexponenciales.

Ejemplo 50 *Sea F la función de distribución Cauchy estándar, con función de densidad*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

para $-\infty < x < \infty$. Veamos que su distribución es

$$\overline{F}(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt \sim \frac{1}{\pi} \int_x^\infty t^{-2} dt = \frac{1}{\pi x}.$$

Con esto tenemos que su tasa hazard es

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{\pi(1+x^2)}}{\frac{1}{\pi x}} = \frac{x}{1+x^2},$$

por lo que $x\lambda(x) \sim 1$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{x\lambda(x)} f(x)\,dx &\sim \int_0^\infty e^1 \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx \\ &= \frac{1}{\pi}e^1 \left[\arctan(x)\right]_0^\infty \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de distribución Cauchy no es subexponencial.

4.2.1 Teorema de Cramér-Lundberg para reclamaciones grandes

Recordemos que para una función de distribución F con media finita μ, definimos a la cola integrada de F como $F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy$. Una consecuencia importante del Lema 44 (b) es el Teorema de Cramér-Lundberg para reclamaciones grandes, que dice:

Teorema 51 *Consideremos el modelo de Cramér-Lundberg dado en la Sección 2.1 junto con la condición de beneficios netos* $\rho > 0$ *y* $F_I \in \mathcal{S}$. *Entonces la probabilidad de ruina decrece como la cola integrada, esto es*

$$\psi(u) \underset{u\to\infty}{\sim} \rho^{-1}\overline{F_I}(u). \tag{4.15}$$

Demostración Como $F_I \in \mathcal{S}$ y usando (4.11), tenemos que

$$\frac{\overline{F_I^{n*}}(x)}{\overline{F_I}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n, \quad K = \text{cte.},$$

donde K es una constante, entonces

$$\frac{1}{(1+\rho)^n}\frac{\overline{F_I^{n*}}(x)}{\overline{F_I}(x)} \leq K\frac{(1+\varepsilon)^n}{(1+\rho)^n}, \quad x \geq 0$$

sumando sobre n llegamos a que

$$\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\rho)^n}\frac{\overline{F_I^{n*}}(x)}{\overline{F_I}(x)} \quad \leq \quad \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}K\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\rho}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{1+\rho} K \left(\frac{1}{1-\frac{1+\varepsilon}{1+\rho}} \right) \\
&= K \left(\frac{\rho}{\rho-\varepsilon} \right) < \infty
\end{aligned}
$$

y como $\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^n} \frac{\overline{F_I^{n*}}(x)}{\overline{F_I}(x)}$, entonces está dominada $\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)}$. Usemos el Teorema de Convergencia Dominada y de lo que obtuvimos en (4.5) obtenemos que

$$
\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{1}{\rho}.
$$

■

4.3 Conclusiones

Esto escencialmente termina nuestro objetivo de encontrar un estimador del tipo Cramér-Lundberg en el caso de colas pesadas. Ya sea que las funciones esten variando regularmente o sean subexponenciales, hemos dado un estimador para la probabilidad de ruina $\psi(u)$.

Entonces para distribuciones de reclamaciones con distribución de cola integrada subexponencial, la probabilidad de ruina $\psi(u)$ la podemos aproximar por (4.15).

Capítulo 5

Conclusiones Generales

Hemos definido el modelo de Cramér-Lundberg, el cual trata de explicar una situación que experimentan las compañías aseguradoras. Ante posibles reclamaciones grandes o un número grande de reclamaciones, la compañía quiere saber ¿qué probabilidad $\psi(u)$ tiene de que se arruine si tiene $u > 0$ de capital inicial? Entonces junto con los resultados que obtuvimos en el capítulo 2 sobre Teoría de Renovación y todas las definiciones hechas en el capítulo 1, proponemos y demostramos el Teorema de Cramér-Lundberg en el capítulo 3. Este teorema nos permite encontrar una cota y un resultado asintótico a esa probabilidad de ruina $\psi(u)$, por la cual el tiempo de operación de una compañía aseguradora se puede cambiar, ya que dependiendo del capital inicial $u > 0$ y junto con la tasa de ingreso de primas $c > 0$, se puede modificar esa probabilidad de ruina de tal modo que esa compañía aseguradora cumpla con sus objetivos de seguir operando y obtener ganancias. Aunque al usar este teorema tenemos que ver primero que se cumplan con las hipótesis, y entre ellas está que se cumpla con la condición de Cramér-Lundberg. Pero los montos de reclamación se modelan ahora cada vez más con las distribuciones de la tabla 3.1, y desafortunadamente para esa compañía aseguradora, el Teorema de Cramér-Lundberg no sirve para los montos de reclamación modelados con esas distribuciones, sino solamente con las distribuciones de la tabla 3.2, y esto se debe a que pueden ocurrir reclamaciones con montos muy grandes o muchas reclamaciones con montos pequeños pero que ocurrieron en un intervalo corto de tiempo de manera que esa compañía no pueda solventarlos.

