

01149



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

"CONTROL DE MOTORES DE RELUCTANCIA CONMUTADA
CONSIDERANDO CIRCUITOS MAGNETICOS NO LINEALES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA

AREA: ELECTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A :

CHRISTIAN AGUSTIN VAZQUEZ VILLANUEVA

ASESOR: DR. GERARDO ESPINOSA PEREZ



MEXICO, D. F.

2005

M343327



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mis padres, Agustín Vázquez Hinojosa y Margarita Villanueva Carmona, por el apoyo y comprensión incondicional que siempre me han brindado.

A mis abuelos paternos, Rafael Vázquez Salazar y Soledad Hinojosa Olivos, por su apoyo en todos los momentos.

A mi abuelo, Marcelino Villanueva Roldan y en memoria de mi abuela Cándida Carmona por su apoyo en todos los momentos.

A mis hermanos, Marcelino, Rafael, Citlali Sarahi y Fermi por su cariño.

A toda mi familia.

A Paty por su constante motivación y cariño a lo largo de mi estudios de maestría.

A Imelda y Ana por su gran amistad.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Christian Agustín
Vázquez Villanueva

FECHA: 19-04-05

FIRMA: 

Agradecimientos

Siempre a nuestra gran Universidad Nacional Autónoma de México.

A mi director de tesis, el Dr. Gerardo Espinosa Pérez, por su atención y apoyo en la realización de esta tesis.

A la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP) de la UNAM, por la beca complementaria otorgada durante los cuatro semestres de la maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante el primer semestre de la maestría.

Al Dr. Tang Yu por permitirme participar en un proyecto de investigación con lo cual tuve la beca de la DGEP.

Al Dr. Marcelo del Castillo Mussot, su apoyo incondicional y su gran interés en el desarrollo de mi trabajo académico desde la tesis de licenciatura hasta, esta la tesis de maestría.

Al Dr. Jorge Antonio Aldrete Montemayor por todas sus enseñanzas y apoyo incondicional en mi desarrollo académico.

Al Ing. Pablo Ugalde Vélez, Al Dr. Gerardo Vázquez, compañeros de investigación.

A mis sinodales, el Dr. Gerardo Guerrero, al Dr. Luis Álvarez, al Dr. Marco Oliver, al Dr. Tang Yu.

A todos mis profesores y compañeros de la maestría.

Y a todos a aquellos que olvide mencionar y hayan contribuido al desarrollo de esta tesis.

Índice general

1. Introducción	10
1.1. Antecedentes y motivación	10
1.2. Problema de control	11
1.3. Revisión bibliográfica y contribuciones	13
1.3.1. Revisión bibliográfica	13
1.3.2. Contribuciones	17
1.4. Organización de la tesis	18
2. SRM: propiedades y modelo	22
2.1. Principio de operación	22
2.2. Propiedades del SRM	25
2.2.1. Propiedades físicas	25
2.2.2. Propiedades de pasividad	27
2.3. Modelo matemático	29
2.3.1. Modelo Completo	29
2.3.2. Modelo Simplificado	35
2.4. Conmutador electrónico	36
3. Control Basado en Pasividad	41
3.1. Control Basado en Pasividad	41
3.2. Descomposición pasiva del SRM	42
3.3. Diseño del controlador	45
3.3.1. Control del modelo completo	47

3.3.2.	Control del modelo simplificado	54
3.4.	Control basado en el modelo no lineal vs control basado en el modelo lineal	59
3.4.1.	Criterios de desempeño basados en el error	59
3.4.2.	Criterio de control	60
3.4.3.	Criterio basado en la demanda y disipación de potencia	60
3.4.4.	Demanda y disipación de potencia de un SRM	60
4.	Control de un SRM sin uso de sensor de posición	64
4.1.	Diseño de un observador no lineal de posición velocidad angular	64
5.	Resultados de simulación	67
5.1.	Parámetros del SRM	67
5.2.	Implementación del conmutador	68
5.3.	Control de velocidad con sensor	70
5.3.1.	Regulación de velocidad	70
5.3.2.	Seguimiento de velocidad	72
5.4.	Control basado en el modelo no lineal vs control basado en el modelo lineal	77
5.4.1.	Regulación de Velocidad	77
5.5.	Control de velocidad sin uso de sensores mecánicos	82
6.	Conclusiones	87
A.	Pasividad	90
B.	Programas en simulink	95

Índice de figuras

2-1. Fotografía del rotor de un SRM	24
2-2. Estructura básica de un SRM 3ϕ	25
2-3. Conmutador electrónico para un SRM 3ϕ	27
2-4. Descomposición pasiva de un SRM	28
2-5. Flujo magnético en función de la corriente	30
2-6. Par en función de la posición angular	34
5-1. Adecuamiento de la señal de posición	69
5-2. Funciones de distribución de par $m_j(\theta)$	70
5-3. (a) Regulación de velocidad incrementado el amortiguamiento ($c_1 = 100, 150,$ 200); (b) error de regulación.	71
5-4. Corrientes deseada vs. corrientes calculadas	72
5-5. Error de corrientes en el estator	73
5-6. (a) Par deseado vs. par calculado; (b) Error de par	73
5-7. Voltajes de entrada en el estator.	74
5-8. (a) Seguimiento de velocidad; (b) Error de velocidad.	75
5-9. Corrientes deseadas vs. corrientes calculadas.	75
5-10. (a) Par deseado vs. par calculado; (b) Error de par.	76
5-11. Voltajes de entrada en el estator.	76
5-12. Regulación de velocidad realizada por ambos controles.	77
5-13. Integral del error de velocidad cuadrático.	78
5-14. Seguimiento de par	79
5-15. Potencia suministrada.	80

5-16. Potencia disipada.	80
5-17. Energía suministrada al SRM	81
5-18. Energía disipada	81
5-19. Función acumulación de potencia de un SRM.	82
5-20. Regulación de velocidad sin sensores mecánicos.	83
5-21. Seguimiento de corrientes sin sensores mecánicos	84
5-22. Seguimiento de par sin sensores mecánicos.	84
5-23. Error de estimación de la velocidad.	85
5-24. Convergencia del error de estimación de velocidad.	85
A-1. Interconexión de dos sistemas pasivos	92

Nomenclatura

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ –vector de voltajes de entrada [V]

u_j –voltaje de entrada en la j -ésima fase [V]

θ –posición angular del rotor [rad]

$\omega = \dot{\theta}$ –velocidad angular del rotor [rad/s]

$\mathbf{i} = [i_1, i_2, i_3]$ –vector de corrientes en el estator [A]

i_j –corriente en la j -ésima fase [A]

$T(\theta, i_1, i_2, i_3)$ –par electromecánico generado [Nm]

$T_j(\theta, i_j)$ –par generado de origen eléctrico por la j -ésima fase [Nm]

T_L –par de carga [Nm]

$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$ –vector de flujos magnéticos en el rotor [Vs]

$\psi_j(\theta, i_j)$ –flujo magnético o enlace de flujo en la j -ésima fase [Vs]

ψ_s –enlace de flujo de saturación [Vs]

β –constante experimental

$f_j(\theta)$ –inductancia no lineal en la j -ésima fase [Vs/A]

$f_j^+(\theta)$ –inductancia no lineal experimental en la j -ésima fase [Vs/A]

N_r –número de polos del rotor

n –número de fases

L_0, L_1 –inductancia de fase alineada, desalineada [Vs/A]

$W(\theta, \boldsymbol{\psi})$ –función energía magnética total [J]

$W'(\theta, \mathbf{i})$ –función co-energía magnética total [J]

$W'_j(\theta, i_j)$ –función co-energía magnética en la j -ésima fase [J]

$K'(\theta)$ –función co-energía cinética [J]

J –momento inercia [kg.m²]

$F(i)$ –función de disipación de Rayleigh [J]

$\mathbf{R} = \text{diag}[r_1, r_2, r_3]$ –matriz de resistencias del estator [Ω]

$\mathcal{L}_j(\theta, i_j, \dot{\theta})$ –lagrangiano para cada fase

$\mathbf{z} = [u_1, u_2, u_3, -T_L]^T$ –vector de fuerzas generalizadas

$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \theta]^T$ –vector de coordenadas generalizadas

$\dot{q} = [i_1, i_2, i_3, \dot{\theta}]^T$ –vector de velocidades generalizadas

E'_{Mj} –co-energía mecánica para cada fase [J]

$D_j(\theta, i_j) = \frac{\partial \psi(\theta, i_j)}{\partial i_j}$ –derivada del enlace de flujo respecto a la corriente en la j-ésima fase

$C_j(\theta, i_j)\dot{\theta}$ –derivada del enlace de flujo respecto a la posición angular en la j-ésima fase

$\psi_j(\theta, i_j)_L$ –enlace de flujo lineal en la j-ésima fase [Vs]

$L_j(\theta)$ –inductancia lineal en la j-ésima fase [Vs/A]

$\mathbf{L}(\theta) = \text{diag}[L_1(\theta), L_2(\theta), L_3(\theta)]$ –la matriz de inductancia lineal del estator

$W'_m(\theta, i)$ –función co-energía magnética lineal [J]

$G_j(\theta) = \frac{\partial L_j(\theta)}{\partial \theta}$ derivada de la inductancia lineal respecto a la posición angular en la j-esima fase

Θ_j^+, Θ_j^- –conjunto de las posiciones angulares para las cuales el par es positivo y negativo respectivamente

$m_j^+(\theta)$ y $m_j^-(\theta)$ –funciones de distribución de par en la j-ésima fase

$m_j(\theta)$ –función distribución de par

T_d – par deseado [Nm]

$\mathbf{K}_v = \text{diag}\{K_{1v}, K_{2v}, K_{3v}\}$ –matriz de ganancias eléctricas del controlador

i_{jd} –corrientes deseada en cada fase [A]

T_{jd} –par deseado a generar por cada fase [N.m]

$\tilde{\dot{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$ –error de velocidad angular [rad/s]

θ_d –posición angular deseada [rad]

ω_d –velocidad angular deseada [rad]

z –estado del controlador

c_1, c_2 –constantes positivas

$\mathbf{e} = \mathbf{i} - \mathbf{i}_d$ – vector de error de corriente [A]

V_e –función de Lyapunov.

J_e –integral del error cuadrático

$\dot{E} = \dot{W} + \dot{K}'$ –función potencia total del sistema [W]

E –función energía total del sistema [J]

ϕ_{in} –función demanda de potencia [W]

ϕ_{out} –función disipación de potencia [W]

B –coeficiente de fricción viscosa [N.m.s.rad⁻¹]

$\hat{\theta}$ –posición angular estimada [rad/s]

$\hat{\omega}$ –velocidad angular estimada

η_{θ} –ganancia del estimador de posición

e_{θ} –error de estimación de posición angular

\hat{T} –par generado total estimado

\hat{T}_L –par de carga estimado

η_{ω} –ganancia del estimador de velocidad angular

e_{ω} –error de estimación de velocidad angular

$p_r(h), p_f(h)$ –funciones polinomiales

Prefacio

Es bien sabido que los motores eléctricos tienen una infinidad de aplicaciones en la industria, en aparatos domésticos, etc. En la actualidad dada la cantidad finita de recursos naturales y la disponibilidad de energéticos fósiles, es posible que los motores eléctricos sean la parte motriz de la próxima generación de vehículos, los cuales paulatinamente se están introduciendo en el mercado con la nueva generación de autos híbridos que combinan un motor eléctrico con un motor de combustión interna. Por otro lado, sabemos que una manera de superar los problemas de recursos es optimizando los procesos, es decir, diseñando tecnología orientada al ahorro de energía tanto en la fabricación de motores como en su mantenimiento. Una clase de máquinas eléctricas que cumple con estas expectativas son los Motores de Reluctancia Conmutada (SRM por sus siglas en inglés Switch Reluctance Motor), que no son nuevos pero han adquirido un creciente interés, debido a que son de fácil fabricación y mantenimiento, además de que tienen una capacidad de generar grandes pares a bajas velocidades, lo que los hace atractivos para aplicaciones de actuación directa. El precio que se paga por esta ventaja tecnológica, está la complejidad de su manejo, pues sus voltajes de alimentación requieren una conmutación electrónica, lo cual complica el diseño de un sistema de control. Un acercamiento para resolver el problema de control es utilizar la técnica de Control Basado en Pasividad (PBC por sus siglas en inglés; Passivity Based Control), ya que ésta aprovecha las propiedades físicas del motor, resultando en un control en cascada fácil de sintonizar. Por lo que se refiere a optimización de costos está el hecho de que un controlador de un motor requiere sensores mecánicos de posición y velocidad los cuales generalmente son caros, lo que recientemente ha motivado a la comunidad de control a trabajar en el control de máquinas eléctricas sin el uso de sensores mecánicos.

A pesar de que existe una amplia literatura sobre el control de SRM y control de este tipo de motores sin el uso de sensores mecánicos, encontramos ciertas deficiencias en éstos, ya que resultan controles que se basan en aproximaciones del modelo de un SRM o resultan controles muy complejos. Uno de los objetivos de esta tesis es demostrar que un control que tome en cuenta las propiedades físicas y características no lineales del motor tiene un mejor desempeño.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes y motivación

En el mundo de los motores siempre se ha buscado el máximo rendimiento, confiabilidad y durabilidad. Esto ha conducido a mejorar los motores ya existentes bien sean de corriente continua o de alterna. En los últimos años, ha reaparecido un motor olvidado durante mucho tiempo y que permite alcanzar lo que de un motor se desea a un coste reducido. Este es el motor de reluctancia conmutada (SRM). ¿Por qué decimos que es un motor olvidado? Porque su construcción primera se hizo aproximadamente hace 150 años, cuando Wheatstone lo utilizaba como motor de tracción en una locomotora. No fue hasta el año 1969 que Nasar, en un artículo publicado en IEE Proceedings, mencionó por primera vez el término de reluctancia conmutada y no fue hasta los años 80 cuando comenzaron a aparecer empresas interesadas en su fabricación. Los motores de reluctancia conmutada han crecido en popularidad ya que debido a la ausencia de imanes permanentes y escobillas en el rotor, son de fácil fabricación y mantenimiento. Ellos pertenecen a la clase de máquinas eléctricas conocidas como de polos salientes. Su principal ventaja, además de su simplicidad constructiva, es que si son diseñados con un número grande de polos pueden producir un par muy alto a bajas velocidades, eliminando el uso de reductores mecánicos. De este modo los motores de reluctancia conmutada son atractivos para aplicaciones en sistemas directamente actuados, por ejemplo en robótica.

Esta simplicidad de funcionamiento, parece opuesta al hecho de que este motor haya pasado

más de un siglo olvidado. La razón estaba en la complejidad para conseguir un control satisfactorio de la conmutación de las diversas fases, ya que es necesario sensar en todo momento tanto la corriente como la posición angular del rotor para obtener los tiempos de conmutación adecuados. Además el motor exhibe un comportamiento no lineal, debido a la inevitable operación del motor en la región de saturación magnética para maximizar la relación par/masa, que hace que el par generado sea función no lineal de la posición del rotor y de las corrientes de estator.

La evolución de la electrónica (conmutadores electrónicos y circuitos integrados) ha permitido proponer controladores no lineales en lazo cerrado para este tipo de máquinas eléctricas. Todos los controladores propuestos difieren en el enfoque utilizado para diseñar el control y también en la complejidad de las suposiciones respecto al circuito magnético de esta máquina.

La motivación de este trabajo es contribuir al desarrollo de estrategias de control para los motores de reluctancia conmutada, considerando el modelo no lineal para el circuito magnético de esta máquina para demostrar que un diseño de controlador que toma en cuenta un modelo no lineal completo tiene mejor desempeño que uno que no lo toma. Para ello, se pretende explotar la estructura física de la máquina diseñando el controlador por un enfoque basado en pasividad. Además, se busca proponer un criterio físico para comparar el desempeño de dos controles aplicados al mismo sistema.

Por otro lado, también es de nuestro interés proponer un control que no use sensores mecánicos (sensorless) para este tipo de máquinas, lo cual se traduce en el diseño de un observador para las variables mecánicas del motor, en función de una de las variables eléctricas. Aunque existe una amplia literatura respecto a este problema hay una cantidad reducida de trabajos que trabajan con el modelo completo de un SRM y con observadores en lazo cerrado para este.

1.2. Problema de control

En esta tesis abordamos dos problemas de control, el primero se refiere a la parte del control del SRM considerando un modelo no lineal completo de esta máquina, suponiendo que disponemos de sensores mecánicos. El segundo problema se refiere al diseño de un control que

no necesite de sensores mecánicos (sensorless), lo cual claramente se traduce en el diseño de un observador para la posición y velocidad mecánicas acoplado a nuestro control diseñado.

El primer problema es relativamente fácil de resolver, siguiendo la metodología desarrollada en [1], extendiendo los resultados ahí encontrados al modelo no lineal completo de un SRM.

El segundo problema es más difícil ya que en esta máquina eléctrica la medición de la posición no solo es importante para el control, sino también es importante para la operación del conmutador eléctrico de un SRM. La idea es proponer un observador en lazo cerrado.

La clave para un control efectivo del SRM es la habilidad para controlar dos parámetros: la cantidad de corriente que fluye por los devanados de estator y los instantes en que esta corriente fluye.

En general, con excepción de algunos trabajos, los controles propuestos para este tipo de máquinas toman en cuenta una relación lineal entre los enlaces de flujos y las corrientes en los devanados para el circuito magnético, lo que permite diseñar controladores simples. Por tal motivo, se debe establecer un compromiso entre sencillez y el desempeño, especialmente por la posible presencia de un rizo muy grande en el par generado. Además el controlador debe diseñarse contemplando la estrategia de conmutación, dado que esta es indispensable para su operación.

Con esto el problema de control puede plantarse de la siguiente forma:

Problema de Control 1. Considere el modelo no lineal completo del motor de reluctancia conmutada. Asuma que:

- La únicas variables disponibles para medición son las corrientes del estator, la posición y la velocidad mecánicas.
- Los parámetros del motor son completamente conocidos.
- Las únicas entradas de control son los voltajes del estator.

Bajo estas condiciones, diseñar una ley de control que asegure la estabilidad interna y seguimiento asintótico de par/velocidad/posición.

Alternativamente, el problema de control sin mediciones de variables mecánicas se plantea como:

Problema de Control 2. Considere el modelo no lineal completo del motor de reluctancia conmutada. Asuma que:

- La únicas variables disponibles para medición son las corrientes y voltajes del estator.
- Los parámetros del motor son completamente conocidos.
- Las únicas entradas de control son los voltajes del estator.

Bajo estas condiciones, diseñar una ley de control que asegure la estabilidad interna y seguimiento asintótico de par/velocidad/posición.

1.3. Revisión bibliográfica y contribuciones

1.3.1. Revisión bibliográfica

Respecto al control:

Las ventajas de los motores de reluctancia conmutada son bien conocidas por la comunidad de control [2], lo que motivo a ésta a atacar el problema de control de esta clase máquinas aplicando diversas técnicas de control no lineal por ejemplo, *Linealización por Retroalimentación* [3], *Modos Deslizantes* [4], *Backstepping* [5], *Control Basado en Pasividad* [1].

La idea principal de los controladores no lineales propuestos para un SRM, ha sido mejorar su desempeño mecánico, al diseñar un control que tome en cuenta un modelo no lineal completo de esta máquina y que incluya el comportamiento exhibido por esta máquina durante la operación de saturación magnética en las bobinas.

En este sentido, aunque muchos modelos están disponibles para describir este comportamiento [3], debido a la dificultad para trabajar con ellos, históricamente, muchas estrategias de control fueron dedicadas a trabajar con simplificaciones del modelo [3][4][5][1], aunque es importante mencionar que existe un número limitado de publicaciones en las cuales en el diseño de control se toma en cuenta el modelo completo [6][7][8].

Desafortunadamente, el diseño de controladores basados en el modelo completo para un SRM ha producido resultados que muestran algunas desventajas, intrínsecas a la metodología

particular usada para derivar la ley de control, que ha propiciado que la comunidad de control no se sienta atraída por dichos esquemas. A pesar de este hecho, estos resultados disfrutaron de propiedades notables desde un punto de vista teórico. En [6] se presenta una novedosa metodología para caracterizar la naturaleza no lineal de la relación entre flujos y corrientes, la desventaja está en la necesidad de tratar con una singularidad en el controlador propuesto (*Linealización por Retroalimentación*)

En [7] se presenta un control *backstepping* adaptivo (con respecto a las incertidumbres de parámetros), libre de singularidades. La ley de control obtenida tiene una alta complejidad computacional, la solución propuesta en [1], fue la ventaja de proponer un esquema de control con un sentido físico (que produce a un controlador en cascada fácil de sintonizar) para un modelo simplificado. El controlador se hace impráctico para el modelo completo debido a la necesidad de resolver una ecuación trascendental para calcular algunas variables del controlador. Puesto que la metodología basada en pasividad seguida en ese diseño demostró ser útil para el caso de considerar a un modelo simplificado de un SRM, un objetivo de esta tesis es remover el primer obstáculo que aparece en ese trabajo para el modelo completo de esta clase de máquinas. En particular, el acercamiento del problema está relacionado con la bien conocida limitación del diseño basado en pasividad [9] del requerimiento de llevar al sistema a alguna clase de inversión. Para un SRM, este requerimiento aparece como la necesidad de obtener una expresión para las corrientes del estator en función del par generado, la solución de este problema depende directamente del modelo escogido para los flujos del motor, puesto que del bien conocido Principio de D'Alembert [10] se sigue que la estructura del par generado depende del flujo magnético.

