

03095



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

ATRIBUTOS SISMICOS MEDIANTE  
TRANSFORMADA ONDICULAR DISCRETA

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

(EXPLORACION)

P R E S E N T A :

**DAVID ERNESTO RIVERA RECILLAS**

MEXICO, D. F., 2005

m343246



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Trabajos previos . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Metodología . . . . .	4
1.5. Organización de la tesis . . . . .	4
1.6. Introducción al análisis ondicular . . . . .	5
<b>2. Transformada ondicular</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Historia de la transformada ondicular . . . . .	14
2.3. Transformada ondicular en geofísica . . . . .	15
2.4. Transformada de Fourier . . . . .	16
2.5. Transformada de Gabor . . . . .	20
2.6. Transformada ondicular . . . . .	23
2.7. Análisis multirresolutivo . . . . .	29
2.8. Transformada ondicular discreta . . . . .	40
<b>3. Diagonalización de operadores</b>	<b>49</b>
3.1. Introducción . . . . .	49
3.2. Operadores lineales homogéneos . . . . .	51
3.3. El nuevo análisis multirresolutivo . . . . .	51

3.4. El algoritmo de diagonalización . . . . .	55
<b>4. Atributos sísmicos</b>	<b>63</b>
4.1. Introducción . . . . .	63
4.2. Atributos instantáneos . . . . .	65
4.3. Aplicación del algoritmo . . . . .	67
4.4. Aplicación a un modelo sintético . . . . .	69
4.5. Aplicación a datos reales . . . . .	77
4.6. Atributos y multirresolución . . . . .	83
<b>5. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Análisis funcional</b>	<b>99</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>
<b>Relación de figuras</b>	<b>115</b>
<b>Notación</b>	<b>121</b>
<b>Índice analítico</b>	<b>123</b>

## Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Oscar Campos Enríquez su valiosa dirección y apoyo. La realización de esta tesis se debe al apoyo del Instituto Mexicano del Petróleo. Agradezco también al Ing. Tomás Ramírez Maldonado, Ejecutivo de la Competencia de Geofísica de pozos del IMP, su apoyo para realizar estos estudios, así como a la Dra. Alma América Porres Luna, Directora Ejecutiva de Exploración del IMP. El Dr. Gerardo Ronquillo fue mi asesor interno en el IMP y quien me impulsó hace tiempo a realizar el doctorado. Otras personas han hecho comentarios útiles que también reconozco: M. en C. Manuel Lozada Zumaeta, M. en C. Jorge Mendoza Amuchástegui y Dr. Luis Cuahutémoc Ramírez Cruz. Asimismo hago constar el apoyo y sugerencias de mi comité tutorial: Doctores René Chávez Segura, William Bandy, Gerardo Ronquillo Jarillo, Arturo Diego Orozco, Francisco Chávez García, Luis Munguía Orozco y José Oscar Campos Enríquez, Agradezco también el apoyo administrativo en el Instituto de Geofísica a Araceli Chamán Gamez y a Mónica Lizbeth Salgado Miranda.

## Resumen

La teoría de la transformada ondicular se formalizó hace dos décadas y considera ciertas funciones base llamadas ondículas, pequeñas ondas localizadas en tiempo y frecuencia. Los elementos de su evolución se dieron en diversas ciencias, pero fue en los estudios geofísicos relativos a las señales sísmicas en donde se empezó a cristalizar su desarrollo teórico. En la actualidad, sus aplicaciones se dan desde las matemáticas puras y la física teórica hasta las ciencias aplicadas y las ingenierías. Para proporcionar el marco conceptual y de desarrollo respectivo, al principio de esta tesis se presentan los fundamentos teóricos de la transformada ondicular, tanto discreta como continua. Cuando se utilizan juntas las ondículas y las funciones de escalamiento es posible encontrar representaciones compactas de las señales; este concepto se conoce como análisis multirresolutivo y es uno de los constituyentes del éxito al aplicar la transformada ondicular, pues conlleva un ahorro al usar menos coeficientes en una representación.

Una de las motivaciones del desarrollo de la transformada ondicular fue la necesidad de tener representaciones compactas de datos. El algoritmo piramidal que surgió de la telefonía digital, algoritmo que permite comprimir señales, está muy relacionado con esta teoría. La idea de representaciones compactas se generaliza a funciones e incluso a operadores. Se mencionan en esta tesis diversas aplicaciones de estos conceptos a la geofísica.

El análisis ondicular permite obtener una representación de una función usando las ondículas y las funciones de escalamiento, lo cual se logra buscando las componentes para cada uno de los elementos de la base. Mediante la síntesis, se puede obtener la función original. La transformada ondicular ofrece la libertad de elegir las funciones base de análisis distintas a las funciones de síntesis. Las funciones base del análisis ondicular pueden ser redundantes, ortogonales o biortogonales. Actualmente se están analizando los usos potenciales de la transformada ondicular en el procesamiento digital

de información de la sismología de reflexión.

Una vez sentados estos fundamentos, se describe de forma detallada una técnica muy reciente que usa bases ondiculares biortogonales para diagonalizar operadores lineales homogéneos, como la derivación, la integración, el potencial de Riesz y la transformada de Hilbert. La técnica consiste en construir una base de análisis ad hoc, de manera que permite calcular el efecto del operador mediante un análisis en la nueva base, seguido por una convolución y una síntesis ondicular en la base original. Esta parte ha sido elaborada con un enfoque didáctico que permita la introducción a la transformada ondicular con base en los fundamentos de análisis funcional.

Una herramienta bien establecida en la exploración de hidrocarburos la constituyen los atributos sísmicos, entre los cuales tenemos la envolvente de amplitud, la fase y la frecuencia instantáneas. Se muestra un ejemplo de la aplicación conjunta de atributos sísmicos y multirresolución; esta técnica ya había sido parcialmente reportada pero se incluye, analiza y amplía para mostrar la utilidad que tiene esta herramienta en la exploración geofísica. En el cálculo de dichos atributos se emplea el operador o transformada de Hilbert, el cual da la cuadratura de una señal: es la señal imaginaria que junto a la señal original o real, constituye una señal analítica. El método tradicional emplea la transformada de Fourier para el cálculo de la cuadratura. Alternativamente también es común usar un filtro digital que representa al operador de Hilbert. Sin embargo, ya que el operador de Hilbert es un operador lineal homogéneo, se puede aplicar la técnica de diagonalización antes mencionada.

La contribución de esta tesis, en este marco, es la aplicación del método de diagonalización de operadores lineales homogéneos mediante bases ondiculares biortogonales para la obtención de los atributos sísmicos instantáneos, es decir, usando la transformada ondicular. Este enfoque no se había desarrollado, y esta tesis comprende las primeras aportaciones en esta línea de investigación. La técnica así desarrollada se implementó y se aplicó a datos sísmicos sintéticos y reales. La eficiencia computacional de esta técnica es mejor que la del método de Fourier. Una bondad es que la frecuencia instantánea obtenida con este método permite distinguir los distintos eventos con mayor resolución, lo cual ayuda a establecer la continuidad de los diferentes eventos en la sección. Con relación al método de representación del operador de Hilbert mediante filtros se obtienen resultados numéricos similares, pero con la ventaja de que el método de diagonalización se realiza con un menor número de operaciones debido a que los filtros usados son de menor longitud.

Se destaca que esta tesis constituye una investigación con soluciones innovadoras a un problema que puede ser aplicado en la industria petrolera. Recientemente se han comenzado a investigar y desarrollar métodos alternos para el procesamiento sísmico y el cálculo de atributos sísmicos mediante técnicas que usan la transformada ondicular. Estas investigaciones analizan el uso de 1) la transformada ondicular continua, 2) una forma de transformada ondicular compleja, o bien 3) una representación del operador de Hilbert usando un filtro basado en la transformada ondicular. El método elaborado en esta tesis compite favorablemente con esos métodos. Es en este contexto de investigaciones de frontera en que se ubica el presente estudio.

## Abstract

Wavelet transform theory formally began two decades ago. It has sources in several scientific disciplines, but geophysics gave the definitive impulse to develop the theory. The spectrum of wavelet transform theory applications ranges from pure mathematics and theoretical physics to applied sciences and engineering. In this thesis several applications to geophysics of wavelet transform are mentioned. The first part of this thesis presents the fundamentals of both continuous and discrete wavelet transforms. The multiresolution analysis concept is presented as well. The relation found between wavelet transform and the pyramidal algorithm from the digital telephony, an algorithm for signal compressing, is emphasized.

Indeed, the need for a compact representation of data was one of the motivations for the development of the wavelet transform. The idea of compression is extended to functions and even operators. Hence, in order to represent a general function we use a special kind of functions called wavelets and scaling functions.

The wavelet transform enables us to obtain a representation of a function in terms of a basis formed by wavelets. The original function can be recovered by a synthesis process. The wavelet transform offers the freedom to choose analysis basis functions different from the synthesis basis functions. The basis functions can be redundant, orthogonal, or biorthogonal.

A recently developed diagonalization technique of homogeneous linear operators based on biorthogonal wavelet basis is described in detail. The operators of derivation, integration, Riesz potential and Hilbert transform are of this type. This technique constructs an ad-hoc analysis basis, in such a way that the operator action can be calculated by an analysis in the new basis, followed by a convolution and finally a wavelet synthesis in the original basis. At present, in the oil industry, efforts are being focused to study the potential uses of the wavelet transform in the processing of seismic reflection

data.

Seismic attributes constitute a well known interpretation tool in seismic exploration. Conventional seismic attributes comprise the amplitude envelope, the phase, and the instantaneous frequency. As an example, a joint application of multiresolution analysis and seismic attributes is presented. This approach has already been partially reported. Nevertheless, it was complemented and further developed to show the usefulness of the wavelet transform in geophysical exploration. The Hilbert operator is used to calculate the conventional attributes. It gives us the quadrature of a signal. The quadrature is the imaginary signal, which together with the original signal forms the analytical signal. The traditional method uses the Fourier transform to establish the quadrature. Alternatively, it is common to use a digital filter which represents the Hilbert operator. However, since the Hilbert operator is a homogeneous linear operator we can take advantage of the diagonalization method to obtain the seismic attributes.

The contribution of this thesis is the application of the diagonalization method of homogeneous linear operators using a biorthogonal wavelet basis. in order to calculate instantaneous seismic attributes. This is where the contribution of this thesis lays. The developed technique was implemented and applied to synthetic and real seismic data. The instantaneous frequency attribute obtained enables us to distinguish with a higher resolution the different seismic events. This allows us to better distinguish the continuity of the different seismic events across the section. The numerical performance of this method is higher than one based on the Fourier method. The performance of the diagonalization method is also better than that from the method using a filter to represent the Hilbert operator, because our shorter filters require less operations.

The subject of this thesis is in the forefront of research and many groups are involved in the same themes. The use of continuous, and a kind of complex wavelet transform is being studied to obtain seismic attributes. The use of wavelet transform based filter-representations of the Hilbert operator is also being analyzed. The performance of the method developed in this thesis is quite good in comparison with these modern techniques. The use of the wavelet transform to obtain seismic attributes proposed in this research provides an alternate and efficient method.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Generalidades

La transformada de ondícula (u ondicular) es una herramienta útil para el estudio de señales. Permite estudiar en tiempo y frecuencia una señal. También proporciona una base de funciones para obtener una representación.

En el primer caso se puede tener una descripción más completa del contenido de frecuencia dependiente del tiempo de señales no estacionarias. En el segundo caso la transformada descompone los datos en distintas componentes de frecuencia, y después analiza cada componente con una resolución que coincide con su escala (Daubechies, 1992).

La transformada de Fourier es una herramienta fundamental en el estudio de la frecuencia. Sin embargo, la transformada ondicular tiene ventajas sobre aquella debido a la propiedad de localización temporal. Esa propiedad permite analizar señales no estacionarias. También es superior a la transformada de Gabor.

Los términos *ondícula*, *ondeleta* u *ondoleta* se han empleado para designar en español a la palabra francesa *ondelette* e inglesa *wavelet*.<sup>1</sup>

La transformada ondicular surge de forma interdisciplinaria hace dos décadas, aunque tiene antecedentes previos; podemos decir que el motivo de surgimiento de esta teoría se debe a la búsqueda de algoritmos para obtener representaciones compactas de funciones, datos, imágenes y operadores (Jawerth y Sweldens, 1993). Matemáticos, físicos e ingenieros han conjuntado sus

---

<sup>1</sup>El traductor al español de Pinsky (2003) menciona que en el ambiente matemático se usa ondoleta pero que el término correcto es ondícula.

ideas para obtener nuevas transformaciones y bases funcionales.

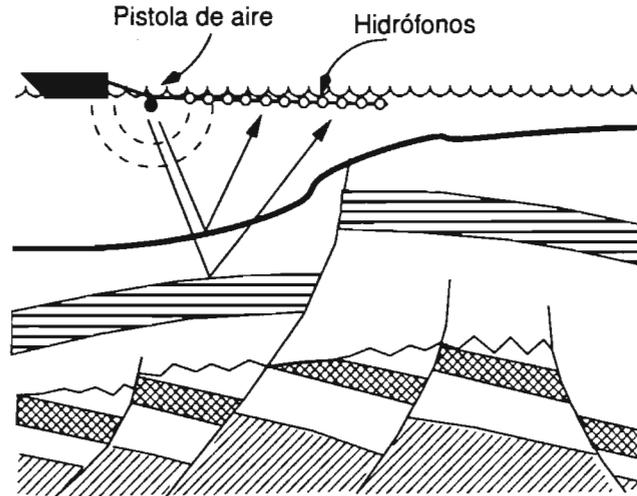


Figura 1.1: Esquema de adquisición sísmica marina; en tierra se emplean geófonos para detectar la respuesta. Las principales fuentes de energía son explosiones de dinamita o pistolas de aire.

Por otro lado los atributos sísmicos son toda aquella información derivada de los datos sísmicos (Sheriff, 1991). La Figura 1.1 muestra esquemáticamente de la forma en que las ondas sísmicas se utilizan para obtener información del interior de la Tierra. Los atributos sísmicos tienen un papel fundamental en la exploración y la caracterización de yacimientos.