Entonces usamos una pequeña parte de la Teoría de Variación Regular y también resultados obtenidos de la definición de funciones subexponenciales para encontrar estimadores para esa(s) reclamación(es) que presente(n) su(s) monto(s) muy grande(s). Así, damos aproximaciones para la probabilidad de ruina $\psi(u)$ de una compañía aseguradora.

Pero claro, todo esto solamente lo podemos hacer si la situación de esa compañía aseguradora se puede modelar con el modelo de Cramér-Lundberg. Pues la desventaja de este modelo es que es el modelo clásico y *básico* de la Teoría del Riesgo, por lo que muchas situaciones más complejas y también más riesgosas se nos escapan de las manos al intentar usar este modelo. Y aún obteniendo un estimador para la probabilidad de ruina en cualquiera de las clases de distribuciones de probabilidad, muchas veces ese estimador resulta muy difícil de calcular. Entonces es cuando tenemos que recurrir a herramientas númericas.

También vemos que lo desarrollado en este trabajo no resuelve la situación de una compañía aseguradora en caso de que la función asociada a los montos reclamados tenga colas más pesadas, como lo es la función de distribución Cauchy.

Apéndice A

Convolución y Transformada de Laplace

A.1 Convolución

Aquí establecemos algunas propiedades de la convolución útiles en el desarrollo de este trabajo.

Supongamos que todas las funciones son definidas de $\mathbb{R}^+ = (0, \infty]$ en $\mathbb{R}^+$. Nos interesan estas funciones de esta manera, porque en la situación de una compañía aseguradora las reclamaciones son positivas, es decir, $F(x)$ la funcion de distribución de las reclamaciones tiene rango en el eje positivo. Diremos que una función g es *localmente acotada*, si g es acotada en intervalos finitos.

Definición 52 *Para una función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ localmente acotada y una función de distribución $F : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ definimos la* **convolución de** F **y** g *como la función*

$$F * g(t) := \int_0^t g(t-x)\, dF(x), \quad \textit{para } t \geq 0.$$

Algunas propiedades de la convolución son las siguientes:

Propiedades

1. $F * g \geq 0$, porque ambas funciones son positivas.

2. $F * g$ es localmente acotada, entonces

$$\sup_{0\leq s\leq t} |F * g(s)| \leq \left(\sup_{0\leq s\leq t} |g(s)| \right) F(t).$$

Para verificar esto, definamos $\|g\| =: \sup_{0\leq s\leq t} |g(s)|$, que es finita para cada $t \geq 0$ por la suposición de que es localmente acotada. Entonces para cualquier $s \leq t$,

$$|F * g(s)| = \left| \int_0^s g(s-x)\, dF(x) \right|$$

usando la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} |F * g(s)| &\leq \int_0^s |g(s-x)|\, dF(x) \\ &\leq \|g\| \int_0^s dF(x) = \|g\| F(s) < \infty. \end{aligned}$$

Como $F * g$ es positiva, entonces $F * g \leq \|g\| F$.

3. Si tenemos que g es acotada y además es continua, entonces $F * g$ también es continua, ya que $F*g(t) = \mathbb{E}\left[g(t-Y_1)\mathbb{I}_{[0,t)}\right]$, donde Y_1 tiene función de distribución F. Así, si $t_n \to t$, obtenemos casi seguramente que

$$g(t_n - Y_1) \longrightarrow g(t - Y_1),$$

por la continuidad de g, y como g es acotada y junto con la propiedad 2, entonces también es dominada, entonces usando el Teorema de Convergencia Dominada se cumple que

$$\mathbb{E}\left[g(t_n - Y_1)\mathbb{I}_{[0,t_n)}\right] = F * g(t_n) \longrightarrow \mathbb{E}\left[g(t - Y_1)\mathbb{I}_{[0,t)}\right] = F * g(t).$$