En el caso del control reportado en [8], la estructura considerada para describir el comportamiento de los flujos del motor fue originalmente presentada en [3]. La principal característica del modelo de flujos propuesto es que este concuerda con un alto grado de precisión con el comportamiento real de estas variables. Desafortunadamente, la expresión analítica obtenida produce un modelo del par que no es invertible, i.e., no es posible obtener una expresión explícita de las corrientes en términos del par. Este obstáculo puede ser removido si se toma una expresión para los enlaces de flujos, reportada en [7], la cual tiene las mismas características

físicas de saturación magnética.

En lo que respecta a la estructura no lineal del par generado en este trabajo se utiliza el *enfoque de par compartido*[11], el cual está ampliamente aceptado en la literatura. Esta técnica está motivada por la suposición, justificada experimentalmente, de que los devanados de estator están desacoplados, es decir, que la inductancia mutua entre las fases de estator es despreciada. Entonces el par generado se compone de la suma de los pares generados por cada uno de los devanados del estator, por lo que resulta razonable definir las llamadas funciones de *distribución de par*, cuyo objetivo es escalar los pares de fase de tal forma que la suma de éstos garanticen el valor deseado. Estas funciones pueden ser definidas desde diferentes perspectivas: en [3] son definidas en términos de funciones exponenciales; en [12] se sigue un enfoque polinomial. La ventaja de usar estas funciones es la relativa simplicidad para tratar con el problema de generación de par, además de que también pueden ser usadas para resolver problemas de optimización relacionados con el desempeño del motor, tales como la reducción del rizo en la forma de par generado [13][14] o la minimización de las pérdidas en el cobre (a bajas velocidades) y del voltaje requerido para generar el flujo [6].

Por otro lado, ¿Por qué utilizar control basado en pasividad (CBP)? El CBP es una metodología de diseño bien establecida en [9] que ha mostrado ser útil en la solución de problemas para una gran clase de sistemas físicos no lineales. Para el caso particular de máquinas eléctricas, el PBC fue aplicado por primera vez en las máquinas de inducción y después se extendió a motores eléctricos Blondel-park transformables (subactuados y completamente actuados), y más recientemente en motores de reluctancia comutada [8]. La característica principal de este enfoque es que el diseño del control toma en cuenta las propiedades físicas del sistema. En particular, esta técnica toma ventaja de las propiedades de disipación de energía (pasividad) de la máquina y simplifica el análisis mediante la descomposición del modelo en una interconexión por retroalimentación negativa de dos subsistemas pasivos (uno eléctrico y el otro mecánico). Este enfoque permite al diseñador controlar el subsistema eléctrico para asegurar los objetivos de seguimiento de corriente y de par, considerando al subsistema mecánico como una perturbación pasiva y, después de esto, resolver el problema de control de velocidad y de posición para el subsistema mecánico.

Entre las muchas ventajas que presenta el enfoque basado en pasividad, se pueden mencionar las siguientes:

- Los controladores propuestos no necesitan observadores, en el sentido de que no es necesaria la reconstrucción ni la estimación de las variables eléctricas (no medibles) del rotor
- Este enfoque formaliza matemáticamente la práctica usual de los ingenieros, que usualmente se desarrolla a partir del conocimiento empírico.
- Esta metodología no necesita hacer cancelación de algunas no linealidades, lo que conduce a diseñar controladores globalmente definidos.

Respecto al control sin sensores mecánicos:

Existe un amplia literatura que ha desarrollado controles sin usar sensores mecánicos para un SRM (sensorless). Según [19], el enfoque que siguen estos trabajos estos se puede clasificar de la siguiente manera: 1) Métodos hardware-intensivos, los cuales se basan en técnicas de modulación; estos tienen la desventaja de estar limitados a velocidades bajas de operación además de requerir circuitos externos para la inyección de señales; 2) Métodos data-intensivos, los cuales se basan en técnicas de integración del flujo magnético. La desventaja de estos es que demandan grandes tablas de características magnéticas de un SRM. 3) Métodos basados en modelo, tales como los observadores de estado, métodos de medida de señales de potencia, técnicas basadas en modelos de inductancia, los cuales requieren microprocesadores rápidos (DSP).

Lo ideal es diseñar un control sin uso de sensores mecánicos que sólo use medidas terminales y no requiera de hardware o memoria adicional [19]. La idea principal detrás de todas estas técnicas se basa en el hecho de que la constante de tiempo mecánica de un SRM es mucho más grande que su constante de tiempo eléctrica y en el hecho de que el flujo magnético es función de la posición del rotor, debido a su estructura de polos salientes.

De los observadores basados en el modelo de un SRM, la mayoría se basa en modelos simplificados de esta máquina. Dentro de los pocos casos en donde se utiliza el modelo completo, los observadores propuestos utilizan modos deslizantes [18], su principal desventaja es que ellos

tienen un estructura de observadores en lazo abierto, a pesar de que tienen un término correctivo en la ley de estimación de las variables mecánicas, el cual está en función del error de estimación de las corrientes en cada una de las fases, cuya justificación principalmente está basada en la curvas magnéticas características de estas máquinas. Además, la demostración analítica del funcionamiento de observador sola está justificada parcialmente.

1.3.2. Contribuciones

Las contribuciones presentadas en esta tesis son:

- Se desarrolló un control basado en pasividad para un SRM que toma en cuenta el modelo no lineal completo de esta máquina eléctrica. El control obtenido evoca el enfoque de control en cascada para máquinas eléctricas, por lo que se presenta una justificación formal para esta práctica. Además, el control tiene una estructura tal que resulta fácil de sintonizar.
- Con el fin de demostrar que un control diseñado a partir de un modelo completo de un SRM, tiene un mejor desempeño que un control diseñado a partir de un modelo simplificado, se propone criterios matemáticos y físicos para comparar el desempeño de controlador. En particular se propone un criterio basado en la potencia demandada y disipada por el sistema, bajo el cual resulta tener mejor desempeño un control basado en el modelo completo, en cuanto a que la demanda de potencia del sistema con éste es menor.
- Se diseñó un observador no lineal en lazo cerrado para las variables mecánicas de posición y velocidad de un SRM utilizando algunos conceptos de modos deslizantes. La característica principal de este observador, es que el término correctivo de la ley de estimación está en función del estado estimado y del estado deseado.
- Se diseñó un control sin el uso de sensores mecánicos de posición y velocidad. Con el cual se obtuvieron buenos resultados. Es importante mencionar que la prueba de este controlador es solo parcial, su terminación se deja como trabajo futuro.

1.4. Organización de la tesis

En el capítulo segundo de este trabajo se presentan las propiedades físicas del SRM y se obtiene al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, el modelo matemático del mismo. Primero se desarrolla este considerando un circuito magnético no lineal y, posteriormente, se desarrolla considerando una relación lineal entre los flujos y las corrientes de estator. Para concluir el capítulo, se hace una descripción del conmutador electrónico, dispositivo necesario para el funcionamiento de esta máquina.

El capítulo tres de este trabajo trata sobre la metodología con la que se diseñó el controlador, el Control Basado en Pasividad. Se hace una breve explicación de este enfoque para después realizar la descomposición pasiva del modelo de la máquina. Posteriormente se desarrolla el controlador para el modelo completo y el modelo simplificado. En la última sección de este capítulo se establecen una serie de criterios matemáticos y físicos para comparar el desempeño del control basado en modelo completo y el control basado en el modelo simplificado para esta clase de máquinas eléctricas.

En el capítulo cuatro se presenta el desarrollo de un control de un SRM sin el uso de sensores mecánicos. En su primera sección se muestra el diseño de un observador en lazo cerrado para la posición y velocidad angular, utilizando algunos conceptos de modos deslizantes.

En el capítulo quinto se presentan los resultados obtenidos mediante simulaciones digitales. En estas se utiliza el modelo completo de la máquina. Primero se muestran los resultados obtenidos cuando se realiza la regulación y seguimiento de velocidad utilizando un controlador basado en el modelo completo, para después mostrar los resultados comparativos entre el control de velocidad basado en el modelo completo y el modelo simplificado. Por último se presentan los resultados de la simulación de control de velocidad de un control sin uso de sensores mecánicos.

En el capítulo seis se presentan las conclusiones de este trabajo y se muestra algunas tareas que quedan pendientes para una futura investigación.

Para terminar esta tesis se presentan tres apéndices, en el primero se hace una breve descripción de las ideas de pasividad y se presentan los resultados principales de esta teoría, en el último se presenta el programa que se utilizó para simular el conmutador.

Bibliografía

- [1] G. Espinosa-Pérez, P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa and H. Sira-Ramrez: “On the Control of Switched Reluctance Motors”, 2000, *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Puebla, México.
- [2] R. Krishnan: “Switched Reluctance Motor Drives” (CRC Press, 2001).
- [3] Ilic-Spong, R. Marino, S. Peresada and D.G. Taylor: “Feedback Linearizing Control of Switched Reluctance Motors”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, AC-32(5), pp. 371-379.
- [4] H. Yang, S.K. Panda and Y.C. Liang: “Sliding Mode Control for Switched Reluctance Motors: An Experimental Investigation”, *Proc. of 22nd IEEE IECON*, 1996, pp. 96-101.
- [5] I. Agirman, A.M. Stankovic and G. Tadmor: “Observer-Based Adaptive par-Ripple Minimization in Switched Reluctance Machines using Backstepping”, *Proc. of 30th Annual IEEE PESC 99*, 1999, pp. 820-825.
- [6] F. Filicori, C.G. Lo Bianco and A. Tonielli: “Modeling and Control Strategies for a Variable Reluctance Direct- Drive Motor”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1), pp. 105-115.
- [7] P. Vedagarbha, D.M. Dawson and W. Rhodes: “An Adaptive Controller for a General Class of Switched Reluctance Motor Models”, *Automatica*, 1997, 33(9), pp. 1647-1655.
- [8] G. Espinosa-Perez, P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa and H. Sira-Ramirez: “Passivity-based Control of Switched Reluctance Motors with Nonlinear Magnetic Circuits”, 2002, Proceed-

ings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA (Also to appear at *IEEE Transactions on Control Systems Technology*).

- [9] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson and H. Sira-Ramírez: “Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems” (Springer, 1998).
- [10] J. Meisel: “Principles of Electromechanical Energy Conversion” (Prentice Hall, 1961).
- [11] D.G. Taylor: “Pulse-Width Modulated Control of Electromechanical Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, AC-37(4), pp. 524-528.S.
- [12] A. Bortoff, R.R. Kohan and R. Milman “Adaptive Control of Variable Reluctance Motors: A Spline Function Approach”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 45, No. 3, pp. 433-444, 1998.
- [13] A.M. Stankovic, G. Tadmor, Z.J. Corić and I. Agirman “On Torque Ripple Reduction in Current-Fed Switched Reluctance Motors”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vo. 46, No. 1, pp. 177-183, 1999.
- [14] R.S. Wallace and D.G. Taylor “A Balanced Commutator for Switched Reluctance Motors to Reduce Torque Ripple”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 7, No. 4, pp. 617-626, 1992.
- [15] R. Ortega, P.J. Nicklasson and G. Espinosa-Pérez: “On Speed Control of Induction Motors”, *AUTOMATICA*, 1996, 32(3), pp. 455-460.
- [16] G. S. Buja and M. I. Valla, ”Control Charecteristic of the SRM Drives-Part I: Operation in the Linear Region”, *IEEE Transction on Industrial Electronics*, Vol. IE-38, No. 5, pp. 313-321, 1999.
- [17] G. S. Buja and M. I. Valla, ”Control Charecteristic of the SRM Drives-Part II: Operation in the Saturated Region”, *IEEE Transction on Industrial Electronics*, Vol. IE-41, No. 3, pp. 316-325, 1999.

- [18] Mohamman S. Islam, Iqbal Husain, Robert J. Veillete, and Celal Batur, "Design and Performance Analysis of Sliding-Mode Observers for Sensorless Operation of Switched Reluctance Motors", *IEEE Trans. Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 3, May 2003
- [19] Mehrdad Ehsani, "Elimination of Position Sensor in Switched Reluctance Motor Drives: State of Art and Future Trends", *IEEE Transactions of Industrial Electronics*, Vol. 49, No. 1, February 2002.
- [20] Han-Woong Park, Jin-Hyun Park, Soon-Jae Kwon, Jin-Gil Park, Cheul-U Kim, A Novel High Performance Position Sensorless Control of Switch Reluctance Motor Drives, *Proceedings of ISIE 2001, Pusan Korea, IEEE*.

Capítulo 2

SRM: propiedades y modelo

En este capítulo trata sobre las propiedades físicas de los motores de reluctancia conmutada y el modelo que lo representa. En la primera sección se describe como está construido este motor y sus características. En la segunda sección se desarrolla el modelo matemático-físico de esta máquina aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, primero tomando en cuenta las características magnéticas no lineales (al cual se le llamará *modelo completo*), y posteriormente se desarrolla el modelo considerando la características magnéticas lineales (al cual se le llamará *modelo simplificado*). En la última sección de este capítulo se describe el conmutador eléctrico utilizado

2.1. Principio de operación

Una de las clasificaciones de las máquinas eléctricas está basada en la forma en la que realizan la conversión de energía eléctrica en energía mecánica. De acuerdo a esto, las máquinas eléctricas son de dos tipos

- a) **Máquinas que transforman la energía electromagnéticamente**, donde la conversión de energía eléctrica en mecánica se da por la interacción de los campos magnéticos generados en el estator y el rotor. Cuando dos campos están mutuamente acoplados, existe un par electromagnético entre ellos el cual tiende a llevarlos a alinearse. Este tipo de máquinas requiere de dos devanados que deben ser excitados simultáneamente, uno en

el estator y otro en el rotor. Ejemplo de estos motores son: corriente directa, inducción y síncronos. Estos motores se diferencian en sus geometrías y en cómo son generados los campos magnéticos; ya sea energizándolos, usando imanes permanentes o corrientes inducidas.

b) **Máquinas que transforman la energía por reluctancia variable**, donde esta conversión se da como el resultado de la reluctancia variable en el entrehierro del rotor y el estator. Cuando un devanado de estator es energizado, se produce *un par reluctivo* por la tendencia del rotor a moverse a una posición tal que se genere una mínima reluctancia en el campo magnético generado por el estator. Esta producción de energía es muy parecida al par de alineamiento que se ve en dos imanes polarizados de forma opuesta. El motor de reluctancia conmutada está dentro de esta categoría.

Así, dada la clasificación anterior, se puede observar que la operación de la máquina en estudio está basada en el concepto de reluctancia. La reluctancia corresponde a la resistencia magnética, la cual se opone al campo electromagnético. La reluctancia en un circuito magnético es el equivalente de la resistencia en un circuito eléctrico.

La generación y posterior conmutación del campo magnético se realiza en los embobinados de los polos de la parte fija de la máquina, el estator. Si se alimenta una de las fases con una corriente se produce el campo magnético que, a su vez, produce un par que tiende a alinear los polos de estator y de rotor que se encuentren más cercanos, con el fin de hacer mínima la reluctancia. Dado que el número de polos es diferente en el estator y en el rotor, si una fase se encuentra alineada la siguiente estará desalineada. Si se presenta una excitación secuencial entre las fases, en función de la posición del rotor, se genera una producción continua de giro y de par.

El motor de reluctancia conmutada no es una máquina síncrona, dado que la velocidad y dirección del giro del rotor no es igual a la rotación del flujo magnético de estator. El rotor gira en dirección contraria al flujo si el número de polos de rotor es menor que el número de polos de estator.

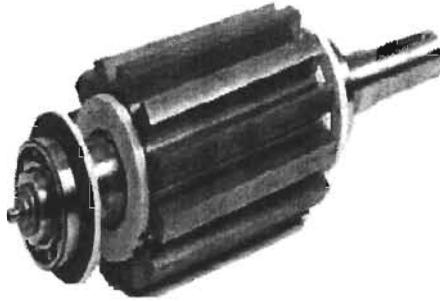


Figura 2-1: Fotografía del rotor de un SRM

En cuanto a la construcción, el motor de reluctancia conmutada es la más simple de todas las máquinas eléctricas ya que sólo su estator tiene devanados magnéticos. Esta máquina tiene algunas características propias, como son: a) el estator y el rotor son de polos salientes y el primero tiene devanados de fase montados alrededor de los polos que están diametralmente opuestos; b) el número de polos de estator es diferente al de polos de rotor; c) no tiene devanados de rotor ni imanes permanentes, solo es un grupo de láminas de acero formando una flecha (2-1); d) el flujo magnético no es senoidal; la inductancia mutua entre cada una de las fases de estator es muy pequeña; e) posee un momento de inercia muy pequeño debido al bajo peso del rotor por la ausencia de masa en los huecos entre los polos de éste. En la Figura 2-2 se muestra la estructura esquemática básica de esta máquina para el caso de seis polos de estator y cuatro polos en el rotor.

Los motores de reluctancia conmutada ofrecen algunas ventajas, aunadas al bajo costo que representa su sencilla construcción. Por ejemplo, pueden ser máquinas muy confiables dado que cada fase de la máquina es independiente física, magnética y eléctricamente de las otras fases, por lo que una falla en alguna de éstas no impide que la máquina siga funcionando. También, debido a la inexistencia de conductores o imanes en el rotor, se pueden lograr muy altas velocidades y, por el tipo de generación, altas potencias, comparadas con motores de otros tipos de las mismas dimensiones. Es posible tener motores de este tipo trabajando en condiciones extremas de temperatura y humedad.

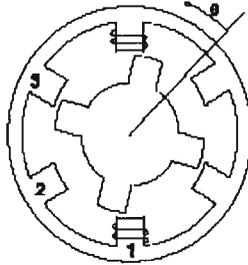


Figura 2-2: Estructura básica de un SRM 3 ϕ

La simplicidad mecánica de la máquina produce algunas limitaciones, complicando el análisis y el control de estas máquinas. El motor de reluctancia conmutada no puede alimentarse directamente desde una línea de DC ni de una de AC, debe ser conmutado electrónicamente. También, el que su estator y su rotor tengan polos salientes, necesarios para la generación del par reluctivo, hace que las características magnéticas sean fuertemente no lineales. Además, estas máquinas requieren de un sensor de posición para operar (ya sea físico o mediante software), tienden a ser ruidosas y presentan un gran rizo en la forma de onda del par.

2.2. Propiedades del SRM

En esta sección se muestran las propiedades básicas del motor de reluctancia conmutada. En la primera sección se analizan las propiedades físicas, esto es, las propiedades que se obtienen por la construcción de la máquina. En la segunda sección, se analizan las propiedades de pasividad.

2.2.1. Propiedades físicas

Como se mencionó anteriormente, una de las características primordiales de este motor, debida al diseño que presenta, es el desacoplamiento. Cada una de las fases del estator está desacoplada no solamente de forma física, sino también de forma eléctrica y magnética. Esta propiedad ofrece algunas ventajas, entre ellas es posible mencionar que la máquina puede seguir operando aún si una de sus fases se daña aunque, por supuesto, su desempeño no va

a ser el mismo que cuando la máquina trabaje con sus fases completas. Otra ventaja de este desacoplamiento es que el análisis que se realiza para una de las fases puede ser extendido a cada una de las otras, viéndose afectado solamente por el defazamiento que existe entre cada una de ellas.

Para que pueda ser maximizada la relación par/masa, el motor debe operar en la región de saturación magnética, lo que trae como resultado que el par desarrollado sea función de la posición del rotor y de las corrientes de estator. Además, se presenta una relación no lineal entre flujos y corrientes. Es posible obtener una relación lineal entre flujos y corrientes, obteniéndose el modelo llamado de baja corriente, donde la constante de proporcionalidad es la inductancia la cual sólo depende de la posición del rotor [1].

La necesidad de un conmutador electrónico para auxiliar en la alimentación de cada una de las fases también puede considerarse como una propiedad física de esta máquina. Esta necesidad también es producto de la construcción de la máquina ya que, debido al desacoplamiento, cada una de las fases debe ser alimentada individualmente por un voltaje que debe ser conmutado y que va a depender de la posición del rotor, del cual depende la forma de onda de la inductancia y por consiguiente el signo del par generado. En este mismo sentido, debe notarse que sólo son necesarias corrientes de signo positivo para la generación de pares positivos y negativos, únicamente se debe variar el ángulo al cual los dispositivos electrónicos de potencia deben ser conmutados. En la Figura 2-3 se aprecia uno de los esquemas electrónicos comúnmente utilizados para la conmutación.

Si se analiza este circuito se puede observar que los interruptores se deben abrir o cerrar con el fin de obtener la curva deseada para las corrientes de estator. La secuencia de disparo de los interruptores es determinada por una ley de conmutación. En la literatura especializada en el tema (vease por ejemplo [2],[3]) se han reportado estudios detallados que han conducido a proponer varios tipos de leyes de conmutación, que son parte fundamental en el control del SRM porque determinan en gran medida el desempeño que este pueda tener.

