

00362



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

CÁLCULO Y MEDICIÓN DE LA MATRIZ DE MUELLER  
DE UN ESPEJO ELIPSOIDAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

OSCAR GABRIEL RODRÍGUEZ HERRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. NEIL CHARLES BRUCE DAVIDSON

COMITÉ TUTORAL: DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR  
DR. AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA

pcf

posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

2005

m343387



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Agradezco el apoyo de mi madre, mi abuelita y mi hermano. También agradezco el apoyo que el resto de mi familia me ha dado a lo largo de todos estos años.

Así mismo, agradezco al Dr. Neil Bruce, la Dra. Martha Rosete y el Dr. Augusto García por el apoyo y la orientación que me brindaron como miembros de mi comité tutorial.

A mis amigos y compañeros tanto de la Facultad de Ciencias como del Posgrado en Ciencias Físicas y del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me otorgó para la realización de mis estudios de posgrado.

Por último, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por las oportunidades de desarrollo que me ha dado desde mi ingreso a la Escuela Nacional Preparatoria, mi paso por la Facultad de Ciencias y la conclusión de mis estudios de maestría en el Posgrado en Ciencias Físicas.

# Resumen

El estudio de la polarización de la luz tiene diversas aplicaciones en la medicina, la industria, la ciencia y la tecnología. Actualmente, uno de los métodos más utilizados para describir las propiedades polarizantes de un elemento óptico general, es el que combina los vectores de Stokes con las matrices de Mueller.

En este trabajo se realizó un estudio teórico-experimental de las propiedades polarizantes de un espejo elipsoidal que es parte fundamental de un sistema para caracterizar superficies rugosas bidimensionales. En la primera parte se hizo una deducción de los parámetros de Stokes y se desarrolló un método para calcular la matriz de Mueller del espejo a partir de consideraciones teóricas. En la segunda parte se desarrolló la metodología experimental para la medición de los valores de dicha matriz, y se hicieron mediciones de intensidad y potencia para la combinación de cuatro diferentes estados de polarización para la luz incidente, con cuatro diferentes analizadores. A partir de esas mediciones fue posible estudiar el estado de polarización de la luz reflejada por el espejo y así determinar los valores de los 16 elementos de su matriz de Mueller. Por último, se compararon los resultados experimentales con los teóricos, encontrando algunas diferencias entre ellos, y se hicieron algunas sugerencias para mejorar el proceso de medición.

# Contenido

## Capítulo 1. Antecedentes

1.1 Introducción.....	1
1.2 Vectores de Stokes y matrices de Mueller.....	2
1.3 Referencias.....	5

## Capítulo 2. Parámetros de Stokes y matriz de Mueller del espejo

2.1 Introducción.....	7
2.2 Derivación de los parámetros de Stokes.....	7
2.3 Cálculo de la matriz de Mueller para el espejo elipsoidal.....	16
2.4 Referencias.....	24

## Capítulo 3. Desarrollo del método de medición

3.1 Introducción.....	25
3.2 Método de medición.....	25
3.3 Obtención de la matriz de Mueller a partir de las mediciones de intensidad.....	30
3.4 Método alternativo de medición.....	32
3.5 Polarizador circular.....	35
3.6 Referencias.....	38

## Capítulo 4. Medición de la matriz de Mueller del espejo

4.1 Introducción.....	39
4.2 Obtención experimental de polarización circular.....	39
4.3 Caracterización de los elementos ópticos.....	41
4.4 Matriz de Mueller del vacío.....	44

4.5 Medición de la matriz de Mueller.....	45
4.6 Medición con la cámara CCD.....	46
4.7 Medición con el medidor de potencia óptica.....	51
4.8 Referencias.....	59

## Capítulo 5. Conclusiones

5.1 Conclusiones.....	61
5.2 Referencias.....	62

## Apéndice A. Cambio del estado de polarización por reflexión en un espejo elipsoidal

A.1 Introducción.....	65
A.2 Estudio geométrico de la polarización.....	67
A.3 Coeficiente de reflexión de un material general.....	74
A.4 Matriz de polarización.....	79
A.5 Referencias.....	81

## Apéndice B. Vectores de Stokes y matrices de Mueller

B.1 Introducción.....	83
B.2 Vectores de Stokes.....	83
B.3 Matrices de Mueller.....	85
B.4 Referencias.....	86

## Apéndice C. Código del programa de análisis

C.1 Introducción.....	87
C.2 Código del programa.....	87

# Capítulo 1

---

## Antecedentes

### 1.1 Introducción.

La polarización es una de las propiedades fundamentales de la luz, siendo las otras su frecuencia, intensidad y coherencia. Actualmente se sabe que esta propiedad está relacionada con el estado de vibración del campo eléctrico de la onda electromagnética. Sin embargo, llegar a esta concepción fue un proceso gradual que se basó en el trabajo de muchos científicos a lo largo de los años.

El estudio de la polarización comenzó con el descubrimiento de la doble refracción en la calcita por parte de Erasmus Bartholinus en 1669. Posteriormente, Christian Huygens consideró que este comportamiento era el resultado de la existencia de dos ondas dentro del cristal de calcita, una esférica y otra elipsoidal. Huygens también observó que si colocaba otro cristal del mismo material enfrente del primero, una de las imágenes desaparecía al girar el segundo cristal alrededor de la dirección del rayo. Newton interpretó este fenómeno considerando que la luz tenía “lados”. De hecho, esta transversalidad le pareció ser una seria objeción para la aceptación de la teoría ondulatoria. Cabe mencionar que en ese tiempo se pensaba que las ondas de luz, si es que existían, debían ser similares a las ondas sonoras que ya eran bien conocidas, es decir, debían ser ondas longitudinales.

Tiempo después, en 1808, Etienne-Louis Malus observó la luz reflejada por un vidrio del Palacio de Luxemburgo en París a través de un cristal de calcita, y notó que las dos imágenes obtenidas por la doble refracción desaparecían alternadamente al girar el cristal. A pesar de que Malus reportó esta observación, jamás la explicó. Más tarde, en 1812, Sir David Brewster, que también investigaba el comportamiento de la luz reflejada por un vidrio, descubrió que a un ángulo particular la luz reflejada podía ser extinguida con un cristal de calcita. Este ángulo es al que

ahora se le conoce como “ángulo de Brewster”. Estudios posteriores del mismo Brewster, mostraron que es posible determinar ese ángulo en función del índice de refracción del material y del medio en el que está inmerso. Esto creó una nueva herramienta para medir el índice de refracción por reflexión y no por transmisión, como se había hecho hasta entonces.

Finalmente, con el surgimiento de la teoría electromagnética de James Clerk Maxwell, y su posterior comprobación experimental por parte de Heinrich Hertz, fue posible establecer de primeros principios la ecuación de onda de la luz, que hasta ese momento solamente había sido aceptada como una hipótesis debido a que funcionaba en la descripción de los fenómenos observados. Como consecuencia de dicha teoría, ahora es posible hacer un estudio cuantitativo de la interacción de la luz con la materia a nivel macroscópico.

## **1.2 Vectores de Stokes y matrices de Mueller.**

En 1852 George Stokes descubrió que la luz polarizada podía ser descrita en términos de observables. Encontró que cualquier estado de polarización podía ser representado en términos de cuatro parámetros medibles, que ahora son conocidos como los parámetros de Stokes. El descubrimiento de esos parámetros lo hizo tratando de explicar matemáticamente las leyes de interferencia de Fresnel-Arago (1818). Estas leyes habían sido obtenidas de experimentos hechos con luz no polarizada y los intentos de Fresnel y otros científicos de su tiempo por explicarlas, no habían sido exitosos ya que éstos fallaban en la descripción de la luz no polarizada. Stokes introdujo una nueva forma de ver el problema al plantearse la descripción de la luz no polarizada en términos de su intensidad y no de su amplitud, como lo habían hecho sus antecesores.

La luz no polarizada tiene la propiedad de que si se coloca un polarizador o un retardador enfrente de la fuente, la intensidad transmitida no se ve afectada cuando se gira el polarizador o retardador, sin importar el ángulo de giro. Debido a esto, Stokes pensó que la descripción de la luz no polarizada debía hacerse aprovechando esta propiedad. Él mostró que su método no solamente era útil para describir luz no polarizada, sino que también podía describir luz parcialmente y totalmente polarizada. Sin embargo, el artículo en el que incluyó todas estas ideas permaneció en el olvido por casi un siglo hasta que, en 1947, Chandrasekhar utilizó los parámetros de Stokes para formular las ecuaciones de transferencia radiativa para el

esparcimiento de luz parcialmente polarizada. Desde entonces, los parámetros de Stokes han sido una de las herramientas más importantes para describir los estados de polarización de la luz.

En la década de 1940, Hans Mueller propuso una manera de describir las propiedades polarizantes de un elemento óptico general a través de una matriz<sup>[1]</sup>. Aparentemente, su trabajo se basó en los artículos previos de Perrin<sup>[2]</sup> y Soleillet<sup>[3]</sup>, aunque en la literatura óptica el método es conocido como “la matriz de Mueller” debido a que, al parecer, él fue el primero en utilizar el método para describir las propiedades polarizantes de un elemento óptico.

La combinación de la matriz de Mueller con los vectores de Stokes permite hacer un estudio formal y sistemático de las propiedades polarizantes de elementos ópticos tales como polarizadores o retardadores con su eje rápido orientado a un ángulo arbitrario<sup>[4-5]</sup>.

Si consideramos el vector de Stokes que describe la luz incidente en un elemento óptico,  $S_i$ , y le aplicamos la matriz de Mueller del elemento,  $M$ , obtendremos otro vector de Stokes,  $S_o$ , que contendrá la información sobre el estado de polarización de la luz que sale de dicho elemento. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera

$$S_o = MS_i \quad (1.1)$$

En general, la matriz de Mueller de un elemento óptico es una matriz de  $4 \times 4$  en la que sus 16 elementos son distintos e independientes entre sí. Es decir, si  $M$  es la matriz de Mueller del elemento, se tendrá que

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

donde  $m_{ij} \neq m_{kl}$  para  $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ . Por otro lado, los vectores de Stokes son vectores de la forma\*

---

\* En la sección 2.2 se da una deducción de la forma de los parámetros de Stokes, que son los elementos de los vectores de Stokes.

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_P E_P^* + E_S E_S^* \rangle \\ \langle E_P E_P^* - E_S E_S^* \rangle \\ \langle E_P E_S^* + E_S E_P^* \rangle \\ i \langle E_P E_S^* - E_S E_P^* \rangle \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

En donde el término  $S_0$  es la intensidad total,  $S_1$  está relacionado con la fracción de polarización horizontal o vertical que tiene la luz,  $S_2$  con la fracción de polarización a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  y  $S_3$  con la fracción de polarización circular derecha o izquierda que tiene la luz descrita por el vector. El símbolo  $\langle \rangle$  indica que se debe tomar el promedio temporal del argumento, y los subíndices  $P$  y  $S$  indican la componente de polarización del campo,  $P$  para la componente paralela al plano de incidencia y  $S$  para la ortogonal. Estas componentes también pueden ser expresadas, sin pérdida de generalidad, en términos del sistema  $H-V$  que describen las direcciones horizontal y vertical respecto al plano de la mesa óptica<sup>†</sup>, de manera que se puede escribir el vector de Stokes como

$$S = \begin{pmatrix} \langle E_H E_H^* + E_V E_V^* \rangle \\ \langle E_H E_H^* - E_V E_V^* \rangle \\ \langle E_H E_V^* + E_V E_H^* \rangle \\ i \langle E_H E_V^* - E_V E_H^* \rangle \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

En los siguientes capítulos se hace un estudio teórico-experimental sobre la matriz de Mueller de un espejo elipsoidal, empezando con una deducción de los parámetros de Stokes y el cálculo de la matriz de Mueller del espejo, y terminando con el método de medición y los resultados experimentales.

En este trabajo se considera el caso particular del espejo elipsoidal debido a que éste es parte de un sistema que se pretende usar para caracterizar completamente superficies rugosas bidimensionales. Previamente se ha trabajado en el diseño, la construcción y las primeras pruebas del sistema para medir la distribución de intensidad de la luz esparcida por las superficies. En el siguiente objetivo del proyecto, se pretende medir las propiedades polarizantes de las superficies

<sup>†</sup> El tratamiento que conduce a esta afirmación puede ser consultado en el Apéndice A.

a través de su matriz de Mueller. Para esto es necesario conocer la matriz de Mueller del espejo elipsoidal que es parte fundamental del sistema.

### 1.3 Referencias.

1. H. Mueller, "Memorandum on the polarization optics of the photoelastic shutter", *Report No. 2 of the OSRD project OEMsr-576*, Nov. 15, 1943.
2. F. Perrin, "Polarization of light scattered by isotropic opalescent media", *J. Chem. Phys.*, **10**, p. 415, (1942)
3. P. Soleillet, "Sur les paramètres caractérisant la polarisation partielle de la lumière dans les phénomènes de fluorescence", *Ann. Phys.*, **12** (10), p. 23, (1929)
4. D. Goldstein, "*Polarized Light*", 2<sup>nd</sup> Edition, Marcel Dekker, New York, (2003)
5. W. Shurcliff, "*Polarized Light*", Harvard University Press, Cambridge, (1962)

# Capítulo 2

---

## Parámetros de Stokes y matriz de Mueller del espejo

### 2.1 Introducción.

Actualmente, una de las técnicas más utilizadas para describir las propiedades polarizantes de los objetos, es la que combina los vectores de Stokes con las matrices de Mueller. Esta técnica resulta ventajosa sobre otras similares (como la de los vectores y matrices de Jones) porque con ella se pueden describir tanto estados completamente polarizados como estados no polarizados y parcialmente polarizados.

Una ventaja de los métodos matriciales para este tipo de estudios radica en que, si se tiene un haz de luz que pasa por diferentes elementos ópticos, el estudio del efecto total de los elementos en la polarización del haz, se puede obtener de manera directa multiplicando uno a uno el vector de Stokes incidente en cada elemento óptico por la correspondiente matriz de Mueller, simplificando el cálculo del estado final de polarización.

El presente capítulo es una introducción a los conceptos fundamentales de esta técnica y en él se presentan una deducción de los parámetros de Stokes, y el cálculo teórico de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal.

En los capítulos siguientes se discuten los métodos de medición, el desarrollo experimental y los resultados que se obtuvieron en este estudio.

### 2.2 Derivación de los parámetros de Stokes.

Considérense dos ondas electromagnéticas planas ortogonales entre sí en un punto del espacio, digamos  $z=0$ , y no necesariamente monocromáticas, cuyo campo eléctrico está dado de la forma

$$E_x(t) = E_{0x}(t) \cos(\omega t + \delta_x(t)) \quad (2.1)$$

$$E_y(t) = E_{0y}(t) \cos(\omega t + \delta_y(t)) \quad (2.2)$$

donde  $E_{0x}(t)$  y  $E_{0y}(t)$  son las amplitudes instantáneas de las ondas,  $\omega$  es su frecuencia angular instantánea y  $\delta_x(t)$  y  $\delta_y(t)$  son sus factores instantáneos de fase. También considérese que en todo instante de tiempo la variación temporal de las amplitudes y los factores de fase es lenta en comparación con las variaciones de los cosenos. Partiendo de las consideraciones anteriores es posible obtener la elipse de polarización<sup>[1]</sup> para una onda electromagnética. Para esto, se multiplica la ecuación (2.1) por el factor  $E_{0y}(t) \sin \delta_y(t)$ , y se obtiene

$$E_x(t)E_{0y}(t) \sin \delta_y(t) = E_{0x}(t)E_{0y}(t) \cos(\omega t + \delta_x(t)) \sin \delta_y(t) \quad (2.3)$$

Después, se multiplica la ecuación (2.2) por el factor  $E_{0x}(t) \sin \delta_x(t)$ , de donde

$$E_y(t)E_{0x}(t) \sin \delta_x(t) = E_{0x}(t)E_{0y}(t) \cos(\omega t + \delta_y(t)) \sin \delta_x(t) \quad (2.4)$$

Una vez hecho esto, se expanden los cosenos de las sumas en cada una de las ecuaciones anteriores, se toma la diferencia entre ellas, se eleva el resultado al cuadrado y se simplifica para obtener

$$\begin{aligned} E_x^2(t)E_{0y}^2(t) \sin^2 \delta_y(t) + E_y^2(t)E_{0x}^2(t) \sin^2 \delta_x(t) - 2E_x(t)E_y(t)E_{0x}(t)E_{0y}(t) \sin \delta_x(t) \sin \delta_y(t) = \\ E_{0x}^2(t)E_{0y}^2(t) \cos^2 \omega t \sin^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por otro lado, si ahora se multiplica la ecuación (2.1) por el factor  $E_{0y}(t) \cos \delta_y(t)$  y la ecuación (2.2) por  $E_{0x}(t) \cos \delta_x(t)$  se obtiene

$$E_x(t)E_{0y}(t) \cos \delta_y(t) = E_{0x}(t)E_{0y}(t) \cos(\omega t + \delta_x(t)) \cos \delta_y(t) \quad (2.6)$$

$$E_x(t)E_{0x}(t)\cos\delta_x(t) = E_{0x}(t)E_{0y}(t)\cos(\omega t + \delta_y(t))\cos\delta_x(t) \quad (2.7)$$

De manera similar al caso anterior, se expanden los cosenos de las sumas, se toma la diferencia entre las ecuaciones resultantes, se eleva al cuadrado el resultado y se simplifica para obtener

$$E_x^2(t)E_{0y}^2(t)\cos^2\delta_y(t) + E_y^2(t)E_{0x}^2(t)\cos^2\delta_x(t) - 2E_x(t)E_y(t)E_{0x}(t)E_{0y}(t)\cos\delta_x(t)\cos\delta_y(t) = E_{0x}^2(t)E_{0y}^2(t)\sin^2\omega t \sin^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \quad (2.8)$$

De la suma de las ecuaciones (2.5) y (2.8) resulta la siguiente ecuación

$$E_x^2(t)E_{0y}^2(t) + E_y^2(t)E_{0x}^2(t) - 2E_x(t)E_y(t)E_{0x}(t)E_{0y}(t)\cos(\delta_y(t) - \delta_x(t)) = E_{0x}^2(t)E_{0y}^2(t)\sin^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \quad (2.9)$$

Finalmente, dividiendo la ecuación (2.9) entre  $(E_{0x})^2(E_{0y})^2$  se obtiene que

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2(t)} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2(t)} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)}\cos\delta(t) = \sin^2\delta(t) \quad (2.10)$$

En donde  $\delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t)$ . La ecuación (2.10) es válida, en general, solamente a un instante de tiempo y es conocida como la elipse de polarización. Nótese que la elipse de polarización se obtuvo al deshacerse de la dependencia explícita de las ecuaciones (2.1) y (2.2) en  $\omega$ . Esta elipse nos indica cuál es el estado de vibración del campo eléctrico de una onda electromagnética como función de la diferencia de fase entre sus componentes en  $x$  y en  $y$ , y sus respectivas amplitudes.

Para ondas monocromáticas las amplitudes y las fases son constantes para todo tiempo y entonces, la ecuación (2.10) se reduce a

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta \quad (2.11)$$

donde  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  y  $\delta$  son constantes y  $E_x(t)$  y  $E_y(t)$  tienen la dependencia temporal dada por las ecuaciones (2.1) y (2.2).

Como se desea escribir esta ecuación en términos de observables físicas, y ningún detector mide valores instantáneos del campo en una onda electromagnética, se debe hacer un promedio temporal de la ecuación anterior, esto es

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{2\langle E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.12)$$

donde

$$\langle E_i(t)E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t)E_j(t)dt, \quad i,j=x,y \quad (2.13)$$

El promedio debe hacerse sobre un tiempo mayor que el tiempo que le toma a la onda hacer una oscilación completa y, en principio, éste podría ser infinito. Sin embargo, debido a la forma del campo, se puede hacer el promedio simplemente sobre un periodo de la onda.

Ahora, multiplicando la ecuación (2.12) por  $4(E_{0x})^2(E_{0y})^2$  se obtiene que

$$4E_{0y}^2 \langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2 \langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0x}E_{0y} \langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos \delta = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.14)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.2) se encuentra que los valores de los promedios indicados en la ecuación (2.14), usando la definición dada por la ecuación (2.13), son los siguientes

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0x}^2 \quad (2.15.1)$$

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0y}^2 \quad (2.15.2)$$

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (2.15.3)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.14) se obtiene lo siguiente

$$2E_{0x}^2 E_{0y}^2 + 2E_{0x}^2 E_{0y}^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.16)$$

Como se desea expresar el resultado final en términos de la intensidad, que es proporcional al cuadrado del campo, se deben completar los cuadrados en la ecuación anterior. Para esto, se suma la cantidad  $(E_{0x})^4 + (E_{0y})^4$  a ambos lados de la ecuación (2.16) y se obtiene la siguiente expresión

$$E_{0x}^4 + E_{0y}^4 + 2E_{0x}^2 E_{0y}^2 + 2E_{0x}^2 E_{0y}^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 + E_{0x}^4 + E_{0y}^4 \quad (2.17)$$

de donde

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.18)$$

Si se renombra a los elementos entre paréntesis de la ecuación (2.18) como sigue

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.19.1)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.19.2)$$

$$S_2 = 2E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (2.19.3)$$

$$S_3 = 2E_{0x} E_{0y} \sin \delta \quad (2.19.4)$$

se tiene que estas ecuaciones definen los parámetros de Stokes y, de la ecuación (2.18), se puede ver que cumplen la siguiente relación

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.20)$$

Los parámetros de Stokes son cantidades reales y son simplemente las observables de la elipse de polarización y en consecuencia, del campo óptico. El parámetro  $S_0$  es la intensidad total de la luz,  $S_1$  está relacionado con la fracción de polarización lineal en dirección horizontal o vertical,  $S_2$  con la fracción de luz con polarización lineal a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  y  $S_3$  con la fracción de polarización circular derecha o izquierda que contiene la luz que representan, como se verá más adelante.