Los llamados atributos convencionales son los atributos sísmicos instantáneos; ellos son: la amplitud instantánea o envolvente de amplitud, la fase instantánea y la frecuencia instantánea. Los puntos brillantes, que son los máximos de la amplitud instantánea, han sido interpretados como indicadores de hidrocarburos. La fase ayuda a marcar la continuidad lateral del medio. La frecuencia instantánea es útil puesto que permite distinguir con más precisión el tipo de medio o el fluido que contiene.

El cálculo tradicional de los atributos sísmicos instantáneos se basa en la obtención de la transformada de Hilbert, la cual se calcula con técnicas de Fourier.

En la presente investigación se estudia la posibilidad del cálculo de la transformada de Hilbert empleando técnicas de la transformada ondicular

discreta. Se observan mejores resultados respecto a las técnicas convencionales. Una motivación para el desarrollo de este trabajo es que el algoritmo de transformada ondicular discreta es más eficiente que el de la transformada rápida de Fourier, pues el primero usa  $\mathcal{O}(n)$  operaciones mientras que el segundo usa  $\mathcal{O}(n \ln n)$  operaciones; esto puede tener ventajas cuando se procesa grandes cantidades de datos, como es el caso de sismica 3D. Otro motivo es tratar de aprovechar la propiedad de transformada ondicular para la localización en tiempo de diferentes componentes de frecuencia. Un punto más es tratar de calcular a la frecuencia instantánea también con un método ondicular.

## 1.2. Trabajos previos

Los primeros estudios de atributos en sismología se deben a Taner, Sheriff y Koehler (Taner y Sheriff, 1977; Taner et al., 1979) quienes emplean la transformada de Fourier basados en estudios previos de ingeniería eléctrica. Estos atributos sísmicos instantáneos son la base de muchas aplicaciones cotidianas en la actualidad. En la sección 4.1 se señalan algunas de sus aplicaciones.

Por otra parte, el nacimiento de la transformada ondicular se presenta en los artículos de Morlet, Grossmann y Goupillaud (Grossman y Morlet, 1984; Goupillaud et al., 1984). Una lista más detallada del desarrollo de esta transformada se presenta en la sección 2.2.

Con base en esta teoría, Beylkin et al. (1991) mostraron una representación ondicular de un operador aplicado a una función. Ellos utilizaron las bases ondiculares ortogonales de Haar y Daubechies. Un refinamiento se presenta en Beylkin y Torrèsani (1996) en donde utilizaron filtros ortogonales para obtener dicha representación.

Ekstedt y Lindberg (1997) parten de una base ondicular biortogonal para poder representar un operador lineal homogéneo. Ejemplos de estos operadores son la derivación, la integración, el potencial de Riesz y la transformada de Hilbert. En su trabajo usan la transformada ondicular discreta.

Posteriormente, Ridsdill-Smith y Dentith (1999) aplicaron la representación anterior al operador de derivación para aplicarlo en el procesado de datos aeromagnéticos. En la presente investigación son básicos los artículos de Ridsdill-Smith y Dentith (1999), Ekstedt y Lindberg (1997) y Beylkin et al. (1991).

Otro enfoque es emplear la transformada ondicular continua. En Gao et

al. (1998; 1999; 2001) se calculan los atributos sísmicos instantáneos pero el caso continuo requiere integración numérica con lo que se pierde eficiencia. Esa formulación también tiene otra limitante pues requiere estimar de entrada el mejor valor de un parámetro llamado valor de atenuación el cual se estima probando varias frecuencias; una vez que es estimado se puede proceder a calcular los atributos sísmicos.

También se puede mencionar aquí que los coeficientes ondulares pueden ser usados para realizar mapas de características a diferentes escalas de una señal (Grubb y Walden, 1997; Magrin-Chagnolleau et al., 1999).

### 1.3. Objetivos

Los objetivos de este trabajo son: 1) tener una representación ondicular discreta de la transformada de Hilbert de una sección sísmica; 2) a partir de esa representación poder calcular los atributos sísmicos instantáneos.

La motivación del uso de esta representación es una mejor definición de fenómenos en el dominio temporal en comparación a los métodos del análisis de Fourier.

Una ventaja del método discreto es la mayor eficiencia numérica sobre los métodos de integración numérica que usa la transformada ondicular continua.

### 1.4. Metodología

Para el cálculo de la transformada de Hilbert se emplea la diagonalización de operadores lineales homogéneos que utilizaron Ekstedt y Lindberg (1997) y Ridsdill-Smith y Dentith (1999). En estos trabajos se emplean bases ondulares definidas por filtros biortogonales.

La metodología de la presente tesis y algunos avances se mostraron en varios congresos (Rivera-Recillas et al., 2001; Rivera-Recillas et al., 2002; Rivera-Recillas et al., 2003a; Rivera-Recillas et al., 2003b).

### 1.5. Organización de la tesis

En este capítulo se da una introducción a la tesis. Se presentan de forma breve algunos conceptos básicos de la transformada ondicular.

En el capítulo 2 se expone una síntesis de la historia de la transformada ondicular y se mencionan algunos de sus usos en geofísica. Se definen la transformada de Fourier y la de Gabor. Se presenta después la transformada ondicular y sus propiedades. La clave del éxito de la transformada ondicular discreta es el concepto fundamental del análisis multirresolutivo.

El capítulo 3 muestra la teoría de la diagonalización de operadores lineales homogéneos y su aplicación a la derivación y a la transformada de Hilbert.

En el capítulo 4 se definen los atributos sísmicos instantáneos y se mencionan algunas de sus aplicaciones. Se muestra la técnica del cálculo tradicional de estos atributos aplicada a un sismograma sintético y se compara con el método ondicular. También se presenta un ejemplo de aplicación de la técnica desarrollada a datos reales.

Al final se dan las conclusiones en el capítulo 5.

## 1.6. Introducción al análisis ondicular

En esta sección de exponen de forma preliminar algunos conceptos básicos de la teoría ondicular. Esta introducción está inspirada en Strang y Nguyen (1996) y Valens (1999).

Consideremos la serie de cuatro elementos

$$\mathbf{x} = [10, 6, -2, 6]. \quad (1.1)$$

A esta serie se le aplica un procedimiento por parejas: se realiza el promedio de cada uno de los dos pares y la diferencia dividida entre dos. Esto se ilustra en la Figura 1.2. La serie original corresponde al renglón (a) de dicho esquema. En el renglón (b) tenemos las mitades de las diferencias, mientras que (c) son los promedios. También se puede pensar que (c) tiene la señal promedio y (b) tiene los detalles. Este proceso se repite recursivamente considerando el renglón (c) como nueva serie. La mitad de la diferencia es (d) y el promedio es (e). Por razones claras este algoritmo se llama piramidal y es un proceso de análisis.

El proceso es invertible: a partir de los renglones (b) y (c) se puede reconstruir el renglón (a). De la misma manera, con los renglones (b), (d) y (e) se puede reconstruir (a). Cuando se reconstruye la serie se tiene un proceso de síntesis (si antes de realizar el proceso de síntesis se cancelan algunos términos relativos a los detalles se tendrá una serie comprimida: se puede recuperar la serie original pero no con todos los detalles).

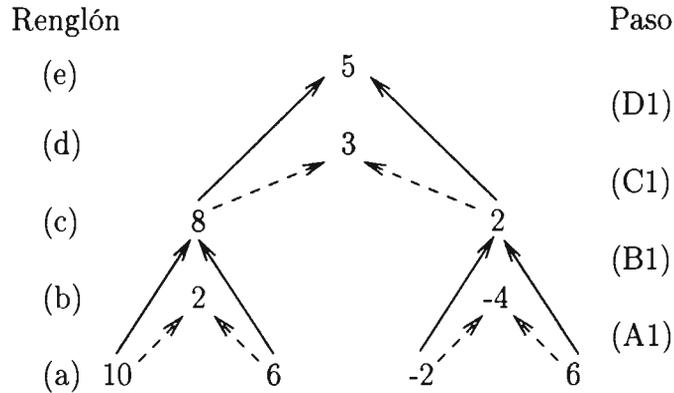


Figura 1.2: Algoritmo piramidal. Para cada pareja  $x_1, x_2$  de un renglón se calcula su promedio  $(x_1 + x_2)/2$  y la mitad de su diferencia  $(x_1 - x_2)/2$ .

El proceso de análisis se puede definir mediante multiplicaciones de matrices. Como el proceso es invertible, la matriz que lo representa es invertible, en el lenguaje del álgebra matricial.

Ahora se realizará el mismo proceso pero esta vez la serie (1.1) se verá como función. Con este fin consideremos un par de funciones,  $\psi$  y  $\varphi$ , definidas de la forma siguiente

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & \text{si } 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Estas funciones se ilustran en la Figura 1.3.

La Figura 1.4a muestra la serie (1.1) en forma de una función escalonada. Entonces la función de la Figura 1.4a se puede escribir de la forma

$$f(t) = 10\varphi(t) + 6\varphi(t-1) - 2\varphi(t-2) + 6\varphi(t-3). \quad (1.4)$$

Para generar los distintos escalones se ha recorrido la función base  $\varphi$  de manera adecuada:  $\varphi(t-1)$ ,  $\varphi(t-2)$ , etc. y se han utilizado los términos de la serie (1.1) como coeficientes de dichas funciones.

La función (1.4) se puede escribir considerando una función escalonada promediada, con escalones más anchos, Figura 1.4b, adicionada con unos

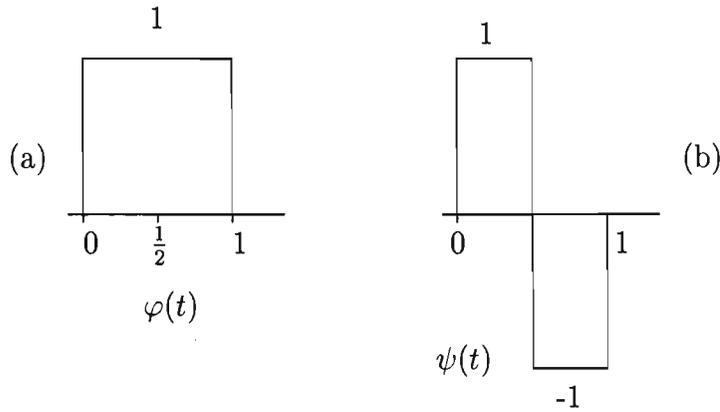


Figura 1.3: Funciones de Haar (a)  $\varphi(t)$  y (b)  $\psi(t)$ .

detalles, Figura 1.4c, en la forma siguiente:

$$f(t) = 8\varphi\left(\frac{t}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{t}{2} - 1\right) + 2\psi\left(\frac{t}{2}\right) - 4\psi\left(\frac{t}{2} - 1\right). \quad (1.5)$$

Los coeficientes 8 y 2 son los mostrados en el renglón (c) de la Figura 1.2 y los coeficientes 2 y -4 corresponden al renglón (b) de la Figura 1.2. En la representación (1.5) de  $f(t)$ , además de recorrer las funciones se ha hecho un reescalamiento al sustituir  $t$  por  $1/2t$  para hacer más ancho el soporte de la función.

Una última representación consiste en considerar la descomposición realizada recursivamente de la parte (b) en (d) y (e) (Figura 1.4):

$$f(t) = 5\varphi\left(\frac{t}{4}\right) + 3\psi\left(\frac{t}{4}\right) + 2\psi\left(\frac{t}{2}\right) - 4\psi\left(\frac{t}{2} - 1\right). \quad (1.6)$$

La función tiene un promedio general, detalles y detalles finos.

Podemos introducir alguna terminología. En el lenguaje de análisis de señales, el paso (B1) de la Figura 1.2 es la aplicación del filtro pasa bajas  $[1, 1]$  (salvo un factor). Similarmente, el paso (A1) es la aplicación del filtro pasa altas  $[-1, 1]$ . Considerar los elementos de dos en dos se conoce como decimación. A un conjunto de filtros se le llama banco de filtros.

La función  $\psi$  definida en (1.3) es una ondícula, en tanto que la función  $\varphi$  de (1.2) es una función de escalamiento. Ambas pertenecen a la base de Haar.

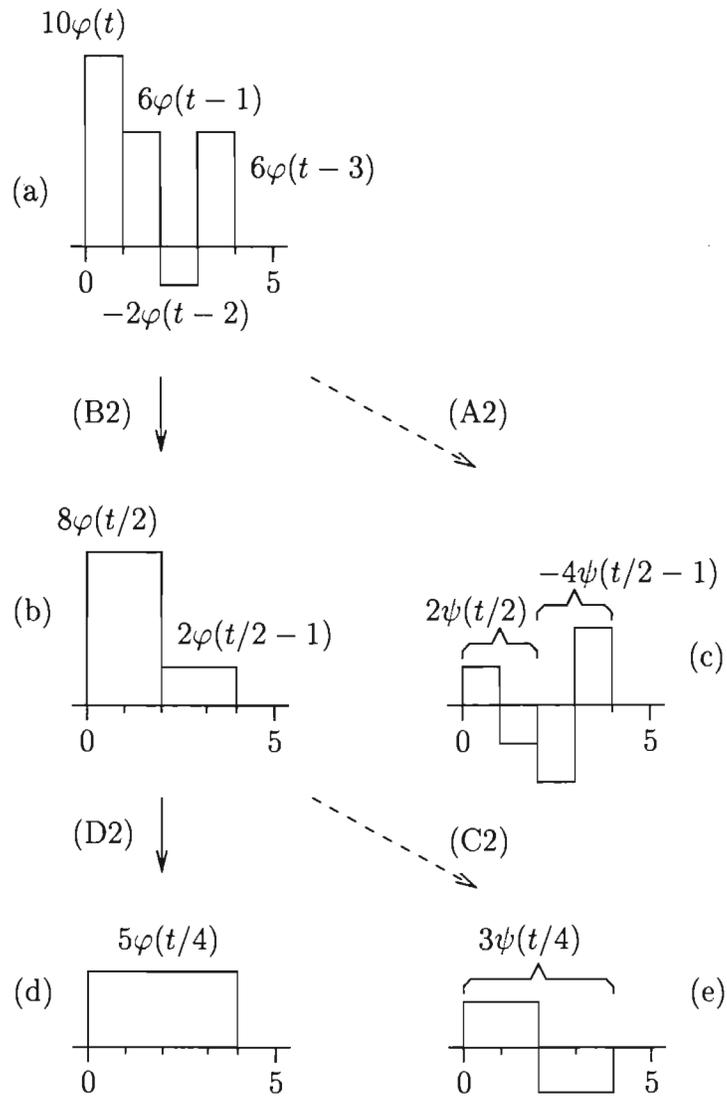


Figura 1.4: Ejemplo introductorio de transformada ondicular.