Otra propiedad que cabe mencionar es que para este tipo de motores no existe (aún en el caso en que se consideran las características magnéticas lineales) una transformación de coordenadas, dado que el SRM es de polos salientes, que elimine la dependencia con respecto a

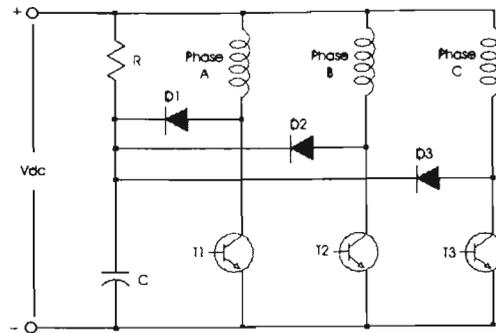


Figura 2-3: Conmutador electrónico para un SRM 3ϕ

la posición de la flecha del rotor (θ) de las ecuaciones de flujo y par; por lo tanto es natural que la ley de control diseñada dependa explícitamente de θ . Cabe mencionar que para el análisis de muchas máquinas eléctricas es ventajoso buscar una transformación de coordenadas ya que el análisis y el control de ellas se vuelven más sencillos. Un ejemplo de estas transformaciones es la de Blondel-Park usada en máquinas de inducción [4].

2.2.2. Propiedades de pasividad

Los sistemas pasivos son representados por una clase de sistemas (lineales y no lineales) que poseen algunas propiedades que son muy atractivas desde el punto de vista del control. Es bien sabido que los sistemas pasivos son estables en el sentido de Lyapunov (cuando su entrada es cero) además de contar con una dinámica cero también estable, i.e. son de fase mínima [5]. Otra de las propiedades importantes de estos sistemas es que la interconexión por retroalimentación negativa entre sistemas pasivos da como resultado un sistema que es también pasivo y, por lo tanto, estable. Algunas definiciones básicas y propiedades de pasividad se dan en el Apéndice A.

Para el motor que se estudia en este trabajo, la propiedad básica de la que se hace uso es que su modelo puede ser descompuesto como la interconexión por retroalimentación de dos sistemas pasivos (uno eléctrico y el otro mecánico) considerando las siguientes entradas y salidas (figura 2-4).

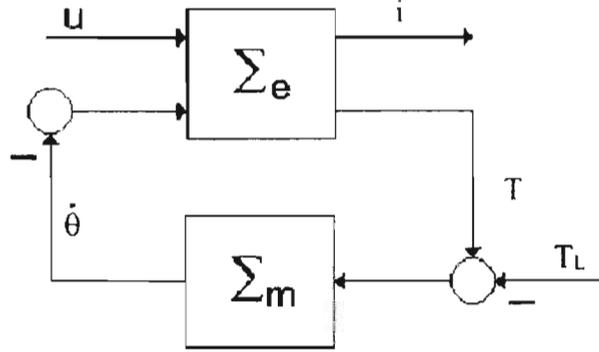


Figura 2-4: Descomposición pasiva de un SRM

$$\sum_e : u = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ T(\theta, \mathbf{i}) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

para el subsistema eléctrico, donde \mathbf{u} es el vector de voltajes en el estator, θ es la posición del rotor, \mathbf{i} es el vector de corrientes en el estator y T el par electromecánico generado, y

$$\sum_m : u = [T_L(\theta, \dot{\theta}) - T(\theta, \mathbf{i})] \rightarrow y = -\dot{\theta} \quad (2.2)$$

para el subsistema mecánico, donde T_L es el par de carga.

En el siguiente capítulo se tratará esta propiedad a detalle y se demostrará su validez. El demostrar que el SRM puede ser descompuesto en dos subsistemas pasivos es importante, dado que esto permite aplicar la estrategia de control propuesta en este trabajo. Se puede controlar la parte eléctrica de la máquina, que es considerada un lazo rápido, considerando al subsistema mecánico como una perturbación pasiva, esto es, una perturbación que no destruye la estabilidad en el sistema en lazo cerrado. Posteriormente, ya que se garantiza la convergencia de corrientes, se demuestra la convergencia de par y, por último, mediante un lazo externo (más lento) de control, se garantiza la convergencia de velocidad/posición.

2.3. Modelo matemático

En esta sección se presenta el modelo matemático del SRM que se emplea en este trabajo de tesis. Primeramente, se hace referencia al modelo que contempla las no linealidades magnéticas y posteriormente se hablará del modelo que considera características magnéticas lineales.

La máquina de reluctancia conmutada que se utilizó sin pérdida de generalidad, en este trabajo es un motor trifásico (3ϕ), con N_r polos en su rotor. Su representación matemática fue obtenida aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange tomando en cuenta las siguientes suposiciones, las cuales se han justificado en la descripción de las características físicas de la máquina.

- A.1 La inductancia mutua entre fases puede ser despreciada.
- A.2 La inductancia puede ser modelada mediante una función no lineal continua de la posición del rotor y de la corriente en los devanados de la fase respectiva.
- A.3 La corriente en cada fase es tal que $i_j \geq 0$ para $j = 1, 2, 3$. Lo que trae como ventaja que se reduzcan los costos en el conmutador
- A.4 No existen efectos capacitivos en los devanados del estator ni tampoco efectos torsionales en la flecha. Con esto, se puede afirmar que la función de energía total en esta máquina está solamente determinada por la función de co-energía magnética y co-energía cinética.

2.3.1. Modelo Completo

Al aplicar un voltaje u_j en cada una de las fases del estator se produce una corriente eléctrica i_j a través de las bobinas de cada fase, la cual produce un flujo magnético ó enlace de flujo $\psi_j(\theta, i_j)$. Una expresión para éste que toma en cuenta la saturación del circuito magnético y el efecto **de ranura entre polos**¹, está dada por [6] (ver figura 2-5).

$$\psi_j(\theta, i_j) = \psi_s \arctan(\beta f_j(\theta) i_j) \quad \text{para } i_j \geq 0 \text{ y } j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

¹slot leakage en inglés

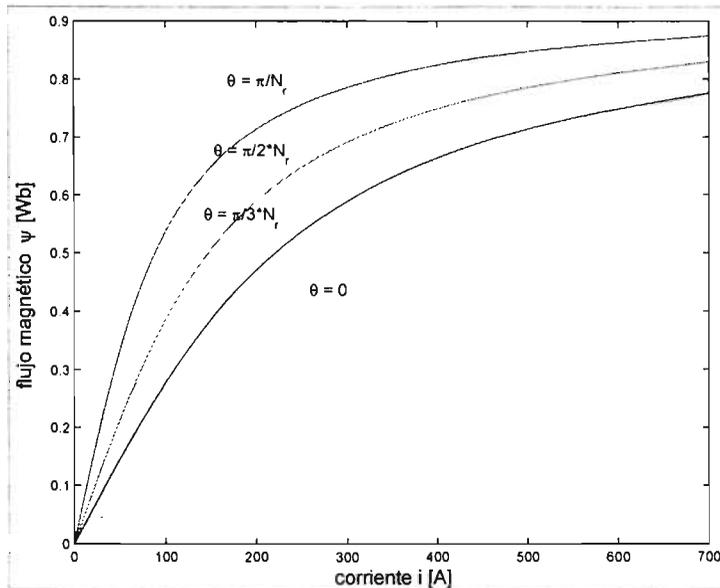


Figura 2-5: Flujo magnético en función de la corriente

donde ψ_s es el enlace de flujo de saturación, β es una constante positiva determinada por el experimento, $f_j(\theta)$ es la inductancia no lineal en cada una de las fases, $j = 1, 2, 3$, la cual es una función periódica estrictamente positiva que está dada en forma general como una serie de Fourier de la forma

$$f_j(\theta) = a + \sum_{m=1}^{\infty} \{b_m \sin[mN_r\theta - (j-1)2\pi/n] + c_m \cos[mN_r\theta - (j-1)2\pi/n]\} \quad (2.4)$$

donde N_r es el número de polos del rotor, n es el número de fases. Debido a la periodicidad de $f_j(\theta)$, $\psi_j(\theta, i_j)$ es también periódica en θ con periodo $\frac{2\pi}{N_r}$ y defasadas por un ángulo $\phi_j = (j-1)\frac{2\pi}{3}$.

Observación: La forma particular de $f_j(\theta)$ depende la geometría de la máquina y características de su materiales.

Si se supone que $f_j(\theta)$ es una función par, entonces su expansión en series de fourier sólo está en términos de funciones cosenoidales, en tal caso la aproximación de $f_j(\theta)$ de primer orden

es

$$f_j(\theta) = L_0 - L_1 \cos[Nr\theta - (j-1)2\pi/2] \quad (2.5)$$

donde

$$L_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j^+(\theta) d\theta \quad \text{y} \quad L_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j^+(\theta) \cos(N_r\theta) d\theta$$

donde $f_j^+(\theta)$ es la forma particular de la onda de inductancia no lineal la cual se puede obtener experimentalmente.

Observación: Dado que $L_0 > L_1$, la inductancia no lineal en cada una de las fases además de ser estrictamente positiva (acotada por abajo), está acotada por arriba, i.e

$$0 < f_i(\theta) < L_0$$

Para el desarrollo del modelo del SRM se hizo un análisis por malla, considerando como coordenadas generalizadas las cargas de la malla y la posición angular mecánica.

En este sentido, la co-energía magnética para cada fase está dada por la siguiente expresión

$$W'_j(\theta, i_j) = \int_0^{i_j} \psi_j(\theta, i_j) di_j \quad (2.6)$$

de donde, sustituyendo $\psi_j(\theta, i_j)$ de la ec. (2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} W'_j(\theta, i_j) &= \int_0^{i_j} \psi_s \arctan(\beta f_j(\theta) i_j) di_j \\ W'_j(\theta, i_j) &= \psi_s i_j \arctan(\beta f_j(\theta) i_j) - \frac{\psi_s \ln[1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_j^2]}{2\beta f_j(\theta)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La co-energía cinética de esta máquina está dada por la expresión

$$K'(\theta) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (2.8)$$

donde J es la inercia y $\dot{\theta}$ es la velocidad angular.

Suponiendo que los elementos resistivos eléctricos del motor son disipadores lineales de

potencia eléctrica, entonces podemos asociar a estos elementos la siguiente función de disipación de Rayleigh

$$F(i) = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T R \mathbf{i} \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{i} = [i_1, i_2, i_3]$ es el vector de corrientes en el estator y $R = \text{diag}[r_1, r_2, r_3]$ es la matriz de resistencias del estator.

Por lo tanto de las ec. (2.6), y (2.8) y la suposición A.4 tenemos que el lagrangiano para cada fase, \mathcal{L}_j , está dado por

$$\mathcal{L}_j(\theta, i_j, \dot{\theta}) = W'_j(\theta, i) + K'(\theta)$$

$$\mathcal{L}_j(\theta, i_j, \dot{\theta}) = \psi_s i_j \arctan(\beta f_j(\theta) i_j) - \frac{\psi_s \ln[1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_j^2]}{2\beta f_j(\theta)} + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (2.10)$$

Las fuerzas externas generalizadas que actúan sobre un SRM son los voltajes aplicados a los devanados del motor, \mathbf{u} , y el par de carga, $-T_L$, por lo tanto el vector de fuerzas generalizadas está dado por $\mathbf{z} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, -T_L]^T$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = \mathbf{z} \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \theta]^T$ es el vector de coordenadas generalizadas y $\dot{\mathbf{q}} = [i_1, i_2, i_3, \dot{\theta}]^T$ es el vector de velocidades generalizadas.

Sustituyendo la ec. (2.10) y la ec. (2.9) en la ec. (2.11) se obtiene el modelo de un SRM, que queda en la forma

$$\frac{\psi_s \beta N_r f_j(\theta)}{1 + \beta f_j^2(\theta) i_j^2} \left(\frac{d i_j}{dt} \right) + \frac{\psi_s \beta N_r}{1 + \beta f_j^2(\theta) i_j^2} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} i_j \dot{\theta} + r i_j = u_j \text{ con } j = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

para el subsistema eléctrico y

$$J \ddot{\theta} = T(\theta, \mathbf{i}) - T_L \quad (2.13)$$

para el subsistema mecánico. En esta ecuación, (2.3), la variable T es el par generado de origen eléctrico total, J es la inercia y T_L es el par de carga. Debido a la suposición A.1, T se obtiene como la suma del par generado por cada una de las fases del estator, i.e

$$T(\theta, i_1, i_2, i_3) = \sum_{j=1}^3 T_j(\theta, i_j)$$

donde T_j es el par generado de origen eléctrico por fase.

Suponiendo que la co-energía magnética W'_j es totalmente convertida en co-energía mecánica E'_{Mj} , por conservación de energía tenemos que

$$E'_{Mj}(\theta, i_j) = \int_0^{i_j} T_j(\theta, i_j) d\theta = W'_j$$

de donde tenemos que

$$T_j(\theta, i_j) = \frac{\partial W'_j(\theta, i_j)}{\partial \theta}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

entonces sustituyendo la ec. (2.7) en la ec. (2.14), se obtiene que el par producido por cada fase está dado por (ver figura 2-6)

$$T_j(\theta, i_j) = \frac{\psi_s}{2\beta f_j^2(\theta)} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \ln(1 + \beta^2 f_j^2(\theta) i_j^2) \quad (2.15)$$

Algunas notas interesantes acerca del modelo desarrollado para el SRM son:

Observación 1. Contrario al modelo para los enlaces de flujo usado en [7], primero reportado en [3], la ecuación (2.3) tiene la gran ventaja que deriva una expresión para el par generado, dada por (2.15) que es invertible, i.e, es posible obtener una expresión para las corrientes del motor en términos del par mecánico. Además el modelo en la ec. (2.3) captura las propiedades físicas del motor, ya que considera que para grandes corrientes el enlace de flujo alcanza un valor máximo de saturación ψ_s .

Observación 2. De la ec.(2.15) se puede ver que el signo del par debido a una fase j es sólo determinado por $\frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta}$ (la derivada parcial de la inductancia no lineal con respecto a la posición del rotor), dado que la corriente i_j y $f_j(\theta)$ son siempre positivas.

Observación 3. Si ninguna corriente se aplica a las bobinas del estator, el enlace de flujo

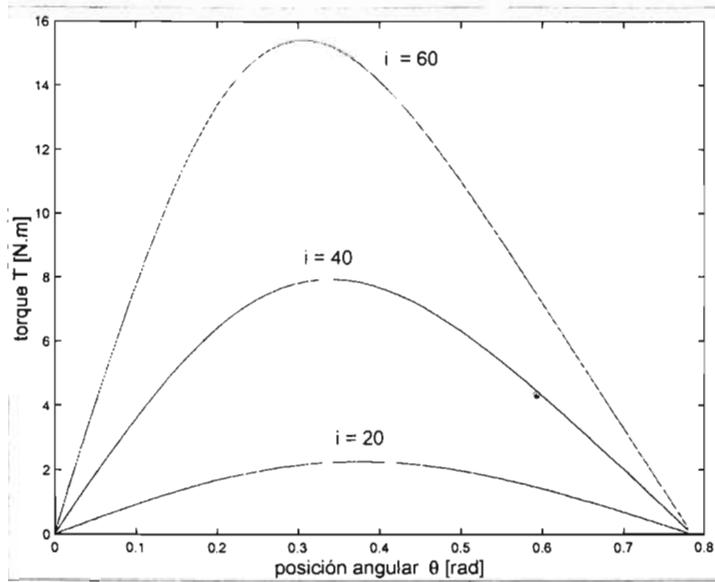


Figura 2-6: Par en función de la posición angular

y el par en cada fase son cero.

Si adicionalmente se define

$$D_j(\theta, i_j) = \frac{\partial \psi(\theta, i)}{\partial i_j} = \frac{\psi_s \beta N_r f_j(\theta)}{1 + \beta f_j^2(\theta) i_j^2} \quad (2.16)$$

y

$$C_j(\theta, i_j) = \frac{\psi_s \beta N_r}{1 + \beta f_j^2(\theta) i_j^2} \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \quad (2.17)$$

entonces el modelo del subsistema eléctrico del SRM se puede escribir en notación matricial como

$$\mathbf{D}(\theta, \mathbf{i}) \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{C}(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{u} \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{D}(\theta, \mathbf{i})$ es una matriz diagonal con elementos dados por (2.16), \mathbf{i} es el vector de corrientes de fase, $\mathbf{C}(\theta, \mathbf{i})$ es matriz diagonal con términos dados por (2.17) y \mathbf{u} es el vector de voltajes en el estator. Es importante notar que los términos $D_j(\theta, i_j)$ son estrictamente positivos, ya que $f_j(\theta)$ es una función estrictamente positiva y la corriente, i_j siempre es positiva. Este hecho servirá

más adelante para definir la función de Lyapunov que prueba las propiedades del controlador propuesto.

2.3.2. Modelo Simplificado

Un modelo simplificado de un SRM se puede derivar a partir del modelo no lineal completo de esta máquina, si se linealiza la expresión no lineal para los enlaces de flujo alrededor de una corriente cero en cada una de las fases, i.e.,

$$\psi_j(\theta, i_j)_L = \left[\frac{\partial \psi_j(\theta, i_j)}{\partial i_j} \right]_{i_j \rightarrow 0} i_j \quad (2.19)$$

donde $\psi_j(\theta, i_j)_L$ es enlace de flujo lineal, y la inductancia lineal $L_j(\theta)$ está dada por

$$L_j(\theta) = \left[\frac{\partial \psi_j(\theta, i_j)}{\partial i_j} \right]_{i_j \rightarrow 0} = \frac{\psi_s \beta f_j(\theta)}{1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_j^2} \Big|_{i_j \rightarrow 0} = \psi_s \beta f_j(\theta) \quad (2.20)$$

Entonces una expresión lineal para los enlaces de flujo en función de las corrientes en el estator está dada por

$$\psi_j(\theta, i_j)_L = L_j(\theta) i_j \quad (2.21)$$

Si se considera que $f_j(\theta)$ está dada por la ec.(2.5) entonces de la ec. (2.20) tenemos que

$$L_j(\theta) = \psi_s \beta f_j(\theta) = \psi_s \beta L_0 - \psi_s \beta L_1 \cos[Nr\theta - (j - 1)2\pi/2] \quad (2.22)$$

Bajo esta simplificación, la función de co-energía magnética lineal queda de la forma

$$W'_m(\theta, i) = \frac{1}{2} i^T \mathbf{L}(\theta) i \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{L}(\theta) = \text{diag}[L_1(\theta), L_2(\theta), L_3(\theta)]$ es la matriz de inductancia lineal del estator.

Entonces el modelo simplificado de un SRM se puede expresar como

$$\mathbf{L}(\theta) \frac{di}{dt} + \mathbf{G}(\theta) \dot{\theta} i + \mathbf{R} i = \mathbf{u} \quad (2.24)$$

$$J\ddot{\theta} = T(\theta, \mathbf{i}) - T_L(\theta, \dot{\theta}) \quad (2.25)$$

donde \mathbf{i} es el vector de corrientes en el estator, \mathbf{u} es el vector de voltajes en el estator, \mathbf{R} es una matriz diagonal de resistencias en el estator, $\mathbf{G}(\theta)$ es una matriz diagonal con elementos dados por

$$G_j(\theta) = \frac{\partial L_j(\theta)}{\partial \theta} = \psi_s \beta L_1 N_r \sin[N_r \theta - (j-1)2\pi/2] \quad (2.26)$$

y $T(\theta, \mathbf{i})$ es par de origen eléctrico dado por

$$T(\theta, i_1, i_2, i_3) = \sum_{j=1}^3 T_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} G_j(\theta) i_j^2 \quad (2.27)$$

De la ec. (2.27) podemos observar que el signo del par sólo está determinado por el término G_j , i.e. de la derivada parcial de la inductancia lineal con respecto a la posición del rotor.

2.4. Conmutador electrónico

El diseño del conmutador electrónico es una de las partes fundamentales para el control de los motores de reluctancia conmutada, ya que gran parte del buen desempeño del controlador implementado depende de la forma en que trabaje éste.

Para generar las señales de conmutación en estos motores es necesario tener información de la posición del rotor, así que se hace necesario contar con un sensor para medir esta variable o implementar una técnica de estimación, i. e. una técnica que permita conocer en línea el valor de la posición del rotor sin la necesidad de contar con un dispositivo físico que realice esta tarea.

En la literatura científica se han reportado trabajos enfocados al rubro de la conmutación en el SRM y se han propuesto muchas estrategias para resolver este problema. En este trabajo, el conmutador que se presenta está basado en ideas que se proponen en [2] (*enfoque de par compartido*). El hecho de que las bobinas del estator estén desacopladas permite considerar al par generado como la suma de los pares inducidos en cada una de las fases del estator. Entonces, es bastante razonable definir una *función de par compartido* cuyo objetivo es escalar el par en cada fase de tal manera que la suma alcance el valor deseado.

Dicho de otra manera, este enfoque considera que no solo una fase bobina produce par al mismo tiempo, sino que esta tarea es compartida con las bobinas adyacentes. Así, en lugar de generar una conmutación instantánea entre las fases, su transición es acompañada de la mezcla de las corrientes aplicadas entre dos bobinas adyacentes. Esta conmutación suave de las corrientes en el estator permite reducir gran parte del rizo generado en las señales de par y velocidad.