Si ahora se considera luz parcialmente polarizada, se puede ver que las expresiones dadas por las ecuaciones (2.19.1)-(2.19.4) continúan siendo válidas solamente en intervalos de tiempo pequeños, ya que las amplitudes y las fases varían lentamente. Usando la desigualdad de Schwarz<sup>[2]</sup>

$$\left| \int_a^b f^*(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b f^*(x)f(x)dx \int_a^b g^*(x)g(x)dx \quad (2.21)$$

y la matriz de coherencia<sup>[3]</sup>, es posible demostrar que para cualquier estado de polarización los parámetros de Stokes cumplen la siguiente relación

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.22)$$

En la ecuación anterior, la igualdad se da cuando se tiene luz completamente polarizada y la desigualdad cuando se tiene luz no polarizada o parcialmente polarizada.

Como se vio en la primera parte de esta sección, para obtener los parámetro de Stokes se debe tomar el promedio temporal de la elipse de polarización. Sin embargo, es posible obtenerlos más directamente, y sin necesidad de hacer los promedios temporales, si se utilizan los campos eléctricos reales dados en las ecuaciones (2.1) y (2.2), en su forma compleja, es decir,

$$E_x(t) = E_{0x} \exp[i(\omega t + \delta_x)] = E_x \exp(i\omega t) \quad (2.23)$$

$$E_y(t) = E_{0y} \exp[i(\omega t + \delta_y)] = E_y \exp(i\omega t) \quad (2.24)$$

donde

$$E_x = E_{0x} \exp(i\delta_x) \quad (2.25)$$

y

$$E_y = E_{0y} \exp(i\delta_y) \quad (2.26)$$

son amplitudes complejas. Los parámetros de Stokes para una onda plana se obtienen ahora con las siguientes relaciones

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.27.1)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (2.27.2)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (2.27.3)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \quad (2.27.4)$$

Si se utiliza la representación compleja de los campos, se deben usar las ecuaciones anteriores como definición de los parámetros de Stokes. Sustituyendo las expresiones para  $E_x$  y  $E_y$  en las ecuaciones (2.27.1)-(2.27.4), se encuentran las siguientes expresiones

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.28.1)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.28.2)$$

$$S_2 = 2E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (2.28.3)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (2.28.4)$$

que son las mismas ecuaciones que se obtuvieron formalmente a partir de la elipse de polarización.

Como ejemplo de los parámetros de Stokes para diferentes estados de polarización, a continuación se presentan algunos casos particulares.

**Luz linealmente polarizada en dirección horizontal.** En este caso se tiene que  $E_{0y}=0$  y entonces, de las ecuaciones (2.28.1)-(2.28.4), resulta que

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 \\ S_1 &= E_{0x}^2 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

**Luz linealmente polarizada en dirección vertical.** En este caso se tiene  $E_{0x}=0$ , de donde

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0y}^2 \\ S_1 &= -E_{0y}^2 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

**Luz linealmente polarizada a  $+45^\circ$ .** Para este caso  $E_{0x}=E_{0y}=E_0$  y  $\delta=0^\circ$ . Usando las ecuaciones (2.28.1)-(2.28.4) se encuentra que

$$\begin{aligned} S_0 &= 2E_0^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 2E_0^2 \\ S_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

**Luz linealmente polarizada a  $-45^\circ$ .** En este caso las amplitudes son las mismas que en el caso anterior pero ahora  $\delta=180^\circ$  y entonces

$$\begin{aligned} S_0 &= 2E_0^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= -2E_0^2 \\ S_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

**Luz con polarización circular derecha.** Para este caso se tiene que  $E_{0x}=E_{0y}=E_0$  y  $\delta=90^\circ$ . Entonces, de las ecuaciones (2.28.1)-(2.28.4) para los parámetros de Stokes, se encuentra que

$$\begin{aligned} S_0 &= 2E_0^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= 2E_0^2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

**Luz con polarización circular izquierda.** En este caso las amplitudes son las mismas que en el caso anterior y  $\delta=-90^\circ$ , de manera que

$$\begin{aligned} S_0 &= 2E_0^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= -2E_0^2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Finalmente, los parámetros de Stokes para luz elípticamente polarizada están dados por las ecuaciones (2.28.1)-(2.28.4).

Como se puede ver en los ejemplos anteriores,  $S_0$  es la intensidad total de la luz,  $S_1$  está relacionado con la fracción de polarización lineal horizontal o vertical,  $S_2$  con la fracción de

polarización lineal a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  y  $S_3$  con la fracción de polarización circular derecha o izquierda, como se había mencionado.

La forma de los parámetros de Stokes, para algún estado de polarización dado, sugiere que se pueden colocar en forma de un vector columna. Dicho vector sería el vector de Stokes para luz con el correspondiente estado de polarización\*.

### 2.3 Cálculo de la matriz de Mueller para el espejo elipsoidal.

Es posible calcular la matriz de Mueller de un elemento óptico haciendo que el vector de Stokes de la luz incidente corresponda a luz polarizada linealmente en dirección horizontal, vertical, a  $+45^\circ$ , a  $-45^\circ$  y finalmente circularmente polarizada hacia la derecha y hacia la izquierda, como se muestra a continuación.

Considérese el vector de Stokes de luz linealmente polarizada en dirección horizontal (ver Apéndice B)

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Por otro lado, como se presentó en la sección 1.2, la matriz de Mueller de un elemento óptico cualquiera se puede escribir como

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Haciendo el producto del vector  $S_i$  con la matriz de Mueller anterior, se obtiene el vector de Stokes a la salida del elemento, que es

---

\* En el Apéndice B se presentan los vectores de Stokes para algunos estados de polarización.

$$S_o = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12} \\ m_{21} + m_{22} \\ m_{31} + m_{32} \\ m_{41} + m_{42} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Como la luz incidente está polarizada horizontalmente, el campo eléctrico a la salida del elemento tendrá una componente horizontal ( $E_{hh}$ ) y una vertical ( $E_{hv}$ ) que a la entrada eran horizontales. De manera que, de acuerdo con la ecuación (1.4), el vector de Stokes a la salida del elemento óptico se puede escribir en términos del campo eléctrico como

$$S_o = \begin{pmatrix} E_{hh}E_{hh}^* + E_{hv}E_{hv}^* \\ E_{hh}E_{hh}^* - E_{hv}E_{hv}^* \\ E_{hh}E_{hv}^* + E_{hv}E_{hh}^* \\ i(E_{hh}E_{hv}^* - E_{hv}E_{hh}^*) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Igualando (2.37) y (2.38) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} m_{11} + m_{12} &= E_{hh}E_{hh}^* + E_{hv}E_{hv}^* \\ m_{21} + m_{22} &= E_{hh}E_{hh}^* - E_{hv}E_{hv}^* \\ m_{31} + m_{32} &= E_{hh}E_{hv}^* + E_{hv}E_{hh}^* \\ m_{41} + m_{42} &= i(E_{hh}E_{hv}^* - E_{hv}E_{hh}^*) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ahora, si se tiene luz incidente linealmente polarizada en la dirección vertical, entonces su vector de Stokes es de la forma

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Multiplicando por la matriz de Mueller del elemento óptico se obtiene que

$$S_o = \begin{pmatrix} m_{11} - m_{12} \\ m_{21} - m_{22} \\ m_{31} - m_{32} \\ m_{41} - m_{42} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

En este caso, la luz que sale del sistema tendrá componente horizontal ( $E_{vh}$ ) y vertical ( $E_{vv}$ ) que originalmente solamente tenían componente vertical, es decir, el vector de Stokes a la salida del elemento se puede escribir como

$$S_o = \begin{pmatrix} E_{vh}E_{vh}^* + E_{vv}E_{vv}^* \\ E_{vh}E_{vh}^* - E_{vv}E_{vv}^* \\ E_{vh}E_{vv}^* + E_{vv}E_{vh}^* \\ i(E_{vh}E_{vv}^* - E_{vv}E_{vh}^*) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

De las ecuaciones (2.41) y (2.42) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} m_{11} - m_{12} &= E_{vh}E_{vh}^* + E_{vv}E_{vv}^* \\ m_{21} - m_{22} &= E_{vh}E_{vh}^* - E_{vv}E_{vv}^* \\ m_{31} - m_{32} &= E_{vh}E_{vv}^* + E_{vv}E_{vh}^* \\ m_{41} - m_{42} &= i(E_{vh}E_{vv}^* - E_{vv}E_{vh}^*) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Resolviendo los sistemas (2.39) y (2.43) combinados, se encuentran los valores de los elementos  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{21}$ ,  $m_{22}$ ,  $m_{31}$ ,  $m_{32}$ ,  $m_{41}$  y  $m_{42}$  de la matriz de Mueller. Estos elementos, junto con los ocho restantes, se presentan al final de esta sección.

Considérese ahora el caso en el que la luz incidente está polarizada linealmente a  $+45^\circ$ , el vector de Stokes correspondiente a esta polarización es

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Entonces, a la salida del elemento óptico el vector de Stokes correspondiente es

$$S_o = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{13} \\ m_{21} + m_{23} \\ m_{31} + m_{33} \\ m_{41} + m_{43} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Como la luz incidente tiene componentes horizontal y vertical, a la salida del elemento tendremos que una parte de la luz polarizada en dirección horizontal estaba originalmente polarizada en la misma dirección ( $E_{hh}$ ) y la otra parte estaba polarizada en dirección vertical ( $E_{vh}$ ). Similarmente, la componente vertical a la salida del elemento tendrá una parte que originalmente estaba polarizada en dirección horizontal ( $E_{hv}$ ) y otra que estaba polarizada en dirección vertical ( $E_{vv}$ ). Cada una de las componentes a la salida del sistema se puede escribir de la siguiente manera

$$E_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hv} + E_{vv}) \quad (2.46.1)$$

$$E_h = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hh} + E_{vh}) \quad (2.46.2)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (1.4) se obtiene el vector de Stokes a la salida del elemento óptico. Igualando este vector con la ecuación (2.45), se genera un conjunto de ecuaciones similar al que se obtuvo en los casos anteriores. Sin embargo, faltan ecuaciones para poder resolver el sistema de manera única. Estas ecuaciones se obtienen de manera similar a la descrita anteriormente, pero suponiendo que la luz incidente tiene polarización lineal a  $-45^\circ$ , de manera que

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

De la ecuación anterior, y la matriz de Mueller del elemento óptico, se obtiene que

$$S_o = \begin{pmatrix} m_{11} - m_{13} \\ m_{21} - m_{23} \\ m_{31} - m_{33} \\ m_{41} - m_{43} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Para este caso, las componentes vertical y horizontal del campo a la salida del elemento óptico estarán dadas de la siguiente forma

$$E_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hv} - E_{vv}) \quad (2.49.1)$$

$$E_h = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hh} - E_{vh}) \quad (2.49.2)$$

Con el sistema de ecuaciones que se obtiene de suponer luz incidente linealmente polarizada a  $+45^\circ$ , en combinación con el que se obtiene suponiendo luz incidente con polarización lineal a  $-45^\circ$ , se encuentran los valores para  $m_{13}$ ,  $m_{23}$ ,  $m_{33}$  y  $m_{43}$ .

Para calcular los elementos de la matriz que faltan, se debe suponer luz incidente con polarización circular derecha, por lo que

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Con esta polarización incidente, se encuentra que

$$S_o = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{14} \\ m_{21} + m_{24} \\ m_{31} + m_{34} \\ m_{41} + m_{44} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

En este caso, las componentes del campo a la salida del sistema son

$$E_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hv} + iE_{vv}) \quad (2.52.1)$$

$$E_h = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hh} + iE_{vh}) \quad (2.52.2)$$

De aquí se obtienen las primeras cuatro ecuaciones que se usan para calcular los elementos faltantes, las otras cuatro ecuaciones se obtienen suponiendo que ahora la luz incidente tiene polarización circular izquierda, es decir

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Del producto del vector  $S_i$  con la matriz de Mueller del elemento óptico se encuentra que

$$S_o = \begin{pmatrix} m_{11} - m_{14} \\ m_{21} - m_{24} \\ m_{31} - m_{34} \\ m_{41} - m_{44} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Y las componentes del campo a la salida son de la forma

$$E_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{lv} - iE_{vv}) \quad (2.55.1)$$

$$E_h = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{hh} - iE_{vh}) \quad (2.55.2)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de las ecuaciones obtenidas suponiendo luz incidente polarizada circularmente a la derecha y a la izquierda, se encuentran los cuatro elementos faltantes de la matriz de Mueller, i.e.,  $m_{14}$ ,  $m_{24}$ ,  $m_{34}$  y  $m_{44}$ .

Las expresiones obtenidas de los cálculos anteriores para cada uno de los elementos de la matriz de Mueller de un elemento óptico cualquiera, son las siguientes

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{1}{2}(E_{hh}E_{hh}^* + E_{lv}E_{lv}^* + E_{vh}E_{vh}^* + E_{vv}E_{vv}^*) \\
m_{12} &= \frac{1}{2}(E_{hh}E_{hh}^* + E_{lv}E_{lv}^* - E_{vh}E_{vh}^* - E_{vv}E_{vv}^*) \\
m_{13} &= \operatorname{Re}(E_{hh}E_{vh}^*) + \operatorname{Re}(E_{lv}E_{vv}^*) \\
m_{14} &= \operatorname{Im}(E_{lv}E_{vv}^*) + \operatorname{Im}(E_{hh}E_{vh}^*) \\
m_{21} &= \frac{1}{2}(E_{hh}E_{hh}^* - E_{lv}E_{lv}^* + E_{vh}E_{vh}^* - E_{vv}E_{vv}^*) \\
m_{22} &= \frac{1}{2}(E_{hh}E_{hh}^* - E_{lv}E_{lv}^* - E_{vh}E_{vh}^* + E_{vv}E_{vv}^*) \\
m_{23} &= \operatorname{Re}(E_{hh}E_{vh}^*) - \operatorname{Re}(E_{lv}E_{vv}^*) \\
m_{24} &= \operatorname{Im}(E_{hh}E_{vh}^*) - \operatorname{Im}(E_{lv}E_{vv}^*) \\
m_{31} &= \operatorname{Re}(E_{hh}E_{lv}^*) + \operatorname{Re}(E_{vh}E_{vv}^*) \\
m_{32} &= \operatorname{Re}(E_{hh}E_{lv}^*) - \operatorname{Re}(E_{vh}E_{vv}^*) \\
m_{33} &= \operatorname{Re}(E_{hh}E_{vv}^*) + \operatorname{Re}(E_{vh}E_{lv}^*) \\
m_{34} &= \operatorname{Im}(E_{hh}E_{vv}^*) - \operatorname{Im}(E_{vh}E_{lv}^*) \\
m_{41} &= -\operatorname{Im}(E_{hh}E_{lv}^*) - \operatorname{Im}(E_{vh}E_{vv}^*) \\
m_{42} &= -\operatorname{Im}(E_{hh}E_{lv}^*) + \operatorname{Im}(E_{vh}E_{vv}^*)
\end{aligned} \quad (2.56)$$

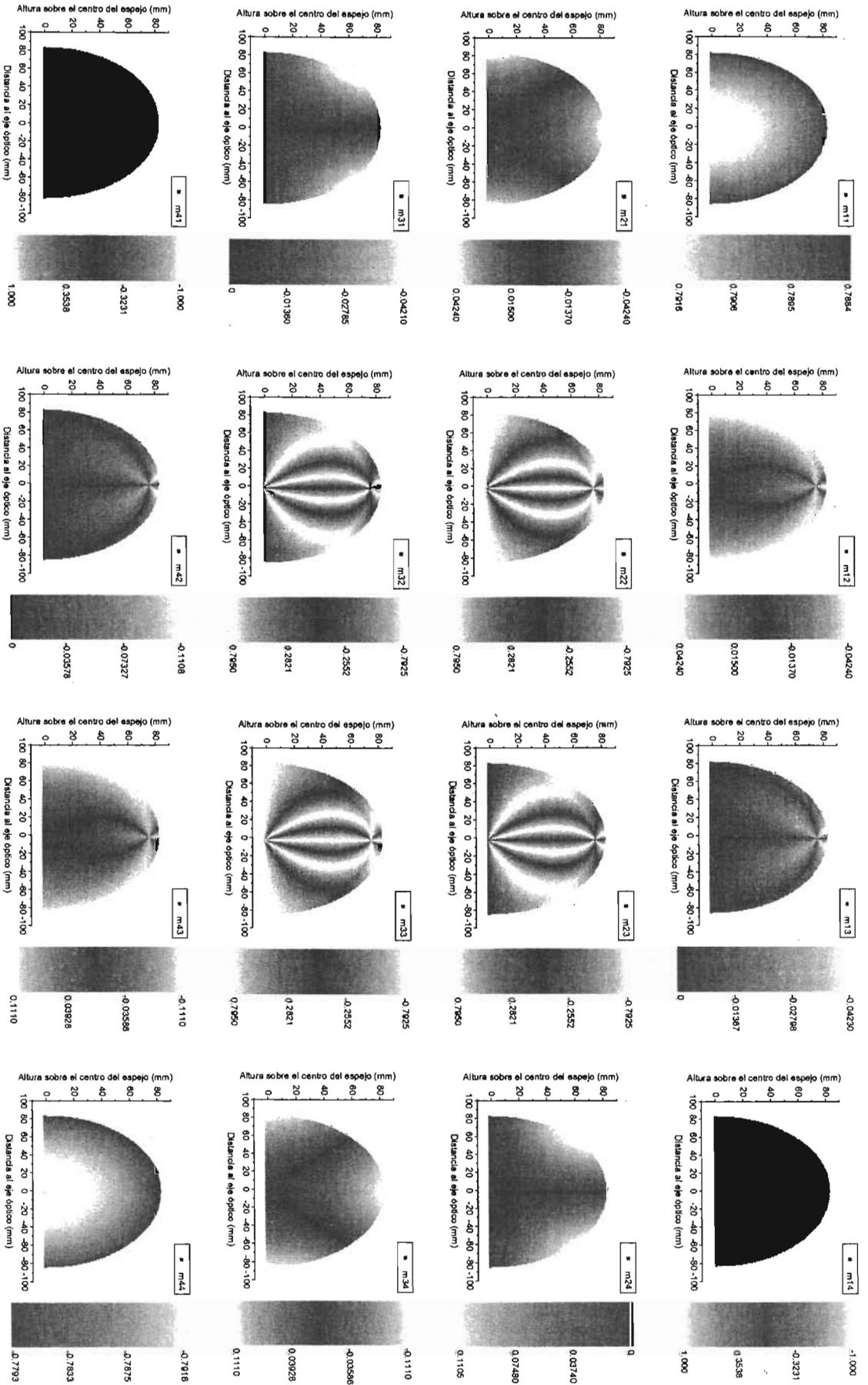


Figura 2.1. Elementos de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal como función de la posición en la abertura del espejo.

$$m_{43} = -\text{Im}(E_{hh}E_{vv}^*) - \text{Im}(E_{vh}E_{hv}^*)$$

$$m_{44} = \text{Re}(E_{hh}E_{vv}^*) - \text{Re}(E_{vh}E_{hv}^*)$$

Cabe resaltar que los 16 elementos aquí mostrados son los elementos de la matriz de Mueller para un elemento óptico en general, ya que dependerán de los valores de  $E_{hh}$ ,  $E_{hv}$ ,  $E_{vh}$  y  $E_{vv}$  para cada caso. Para el espejo elipsoidal que se considera en esta investigación, dichas componentes fueron calculadas en un trabajo previo que está resumido en el Apéndice A. Utilizando los resultados de dicho apéndice y los de la presente sección, se calcularon los elementos de la matriz de Mueller del espejo para cada punto sobre él. La figura 2.1 muestra los resultados de esos cálculos como función de la posición en la abertura del espejo.

Como se puede ver en la figura 2.1, existe simetría entre los elementos de la matriz de Mueller del espejo, esta simetría tiene su origen en la simetría misma de éste.

#### 2.4 Referencias.

1. D. Goldstein, "*Polarized Light*", 2<sup>nd</sup> Edition, Marcel Dekker, New York, (2003)
2. G. Arfken and H. Weber, "*Mathematical Methods for Physicists*", 5<sup>th</sup> Edition, Academic Press, San Diego, (2001)
3. M. Born and E. Wolf, "*Principles of Optics*", 7<sup>th</sup> Edition, Cambridge University Press, United Kingdom, (1999)

# Capítulo 3

---

## Desarrollo del método de medición

### 3.1 Introducción.

La medición de la matriz de Mueller de un elemento óptico no es, en general, una tarea fácil. Sin embargo, existen arreglos experimentales que permiten medir de manera indirecta los elementos de dicha matriz, mediante la medición de intensidades para distintos estados de polarización. En uno de ellos<sup>[1]</sup> se consideran tres diferentes elementos para generar el estado de polarización de la luz incidente (polarizadores) y otros tantos para analizar la luz que llega al detector (analizadores). Los elementos que se utilizan son: un polarizador lineal con su eje de transmisión horizontal o vertical, un polarizador lineal a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  y un polarizador circular\* derecho o izquierdo. Midiendo las intensidades para todas las posibles combinaciones de estos polarizadores y analizadores, se pueden determinar 9 de los 16 elementos de la matriz de Mueller del elemento óptico desconocido. Si además se mide la intensidad total para cada uno de los estados incidentes (es decir, sin ningún analizador) y la intensidad con cada uno de los analizadores cuando la luz incidente no está polarizada, se pueden encontrar los elementos restantes (ver figura 3.1). Este método se describe en detalle en la siguiente sección.