Hemos visto que en (1.4) es posible representar a la función  $f(t)$  con funciones de escalamiento de la forma  $\varphi(t-k)$ , para distintos valores de  $k$ . Pero también se puede representar, por (1.5), con funciones de escalamiento más burdas  $\varphi(t/2-k)$  con la ayuda de las ondículas  $\psi(t/2-k)$ . De manera recursiva, según (1.6), esa función de escalamiento burda se puede representar con otra función de escalamiento todavía más burda,  $\varphi(t/4)$  con ayuda de una ondícula burda  $\psi(t/4)$ .

Los coeficientes de las funciones de escalamiento y ondículas se pueden calcular como productos internos; por ejemplo,

$$\int_0^4 f(t)\psi\left(\frac{1}{2}t\right) dt = 4, \quad \int_0^4 f(t)\psi\left(\frac{1}{2}t-1\right) dt = -8, \quad (1.7)$$

que coinciden con los coeficientes 2 y  $-4$  de (1.6) salvo un factor de 2. Por tanto, con base en las integrales (1.7), es plausible definir a la transformada ondicular  $W$  como:

$$W(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) du,$$

y representa el análisis de la función  $f$  mediante la ondícula  $\psi$  a la escala  $\lambda$  en el instante  $t$ ; el factor  $1/\sqrt{\lambda}$  es un factor de normalización mientras que  $u$  es una variable muda y sirve para centrar a la ondícula  $\psi$  en  $t$ .

Usamos el lenguaje de álgebra lineal para definir a  $V_2$  como el espacio vectorial generado por las funciones de escalamiento más finas dadas en la ecuación (1.4):

$$V_2 = \mathcal{L}\{\varphi(t), \varphi(t-1), \varphi(t-2), \varphi(t-3)\}. \quad (1.8)$$

Sea ahora  $V_1$  el espacio más burdo

$$V_1 = \mathcal{L}\left\{\varphi\left(\frac{1}{2}t\right), \varphi\left(\frac{1}{2}t-1\right)\right\}, \quad (1.9)$$

También consideramos el espacio  $W_1$  generado por las ondículas de los dos últimos términos de la ecuación (1.5) como sigue

$$W_1 = \mathcal{L}\left\{\psi\left(\frac{t}{2}\right), \psi\left(\frac{t}{2}-1\right)\right\}. \quad (1.10)$$

Por la manera en que se definen  $V_2$ ,  $V_1$  y  $W_1$  se puede comprobar que

$$V_2 = V_1 \oplus W_1, \quad (1.11)$$

en donde la suma directa  $\oplus$  significa que los elementos de  $V_2$  se pueden representar como sumas de dos únicos elementos de  $V_1$  y  $W_1$ . La interpretación es que el espacio  $V_2$  es un refinamiento del espacio burdo  $V_1$  auxiliado por los detalles dados por los elementos de  $W_1$ . Resalta el hecho que  $V_2$  y  $V_1$  son generados por la misma función a escalas distintas. (Como un bosquejo de la comprobación de la relación (1.11) se puede decir que  $V_1 \subset V_2$  se justifica pues  $\varphi(t/2) = \varphi(t) + \varphi(t-1)$ , que  $W_1 \subset V_2$  se debe a que  $\psi(t/2) = \varphi(t) - \varphi(t-1)$ , también que  $V_2 \subset V_1 + W_1$  por  $\varphi(t) = [\varphi(t/2) + \psi(t/2)]/2$  y porque  $V_1$  es ortogonal a  $W_1$  debido a que el producto interno de  $\varphi(t/2)$  con  $\psi(t/2)$  es cero.)

Si consideramos ahora los dos espacios

$$V_0 = \mathcal{L} \left\{ \varphi \left( \frac{t}{4} \right) \right\}, \quad (1.12)$$

$$W_0 = \mathcal{L} \left\{ \psi \left( \frac{t}{4} \right) \right\}, \quad (1.13)$$

planteados a partir de los dos primeras funciones de la ecuación (1.6) tenemos

$$V_1 = V_0 \oplus W_0,$$

y también, al usar la ecuación (1.11),

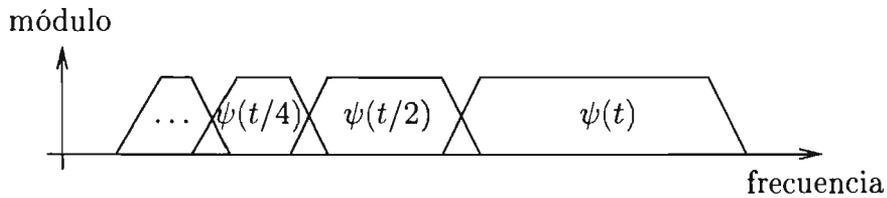
$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1.$$

Estos espacios y las relaciones que guardan entre ellos definen el concepto de análisis multirresolutivo o multirresolución.

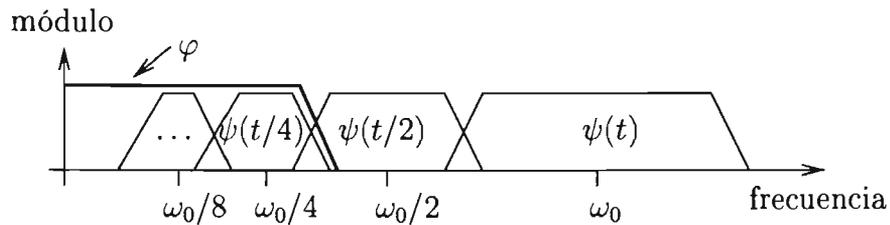
Podemos remarcar la relación entre las funciones y los espacios

$$\begin{aligned} f(t) &= \underbrace{10\varphi(t) + 6\varphi(t-1) - 2\varphi(t-2) + 6\varphi(t-3)}_{\in V_2} \\ &= \underbrace{8\varphi\left(\frac{t}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{t}{2}-1\right)}_{\in V_1} + \underbrace{2\psi\left(\frac{t}{2}\right) - 4\psi\left(\frac{t}{2}-1\right)}_{\in W_1} \\ &= \underbrace{5\varphi\left(\frac{t}{4}\right)}_{\in V_0} + \underbrace{3\psi\left(\frac{t}{4}\right)}_{\in W_0} + \underbrace{2\psi\left(\frac{t}{2}\right) - 4\psi\left(\frac{t}{2}-1\right)}_{\in W_1}. \end{aligned}$$

Otro aspecto importante del concepto de multirresolución es que las ondículas pueden aproximar cualquier función. Si analizamos el espectro de frecuencia de las ondículas más finas vemos que tienen una frecuencia más alta que las ondículas más burdas.



Una dificultad de este tipo de aproximación es que se requieren cada vez más y más ondículas con menor frecuencia para ajustar las partes con baja frecuencia. La inclusión de la función de escalamiento ayuda a resolver la complicación pues sustituye una infinidad de subespacios por sólo un espacio.



# Capítulo 2

## Transformada ondicular

### 2.1. Introducción

En el estudio de señales se emplea la transformada de Fourier que permite pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (Oppenheim y Schaffer, 1989; Cohen, 1995; Solnes, 1992). La transformada de Gabor es similar a la de Fourier pero permite a la vez un análisis en el dominio del tiempo empleando ventanas. La transformada de Gabor tiene desventajas cuando analiza frecuencias muy altas o muy bajas. Estas desventajas son superadas por la transformada ondicular.

El concepto de transformada ondicular fue formalizado en un par de artículos de Morlet, Grossmann y Goupillaud (Grossman y Morlet, 1984; Goupillaud et al., 1984). Las transformadas ondiculares son transformaciones integrales que usan núcleos de integración llamados ondículas. La transformada ondicular tiene ventajas sobre la de Gabor pues la ondícula se adapta dependiendo de la frecuencia.

Las ondículas se usan en esencia de dos formas cuando se estudian procesos o señales: (i) como un núcleo de integración para analizar y extraer información acerca del proceso, (ii) como un conjunto de funciones base para la representación de un proceso.

La transformada ondicular se emplea para funciones continuas y tiene también su contraparte para funciones discretas; en ese último caso y considerando señales finitas se tienen algoritmos eficientes, comparables al algoritmo de transformada rápida de Fourier.

Libros de referencia para la transformada ondicular son Daubechies (1992),

Strang (1996) y Chui (1992a; 1992b). Otra referencia útil es Meyer (1993). Una referencia introductoria y sencilla es Valens (1999).

## 2.2. Historia de la transformada ondicular

Ya se ha señalado el establecimiento de la transformada ondicular por Morlet, Grossmann y Goupillaud. Sin embargo, se debe señalar que por lo menos existieron siete fuentes previas a la consolidación de esta teoría, como menciona Meyer (1993). Se realizaron esfuerzos aislados y ni siquiera la palabra asociada a la transformada ondicular (wavelet) ni el concepto actual se estableció.

Haar (1910) construyó un sistema de funciones ortogonales cuando trataba de resolver el caso de una función continua periódica cuya serie de Fourier diverge. Las funciones de Haar constituyen los ejemplos más sencillos de ondículas.

Grossman y Morlet (1984) redescubren la identidad de Calderón (1964). Esta identidad es la base de la transformada inversa ondicular. Una base previa a esa identidad corresponde al análisis de Littlewood y Paley que data de 1930 (ver, por ejemplo, Frazier et al. (1991)).

En 1991 Holschneider usó, sin saberlo, una técnica debida a Lusin para estudiar la función de Riemann, dada por  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) \text{sen}(\pi n^2 t)$ , la cual es no diferenciable en cualquier punto de su dominio. Lusin desarrolló en 1930 un sistema de funciones, que actualmente corresponden a ondículas, para representar funciones de variable compleja. Una exposición del trabajo de Lusin se puede consultar en Ville (1948) y también en Meyer (1993).

Strömberg (1981) construyó un sistema ortogonal de ondículas. Este sistema tiene una estructura similar a las ondículas de Haar.

Stephane Mallat se dedicaba al procesamiento numérico de imágenes cuando descubrió la conexión entre la transformada ondicular y la codificación por subbandas (Mallat, 1989b). Él descubrió que estaban relacionados los filtros de cuadratura de espejo (inventados por Croissier, Esteban y Galand para la telefonía digital, (Esteban y Galand, 1977)), el algoritmo piramidal de Burt y Adelson (1983) (usado en procesamiento numérico de imágenes), y las bases ondiculares ortogonales descubiertas por Strömberg (1981).

En el área de geofísica surgieron dos artículos, publicados por Morlet et al. (1982a; 1982b), en los que se estudió las señales sísmicas con la teoría a

punto de establecerse definitivamente.

En una serie de trabajos, Daubechies (1988; 1990; 1993) obtuvo una familia de bases ondulares ortogonales. Estas funciones constituyen un sistema de ondículas ortogonales y de soporte compacto de manera análoga a las de Haar descubiertas 80 años atrás.

## 2.3. Transformada ondicular en geofísica

En el área de geofísica la transformada ondicular ha tenido varias aplicaciones y de forma particular en la sísmica de reflexión. En la sección anterior se mencionaron dos artículos pioneros que analizan las señales sísmicas (Morlet et al., 1982a; Morlet et al., 1982b). Otras aplicaciones son: distinción entre diferentes eventos sísmicos superpuestos y supresión de ruido no deseado (Okaya et al., 1992), caracterización de trazas sísmicas (Grubb y Walden, 1997), compresión de datos sísmicos (Donoho et al., 1995), tomografía sísmica 1-D (Li y Ulrych, 1995), caracterización de heterogeneidades estructurales basada en propiedades locales a partir de registros de pozo (Li y Hauray, 1995), inversión sísmica (Li et al., 1996), separación de eventos sísmicos en el plano tiempo-frecuencia y supresión de eventos no deseados (Chakraborty y Okaya, 1995), extrapolación del campo de ondas (Wu y McMechan, 1995), función de transferencia basada en heterogeneidades, atenuación de ruido de la superficie mediante datos de VSP (Li et al., 1995), migración eficiente y estable (Dessing y Wapenaar, 1995), análisis multiescala de AVA (Wapenaar, 1997), filtrado antes y después de apilar (Faqui et al., 1995; Deighan y Watts, 1997) y caracterización de formas de onda de registro de pozo acústico (Saito y Coifman, 1997). En Foufoula-Georgiou y Kumar (1994) se mencionan aplicaciones a otras áreas de la geofísica. Otras aplicaciones de la transformada ondicular se refieren a la delimitación de yacimientos, localización de pozos, caracterización estática de yacimientos, determinación de extensión lateral (Ronquillo-Jarillo y Lozada-Zumaeta, 1997), procesamiento sísmico (Lozada-Zumaeta y Ronquillo-Jarillo, 1996), maximización de la relación señal-ruido en el dominio ondicular (Lozada-Zumaeta y Ronquillo-Jarillo, 1997b), determinación de atributos sísmicos y AVO (Lozada-Zumaeta y Ronquillo-Jarillo, 1997a; Lozada-Zumaeta y Ronquillo-Jarillo, 1997c), localización de gas (Ronquillo-Jarillo et al., 1997; Ronquillo-Jarillo y Lozada-Zumaeta, 1998) y análisis tiempo-frecuencia a datos sísmica de reflexión (Lozada-Zumaeta, 2002).