4. Primero consideremos lo siguiente, definamos

$$F^{0*}(x) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x),$$

$$F^{1*}(x) = F(x),$$

y para $n \geq 1$,

$$F^{(n+1)*}(x) = F^{n*} * F.$$

Entonces $F^{0*}(x)$ actúa como identidad, es decir,

$$F^{0*}(x) * g = g,$$

y se cumple una propiedad asociativa

$$F * (F * g) = (F * F) * g = F^{2*} * g.$$

5. La convolución de dos distribuciones corresponde a la suma de dos variables aleatorias independientes. Sean X_1 y X_2 independientes, con X_i que se distribuye por F_i, $i = 1, 2$. Entonces $X_1 + X_2$ tiene distribución $F_1 * F_2$, $t \geq 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq t] &= \mathbb{P}\left[(X_1, X_2) \in \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^+ : x + y \leq t\right\}\right] \\
&= \iint_{\left\{(x,y)\in(\mathbb{R}^2)^+ : x+y\leq t\right\}} dF_1(x)\, dF_2(y)
\end{aligned}$$

y podemos escribir la doble integral como una integral iterada,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq t] &= \int_0^t \left[\int_0^{t-x} dF_2(y)\right] dF_1(x) \\
&= \int_0^t F_2(t-x)\, dF_1(x) \\
&= F_1 * F_2(t).
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que esto prueba que la convolución $F * F = F^{2*}$ es una distribución, para toda distribución F.

6. Por inducción en la propiedad 5, podemos mostrar que: si $X_1, ..., X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F, entonces $X_1 + ... + X_n$ tiene distribución F^{n*}.

7. La prueba de la propiedad 5 muestra la propiedad de conmutatividad:

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1.$$

8. Si F_i es absolutamente continua con densidad f_i, $i = 1, 2$, entonces $F_1 * F_2$ es absolutamente continua con densidad dada por:

$$f_1 * f_2(t) := \int_0^t f_2(t-x)\, df_1(x) = \int_0^t f_1(t-x)\, df_2(x),$$

si $t > 0$. De hecho, si F es absolutamente continua, entonces para cualquier distribución G, $F * G$ es absolutamente continua. Verifiquemos estas últimas aseveraciones, observemos que

$$F_1 * F_2(t) = \iint_{\{(x,y):x+y\leq t\}} dF_1(x)\, dF_2(y),$$

escribiendo la doble integral iterada, entonces

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(t) &= \iint_{\{(x,y):x+y\leq t\}} f_1(x)\, f_2(y)\, dxdy \\ &= \int_0^t \left(\int_0^{t-y} f_1(x)\, dx \right) f_2(y)\, dy, \end{aligned}$$

escribiendo la doble integral iterada y cambiando variables $u = x + y$,

$$F_1 * F_2(t) = \int_0^t \left(\int_y^t f_1(u-y)\, du \right) f_2(y)\, dy,$$

hacemos un cambio de orden de integración,

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(t) &= \int_0^t \left(\int_0^u f_2(y)\, f_1(u-y)\, dy \right) du \\ &= \int_0^t f_1 * f_2(y)\, dy. \end{aligned}$$

Para la segunda afirmación reemplazamos f_1 por f, y $f_2(y)\, dy$ por $G(dy)$, y encontramos que

$$\begin{aligned} F * G(t) &= \int_0^t \left(\int_0^u f(u-y)\, dG(y) \right) du \\ &= \int_0^t G * f(u)\, du. \end{aligned}$$

Mostrando que $F * G$ es absolutamente continua con densidad $G * f$, pues la densidad es única.

A.2 Transformada de Laplace

Definición 53 *Supongamos que X es una variable aleatoria no negativa con función de distribución F. La **transformada de Laplace de** X o de F es la función $\widehat{F}(\lambda) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\widehat{F}(\lambda) := \mathbb{E}\left(e^{-\lambda x}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x), \quad \lambda \geq 0.$$

Observación Como $e^{-\lambda x} \leq 1$ y es decreciente, tenemos que $\widehat{F}(\lambda) < \infty$, $\forall \lambda > 0$.

Algunas propiedades útiles de la Transformada de Laplace son las siguientes:

Propiedades

1. Unicidad. Es decir, distribuciones diferentes de probabilidad tienen transformadas de Laplace diferentes. La demostración de esto se puede ver en Feller [5], pp. 273 y 482.