### 3.2 Método de medición.

Considérese que la fuente de luz no está polarizada y se coloca enfrente de ésta un polarizador lineal horizontal respecto a la mesa óptica. En general, la luz linealmente polarizada que incida en un elemento óptico desconocido, saldrá de éste con una polarización que será una mezcla de

---

\* En la sección 3.5 se discute la idea de polarizador circular, de momento, abusando un poco del lenguaje, solamente se utilizará el término.

diferentes estados de polarización. Esa mezcla de estados puede descomponerse y analizarse en términos de sus componentes lineales y circulares para obtener información a partir de ella. Para esto, se puede colocar a la salida del elemento desconocido, un analizador lineal con su dirección de polarización horizontal, vertical, a  $+45^\circ$  o a  $-45^\circ$  y medir la intensidad de la luz que sale de él. También se puede colocar un analizador circular para determinar la intensidad de la componente circular (derecha o izquierda) de la luz a la salida del elemento, o simplemente se puede omitir cualquier analizador y medir la intensidad total.

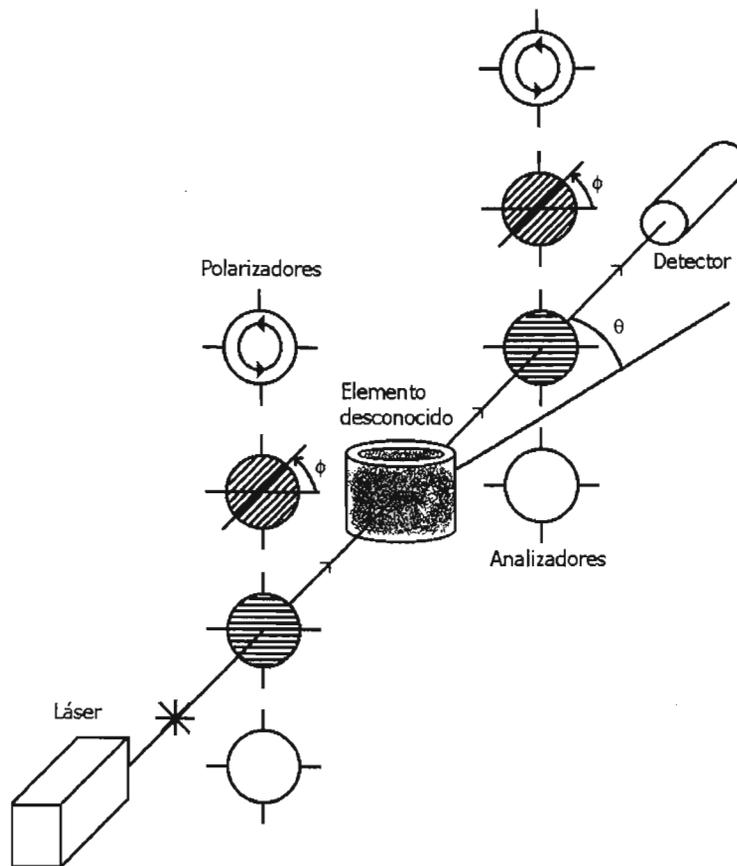


Figura 3.1. Arreglo experimental para medir los elementos de la matriz de Mueller de un elemento óptico desconocido.

De manera similar, se podría obtener luz incidente con polarización lineal vertical, a  $+45^\circ$  o a  $-45^\circ$  y utilizar los mismos elementos analizadores para medir la intensidad de los diferentes estados de polarización a la salida del elemento óptico desconocido. También se podría colocar un polarizador circular para polarizar el haz incidente, o dejar que la luz incidente sea completamente no polarizada, y medir la intensidad para ambos casos con la misma combinación

de analizadores de los casos anteriores. Con estas combinaciones de polarizadores y analizadores, es posible obtener los elementos de la matriz de Mueller del elemento óptico desconocido, como se muestra a continuación.

Primero, considérese el caso de luz incidente con polarización lineal a  $+45^\circ$ , la interacción de ésta con el elemento óptico desconocido se puede expresar de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ Q_0 \\ U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

donde la matriz con elementos  $m_{ij}$  es la matriz de Mueller del elemento desconocido y el vector de Stokes con componentes  $I_0$ ,  $Q_0$ ,  $U_0$  y  $V_0$  es el que describe la polarización de la luz que sale del mismo. Entonces, de la ecuación anterior se encuentra que

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ Q_0 \\ U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{13} \\ m_{21} + m_{23} \\ m_{31} + m_{33} \\ m_{41} + m_{43} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

En esta última ecuación se puede ver que el vector de Stokes de la luz que sale del elemento óptico desconocido es, en general, una combinación de diferentes estados de polarización, ya que ni  $Q_0$ , ni  $U_0$ , ni  $V_0$  son cero.

Por otro lado, la matriz de Mueller de un polarizador circular derecho está dada por

$$M_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Si se analiza la luz que sale del elemento óptico con un analizador circular, se tiene la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} + m_{13} \\ m_{21} + m_{23} \\ m_{31} + m_{33} \\ m_{41} + m_{43} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

de donde, el vector de Stokes de la luz que sale del analizador es

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (m_{11} + m_{13}) + (m_{41} + m_{43}) \\ 0 \\ 0 \\ (m_{11} + m_{13}) + (m_{41} + m_{43}) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

En la ecuación anterior se puede ver que la luz a la salida del analizador está circularmente polarizada hacia la derecha. Pero el hecho más importante que se puede observar en esta última ecuación, es que la intensidad que se mida en el detector traerá consigo información de los elementos  $m_{41}$  y  $m_{43}$  de la matriz de Mueller, que se incluyeron en la intensidad medida gracias a la interacción con el analizador circular derecho. Por lo tanto, la intensidad total medida en este caso será

$$I = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{13} + m_{41} + m_{43}) \quad (3.6)$$

De manera similar, se puede hacer la combinación de todos los polarizadores y analizadores restantes para obtener la forma de la intensidad, en función de los elementos de la matriz de Mueller, para cada caso. Las expresiones que se obtienen están resumidas, en forma matricial, en la figura 3.2.

Los símbolos a la derecha de cada  $S_{ij}$  indican, respectivamente, el polarizador y analizador usados para esa medición. En la figura 3.2 también se presentan las configuraciones complementarias para cada  $S_{ij}$ , con la expresión de la intensidad que se obtiene en cada caso. De estas expresiones se pueden observar cuatro hechos importantes:

- (1) El tipo de polarización de la luz incidente y detectada que se usa en una medición particular, establece de manera única los elementos de la matriz que son mezclados por esa medición.
- (2) Las configuraciones complementarias de los elementos utilizados en cada caso, producen combinaciones de los mismos elementos de la matriz de Mueller que difieren entre sí solamente por el signo de los  $m_{ij}$  mezclados.
- (3) Cada combinación de elementos de la matriz tiene una única posición en el arreglo mostrado. Por ejemplo, el elemento  $m_{11}$  aparece en todas las posiciones, pero los elementos  $m_{ij}$  con  $i=j \neq 1$ , solamente aparecen en la diagonal.
- (4) Los elementos  $m_{ij}$  con  $i$  y/o  $j=4$  contienen la información acerca de la luz circularmente polarizada. Esto se puede ver partiendo de la matriz de Mueller de un polarizador circular, que solamente tiene elementos distintos de cero en su cuarta columna y en su cuarto renglón, así como en la posición de  $m_{11}$ .

$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{14}$
$m_{11}$	$m_{11}+m_{12}$ $m_{11}-m_{12}$	$m_{11}+m_{13}$ $m_{11}-m_{13}$	$m_{11}+m_{14}$ $m_{11}-m_{14}$
$S_{21}$	$S_{22}$	$S_{23}$	$S_{24}$
$\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{21})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{21})$	$\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{12}+m_{21}+m_{22})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{12}-m_{21}-m_{22})$ $\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{12}+m_{21}-m_{22})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{12}-m_{21}+m_{22})$	$\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{13}+m_{21}+m_{23})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{13}-m_{21}-m_{23})$ $\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{13}+m_{21}-m_{23})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{13}-m_{21}+m_{23})$	$\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{14}+m_{21}+m_{24})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{14}-m_{21}-m_{24})$ $\leftrightarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{14}+m_{21}-m_{24})$ $\updownarrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{14}-m_{21}+m_{24})$
$S_{31}$	$S_{32}$	$S_{33}$	$S_{34}$
$\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{31})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{31})$	$\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{12}+m_{31}+m_{32})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{12}-m_{31}-m_{32})$ $\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{12}+m_{31}-m_{32})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{12}-m_{31}+m_{32})$	$\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{13}-m_{31}-m_{33})$ $\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{13}+m_{31}-m_{33})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{13}-m_{31}+m_{33})$	$\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{14}+m_{31}+m_{34})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}+m_{14}-m_{31}-m_{34})$ $\nearrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{14}+m_{31}-m_{34})$ $\searrow \frac{1}{2} (m_{11}-m_{14}-m_{31}+m_{34})$
$S_{41}$	$S_{42}$	$S_{43}$	$S_{44}$
$\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{41})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{41})$	$\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{12}+m_{41}+m_{42})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{12}-m_{41}-m_{42})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{12}+m_{41}-m_{42})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{12}-m_{41}+m_{42})$	$\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{13}+m_{41}+m_{43})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{13}-m_{41}-m_{43})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{13}+m_{41}-m_{43})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{13}-m_{41}+m_{43})$	$\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{14}+m_{41}+m_{44})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}+m_{14}-m_{41}-m_{44})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{14}+m_{41}-m_{44})$ $\circ \frac{1}{2} (m_{11}-m_{14}-m_{41}+m_{44})$

Figura 3.2. Intensidades medidas con diferentes configuraciones en términos de los elementos de la matriz de Mueller.

A partir de las mediciones de intensidad hechas con estas combinaciones de polarizadores y analizadores, es posible determinar los elementos de la matriz de Mueller, como se discute en la siguiente sección. Sin embargo, es importante mencionar que las expresiones para la intensidad en términos de los elementos de la matriz de Mueller que se resumen en la figura 3.2, son valores que serán proporcionales a la intensidad que se mida con el detector, ya que ésta dependerá tanto de la intensidad de la fuente como de la ganancia del detector.

### 3.3 Obtención de la matriz de Mueller a partir de las mediciones de intensidad.

Supongamos que se ilumina el elemento óptico desconocido con luz linealmente polarizada en dirección horizontal y que en el detector se mide la intensidad total, es decir, no se coloca ningún analizador. Los elementos de la matriz de Mueller mezclados en ese caso son  $m_{11}$  y  $m_{12}$  (ver figura 3.2) ya que la intensidad medida estará dada por  $I_{H0}=m_{11}+m_{12}$ . Repitiendo la medición pero con luz incidente linealmente polarizada en dirección vertical, se encuentra que los mismos elementos de la matriz se mezclan pero ahora la intensidad medida es  $I_{V0}=m_{11}-m_{12}$ . Restando  $I_{V0}$  a  $I_{H0}$  se encuentra que

$$I_{H0} - I_{V0} = (m_{11} + m_{12}) - (m_{11} - m_{12}) = 2m_{12} \quad (3.7)$$

Es decir, a partir de las intensidades  $I_{V0}$  e  $I_{H0}$  se puede obtener el elemento  $m_{12}$  de la matriz de Mueller del elemento óptico desconocido.

Si ahora se quiere encontrar  $m_{32}$ , por ejemplo, primero se debe medir  $I_{H+}$ , que corresponde a luz incidente con polarización lineal horizontal analizada con un polarizador a  $+45^\circ$ , de donde se obtiene

$$I_{H+} = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{12} + m_{31} + m_{32}) \quad (3.8)$$

Después se mide  $I_{H-}$ , que es el caso con polarización horizontal para la luz incidente y un polarizador orientado a  $-45^\circ$  como analizador, de donde

$$I_{H-} = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{12} - m_{31} - m_{32}) \quad (3.9)$$

Restando  $I_{H-}$  a  $I_{H+}$  se obtiene lo siguiente

$$I_{H+} - I_{H-} = m_{31} + m_{32} \quad (3.10)$$

Midiendo ahora  $I_{V+}$ , que corresponde a luz incidente con polarización vertical y analizada con el polarizador a  $+45^\circ$ , se obtiene

$$I_{V+} = \frac{1}{2}(m_{11} - m_{12} + m_{31} - m_{32}) \quad (3.11)$$

Por último, midiendo  $I_{V-}$ , polarización vertical a la entrada y un analizador lineal a  $-45^\circ$ , se encuentra que

$$I_{V-} = \frac{1}{2}(m_{11} - m_{12} - m_{31} + m_{32}) \quad (3.12)$$

Calculando la diferencia entre  $I_{V+}$  e  $I_{V-}$  se llega a la siguiente expresión

$$I_{V+} - I_{V-} = m_{31} - m_{32} \quad (3.13)$$

De las ecuaciones (3.10) y (3.13) se puede encontrar  $m_{32}$  haciendo la siguiente operación

$$(I_{H+} - I_{H-}) - (I_{V+} - I_{V-}) = (I_{H+} + I_{V-}) - (I_{V+} + I_{H-}) = 2m_{32} \quad (3.14)$$

De manera similar, se pueden encontrar los 14 elementos faltantes de la matriz de Mueller del elemento óptico desconocido. Las mediciones necesarias, así como las operaciones que se deben hacer entre ellas para encontrar cada uno de los elementos de la matriz de Mueller, se muestran en la figura 3.3.

Dependiendo de las simetrías y de las propiedades ópticas del elemento óptico desconocido, puede ser que algunos de los elementos de su matriz de Mueller sean iguales a otros o cero.

$m_{11}$ 	$m_{12}$ 	$m_{13}$ 	$m_{14}$ 
$I_{00}$	$\frac{1}{2} [I_{H0}-I_{V0}]$	$\frac{1}{2} [I_{+0}-I_{-0}]$	$\frac{1}{2} [I_{R0}-I_{L0}]$
$m_{21}$ 	$m_{22}$ 	$m_{23}$ 	$m_{24}$ 
$I_{0H}-I_{0V}$	$\frac{1}{2} [(I_{HH}+I_{VV})-(I_{VH}+I_{HV})]$	$\frac{1}{2} [(I_{+H}+I_{-V})-(I_{-H}+I_{+V})]$	$\frac{1}{2} [(I_{RH}+I_{LV})-(I_{LH}+I_{RV})]$
$m_{31}$ 	$m_{32}$ 	$m_{33}$ 	$m_{34}$ 
$I_{0+}-I_{0-}$	$\frac{1}{2} [(I_{H+}+I_{V-})-(I_{V+}+I_{H-})]$	$\frac{1}{2} [(I_{++}+I_{-})-(I_{-+}+I_{+})]$	$\frac{1}{2} [(I_{R+}+I_{L-})-(I_{L+}+I_{R-})]$
$m_{41}$ 	$m_{42}$ 	$m_{43}$ 	$m_{44}$ 
$I_{0R}-I_{0L}$	$\frac{1}{2} [(I_{HR}+I_{VL})-(I_{VR}+I_{HL})]$	$\frac{1}{2} [(I_{+R}+I_{-L})-(I_{-R}+I_{+L})]$	$\frac{1}{2} [(I_{RR}+I_{LL})-(I_{LR}+I_{RL})]$

Figura 3.3. Mediciones y operaciones necesarias para obtener los 16 elementos de la matriz de Mueller. Los subíndices L y R indican polarización circular izquierda y derecha, respectivamente.

Frecuentemente la matriz es diagonal con algunos  $m_{ij} = \pm m_{ji}$  o cero. Por ejemplo, si el elemento óptico que se está estudiando trata igual dos estados de polarización ortogonales, los elementos de la matriz correspondientes a esos estados de polarización serán cero.

A pesar de que el método presentado en esta sección puede ser utilizado para medir los elementos de la matriz de Mueller del elemento desconocido, éste involucra un total de 56 mediciones, por lo que se decidió depurarlo para ver si era posible obtener la misma información con menos mediciones. El método que se desarrolló con ese fin se discute en la siguiente sección.

### 3.4 Método alternativo de medición.

El método para la determinación experimental de los 16 elementos de la matriz de Mueller presentado en la sección anterior requiere demasiadas mediciones de intensidad y, en principio, arrojaría los resultados que se desean. Sin embargo, debido al gran número de mediciones necesarias, dicho método resulta complicado, ya que el paso entre la configuración para diferentes mediciones implica la reorientación de los ejes propios de cada una de las componentes en al menos dos ocasiones. La gran cantidad de mediciones que se necesitan para obtener la matriz de Mueller del elemento óptico desconocido, se debe a que algunos de los elementos de la matriz requieren hasta de cuatro configuraciones diferentes para poder obtener el

valor deseado siendo que, como se mostrará, muchas de estas mediciones no son necesarias dado que algunos de los elementos de la matriz de Mueller se pueden expresar en términos de los otros.

Considérese la medición del elemento  $m_{11}$  de la matriz de Mueller. De acuerdo con el análisis que se ha hecho,  $m_{11}$  está dado por la medición de la intensidad total cuando el haz incidente no está polarizado, es decir, no hay polarizador a la entrada y ningún elemento es usado como analizador a la salida. Idealmente esto constituiría una sola medición, pero en la realidad casi todos los rayos láser están polarizados. Aún aquellos que afirman que no lo están, presentan un estado de polarización que varía en el tiempo de manera más o menos regular, por lo que no pueden ser considerados como completamente no polarizados. Debido a esto, la manera como se propone medir  $m_{11}$  es midiendo la intensidad que se obtiene con luz incidente verticalmente polarizada y sin analizador, y sumarla a la intensidad medida cuando hay luz incidente horizontalmente polarizada, sin analizador. Este procedimiento es válido debido a que la luz no polarizada se puede ver como formada por una componente verticalmente polarizada y una horizontalmente polarizada, ambas con la misma intensidad, de manera que esta combinación de polarizaciones incidentes puede ser utilizada para todas las mediciones que requieren luz incidente no polarizada.

Una vez medida la componente  $m_{11}$ , la medición de la siguiente componente,  $m_{12}$ , se puede hacer usando la medición con luz incidente horizontalmente polarizada y sin analizador, y el valor de  $m_{11}$  ya que, como se muestra en el primer renglón de la segunda columna de la figura 3.2, la diferencia de la intensidad medida con esta configuración y la componente  $m_{11}$  da el valor de  $m_{12}$ . Si ahora se quiere determinar el valor de  $m_{22}$ , se debe medir primero el valor de  $m_{21}$  que se puede obtener sumando la componente horizontal de la intensidad para luz incidente horizontalmente polarizada con la misma componente para luz incidente verticalmente polarizada y restando a la intensidad resultante el valor de  $m_{11}$ , como se puede ver en el segundo renglón de la primera columna de la figura 3.2. Lo anterior da como resultado  $m_{21}$  y restándole al doble del valor de la componente horizontalmente polarizada para luz incidente con polarización horizontal, medido anteriormente, el valor de  $m_{11}+m_{12}+m_{21}$ , es posible determinar el valor de  $m_{22}$ .

De esta manera, las 6 mediciones que eran necesarias para determinar  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{21}$  y  $m_{22}$  se han reducido a solamente 4. Similarmente, los otros elementos de la matriz se pueden escribir en términos de los elementos que vayan siendo medidos de manera que el número total de

mediciones siguiendo este método es de 16, es decir, el número de mediciones se reduce considerablemente y, en consecuencia, la medición de la matriz de Mueller se hace en menos tiempo, aún considerando las operaciones que se deben hacer entre las intensidades medidas.

La forma explícita de los elementos de la matriz de Mueller en términos de las otras componentes y de las intensidades que deben ser medidas, se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{1}{2}(I_{H0} + I_{V0}) \\
m_{12} &= I_{H0} - m_{11} \\
m_{13} &= I_{+0} - m_{11} \\
m_{14} &= I_{R0} - m_{11} \\
m_{21} &= I_{HH} + I_{VH} - m_{11} \\
m_{22} &= 2I_{HH} - m_{11} - m_{12} - m_{21} \\
m_{23} &= 2I_{+H} - m_{11} - m_{13} - m_{21} \\
m_{24} &= 2I_{RH} - m_{11} - m_{14} - m_{21} \\
m_{31} &= I_{H+} + I_{V+} - m_{11} \\
m_{32} &= 2I_{H+} - m_{11} - m_{12} - m_{31} \\
m_{33} &= 2I_{++} - m_{11} - m_{13} - m_{31} \\
m_{34} &= 2I_{R+} - m_{11} - m_{14} - m_{31} \\
m_{41} &= I_{HR} + I_{VR} - m_{11} \\
m_{42} &= 2I_{HR} - m_{11} - m_{12} - m_{41} \\
m_{43} &= 2I_{+R} - m_{11} - m_{13} - m_{41} \\
m_{44} &= 2I_{RR} - m_{11} - m_{14} - m_{41}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

La diferencia más notable entre este método y el presentado en la sección anterior radica en el número de mediciones necesarias y, además, no hay nada, en términos de las incertidumbres o de los posibles errores de medición, que parezca sugerir que éste método es peor que el otro, de manera que las mediciones se hicieron usando este último método.