La formulación matemática para el conmutador electrónico es la siguiente: dados dos conjuntos

$$\Theta_j^+ = \left\{ \theta : \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \geq 0 \right\} \quad \Theta_j^- = \left\{ \theta : \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} < 0 \right\} \quad (2.28)$$

donde Θ_j^+ es el conjunto de las posiciones angulares para las cuales el par es positivo y Θ_j^- es el conjunto de posiciones para la cual el par es negativo, si se eligen unas funciones de distribución de par cualesquiera $m_j^+(\theta)$ y $m_j^-(\theta)$ tales que

$$m_j^+(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in \Theta_j^+; \quad \sum_{j=1}^3 m_j^+(\theta) = 1 \quad \forall \theta \quad (2.29)$$

$$m_j^-(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in \Theta_j^-; \quad \sum_{j=1}^3 m_j^-(\theta) = 1 \quad \forall \theta \quad (2.30)$$

Entonces, estas *funciones de distribución de par* pueden escalar a cada fase del par con el fin de generar el par total deseado mediante la asignación de

$$m_j(\theta) = \begin{cases} m_j^+(\theta), & T_d \geq 0 \\ m_j^-(\theta), & T_d < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

donde T_d es el par deseado a ser generado.

Es necesario señalar que la estructura presentada para el conmutador electrónico tiene la ventaja de que permite al diseñador elegir libremente las funciones de distribución de par; siempre y cuando se satisfagan las condiciones dadas por (2.29) y (2.30). Esta característica es importante en el sentido de que este grado de libertad puede ser utilizado para solucionar problemas adicionales de optimización. Más aún, la relevancia de esta estructura es mayor en

el control basado en pasividad, dado que permite el desarrollar la herramienta que elimina el requerir de las propiedades de transformación Blondel-Park para el modelo de la máquina.

Bibliografía

- [1] G. S. Buja and M. I. Valla, "Control Characteristic of the SRM Drives-Part I: Operation in the Linear Region", *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, Vol. IE-38, No. 5, pp. 313-321, 1999.
- [2] D.G. Taylor: "Pulse-Width Modulated Control of Electromechanical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, AC-37(4), pp. 524-528.
- [3] Ilic-Spong, R. Marino, S. Peresada and D.G. Taylor: "Feedback Linearizing Control of Switched Reluctance Motors", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, AC-32(5), pp. 371-379.
- [4] P.J. Nicklasson, R. Ortega and G. Espinosa-Pérez "Passivity-based Control Of a class of Blondel-Park transformable electric machines" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-42, No.5, 1997.
- [5] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson and H. Sira-Ramírez "Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems", Springer Verlag 1998.
- [6] P. Vedagarbha, D.M. Dawson and W. Rhodes: "An Adaptive Controller for a General Class of Switched Reluctance Motor Models", *Automatica*, 1997, 33(9), pp. 1647-1655.
- [7] G. Espinosa-Pérez, P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa and H. Sira-Ramrez: "On the Control of Switched Reluctance Motors", 2000, *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Puebla, México.

- [8] G. Espinosa-Perez, P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa and H. Sira-Ramirez: "Passivity-based Control of Switched Reluctance Motors with Nonlinear Magnetic Circuits", 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA (Por aparecer en *IEEE Transactions on Control Systems Technology*).

Capítulo 3

Control Basado en Pasividad

En este capítulo se hace referencia a la metodología de control con la que se diseñaron los controladores para el motor de reluctancia conmutada presentados en este trabajo de tesis, esto es, el Control Basado en Pasividad (CBP). Se hace una breve descripción de esta metodología y se asientan las bases que hacen posible su aplicación en la máquina bajo estudio. En la segunda sección se realiza la descomposición pasiva del motor, dividiéndolo en dos subsistemas pasivos, uno formado por la parte eléctrica de la máquina y el otro por la parte mecánica de la misma. En la tercera sección de este capítulo se presentan los controladores propuestos. En primer lugar se trata la metodología a seguir para diseñar el controlador y después se hace un diseño de un controlador basado en el modelo completo y un controlador basado en el modelo simplificado. En la última sección de este capítulo se establecen diferentes criterios físicos y matemáticos para comparar el desempeño de los controles propuestos.

3.1. Control Basado en Pasividad

Los sistemas pasivos son una clase de sistemas dinámicos en los cuales la energía intercambiada con el medio ambiente juega un papel central. Un sistema pasivo no puede almacenar más energía de la que se le suministra desde el exterior y aquella que no almacena debe ser disipada. Por la definición dada anteriormente, se puede ver que la noción de pasividad se relaciona de forma inmediata con la física del sistema, en particular con sus propiedades de estabilidad.

Por lo tanto, si se ve a una interconexión por retroalimentación como un proceso de intercambio de energía, no debe sorprender el hecho de que la pasividad es invariante ante una interconexión por retroalimentación negativa [1].

El término PBC fue introducido por primera vez en [2] para definir una metodología de control cuyo fin es transformar el sistema en lazo cerrado pasivo. El PBC puede ser visto como una extensión de la técnica de moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, que fue introducida para resolver problemas de regulación por retroalimentación de estados en sistemas robóticos completamente actuados propuesta en [3]. Para el moldeo de energía en particular, se puede concentrar la atención en la energía potencial y en las funciones de disipación y proceder en dos etapas básicas. Primero, una etapa llamada moldeo de energía donde se modifica la energía potencial del sistema de tal forma que la nueva función de energía potencial tenga un mínimo único y global en el punto de equilibrio deseado. Segundo, una etapa de inyección de amortiguamiento donde se modifica la función de disipación para garantizar estabilidad asintótica. Desde el punto de vista del PBC la etapa de moldeo de energía es similar al objetivo de pasivización con la función de almacenamiento deseada dada por la energía cinética original y la nueva energía potencial deseada. La inyección de amortiguamiento refuerza la propiedad de pasividad estricta a la salida. Finalmente, la estabilidad en el sentido de Lyapunov es consecuencia de la estabilidad entrada-salida del mapeo estrictamente pasivo a la salida si se satisface una condición de detectabilidad.

3.2. Descomposición pasiva del SRM

En esta sección se presentan las propiedades de pasividad del motor de reluctancia conmutada, las cuales hacen posible la aplicación del enfoque basado en pasividad para el diseño del controlador. Se hace la descomposición pasiva del modelo completo del motor, demostrando la siguiente proposición.

Proposición. El modelo completo de un SRM de 3ϕ dado por

$$D(\theta, i) \frac{di}{dt} + C(\theta, i)\dot{\theta}i + Ri = u \quad (3.1)$$

$$J\ddot{\theta} = T(\theta, i) - T_L(\theta, \dot{\theta}) \quad (3.2)$$

puede ser descompuesto como una interconexión por la retroalimentación negativa de dos sistemas pasivos: uno eléctrico y otro mecánico

$$\begin{aligned} \sum_e : u &= \begin{bmatrix} u \\ -\dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} i \\ T(\theta, i) \end{bmatrix} \\ \sum_m : u &= [T_L(\theta, \dot{\theta}) - T(\theta, i)] \rightarrow y = -\dot{\theta} \end{aligned}$$

donde $u = [v_1, v_2, v_3]^T$ y $i = [i_1, i_2, i_3]^T$.

Demostración. La prueba está basada en la propiedad de los sistemas electromecánicos [4] la cual establece que la suma de las funciones de energía y co-energía magnética es igual al producto del enlace de flujo y las corrientes en las bobinas. En el caso del modelo bajo estudio, tenemos que

$$W(\theta, \psi) + W'(\theta, i) = \psi^T i \quad (3.3)$$

donde $\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]^T$ es el vector de enlaces de flujo de las bobinas,

$$W(\theta, \psi) = \sum_{j=1}^3 W_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^{\psi_j} i_j(\theta, i_j) d\psi_j \right) \quad (3.4)$$

es la función energía magnética total y

$$W'(\theta, i) = \sum_{j=1}^3 W'_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^{i_j} \psi_j(\theta, i_j) di_j \right) \quad (3.5)$$

es la función co-energía magnética total.

Entonces de (3.3), la energía magnética total se puede escribir como

$$W(\theta, \psi) = \psi^T i - W'(\theta, i) \quad (3.6)$$

derivando la energía magnética total respecto del tiempo obtenemos

$$\dot{W}(\theta, \psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^T \mathbf{i} + \psi \frac{d\mathbf{i}}{dt} - \frac{\partial (W'(\theta, \mathbf{i}))}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{\partial (W'(\theta, \mathbf{i}))}{\partial \mathbf{i}} \frac{d\mathbf{i}}{dt} \quad (3.7)$$

y dado que $T(\theta, \mathbf{i}) = \partial (W'(\theta, \mathbf{i})) / \partial \theta$ se puede expresar la ec. (3.7) como

$$\dot{W}(\theta, \psi) = \left[\psi - \frac{\partial W'(\theta, \mathbf{i})}{\partial \mathbf{i}} \right]^T \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^T \mathbf{i} - T(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \quad (3.8)$$

y como de la ec. (3.5) $\psi = \frac{\partial W'(\theta, \mathbf{i})}{\partial \mathbf{i}}$ entonces se tiene que

$$\dot{W}(\theta, \psi) = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^T \mathbf{i} - T(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \quad (3.9)$$

El modelo del subsistema eléctrico dada por la ec. (3.1) se puede escribir como

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^T + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{u}$$

entonces la ec. (3.9) puede escribirse como

$$\dot{W}(\theta, \psi) = -\mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{u}^T \mathbf{i} - T(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \quad (3.10)$$

donde \mathbf{R} es una matriz diagonal de resistencias en el estator. Integrando la ec. (3.10) se tiene que

$$W(\theta(T), \psi(T)) - W(\theta(0), \psi(0)) = \int_0^T (\mathbf{u}^T \mathbf{i} - \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} - T(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta}) dt \leq \int_0^T (\mathbf{u}^T \mathbf{i}) dt \quad (3.11)$$

La ec. (3.11) establece que la energía acumulada por el sistema es menor que la energía suministrada.

La segunda parte de la proposición se prueba de una manera similar si se considera que la

función de co-energía cinética de esta máquina es

$$K'(\theta) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (3.12)$$

La derivada respecto al tiempo de esta función a lo largo de las trayectorias del subsistema mecánico (3.2) es

$$\dot{K}'(\theta) = J \dot{\theta} \ddot{\theta} = \dot{\theta}(T - T_L) \quad (3.13)$$

Integrando la ec. (3.13) se tiene que

$$K'(\theta(T)) - K'(\theta(0)) = \int_0^T (\dot{\theta}T - \dot{\theta}T_L) dt \leq \int_0^T (\dot{\theta}T) dt \quad (3.14)$$

de donde se observa que la energía mecánica acumulada es menor a la energía mecánica suministrada. En este caso el elemento disipativo se encuentra en T_L en donde se pueden incluir efectos de fricción viscosa y de carga.

3.3. Diseño del controlador

Una vez que se ha mostrado que el SRM puede ser descompuesto en dos subsistemas pasivos interconectados por retroalimentación negativa, el problema de control puede ser resuelto siguiendo tres pasos:

1. Control del subsistema eléctrico. En este paso se diseña un controlador por retroalimentación de salida, i.e. solo se retroalimentan las corrientes de estator, de tal forma que el sistema en lazo cerrado formado por este controlador y el subsistema eléctrico sea pasivo. Con esto, invocando el principio de invariancia para la interconexión por retroalimentación negativa para los sistemas pasivos, el subsistema mecánico (que es pasivo) puede ser visto como una perturbación pasiva que no destruye las propiedades de pasividad (y por lo tanto las de estabilidad) del sistema completo.
2. Del seguimiento de corrientes al seguimiento de par. Una vez que el problema de control de seguimiento de corrientes ha sido resuelto, el segundo paso es determinar un compor-

tamiento deseado de las corrientes de tal forma que sea compatible con las dinámicas del sistema, pero que al mismo tiempo genere una referencia preestablecida para el par generado. Este paso puede ser formulado en términos de la inversión del sistema en el sentido de que, para un determinado par deseado, el diseñador debe ser capaz de calcular un comportamiento de las corrientes que lo generen. Evidentemente, la definición de ese comportamiento de las corrientes debe ser complementado con la demostración de que la convergencia de corrientes implica la convergencia de par.

3. Control del subsistema mecánico. En este paso se define la estructura del par deseado que garantiza el control de las variables eléctricas. Esta definición involucra la retroalimentación de la velocidad o de la posición mecánicas, dependiendo de los objetivos de control, y debe ser realizado de tal forma que la estabilidad de todo el sistema completo de control pueda ser garantizada.

Es posible hacer dos observaciones con respecto a esta metodología de diseño del controlador:

- Note que los tres pasos anteriores son muy parecidos al control en cascada, ampliamente utilizado en la industria. Las principales diferencias entre el control propuesto en este trabajo y el control en cascada son que en lugar de utilizar los compensadores clásicos PI usados por el control en cascada, en el control basado en pasividad se usan controladores no lineales. Además, las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado, formado por el motor y el controlador propuesto, son establecidas formalmente.
- Sobre la inversión del sistema, problema impuesto en el segundo paso, es posible mencionar que este problema se resuelve en [6] para una clase de máquinas eléctricas inductivas, explotando las propiedades de la transformación de Blondel-Park. Como se mencionó anteriormente, el SRM no posee esta propiedad por lo que el problema es resuelto, como se verá más adelante, siguiendo el enfoque de par compartido.

3.3.1. Control del modelo completo

En esta subsección se presenta uno de los resultados principales de este trabajo, el control de par/velocidad/posición para el SRM. Cabe aclarar que solo se presenta el caso de velocidad, los casos de control de par y de posición se abordarán más adelante.

Proposición 1. Considérese el modelo completo de un SRM dado por (2.13), (2.15) y (2.18) en lazo cerrado con la ley de control

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(\theta, \mathbf{i}) \frac{d\mathbf{i}_d}{dt} + \mathbf{C}(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \mathbf{i}_d + \mathbf{R} \mathbf{i}_d - \mathbf{K}_v (\mathbf{i} - \mathbf{i}_d) \quad (3.15)$$

donde $\mathbf{i}_d = [i_{1d}, i_{2d}, i_{3d}]$ es el vector de corrientes deseadas y $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{K_{1v}, K_{2v}, K_{3v}\}$ es una matriz de ganancias eléctricas, tal que se garantiza que

$$\mathbf{C}(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} + \mathbf{R} + \mathbf{K}_v > 0 \quad (3.16)$$

Las corrientes deseadas en cada fase i_{jd} en función del par están dadas por (despejada de la ec. (2.15))

$$i_{jd} = \begin{cases} \frac{1}{\beta f_j(\theta)} \sqrt{\left[\exp\left(\frac{T_{jd}(\theta, i_j) 2\beta f_j^2(\theta)}{\psi_s\left(\frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta}\right)}\right) - 1 \right]} & \text{si } \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \neq 0 \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $j = 1, 2, 3$ y T_{jd} es el par deseado a generar por cada fase, el cual está relacionado con el par deseado T_d por medio de las funciones $m_j(\theta)$

$$T_{jd} = m_j(\theta) T_d \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

El par deseado está relacionado, a su vez, con el error de velocidad $\tilde{\theta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$ por

$$T_d(z) = J \ddot{\theta}_d - z + T_L(\theta, \dot{\theta}) \quad (3.19)$$

con el estado del controlador, z , dado por

$$\dot{z} = -c_1 z + c_2 \tilde{\theta}; \quad z(0) = z_0 \quad (3.20)$$

donde c_1, c_2 son constantes positivas.

Bajo estas condiciones se garantiza seguimiento asintótico de la velocidad, i.e $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta} = 0$, con todas las señales internas acotadas.

Demostración. Si el vector de error de corriente es definido como $e = i - i_d$, el modelo (2.18) puede ser escrito equivalentemente como

$$D(\theta, i) \frac{de}{dt} + C(\theta, i) \dot{\theta} e + R e = \phi \quad (3.21)$$

donde

$$\phi = u - \left\{ D(\theta, i) \frac{di_d}{dt} + C(\theta, i) \dot{\theta} i_d + R i_d \right\}$$

Entonces, considerando el control propuesto (3.15), la expresión (3.21) toma la forma

$$D(\theta, i) \frac{de}{dt} + [C(\theta, i) \dot{\theta} + R + K_v] e = 0$$

Puesto que $D(\theta, i)$ es una matriz definida estrictamente positiva, está última ecuación puede ser escrita como

$$\frac{de}{dt} = -D^{-1}(\theta, i) [C(\theta, i) \dot{\theta} + R + K_v] e \quad (3.22)$$

Debido a la estructura diagonal de la matriz, se tiene un conjunto de tres ecuaciones diferenciales desacopladas variantes en el tiempo de la forma

$$\frac{de_j}{dt} = -a_j(t) e_j(t); \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal variante en el tiempo (LTV) cuya estabilidad en el origen como punto de equilibrio puede ser completamente caracterizada en términos de la matriz de transición de estados del sistema LTV, utilizando el siguiente teorema [5]

Teorema 1. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (3.24) es (global) asintóticamente uniforme*

estable si y solo si la matriz de transición de estados satisface que

$$\|\phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

para alguna constante positiva k y γ .

En nuestro caso en particular, si se escoge $\mathbf{K}_v = -\mathbf{C}(\theta, i)\theta + \mathbf{K}$ con $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$, el término de la ec. (3.22) entre corchetes es siempre positivo, y entonces tenemos que

$$\frac{de}{dt} = -\mathbf{D}^{-1}(\theta, i) [\mathbf{R} + \mathbf{K}] e = \mathbf{A} e \quad (3.25)$$

el cual puede ser visto como un sistema LTV, donde $\mathbf{A} = -\mathbf{D}^{-1}(\theta, i) [\mathbf{R} + \mathbf{K}] = \text{diag}(-a_j)$ es una matriz es diagonal LTV, donde a_j está dada por

$$a_j = D_j^{-1}(\theta, i_j) [R_j + K_j] = \frac{1 + \beta f_j^2(\theta) i_j^2}{\psi_j \beta f_j(\theta)} [R_j + K_j] \quad (3.26)$$

La función de transición de estados de (3.25) está dada por $\phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \mathbf{A} dt \right]$, entonces dado que \mathbf{A} es diagonal, para probar que el origen de (3.25) es asintóticamente uniformemente estable, por el Teorema 1 basta que demostrar que

$$\phi_j(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t -a_j dt \right] < ke^{-\gamma(t-t_0)} \quad (3.27)$$

lo cual se reduce a demostrar que

$$\left[\int_{t_0}^t a_j dt \right] = \bar{a}_j(t - t_0) < \gamma(t - t_0) \quad (3.28)$$

donde \bar{a}_j es el valor medio de a_j , es decir, se debe demostrar que a_j está acotada por abajo y por arriba. Dado que $D_j > 0$, $R_j > 0$ y $K_j > 0$ entonces a_j está acota por abajo, ahora solo hay que demostrar que a_j está acotada por arriba por una constante γ , i.e ($a_j < \gamma$). Desarrollando a_j tenemos que

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{1 + \beta f_j^2(\theta) i_j^2}{\psi_s \beta f_j(\theta)} [R_j + K_j] = \frac{1}{\psi_s \beta f_j(\theta)} [R_j + K_j] + \frac{\beta f_j^2(\theta) i_j^2}{\psi_s \beta f_j(\theta)} [R_j + K_j] \quad (3.29) \\
&= \mu_1 + \mu_2 i^2
\end{aligned}$$

de donde se puede observar que μ_1 y μ_2 están acotadas por arriba, ya que f_j es acotada por arriba ($0 < f_j(\theta) < L_0$) y ψ_s , β , R_j y K_j son constantes positivas acotadas por arriba. Ahora solo hay que demostrar que i_j está acotada por arriba.

Y como la corriente i_j está dada por

$$i_j = \begin{cases} \frac{j}{\beta f_j(\theta)} \sqrt{\left[\exp\left(\frac{2\beta f_j^2(\theta) T_j(\theta, i_j)}{\psi_s \left(\frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta}\right)}\right) - j \right]} & \text{si } \frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta} \neq 0 \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \quad (3.30)$$

se observa que está en función de valores acotados por arriba, entonces i_j está acotada por arriba. Por lo tanto a_j esta acotada por abajo y arriba, y entonces el origen de (3.25) es uniforme asintóticamente estable. Por lo tanto los errores de seguimiento de corrientes convergen asintóticamente a cero.

Para probar que el seguimiento de corrientes implica el seguimiento de par, se considera la definición de par de fase deseado dada por

$$T_{jd}(\theta, i_{jd}) = \frac{\psi_s}{2\beta f^2(\theta)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \ln(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_{jd}^2)$$

entonces el error de par está dado por

$$\begin{aligned}
T_j - T_{jd} &= \frac{\psi_s}{2\beta f^2(\theta)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \{ \ln(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_j^2) - \ln(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_{jd}^2) \} \quad (3.31) \\
&= \frac{\psi_s}{2\beta f^2(\theta)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \ln \left(\frac{(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_j^2)}{(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_{jd}^2)} \right)
\end{aligned}$$

De donde se ve que si el error de corriente tiende a cero i.e ($i_j = i_{jd}$), entonces el error de par tiende a cero ($T_j \rightarrow T_{jd}$ cuando $t \rightarrow \infty$).