La transformada ondicular también ha sido aplicada a datos de campos potenciales (Fedi y Quarta, 1998): inversión dependiente de la escala (Li y Oldenburg, 1997; Boschetti et al., 2001), interpretación de perfiles (Chapin, 1997; Chapin y Moscher, 1997; Moreau, 1995; Moreau et al., 1999; Hornby et al., 1999; Sailhac et al., 2000; Martelet et al., 2001; Leblanc y Morris, 2001), eliminación de ruido y cálculo de la derivada vertical (Ridsdill-Smith y Dentith, 1999).

## 2.4. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier<sup>1</sup> mapea funciones del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (Oppenheim y Schafer, 1989; Cohen, 1995; Solnes, 1992). Esta transformada muestra el contenido de frecuencias de un proceso o señal, sin embargo no da información de la localización de las componentes de frecuencias en el dominio del tiempo. A pesar de ello es la base para el análisis de la transformada ondicular.

La transformada de Fourier de una función  $f \in L^2$  se define como

$$\mathcal{F}f = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

El módulo  $\hat{f}(\omega)$  es la amplitud correspondiente a la frecuencia  $\omega$ . La inversa de la transformada de Fourier está dada por

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

La Figura 2.1 muestra las funciones usadas como núcleo de esta transformación.

La transformada de Fourier satisface la relación siguiente

$$\sqrt{2\pi}\|f\| = \|\hat{f}\|, \quad (2.1)$$

es decir, se tiene una transformada unitaria salvo un factor constante; la propiedad (2.1) se conoce como la identidad de Parseval; de forma más general

$$\sqrt{2\pi}\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Joseph Fourier (1768-1830), físico matemático francés (Simmons, 1972).

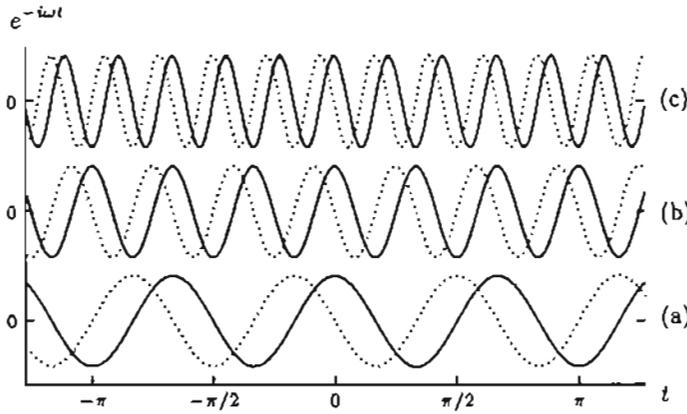


Figura 2.1: Núcleo de integración  $e^{-i\omega t}$  de la transformada de Fourier (a)  $\omega = 3$ , (b)  $\omega = 6$  y (c)  $\omega = 9$ . Las líneas continuas representan las partes reales y las líneas punteadas representan las partes imaginarias.

Usamos la fórmula sumatoria de Poisson (Spiegel, 1970; Sweldens, 1994; Holschneider, 1995) en las siguientes dos formas

$$\sum_l f(t-l) = \sum_k \hat{f}(2k\pi) e^{i2k\pi t}, \quad (2.3)$$

$$\sum_l \langle f, g(\cdot - l) \rangle e^{-i\omega t} = \sum_k \hat{f}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{g}(\omega + 2k\pi)}, \quad (2.4)$$

en donde se usa la abreviación  $g(\cdot - l) = g(t-l)$ , similar a  $f = f(t)$ . La serie de Fourier de una función  $f \in L^2([0, 1])$  está dada por

$$f(t) = \sum_k c_k e^{i2k\pi t}, \quad \text{donde} \quad c_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2k\pi t} dt.$$

Los términos  $c_k$  son llamados coeficientes de Fourier para la función  $f$ . La transformada de Fourier discreta de una sucesión  $\{a_k\}$  está dada por

$$\alpha(\omega) = \sum_k a_k e^{-i\omega k}.$$

Esa expresión es una forma reducida (cometiendo un abuso de notación) de la notación propia del procesamiento de señales

$$\alpha(e^{-i\omega}) = \sum_k a_k e^{-i\omega k}.$$

También se señala que tenemos la transformada  $z$  cuando sustituimos  $e^{-i\omega}$  por  $z$ :

$$\alpha(z) = \sum_k a_k z^{-k}.$$

El algoritmo para el cálculo de esta transformada se denomina transformada rápida de Fourier (FFT: fast Fourier transform). Para transformar una señal finita de longitud  $L$  se requiere de  $\mathcal{O}(L \ln L)$  pasos.

### 2.4.1. Filtros

Cualquier sucesión  $\{a_k\}$  sumable (definición (A.1)) se puede interpretar como una señal

$$\alpha(t) = \sum_k a_k \frac{\text{sen} \pi(t-k)}{\pi(t-k)},$$

o bien

$$\hat{\alpha}(\omega) = \sum_k a_k e^{-i\omega k}.$$

Una operación de filtrado o aplicación de un filtro consiste en el producto de  $\hat{\alpha}(\omega)$  por una función periódica con período  $2\pi$ , por ejemplo,

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-i\omega k},$$

con lo que se obtiene:

$$H(\omega)\hat{\alpha}(\omega) = \sum_k \left( \sum_l h_{k-l} a_l \right) e^{-i\omega k}.$$

A la operación anterior se le denomina convolución.

El filtro  $H(\omega)$  es un filtro pasa bajas si al restringirlo al intervalo  $[-\pi, \pi]$  su respuesta de frecuencia está más concentrada alrededor de 0 (Figura 2.2a y 2.2b) y es un filtro pasa altas si se concentra alrededor de  $\pi$  y  $-\pi$  (Figura 2.2c). La respuesta de frecuencia del filtro pasa bajas está concentrada en  $[-\pi/2, \pi/2]$  mientras que para el filtro pasa altas lo hace en  $\{\omega | \pi/2 \leq |\omega| \leq \pi\}$ .

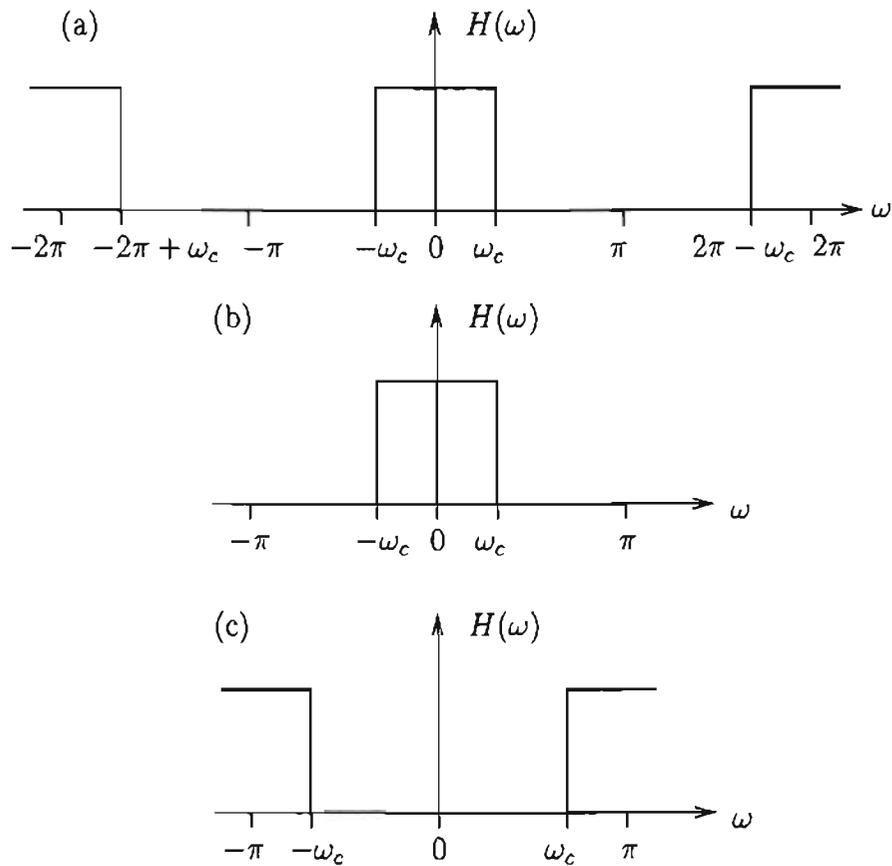


Figura 2.2: Filtro pasa bajas ideal que muestra (a) periodicidad en la respuesta de frecuencia (b) un período, en donde  $0 < \omega_c \leq \pi/2$ . (c) Filtro pasa altas ideal que muestra un período, en donde  $\pi/2 < \omega_c \leq \pi$  (Oppenheim y Schaffer, 1989).

## 2.5. Transformada de Gabor

El estudio del comportamiento espectral de señales análogas a través de la transformada de Fourier requiere también el conocimiento de la señal en el dominio del tiempo. Si una señal es afectada en una vecindad pequeña, todo su espectro es alterado. Por ejemplo, la transformada de Fourier de la distribución  $\delta(t - t_0)$ , la función delta, que tiene soporte en el punto  $t_0$ , es  $e^{it_0\omega}$ , la cual cubre todo el dominio de las frecuencias. Una forma de superar esto es a través de la transformada que propuso Gabor (1946).

La transformada de Fourier por ventanas se define como sigue

$$\begin{aligned} Gf(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u-t)e^{-i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g_{\omega,t}(u) du, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$g_{\omega,t}(u) = g(u-t)e^{-i\omega u}.$$

La función  $Gf(\omega, t)$  depende tanto del tiempo  $t$  como de la frecuencia  $\omega$ . La función  $g(t)$  se elige como una función real, par, con concentración máxima en los componentes de baja frecuencia. Un caso típico es considerar una función gaussiana

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/(4\alpha)}.$$

Cuando se selecciona esta función, la transformada de Fourier por ventanas se le llama transformada de Gabor. Mediante la función de ventana  $g(u-t)$  (variando  $u$ ) se realiza un análisis en el instante  $t$ . La Figura 2.3a muestra algunas de las funciones  $g_{\omega,t}(u)$ .

La transformada de Gabor es invertible y la inversa está dada por la siguiente expresión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, u)g(u-t)e^{-i\omega t} d\omega du.$$

La transformada de Gabor se puede expresar como una integración en el dominio de la frecuencia

$$Gf(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega') \overline{\hat{g}_{\omega,t}(\omega')} d\omega'. \quad (2.6)$$

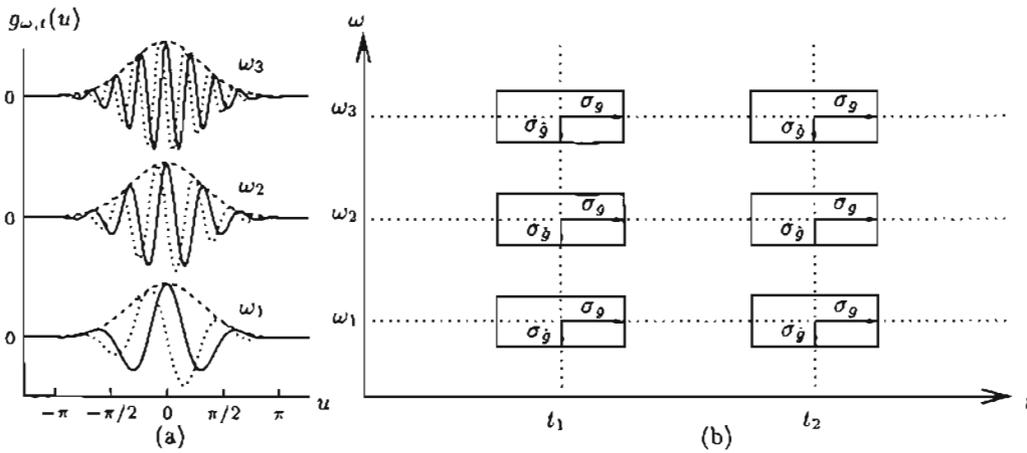


Figura 2.3: (a) Núcleo de integración de la transformada de Gabor  $g_{\omega,t}(u) = g(u - t)e^{-i\omega u}$ , en donde  $g(t) = (1/2\sqrt{\pi\alpha})e^{-t^2/(4\alpha)}$  para  $\omega_1 = 3$ ,  $\omega_2 = 6$ ,  $\omega_3 = 9$  y  $t = 0$ . Las líneas continuas representan las partes reales, las líneas punteadas representan las partes imaginarias y también se muestra la envolvente. (b) Representación de la resolución de la transformada de Gabor en el plano tiempo contra frecuencia en donde  $\sigma_g$  y  $\sigma_{\dot{g}}$  son las dispersiones de  $g$  en tiempo  $t$  y frecuencia  $\omega$ .

La expresión (2.6) y la definición (2.5) constituyen la base de la localización en tiempo y frecuencia en el análisis de Gabor.

Otra propiedad que tiene esta transformada es la preservación de isometría

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Gf(\omega, t)|^2 d\omega dt.$$

para lo cual se requiere la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1.$$

El análisis a través de  $g(t)$  se realiza en una ventana rectangular en el plano tiempo-frecuencia. Es posible estimar el ancho de las ventanas de análisis tanto en tiempo como en frecuencia (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994). Esto se puede lograr calculando sus desviaciones estándar

$$\sigma_g = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (u - t)^2 |g_{\omega, t}(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \hat{g}(u)^2 du \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{\hat{g}} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\omega' - \omega)^2 |g_{\omega, t}(\omega')|^2 d\omega' \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Este par de dispersiones indican la resolución en tiempo y frecuencia que tiene la transformada de Gabor. Cumplen con la relación siguiente

$$\sigma_g^2 \sigma_{\hat{g}}^2 \geq \frac{\pi}{2}.$$

Las dimensiones de la ventana de resolución son constantes a distintas frecuencias. Por esta razón la transformada de Gabor está limitada cuando se estudian señales con frecuencias demasiado bajas o demasiado altas (Figura 2.3b).