Para finalizar este capítulo, en la siguiente sección se discute el concepto de polarizador circular, que fue usado en las secciones anteriores.

### 3.5 Polarizador circular.

Un polarizador circular es un elemento óptico que permite obtener luz polarizada circularmente a partir de luz con cualquier estado de polarización. En la práctica, estos elementos no son solamente una placa, como en el caso de algunos polarizadores lineales, sino prismas o combinaciones de diferentes elementos ópticos que permiten obtener luz polarizada circularmente.

La matriz de Mueller para un polarizador circular es<sup>[2]</sup>

$$M_{r,l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

donde el signo + corresponde a un polarizador circular derecho ( $M_r$ ) y el menos a uno izquierdo ( $M_l$ ). Entre las posibles combinaciones de elementos ópticos que permiten obtener luz polarizada circularmente, quizás la combinación más comúnmente usada es la de un polarizador lineal en dirección horizontal, por ejemplo, y un retardador de  $\lambda/4$  con su eje rápido a  $+45^\circ$  respecto al eje de transmisión del polarizador. Esto es, si se tiene luz no polarizada y se hace incidir en un polarizador lineal horizontal, su vector de Stokes después de pasar por el polarizador será

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Después, se hace pasar la luz polarizada horizontalmente por una placa de  $\lambda/4$  con su eje rápido a  $+45^\circ$ , de donde

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Que corresponde a polarización circular derecha. Sin embargo, existe un problema para esta combinación de elementos. Si se hace el producto de la matriz de Mueller del polarizador horizontal por la de la placa de  $\lambda/4$  a  $+45^\circ$  se puede ver que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Esta matriz es parecida a la matriz de Mueller de un polarizador circular derecho, pero no es igual. A pesar de que esta matriz también produciría luz circularmente polarizada, no resulta útil para los fines que aquí se persiguen, como se muestra a continuación. Supóngase que se tiene luz con un estado de polarización cualquiera y se hace pasar a través de la combinación descrita arriba, entonces se tendrá que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I+Q \\ 0 \\ 0 \\ I+Q \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

El vector de Stokes resultante corresponde a luz circularmente polarizada, tal como se esperaba. Sin embargo, este vector no lleva ninguna información sobre la componente circularmente polarizada de la luz incidente, que está contenida en el término  $V$ , sino que es luz circularmente polarizada con información sobre la componente horizontalmente (o verticalmente) polarizada de la luz incidente, contenida en el término  $Q$ . Por tal motivo, esta combinación no resulta útil.

Considérese ahora la combinación de un retardador de  $\lambda/4$  con su eje rápido a  $+45^\circ$ , seguido de un polarizador lineal horizontal y finalmente otro retardador de  $\lambda/4$  con su eje a  $-45^\circ$  (figura 3.4).

La matriz de Mueller de esta combinación es

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

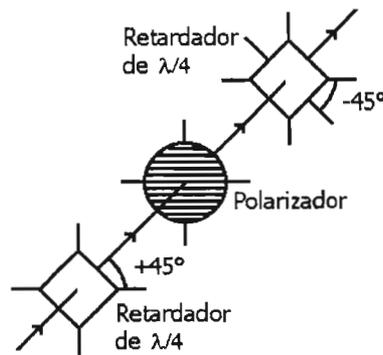


Figura 3.4. Polarizador y analizador circular.

Como se puede ver en la ecuación anterior, esta combinación de elementos ópticos produce un polarizador circular izquierdo. Si se le aplica a un vector de Stokes arbitrario se tendrá que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - V \\ 0 \\ 0 \\ -(I + V) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

El vector resultante corresponde a luz con polarización circular izquierda (tal como se esperaba) que además lleva información sobre la componente circular de la luz incidente. Se puede mostrar que si se gira el primer retardador a un ángulo de  $-45^\circ$  y el segundo a  $+45^\circ$ , también se obtiene luz polarizada circularmente pero ahora hacia la derecha.

Este último arreglo no sólo tiene la ventaja de producir luz polarizada circularmente que contiene información sobre la componente circular de la luz incidente, sino que además es su propio analizador.

A pesar de la gran utilidad del arreglo presentado en esta sección, no fue posible utilizarlo en las mediciones que se presentan en el siguiente capítulo, debido a la falta de disposición de otros dos retardadores de  $\lambda/4$  de la misma calidad, o superior, de los que ya se disponía.

### 3.6 Referencias.

1. W.S. Bickel and W.M. Bailey, "Stokes vectors, Mueller matrices, and polarized scattered light", *Am. J. Phys.*, **53** (5), p. 468-478, (1985)
2. D. Goldstein, "*Polarized Light*", 2<sup>nd</sup> Edition, Marcel Dekker, New York, (2003)

# Capítulo 4

---

## Medición de la matriz de Mueller del espejo

### 4.1 Introducción.

En los capítulos anteriores se presentaron un par de métodos para calcular los elementos de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal\* a partir de mediciones de intensidad, la manera de calcular la misma matriz teóricamente, y una deducción de los parámetros de Stokes. Lo anterior constituye todo el estudio teórico necesario para determinar la matriz de Mueller del espejo elipsoidal. Por lo tanto, solamente resta presentar la parte experimental de este estudio.

En este capítulo se presenta una forma de obtener polarización circular experimentalmente, se discute el procedimiento para la caracterización de las componentes que forman los sistemas de generación y detección de los estados de polarización, se hace una breve descripción del procedimiento experimental, y se presentan y analizan los resultados obtenidos. También se discuten algunos de los pormenores que se presentaron durante el desarrollo de la parte experimental de esta investigación, y se plantean los factores que deben tomarse en consideración cuando se trabaja con elementos polarizadores reales, es decir, aquellos que pueden presentar factores normalmente no incluidos en la teoría, tales como la absorción o la falta de calidad en la polarización generada y/o detectada.

### 4.2 Obtención experimental de polarización circular.

En la sección 3.5 se discutió el concepto de “polarizador circular” y se dijo que una posible manera de obtener polarización circular experimentalmente, era usando una placa de  $\lambda/4$  con su eje rápido orientado a  $\pm 45^\circ$  respecto a la dirección de la polarización lineal de la luz incidente.

---

\* El espejo elipsoidal que se utilizó es el modelo E 213-2 fabricado por Opti-Forms.

Sin embargo, lograr esto experimentalmente no siempre resulta sencillo. La razón principal de ello es que la orientación del eje rápido del retardador no viene exactamente señalada en la mayoría de los retardadores, y aquellos que la tienen mejor indicada son, generalmente, los más caros. En cuanto a la calidad de la polarización que producen, se ha observado que los retardadores de polímeros, cuyo precio es relativamente bajo, suelen ser poco confiables, ya que en el mejor de los casos se logra alcanzar una excentricidad de 0.67-0.68. No obstante, alcanzar estos valores requiere mucho control en el ángulo de orientación del eje rápido del retardador. Por otro lado, los retardadores de cuarzo han probado ser una mejor opción, ya que con ellos resulta relativamente fácil, en comparación con los retardadores de polímeros, conseguir una excentricidad de 0.89-0.91, pero tienen un precio considerablemente mayor, de ahí la importancia de determinar qué tan cercana a 1 se necesita que sea la excentricidad de la polarización generada para la aplicación que se esté implementando. En el caso considerado en este trabajo, mientras más cercana a 1 sea la excentricidad las mediciones serán mejores, dado que el método que se utiliza para medir las propiedades polarizantes del espejo elipsoidal considera polarización circular para algunas de las mediciones y, en consecuencia, cualquier deficiencia en la calidad de la polarización, introducirá errores en ellas.

Para poder producir polarización circular con la ayuda de un retardador, primero se debe encontrar su eje rápido. La determinación experimental de la orientación de este eje se puede hacer colocando el retardador entre dos polarizadores lineales. El primer polarizador sirve para generar la luz linealmente polarizada que pasará a través del retardador<sup>†</sup> y el segundo para analizar la luz transmitida por éste. Los polarizadores deben estar orientados de manera que la dirección de polarización de uno de ellos sea ortogonal a la del otro. Girando el retardador hasta que la intensidad transmitida (o potencia, según lo que mida nuestro detector) sea mínima, se puede localizar la orientación del eje del retardador, ya que la falta de luz detectada indicará que uno de los ejes del retardador es paralelo a la dirección de la polarización incidente. Aunque esta técnica permite encontrar la orientación del eje, no permite distinguir entre los dos ejes y, entonces, se tendrá que determinar de qué eje se trata utilizando la información proporcionada por el fabricante. De cualquier manera, en el peor de los casos, una confusión entre ambos ejes solamente introducirá un cambio entre polarización derecha e izquierda y este cambio se notará

---

<sup>†</sup> Aún en el caso de tener un láser linealmente polarizado, es recomendable colocar este primer polarizador para mejorar la calidad de la polarización lineal incidente.

inmediatamente en los valores medidos de la matriz de Mueller, de manera que se pueda hacer la corrección a tiempo.

Una vez que se encontró la dirección del eje rápido del retardador, éste debe girarse hasta que su eje haga un ángulo de  $+45^\circ$  respecto a la dirección de polarización horizontal que se tomó, por convención, como la dirección de polarización de referencia para la calibración.

En este punto de la discusión es oportuno aclarar que la dirección de  $+45^\circ$  se debe tomar partiendo de que el observador está viendo hacia la fuente y se tiene un sistema de mano derecha. De otra forma, puede haber confusión entre  $+45^\circ$  y  $-45^\circ$ .

En principio, el método aquí descrito producirá luz con polarización circular. Sin embargo, una medición de la excentricidad del estado de polarización generalmente revelará que lo que se tiene no es polarización circular, sino elíptica. Variando ligera y progresivamente el ángulo de orientación del eje rápido, se puede determinar la orientación a la que se obtiene el valor de la excentricidad más cercano a 1. Una vez conocido este ángulo, se gira el eje del retardador  $90^\circ$  y se repite el procedimiento anterior para determinar a qué orientación se tiene la excentricidad más cercana a 1, para la otra dirección de giro. Cabe mencionar que a pesar de que teóricamente el ángulo entre ambas direcciones es de  $90^\circ$ , en la práctica esto puede variar un poco debido a imperfecciones en la estructura o el corte del cristal del retardador, así como a limitaciones de los polarizadores que se utilicen.

Por último, hay que mencionar que el método anterior para la obtención de polarización circular, aunque es uno de los métodos más utilizados, no es el único. También se podría obtener polarización circular con un rombo de Fresnel, por ejemplo.

### **4.3 Caracterización de los elementos ópticos.**

Independientemente de la calidad de los componentes ópticos que se utilicen, es necesario caracterizarlos con el fin de introducir todos los factores de corrección necesarios para el análisis de los resultados. Los parámetros a medir son: el coeficiente de transmisión de los elementos ópticos (ya que solamente en el caso ideal un elemento óptico tendrá una transmisión igual a uno) y su sensibilidad a ligeras variaciones en la orientación de sus ejes propios (es decir, qué tanto se afecta la calidad de la polarización que se obtiene si se gira un poco el eje propio del elemento respecto a la dirección del mejor caso).

Para hacer la medición del coeficiente de transmisión de algún elemento óptico, primero se debe medir la intensidad o potencia de salida del láser linealmente polarizado cuando no hay nada entre él y el detector. La condición de polarización lineal sobre el haz incidente se recomienda porque resulta útil para caracterizar elementos ópticos con eje propio o de transmisión. Después, se coloca el elemento óptico que se quiera caracterizar y se mide la intensidad que sale de él cuando su eje propio es paralelo a la dirección de polarización incidente. El coeficiente de transmisión estará dado por el cociente de la intensidad medida cuando el elemento está entre el láser y el detector, entre la intensidad medida cuando no lo está. El factor de transmisión que se obtiene por este método debe ser utilizado con los valores de intensidad medidos, de manera que se pueda llevar la intensidad de cierto estado de polarización a su valor real, que puede diferir notablemente del valor medido debido a la absorción o reflexiones parásitas dentro del analizador y/o polarizador.

Los coeficientes de transmisión medidos para cada uno de los elementos polarizadores que se utilizaron en las mediciones, se presentan en la tabla 4.1.

Elemento polarizador	Coficiente de transmisión
Retardador de $\lambda/2$	$0.9961 \pm 7.3964 \times 10^{-6}$
Retardador de $\lambda/4$ (polarizador)	$0.9923 \pm 1.4793 \times 10^{-5}$
Retardador de $\lambda/4$ (analizador)	$0.9591 \pm 8.3298 \times 10^{-5}$
Polarizador lineal	$0.5713 \pm 8.7463 \times 10^{-4}$

Tabla 4.1. Coeficientes de transmisión de los elementos polarizadores<sup>‡</sup>.

En la tabla anterior, el retardador de  $\lambda/4$  señalado como polarizador es el que se utilizó para generar la polarización circular de la luz incidente, y el señalado como analizador es el que se utilizó para detectar la componente circularmente polarizada de la luz reflejada por el espejo. Como se puede ver en esta tabla, los retardadores de cuarzo tienen una transmisión muy alta, mayor al 95%, mientras que el polarizador lineal solamente transmite un poco más del 57% de la luz que incide en él.

<sup>‡</sup> El polarizador lineal es un polarizador dicróico fabricado con polímeros y los tres retardadores están fabricados con cristales de cuarzo.

Como se mencionó al principio de esta sección, es importante medir la sensibilidad de los polarizadores y analizadores a desviaciones en la orientación de su eje propio respecto a aquella que da la mejor calidad en la polarización. Esta parte de la caracterización de los elementos polarizadores se hizo introduciendo pequeños errores en la dirección del eje propio de cada uno de ellos,  $\sim 0.5^\circ$ , y determinando qué tanto cambiaba la calidad del estado de polarización correspondiente. El procedimiento seguido en esta prueba fue diferente para los retardadores y el polarizador. Para los primeros, se determinó cuál era la dirección de su eje rápido siguiendo el método que se discutió en la sección anterior (en el cuál el retardador se encuentra entre dos polarizadores con sus ejes de transmisión ortogonales entre sí) y se fue cambiando la orientación del eje del retardador en intervalos de  $0.5^\circ$ , hasta que la intensidad medida por el detector se hizo diferente de cero.

Por otro lado, para caracterizar el polarizador lineal se quitó el primer polarizador, de manera que la polarización era generada por el polarizador que se estaba caracterizando, y se encontró la orientación de su eje de transmisión para la cual la intensidad medida por el detector era cero. Después, se giró el polarizador que se estaba probando, en incrementos de  $1^\circ$ , hasta que el detector midió una intensidad distinta de cero, lo cual indicaba que la polarización generada ya no era ortogonal a la dirección de transmisión del segundo polarizador, y entonces, la orientación del eje propio del polarizador estaba más allá de su intervalo de tolerancia.

De esta manera se estimaron las tolerancias a errores en la orientación del eje propio de los diferentes polarizadores y analizadores. Aunque esta técnica puede servir para valorar la respuesta de los polarizadores y retardadores que se utilizaron, está limitada por la resolución del detector y la calidad de los polarizadores que sirven de referencia.

Los resultados de las pruebas anteriores indicaron que el polarizador lineal tiene una tolerancia de  $\sim 2 \pm 0.5^\circ$  en cada dirección (es decir, un total de  $\sim 5^\circ$ ), mientras que los retardadores de  $\lambda/4$  pueden tolerar menos de  $1^\circ$  de desviación sin que la calidad de la polarización se vea claramente afectada. Esto no representa mayor problema con los retardadores de  $\lambda/4$ , que son los más sensibles a estas variaciones, ya que a éstos no se les cambió la orientación durante las mediciones. Sin embargo, al retardador de  $\lambda/2$  (cuya tolerancia a desviaciones es del orden de  $3^\circ$ ) y al polarizador lineal, sí se les cambiaba la orientación constantemente, lo cual pudo afectar las mediciones pero, como ya se ha mencionado, éstos tienen una tolerancia mayor que la de los retardadores de  $\lambda/4$ .

Durante las mediciones, también se utilizó un prisma polarizador tipo Glan-Thompson para generar la polarización lineal incidente que se utilizó como referencia. Sin embargo, éste polarizador jamás fue girado y estuvo presente en todas las mediciones por lo que, si llegó a afectarlas, lo hizo en la misma proporción para todas ellas.

A lo largo de los años se han hecho muchos estudios teórico-experimentales<sup>[1-4]</sup> en los que se hace hincapié en que el control de la orientación de los ejes propios de los elementos polarizadores es un aspecto crítico que debe ser tomado en cuenta en la medición de la matriz de Mueller, ya que cualquier variación en la orientación del eje propio de alguno de los elementos ópticos, que ocasionaría un decremento en la calidad de la polarización generada o detectada, se notará inmediatamente en los elementos de la matriz medida, provocando que ésta sea diferente de lo que se espera. Dichos estudios usan dispositivos que cuentan con motores de pasos, o platinas rotacionales controladas electrónicamente, para garantizar el mayor control posible en la orientación de los ejes propios de los elementos polarizadores y la capacidad de repetir las mediciones sin la falta de precisión que implica un control manual. En la parte teórica de estos estudios se han hecho análisis sobre los efectos de pequeños errores de orientación sobre los valores de los elementos de la matriz de Mueller de una muestra. Estos estudios pueden ser matemáticamente engorrosos, además de que las mejoras que se obtienen a partir de ellos generalmente no son muy grandes y solamente resultan útiles cuando se tiene la necesidad de medir la matriz de Mueller con mucha precisión. No obstante, el trabajo realizado en esta investigación sugiere que si la precisión con la que se necesita medir la matriz de Mueller de algún elemento óptico no es mucha, menor al 8%, se puede hacer de manera relativamente fácil y sin la necesidad de contar con equipo muy sofisticado que, en conjunto, puede hacer al sistema demasiado costoso, aunque la reducción en el costo signifique pérdida de exactitud.

#### **4.4 Matriz de Mueller del vacío.**

Antes de hacer mediciones de la matriz de Mueller de algún elemento óptico desconocido, es recomendable medir primero la de algún elemento con matriz conocida, tal como el vacío, un polarizador, un retardador, etc. De esta manera es posible hacer una valoración de la confiabilidad del método y de los componentes del sistema, comparando los resultados que se obtengan experimentalmente con los que se esperan de la teoría.

En este trabajo se midió la matriz de Mueller del vacío y se obtuvo el siguiente resultado

$$M_{\text{vacío}} = \begin{pmatrix} 1.0019 & 0.0020 & 0.0020 & 0.0018 \\ -0.0117 & 0.9882 & 0.0119 & -0.0081 \\ -0.0623 & 0.0207 & 1.0247 & 0.0425 \\ -0.0439 & 0.1016 & 0.0580 & 0.9453 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.00501 & 0.00001 & 0.00001 & 0.00007 \\ 0.01405 & 0.00154 & 0.00004 & 0.00011 \\ 0.01397 & 0.00006 & 0.00160 & 0.00019 \\ 0.01482 & 0.00019 & 0.00012 & 0.00168 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Como es de esperarse, la matriz de Mueller del vacío debe ser la matriz identidad, dado que la luz no sufre cambios en su estado de polarización cuando viaja en él. Sin embargo, eso no es lo que se obtuvo. Las diferencias entre la matriz anterior y la matriz identidad se deben, principalmente, a la falta de control en la orientación de los ejes propios de los polarizadores y analizadores, y puede ser que, en menor medida, a la calidad de los mismos.

Estas diferencias entre la matriz de Mueller teórica y la medida para el caso del vacío, sugieren que se puede esperar que los resultados experimentales que se obtengan para el espejo elipsoidal, sean confiables solamente hasta la primera o segunda cifra significativa. También se esperaba que los elementos de la matriz que involucran la medición de estados de polarización con luz incidente, y/o detectada, circularmente polarizada (es decir, los elementos del cuarto renglón y de la cuarta columna de la matriz) se alejen más de los valores teóricos, debido a la falta de control en la generación y detección de este estado de polarización.

#### 4.5 Medición de la matriz de Mueller.

Cuando se habla de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal que motivó este trabajo, en realidad se está pensando en el conjunto de matrices de Mueller de cada punto sobre él, ya que, debido a que el ángulo de incidencia para un rayo que sale de la posición del primer foco e incide en un determinado punto del espejo es diferente para cada punto, los valores de los elementos de la matriz de Mueller para cada punto serán, en general, diferentes a los de otro.

Sin embargo, en el análisis teórico de este problema (capítulo 2) queda claro que los valores de los elementos de la matriz de Mueller de un punto respecto a otro cercano a él, van cambiando “suavemente” a medida que el segundo se aleja del primero (figura 2.1). Esta “suavidad” en el cambio de los elementos de la matriz, se debe a la forma regular del espejo. Esto es, debido a que

para dos puntos sobre el espejo cercanos entre sí, el valor del ángulo de incidencia en uno es muy parecido al del otro, los coeficientes de Fresnel para ambos puntos, y en consecuencia los valores de los elementos de la matriz, toman valores muy parecidos.