El paso final en la prueba es demostrar que el error de velocidad también tiende a cero y que la estabilidad de todo el sistema es garantizada. Esto se realiza si se considera la ecuación del error para el subsistema mecánico, $\tilde{\theta}$, la cual está dada por

$$J\ddot{\tilde{\theta}} = -z + T - T_d \quad (3.32)$$

Si esta ecuación se expresa, junto con la ec. (3.20), como

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\theta}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ c_2 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} (T - T_d)$$

entonces se tiene una expresión de la forma

$$\dot{x} = Ax + B(T - T_d) \quad (3.33)$$

donde se puede observar que la matriz A es Hurwitz para todos los valores positivos c_1 y c_2 , y por lo tanto el error de velocidad converge asintóticamente a cero.

Sustituyendo (3.18) en (3.17) y luego en (3.31) obtenemos que

$$T_j - T_{jd} = \frac{\psi_s}{2\beta f^2(\theta)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \ln(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 i_{jd}^2) - m_j J \ddot{\theta}_d + m_j z - m_j T_L$$

y puesto que el error de corrientes es $e_j = i_i - i_{jd} \rightarrow i_j = e_j + i_{jd}$ entonces

$$T_j - T_{jd} = \frac{\psi_s}{2\beta f^2(\theta)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \left\{ \ln [1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 (e_j^2 + e_i i_{jd} + i_{jd}^2)] \right\} - m_j J \ddot{\theta}_d + m_j z - m_j T_L$$

por lo que la ec. (3.33) se puede expresar como

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_j}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left[\frac{\psi_s}{2\beta f^2(\theta)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \left\{ \ln [1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 (e_j^2 + e_i i_{jd} + i_{jd}^2)] \right\} + m_j (-T_L - J \ddot{\theta}_d) \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

la cual es una expresión de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bx + c(x) \quad (3.35)$$

y en la cual es posible demostrar que

$$|B| \leq \left| \frac{1}{J} \right|$$

y

$$|c| \leq \left| \frac{\psi_s L_1 N_R}{2\beta f^2(\theta)} \right| \left| \ln(1 + \beta^2 f_j(\theta)^2 (e_j^2 + ei_{jd} + i_{jd}^2)) \right|$$

Se puede observar que el sistema $\dot{x} = [A + B]x$ es exponencialmente estable y, dado que $\|c(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se concluye que $x \rightarrow 0$ siempre y cuando i_{jd} permanezca acotada [5].

△ △ △

Del controlador propuesto es interesante hacer algunas observaciones:

- Es importante mencionar que (3.17) siempre está bien definida. Esto es debido a la operación natural del motor. Cuando el par deseado es negativo, entonces la corriente se aplica cuando $\frac{\partial f_j(\theta)}{\partial \theta}$ es negativo y viceversa. Así el argumento de la exponencial siempre es positivo, entonces el argumento dentro de la raíz nunca puede ser menor que uno.
- El enfoque de partición de par juega un papel fundamental en la solución del control, puesto que el par total deseado a generar es una combinación lineal de los pares deseados en cada una de las fases T_{jd} . Entonces el cálculo de las corrientes deseadas puede hacerse de manera independiente para cada fase.
- En términos generales, la matriz K_v puede depender de la posición y velocidad del rotor $(\theta, \dot{\theta})$ y de las corrientes en el estator (i). Escogiendo $K_v = -C(\theta, i)\dot{\theta} + K$ con $K = K^T > 0$
- En lo que respecta al control de par debe notarse que este problema se resuelve cuando se garantiza lo establecido en el segundo paso en la metodología, i.e. cuando a partir de la convergencia de corrientes se demuestra la convergencia de par. Por otro lado, el problema

de control de posición puede ser resuelto siguiendo también el diseño de [7], si se modifica la expresión (3.19) de la siguiente forma

$$T_d(z) = J\ddot{\theta}_d - z - f\dot{\theta} + T_L(\theta, \dot{\theta}) \quad (3.36)$$

donde $f > 0$ es una constante y el error de posición está dado por $\tilde{\theta} = \theta - \theta_d$. La demostración para este caso es similar a la presentada para el caso de control de velocidad.

- La suposición de que el par de carga es una variable conocida sirve para simplificar la presentación. El resultado puede extenderse para el caso en que el par de carga sea estimado [2]. En este sentido, se puede considerar que el par de carga tiene la forma

$$T_L(\theta, \dot{\theta}) = [P_1 + P_2\dot{\theta}^2] \tanh\left(\frac{\dot{\theta}}{\epsilon}\right)$$

donde $\epsilon > 0$ es un parámetro de escalamiento y $P_1, P_2 \in R \geq 0$. Esto es, una función desconocida pero que puede ser parametrizada en forma lineal de la siguiente forma

$$T_L(\theta, \dot{\theta}) = [P_1 P_2] \begin{bmatrix} \tanh(\frac{\dot{\theta}}{\epsilon}) \\ \dot{\theta}^2 \tanh(\frac{\dot{\theta}}{\epsilon}) \end{bmatrix} = \Theta^T Y(\theta, \dot{\theta})$$

Este modelo del par de carga es suficientemente general para incluir la fricción mecánica y las cargas mecánicas (e.g. de compresores o bombas). El escalamiento de la función \tanh se hace para simular la función signo, reemplazando la discontinuidad en el modelo de la fricción con una curva de pendiente finita. Además expresar T_L de esta forma garantiza que para cualquier T existe una $\dot{\theta}$ acotada. Aparte de esto, T_L no juega ningún otro papel en el problema de seguimiento de par y puede ser tratado como una perturbación externa en el problema de seguimiento de velocidad. Así la ec. (3.19) es reemplazada por

$$T_d = J\ddot{\theta}_d - z + \hat{T}_L$$

donde \hat{T}_L es el par de carga estimado en línea de Θ , el cual se define más adelante.

Del análisis anterior es posible observar que la demostración de convergencia de corrientes no se ve afectada por este cambio y que la ec. (3.33) debe ser reemplazada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(T - T_d + \tilde{T}_L) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{T}_L + \mathbf{B}(T - T_d)\end{aligned}$$

donde $\tilde{T}_L = \hat{T}_L - T_L$. Se puede ver que el problema se reduce a diseñar un estimado para un sistema LTI con todo el estado medible y con perturbaciones aditivas que decaen exponencialmente. Este problema se resuelve usando el estimador

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\gamma \mathbf{x}^T P B Y(\theta, \hat{\theta}), \quad \gamma > 0$$

con $P = P^T > 0$, que satisface $A^T P + P A < 0$ y $Y(\theta, \hat{\theta})$ un estimador.

- Este trabajo está basado en el conocimiento estructural y paramétrico del motor, no se aborda a detalle el problema de incertidumbre estructurales y paramétricas del modelo del sistema, el cual se deja como un trabajo futuro. Y ciertamente es una limitación de este trabajo.

3.3.2. Control del modelo simplificado

En esta sección, el controlador diseñado en la subsección anterior se adecua para el caso particular del modelo simplificado.

Proposición 2. Considere el modelo simplificado de un SRM dado por (2.24), (2.25), (2.27). La ley de control dada por (3.15) especializada para este caso está dada por.

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}(\theta, i) \frac{di_d}{dt} + \mathbf{G}(\theta, i) \dot{\theta} i_d + \mathbf{R} i_d - \mathbf{K}_v (i - i_d) \quad (3.37)$$

donde $\mathbf{L}(\theta, i)$ está dada por la ec. (2.22), $\mathbf{G}(\theta, i)$ está dado por la ec. (2.26) y \mathbf{K}_v la matrix de ganancias es tal que K_{jv} satisface que

$$\psi_s \beta N_r l_1 \sin \left(N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right) \dot{\theta} + R_j + K_{jv} > 0 \quad (3.38)$$

Las corrientes deseadas tienen un comportamiento dado por

$$i_{jd} = \begin{cases} \sqrt{[2m_j(\theta)T_d K_j^{-1}(\theta)]} & \text{si } K_j(\theta) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \quad (3.39)$$

donde T_d es el par deseado a generar el cual está relacionado con el error de velocidad $\tilde{\theta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$ por

$$T_d(z) = J\ddot{\theta}_d - z + T_L(\theta, \dot{\theta}) \quad (3.40)$$

con el estado del controlador dado por

$$\dot{z} = -c_1 z + c_2 \tilde{\theta}; \quad z(0) = z_0 \quad (3.41)$$

donde c_1, c_2 constantes positivas.

Bajo estas condiciones se garantiza seguimiento asintótico de la velocidad, i.e $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\theta}} = 0$, con todas las señales internas acotadas.

Demostración. Si se define el vector de error de corrientes como $\mathbf{e} = \mathbf{i} - \mathbf{i}_d$, el subsistema eléctrico en términos del error puede ser escrito como

$$\mathbf{L}(\theta) \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \mathbf{G}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e} + \mathbf{R} \mathbf{e} = \Psi \quad (3.42)$$

donde Ψ queda definida como

$$\Psi = \mathbf{u} - \left\{ \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}_d}{dt} + \mathbf{G}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{i}_d + \mathbf{R} \mathbf{i}_d \right\} \quad (3.43)$$

Una candidata a función de Lyapunov es

$$V_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{L}(\theta) \mathbf{e} \quad (3.44)$$

cuya derivada respecto al tiempo es

$$\dot{V}_e = \mathbf{e}^T \mathbf{L}(\theta) \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{G}(\theta) \mathbf{e} \dot{\theta} \quad (3.45)$$

evaluando a lo largo de las trayectorias del sistema, se obtiene

$$\dot{V}_e = -\frac{1}{2}e^T G(\theta)e\dot{\theta} - e^T R e + e^T \Psi \quad (3.46)$$

donde si se sustituye el valor de Ψ y de u , se obtiene

$$\dot{V}_e = -e^T \left[\frac{1}{2}G(\theta)\dot{\theta} + R + K_v \right] e \quad (3.47)$$

Para que esta última expresión sea siempre negativa basta con garantizar que el término entre paréntesis cumpla con

$$\psi_s \beta N_r L_1 \sin \left(N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right) \dot{\theta} + R_j + K_{jv} > 0 \quad (3.48)$$

la cual es obtenida considerando la estructura específica de las entradas de la matriz $G(\theta)$. Nótese que el término senoidal está siempre acotado, por lo que el requerimiento (3.48) se satisface si $K_{jv} = \psi_s \beta N_r L_1 \left| \dot{\theta} \right|$ con $K_{jv} = c \left| \dot{\theta} \right|$ basta escoger $c > \psi_s \beta N_r L_1$.

La convergencia de par se demuestra, si se considera que la diferencia entre el par generado y el par deseado está dada por

$$T_j - T_{jd} = \frac{1}{2}G_j(\theta)i_j^2 - \frac{1}{2}G_j(\theta)i_d^2 \quad (3.49)$$

donde, si se sustituye la expresión del error de corrientes, se obtiene

$$T_j - T_{jd} = \frac{1}{2}G_j(\theta)(e_j + i_{jd})^2 - \frac{1}{2}G_j(\theta)i_{jd} \quad (3.50)$$

Si en esta expresión se considera que $G_j(\theta)$ dada por (2.26) está acotada por $\psi_s \beta L_1 N_r$ después de algunos cálculos se tiene que

$$|T_e - T_d| \leq \frac{\psi_s \beta L_1 N_r}{2} \|e\|^2 + \psi_s \beta L_1 N_r \|i_d\| \|e\| \quad (3.51)$$

En esta última expresión puede observarse que la convergencia de corrientes implica la convergencia de par, siempre y cuando el valor deseado de las corrientes i_d permanezca acotado.

Para obtener el comportamiento deseado de las corrientes se sigue el enfoque de par compartido, como en el caso del modelo completo. En este caso el valor del par deseado también se tiene con la suma del par deseado por fase, de la forma

$$T_d = \frac{1}{2}G_1(\theta)i_{1d}^2 + \frac{1}{2}G_2(\theta)i_{2d}^2 + \frac{1}{2}G_3(\theta)i_{3d}^2 \quad (3.52)$$

Dado que se sigue el enfoque de par compartido la expresión anterior debe de coincidir con

$$T_d = m_1(\theta)T_d + m_2(\theta)T_d + m_3(\theta)T_d \quad (3.53)$$

Lo anterior permite obtener una forma cerrada para el valor de las corrientes deseadas

$$i_{jd} = \begin{cases} \sqrt{[2m_j(\theta)T_d K_j^{-1}(\theta)]} & \text{si } K_j(\theta) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (3.54)$$

Finalmente, la convergencia de velocidad se garantiza de la siguiente forma: si se escribe la ecuación mecánica en términos del error velocidad

$$J\ddot{\tilde{\theta}} = -z + T - T_d \quad (3.55)$$

que junto con la ec. (3.41) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\theta}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ c_2 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} (T - T_d) \quad (3.56)$$

y entonces se tiene una expresión de la forma

$$\dot{x} = Ax + B(T - T_d) \quad (3.57)$$

donde se puede observar que la matriz A es Hurwitz para todos los valores positivos c_1 y c_2 , y por lo tanto el error de velocidad converge asintóticamente a cero.

Por otro lado, si se considera el error de par como

$$T_j - T_{jd} = \frac{1}{2}G_j(\theta)i_j^2 - \frac{1}{2}G_j(\theta)i_d^2 \quad (3.58)$$

entonces, y se sustituye la ec. (3.40) en la ec. (3.39) y después en la ec. (3.58) se obtiene

$$T_j - T_{jd} = \frac{1}{2}G_j(\theta)i_j^2 - m_j J \ddot{\theta}_d + m_j z - m_j T_L \quad (3.59)$$

Puesto que el error de corrientes es $e_j = i_j - i_{jd} \rightarrow i_j = e_j + i_{jd}$, en la expresión anterior se tiene

$$T_j - T_{jd} = \frac{1}{2}G_j(\theta)e_j^2 + G_j(\theta)e_j i_{jd} + \frac{1}{2}G_j(\theta)i_{jd}^2 - m_j J \ddot{\theta}_d + m_j z - m_j T_L \quad (3.60)$$

por lo que la ec. (3.56) se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_j}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left[\frac{1}{2}k_j e_j^2 + k_j e_j i_{jd} + \frac{1}{2}k_j i_{jd}^2 + m(-T_L - J\ddot{\theta}_d) \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

la cual es una expresión de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (3.62)$$

y en la cual es posible demostrar que

$$|\mathbf{B}| \leq \left| \frac{1}{J} \right|$$

y

$$|\mathbf{c}| \leq \left| \frac{L_1}{2J} \right| [\|e_j^2\| + 2\|e_j\| \|i_{jd}\|]$$

Se puede observar que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}]\mathbf{x}$ es exponencialmente estable y, dado que $\|\mathbf{c}(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se concluye que $\mathbf{x} \rightarrow 0$ siempre y cuando i_{jd} permanezca acotada [5].

3.4. Control basado en el modelo no lineal vs control basado en el modelo lineal

El objetivo de esta sección es establecer varios criterios matemáticos y físicos para evaluar el desempeño de los dos controles propuestos en la sección anterior. Los criterios tradicionales para evaluar el desempeño de un controlador son: la rapidez de convergencia del error a cero, la integral del error cuadrático, el tiempo del transitorio, el criterio del esfuerzo de control. En esta sección se introduce un criterio para evaluar el desempeño de un controlador en términos de la potencia demandada y disipada por un sistema en lazo cerrado con tal control. De los criterios convencionales se usará sólo el criterio de la integral del error cuadrático, aunque en el análisis de los resultados se puede hacer mención de otros.

3.4.1. Criterios de desempeño basados en el error

Dentro de los primeros criterios basados en el error tenemos el clásico de evaluar el tiempo de convergencia de error de seguimiento. Otro criterio basado en el error es ver como se comporta la salida de interés antes de que se estabilice al estado deseado, es decir, observar que el tiempo transitorio no exista un sobrepaso. Todos los criterios mencionados se pueden evaluar a simple vista observando las gráficas resultantes de la simulación sin realizar algún cálculo adicional en línea. No obstante, un criterio más formal basado en el error, es el criterio de la integral del error cuadrático.

$$J_e = \int_{t_i}^{t_f} e^2 dt \quad (3.63)$$

donde $e = y - y_d$, y es la variable real y y_d es la variable deseada. Otro criterio parecido a éste es el de integrar el valor absoluto del error

$$J_e = \int_{t_i}^{t_f} |e| dt \quad (3.64)$$

El significado matemático de éste último es que representa la suma del error absoluto de seguimiento instantáneo durante el tiempo que duró la tarea de control.

3.4.2. Criterio de control

Este criterio generalmente no requiere de cálculo alguno, basta con observar como es el esfuerzo de control en el sistema de control, en el caso de un SRM equivale a ver cómo son los voltajes de entrada en el estator.

3.4.3. Criterio basado en la demanda y disipación de potencia

Un criterio para evaluar el desempeño de un control desde un punto de vista de ahorro de energía es ver qué sistema disipa menos energía y ver cómo es la demanda de potencia del sistema. En realidad la demanda de potencia tiene relación con el criterio de esfuerzo de control.

Es sabido que un estado estacionario de un sistema es mantenido gracias a suministro constante de energía. En sistemas de control la potencia es suministrada de tal manera que un estado estacionario deseado sea estable ante perturbaciones externas. Todos estos sistemas físicos cuando se le deja de suministrar potencia eventualmente alcanzan el estado de equilibrio debido a su carácter disipativo. Por tal razón se dice que el origen de tales sistemas es estable en el sentido de Lyapunov.

La diferencia se hace más clara desde una perspectiva de potencia, los estados estacionarios disipan potencia mientras los de un sistema en equilibrio no disipan potencia.

Si la tarea de un sistema de control, para el caso de regulación es lograr que el sistema alcance un estado estacionario deseado y lo mantenga ante perturbaciones externas, es posible pensar que un control es mejor si realiza esta tarea con la menor energía posible durante el periodo que dure la tarea de control y la demanda de potencia sea más suave.

En los sistemas físicos disipativos podemos calcular la potencia disipada por éste y por lo tanto su energía disipada desde una perspectiva física

[4][8].

3.4.4. Demanda y disipación de potencia de un SRM

Como ya vimos un SRM puede estar representado por la interconexión de dos sistemas pasivos. En términos de potencia, la operación de esta máquina eléctrica se puede describir como

sigue. Los voltajes eléctricos aplicados en las bobinas del estator producen potencia eléctrica, una parte de esta potencia es disipada por los elementos resistores eléctricos en el estator y otra parte es transformada en potencia mecánica, la cual no es totalmente aprovechada, ya que también hay efectos disipativos mecánicos como la fricción viscosa.

La función potencia eléctrica almacenada en un SRM está dada por

$$\dot{W}(\theta, \psi) = \mathbf{u}^T \mathbf{i} - \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} - T(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta} \quad (3.65)$$

donde el término $\mathbf{u}^T \mathbf{i}$ corresponde a la potencia suministrada al sistema, $-\mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i}$ es la potencia disipada por los elementos resistivos del estator, $-T(\theta, \mathbf{i}) \dot{\theta}$ es potencia eléctrica convertida en potencia mecánica

La función potencia mecánica almacenada en un SRM está dada por

$$\dot{K}'(\theta) = \dot{\theta} T(\theta, \mathbf{i}) - \dot{\theta} T_L \quad (3.66)$$

donde $\dot{\theta} T$ es la potencia mecánica suministrada y $-\dot{\theta} T_L$ es la potencia mecánica disipada, en T_L se pueden incluir efectos de fricción viscosa.

Si se define la función potencia total del sistema como $\dot{E} = \dot{W} + \dot{K}'$, entonces de la ec. (3.65) y de la ec. (3.66) se tiene que

$$\dot{E} = \mathbf{u}^T \mathbf{i} - \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} - \dot{\theta} T_L \quad (3.67)$$

Integrando esta ecuación respecto al tiempo en el intervalo $[0, T]$, se obtiene la función almacenamiento de energía total del sistema, E ,

$$E(T) - E(0) = \int_0^T (\mathbf{u}^T \mathbf{i} - \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} - \dot{\theta} T_L) dt < \int_0^T \mathbf{u}^T \mathbf{i} \quad (3.68)$$

de donde se observa que la función de demanda de potencia, ϕ_{in} , está dada por

$$\phi_{in} = \mathbf{u}^T \mathbf{i} \quad (3.69)$$

La función de disipación de potencia (ϕ_{out}) del sistema está dada por

$$\phi_{out} = (i^T R i + \dot{\theta} T_L) \quad (3.70)$$

Entonces, los efectos resistivos disipativos totales del sistema son dos: las resistencias eléctricas y las resistencias mecánicas (fricción viscosa y efecto de cargas).

Si en particular se considera al par de carga como efecto debido a la fricción viscosa torsional se tiene que

$$T_L = B \dot{\theta} \quad (3.71)$$

donde B [N.m.s.rad⁻¹] es el coeficiente de fricción viscosa, entonces la función disipación de un SRM se expresa como

$$\phi_{out} = (i^T R i + B \dot{\theta}^2) \quad (3.72)$$

Es importante mencionar que se puede calcular la función de demanda y disipación de potencia en línea, así como la energía usada por el sistema. En estado estacionario lo que se espera es que la potencia disipada sea igual a la potencia suministrada. Por lo tanto la ec. (3.69) y la ec. (3.70) pueden servir como criterios físicos para evaluar el desempeño de un controlador respecto a otro.