En la aplicación a series discretas se puede hacer una discretización en tiempo y frecuencia a través de las relaciones

$$t = nt_0, \quad \text{y} \quad \omega = m\omega_0,$$

aplicada a la definición (2.5) y entonces obtenemos la transformada discreta de Gabor:

$$G_d(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u - nt_0)e^{-im\omega_0 u} du,$$

en donde se debe cumplir que

$$\omega_0 t_0 < 2\pi.$$

## 2.6. Transformada ondicular

La transformada ondicular se basa en una función llamada ondícula  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ . Se imponen dos condiciones a esta función:

$$(a) \quad \text{que sea de soporte compacto} \quad (2.9)$$

$$(b) \quad \text{y de promedio cero: } \widehat{\psi}(0) = 0. \quad (2.10)$$

La condición (2.9) significa que la función toma valores nulos fuera de un intervalo cerrado y acotado (la Figura 1.3b muestra un ejemplo de ondícula). La idea de considerar un intervalo tiene el propósito de poder hacer el análisis, definido más adelante, de manera local. La condición (2.10) implica que tiene promedio cero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Si  $\psi$  no es la función idénticamente cero (lo cual tiene más sentido y utilidad) entonces toma valores positivos y negativos: tiene oscilaciones. De ese par de condiciones proviene el nombre de ondícula u onda pequeña. Desde un punto de vista físico, si una ondícula representa una onda, ésta no se queda oscilando para siempre, sino que empieza y decae. En cambio, si los núcleos de la transformada de Fourier representan ondas, éstas oscilan siempre. Referencias para los temas vistos en esta sección son Daubechies (1992), Sweldens (1994) y Strang y Nguyen (1996).

La transformada ondicular usa funciones generadas por traslaciones y dilataciones de la ondícula en la forma siguiente

$$\psi_{\lambda,t}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right), \quad \text{para } \lambda, t \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

En esta definición el parámetro  $t$  indica un desfase, en tanto que el parámetro  $\lambda$  produce una compresión de la ondícula para valores de  $\lambda$  positivos menores

que 1 y una dilatación para  $\lambda$  mayores que 1. Algunos ejemplos de estas ondículas  $\psi_{\lambda,t}(u)$  se presentan en la Figura 2.4. El coeficiente  $1/\sqrt{\lambda}$  es un factor de normalización para que se satisfaga  $\|\psi_{\lambda,t}\| = \|\psi\|$  :

$$\|\psi_{\lambda,t}\| = \int |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du = \int |\psi(t)|^2 dt = \|\psi\|.$$

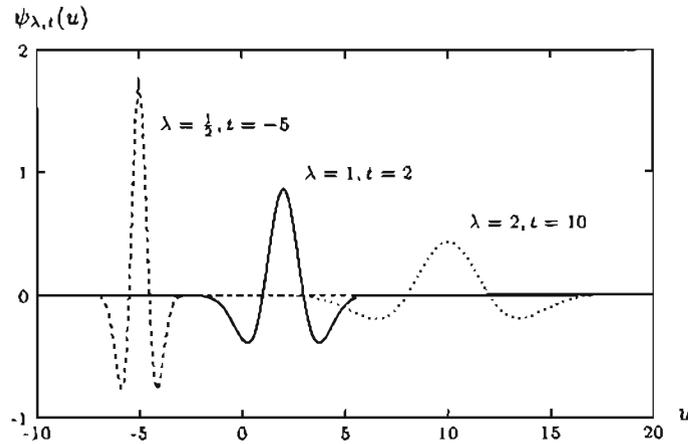


Figura 2.4: Algunos ejemplos de las ondículas  $\psi_{\lambda,t}(u)$ . La ondícula  $\psi_{1/2,-5}(u)$  está comprimida y  $\psi_{2,10}(u)$  está dilatada.

Se define la transformada ondicular continua de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  como

$$W(\lambda, t) = \langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle, \quad (2.11)$$

es decir,

$$W(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \overline{\psi_{\lambda,t}(u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \overline{\psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right)} du. \quad (2.12)$$

Es una transformación integral, como la de Fourier y de Gabor, cuyo núcleo son translaciones y dilataciones de una ondícula. También se usan las siguientes expresiones

$$W(\lambda, t) = W[\psi; f](\lambda, t) = W_{\psi}(\lambda, t).$$

Los números  $W(\lambda, t)$  se llaman coeficientes de  $f$  respecto a la ondícula  $\psi$ .

El espacio bidimensional de los parámetros de la transformada se identifica con el semiplano

$$\{(\lambda, t) : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, t \in \mathbb{R}\},$$

por lo que se identifica:

$$\begin{aligned} \omega_0/\lambda &\rightarrow \text{frecuencia,} \\ t &\rightarrow \text{tiempo,} \end{aligned}$$

en donde  $\omega_0$  es el centro de masa de lóbulo derecho de la ondícula:

$$\omega_0 = \frac{\int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}.$$

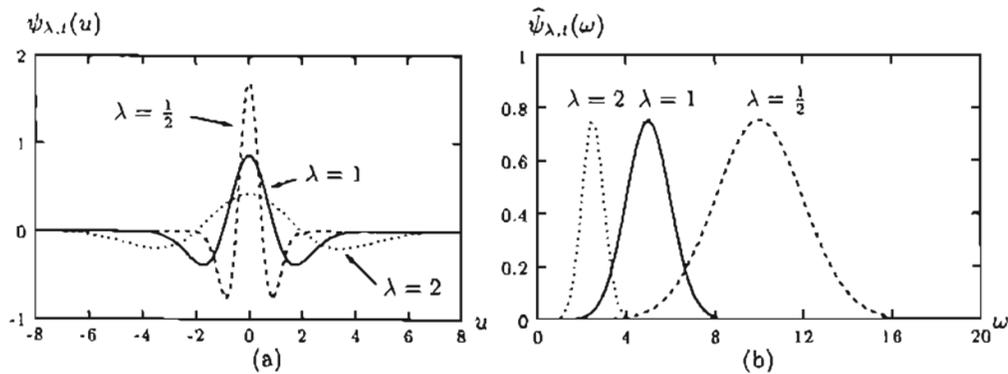


Figura 2.5: (a) Ondículas  $\psi_{\lambda,t}(u)$  para  $\lambda = 1, 2, 1/2$  y  $t = 0$ . (b) Espectro de esas ondículas  $|\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega)|$ .

Analizemos el efecto en frecuencia del parámetro  $\lambda$ . Para  $\lambda$  pequeña se tiene que  $\psi_{\lambda,t}(u)$  tiene soporte pequeño y toma componentes altos en frecuencia. Gráficamente podemos ver este efecto. En la Figura 2.5a vemos que para  $\lambda = 1/2$  la ondícula se comprime en su dominio respecto a la ondícula respectiva para  $\lambda = 1$ . En la Figura 2.5b tenemos que para  $\lambda = 1/2$  el espectro de la ondícula se desplaza a la derecha por lo que analizará frecuencias más altas que para la ondícula correspondiente a  $\lambda = 1$ . Se obtiene un efecto inverso para  $\lambda = 2$ , en donde se analizan frecuencias bajas usando una ventana de tiempo más ancha. Es decir, la transformada ondicular responde a

las componentes de frecuencias cercanas a  $\omega_0/\lambda$  que están cerca del tiempo  $t$ . Para ello usa una función adecuada tanto en tiempo como en frecuencia.

Se puede determinar la resolución de la transformada ondicular mediante definiciones de las dispersiones en tiempo y frecuencia de una manera similar a las definiciones (2.7) y (2.8). La transformada de Gabor tiene una ventana de resolución de área constante a diferencia de la transformada ondicular que adecua la ondícula a la frecuencia: para frecuencias altas se emplea un lapso corto mientras que para bajas frecuencias el lapso es largo. En la Figura 2.6b podemos ver esta característica en donde

$$\sigma_{\psi_{\lambda,t}} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (u-t)^2 |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{\widehat{\psi}_{\lambda,t}} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\omega' - \omega)^2 |\widehat{\psi}_{\lambda,t}(\omega')|^2 d\omega' \right)^{\frac{1}{2}}.$$

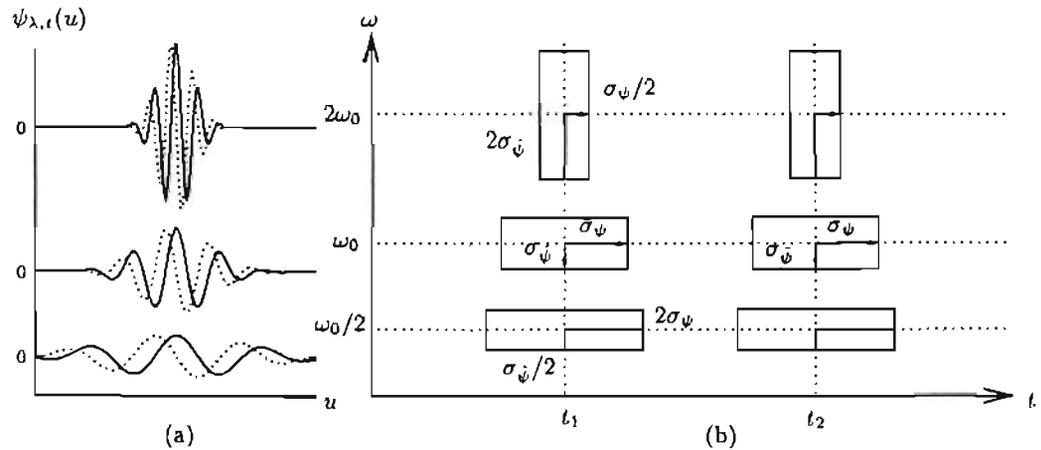


Figura 2.6: (a) Núcleo de integración de la transformada de ondícula (ondícula de Morlet); las líneas continuas representan las partes reales y las líneas punteadas representan las partes imaginarias. (b) Representación de la resolución de la transformada de ondícula en el plano tiempo contra frecuencia.

Usando la identidad general de Parseval (2.2) se puede tener una representación de la transformada ondicular (2.11) en el dominio de la frecuencia

$$\sqrt{2\pi}W(\lambda, t) = \sqrt{2\pi}\langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{\lambda,t} \rangle,$$

donde

$$\widehat{\psi}_{\lambda,t}(\omega) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\omega t} \widehat{\psi}(\lambda\omega).$$

Para que la transformada ondicular continua sea invertible la ondícula  $\psi$  debe satisfacer la siguiente condición de admisibilidad

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (2.13)$$

entonces la inversa de la transformada ondicular es

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \lambda^{-2} W(\lambda, u) \psi_{\lambda,u}(t) d\lambda du. \quad (2.14)$$

La condición de admisibilidad (2.13) es la formalización de las condiciones (2.9) y (2.10) las cuales funcionan para todos los propósitos prácticos. La ecuación de inversión (2.14) es conocida como la identidad de Calderón, redescubierta por Grossman y Morlet.

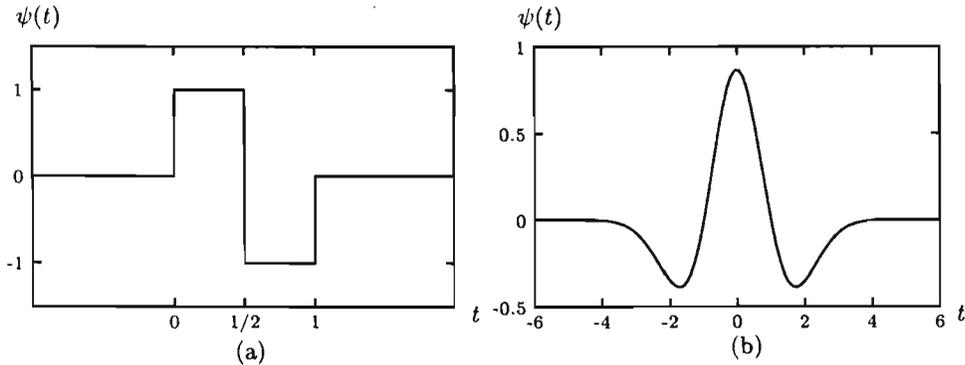


Figura 2.7: (a) Ondícula de Haar. (b) Ondícula de sombrero mexicano.

Para ilustrar la teoría se muestran algunas ondículas famosas. Un ejemplo de ondícula muy empleada es la ondícula de Haar (Figura 2.7a) definida como sigue

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & \text{si } 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Esta ondícula es muy usada por su simplicidad pero la desventaja es que tiene mala localización en frecuencia (ver sección 2.7.3).

La función llamada sombrero mexicano es otra ondícula y se define como la segunda derivada de la función gaussiana (Figuras 2.7b y 2.5a)

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-t^2)e^{-t^2/2}.$$

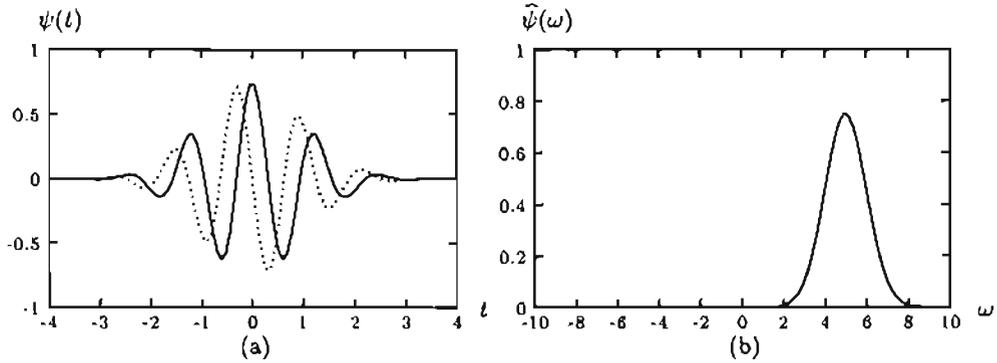


Figura 2.8: (a) Ondícula de Morlet aproximada. La línea continua es la parte real y la punteada es la parte imaginaria. (b) Espectro de la ondícula de Morlet aproximada.