2. Supongamos que X_1 y X_2 son independientes y que X_i tiene distribución F_i, $i = 1, 2$. Entonces

$$\left(\widehat{F_1 * F_2}\right)(\lambda) = \widehat{F_1}(\lambda)\,\widehat{F_2}(\lambda).$$

Comprobemos esto. Puesto que

$$\begin{aligned} \left(\widehat{F_1 * F_2}\right)(\lambda) &= \mathbb{E}\left(e^{-\lambda(x_1+x_2)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{-\lambda x_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{-\lambda x_2}\right), \end{aligned}$$

esto por independencia, entonces

$$\left(\widehat{F_1 * F_2}\right)(\lambda) = \widehat{F_1}(\lambda)\,\widehat{F_2}(\lambda).$$

Por lo que la transformada de la convolución es equivalente al producto de las transformadas de cada una de las funciones involucradas. Similarmente, para cualquier $n \geq 0$, si F es una distribución, entonces

$$\widehat{F^{n*}}(\lambda) = \left(\widehat{F}(\lambda)\right)^n.$$

3. Las siguientes fórmulas son útiles cuando se quiere calcular la Transformada de Laplace:

a) $\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x)\,dx = \lambda^{-1}\widehat{F}(\lambda)$

b) $\int_0^\infty e^{-\lambda x}(1 - F(x))\,dx = \frac{1-\widehat{F}(\lambda)}{\lambda}$

La segunda fórmula se sigue directamente de la primera, la cual es obtenida haciendo un cambio de orden de integración

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(\int_0^x dF(u)\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-\lambda x}dx\right)dF(u) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda u}\lambda^{-1}dF(u) \\
&= \lambda^{-1}\widehat{F}(\lambda).
\end{aligned}$$

Extendamos esto a funciones de distribución arbitrarias y medidas U en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que $W(x)$ es no decreciente en $(0,\infty]$, pero tal vez $W(\infty) = \lim_{x\to\infty} W(x) > 1$.

Si existe una $a \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} dW(x) < \infty$$

para $\lambda > a$ entonces

$$\widehat{W}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} dW(x), \quad \lambda > a$$

es llamada *la transformada de Laplace de W*. Si tal a no existe, decimos que la transformada está indefinida.

Apéndice B

Directamente Riemann Integrable

Primero recordaremos la definición de la *Integral de Riemann de* z sobre un intervalo finito $[0, a)$ y que se satisface que $z \geq 0$ y $z(t) = 0$, $t < 0$. Aquí sólo consideremos valores no negativos de z.

Basta con considerar particiones en subintervalos de longitudes iguales $h = \frac{a}{n}$. Sea $\underline{m}_k$ el mayor número y $\overline{m}_k$ el menor número tales que para $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \underline{m}_k(h) &= \inf_{(k-1)h \leq x < kh} z(x), \\ \overline{m}_k(h) &= \sup_{(k-1)h \leq x < kh} z(x) \end{aligned}$$

y

$$\underline{m}_k \leq z(x) \leq \overline{m}_k, \quad \text{para } (k-1)h \leq x < kh.$$

Las sumas superior e inferior de Riemann para subintervalos de longitud h del intervalo $[0, a)$, están definidas por

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(h) &= h \sum_{k:kh \leq a} \underline{m}_k(h), \\ \overline{\sigma}(h) &= h \sum_{k:kh \leq a} \overline{m}_k(h). \end{aligned}$$

Y conforme $h \to 0$ tanto $\underline{\sigma}$ como $\overline{\sigma}$ se aproximan a límites finitos.

Definición 54 *Si $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \to 0$, estos límites son los mismos y la* ***integral de Riemann de*** z

en $[0,a)$ *está definida por este límite común. Y en este caso fijamos*

$$\int_0^a z(s)\,ds := \lim_{h \searrow 0} \overline{\sigma}(h).$$

Un resultado importante es el siguiente.

Proposición 55 *z es Riemann integrable en $[0,a)$ si y sólo si z es acotado y absolutamente continua.* ■

Cuando se tienen integrales sobre $[0,\infty)$, la definición clásica de la Integral de Riemann presenta una complicación inevitable y es que no siempre exite este límite en común. Para hacer que la clase de funciones integrables sea lo más extensa posible, se define convencionalmente la integral sobre $[0,\infty)$ como el límite de las integrales sobre $[0,a)$. Entonces tenemos lo siguiente.