Bibliografía

- [1] A. J. van der Shaf, *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Lectures Notes in Control and Information Sciences 218, Springer 1996
- [2] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson and H. Sira-Ramírez: "Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems" (Springer, 1998).
- [3] M. Takegati and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators", *Trans. ASEE, J. Dyn. Systems, Meas. Control*, 103, pp. 119-125, 1981.
- [4] J. Meisel: "Principles of Electromechanical Energy Conversion" (Prentice Hall, 1961).
- [5] H. K. Khalil "Nonlinear Systems" Prentice Hall 1996.
- [6] P. J. Nicklasson, R. Ortega and G. Espinosa Pérez "Passivity-based Control Of a class of Blondel-Park transformable machine" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 433-444, 1998.
- [7] R. Ortega, P.J. Nicklasson and G. Espinosa-Pérez "On Speed Control on Induction Motors" *AUTOMATICA*, Vol.32, No.3, pp. 455-460, 1996.
- [8] Richar A. Layton, "Principles of Analytical System Dynamics", Mechanical Engineering Series, Springer, 1998.

Capítulo 4

Control de un SRM sin uso de sensor de posición

En este capítulo se muestra el diseño de un control para un SRM sin el uso de sensores mecánicos de posición y velocidad angular. En la primera sección se muestra el diseño de un observador no lineal para la posición y la velocidad angular en función de los voltajes aplicados y las corrientes en cada una de las fases del estator. La metodología para el diseño de este observador está basada en algunos conceptos de modos deslizantes.

En la segunda sección de este capítulo se muestra que el observador diseñado acoplado con el del SRM basado en pasividad aún garantiza convergencia del error de seguimiento manteniendo todas las señales internas acotadas. De manera desafortunada, a la fecha no ha sido posible establecer la prueba completa de estabilidad para el sistema completo motor-controlador-observador. Sin embargo, debido al buen desempeño obtenido en las simulaciones realizadas, esta información se incluye en este trabajo de tesis.

4.1. Diseño de un observador no lineal de posición velocidad angular

Motivados por el creciente interés mostrado en la literatura respecto al desarrollo de esquemas de control que no requieran la medición de variables mecánicas y al hecho de que para la

clase de motores abordada en este trabajo es posible medir sin dificultad tanto las corrientes como los voltajes, en esta seccion se presenta el desarrollo de un observador para las variables mecanicas de la maquina.

Dado que no existen problemas para medir las corrientes y los voltajes aplicados en cada una de las fases del motor, no se diseña un observador para las corrientes, sólo para la posición y la velocidad angular.

La idea principal es diseñar un observador en lazo cerrado, para lo cual se utilizan algunos conceptos de modos deslizantes. El término correctivo en la ley de estimación es una función del error entre el estado estimado y el estado deseado. Esta función es la bien conocida función \tanh la cual es generalmente utilizada para realizar la conmutación en una superficie deslizante de tal manera que el error de estimación converga a un superficie deslizante igual a cero que garantiza que el error de estimación es asintóticamente estable.

Proposición 3. Suponiendo que se puede medir el vector de corrientes y voltajes en el estator, un observador para posición y velocidad angular para un SRM, está dado por

$$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \eta_{\theta} \tanh(e_{\theta}) \quad (4.1)$$

con $\eta_{\theta} > e_{\theta}$

$$\eta_{\theta} = \eta_{\theta}^+ + e_{\theta}, \quad \text{con } \eta_{\theta}^+ > 0 \quad (4.2)$$

$$\hat{\omega} = J^{-1} \left[\hat{T}(\hat{\theta}, i) - \hat{T}_L(\hat{\theta}, \hat{\omega}) \right] + \eta_{\omega} \tanh(e_{\omega}) \quad (4.3)$$

con $\eta_{\omega} > \frac{1}{J}(e_{T_e} - e_{T_L})$

$$\eta_{\omega} = \eta_{\omega}^+ + \frac{1}{J}(e_{T_e} - e_{T_L}) \quad \text{con } \eta_{\omega}^+ > 0 \quad (4.4)$$

garantizan que el error de estimación de posición, e_{θ} , y el error de estimación de velocidad, e_{ω} , convergen asintóticamente a cero, los cuales están respectivamente definidos como

$$e_{\theta} = \theta_d - \hat{\theta} \quad \text{y} \quad e_{\omega} = \omega_d - \hat{\omega}, \quad (4.5)$$

donde θ_d es la posición deseada y $\omega_d = \dot{\theta}_d$ es la velocidad deseada.

Demostración. De la ec. (4.5) se tiene que la dinámica del error estimación está dada por

$$\dot{e}_\theta = \omega_d - \hat{\omega} = e_\omega - \eta_\theta \tanh(e_\theta) \quad (4.6)$$

$$\dot{e}_\omega = \dot{\omega} - \hat{\dot{\omega}} = \frac{1}{J}(T(\theta, i) - T_L - \hat{T}(\hat{\theta}, i) + \hat{T}_L) - \eta_\omega \tanh(e_\omega) \quad (4.7)$$

si se definen a $e_T = T - \hat{T}$ y $e_{T_L} = T_L - \hat{T}_L$ la ec. (4.7) se puede reescribir como

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{J}(e_T - e_{T_L}) - \eta_\omega \tanh(e_\omega) \quad (4.8)$$

Entonces, si se define la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e^T e \quad (4.9)$$

donde $e = [e_\theta, e_\omega]$ es el vector de error de estimación, de la ec. (4.9) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}_\theta e_\theta + \dot{e}_\omega e_\omega \\ &= [e_\omega - \eta_\theta \tanh(e_\theta)] e_\theta + \left[\frac{1}{J}(e_T - e_{T_L}) - \eta_\omega \tanh(e_\omega) \right] e_\omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

En particular, si se escoge $\eta_\theta = \eta_\theta^+ + e_\theta$ y $\eta_\omega = \eta_\omega^+ + \frac{1}{J}(e_T - e_{T_L})$, de la ec. (4.10) se tiene que

$$\dot{V} = -\eta_\theta^+ |e_\theta| - \eta_\omega^+ |e_\omega| \leq 0 \quad (4.11)$$

Con lo cual se garantiza estabilidad asintótica del error de estimación. La validez del observador se ilustrara por medio de simulaciones en el capítulo que sigue.

Capítulo 5

Resultados de simulación

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos al realizar simulaciones digitales del control de velocidad angular de un SRM. En la primera sección se establecen los parámetros del modelo completo de un SRM que se utiliza para la simulación. En la segunda sección se describe la implementación del conmutador electrónico. En la tercera sección se muestran en particular los resultados de la simulación del control (regulación y seguimiento) de la velocidad angular de un SRM. En la cuarta sección se muestran los resultados de la comparación del desempeño de los dos controles propuestos en el capítulo 3 (basado en modelo completo y simplificado). En la última sección se muestran los resultados relacionados al control de velocidad sin uso de sensores mecánicos (sensorless) para un SRM.

5.1. Parámetros del SRM

El desempeño del esquema de control propuesto fue analizado mediante simulaciones digitales, para las cuales se utilizó el modelo completo de un SRM de tres fases o 6 polos en estator. Los parámetros considerados para el motor se obtuvieron de [1] y son: Número de polos de rotor, $Nr = 4$; parámetros de la inductancia, $L_0 = 30$ mH y $L_1 = 20$ mH; resistencia de estator, $r = 5\Omega$; amortiguamiento, $J = 10^{-1}$ kgm², el par de carga T_L se consideró conocido, y en particular para la relación no lineal del enlace de flujo se consideró $\psi_s = 0,6$, $\beta = 0,6$.Con el fin de mostrar las propiedades del controlador propuesto se supuso que el motor estaba en

reposo inicialmente. La expresión que se consideró para la inductancia no lineal fue

$$f_j(\theta) = L_0 - L_1 \cos[Nr\theta - (j - 1)2\pi/2] \quad (5.1)$$

El software de simulación que se utilizó para realizar las simulaciones fue SIMULIK/MATLAB Versión 5.3.

5.2. Implementación del conmutador

Para los trabajos de simulación el conmutador se desarrolló de la siguiente forma: En primer lugar se adecuó la señal de posición para poder trabajar mejor con ella. Para esto, se hizo que esta señal tuviera la forma de un diente de sierra, esto es, que cada 2π radianes regresara a cero la señal. Esto equivale físicamente al cruce por cero, donde este cero es el que se establece como punto de referencia. Así, cada que se presenta un giro completo la señal vuelve a cero, si el giro es en sentido contrario a las manecillas del reloj, y a 2π , si el giro es en sentido contrario. Si el giro no es completo la señal llega al valor de posición adecuado. También cabe mencionar que el sentido de giro es respetado ya que, si el giro es en un sentido, la pendiente de la curva va a ser positiva, mientras que si el giro es en sentido contrario, la pendiente de la curva va a ser negativa. Para ilustrar este proceso, se muestra en la figura 5-1 una forma de onda de la posición de forma senoidal (la forma de onda más complicada a tratar en este proceso) con la respectiva modificación que se utiliza en el conmutador.

Posteriormente, se hace que la señal obtenida en el paso anterior cambie cada quince grados ($\pi/12$ rad), lo que permite utilizarla de mejor manera, ya que las conmutaciones entre cada una de las fases se da en valores de la posición múltiplos de quince grados. Después de este paso se generan la función polinomial y su derivada, las cuales van a permitir las transiciones suaves en las funciones de distribución de par. Las funciones polinomiales que se propusieron son de la forma

$$p_r(h) = 10 \frac{h^3}{\theta_m^3} - 15 \frac{h^4}{\theta_m^4} + 6 \frac{h^5}{\theta_m^5}$$

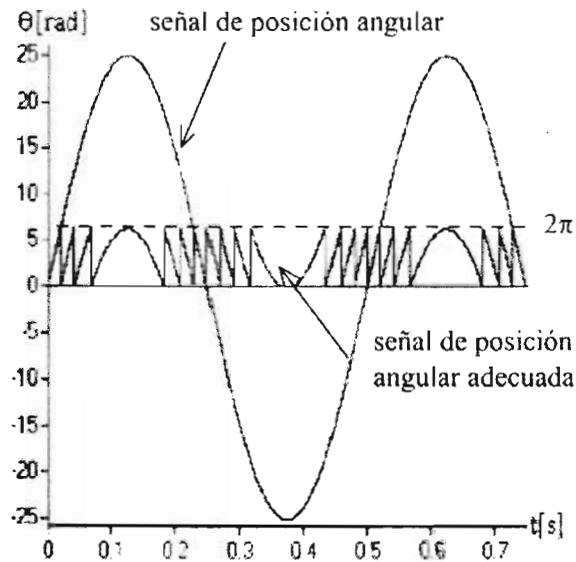


Figura 5-1: Adecuamiento de la señal de posición

donde $\theta_m = \frac{\pi}{12}$ y $h = |\theta - \alpha\theta_m|$ es la señal de posición obtenida en el paso anterior con $\alpha = \text{int}(\frac{\theta}{\theta_m})$.

El último paso para obtener las funciones de distribución de par es aplicar las funciones anteriores en los valores de posición adecuados, i.e. cada vez que se desee que se presente la función de distribución de par adecuada. Lo primero que se debe hacer es aplicar la función $p_r(x)$, después se aplica un 1 y por último, cuando se desee que esta función decrezca, se aplica la función $p_f(h) = 1 - p_r(x)$. Para la derivada de estas funciones se procede de una manera similar. La figura 5-2 muestra la forma en la que se presentan las funciones de distribución de par.

Mediante esta metodología de trabajo se obtuvieron las funciones de distribución m_j que cumplen con las condiciones impuestas.

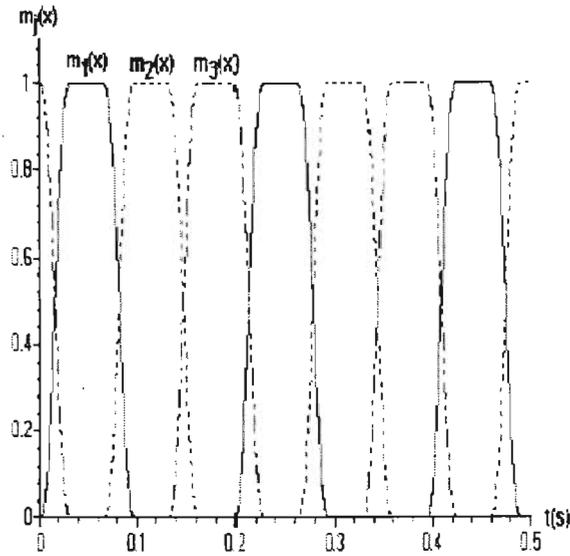


Figura 5-2: Funciones de distribución de par $m_j(\theta)$

5.3. Control de velocidad con sensor

5.3.1. Regulación de velocidad

Para el caso de regulación como señal de referencia se utilizó una señal cuadrada de +25 rad/s (238.73 rpm), el par de carga en este caso se consideró igual a cero ($T_L = 0$), las ganancias eléctricas fueron $K_{vj} = 100$, y las ganancias del filtro fueron $c_2 = 10$ y $c_1 = 100, 150, 200$ (se incrementó en cada ciclo de la señal cuadrada). Como se puede en ver la figura 5-3(a), al aumentar el término de amortiguamiento en el filtro (c_1) se reduce el sobrepaso, aunque el tiempo de convergencia es ligeramente mayor. En la figura 5-3(b) se puede ver como el error de velocidad converge a cero. Estas simulaciones muestran que el control diseñado cumple con su objetivo exitosamente. Por otro lado para demostrar que todas la señales de controlador también se mantienen acotadas, en la figura 5-4 y 5-5 se puede observar como las corrientes del SRM simulado convergen a las deseadas, calculadas por el controlador en función del par total deseado. Además en la figura 5-4 se puede observar claramente que hay una conmutación suave

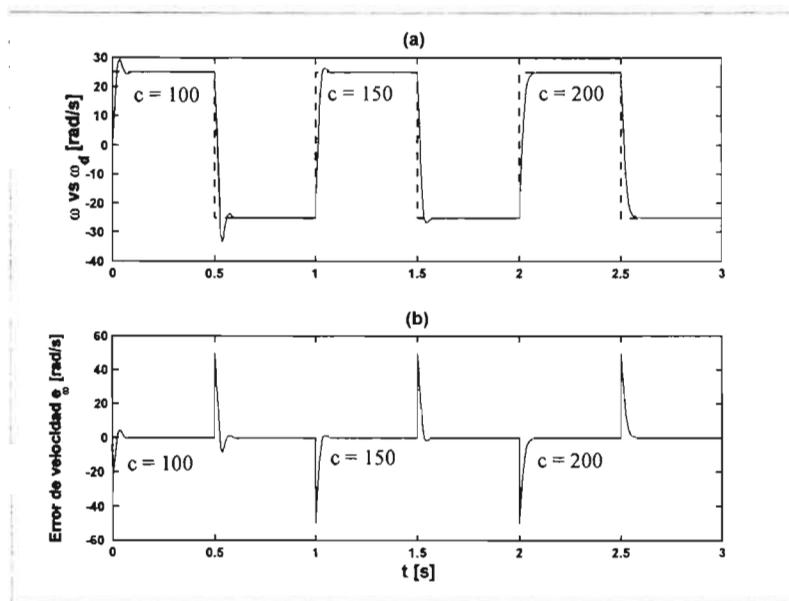


Figura 5-3: (a) Regulación de velocidad incrementado el amortiguamiento ($c_1 = 100, 150, 200$); (b) error de regulación.

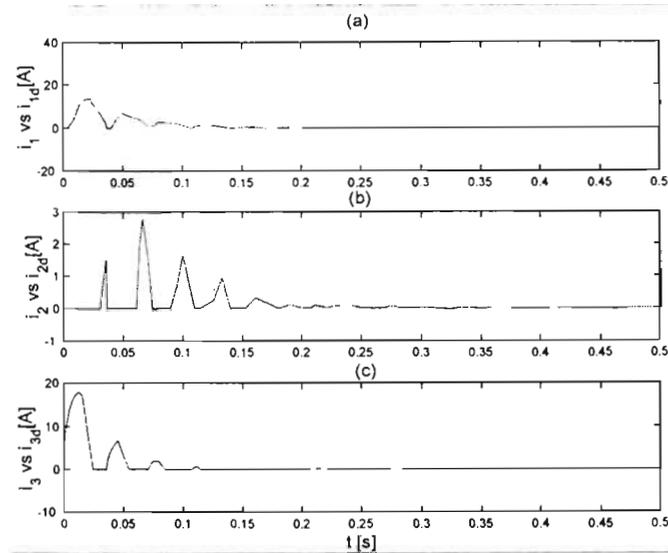


Figura 5-4: Corrientes deseada vs. corrientes calculadas

de las corrientes en el estator. Una vez que el sistema alcanza el estado estacionario deseado, las corrientes son pequeñas (99.33 % menor que el pico corriente inicial) y que, aunque en la figura 5-4 parezcan cero por la escala usada, sigue existiendo una conmutación suave de las corrientes. En la figura 5-6-(a) se observa como el par real del SRM simulado converge al par deseado, calculado por el controlador en función de la velocidad deseada. En la figura 5-6-(b) se muestra la convergencia del error de par a cero. Por último en la figura 5-7 se observa como el voltaje aplicado en cada una de las fases en el estator del motor se conmuta suavemente, y al igual que las corrientes, una vez que la velocidad alcanza su valor estacionario, el voltaje aplicado en cada una de las fases disminuye considerablemente, pero aún en la figura puede notarse la conmutación suave de los voltajes de entrada en el estator.

5.3.2. Seguimiento de velocidad

Otros resultados utiles para ilustrar que el control diseñado resuelve el problema de control planteado, son los resultados obtenidos de la simulación del seguimiento de velocidad, en este caso se utilizó como señal de referencia una señal senoidal de la forma $\dot{\theta}_d = 1 \cos(2\pi ft)$ [rad/s]

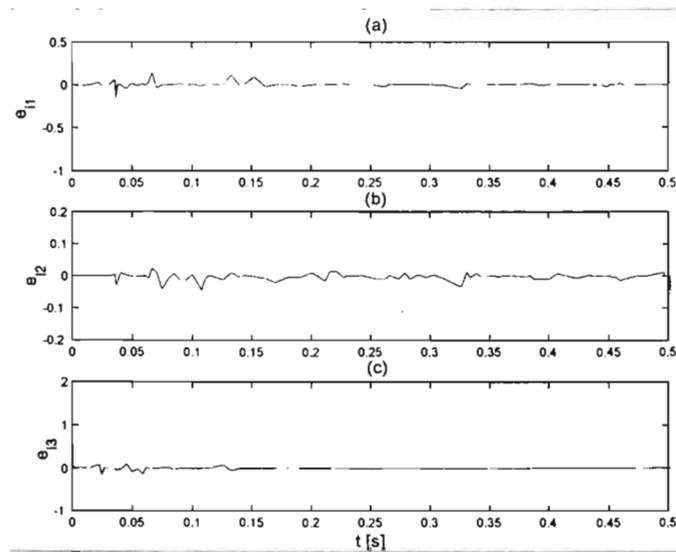


Figura 5-5: Error de corrientes en el estator

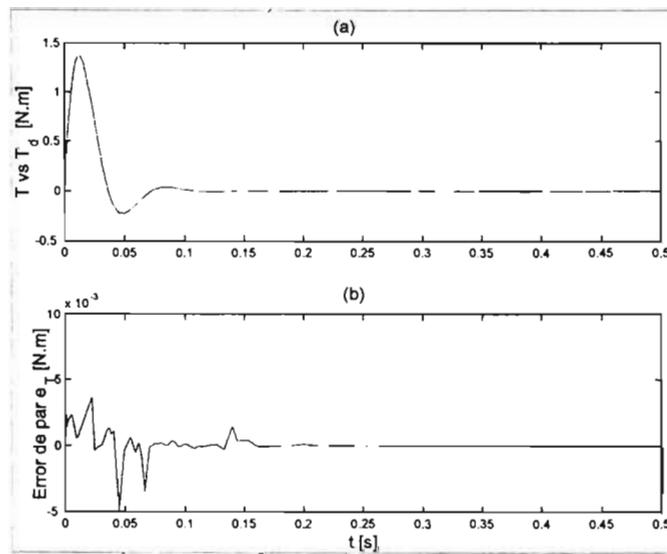


Figura 5-6: (a) Par deseado vs. par calculado; (b) Error de par

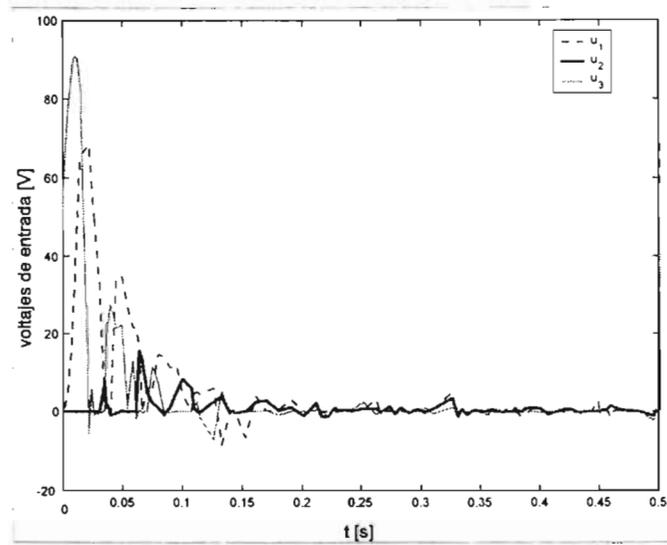


Figura 5-7: Voltajes de entrada en el estator.

con una frecuencia de $f = 2Hz$, el par de carga se consideró igual a cero ($T_L = 0$), las ganancias eléctricas fueron $K_{vj} = 300$ y las ganancias del filtro fueron $c_1 = 550$ y $c_2 = 80$.