La ondícula de Morlet es una función de variable compleja

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \left( e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2} \right) e^{-t^2/2}; \quad (2.16)$$

su transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(\omega) = \pi^{-1/4} \left[ e^{-(\omega-\omega_0)^2/2} - e^{-\omega^2/2} e^{-\omega_0^2/2} \right]. \quad (2.17)$$

En la práctica se considera  $\omega_0 \geq 5$  para que el segundo término de la transformada de Fourier (2.17) sea despreciable; de esta forma tenemos, de forma aproximada, una gaussiana modulada (Figura 2.8a)

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2}, \quad \text{para } \omega_0 \geq 5.$$

Tenemos que su espectro aproximado

$$\hat{\psi}(\omega) = \pi^{-1/4} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}, \quad \text{para } \omega \geq 5,$$

está concentrado en una zona (Figura 2.8b).

Se ha definido una ondícula como una función de una variable, sin embargo el concepto de ondícula se puede extender fácilmente a más dimensiones. La Figura 2.9 muestra el espectro de la ondícula de Morlet para dos dimensiones. Se observa que se puede dirigir el análisis a un punto del dominio espectral.

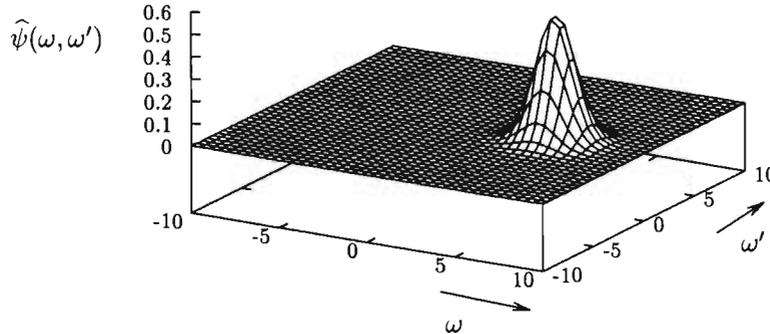


Figura 2.9: Espectro de la ondícula de Morlet aproximada en 2 dimensiones. Este tipo de ondículas permite realizar un análisis espectral de funciones dependientes de dos variables,  $t$  y  $t'$ , para las frecuencias correspondientes,  $\omega$  y  $\omega'$ .

## 2.7. Análisis multirresolutivo

La formalización del ejemplo dado en la introducción (sección 1.6) se cristaliza en el concepto fundamental de análisis multirresolutivo (o multirresolución). Es la base para introducir el eficiente algoritmo piramidal.

Un análisis multirresolutivo (abreviado como AMR) de  $L^2(\mathbb{R})$  es una sucesión de espacios cerrados  $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , tales que

- (a)  $V_j \subset V_{j+1}$ ,
- (b)  $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$  (invarianza de escala),
- (c)  $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t+1) \in V_0$  (invarianza bajo traslaciones),
- (d)  $\bigcup_j V_j$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  (completez),
- (e) existe una función de escalamiento  $\varphi \in V_0$  tal que  $\{\varphi(t-l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_0$  (base con invarianza de escala).

Este concepto fue establecido por Mallat (1989a) y Meyer (1986).

Para aclarar esta definición veamos como se genera el espacio  $V_0$ . Partimos de la función de escalamiento  $\varphi(t)$ . Para generar los elementos del espacio  $V_0$  basta realizar corrimientos de esa función:  $\varphi(t-1)$ ,  $\varphi(t+1)$ , etc. Esas funciones forman una base para  $V_0$ ; por lo tanto los elementos de  $V_0$  son de la forma  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \varphi(t-l)$ .

Ahora bien, para generar los elementos del espacio  $V_1$  comprimimos las funciones en la forma  $\varphi(2t)$  según (b); si usamos (c) vemos que  $\varphi(2t-l)$  genera el espacio  $V_1$ .

De forma análoga a la generación de  $V_1$  se generan los espacios  $V_j$  del inciso (a). Estos espacios forman una sucesión anidada

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots,$$

y representan espacios de promedios tales como los del ejemplo introductorio (ecuaciones (1.8), (1.9) y (1.12)). Además, es de recalcar, que el inciso (e) asegura que esos espacios se generan de forma sencilla por sólo una función.

De esta manera se tiene que las funciones  $\varphi_{jn}$  constituyen una base de  $L^2(\mathbb{R})$ , en donde

$$\varphi_{jn}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - n).$$

Sin embargo se impone la condición de que sea una base de Riesz: deben existir constantes  $A$  y  $B$ ,  $0 < A \leq B < \infty$  y se debe cumplir

$$A \|f\|^2 \leq |\langle f, \varphi_{jn} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in V_0.$$

Esta condición asegura que  $f$  puede ser recuperada a partir de los coeficientes ondiculares (ver también explicación relativa a la ecuación (A.2)).

También se ve que las funciones de escalamiento  $\{\varphi_{j,l} \mid l \in \mathbb{Z}\}$  constituyen una base de Riesz de  $V_j$ , en donde  $\varphi_{j,l}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - l)$ .

Como las funciones  $\varphi(2t-l)$  forman una base de Riesz de  $V_1$  y como  $\varphi(t) \in V_0 \subset V_1$ , existen coeficientes  $h_l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , tales que se cumple la *ecuación de dilatación*

$$\varphi(t) = 2 \sum_l h_l \varphi(2t-l) \quad \text{o} \quad \widehat{\varphi}(\omega) = H(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2), \quad (2.18)$$

en donde  $H$  es una función periódica con período  $2\pi$ , definida por

$$H(\omega) = \sum_l h_l e^{-il\omega}. \quad (2.19)$$

A la ecuación (2.18) se le llama también relación de dos escalas y a los coeficientes  $h_l$  se les conoce como la serie de dos escalas. También son los coeficientes de la ecuación de refinamiento. Si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  entonces está unívocamente definida por la ecuación de dilatación (2.18) y la normalización

$$\int \varphi(t) dt = 1 \Leftrightarrow \widehat{\varphi}(0) = 1. \quad (2.20)$$

Si sustituimos  $\widehat{\varphi}(0) = 1$  en (2.18) tenemos que  $H(0) = 1$ . Es esta propiedad que nos permite ver que  $H$  es un filtro pasa bajas de análisis.

A partir de un conjunto de subespacios multirresolutivos se puede generar una base ortonormal de ondículas, como se demuestra a continuación. Para  $V_j \subset V_{j+1}$  se define  $W_j$  como el complemento ortogonal respecto a  $V_{j+1}$

$$W_j = V_j^\perp.$$

El espacio  $W_j$  es la diferencia entre ambos espacios. Así tenemos

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1},$$

$$V_j \perp W_j.$$

Observamos que tanto  $V_j$  como  $W_j$  están contenidos en  $V_{j+1}$ .

Como  $W_j \subset V_{j+1}$  y  $V_{j+1} \perp W_{j+1}$  se tiene que  $W_j \perp W_{j+1}$ . Es decir, los subespacios  $W_j$  son mutuamente ortogonales.

Además los espacios  $W_j$  heredan la completez de los espacios  $V_j$ :

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R}). \quad (2.21)$$

Se puede demostrar que es posible hallar una función  $\psi$  tal que

$$\{\psi_{0n}\} = \{\psi(t - n)\},$$

sea una base ortonormal para  $W_0$ , donde  $\psi_{jn}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - n)$ . Se sigue que  $\{\psi_{jn}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal para  $W_j$  y  $\{\psi_{jn}\}$  es una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .

Como  $\psi \in W_0 \subset V_1$

$$\psi(t) = 2 \sum_l g_l \varphi(2t - l) \quad \text{o} \quad \widehat{\psi}(\omega) = G(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2), \quad (2.22)$$

en donde  $G$  es una función  $2\pi$ -periódica, definida por

$$G(\omega) = \sum_l g_l e^{-il\omega}. \quad (2.23)$$

La relación (2.22) es conocida como ecuación ondicular. Al sustituir  $\omega = 0$  en la ecuación (2.22) se tiene

$$\widehat{\psi}(0) = G(0)\widehat{\varphi}(0).$$

Considerando  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ , según (2.20), y suponiendo que  $\psi$  satisface (2.10), esto es  $\widehat{\psi}(0) = 0$ , se tiene que  $G(0) = 0$ . Por esta razón, a la función  $G$  se le conoce como filtro pasa altas de análisis.

Una definición alterna de ondícula es como sigue. Una función  $\psi$  es una ondícula si  $\{\psi(t-l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $W_0$ . La colección de funciones  $\{\psi_{j,l} \mid j, l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Los filtros  $G$  y  $H$  son importantes porque determinan la función de escalamiento  $\varphi(t)$  y la ondícula  $\psi(t)$ . Con base en este enfoque, la aplicación relativa a este trabajo necesita definir dichos filtros.

### 2.7.1. Representación

Sea  $P_j$  la proyección sobre  $V_j$  paralela a  $V_j^\perp$  y  $Q_j$  la proyección sobre  $W_j$  paralela a  $W_j^\perp$ . Luego  $f$  se puede escribir como

$$f(x) = \sum_j Q_j f(t) = \sum_{j,l} \langle f, \psi_{j,l} \rangle \psi_{j,l}(t). \quad (2.24)$$

Como

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1},$$

luego

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad W_j \subset V_{j+1};$$

esquemáticamente

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &= \bigoplus_j W_j = \underbrace{\dots \oplus \overset{CV_1}{W_0} \oplus \overset{CV_2}{W_1} \oplus \dots \oplus \overset{CV_J}{W_{J-1}}}_{\subset V_J} \oplus W_J \oplus W_{J+1} \oplus \dots \\ L^2(\mathbb{R}) &= V_J \oplus W_J \oplus W_{J+1} \oplus \dots = V_J \oplus \bigoplus_{j \geq J} W_j. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Así que si empezamos con una escala burda  $J$

$$\begin{aligned} f(t) &= P_J f(t) + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j f(t) \\ &= \sum_l \langle f, \varphi_{J,l} \rangle \varphi_{J,l}(t) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_l \langle f, \psi_{j,l} \rangle \psi_{j,l}(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) reduce a sólo un espacio,  $V_J$ , toda una infinidad de espacios,  $\dots, W_0, W_1, \dots, W_{J-1}$ , de la ecuación (2.21). Por ello la representación (2.26) considera menos términos que la representación (2.24).

### 2.7.2. Fórmula de producto infinito

En esta sección se obtiene la relación de producto infinito para  $\widehat{\varphi}(\omega)$ , ecuación (2.27), que se usará más adelante, la cual muestra la relación entre soluciones o raíces de  $\widehat{\varphi}(\omega)$  y  $H(\omega)$ . Otra utilidad de dicha ecuación es que se tiene una definición de  $\varphi(t)$  en términos de  $H$ .

Los espacios  $V_j$  se usan para aproximar funciones mediante proyecciones adecuadas. Como la unión de los espacios  $\cup_j V_j$  es densa en  $L^2(\mathbb{R})$  se puede aproximar una función arbitrariamente mediante esas proyecciones.

Para escribir un polinomio de grado menor de  $N$  como una combinación lineal de las funciones de escalamiento y sus trasladadas se necesitan cumplir las condiciones de Strang y Fix (Strang y Fix, 1973)

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(0) &= 1, \\ \widehat{\varphi}^{(p)}(2\pi k) &= 0, \quad \text{para } k \neq 0, \quad 0 \leq p \leq N. \end{aligned}$$

Esto se puede conseguir como sigue. De la aplicación recursiva de (2.18) se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\omega) &= H(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2) \\ &= H(\omega/2)H(\omega/4)\widehat{\varphi}(\omega/4) \\ &= \dots = \left[ \prod_{j=1}^J H(\omega/2^j) \right] \widehat{\varphi}(\omega/2^J), \end{aligned}$$

Cuando  $J \rightarrow \infty$ ,  $\omega/2^J \rightarrow 0$ ,  $\widehat{\varphi}(\omega/2^J) \rightarrow 1$ . Luego

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(\omega/2^j), \quad (2.27)$$

llamada la fórmula de producto infinito para  $\widehat{\varphi}(\omega)$ . Así que  $H(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = \pi$  cuando  $\widehat{\varphi}(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = 2\pi$ .

Hay otra utilidad de la ecuación (2.27) mencionada al principio de esta sección: se define a  $\widehat{\varphi}(\omega)$  en términos de  $H(\omega)$ ; pero también define a  $\varphi(t)$  en términos de  $H$  puesto que para obtener  $\varphi(t)$  basta convolucionar el filtro  $H$  sucesivamente. Con este procedimiento práctico se han realizado varias gráficas en el presente trabajo.

### 2.7.3. Diseño de ondículas.

Históricamente, la primera ondícula fue la de Haar (2.17) y está diseñada en el dominio del tiempo. Un problema que tiene esta función es que no es continua y la transformada de Fourier decae como  $|\omega|^{-1}$  para  $\omega \rightarrow \infty$ , lo que corresponde a una mala localización en frecuencia. Esta ondícula está mal condicionada para el análisis de funciones suaves. Sin embargo tiene ventajas sobre la transformada de Gabor; una ventaja es que la base de Haar es una base sin condiciones del espacio de funciones de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$ , para  $1 < p < \infty$ , y la transformada de Gabor sólo lo es para  $p = 2$ .

La base de Littlewood-Paley se define en frecuencia

$$\psi(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & \text{si } \pi \leq |\omega| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En tiempo se tiene

$$\psi(t) = (\pi t)^{-1} (\text{sen } 2\pi t - \text{sen } \pi t).$$

Esta base tiene propiedades complementarias a la base de Haar en tiempo y frecuencia: se define en frecuencia y tiene mala localización en tiempo.

Las funciones de Haar y Littlewood-Paley son los casos extremos del diseño de ondículas. Dentro de ese rango tenemos muchas otras que tienen excelentes propiedades de localización en tiempo y frecuencia.

La primera construcción de este tipo de ondículas se debe a Strömberg (1981), cuyas ondículas decaen exponencialmente y pertenecen al espacio de funciones continuas  $C^k$ .