Definición 56 *Decimos que z es Riemann integrable en $[0,\infty)$, si z es Riemann integrable en $[0,a)$, $\forall a > 0$ y*

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a z(s)\,ds$$

existe. Entonces

$$\int_0^\infty z(s)\,ds := \lim_{a \to \infty} \int_0^a z(s)\,ds.$$

La siguiente definición no distingue entre intervalos finitos e infinitos. Aunque z cumpla la siguiente definición, sigue siendo Riemann integrable en todo intervalo finito $[0,a)$.

Definición 57 *Sean $\overline{m}_k(h)$, $\underline{m}_k(h)$ y $\overline{\sigma}(h)$, $\underline{\sigma}(h)$ como antes excepto que ahora tenemos que*

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}(h) &= h\sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k(h), \\
\overline{\sigma}(h) &= h\sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h).
\end{aligned}$$

*Entonces z es **directamente Riemann integrable** si $\overline{\sigma}(h) < \infty$, $\forall h$ y*

$$\lim_{h \to \infty} \overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) = 0.$$

Pero si $\overline{\sigma}(h) = \infty$ no hay punto de encuentro entre $h' < h$, donde $\overline{\sigma}\left(h'\right) < \infty$.

Proposición 58 *Si z tiene soporte compacto, entonces la integración de Riemann es lo mismo que directamente Riemann integrable.* ■

Proposición 59 *Si z es directamente Riemann integrable, entonces también es Riemann integrable en $[0, \infty)$ y*

$$\lim_{h \searrow 0} \overline{\sigma}(h) = \int_0^\infty z(s)\, ds,$$

donde $\int_0^\infty z(s)\, ds$ es la integral dè Riemann.

Demostración El método es aproximandose a $[0, \infty)$ por $[0, a)$ y luego aproximar la integral por una suma. Primero veamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \\ &= \lim_{h \to 0} h \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h) - h \sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k(h) \\ &= \lim_{h \to 0} h \left(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h) - \sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k(h) \right) \\ &\geq \lim_{h \to 0} h \sum_{k: kh \leq a} \left(\overline{m}_k(h) - \underline{m}_k(h) \right), \end{aligned}$$

por lo que z es Riemann integrable en $[0, a]$ para alguna $a > 0$.

Para $\varepsilon > 0$, existe $a = a(\varepsilon)$ tal que $\sum_{n > a} \overline{m}_n(1) < \varepsilon$.

Para $h < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(h) - \sum_{k: kh \leq a} \overline{m}_k(h) &= \sum_{k: kh > a} \overline{m}_k(h) \\ &\leq \sum_{k: k > a} \overline{m}_k(1) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Como z es directamente Riemann integrable, existe

$$\lim_{h \to 0} \overline{\sigma}(h) =: \sigma_0$$

y por lo tanto existe h_0 tal que si $h < h_0$, entonces

$$\left|\sigma_0 - \overline{\sigma}(h)\right| < \varepsilon, \tag{B.2}$$

entonces existe h_1 tal que si $h \leq h_1$, entonces

$$\left| h \sum_{k:kh \leq a} \overline{m}_k(h) - \int_0^a z(s)\,ds \right| < \varepsilon, \tag{B.3}$$

esto es porque z es Riemann integrable en $[0, a]$. Y usando (B.1), (B.2) y (B.3), obtenemos para $\min\{h \leq h_0, h_1, 1\}$

$$\begin{aligned} \left|\sigma_0 - \int_0^a z(s)\,ds\right| &\leq \left|\sigma_0 - \overline{\sigma}(h)\right| + \left|\overline{\sigma}(h) - \sum_{k:kh \leq a} \overline{m}_k(h)\right| + \\ &+ \left| h \sum_{k:kh \leq a} \overline{m}_k(h) - \int_0^a z(s)\,ds \right| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a z(s)\,ds = \sigma_0,$$

así tenemos que z es Riemann integrable en $[0, \infty)$ y $\sigma_0 = \int_0^\infty z(s)\,ds$. ■

El criterio más usado para determinar que z sea directamente Riemann integrable es el siguiente.

Proposición 60 *Si $z \geq 0$ es no creciente, entonces z es directamente Riemann integrable si y sólo si z es Riemann integrable.* ■

Para funciones no crecientes, los conceptos de Riemann integrable y directamente Riemann integrable son los mismos.