Para una correcta medición de la matriz de Mueller, es necesario tomar en cuenta los siguientes aspectos: la luz debe incidir en los elementos polarizadores de manera ortogonal, es decir, a incidencia normal. De no ser así, se obtendrían resultados incorrectos debido a que el retardo de fase introducido por los retardadores está calculado para el ancho del cristal a incidencia normal, de manera que cualquier variación en la longitud de camino óptico, o variación de la dirección de incidencia respecto a la orientación del eje óptico del cristal, reducirá la calidad de la polarización generada o detectada, según sea el caso, provocando errores en la medición de los elementos de la matriz.

Otro aspecto que debe tomarse en cuenta es que, generalmente, los divisores de haz (uno de los cuales es parte del sistema original del esparcímetero que motivo este estudio) reflejan mejor algunos estados de polarización que otros, dependiendo del ángulo de incidencia. Por tal motivo, la presencia de un divisor de haz interferirá en la correcta medición e interpretación de los datos experimentales. Por esta razón, la inclusión de este tipo de elementos debe ser omitida en el diseño de un sistema para medir estados de polarización.

Tomando los puntos anteriores en consideración, es posible hacer la medición de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal.

#### **4.6 Medición con la cámara CCD.**

El primer intento por medir la matriz de Mueller del espejo elipsoidal se hizo usando como detector de intensidad la cámara CCD<sup>§</sup> que es parte del diseño original del esparcímetero. Para esto, se montó un láser auxiliar (que solamente se usaría para medir la matriz del espejo) de manera que el haz incidente pasara por la posición del primer foco del espejo elipsoidal antes de incidir en él. Esta condición es necesaria debido a que los cálculos de la matriz de Mueller del espejo se hicieron considerando que la luz incidente, con cierto estado de polarización, sale de la posición de este foco hacia el espejo. Este punto es muy importante porque si el haz láser no llega al espejo elipsoidal pasando por la posición del primer foco, el ángulo de incidencia en el espejo

---

<sup>§</sup> La cámara CCD utilizada es el modelo XC-ST70 de SONY.

será diferente al considerado en la teoría, provocando que los coeficientes de Fresnel no correspondan a los calculados para cada punto del espejo y, en consecuencia, los resultados experimentales no tendrían porque ser consistentes con las predicciones teóricas. Cabe mencionar que se consideró este caso porque es el que resulta útil según el diseño del esparcímetro.

Para generar el estado de polarización incidente, se colocó un polarizador tipo Glan-Thompson\*\* enfrente del láser, de manera que sólo dejara pasar la componente verticalmente polarizada del haz. Después, se colocó un retardador de  $\lambda/2$  (que permitía cambiar la polarización vertical a horizontal y a  $+45^\circ$ ) seguido de un retardador de  $\lambda/4$  (que producía la polarización circular derecha cuando se combinaba con el retardador de  $\lambda/2$  orientado de manera que generara polarización lineal horizontal). La figura 4.1 muestra el arreglo experimental.

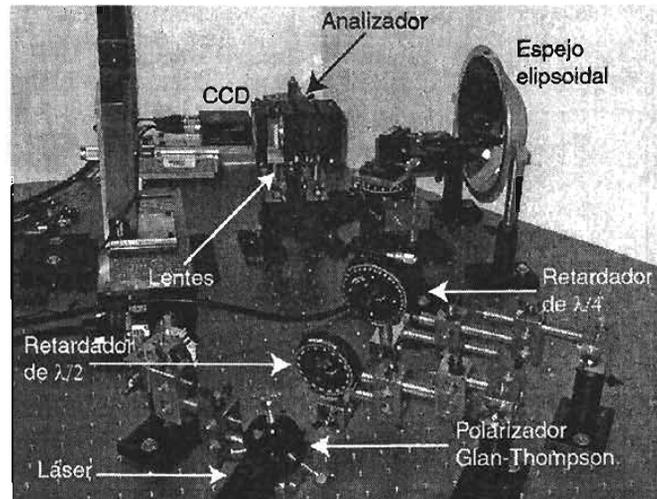


Figura 4.1. Arreglo experimental para la medición de la matriz de Mueller del espejo con la cámara CCD.

Como analizador lineal, para medir la componente horizontal y a  $+45^\circ$ , se colocaba uno de los polarizadores lineales en medio del sistema de lentes, donde el haz está más o menos colimado. Delante del analizador lineal se colocaba un retardador de  $\lambda/4$  calibrado de tal forma que cuando el primero estaba orientado para medir polarización horizontal, la combinación de ambos producía un analizador circular derecho. El último analizador utilizado (como es requerido por el método) fue el vacío, es decir, se midió la intensidad total reflejada por el espejo para cada estado de polarización incidente.

\*\* Este polarizador está fabricado con un cristal de calcita.

Las imágenes obtenidas con la cámara CCD se analizaron para determinar cuál era la intensidad relativa de la imagen del haz para las diferentes configuraciones de polarizador-analizador. El análisis consistía en determinar la intensidad relativa de todos los píxeles de la imagen mediante un algoritmo del programa Origin, sumar la intensidad correspondiente a los píxeles más brillantes, que son los que corresponden a la imagen del haz, y normalizarlos respecto al máximo valor posible de la intensidad (es decir, el valor que tendría si el haz incidiera directamente en el CCD), para determinar qué fracción de la luz incidente era reflejada hacia el CCD con un estado de polarización dado. Las intensidades medidas de esta manera eran divididas por el factor de transmisión correspondiente, para obtener la intensidad real de cada componente de polarización. Como ejemplo de los resultados que se obtuvieron con este método, la tabla 4.2 presenta los valores de intensidad relativa obtenidos experimentalmente para cada combinación polarizador-analizador, sus respectivos valores de acuerdo con la teoría, y la diferencia entre ellos para el punto  $y=+39mm$ ,  $x=0mm$  sobre el espejo.

Combinación	Experimental	Teórica	Diferencia
$I_{H0}$	$0.7891 \pm 0.0050$	0.7950	0.0059
$I_{V0}$	$0.7871 \pm 0.0050$	0.7881	0.0010
$I_{+0}$	$0.7703 \pm 0.0050$	0.7916	0.0213
$I_{R0}$	$0.7796 \pm 0.0051$	0.7916	0.0120
$I_{HH}$	$0.8385 \pm 0.0111$	0.7950	-0.0435
$I_{VH}$	$0.1067 \pm 0.0090$	0.0000	-0.1067
$I_{+H}$	$0.4276 \pm 0.0099$	0.3975	-0.0301
$I_{RH}$	$0.5186 \pm 0.0103$	0.3975	-0.1211
$I_{H+}$	$0.4673 \pm 0.0100$	0.3975	-0.0698
$I_{V+}$	$0.4974 \pm 0.0101$	0.3941	-0.1033
$I_{++}$	$0.1587 \pm 0.0092$	0.0000	-0.1587
$I_{R+}$	$0.3830 \pm 0.0099$	0.4002	0.0172
$I_{HR}$	$0.4080 \pm 0.0104$	0.3975	-0.0105
$I_{VR}$	$0.4869 \pm 0.0106$	0.3941	-0.0928

$I_{+R}$	$0.5331 \pm 0.0107$	0.3913	-0.1418
$I_{RR}$	$0.1308 \pm 0.0096$	0.0000	-0.1308

Tabla 4.2. Comparación de las intensidades relativas calculadas y las medidas con la cámara CCD, para el punto  $y=+39mm, x=0mm$  sobre el espejo elipsoidal.

De los datos experimentales mostrados en la tabla 4.2 se obtiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0.7881 & 0.0010 & -0.0178 & -0.0085 \\ 0.1571 & 0.7308 & -0.0722 & 0.1005 \\ 0.1766 & -0.0311 & -0.6295 & -0.1902 \\ 0.1068 & -0.0799 & 0.1891 & -0.6248 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.00501 & 0.00001 & 0.00001 & 0.00006 \\ 0.01508 & 0.00200 & -0.00022 & 0.00041 \\ 0.01512 & -0.00005 & -0.00172 & -0.00038 \\ 0.01592 & -0.00020 & 0.00055 & -0.00175 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La matriz correspondiente a ese punto, de acuerdo a la teoría, es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0.7916 & 0.0034 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0034 & 0.7916 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.7915 & 0.0089 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0089 & -0.7915 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Como se puede ver de las matrices anteriores, las diferencias entre los elementos de la matriz calculada y la medida, son relativamente grandes, al menos para la mayoría de ellos. Además, el comportamiento de las variaciones no es regular, ya que algunos de los elementos son mayores en la matriz experimental que en la teórica, y en otros el comportamiento es al revés. Estas diferencias se repitieron en las mediciones que se hicieron para diferentes puntos sobre el espejo, por lo que se llegó a la conclusión de que algo estaba mal en el método de medición y por lo tanto, éste debía ser analizado.

El resultado del análisis sobre las posibles causas de error en la medición de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal usando la cámara CCD, señaló que entre las causas de esto estaban las lentes y una posible desviación de la respuesta lineal del CCD.

El error introducido por las lentes se debe a que éstas pueden producir variaciones en el estado de polarización al pasar la luz a través de ellas. La razón de esto se encuentra en dos factores: la diferencia de los coeficientes de Fresnel para diferentes ángulos de incidencia sobre la superficie

de las lentes, y una birrefringencia no esperada que tiene su origen en tensiones dentro de las lentes que se pueden haber generado durante la fabricación de las mismas.

La primera fuente de error, debida a los coeficientes de Fresnel, es prácticamente inevitable, aunque generalmente afecta en menor medida comparada con la segunda. Por otro lado, para evitar la birrefringencia inducida por tensiones dentro de las lentes, se ha propuesto un método que consiste en darles un tratamiento de endurecimiento por calentamiento<sup>[5]</sup>. En este método, se les da un tratamiento a unas lentes que presentan un retardo de fase, con simetría radial, que interfiere en las mediciones que se desean hacer con un elipsómetro<sup>††</sup>. El retardo debido a esas lentes va desde  $0^\circ$  en el centro, hasta  $14^\circ$  en la orilla. El tratamiento que se les da consiste en el calentamiento gradual de las lentes para producirles un endurecimiento que, según lo que se espera, liberará las tensiones y reducirá el retardo que presentan. Después del tratamiento, se ha logrado reducir el retardo introducido por las lentes en un factor de 5 pero, aún con esto, el retardo es suficientemente grande para afectar las mediciones. El método de endurecimiento por calentamiento aún está en proceso de desarrollo, por lo que lo mejor es evitar el uso de lentes en este tipo de sistemas, al menos por el momento.

La desviación de un comportamiento lineal por parte del CCD, es otra de las posibles explicaciones a las diferencias entre las mediciones y la teoría. Esta desviación ha sido estudiada con anterioridad y se relaciona con la función de esparcimiento de punto<sup>[6]</sup> (PSF, point-spread function) del detector, que tiene que ver con el límite de difracción de los píxeles del chip CCD. Esto es, se ha encontrado que, para este tipo de sistemas, la luz que llega a uno de los píxeles, en general puede venir de diferentes puntos en el objeto, y no solamente del punto objeto que le corresponde a ese punto imagen. La correcta interpretación de los datos obtenidos con el CCD, para fines de radiometría, debe hacerse introduciendo la PSF en el análisis. Sin embargo, esto no es sencillo, ya que se debe caracterizar con mucho cuidado el CCD que se utilice.

Una fuente extra de error se encuentra, como se dijo en la sección anterior, en el ángulo de incidencia del haz sobre la superficie de los retardadores. En dicha sección se dijo que debía tenerse siempre incidencia normal sobre la superficie de los retardadores. Sin embargo, debido a que esa fuente de error tiene su origen en el cambio del retardo para incidencia diferente a la

---

<sup>††</sup> Un elipsómetro es un sistema que sirve para medir propiedades polarizantes de los objetos. La diferencia entre un elipsómetro y un polarímetro es que en el primero se tienen tanto los elementos para controlar el estado de polarización de la luz incidente como los elementos para analizar los diferentes estados de polarización, mientras que en el segundo sólo se tienen los elementos analizadores.

normal, también se puede corregir girando el retardador de manera que, a pesar de que no se tenga incidencia normal, la polarización detectada corresponda a polarización circular. Para esto, se tendría que calibrar el ángulo de giro del eje del retardador, para detectar polarización circular como función del ángulo de incidencia sobre su superficie (ver figura 4.2).

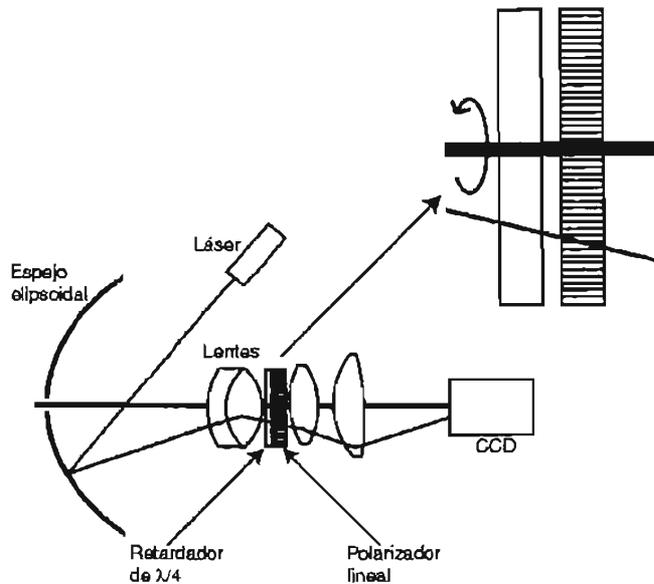


Figura 4.2. Diagrama de la calibración del retardador de  $\lambda/4$  para detectar polarización circular como función del ángulo de incidencia.

Por último, también es importante hacer notar que es posible que las intensidades que se midan sean muy diferentes entre sí, y puedan estar distribuidas sobre un intervalo mayor al intervalo de operación del CCD, limitando su uso en este tipo de mediciones.

Debido a todo lo anterior, se optó por usar otro detector que facilitara las mediciones y hacerlas sin que la luz tuviera que pasar por las lentes del esparcímetero. Este otro método se discute en detalle en la siguiente sección.

#### 4.7 Medición con el medidor de potencia óptica.

Debido a las dificultades que presentó el método anterior para la medición de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal, se decidió hacer las mediciones con un medidor de potencia

óptica<sup>††</sup>. De esta manera, es posible utilizar casi directamente los valores mostrados por el detector, solamente es necesario medir la potencia incidente para poder normalizar las mediciones e incluir el coeficiente de transmisión. Como el medidor de potencia óptica en realidad mide la potencia promedio del haz, las ecuaciones obtenidas en términos de la intensidad son directamente aplicables a estas mediciones.

Similarmente a lo que se hizo en el caso anterior, se colocó el láser auxiliar de manera que su luz incidiera en el espejo elipsoidal con la condición de que el haz pasara por la posición del primer foco. La figura 4.3 muestra el arreglo experimental para este método.

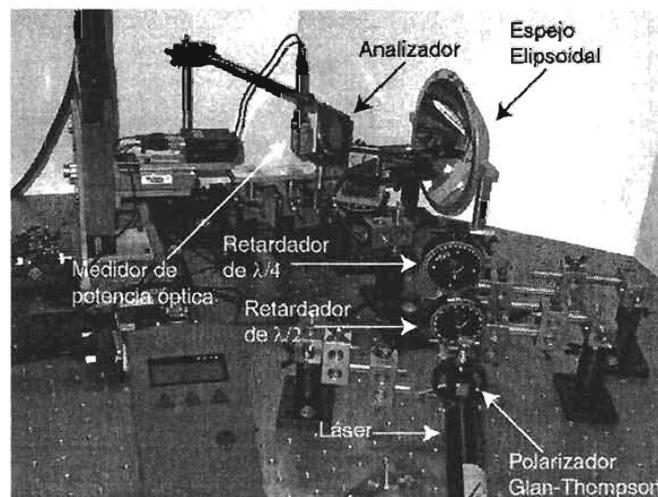


Figura 4.3. Arreglo experimental para la medición de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal con el medidor de potencia óptica.

Como es de esperarse, el haz incidente es reflejado en la superficie del espejo elipsoidal siguiendo la ley de la reflexión y las ecuaciones de Fresnel, lo que altera la amplitud de cada componente de polarización de la luz reflejada y genera un estado de polarización que, en general, es completamente diferente al estado original. El estado de polarización del haz reflejado se analizó con los diferentes analizadores, y se hicieron mediciones de la potencia reflejada para cada componente de polarización.

Posteriormente, las potencias medidas para cada combinación polarizador-analizador fueron introducidas en un programa<sup>§§</sup> que se hizo para automatizar el cálculo de los elementos de la matriz de Mueller a partir de las lecturas del medidor de potencia óptica. Dicho programa utiliza

<sup>††</sup> El medidor utilizado es el modelo PD300-SH de OPHIR OPTRONICS.

<sup>§§</sup> El código del programa puede ser consultado en el Apéndice C.

las ecuaciones que relacionan la intensidad para cada combinación polarizador-analizador con los elementos de la matriz de Mueller (ver sección 3.4), así como los factores de corrección debidos a los coeficientes de transmisión de los elementos ópticos.

La primera medición de la matriz de Mueller de un punto sobre el espejo utilizando este método, se hizo para un punto sobre un plano horizontal, i.e. paralelo al plano de la mesa óptica, que incluye al eje óptico del espejo. Los valores medidos fueron posteriormente comparados con los valores teóricos predichos para el punto correspondiente y los resultados de dicha comparación se muestra a continuación.

A la izquierda se presentan las potencias medidas, en  $mW$ , para el punto indicado a la derecha, debajo de la potencia incidente.

$I_{H0} = 1.70$	$I_{HH} = 0.97$	$I_{H+} = 0.51$	$I_{HR} = 0.43$	$I_0 = 2.21 \pm 0.005 mW$ $y = +43 \pm 0.5 mm$ $x = 0 \pm 0.5 mm$
$I_{V0} = 1.75$	$I_{VH} = 0.00$	$I_{V+} = 0.48$	$I_{VR} = 0.44$	
$I_{+0} = 1.72$	$I_{+H} = 0.48$	$I_{++} = 0.00$	$I_{+R} = 0.43$	
$I_{R0} = 1.73$	$I_{RH} = 0.48$	$I_{R+} = 0.44$	$I_{RR} = 0.00$	

En la figura 4.4 se muestra la posición de este punto (punto 1) en la abertura del espejo.

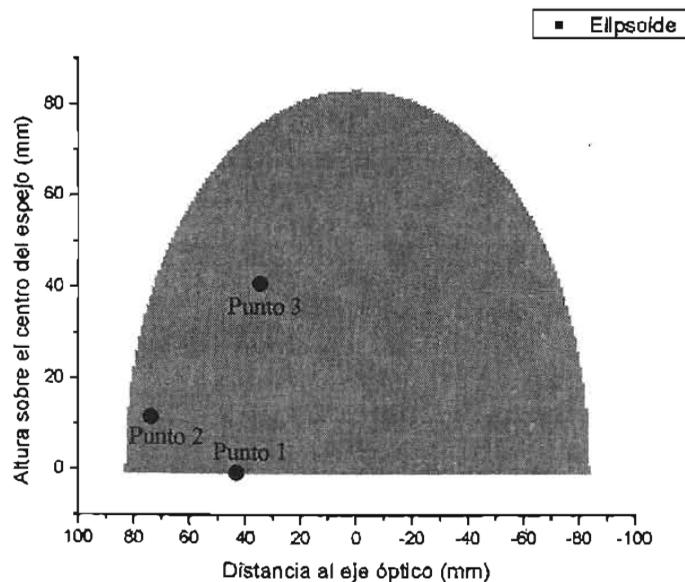


Figura 4.4. Posición en la abertura del espejo de algunos de los puntos para los que se midió la matriz de Mueller del espejo elipsoidal.

Normalizando las potencias anteriores con el valor de  $I_0$  se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 I_{H0} &= 0.7726 \pm 0.0050 & I_{HH} &= 0.7717 \pm 0.0100 & I_{H+} &= 0.4057 \pm 0.0094 & I_{HR} &= 0.3567 \pm 0.0097 \\
 I_{V0} &= 0.7922 \pm 0.0050 & I_{VH} &= 0.0000 \pm 0.0088 & I_{V+} &= 0.3804 \pm 0.0093 & I_{VR} &= 0.3635 \pm 0.0097 \\
 I_{+0} &= 0.7817 \pm 0.0050 & I_{+H} &= 0.3818 \pm 0.0094 & I_{++} &= 0.0000 \pm 0.0088 & I_{+R} &= 0.3567 \pm 0.0097 \\
 I_{R0} &= 0.7924 \pm 0.0051 & I_{RH} &= 0.3898 \pm 0.0095 & I_{R+} &= 0.3527 \pm 0.0094 & I_{RR} &= 0.0000 \pm 0.0092
 \end{aligned}$$

de donde, la matriz de Mueller obtenida experimentalmente es

$$\begin{pmatrix} 0.7824 & -0.0098 & -0.0007 & 0.0100 \\ -0.0107 & 0.7815 & -0.0074 & -0.0021 \\ 0.0037 & 0.0351 & -0.7854 & -0.0907 \\ -0.0622 & 0.0030 & -0.0061 & -0.7302 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.00501 & 0.00001 & 0.00001 & 0.00006 \\ 0.01371 & 0.00121 & 0.00001 & 0.00011 \\ 0.01373 & 0.00006 & -0.00118 & 0.00001 \\ 0.01444 & 0.00001 & 0.00001 & -0.00105 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Por otro lado, de la teoría se tiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0.7916 & 0.0057 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0057 & 0.7916 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.7914 & 0.0148 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0148 & -0.7914 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Como se puede ver en las matrices anteriores, aún hay diferencias entre los valores experimentales de los elementos de la matriz y sus correspondientes valores teóricos. Sin embargo, las diferencias por este método son menores a las que se tenían con el método anterior y pueden ser atribuidas a errores experimentales debidos a la falta de control en el ángulo de giro de los polarizadores y retardadores, ya que éstos fueron controlados manualmente. En este caso, igual que en el del vacío, las diferencias más grandes vienen a partir de la segunda cifra significativa y son mayores para el elemento  $m_{44}$ .