En la figura 5-8-(a) se muestra como la velocidad sigue la trayectoria cosenoidal deseada y en la figura 5-8-(b) se muestra como el error de seguimiento de velocidad converge a cero. Respecto a la estabilidad de la señales internas se muestran las siguientes figuras. En la figura 5-9 se observa como las corriente reales del SRM simulado convergen a las corrientes deseadas, calculadas por el control en función del par deseado, en esta figura también se puede observar la conmutación suave entre las corrientes en el estator.

En la figura 5-10 se observa como el par real converge a la trayectoria del par deseado calculado por el controlador en función de la velocidad deseada. En esta misma figura se muestra como el error de par de seguimiento converge a cero. Por último, en lo que respecta al seguimiento de velocidad angular, en la figura 5-10 se puede observar como los voltajes de entrada en el estator son conmutados suavemente. Es interesante notar que en particular que la forma de onda de los voltajes en el estator tiene una forma parecida a la forma de onda de corrientes en el mismo (figura 5.9).

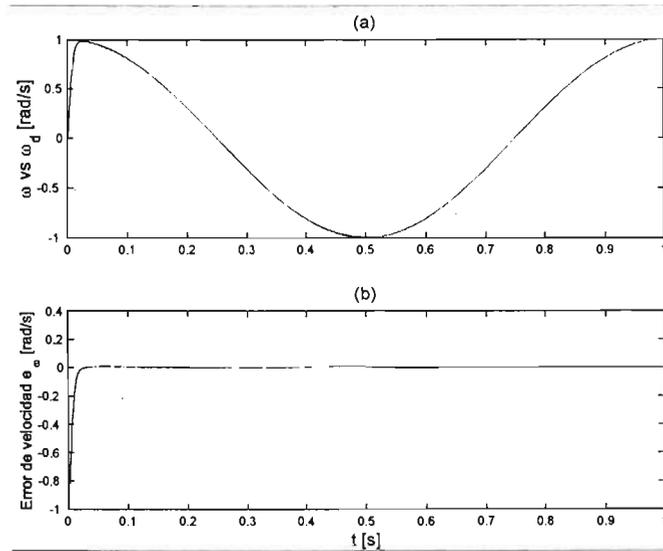


Figura 5-8: (a) Seguimiento de velocidad; (b) Error de velocidad.

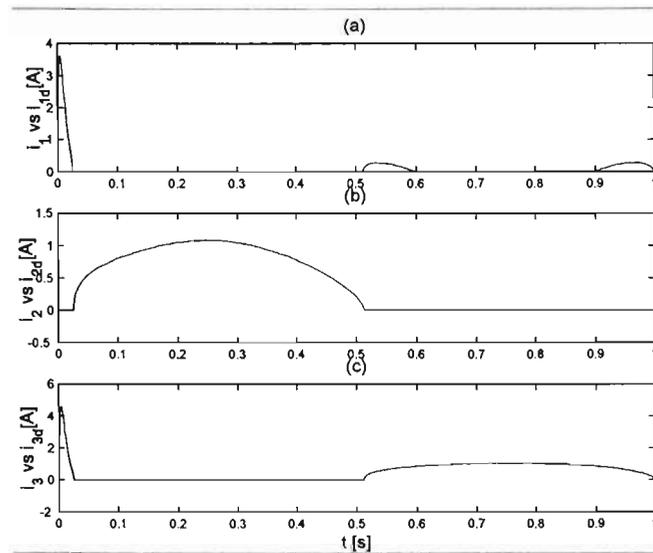


Figura 5-9: Corrientes deseadas vs. corrientes calculadas.

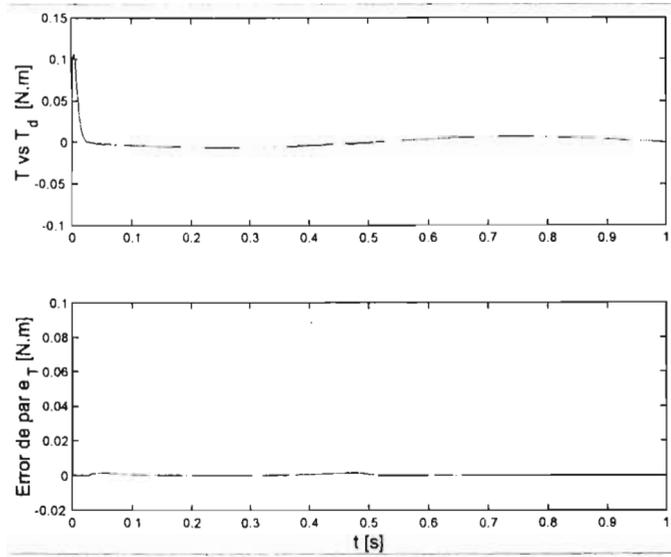


Figura 5-10: (a) Par deseado vs. par calculado; (b) Error de par.

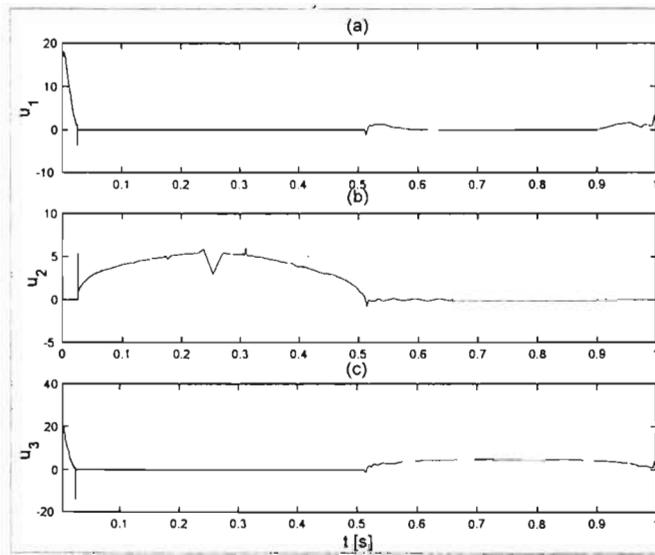


Figura 5-11: Voltajes de entrada en el estator.

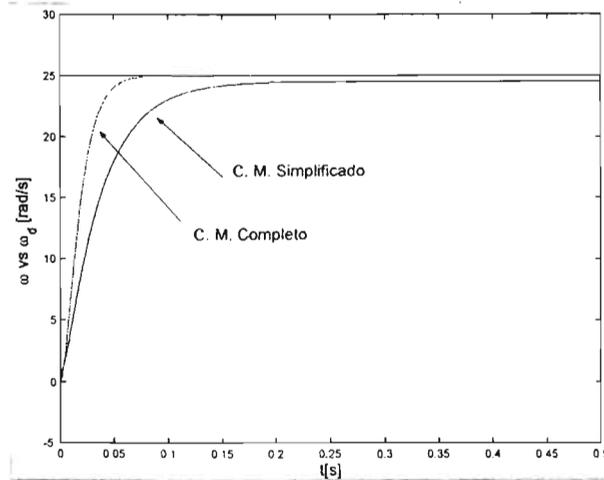


Figura 5-12: Regulación de velocidad realizada por ambos controles.

5.4. Control basado en el modelo no lineal vs control basado en el modelo lineal

5.4.1. Regulación de Velocidad

Uno de los aspectos más importantes de este trabajo es mostrar que un control basado en el modelo completo tiene un mejor desempeño que un control basado en modelo simplificado, para lo cual durante la simulación del control de velocidad de un SRM con par de carga diferente de cero se calcularon las funciones de desempeño establecidas en la última sección del capítulo 3.

Para la comparación del desempeño de los dos controladores propuestos en el capítulo 3, como señal de referencia se utilizó una velocidad constante $\dot{\theta}_d = 25$ [rad/s]. En este caso el par de carga se consideró un elemento de fricción viscosa dado por $T_L = B\dot{\theta}$ con un coeficiente de fricción $B = 0,001$ [N.m.s/rad]. Las ganancias eléctricas de controlador fueron seleccionadas como $K_{vj} = 100$ para los dos controles. Las ganancias del filtro en ambos controles fueron $c_1 = 10$ y $c_2 = 200$.

En la figura 5-12 se muestra claramente como el desempeño de la controlador basado en el modelo completo es mejor, de hecho el control basado en el modelo simplificado, utilizando las

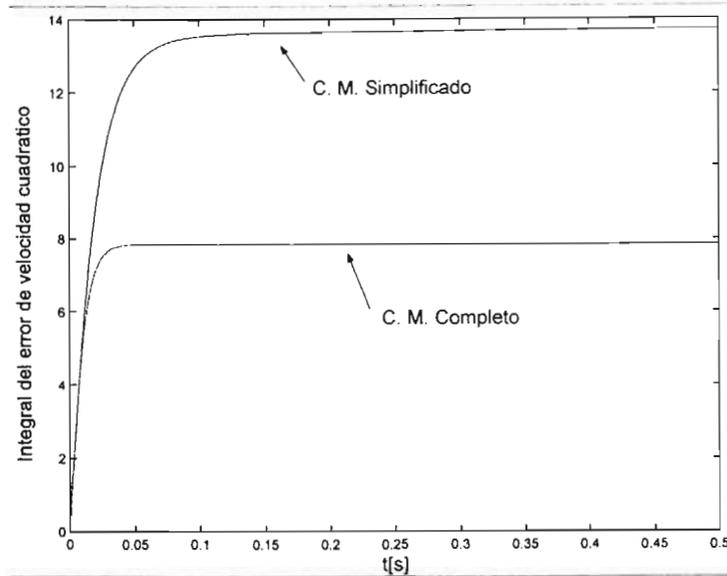


Figura 5-13: Integral del error de velocidad cuadrático.

mismas ganancias que el control basado en el modelo completo no converge al valor deseado en el sentido de que el error es el 2% respecto a la señal de referencia, lo cual claramente se entiende ya que se están despreciando muchas no linealidades que son inevitables por la operación natural del motor, tales como la saturación magnética en las bobinas.

En la figura 5-13, se puede observar que en la integral del error cuadrático de velocidad entre el control basado en el modelo completo es considerablemente menor que en el control basado en el modelo simplificado.

En la figura 5-14, se observa en el control basado en el modelo completo el seguimiento de par es mantenido en todo momento, mientras en el caso del control basado en el modelo simplificado hay una evidente error hasta del 50% en estado transitorio.

En lo que respecta a la potencia suministrada al sistema en la figura 5-15, se puede observar que la demanda de potencia en el controlador basado en el modelo simplificado al principio es muy alta, pues se registra un pico de 11000 W. Mientras que la demanda de potencia en el controlador basado en el modelo completo es considerablemente menor (un orden de magnitud)

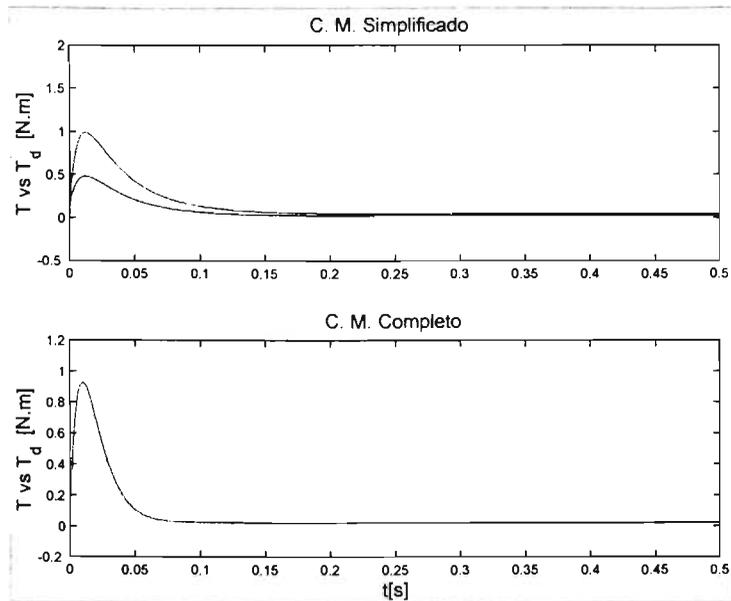


Figura 5-14: Seguimiento de par

y además más suave, aunque puede notarse que esta es más sostenida. En la figura 5-16 se observa que el control basado en el modelo simplificado, se disipa una gran cantidad de potencia en corto periodo de tiempo, mientras que la magnitud de la disipación de un controlador basado en el modelo completo disipa menos potencia durante un periodo de tiempo más largo.

En la figura 5-17 se puede ver que el control basado en el modelo completo requiere de mas energía para lograr su objetivo, lo cual es claro ya que el control basado en el modelo simplificado llega a un estado estacionario menor que el estado estacionario deseado. Por lo tanto en la figura 5-18 se puede observar que la disipación de energía es mayor en el control basado en el modelo completo. Por último, en la figura 5-19 se muestra la función acumulación de potencia total del motor, en la cual se puede observar que en estado estacionario es cero.

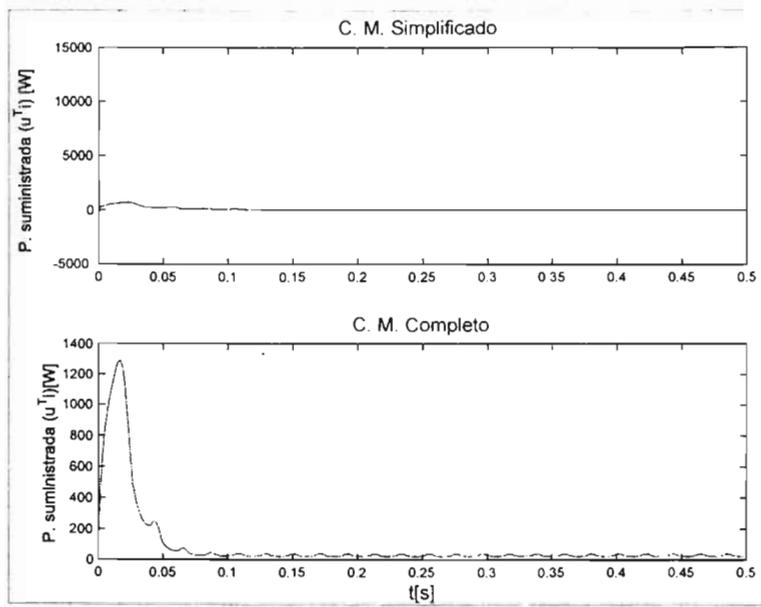


Figura 5-15: Potencia suministrada.

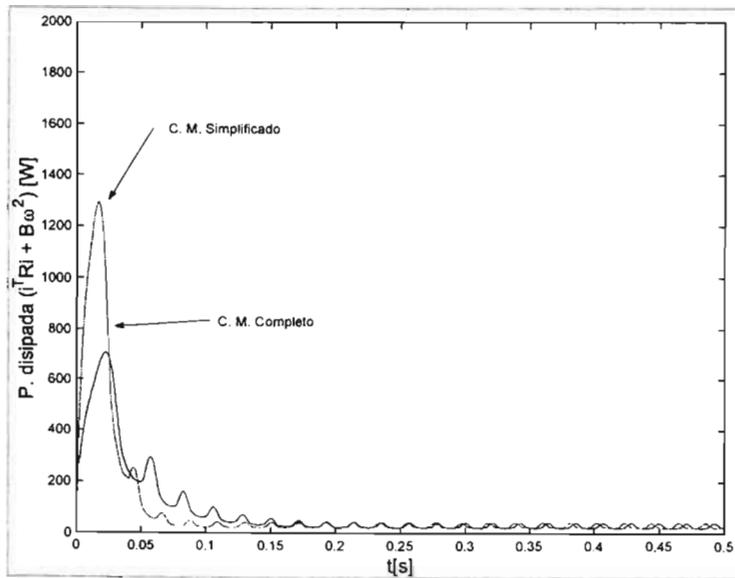


Figura 5-16: Potencia disipada.

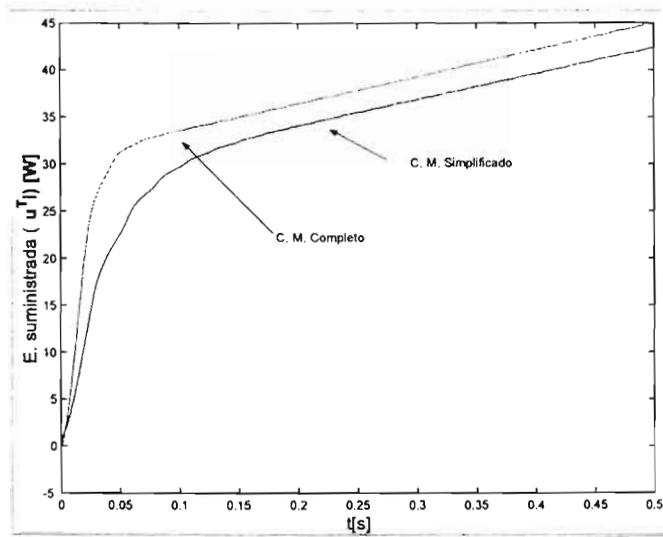


Figura 5-17: Energía suministrada al SRM

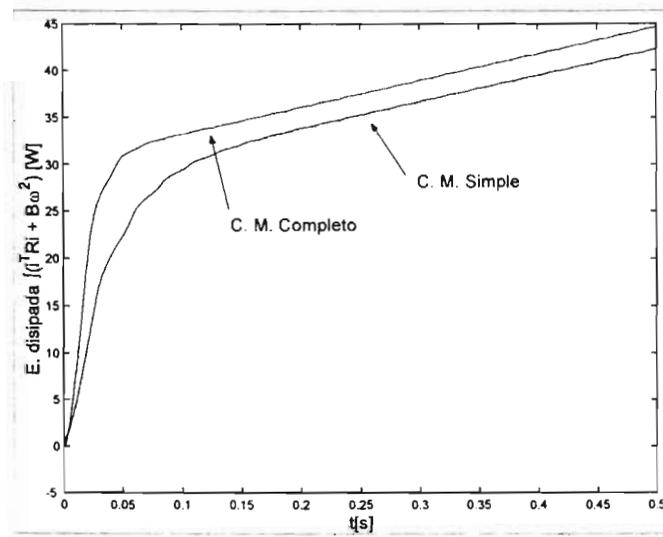


Figura 5-18: Energía disipada

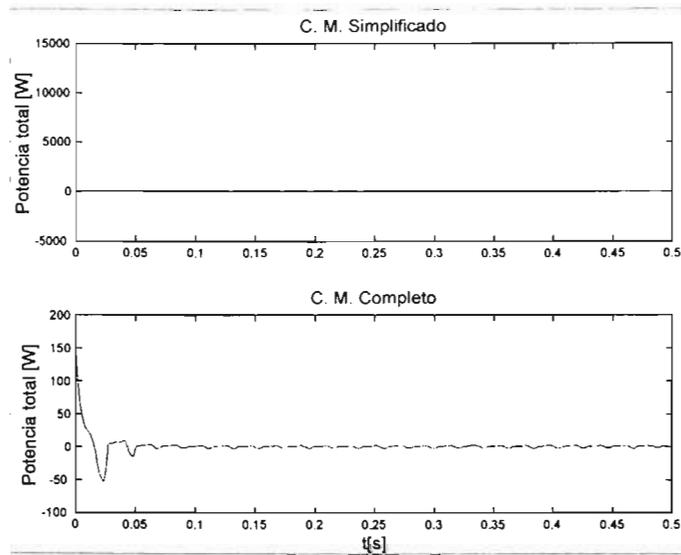


Figura 5-19: Función acumulación de potencia de un SRM.

5.5. Control de velocidad sin uso de sensores mecánicos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de la simulación del control de velocidad un SRM sin uso de sensores mecánicos, el cual consiste en acoplar el control basado pasividad del modelo completo de un SRM desarrollado en el capítulo 3, con el observador para las variables mecánicas presentado en el capítulo 4.

Para esta simulación se utilizó como señal de referencia una señal constante $+25$ rad/s (238.73 rpm). Además, el par de carga se consideró igual a cero ($T_L = 0$), las ganancias eléctricas del controlador fueron $K_{v_j} = 100$, la ganancias del filtro fueron $c_1 = 200$ y $c_2 = 10$, y las ganancias del observador fueron $\eta_{\omega}^+ = \eta_{\theta}^+ = 0,01$.

Los resultados que se obtuvieron respecto a la simulación del control basado en pasividad de un SRM acoplado a un observador de las variables mecánicas fueron los siguientes: En la figura 5-20 se muestra como la velocidad angular del SRM converge a la velocidad deseada en un tiempo de 0.08s. En esta misma figura también se puede observar la convergencia del error de seguimiento de velocidad a cero.