Demostración En la proposición anterior se probó una implicación. Ahora demostraremos la otra implicación. Supongamos que z es no creciente y Riemann integrable, de esto tenemos que

$$\infty > \int_0^\infty z(s)\,ds = \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)h}^h z(s)\,ds$$

y por ser z monótona, esto es acotado por abajo por

$$\int_0^\infty z(s)\,ds \geq \sum_{n=1}^\infty z(nh)\,h,$$

de esta manera siendo z Riemann integrable tenemos que $\underline{\sigma}(h) < \infty$. Como z es no creciente, entonces para cualquier N se tiene que

$$\begin{aligned} h\sum_{k=1}^N \overline{m}_k(h) - h\sum_{k=1}^n \underline{m}_k(h) &\leq h\sum_{k=1}^N (z((n-1)h) - z(nh)) \\ &= h(z(0) - z(Nh)) \end{aligned}$$

y cuando $N \to \infty$, entonces tenemos el siguiente límite

$$h(z(0) - z(Nh)) \to h(z(0) - z(\infty)).$$

Por lo tanto $\overline{\sigma}(h) < \infty$ si y sólo si $\underline{\sigma}(h) < \infty$, y

$$\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \leq h(z(0) - z(\infty)).$$

Y como sabemos que $\underline{\sigma}(h) < \infty$, llegamos a que $\overline{\sigma}(h) < \infty$. Y cuado $h \to \infty$

$$\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \to 0.$$

Por lo tanto z es directamente Riemann integrable. ■

Proposición 61 *Si z es Riemann integrable en $[0, a)$, $\forall a > 0$ y $\overline{\sigma}(1) < \infty$, entonces z es directamente Riemann integable.*

Demostración Como $\overline{\sigma}(1) < \infty$, entonces para $h < 1$ tenemos que

$$\underline{\sigma}(h) \leq \overline{\sigma}(h) \leq \overline{\sigma}(1) < \infty,$$

entonces las sumas infinitas convergen. Dada $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que $\sum_{k>N_0} \overline{m}_k(1) < \infty$. Entonces

$$\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) = h \sum_{k:kh \leq N_0} \left(\overline{m}_k(h) - \underline{m}_k(h)\right) + h \sum_{k:kh > N_0} \left(\overline{m}_k(h) - \underline{m}_k(h)\right)$$

y cuando $h \to 0$, tenemos

$$\left| h \sum_{k:kh > N_0} \left(\overline{m}_k(h) - \underline{m}_k(h)\right) \right| \leq 2h \sum_{k:kh > N_0} \overline{m}_k(h) \leq 2\varepsilon$$

y como z es Riemann integrable en $[0, N_0]$,

$$\left| h \sum_{k:kh \leq N_0} \left(\overline{m}_k(h) - \underline{m}_k(h)\right) \right| \to \left| \int_0^{N_0} z(s)\, ds - \int_0^{N_0} z(s)\, ds \right| = 0.$$

Por lo tanto $\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \to 0$ y z es directamente Riemann integrable. ∎

Proposición 62 *Si z es Riemann integrable en $[0, \infty)$ y $z \leq g$, donde g es directamente Riemann integrable, entonces z es directamente Riemann integrable.*

Demostración Esto se sigue de la proposición anterior, porque se satisface que z sea Riemann integrable y también

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{k-1 \leq x < k} g(s) < \infty$$

porque g es directamente Riemann integrable. ∎

Bibliografía

[1] Asmussen, Soren. *Ruin Probabilities.* Vol.2. World Scientific, Singapore.(2000)

[2] Basu, Adhir K. *Introduction to Stochastic Process.* Alpha Science International, Pangbourne. (2003)

[3] Cramér, Harald. *On some Questions connected with Mathematical Risk.* Vol.2, No.5, pp.99-124. University of California Press Berkeley and Los Angeles.(1954)

[4] Embrechts, Paul; Klüppelberg, Claudia y Mikosch, Thomas. *Modelling Extremal Events for Finance and Insurance.* Springer, Berlin. (1997)

[5] Feller, William. *Introducción a la Teoría de Pobabilidades y Aplicaciones.* Vol.2. Limusa, México. (1978)

[6] Grandell, J. *Aspects of Risk Theory.* Springer, Berlin. (1991)

[7] Hogg, Robert V., y Klugmann, Stuart A. *Loss distributions.* Wiley, New York. (1984)

[8] Laha, R.G., y Rohatgi, V.K. *Probability Theory.* Wiley, New York. (1979)

[9] Resnick, Sidney I. *Adventures in Stochastic Processes.* Birhäuser, Boston.(1992)

[10] Rolski, Tomasz; Schmidli, Hanspeter; Schmidt, Volker y Teugels, Jozef. *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* John Wiley and Sons, Chichester. (1999)