A pesar de las diferencias entre los resultados teóricos y los experimentales, se decidió utilizar este método como el método de medición formal para otros puntos del espejo, dado que las diferencias entre teoría y experimento son menores comparadas con las obtenidas usando la cámara CCD.

Los puntos que se muestran a continuación fueron medidos dos veces cada uno, para reducir los posibles errores introducidos por la falta de control en el ángulo de giro. Las potencias correspondientes de ambas mediciones se promediaron y el resultado fue tomado como el valor medido de la potencia, que posteriormente fue normalizado.

Por ejemplo, para otro de los puntos analizados (punto 2 en la figura 4.4) se tienen los siguientes valores, en  $mW$

$$\begin{array}{cccc}
 I_{H0} = 1.52 & I_{HH} = 0.85 & I_{H+} = 0.34 & I_{HR} = 0.43 \\
 I_{V0} = 1.69 & I_{VH} = 0.01 & I_{V+} = 0.57 & I_{VR} = 0.40 \\
 I_{+0} = 1.60 & I_{+H} = 0.35 & I_{++} = 0.01 & I_{+R} = 0.46 \\
 I_{R0} = 1.58 & I_{RH} = 0.44 & I_{R+} = 0.38 & I_{RR} = 0.00
 \end{array} \pm 0.005$$

$$\begin{array}{l}
 I_0 = 2.13 \pm 0.005 mW \\
 y = +74 \pm 0.5 mm \\
 x = +11 \pm 0.5 mm
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 I_{H0} = 1.53 & I_{HH} = 0.86 & I_{H+} = 0.34 & I_{HR} = 0.43 \\
 I_{V0} = 1.69 & I_{VH} = 0.01 & I_{V+} = 0.59 & I_{VR} = 0.40 \\
 I_{+0} = 1.60 & I_{+H} = 0.34 & I_{++} = 0.02 & I_{+R} = 0.47 \\
 I_{R0} = 1.59 & I_{RH} = 0.44 & I_{R+} = 0.37 & I_{RR} = 0.00
 \end{array} \pm 0.005$$

A partir de estos datos, se obtienen las siguientes potencias normalizadas

$$\begin{array}{cccc}
 I_{H0} = 0.7189 \pm 0.0050 & I_{HH} = 0.7055 \pm 0.0099 & I_{H+} = 0.2805 \pm 0.0092 & I_{HR} = 0.3699 \pm 0.0098 \\
 I_{V0} = 0.7935 \pm 0.0050 & I_{VH} = 0.0082 \pm 0.0088 & I_{V+} = 0.4767 \pm 0.0095 & I_{VR} = 0.3428 \pm 0.0097 \\
 I_{+0} = 0.7542 \pm 0.0050 & I_{+H} = 0.2847 \pm 0.0092 & I_{++} = 0.0124 \pm 0.0088 & I_{+R} = 0.4000 \pm 0.0098 \\
 I_{R0} = 0.7529 \pm 0.0051 & I_{RH} = 0.3659 \pm 0.0094 & I_{R+} = 0.3118 \pm 0.0093 & I_{RR} = 0.0000 \pm 0.0092
 \end{array}$$

De donde, la matriz de Mueller de este punto es

$$\begin{pmatrix} 0.7562 & -0.0373 & -0.0020 & -0.0032 \\ -0.0425 & 0.7346 & -0.1424 & 0.0213 \\ 0.0010 & -0.1588 & -0.7305 & -0.1303 \\ -0.0435 & 0.0645 & 0.0894 & -0.7094 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.00501 & 0.00001 & 0.00001 & 0.00006 \\ 0.01362 & 0.00109 & -0.00020 & 0.00015 \\ 0.01369 & -0.00028 & -0.00110 & -0.00009 \\ 0.01443 & 0.00007 & 0.00017 & -0.00104 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Ahora bien, de la teoría se tiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0.7892 & 0.0366 & -0.0003 & 0.0000 \\ 0.0350 & 0.7539 & -0.2314 & 0.0275 \\ -0.0105 & -0.2333 & -0.7475 & 0.0917 \\ 0.0000 & -0.0009 & -0.0958 & -0.7825 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Comparando ambas matrices es posible notar que los valores de la matriz medida son diferentes a los de la calculada, y que los términos más grandes (en valor absoluto) de esta última, son también los más grandes de la matriz medida, aunque todos estos valores en la matriz medida son menores (en valor absoluto) que los calculados. Por ejemplo, para este punto hay dos términos fuera de la diagonal que son notablemente diferentes de cero,  $m_{23}$  y  $m_{32}$ . Este cambio en los valores de  $m_{23}$  y  $m_{32}$  se debe a que el punto al que corresponden esas matrices, es un punto que ya está fuera del plano horizontal que contiene al eje óptico del espejo. Como se puede ver en la ecuación (4.6), que es la matriz medida, estos mismos elementos también comienzan a ser diferentes de cero, pero se mantienen por debajo (en valor absoluto) de los valores teóricos, al igual que los valores de la diagonal, aunque tanto los valores teóricos como los experimentales tienen el mismo signo. También es fácil notar que el elemento  $m_{44}$  medido, está más por debajo (en valor absoluto) del valor calculado, que los otros elementos de la diagonal. Este elemento está relacionado con la medición de la potencia reflejada para polarización incidente circular derecha, analizada con el polarizador circular derecho y, al igual que en la medición de la matriz de Mueller del vacío, los problemas en la detección y generación de este estado, afectan considerablemente el valor de  $m_{44}$ . Como se mencionó en la sección 4.4, esto deja ver que, en general, este término será uno de los que más se alejen de los valores esperados, debido a la falta de control en la polarización circular, tal y como se observa.

Ahora, considérese otro de los puntos en los que se midió la matriz de Mueller del espejo (punto 3 en la figura 4.4), al cual le corresponden los siguientes datos, en  $mW$

$$\begin{array}{llll} I_{H0} = 1.54 & I_{HH} = 0.70 & I_{H+} = 0.09 & I_{HR} = 0.38 \\ I_{V0} = 1.60 & I_{VH} = 0.15 & I_{V+} = 0.79 & I_{VR} = 0.42 \\ I_{+0} = 1.54 & I_{+H} = 0.08 & I_{++} = 0.16 & I_{+R} = 0.41 \\ I_{R0} = 1.56 & I_{RH} = 0.37 & I_{R+} = 0.36 & I_{RR} = 0.00 \end{array} \pm 0.005$$

$$\begin{array}{l} I_0 = 2.02 \pm 0.005 mW \\ y = +35 \pm 0.5 mm \\ x = +40 \pm 0.5 mm \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 I_{H0} = 1.54 & I_{HH} = 0.71 & I_{H+} = 0.09 & I_{HR} = 0.40 \\
 I_{V0} = 1.61 & I_{VH} = 0.15 & I_{V+} = 0.78 & I_{VR} = 0.42 \\
 I_{+0} = 1.55 & I_{+H} = 0.08 & I_{++} = 0.17 & I_{+R} = 0.42 \\
 I_{R0} = 1.56 & I_{RH} = 0.37 & I_{R+} = 0.35 & I_{RR} = 0.00
 \end{array} \pm 0.005$$

A partir de estos valores, se obtienen las siguientes potencias normalizadas

$$\begin{array}{cccc}
 I_{H0} = 0.7633 \pm 0.0050 & I_{HH} = 0.6160 \pm 0.0097 & I_{H+} = 0.0781 \pm 0.0089 & I_{HR} = 0.3528 \pm 0.0097 \\
 I_{V0} = 0.7925 \pm 0.0050 & I_{VH} = 0.1296 \pm 0.0090 & I_{V+} = 0.6784 \pm 0.0098 & I_{VR} = 0.3785 \pm 0.0097 \\
 I_{+0} = 0.7658 \pm 0.0050 & I_{+H} = 0.0694 \pm 0.0089 & I_{++} = 0.1432 \pm 0.0090 & I_{+R} = 0.3754 \pm 0.0098 \\
 I_{R0} = 0.7793 \pm 0.0051 & I_{RH} = 0.3235 \pm 0.0094 & I_{R+} = 0.3104 \pm 0.0093 & I_{RR} = 0.0000 \pm 0.0092
 \end{array}$$

Que dan como resultado la siguiente matriz de Mueller

$$\begin{pmatrix} 0.7779 & -0.0146 & -0.0121 & 0.0014 \\ -0.0323 & 0.5009 & -0.5947 & -0.0999 \\ -0.0214 & -0.5858 & -0.4581 & -0.1371 \\ -0.0466 & -0.0111 & 0.0317 & -0.7326 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.00501 & 0.00001 & 0.00001 & 0.00006 \\ 0.01367 & 0.00077 & -0.00091 & -0.00003 \\ 0.01369 & -0.00090 & -0.00070 & -0.00009 \\ 0.01446 & -0.00002 & 0.00006 & -0.00108 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Mientras que de la teoría, se tiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0.7909 & 0.0126 & -0.0161 & 0.0000 \\ -0.0026 & -0.6784 & -0.4025 & 0.0530 \\ -0.0203 & -0.4039 & 0.6799 & -0.0069 \\ 0.0000 & -0.0421 & -0.0330 & -0.7888 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

En este caso se puede observar que los elementos de la matriz de Mueller teórica que son notablemente diferentes de cero, nuevamente son los mismos que para la matriz medida aunque, otra vez, los valores de la matriz medida se encuentran por debajo de los teóricos (en valor absoluto) y, además, se observa un cambio de signo en los elementos  $m_{22}$  y  $m_{33}$  de la matriz medida respecto a la teórica. Esto es un problema grave, ya que estos elementos son notablemente diferentes de cero en ambos casos, pero tienen el signo contrario, lo cual implica

una diferencia grande de la matriz experimental respecto a la teórica, al menos para esos elementos. El comportamiento que se observa para este punto, se observó para muchos otros. Esto indica que hay un problema de fondo con las mediciones que se hicieron.

Por otro lado, los datos experimentales muestran que mientras más alejado del eje óptico del espejo, en dirección vertical, esté el punto que se analiza, las diferencias entre la matriz medida y la calculada son mayores, lo cual debe ser explicado.

El problema ahora es determinar qué puede estar haciendo que las mediciones difieran tanto de los valores calculados.

Como se mencionó anteriormente, el ángulo de incidencia del haz sobre el espejo es muy importante, ya que cualquier variación en este ángulo resulta en una variación de los valores de los coeficientes de Fresnel y, en consecuencia, de la matriz de Mueller del espejo. De la teoría se tiene que la variación del ángulo de incidencia puede provocar el tipo de diferencias que se observan en las mediciones. Dicha variación ni siquiera tiene que ser muy grande. Por ejemplo, para el punto anterior, un cambio de  $\sim 5^\circ$  en el ángulo de incidencia produce una matriz de Mueller que se asemeja más a la matriz medida. Este hecho sugiere que probablemente las diferencias se deban, principalmente, a variaciones en el ángulo de incidencia que pueden ser provocadas por una mala alineación de láser auxiliar, debido a errores en la localización del primer foco del espejo. Es difícil que éste sea el principal motivo de las diferencias observadas, dado que la localización de ese foco fue puesta a prueba en las mediciones de los patrones de intensidad esparcida por las superficies rugosas, que se hicieron en un trabajo previo, obteniendo buenos resultados. Entonces, ¿qué pudo provocar ese error en el ángulo de incidencia?

Otra posible causa de ese error es que haya variaciones en la forma del espejo respecto a la forma reportada por el fabricante. Esto es posible debido a que el espejo elipsoidal que se utilizó es un espejo comercial que fue diseñado para la iluminación, y en ese tipo de aplicaciones la calidad de las superficies ópticas reflejantes no es tan crítica. Pero, para asegurarse de que éste es el principal factor que contribuye a las diferencias entre la teoría y el experimento, se deben hacer pruebas de la forma del espejo para determinar qué tan diferente es su forma real de la reportada por el fabricante.

Una de las pruebas que puede ser de utilidad para caracterizar la forma del espejo es conocida como “prueba de pantallas nulas”<sup>[7-9]</sup>. Esta prueba consiste, básicamente, en proyectar sobre la superficie que se está probando, una rejilla diseñada de manera tal que al ser reflejada por una

superficie con la forma ideal, el patrón reflejado será una rejilla cuadrada perfecta. Cualquier desviación en la forma de la superficie respecto a la forma ideal, provocará cambios en el patrón reflejado que pueden ser estimados con este método. Sin embargo, aplicar este método no es trivial y constituye en sí mismo un proyecto de investigación.

#### 4.8 Referencias.

1. R.M.A. Azzam, "Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal", *Optics Letters*, **2** (6), p. 148-150, (1978)
2. D.H. Goldstein and R. A. Chipman, "Error analysis of a Mueller matrix polarimeter", *J. Opt. Soc. Am. A*, **7** (4), p. 693-700, (1990)
3. B. Boulbry, B. Le Jeune, B. Bousquet, F. Pellen, J. Cariou and J. Lotrian, "Error analysis and calibration of a spectroscopic Mueller matrix polarimeter using a short-pulse laser source", *Meas. Sci. Technol.*, **13**, p. 1563-1573, (2002)
4. S.N. Savenkov, "Optimization and structuring of the instrument matrix for polarimetric measurements", *Opt. Eng.*, **41** (5), p. 965-972, (2002)
5. J. Wolfe and R.A. Chipman, "Reducing symmetric polarization aberrations in a lens by annealing", *Optics Express*, **12** (15), p. 3443-3451, (2004)
6. H. Du and K.J. Voss, "Effects of point-spread function on calibration and radiometric accuracy of CCD camera", *Applied Optics*, **43** (3), p. 665-670, (2004)
7. R. Díaz-Urbe and M. Campos-García, "Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces", *Applied Optics*, **39** (16), p. 2670-2677, (2000)
8. R. Díaz-Urbe, "Medium-precision null-screen testing of off-axis parabolic mirrors for segmented primary telescope optics: the Large Millimeter Telescope", *Applied Optics*, **39** (16), p. 2790-2804, (2000)
9. R. Díaz-Urbe, M. Campos-García and F.S. Granados-Agustín, "Testing the optics of the Large Millimeter Telescope (LMT)", *Infrared Spaceborne Remote Sensing X*, Marija Strojnik and Bjørn F. Andresen, **4818**, p.63-70, SPIE Proceedings, Seattle, WA, (2002)

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1 Conclusiones.

El método para el cálculo y la medición de la matriz de Mueller presentado en este trabajo parece ser, en principio, el apropiado. Sin embargo, los resultados experimentales señalan diferencias entre ellos y los resultados teóricos. Estas diferencias tienen su origen en distintas fuentes de error que no fue posible controlar suficientemente durante la parte experimental de este trabajo.

Como se mencionó en el Capítulo 4, el uso de un divisor de haz puede introducir errores en las mediciones. Por esta razón, se sugiere no utilizarlo. En su lugar, podría utilizarse un espejo plano largo y delgado para dirigir el haz incidente hacia el espejo elipsoidal (ver figura 5.1). Esto restaría información de una pequeña franja en la imagen de todo el hemisferio, pero a cambio se podría controlar mejor el estado de polarización incidente.

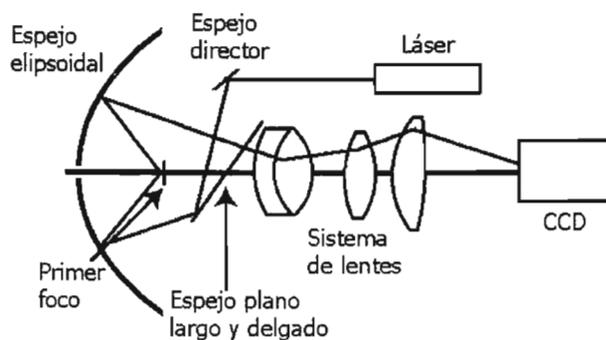


Figura 5.1. Diagrama del esparcímetero con un espejo plano largo y delgado en lugar del divisor de haz.

Las lentes del sistema óptico del esparcímetero también fueron una fuente de error debido a la alteración del estado de polarización que introducen. Por lo tanto, es necesario evitar el uso de

lentes en el sistema o, por lo menos, reducir su número y, de ser posible, se les debe hacer un tratamiento como el de endurecimiento por calentamiento<sup>[1]</sup> que se mencionó en el Capítulo 4. Aunque la disminución en el número de lentes compromete la calidad de la imagen del sistema, será necesario hacerlo para reducir, en la medida de lo posible, las aberraciones de polarización que éstas introducen.

Por otro lado, la calibración del retardador de  $\lambda/4$  que se coloca entre las lentes para que se detecte luz con polarización circular para los diferentes ángulos de incidencia, debe ser hecha, para poder realizar mediciones más precisas. Esta calibración será útil para controlar este aspecto pero, seguramente, la orientación tendrá que ser controlada con mucha precisión, por lo que tendrá que hacerse mediante control numérico, es decir, tendrá que ser controlado mediante motores de pasos, o platinas rotacionales, para tener la capacidad de repetir las mediciones sin la incertidumbre que implica el control manual. Este tipo de control también es recomendable para los otros elementos polarizadores, para poder tener una precisión mayor en la medición de los elementos de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal.

También es necesario determinar la PSF<sup>[2]</sup> (point-spread function) de la cámara CCD, ya que se desea utilizarla como detector, debido al gran campo de la imagen (mayor que con el medidor de potencia óptica) que se puede cubrir con ella, aunque esto no resolvería el problema del intervalo de operación de la cámara que también se señaló en el Capítulo 4.

Por último, es importante hacer la medición de la forma del espejo con algún método que permita determinar qué tan reales son los parámetros del espejo reportados por el fabricante, y si es que hay desviaciones respecto a la forma ideal de su superficie. En el Capítulo 4 se sugirió la prueba de “pantallas nulas” debido a que ésta a dado buenos resultados en otros trabajos<sup>[3-5]</sup>.

## 5.2 Referencias.

1. J. Wolfe and R.A. Chipman, “Reducing symmetric polarization aberrations in a lens by annealing”, *Optics Express*, **12** (15), p. 3443-3451, (2004)
2. H. Du and K.J. Voss, “Effects of point-spread function on calibration and radiometric accuracy of CCD camera”, *Applied Optics*, **43** (3), p. 665-670, (2004)
3. R. Díaz-Urbe and M. Campos-García, “Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces”, *Applied Optics*, **39** (16), p. 2670-2677, (2000)

4. R. Díaz-Uribe, “Medium-precision null-screen testing of off-axis parabolic mirrors for segmented primary telescope optics: the Large Millimeter Telescope”, *Applied Optics*, **39** (16), p. 2790-2804, (2000)
5. R. Díaz-Uribe, M. Campos-García and F.S. Granados-Agustín, “Testing the optics of the Large Millimeter Telescope (LMT)”, *Infrared Spaceborne Remote Sensing X*, Marija Strojnik and Bjørn F. Andresen, **4818**, p.63-70, SPIE Proceedings, Seattle, WA, (2002)

# Apéndice A

---

## Cambio del estado de polarización por reflexión en un espejo elipsoidal

### A.1 Introducción.

La polarización de una onda electromagnética está relacionada con el estado de vibración del campo eléctrico de la onda. Se ha definido de esta manera por convención, sin embargo, el estudio de la polarización sería completamente equivalente si se definiera en términos del campo magnético.

Cada vez que un haz de luz es reflejado, puede cambiar su estado de polarización dependiendo de las propiedades del material en el que se refleja y de la forma de su superficie.

Cuando un haz de luz incide en un material, el valor del cociente entre el índice de refracción del medio en el que viaja y el índice de refracción del material sobre el que incide, así como el ángulo de incidencia, determinan el comportamiento posterior del haz. Dependiendo del valor de este cociente (y del ángulo de incidencia) el haz puede ser transmitido o reflejado. Por ejemplo, cuando se tiene un material con índice de refracción real (un material transparente), la luz será casi completamente transmitida, para ángulos de incidencia pequeños, y solamente una pequeña parte será reflejada. Sin embargo, cuando se tiene un material con índice de refracción complejo\*, como en el caso de los metales, la luz será casi completamente reflejada.

Es común definir la polarización de una onda como la suma de dos componentes, una paralela al plano de incidencia,  $p$ , y la otra ortogonal a éste,  $s$ . Con estas definiciones se han hecho estudios detallados sobre las propiedades de la luz reflejada por diferentes superficies. En este sentido, una de las más importantes, tanto por sus aplicaciones como por su valor pedagógico, es el estudio

---

\* Cuando un material tiene índice de refracción complejo, la parte real está asociada con la refracción y la parte imaginaria con la absorción.

hecho por Fresnel, que dio origen a sus famosos coeficientes<sup>[1]</sup>. Fresnel utilizó la teoría electromagnética sobre una interfase plana entre dos medios y estableció apropiadamente las condiciones a la frontera, encontrando así las expresiones que nos dicen la porción de la luz incidente que es reflejada y la que es transmitida como función del ángulo de incidencia, el ángulo de transmisión y los índices de refracción de los medios involucrados.