Después siguió Meyer con una ondícula diseñada en el dominio de la frecuencia. Considera en sus funciones la parte negativa y positiva de la frecuencia en una sola función. Mediante unos trucos algebraicos ingeniosos

construye una base ondicular ortonormal. Al elegir un polinomio, con ciertas propiedades, encuentra una ondícula  $\psi(t)$  que decae más rápido que el recíproco de cualquier polinomio, es decir, para todo  $N \in \mathbb{N}$ , existe  $C_N < \infty$  tal que

$$|\psi(t)| \leq C_N (1 + |t|^2)^{-N}.$$

El primer ejemplo de base ondicular biortogonal lo construyó Tchamitchian (1987).

Battle (1987) y Lemarié (1988) construyeron con distintos métodos una familia de ondículas ortogonales con decaimiento exponencial  $\psi \in C^k$ , en donde  $k$  es arbitrario pero finito.

La ondícula de Morlet (2.16) se construye en frecuencia: la ecuación (2.17) es una gaussiana desplazada de forma que  $\hat{\psi}(0) = 0$ .

Daubechies (1988) construyó una base ondicular ortogonal estableciendo condiciones a los filtros pasa bajas en el dominio de la frecuencia (que tengan varias derivadas nulas en los extremos). Las ondículas y las funciones de escalamiento muestran una marcada asimetría. Es posible obtener funciones más simétricas cuando se emplea una base biortogonal (Daubechies, 1992).

#### 2.7.4. Ondículas biortogonales

Permitamos un análisis multirresolutivo en el que la ondícula de análisis sea diferente de la ondícula de síntesis y también que la función de escalamiento de análisis no sea la misma que la función de escalamiento de síntesis. Este planteamiento fue propuesto por Tchamitchian (1987). En ese caso estamos hablando de un análisis multirresolutivo biortogonal en el que tenemos:

- una función de escalamiento  $\varphi$ ,
- una ondícula  $\psi$ ,
- una función de escalamiento dual  $\bar{\varphi}$ ,
- una ondícula dual  $\tilde{\psi}$ ,

tales que cualquier función  $f$  tiene una representación como sigue:

$$f(t) = \sum_l \langle f, \bar{\varphi}_{j,l} \rangle \varphi_{j,l}(t) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_k \langle f, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l}(t). \quad (2.28)$$

La forma (2.28) es análoga a la ecuación (2.26). En el caso biortogonal las funciones de escalamiento de análisis y reconstrucción pueden ser diferentes y lo mismo pasa para las ondículas. Para que esto sea posible se debe cumplir

$$\langle \tilde{\varphi}(\cdot - k), \psi(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad \langle \tilde{\psi}(\cdot - k), \varphi(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad (2.29)$$

$$\langle \tilde{\varphi}(\cdot - k), \varphi(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad \langle \tilde{\psi}(\cdot - k), \psi(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad (2.30)$$

en donde  $\delta_{j,k} = 1$  si  $j = k$  y  $\delta_{j,k} = 0$  en otro caso (delta de Kronecker). Además del filtro de síntesis pasa bajas  $H$  y el de síntesis pasa altas  $G$ , se definen, de manera análoga a las ecuaciones (2.19) y (2.23), el filtro de análisis pasa bajas  $\tilde{H}$  y el filtro de análisis pasa altas  $\tilde{G}$

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_l \tilde{h}_l e^{-il\omega}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{G}(\omega) = \sum_l \tilde{g}_l e^{-il\omega}, \quad (2.32)$$

y también se definen  $\tilde{\varphi}(t)$  y  $\tilde{\psi}(t)$  similarmente a las ecuaciones (2.18) y (2.22). En términos de las funciones filtros  $H$ ,  $G$ ,  $\tilde{H}$  y  $\tilde{G}$  se tiene que las condiciones (2.29) y (2.30) ahora son como sigue

$$\tilde{H}(\omega)\overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi)\overline{H(\omega + \pi)} = 1, \quad (2.33)$$

$$\tilde{G}(\omega)\overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi)\overline{G(\omega + \pi)} = 1, \quad (2.34)$$

$$\tilde{G}(\omega)\overline{H(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi)\overline{H(\omega + \pi)} = 0, \quad (2.35)$$

$$\tilde{H}(\omega)\overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi)\overline{G(\omega + \pi)} = 0. \quad (2.36)$$

Más adelante se demostrará la relación (2.33) (sección 2.7.5). Una manera práctica de definir estos cuatro filtros consiste en empezar de un filtro pasa bajas; luego se debe factorizar ese filtro de la forma  $H(\omega)\tilde{H}(\omega)$ . Después se definen  $G(\omega)$  y  $\tilde{G}(\omega)$  a través de las relaciones

$$H(\omega) = \tilde{G}(\omega + \pi), \quad G(\omega) = -\tilde{H}(\omega + \pi).$$

Las cuatro ecuaciones (2.33)-(2.36) son equivalentes al sistema

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega + \pi) \\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{H(\omega)} & \overline{G(\omega)} \\ \overline{H(\omega + \pi)} & \overline{G(\omega + \pi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.37)$$

al definir la matriz de modulación  $M$

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} H(\omega) & H(\omega + \pi) \\ G(\omega) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix},$$

y similarmente  $\tilde{M}$  se tiene una expresión breve para (2.37)

$$\tilde{M}(\omega)\overline{M(\omega)}^T = I. \quad (2.38)$$

De donde se sigue

$$\left(\tilde{M}(\omega)\overline{M(\omega)}^T\right)^T = \overline{M(\omega)}\tilde{M}(\omega)^T = I^T = I,$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} \overline{H(\omega)} & \overline{H(\omega + \pi)} \\ \overline{G(\omega)} & \overline{G(\omega + \pi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{G}(\omega) \\ \tilde{H}(\omega + \pi) & \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

Resolvemos el sistema (2.39) para la primer columna

$$\begin{bmatrix} \overline{H(\omega)} & \overline{H(\omega + \pi)} \\ \overline{G(\omega)} & \overline{G(\omega + \pi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) \\ \tilde{H}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

haciendo uso de la regla de Cramer; para  $\tilde{H}(\omega)$  obtenemos

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{1 \cdot \overline{G(\omega + \pi)} - 0 \cdot \overline{H(\omega + \pi)}}{\det \overline{M(\omega)}} = \frac{\overline{G(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)}, \quad (2.40)$$

donde  $\Delta(\omega) = \det M(\omega)$ . Análogamente para la segunda columna del sistema (2.39)

$$\begin{bmatrix} \overline{H(\omega)} & \overline{H(\omega + \pi)} \\ \overline{G(\omega)} & \overline{G(\omega + \pi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}(\omega) \\ \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

se tiene

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{0 \cdot \overline{G(\omega + \pi)} - 1 \cdot \overline{H(\omega + \pi)}}{\det \overline{M(\omega)}} = -\frac{\overline{H(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)}. \quad (2.41)$$

En resumen, (2.40) y (2.41) son

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{\overline{G(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)}, \quad \tilde{G}(\omega) = -\frac{\overline{H(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)}. \quad (2.42)$$

Como la inversa de una matriz es única, a partir de la relación (2.38)

$$\tilde{M}(\omega)\overline{M(\omega)}^T = I,$$

se obtiene

$$\overline{M(\omega)}^T \tilde{M}(\omega) = I;$$

al desarrollar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \overline{H(\omega)} & \overline{G(\omega)} \\ \overline{H(\omega + \pi)} & \overline{G(\omega + \pi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega + \pi) \\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o bien

$$\begin{aligned} \overline{H(\omega)}\tilde{H}(\omega) + \overline{G(\omega)}\tilde{G}(\omega) &= 1, \\ \overline{H(\omega)}\tilde{H}(\omega + \pi) + \overline{G(\omega)}\tilde{G}(\omega + \pi) &= 0, \\ \overline{H(\omega + \pi)}\tilde{H}(\omega) + \overline{G(\omega + \pi)}\tilde{G}(\omega) &= 0, \\ \overline{H(\omega + \pi)}\tilde{H}(\omega + \pi) + \overline{G(\omega + \pi)}\tilde{G}(\omega + \pi) &= 1. \end{aligned}$$

Una vez que se definen los filtros pasa bajas  $H$  y  $\tilde{H}$  se pueden definir después los filtros pasa altas  $G$  y  $\tilde{G}$  mediante la relación  $\Delta(\omega) = e^{-i\omega}$ .

### 2.7.5. Funciones duales y filtros

A partir de la primera relación de (2.30) se comprobará (2.33). Se tiene que  $\varphi(t)$  y  $\tilde{\varphi}(t)$  son funciones de escalamiento duales, es decir,

$$\langle \varphi(\cdot - l), \tilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - l)\tilde{\varphi}(t - k) dt = \delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces se cumple

$$\tilde{H}(\omega)\overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi)\overline{H(\omega + \pi)} = 1,$$

o bien

$$\tilde{H}(z)\overline{H(z)} + \tilde{H}(-z)\overline{H(-z)} = 1.$$

Para ver la comprobación (Chui, 1992a, teorema 5.22), veamos el desarrollo siguiente

$$\begin{aligned}
\delta_{n,0} &= \langle \varphi, \tilde{\varphi}(\cdot - n) \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\tilde{\varphi}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\tilde{\varphi}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega + 2\pi k) \overline{\tilde{\varphi}(\omega + 2\pi k)} \right) e^{in\omega} d\omega,
\end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la relación siguiente

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega + 2\pi k) \overline{\tilde{\varphi}(\omega + 2\pi k)} = 1,$$

casi en todas partes. Por otro lado, y usando la relación anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\delta_{n,0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\tilde{\varphi}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (H(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2)) \overline{(\tilde{H}(\omega/2) \tilde{\varphi}(\omega/2))} e^{in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega/2) \overline{\tilde{H}(\omega/2)} \hat{\varphi}(\omega/2) \overline{\tilde{\varphi}(\omega/2)} e^{in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ H\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{\tilde{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \overline{\tilde{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right)} \right. \\
&\quad \left. + H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \overline{\tilde{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \overline{\tilde{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right)} \right] e^{in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \overline{\tilde{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} + H\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{\tilde{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right] e^{in\omega} d\omega,
\end{aligned}$$

como  $H$  y  $\tilde{H}$  son continuas y sustituyendo  $\omega/2$  por  $\omega$  se tiene (2.33)

$$\tilde{H}(\omega) \overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} = 1.$$

### 2.7.6. Momentos que se anulan

Los momentos de una ondícula son

$$N_p = \int t^p \psi(t) dt, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Se sabe, por la relación (2.27), que si la función de escalamiento reproduce cualquier polinomio de grado menor que  $N$  entonces  $H(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = \pi$ .

De la ecuación (2.42),  $\tilde{G}(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = 0$  y como  $\tilde{\psi}(0) = 1$ , entonces  $\tilde{\psi}(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = 0$ ; luego  $\tilde{\psi}$  tiene  $N$  momentos que se anulan.

Análogamente, si la función de escalamiento dual reproduce polinomios de grado menor que  $N$  entonces  $\psi$  tiene  $N$  momentos que se anulan.

## 2.8. Transformada ondicular discreta

El dominio de la transformada ondicular  $Wf(\lambda, t)$  es  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Este dominio se puede restringir a un subconjunto discreto. La opción más común es tomar

$$\lambda = 2^{-k}, \quad t = \lambda n, \quad \text{donde } (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Las ondículas discretas

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{-k/2} \psi(2^{-k}t - n),$$

se parametrizan por un par de enteros:  $k, n$ .

### 2.8.1. Transformada ondicular como transformación lineal

La transformada ondicular se aplica en el dominio del tiempo continuo (funciones) o en el dominio del tiempo discreto (señales o vectores). Para funciones y señales infinitas la base de ondículas es infinita, pero para señales con  $L$  componentes la base consta de  $L$  vectores y hay  $L$  coeficientes.

La transformada de una señal con  $L$  componentes que produce  $L$  coeficientes ondiculares se representa por una matriz  $L$  por  $L$ . Sin embargo, los

coeficientes se pueden calcular de una forma más eficiente que la multiplicación matricial: el cálculo de forma eficiente de la transformada ondicular discreta se conoce como la transformada ondicular rápida.

Las relaciones entre una función y una base ortonormal se expresan por las relaciones siguientes

1. análisis de una función:

$$b_{k,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{k,n}(t) dt, \quad (2.43)$$

2. síntesis de una función:

$$f(t) = \sum_{k,n} b_{k,n} \psi_{k,n}(t). \quad (2.44)$$

En el caso de señales finitas estas relaciones son transformaciones lineales de vectores de dimension  $L$  representadas por matrices de orden  $L$  por  $L$

1. análisis en tiempo discreto:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.45)$$

2. síntesis en tiempo discreto:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{b}. \quad (2.46)$$

### 2.8.2. Transformada ondicular rápida

Para hablar del algoritmo rápido se redefinirá el algoritmo piramidal que se bosquejó en la Figura 1.2. La Figura 2.10 representará este proceso mediante una pirámide. La señal de entrada consta de ocho elementos

$$\mathbf{a}_3 = (a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, a_{37}).$$

Para los renglones siguientes

$$\mathbf{a}_2 = (a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}),$$

$$\mathbf{b}_2 = (b_{20}, b_{21}, b_{22}, b_{23}),$$

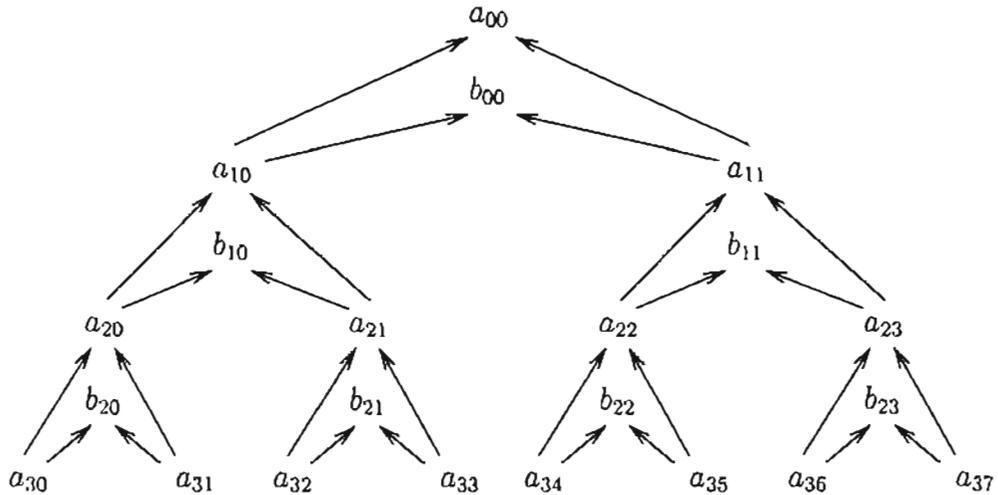


Figura 2.10: Algoritmo piramidal.

se calculan los términos  $a_{jk}$  como los promedios y  $b_{kj}$  como las diferencias de los renglones inferiores en la forma siguiente:

$$a_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,2k} + a_{j,2k+1}), \quad (2.47)$$

$$b_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,2k} - a_{j,2k+1}). \quad (2.48)$$

El factor  $1/\sqrt{2}$  sirve para repartir la energía de la señal original a las dos señales de salida. En términos vectoriales la norma de la señal de entrada es la suma de las normas de las de salida. Por ejemplo:

$$\|\mathbf{a}_3\| = \|\mathbf{a}_2\| + \|\mathbf{b}_2\|.$$

En este caso se usan los filtros de Haar: el filtro pasa bajas de promedios

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

o bien escrito como  $H(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iw}$  (o incluso  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ) y el filtro pasa altas de diferencias

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

o bien  $G(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iw}$  (o  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ).