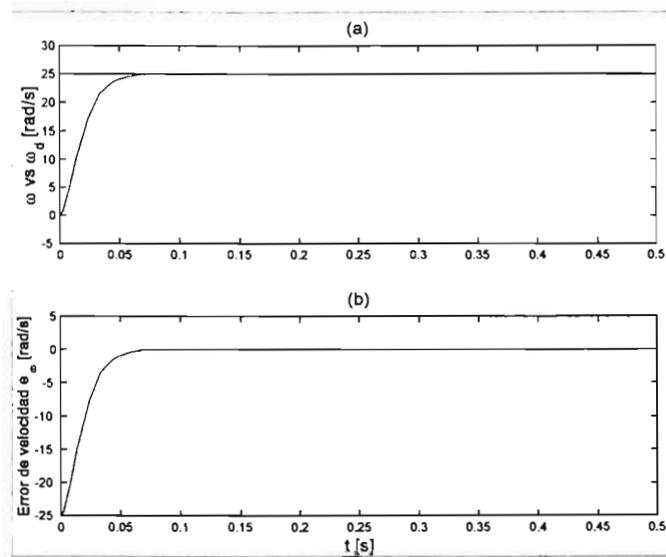


Figura 5-20: Regulación de velocidad sin sensores mecánicos.

En lo que respecta a la corrientes en el estator en la figura 5-21 se puede observar como las corrientes deseadas convergen a las corrientes del SRM.

La figura 5-22 muestra como el par del SRM converge al par deseado calculado por el controlador. En está misma figura también se muestra como el error de par converga a cero. La figura 5-23 muestra como el error de estimación de velocidad angular converge a cero. En la figura 5-24 podemos observar como la velocidad angular estimada converge la velocidad real del SRM.

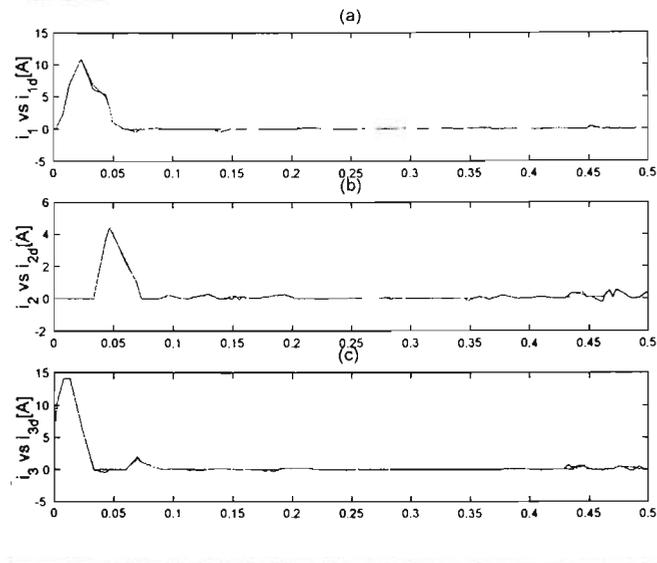


Figura 5-21: Seguimiento de corrientes sin sensores mecánicos

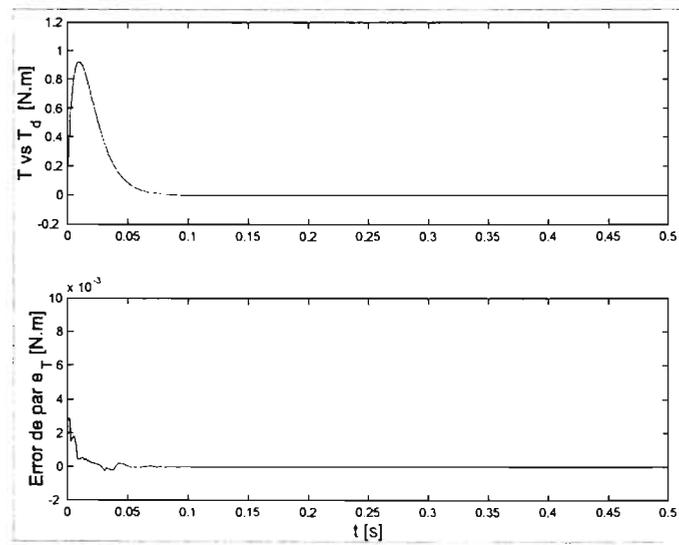


Figura 5-22: Seguimiento de par sin sensores mecánicos.

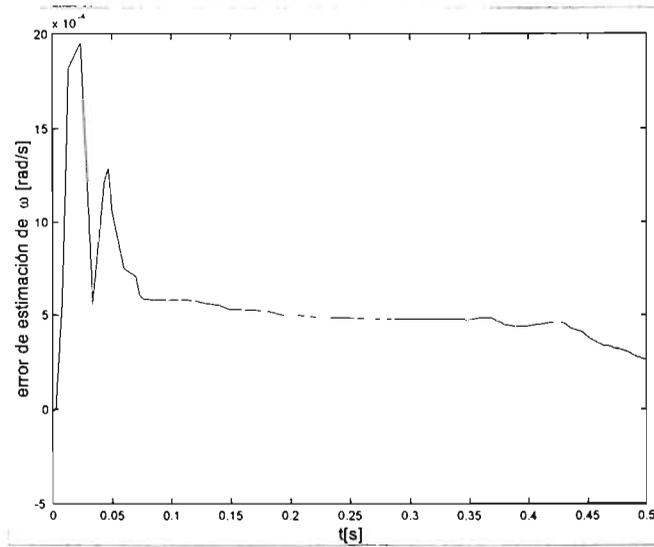


Figura 5-23: Error de estimación de la velocidad.

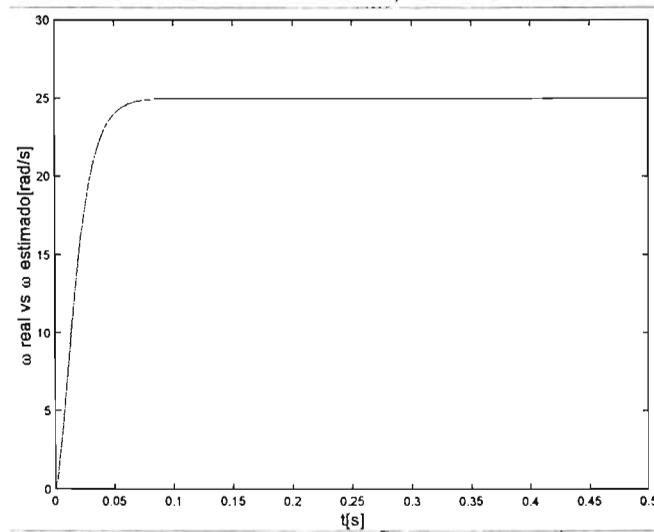


Figura 5-24: Convergencia del error de estimación de velocidad.

Bibliografía

- [1] D.G. Taylor: "Pulse-Width Modulated Control of Electromechanical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, AC-37(4), pp. 524-528.

Capítulo 6

Conclusiones

En relación al problema de control de un SRM, en el presente trabajo con base en los resultados obtenidos se puede concluir lo siguiente

1. Usando el enfoque basado en pasividad, se diseño un control que resuelve el problema de seguimiento de par/velocidad/posición considerando un modelo completo no lineal del SRM. La metodología para el diseño de éste, fue la siguiente:
 - a) Se analizaron de las características físicas básicas de esta máquina, con el fin de comprender su funcionamiento y poder aprovecharlas en el desarrollo del controlador
 - b) Se modelo matemáticamente este motor empleando las ecuaciones de Euler–Lagrange, (Modelo completo y Modelo simplificado), en particular considerando una relación no lineal para los enlaces de flujo en función de las corrientes del estator.
 - c) Se realizo una descomposición pasiva de esta máquina, hecho que permitió diseñar el controlador por medio del enfoque basado en pasividad y demostrar que el modelo de esta máquina puede verse como la interconexión de dos sistemas pasivos (un eléctrico y uno mecánico).
 - d) Diseño de controlador realizando tres pasos fundamentales
 - 1) Control del subsistema eléctrico, se demostró que entre este subsistema y el control diseñado sigue existiendo un mapeo pasivo y que considera al subsistema

mecánico como una perturbación pasiva.

- 2) Se demostró que la convergencia de corrientes implica la convergencia de par y se obtuvo la forma de onda de las corrientes deseadas de tal manera que garanticen el par deseado.
 - 3) Se diseñó un controlador para la parte mecánica que garantiza convergencia asintótica de las variables mecánicas como son posición y velocidad.
2. El controlador basado en el modelo completo propuesto en este trabajo garantiza convergencia asintótica de las variables eléctricas y mecánicas, además de que las variables internas permanecen acotadas para todo tiempo.
 3. Las simulaciones del control se realizaron considerando el modelo completo de esta máquina, que a diferencia del trabajo en (Espinosa-Pérez et al, 2002) antes citado, donde se utilizó el modelo simplificado. Con base en estas simulaciones, se pudieron comprobar las bondades del control basado en pasividad. El controlador propuesto cumplió con los objetivos de control.
 4. El enfoque basado en pasividad es una técnica de diseño condujo a buenos resultados, en parte debido a que considera las propiedades físicas de la máquina bajo estudio y a que no considera ninguna cancelación de no linealidades.
 5. El enfoque de par compartido permite omitir el uso de la transformación Blondel-Park.
 6. Se resolvió el problema de seguimiento de par/velocidad/posición explotando las propiedades de pasividad. Esta estrategia de control solo se había empleado en máquinas eléctricas que poseen las propiedades de la transformación Blondel-Park. Se obtuvo un control en cascada para máquinas que representa una justificación formal para esta práctica.
 7. En el presente trabajo se estableció una serie de criterios matemáticos y físicos para comparar el desempeño del control basado en el modelo completo y control basado en el modelo simplificado. En particular el criterio basado en la demanda de potencia por el sistema da un claro ejemplo de que el control basado en el modelo completo tiene un

mejor desempeño. Con el criterio de la integral del error cuadrático esta diferencia se hace más notable.

La condicione para comparar los controles fueron escoger las mismas ganancias del controlador. En particular la comparación se hizo considerando el par de carga como un término de fricción torsional viscosa.

8. Otra contribución de este trabajo es el diseño de un observador en lazo cerrado para las variables mecánicas posición y velocidad en función de las corrientes y los voltajes aplicados al SRM.
9. Se realizaron simulaciones para el control basado en pasividad de un SRM acoplado al observador, obteniendo buenos resultados, no obstante la demostración de que este acoplamiento garantiza estabilidad de las variables internas y convergencia asintótica del error de seguimiento queda pendiente.
10. Se sugiere como un trabajo futuro la implementación de este control en tiempo real, utilizar un procesador digital de señales y un motor para comprobar los resultados aquí obtenidos.

Apéndice A

Pasividad

La disipatividad es una propiedad fundamental de los sistemas físicos y está muy relacionada con el fenómeno de pérdida o disipación de energía. Algunos ejemplos típicos de sistemas disipativos son los circuitos eléctricos, en los cuales una parte de la energía eléctrica es disipada como calor en los resistores. Un papel similar es mostrado por la fricción en los sistemas mecánicos. Para definir matemáticamente la propiedad de disipatividad se deben introducir dos funciones: la tasa de suministro, que es la tasa a la cual la energía fluye en el sistema, y la función de almacenamiento de energía, que mide la cantidad de energía que es almacenada en el sistema. Esas funciones se relacionan por medio de la desigualdad de disipación, la cual establece que, en las trayectorias de un sistema disipativo, la tasa de suministro es mayor o igual a la de incremento en la energía almacenada. Esto expresa el hecho de que un sistema disipativo no puede almacenar más energía de la que le es suministrada desde el exterior, con la diferencia dada por la energía disipada.

Los sistemas pasivos son una clase de sistemas disipativos cuya tasa de suministro es simplemente el producto interno de la salida y la entrada (u^T, y) y son caracterizados por la siguiente definición básica:

Definición. El sistema dinámico $\Sigma : u \rightarrow y$ con entrada $u \in R^m$, salida $y \in R^m$ y vector de estados $x \in R^n$ es pasivo si existe una función $H(x) \geq 0 \in C^1$, $H(0) = 0$, tal que, para toda $u \in L_{2e}^n$ y para todo $t = 0$ se cumple la siguiente desigualdad

$$H(x(t)) - H(x(0)) \leq \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \quad (\text{A.1})$$

Desde una perspectiva física, la importancia de esta definición estriba en el hecho de que, si $H(x)$ es la función de almacenamiento de energía del sistema, establece que para los sistemas pasivos el incremento en la energía almacenada durante el intervalo de tiempo $(0, t)$ no es más grande que la energía suministrada al sistema. Este hecho no es de sorprender si se están considerando sistemas dinámicos físicos. De cualquier manera, su trascendencia para propósitos de control es más clara si la desigualdad anterior es reescrita como

$$\dot{H}(x(t)) \leq u^T(\tau)y(\tau) \quad (\text{A.2})$$

donde puede notarse que, si ahora $H(x)$ es considerada una función de Lyapunov, entonces el sistema no forzado es estable (si y solo si Σ es detectable de estado cero, i.e. si $u = 0$ y $y = 0$ para todo $t \geq 0$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, esto debido al hecho de que $H(x) = 0$ la mayoría de las veces), así como también la dinámica cero del sistema, i.e. el comportamiento dinámico obtenido si se considera $y = 0$. Más aún, estas propiedades se vuelven más relevantes si se considera a la interconexión por retroalimentación negativa de dos sistemas pasivos (figura A-1) como un proceso de intercambio de energía, donde se cumple que la pasividad es invariante ante este tipo de interconexión, i.e. la interconexión sigue siendo pasiva. Para demostrar este hecho [1], nótese que dada la pasividad de Σ_1 y Σ_2 existen dos funciones de almacenamiento (una para cada sistema) $H_1(x_1)$ y $H_2(x_2)$ tal que

$$H_i(x_i(T)) - H_i(x_i(0)) \leq \int_0^T e_i y_i dt \text{ para } i = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

Defínanse $x := (x_1, x_2)$ y $H(x) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$ donde se observa que $H(x)$ es semidefinida positiva. Para esta interconexión se tiene

$$H(x(T)) - H(x(0)) \leq \int_0^T (e_1^T y_1 + e_2^T y_2) dt \quad (\text{A.4})$$

como $e_1 = u_1 - y_2$ y $e_2 = y_1 + u_2$ entonces

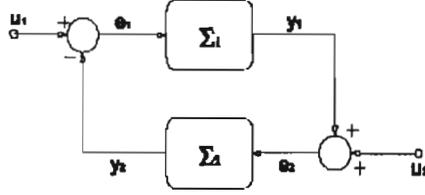


Figura A-1: Interconexión de dos sistemas pasivos

$$H(x(T)) - H_i(x(0)) \leq \int_0^T (u_1^T y_1 + u_2^T y_2) dt \quad (\text{A.5})$$

$$H(x(t)) - H(x(0)) \leq \int_0^T u^T y dt \quad (\text{A.6})$$

Lo que prueba que la interconexión por retroalimentación negativa es pasiva. Además, si todo el balance de energía es positivo, en el sentido de que la energía generada por un subsistema es disipada por el otro, el sistema en lazo cerrado también es estable.

Para el caso particular de los sistemas electromecánicos (como es el caso del SRM) se puede demostrar que la propiedad de invarianza se cumple si se descompone al sistema en la interconexión de dos subsistemas, uno eléctrico y el otro mecánico, tal como se establece en la siguiente proposición.

Proposición A.1. Dado el sistema Σ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial}{\partial q}(q, \dot{q}) = Q \quad (\text{A.7})$$

cuyo Lagrangiano puede ser expresado como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) \triangleq T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (\text{A.8})$$

donde $q \in R_n$, es el vector de coordenadas generalizadas y $Q \in R_n$ es el vector de fuerzas externas. Asuma que el Lagrangiano (A.7) puede ser descompuesto en la forma

$$L(q, \dot{q}) = L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m) + L_m(q_m, \dot{q}_m) \quad (\text{A.9})$$

donde $q = [q_e^T, q_m^T]^T$ con $q_e \in R^n$ y $q_m \in R^n$. Entonces, el sistema Σ puede ser representado por la retroalimentación negativa de dos subsistemas pasivos.

$$\begin{aligned} \Sigma_e &: \begin{bmatrix} Q_e \\ -\dot{q}_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ \tau \end{bmatrix} \\ \Sigma_m &: (\tau - Q_m) \rightarrow -\dot{q}_m \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

con funciones de almacenamiento $L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m)$ y $L_m(q_m, \dot{q}_m)$, respectivamente, donde

$$\tau = \frac{\partial}{\partial q_m}(q_e, \dot{q}_e, q_m) \quad (\text{A.11})$$

es la señal de acoplamiento de los subsistemas, y $Q = [Q_e^T, Q_m^T]$ con $Q_e \in R^n$, $Q_m \in R^n$.

La demostración de esta proposición puede consultarse en [2].

Es conveniente mencionar que, a pesar de las características que presentan los sistemas pasivos, el problema de control para este tipo de sistemas no es trivial. Primero, porque la salida con respecto a la cual el sistema es pasivo podría no ser la señal que se quiere controlar, por ejemplo, en máquinas eléctricas podría ser la corriente que está relacionada de forma no lineal con el par, que es la salida que se desea controlar. Segundo, imponer un comportamiento deseado a la salida pasiva es sólo el paso preliminar en el diseño del controlador, ya que además de ello se debe definir el esquema que lleve a este comportamiento deseado, como por ejemplo, definir las corrientes que generen el par deseado. En este paso el diseñador se enfrenta a las dinámicas no lineales del sistema, que pueden ser muy complejas o restrictivas.

Si se desea profundizar más en el tema se recomienda[2][3][1].

Bibliografía

- [1] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic “Constructive Nonlinear Control” Springer Verlag, 1997
- [2] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson and H. Sira-Ramírez “Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems”, Springer Verlag 1998.
- [3] C.A. Desoer and M. Vidyasagar “Feedback Systems: Input-Output Properties”
Academic Press 1975.

Apéndice B

Programas en simulink

El conmutador se simuló mediante el siguiente programa `conmutadorplusp.m` en Matlab/Simulink versión 5.3

```
function y=conmutadorplusp(x,xp,f1,fd1,f2,fd2,f3,fd3,taod)
global xa
ep=0.009;
L0=0.030;
L1=0.020;
y=zeros(8,1);
if(x>0 & xp>0)
    xa=x;
elseif (x>0 & xp<0)
    xa=x;
elseif (x<0 & xp<0)
    xa=x+2*pi;
elseif (x<0 & xp>0)
    xa=x+2*pi;
else
    xa=0;
end
```

```

k11=xa/(2*pi);
k22=k11-(fix(k11));
k33=2*pi*k22;
if k33<0
    k44=k33+2*pi;
else
    k44=k33;
end

k55=k44/(pi/12);
k66=k55-(fix(k55));
h=(pi/12)*k66;

vf=1;
xm=pi/12; %15 grados
n3=10*vf/(xm*xm*xm);
n4=-15*vf/(xm*xm*xm*xm);
n5=6*vf/(xm*xm*xm*xm*xm);
h2=h*h;
h3=h2*h;
h4=h3*h;
h5=h4*h;

b=n3*h3+n4*h4+n5*h5;

%par positivo

```

```

%m1
if fd1>0 & taod>0
    if f1<(L0-L1+ep)
        y(1)=b
    elseif f1>(L0-L1+ep) & f1<(L0+L1-ep)
        y(1)=1
    elseif f1>(L0+L1-ep)
        y(1)=1-b
    else
        y(1)=0
    end
else
    y(1)=0
end

%m2
if fd2>0 & taod>0
    if f2<(L0-L1+ep)
        y(2)=b
    elseif f2>(L0-L1+ep) & f2<(L0+L1-ep)
        y(2)=1
    elseif f2>(L0+L1-ep)
        y(2)=1-b
    else
        y(2)=0
    end
else
    y(2)=0
end

```

```

%m3
if fd3>0 & taod>0
    if f3<L0-L1+ep
        y(3)=b
    elseif f3>(L0-L1+ep) & f3<(L0+L1-ep)
        y(3)=1
    elseif f3>(L0+L1-ep)
        y(3)=1-b
    else
        y(3)=0
    end
else
    y(3)=0
end

```

```

%par negativo

```

```

%m4
if fd1<0 & taod<0
    if f1>(L0-L1+ep)
        y(4)=b
    elseif f1<(L0-L1+ep) & f1>(L0+L1-ep)
        y(4)=1
    elseif f1<(L0+L1-ep)
        y(4)=1-b
    else
        y(4)=0
    end

```

```

        end
    else
        y(4)=0
    end

%m5
if fd2<0 & taod<0
    if f2>(L0-L1+ep)
        y(5)=b
    elseif f1<(L0-L1+ep) & f2>(L0+L1-ep)
        y(5)=1
    elseif f2<(L0+L1-ep)
        y(5)=1-b
    else
        y(ξ)=0
    end
else
    y(5)=0
end

%m6
if fd3<0 & taod<0
    if f3>(L0-L1+ep)
        y(6)=b
    elseif f3<(L0-L1+ep) & f3>(L0+L1-ep)
        y(6)=1
    elseif f3<(L0+L1-ep)
        y(6)=1-b
    else

```

```
        y(6)=0
    end
else
    y(6)=0
end
```

```
%*****
```

```
y(7)=y(1)+y(2)+y(3)
```

```
y(8)=y(4)+y(5)+y(6)
```