En este apéndice se presenta un ejemplo práctico sobre el cambio del estado de polarización cuando un haz es reflejado en un espejo elipsoidal. Esto se hizo como parte de un proyecto en el que se desarrolló un esparcímetero para medir la luz visible reflejada en una superficie rugosa bidimensional<sup>[2-3]</sup>. La luz reflejada en una superficie de este tipo se distribuye en todo el hemisferio sobre ella y entonces, se puede utilizar el espejo elipsoidal para captar la luz esparcida y dirigirla hacia un sistema óptico secundario que se encargue de formar una imagen de la distribución de intensidad de la luz en una cámara CCD. Es decir, la luz que está distribuida en el hemisferio superior se proyecta sobre un plano para poder tomar la imagen de la distribución de intensidad con la cámara CCD. Sin embargo, el análisis de los cambios de polarización debidos a la reflexión no es trivial, ya que la luz que sale de la superficie en alguna dirección dada puede tener cualquier polarización. Típicamente, en problemas de esparcimiento de luz en superficies, se define la polarización en términos de las polarizaciones  $s$  y  $p$ , definidas como ya se mencionó. Sin embargo, esta definición de la polarización implica que, en la cámara CCD, las direcciones de las polarizaciones fundamentales,  $s$  y  $p$ , son diferentes para cada pixel de la imagen. Esto complica las mediciones y el análisis de la polarización, por lo que se decidió trabajar en términos de las polarizaciones horizontal,  $H$ , y vertical,  $V$ , definidas con respecto al plano de la mesa óptica. El problema que se analiza aquí es cómo están relacionadas las polarizaciones  $H'$  y  $V'$ , detectadas en la cámara CCD, con las polarizaciones  $H$  y  $V$ , reflejadas en la superficie.

Para encontrar esa relación, es necesario hacer un análisis cuidadoso de los cambios de polarización que se presentan cuando la luz es reflejada en el espejo elipsoidal. Este análisis es el objeto de este apéndice y se basa en la siguiente idea: para cada rayo proveniente del primer foco del espejo elipsoidal<sup>†</sup>, se considera un plano ortogonal al rayo sobre el cual se definirán las componentes de polarización. Este plano está definido por los vectores  $\hat{H}$  y  $\hat{V}$ , donde  $\hat{H}$  es un vector unitario paralelo al plano de la mesa óptica y  $\hat{V}$  es un vector unitario ortogonal al vector

<sup>†</sup> Llamaremos primer foco al más cercano a la superficie del espejo. Es en esta posición en la que se coloca la superficie a ser analizada con el esparcímetero.

$\hat{H}$ . Cuando el rayo incide en el espejo elipsoidal, se debe analizar la polarización en términos de las componentes paralela,  $p$ , y ortogonal,  $s$ , al plano de incidencia ya que, como se mencionó anteriormente, es para estas componentes para las que están definidos los coeficientes de Fresnel. Esto implica que se debe hacer una transformación entre el sistema  $\hat{H} - \hat{V}$  y el sistema  $\hat{P}_{local} - \hat{S}_{local}$ †, para cada componente de polarización. Dicha transformación no es más que una rotación cuyo ángulo de giro dependerá del punto en el que el rayo incida en el espejo (ver figura A.1).

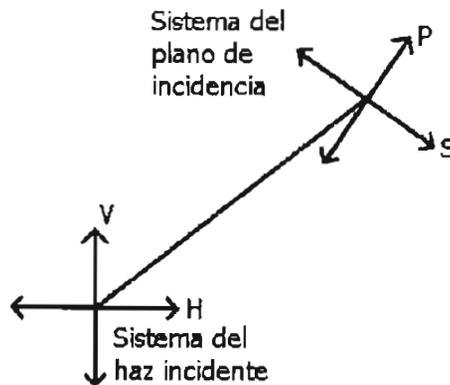


Figura A.1. Transformación entre el sistema del rayo y el sistema de incidencia.

Una vez que el rayo ha sido reflejado, se define el sistema  $\hat{H}' - \hat{V}'$  que, de la misma manera que el sistema  $\hat{H} - \hat{V}$ , es ortogonal al rayo. La manera de pasar entre el nuevo sistema y el sistema del plano de incidencia es, también, una rotación.

En las siguientes secciones se presenta la forma explícita de los vectores que determinan cada plano en términos del punto de incidencia del rayo en el espejo. Así mismo, se presenta la forma que tienen los coeficientes de Fresnel para cada componente de polarización.

## A.2 Estudio geométrico de la polarización.

La figura A.2 muestra la geometría del problema e indica cuales son el vector normal a la superficie, el vector que representa al haz incidente y el vector que va del origen al punto de incidencia, así como la orientación y sentido de los ejes X, Y y Z.

† Este plano está definido por los vectores ortogonal y paralelo al plano de incidencia.

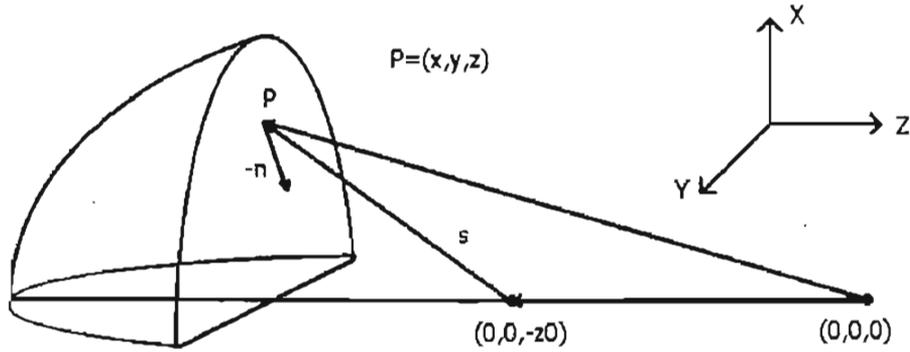


Figura A.2. Esquema de la geometría del problema.

La ecuación de un elipsoide de revolución con centro en el origen y cuyo eje de giro está sobre el eje Z, se puede ver como la curva de nivel  $f(x, y, z) = 1$  de una función  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de la forma

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (\text{A.1})$$

El gradiente de esta función define un vector ortogonal a su superficie en cada punto, de manera que el vector normal al elipsoide en el punto  $(x, y, z)$  está dado por

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^4 z^2}} \left( x, y, \left(\frac{a}{c}\right)^2 z \right) \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, si  $\vec{s}$  es el vector que va del primer foco, con coordenadas  $(0, 0, -z_0)$ , al punto de incidencia  $(x, y, z)$ , el vector unitario en esa dirección es

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} (x, y, z + z_0) \quad (\text{A.3})$$

Ambos vectores definen el plano de incidencia, de manera que el ángulo de incidencia,  $\alpha$ , que es el ángulo entre  $\hat{s}$  y  $\hat{n}$ , está dado por

$$\cos \alpha = \frac{a^2 \left( 1 + \frac{zz_0}{c^2} \right)}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + (z + z_0)^2}} \quad (\text{A.4})$$

En la ecuación anterior se ha quitado la dependencia en  $x$  y en  $y$  debido a la simetría rotacional que tiene el espejo y que se puede expresar de la siguiente manera

$$x^2 + y^2 = a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} \quad (\text{A.5})$$

A continuación se buscará expresar el vector de incidencia  $\hat{s}$ , en términos del ángulo que hace en el plano Y-Z,  $\theta$ , y el que hace respecto a la dirección ortogonal a este plano,  $\phi$ .

En la figura A.3 se presenta un esquema de la forma como están dados los ángulos directores del vector de incidencia y se puede ver que es de la forma

$$\hat{s} = (\sin \phi, -\sin \theta \cos \phi, -\cos \theta \cos \phi) \quad (\text{A.6})$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  están dadas por

$$\theta = \arctan \left( \frac{s_y}{s_z} \right) \quad (\text{A.7})$$

y

$$\phi = \arctan \left( \frac{s_x}{\sqrt{s_y^2 + s_z^2}} \right) \quad (\text{A.8})$$

para  $s_x$ ,  $s_y$  y  $s_z$  las componentes del vector de incidencia  $\hat{s}$ . Sin embargo, la ecuación (A.7) solamente es válida para ángulos menores que  $90^\circ$ . Si se tiene un ángulo mayor, dicha ecuación

da el valor del complemento del ángulo de interés por lo que, en esa región, es necesario introducir un signo menos dentro del argumento de la función inversa de la tangente.

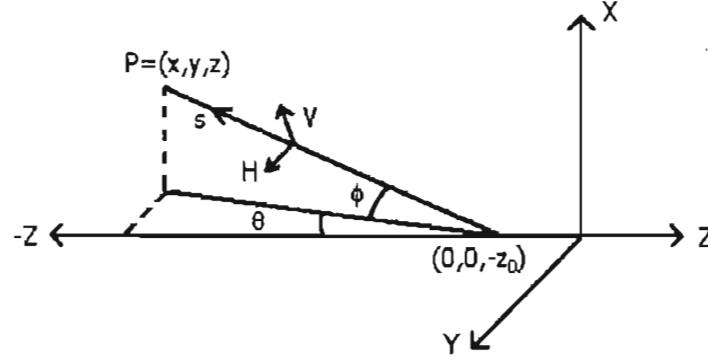


Figura A.3. Definición de los ángulos directores para el rayo incidente.

En la figura A.3 se puede ver que los vectores  $\hat{H}$  y  $\hat{V}$  correspondientes a cada vector de incidencia, son de la forma

$$\hat{H} = (0, \cos \theta, -\sin \theta) \quad (\text{A.9})$$

y

$$\hat{V} = (\cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \sin \phi \cos \theta) \quad (\text{A.10})$$

Como se conocen los dos vectores que generan el plano de incidencia, se puede encontrar el vector unitario ortogonal a este plano haciendo el producto cruz entre ellos y se obtiene

$$\hat{s}_{local} = \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \left( \cos \phi \left( y \cos \theta - \frac{a^2}{c^2} z \sin \theta \right) \hat{i} - \left( x \cos \theta \cos \phi + \frac{a^2}{c^2} z \sin \phi \right) \hat{j} + (y \sin \phi + x \sin \theta \cos \phi) \hat{k} \right) \quad (\text{A.11})$$

De manera similar, se puede encontrar el vector que determina la dirección de polarización paralela al plano de incidencia haciendo el producto  $\hat{n} \times \hat{s}_{local}$ , que da como resultado:

$$\hat{p}_{local} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \left( y s_{lx} - \frac{a^2}{c^2} z s_{ly}, \frac{a^2}{c^2} z s_{lx} - x s_{ly}, x s_{ly} - y s_{lx} \right) \quad (A.12)$$

En la ecuación anterior, se han llamado  $s_{lx}$ ,  $s_{ly}$  y  $s_{lz}$  a las componentes del vector  $\hat{s}_{local}$  con el fin de escribir  $\hat{p}_{local}$  en forma abreviada.

Una vez conocidos los vectores que definen las direcciones paralela y ortogonal al plano de incidencia, se debe encontrar el ángulo de rotación que permite pasar del sistema definido por los vectores  $\hat{H}$  y  $\hat{V}$  al sistema definido por  $\hat{p}_{local}$  y  $\hat{s}_{local}$ . Dicho ángulo está dado por la expresión

$$\hat{H} \cdot \hat{s}_{local} = \cos \theta_r \quad (A.13)$$

o también

$$\hat{V} \cdot \hat{p}_{local} = \cos \theta_r \quad (A.14)$$

de donde

$$\theta_r = \arccos \left( \frac{x \cos \phi + \left( \frac{a^2}{c^2} z \cos \theta + y \sin \theta \right) \sin \phi}{\sin \alpha \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) \quad (A.15)$$

Conocido el ángulo de rotación, se puede pasar de cualquier vector  $(h, v)$  en el sistema  $\hat{H} - \hat{V}$  a un vector  $(p_l, s_l)$  en el sistema  $\hat{p}_{local} - \hat{s}_{local}$ , por medio de la ecuación

$$\begin{pmatrix} p_t \\ s_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Después de que el rayo haya sido reflejado en el espejo, su dirección hará un ángulo  $\theta'$  en un plano paralelo al plano Y-Z y un ángulo  $\phi'$  en la dirección ortogonal a este plano (figura A.4).

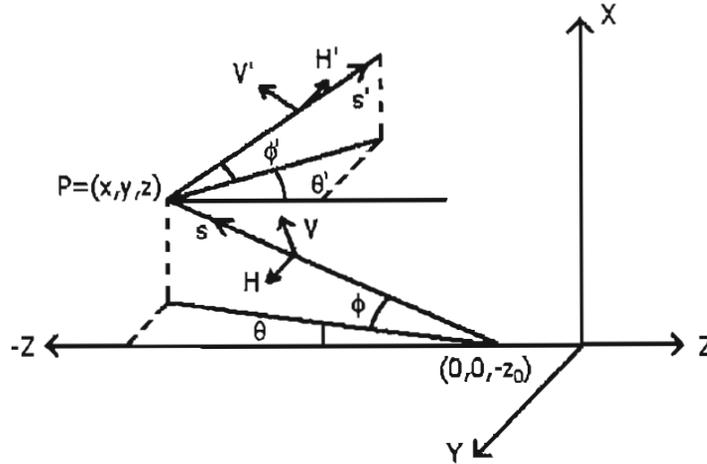


Figura A.4. Definición de los ángulos directores para el rayo reflejado. El vector  $\hat{H}'$  es paralelo al plano de la mesa y el vector  $\hat{V}'$  es ortogonal a  $\hat{H}'$  y al rayo.

En términos de estos ángulos, las componentes del vector unitario en la dirección del rayo reflejado se pueden escribir como

$$\hat{s}' = (\sin \phi', \cos \phi' \sin \theta', \cos \phi' \cos \theta') \quad (\text{A.17})$$

Así mismo, se encuentra que los vectores  $\hat{H}'$  y  $\hat{V}'$  para este caso son

$$\hat{H}' = (0, -\cos \theta', \sin \theta') \quad (\text{A.18})$$

y

$$\hat{V}' = (\cos \phi', -\sin \phi' \sin \theta', -\sin \phi' \cos \theta') \quad (\text{A.19})$$

De lo anterior, se llega a que el ángulo de rotación que permite pasar del sistema  $\hat{p}_{local} - \hat{s}_{local}$  al sistema  $\hat{H}' - \hat{V}'$  está dado por

$$\theta_r' = \arccos(s_{lx} \sin \theta' - s_{ly} \cos \theta') \quad (\text{A.20})$$

Entonces, conocido el ángulo de rotación entre ambos sistemas, se puede transformar un vector  $(p_l, s_l)$  en el sistema  $\hat{p}_{local} - \hat{s}_{local}$  en otro vector  $(h', v')$  en el sistema  $\hat{H}' - \hat{V}'$  mediante la expresión

$$\begin{pmatrix} h' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_r' & \sin \theta_r' \\ -\sin \theta_r' & \cos \theta_r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_l \\ s_l \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Sin embargo, todavía falta determinar los ángulos  $\phi'$  y  $\theta'$ . Para esto es necesario conocer la dirección del rayo reflejado. Esta dirección está dada por la ley vectorial de reflexión<sup>[4]</sup>

$$\vec{s}' = \hat{s} - 2(\hat{s} \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (\text{A.22})$$

Por lo tanto, en términos de las componentes de  $\vec{s}'$ , los ángulos  $\phi'$  y  $\theta'$  están dados por las siguientes ecuaciones (ver figura A.4)

$$\phi' = \arctan \left( \frac{s_x'}{\sqrt{(s_y')^2 + (s_z')^2}} \right) \quad (\text{A.23})$$

y

$$\theta' = \arctan\left(\frac{s_y'}{s_z'}\right) \quad (\text{A.24})$$

De manera similar que para el valor de  $\theta$ , cuando  $\theta$  es mayor que  $90^\circ$  se debe introducir un signo menos en el argumento de la función inversa de la tangente ya que, de otra forma, se obtendría el valor del complemento del ángulo de interés.

### A.3 Coeficiente de reflexión de un material general.

El coeficiente de reflexión de Fresnel determina qué proporción de la luz incidente es reflejada para cada componente de la polarización. Este coeficiente está dado, en términos de los índices de refracción del medio de incidencia y del material, así como de los ángulos de incidencia y refracción, de la siguiente forma<sup>[5]</sup>

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_r}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_r} \quad (\text{A.25})$$

para la componente de polarización paralela al plano de incidencia y

$$R_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} \quad (\text{A.26})$$

para la componente ortogonal. En las ecuaciones anteriores  $n_1$  es el índice de refracción del medio de incidencia y  $n_2$  el del material sobre el que incide el haz (ver figura A.5).

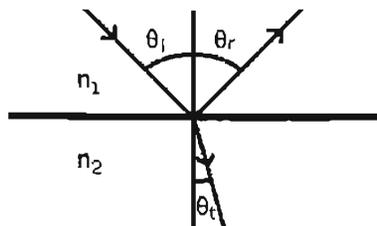


Figura A.5. Esquema del plano de incidencia.

En el caso más general para  $n_2$  (es decir, el caso en el que  $n_2$  es un número complejo) si tomamos el primer medio como aire,  $n_1 = 1$ , estas ecuaciones se pueden expresar de forma útil como se muestra a continuación.

Debido a que hay reflexión en la superficie del espejo, si usáramos la ley de Snell para determinar el ángulo de transmisión, encontraríamos que corresponde a una cantidad compleja. Entonces, se puede escribir el coseno de este ángulo como

$$\cos\theta_t = qe^{i\gamma} \quad (\text{A.27})$$

de manera que

$$\cos^2\theta_t = q^2 e^{i2\gamma} = q^2 (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma) \quad (\text{A.28})$$

Por otro lado, se sabe que

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} \quad (\text{A.29})$$

Entonces, usando la ley de Snell y como  $n_2$ , que es una cantidad compleja, se puede escribir de la forma  $n_2 = n + ik$ , puede demostrarse que la ecuación (A.29) se puede escribir de la siguiente forma

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{(n^2 - k^2)\sin^2\theta_i}{(n^2 + k^2)^2} + \frac{2ink\sin^2\theta_i}{(n^2 + k^2)^2}} \quad (\text{A.30})$$

Comparando términos entre el cuadrado de la ecuación (A.30) y la ecuación (A.28), se encuentra que

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - \frac{(n^2 - k^2)\sin^2\theta_i}{(n^2 + k^2)^2} \quad (\text{A.31})$$

y

$$q^2 \sin 2\gamma = \frac{2nk \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2} \quad (\text{A.32})$$

Si se suman los cuadrados de las ecuaciones anteriores, se encuentra que  $q$  está dada por

$$q^4 = \left( 1 - \frac{(n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i \right)^2 + \left( \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i \right)^2 \quad (\text{A.33})$$

y haciendo el cociente de la ecuación (A.31) entre la (A.32) se encuentra que

$$\frac{1}{\tan 2\gamma} = \frac{1 - \frac{(n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i}{\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i} \quad (\text{A.34})$$

Si ahora se sustituyen la ecuación (A.27), en su forma polar, y la forma explícita de  $n_2$  en la ecuación (A.25), se puede demostrar que

$$|R_0|^2 = \frac{(n^2 + k^2) \cos^2 \theta_i + q^2 - 2q \cos \theta_i (n \cos \gamma + k \sin \gamma)}{(n^2 + k^2) \cos^2 \theta_i + q^2 + 2q \cos \theta_i (n \cos \gamma + k \sin \gamma)} \quad (\text{A.35})$$

De la ecuación anterior, separando los términos y completando los cuadrados de manera apropiada, se llega a que

$$|R_0|^2 = \frac{(n \cos \theta_i - q \cos \gamma)^2 + (k \cos \theta_i - q \sin \gamma)^2}{(n \cos \theta_i + q \cos \gamma)^2 + (k \cos \theta_i + q \sin \gamma)^2} \quad (\text{A.36})$$

Ahora bien, de esta última ecuación es posible demostrar que  $R_{\parallel}$  puede escribirse de la siguiente forma<sup>[5]</sup>

$$R_{\parallel} = \frac{(n \cos \theta_i - q \cos \gamma) + i(k \cos \theta_i - q \sin \gamma)}{(n \cos \theta_i + q \cos \gamma) + i(k \cos \theta_i + q \sin \gamma)} \quad (\text{A.37})$$

Finalmente, multiplicando el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador, se puede ver que el coeficiente de reflexión para la componente paralela al plano de incidencia está dado por

$$R_{\parallel} = \frac{(n^2 \cos^2 \theta_i - q^2 \cos^2 \gamma) + (k^2 \cos^2 \theta_i - q^2 \sin^2 \gamma) + 2iq \cos \theta_i (k \cos \gamma - n \sin \gamma)}{(n \cos \theta_i + q \cos \gamma)^2 + (k \cos \theta_i + q \sin \gamma)^2} \quad (\text{A.38})$$

Esta expresión solamente depende del ángulo de incidencia y del índice de refracción del medio sobre el que incide la luz, es decir, depende de parámetros que, en principio, son conocidos.

De manera similar, se puede encontrar una expresión equivalente para la componente ortogonal al plano de incidencia. Usando la ley de *Snell*, la forma polar de la ecuación (A.27) y la forma explícita de  $n_2$  en la ecuación (A.26), se puede demostrar que<sup>[5]</sup>

$$|R_{\perp}|^2 = \frac{\cos^2 \theta_i + (n^2 + k^2)q^2 - 2q \cos \theta_i (n \cos \gamma - k \sin \gamma)}{\cos^2 \theta_i + (n^2 + k^2)q^2 + 2q \cos \theta_i (n \cos \gamma - k \sin \gamma)} \quad (\text{A.39})$$

donde  $q$  y  $\gamma$  son las mismas dadas en las ecuaciones (A.33) y (A.34), respectivamente.

Nuevamente, si se separan los términos y se completan los cuadrados apropiadamente se llega a la siguiente ecuación

$$|R_{\perp}|^2 = \frac{(\cos \theta_i - (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma))^2 + (nq \sin \gamma + kq \cos \gamma)^2}{(\cos \theta_i + (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma))^2 + (nq \sin \gamma + kq \cos \gamma)^2} \quad (\text{A.40})$$

de donde

$$R_{\perp} = \frac{(\cos\theta_i - (nq \cos\gamma - kq \sin\gamma)) - i(nq \sin\gamma + kq \cos\gamma)}{(\cos\theta_i + (nq \cos\gamma - kq \sin\gamma)) + i(nq \sin\gamma + kq \cos\gamma)} \quad (\text{A.41})$$

Por último, si se multiplican el numerador y el denominador de la ecuación (A.41) por el complejo conjugado del denominador, se llega a que

$$R_{\perp} = \frac{(\cos^2\theta_i - (nq \cos\gamma - kq \sin\gamma)^2) - (kq \cos\gamma + nq \sin\gamma)^2 - 2i \cos\theta_i (kq \cos\gamma + nq \sin\gamma)}{(\cos\theta_i + (nq \cos\gamma - kq \sin\gamma))^2 + (kq \cos\gamma + nq \sin\gamma)^2} \quad (\text{A.42})$$

Esta última ecuación, al igual que la obtenida para la componente paralela, da una forma del coeficiente de reflexión, en términos del ángulo de incidencia y del índice de refracción del material, que resulta práctica.

En las figuras A.6-A.9 se muestra la forma de la dependencia de cada componente del coeficiente de reflexión como función del ángulo de incidencia, tomando un índice de refracción  $n = 2.1643 + i5.6156$  que corresponde a un espejo de *Rhodio*<sup>[6]</sup> a una longitud de onda  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .

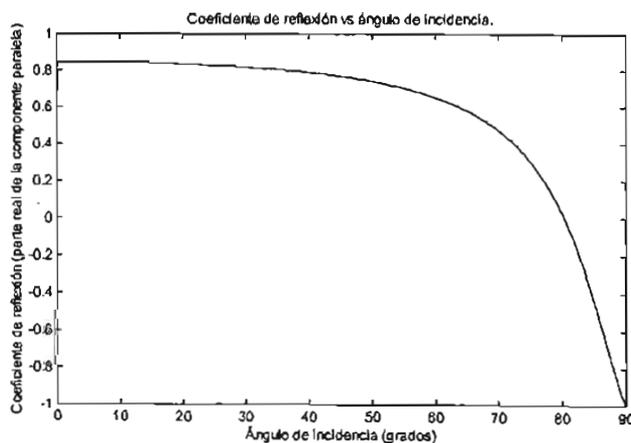


Figura A.6. Gráfica de la parte real de la componente paralela del coeficiente de reflexión.

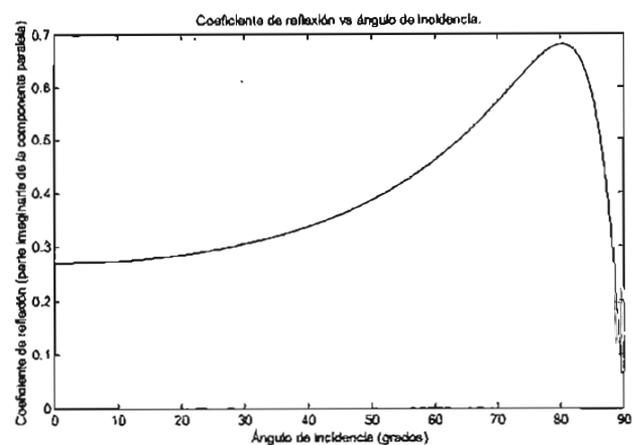


Figura A.7. Gráfica de la parte imaginaria de la componente paralela del coeficiente de reflexión.

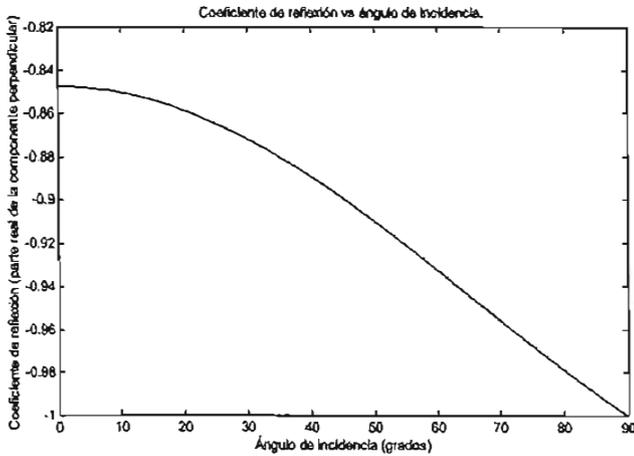


Figura A.8. Gráfica de la parte real de la componente perpendicular del coeficiente de reflexión.

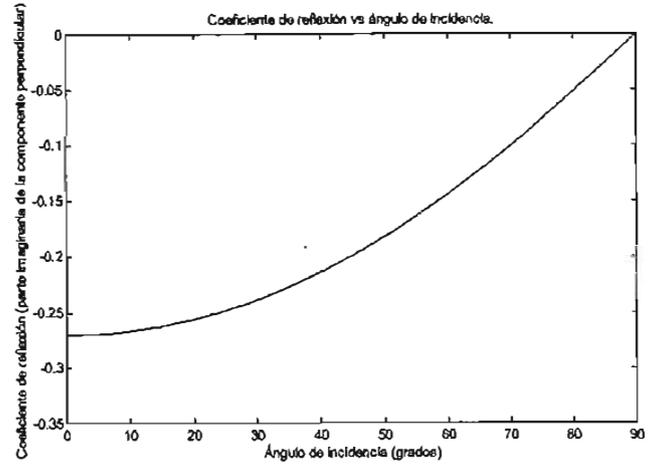


Figura A.9. Gráfica de la parte imaginaria de la componente perpendicular del coeficiente de reflexión.

En estas gráficas se puede ver que, para ambas componentes, la parte real toma el valor -1 a un ángulo de incidencia de 90° y a ese mismo ángulo, la parte imaginaria toma el valor 0.

Así mismo, se tiene que a 0° la parte imaginaria toma el valor de -0.270 para la componente perpendicular y 0.270 para la componente paralela, mientras que la parte real alcanza un valor de -0.848 para la componente perpendicular y 0.848 para la componente paralela.

#### A.4 Matriz de polarización.

La matriz que incluye los cambios en el estado de polarización debidos a la reflexión en el espejo, está definida de la siguiente forma

$$B = R'FR = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{A.43}$$

donde  $R$  es la matriz que representa la primera rotación,  $R'$  es la que representa a la segunda rotación y  $F$  es la matriz que incluye los coeficientes de Fresnel. La forma explícita de la matriz  $F$  es

$$F = \begin{pmatrix} \text{Re}(R_{\parallel}) + i \text{Im}(R_{\parallel}) & 0 \\ 0 & \text{Re}(R_{\perp}) + i \text{Im}(R_{\perp}) \end{pmatrix} \tag{A.44}$$

donde  $\text{Im}(R_{\parallel})$  es la parte imaginaria de la componente paralela del coeficiente de reflexión y  $\text{Re}(R_{\parallel})$  su parte real,  $\text{Im}(R_{\perp})$  es la parte imaginaria de la componente perpendicular al plano de incidencia y  $\text{Re}(R_{\perp})$  su parte real. En esta matriz, las partes reales están relacionadas con el cambio de amplitud debido a la reflexión y las partes imaginarias con el cambio de fase.

En las figuras A.10-A.13 se muestran las componentes de la matriz  $B$ , en escala de grises, para cada punto sobre el espejo. La escala de grises está dada de manera que las zonas en las que el valor absoluto de cada componente es máximo son las más claras, y las zonas más oscuras corresponden a aquellas donde alcanza su valor mínimo.

Por ejemplo, para el caso del esparcímetero<sup>[2-3]</sup> de luz visible que dio origen al análisis anterior, la componente  $B_{11}$  representa la fracción de luz que incide con un estado de polarización  $\hat{H}$  y sale del sistema con el mismo estado,  $B_{21}$  representa la luz que incide con polarización  $\hat{H}$  y sale del sistema con polarización  $\hat{V}$ ,  $B_{12}$  es la fracción de luz que incide con un estado de polarización  $\hat{V}$  y sale con un estado  $\hat{H}$  y  $B_{22}$  representa a la luz que incide con polarización  $\hat{V}$  y es reflejada con la misma polarización,  $\hat{V}$ .

Como se vio a lo largo del apéndice, cuando un haz es reflejado en una superficie, en general su estado de polarización cambia. Este cambio depende del índice de refracción del material, del ángulo de incidencia y de la geometría de la superficie.

En el caso particular del espejo elipsoidal presentado aquí, se observa que los cambios en los estados de polarización son diferentes para cada componente de la matriz de polarización, aunque exhiben un comportamiento similar. Cabe hacer notar que los cambios de cada elemento de la matriz de polarización son suaves. Esta suavidad se debe a la regularidad de la superficie del espejo, es decir, debido a que en la forma del espejo no hay cambios abruptos entre dos zonas cercanas, tampoco se espera que ocurran cambios abruptos en las componentes de la matriz de polarización.

Finalmente, se puede concluir que, cuando se hace un análisis de este tipo, es importante considerar todos los parámetros que puedan introducir un cambio en el estado de polarización.

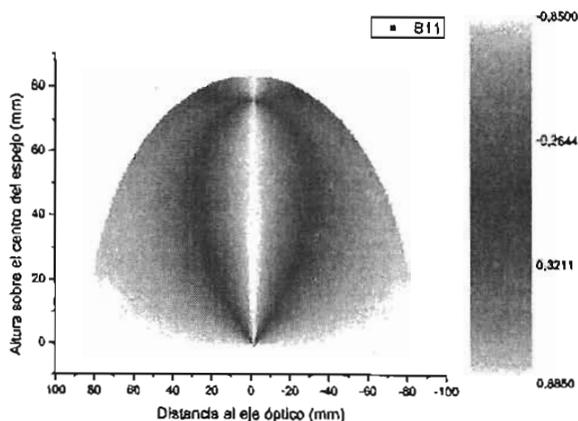


Figura A.10. Gráfica del valor de  $B_{11}$  como función del punto de incidencia en el espejo elipsoidal. La escala de grises representa un cociente de amplitudes y por lo tanto es adimensional.

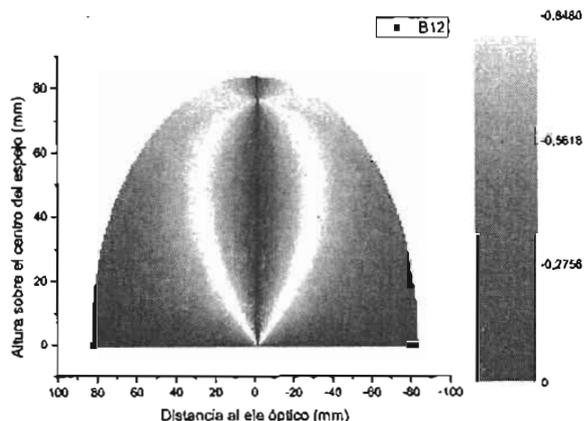


Figura A.11. Gráfica del valor de  $B_{12}$  como función del punto de incidencia en el espejo elipsoidal. La escala de grises representa un cociente de amplitudes y por lo tanto es adimensional.

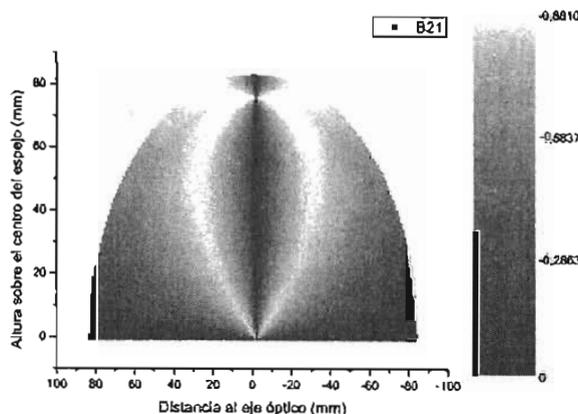


Figura A.12. Gráfica del valor de  $B_{21}$  como función del punto de incidencia en el espejo elipsoidal. La escala de grises representa un cociente de amplitudes y por lo tanto es adimensional.

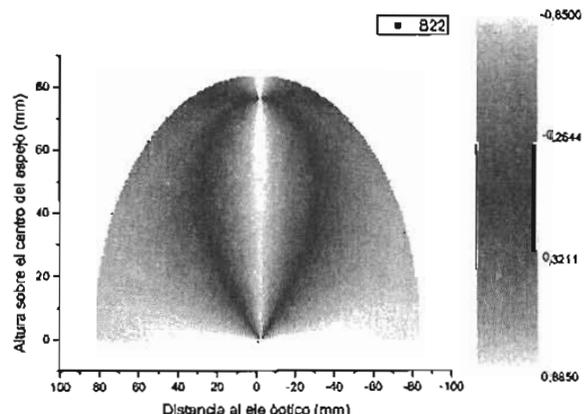


Figura A.13. Gráfica del valor de  $B_{22}$  como función del punto de incidencia en el espejo elipsoidal. La escala de grises representa un cociente de amplitudes y por lo tanto es adimensional.

### A.5 Referencias.

1. E. Hecht, "Optics", Addison-Wesley, 3<sup>rd</sup> Edition, USA, (1998)

2. M. Rosete-Aguilar, O.G. Rodríguez-Herrera and N.C. Bruce, "*Optical design of a scatterometer with an elliptical mirror*", *Optical Engineering*, **42**, p. 1772-1777, (2003)
3. N.C. Bruce, O.G. Rodríguez-Herrera and M. Rosete-Aguilar, "A Scatterometer for measuring the visible light scattered from 2D rough surfaces", *Surface Scattering and Diffraction for Advanced Metrology II*, Zu-Han Gu and Alexei A. Maradudin, **4780**, p. 161-164, SPIE Proceedings, Seattle, WA, (2002)
4. W.T. Welford, "*Aberrations of Optical Systems*", Adam Hilger, Great Britain, (1991)
5. M. Born and E. Wolf, "*Principles of Optics*", 7<sup>th</sup> Edition, Cambridge University Press, United Kingdom, (1999)
6. E. Palik, "*Handbook of Optical Constants of Solids*", Academic Press, USA, (1985)

# Apéndice B

---

## Vectores de Stokes y matrices de Mueller

### B.1 Introducción.

En este apéndice se presentan los vectores de Stokes para algunos estados de polarización comunes y las matrices de Mueller para algunos elementos ópticos frecuentemente utilizados<sup>[1]</sup>.

### B.2 Vectores de Stokes.

#### No polarizada

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

#### Polarización lineal horizontal.

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

#### Polarización lineal vertical.

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

**Polarización lineal a +45°.**

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

**Polarización lineal a -45°.**

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

**Polarización circular derecha.**

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

**Polarización circular izquierda.**

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

**B.3 Matrices de Mueller.****Agujero.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

**Polarizador circular derecho.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

**Polarizador circular izquierdo.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

**Polarizador lineal a un ángulo  $\theta$  desde la horizontal.**

$$M_p(2\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

**Retardador con su eje rápido a un ángulo  $\theta$  desde la horizontal y con un retardo  $\phi$ .**

$$M_c(\phi, 2\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos\phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos\phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin\phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos\phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos\phi \cos^2 2\theta & \sin\phi \cos 2\theta \\ 0 & \sin\phi \sin 2\theta & -\sin\phi \cos 2\theta & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

#### **B.4 Referencias.**

1. D. Goldstein, "*Polarized Light*", 2<sup>nd</sup> Edition, Marcel Dekker, New York, (2003)

# Apéndice C

---

## Código del programa de análisis

### C.1 Introducción.

El código que se incluye a continuación corresponde al programa para calcular los elementos de la matriz de Mueller del espejo elipsoidal a partir de mediciones de potencia óptica. El programa está escrito en ANSI-C y el símbolo  $\leftarrow$  indica que el código que lo sigue es parte de la línea inmediata superior.

### C.2 Código del programa.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>

double php0=0,pvp0=0,map0=0,prp0=0,phph=0,pvph=0,maph=0,prph=0;
double phma=0,pvma=0,mama=0,prma=0,phpr=0,pvpr=0,mapr=0,prpr=0;
double m11=0,m12=0,m13=0,m14=0,m21=0,m22=0,m23=0,m24=0;
double m31=0,m32=0,m33=0,m34=0,m41=0,m42=0,m43=0,m44=0;
double I0=0;

int main(void)
{
    printf("Calculo de la matriz de Mueller\n\r");
    printf("\n\rI_{0}= ");
    scanf("%lf",&I0);
```

```
printf("\n\rI_{H0}= ");
scanf("%lf",&php0);
php0=1.0039*php0/I0;
printf("\n\rI_{V0}= ");
scanf("%lf",&pvp0);
pvp0=pvp0/I0;
printf("\n\rI_{+0}= ");
scanf("%lf",&map0);
map0=1.0039*map0/I0;
printf("\n\rI_{R0}= ");
scanf("%lf",&prp0);
prp0=1.0117*prp0/I0;
printf("\n\rI_{HH}= ");
scanf("%lf",&phph);
phph=1.7572*phph/I0;
printf("\n\rI_{VH}= ");
scanf("%lf",&pvph);
pvph=1.7504*pvph/I0;
printf("\n\rI_{+H}= ");
scanf("%lf",&maph);
maph=1.7572*maph/I0;
printf("\n\rI_{RH}= ");
scanf("%lf",&prph);
prph=1.7709*prph/I0;
printf("\n\rI_{H+}= ");
scanf("%lf",&phma);
phma=1.7572*phma/I0;
printf("\n\rI_{V+}= ");
scanf("%lf",&pvma);
pvma=1.7504*pvma/I0;
printf("\n\rI_{++}= ");
```

```
scanf("%lf",&mama);
mama=1.7572*mama/I0;
printf("\n\rI_{R+}= ");
scanf("%lf",&prma);
prma=1.7709*prma/I0;
printf("\n\rI_{HR}= ");
scanf("%lf",&phpr);
phpr=1.8322*phpr/I0;
printf("\n\rI_{VR}= ");
scanf("%lf",&pvpr);
pvpr=1.8250*pvpr/I0;
printf("\n\rI_{+R}= ");
scanf("%lf",&mapr);
mapr=1.8322*mapr/I0;
printf("\n\rI_{RR}= ");
scanf("%lf",&prpr);
prpr=1.8464*prpr/I0;

m11=(php0+pvp0)/2;
m12=php0-m11;
m13=map0-m11;
m14=prp0-m11;
m21=(phph+pvph)-m11;
m22=2*phph-m11-m12-m21;
m23=2*maph-m11-m13-m21;
m24=2*prph-m11-m14-m21;
m31=(phma+pvma)-m11;
m32=2*phma-m11-m12-m31;
m33=2*mama-m11-m13-m31;
m34=2*prma-m11-m14-m31;
m41=(phpr+pvpr)-m11;
```

```

m42=2*phpr-m11-m12-m41;
m43=2*mapr-m11-m13-m41;
m44=2*prpr-m11-m14-m41;

printf("\n\nLas intensidades relativas son\n\n");

printf("\n\nI_{H0}=%0.4lf  I_{HH}=%0.4lf  I_{H+}=%0.4lf
↵I_{HR}=%0.4lf",php0,phph,phma,phpr);
printf("\n\nI_{V0}=%0.4lf  I_{VH}=%0.4lf  I_{V+}=%0.4lf
↵I_{VR}=%0.4lf",pvp0,pvph,pvma,pvpr);
printf("\n\nI_{+0}=%0.4lf  I_{+H}=%0.4lf  I_{++}=%0.4lf
↵I_{+R}=%0.4lf",map0,maph,mama,mapr);
printf("\n\nI_{R0}=%0.4lf  I_{RH}=%0.4lf  I_{R+}=%0.4lf
↵I_{RR}=%0.4lf",prp0,prph,prma,prpr);

printf("\n\nLa matriz de Mueller es\n\n");

printf("\n\n %0.5lf  %0.5lf %0.5lf %0.5lf",m11,m12,m13,m14);
printf("\n\n %0.5lf  %0.5lf %0.5lf %0.5lf",m21,m22,m23,m24);
printf("\n\n %0.5lf  %0.5lf %0.5lf %0.5lf",m31,m32,m33,m34);
printf("\n\n %0.5lf  %0.5lf %0.5lf %0.5lf",m41,m42,m43,m44);

printf("\n\nPulse cualquier tecla para finalizar...");
getch();
return(0);
}

```