Para una señal con cuatro elementos la primera aplicación de los filtros de Haar pasa bajas  $H$  y pasa altas  $G$  se escribe como

$$\begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

en donde  $r = 1/\sqrt{2}$ . Mientras que la aplicación de un segundo paso se escribe de la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ b_{00} \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Sustituyendo (2.49) en (2.50) tenemos

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ b_{00} \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ b_{00} \\ b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & r^2 & r^2 & r^2 \\ r^2 & r^2 & -r^2 & -r^2 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

Es de observar que los promedios quedan en la la parte inicial del vector mientras que las diferencias quedan al final.

Si se define como  $A$  a la matriz de la ecuación (2.52) tenemos, por la ecuación (2.51), la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} r^2 & r^2 & r^2 & r^2 \\ r^2 & r^2 & -r^2 & -r^2 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \\ r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -r \end{bmatrix}.$$

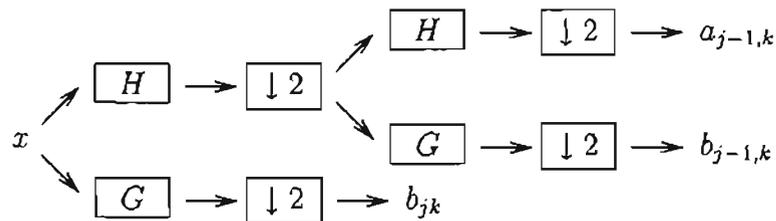
Esta matriz se puede representar mediante las submatrices  $L$  y  $B$  como sigue

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} L & \\ \hline B & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} L \\ \hline B \\ B \end{array} \right].$$

El algoritmo de transformada ondicular rápida explota la estructura dispersa de estas matrices que proviene del algoritmo piramidal. Una propiedad importante es que  $A$  es ortogonal, es decir, la inversa coincide con la transpuesta

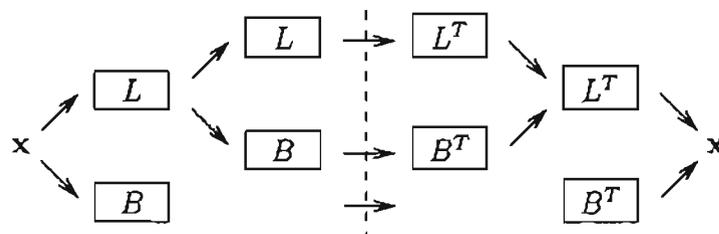
$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} r^2 & r^2 & r & 0 \\ r^2 & r^2 & -r & 0 \\ r^2 & -r^2 & 0 & r \\ r^2 & -r^2 & r & -r \end{bmatrix}.$$

Se presenta el siguiente esquema, de forma más general, en donde  $H$  representa al filtro pasa bajas y  $G$  al filtro pasa altas.



El símbolo  $\downarrow 2$  representa una decimación: de un arreglo de  $2n$  elementos se toman  $n$  de ellos alternadamente.

A continuación se da un esquema mediante el cual se puede transformar una señal en donde se consideran las submatrices  $L$  y  $B$ ; en ese mismo esquema se observa que la señal se puede reconstruir.



En la parte intermedia del este esquema se puede realizar distintos procedimientos, por ejemplo, para suavizar la señal mediante la anulación de algunos coeficientes.

Hemos visto el algoritmo empleando filtros ortogonales. La Figura 2.11 presenta el algoritmo piramidal usando filtros biortogonales, en donde se considera a  $\tilde{h}$  como el filtro pasa bajas de análisis,  $\tilde{g}$  el filtro pasa altas de análisis, a  $h$  el filtro pasa bajas de síntesis y a  $g$  el filtro pasa altas de síntesis.

En este desarrollo se han aplicado los filtros de Haar, (2.47) y (2.48), que tienen dos coeficientes, pero recordemos que existen filtros con más coeficientes. Sea un filtro con  $T$  coeficientes, la transformada ondicular rápida calcula los  $M = 2^J$  coeficientes  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  en menos de  $2TM$  multiplicaciones. Una comparación del algoritmo de transformada ondicular rápida (FWT, fast wavelet transform) con el de transformada rápida de Fourier (FFT, fast Fourier transform), es que FWT es asintóticamente más rápido que FFT, pues FFT requiere  $\mathcal{O}(M \ln M)$  pasos mientras que FWT requiere  $\mathcal{O}(M)$  pasos (Strang y Nguyen, 1996, pág. 29).

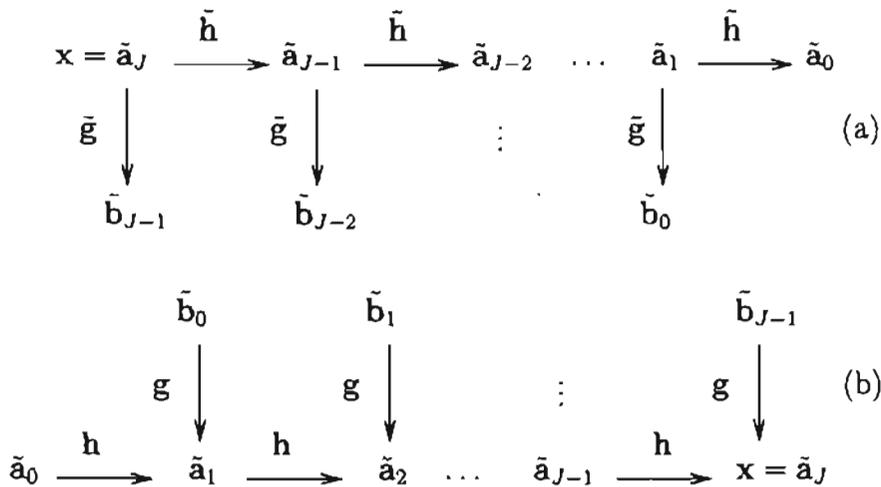


Figura 2.11: Algoritmo piramidal para la transformada ondicular (a) directa e (b) inversa.

### 2.8.3. Aplicación

En la Figura 2.12a se presenta un registro sónico de un pozo. El eje horizontal está relacionado con la profundidad y el vertical con el recíproco de la velocidad en  $\mu\text{seg}/\text{pie}$ . Para ese registro, la Figura 2.12b muestra los coeficientes ondiculares empleando la ondícula de Haar. La Figura 2.12c muestra la señal proyectada sobre los espacios de las funciones de escalamiento a distintas escalas, es decir, los espacios  $V_j$ . Es de señalar que se ha usado la numeración asociada a la definición de análisis multirresolutivo (sección 2.7). Finalmente, en la Figura 2.12d se observan las componentes ondiculares a distintas escalas: son las proyecciones sobre los espacios  $W_j$ .

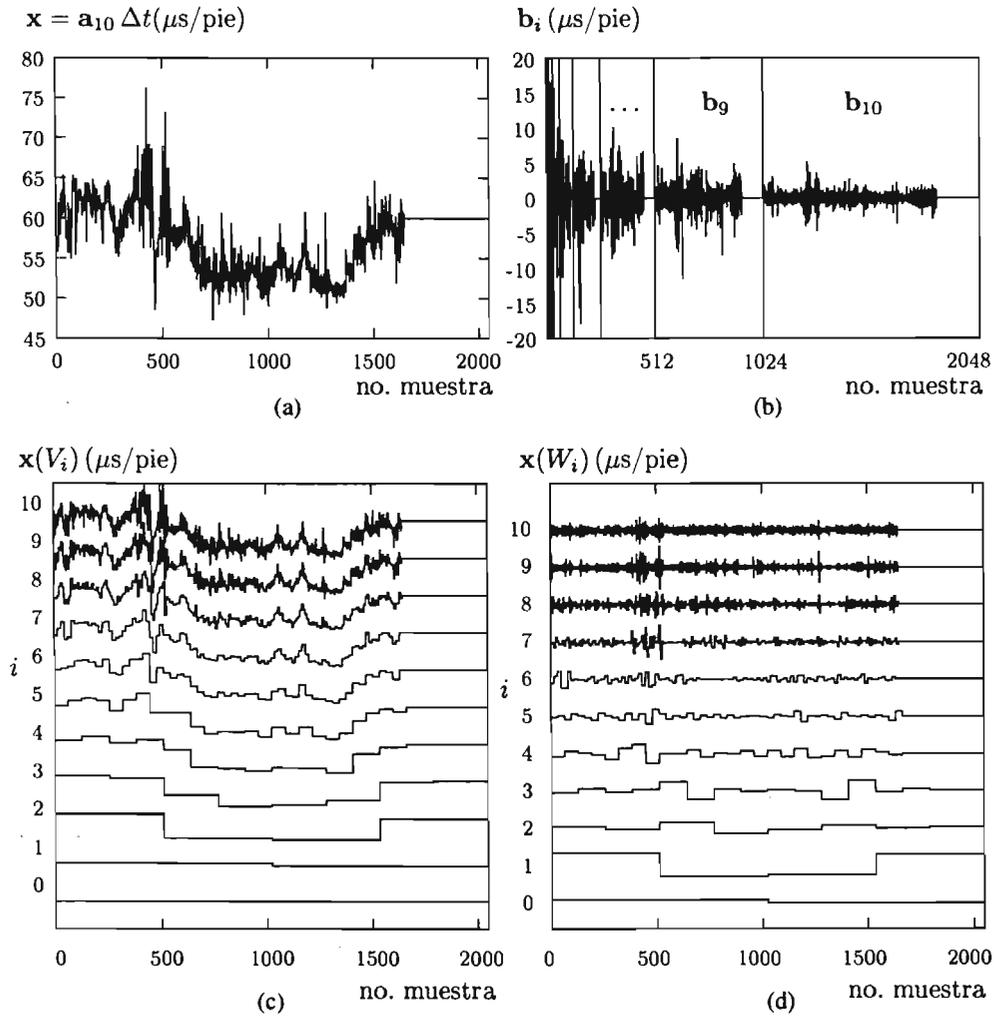


Figura 2.12: Análisis multirresolutivo de un registro sónico de pozo. (a) El registro sónico de pozo. (b) Coeficientes ondiculares del registro usando los filtros de Haar. Las proyecciones de esta señal sobre los espacios (c)  $V_j$  y (d)  $W_j$  para la escala  $i = 10, 9, \dots, 0$ .



# Capítulo 3

## Diagonalización de operadores

### 3.1. Introducción

A continuación se presentan las bases del método de diagonalización en bases biortogonales de operadores lineales homogéneos debido a Ekstedt y Lindberg (1997).

En una base ondicular biortogonal tenemos la ondícula  $\psi$  y su dual  $\tilde{\psi}$  tal que cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se puede expresar

$$f = \sum_{j,l} \langle f, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l}.$$

Queremos expresar  $Kf$  en esta base, para  $K$  un operador lineal. Los operadores considerados son de convolución

$$Kf = k * f, \quad \text{o bien} \quad \widehat{Kf}(\omega) = \widehat{K}(\omega) \widehat{f}(\omega),$$

que preservan características de una ondícula. Si  $K^*$  es el operador adjunto de  $K$  (ver definición (A.3))

$$Kf = \sum_{j,l} \langle Kf, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l} = \sum_{j,l} \langle f, K^* \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l}.$$

Se trata de calcular los coeficientes  $\langle f, K^* \tilde{\psi}_{j,l} \rangle$  de forma rápida y numéricamente estable mediante el análisis de  $f$  en una nueva base biortogonal. La nueva base usa

$$\tilde{\psi}^K = K^* \tilde{\psi}, \quad \psi^K = K^{-1} \psi,$$

en el dominio de Fourier

$$\widehat{\psi^K}(\omega) = \overline{\widehat{k}(\omega)} \widehat{\psi}(\omega), \quad \widehat{\psi^K}(\omega) = \frac{1}{\widehat{k}(\omega)} \widehat{\psi}(\omega).$$

La meta es hallar una condición sobre el operador  $K$  tal que

$$K^* \tilde{\psi}_{j,l} = \bar{\kappa}_j \tilde{\psi}_{j,l}^K,$$

para cierta constante  $\kappa_j$  dependiente de la escala, pues así se simplifica el cálculo

$$\langle f, K^* \tilde{\psi}_{j,l} \rangle = \kappa_j \langle f, \tilde{\psi}_{j,l}^K \rangle.$$

La constante  $\kappa_j$  es independiente de  $l$  pues  $K^*$  es invariante bajo traslaciones. Debemos ver que  $K^*$  sea invariante bajo dilataciones diádicas, salvo la constante  $\kappa_j$ . Se define el operador de dilatación diádico  $D$  como

$$D_j f(t) = 2^{j/2} f(2^j t) \quad \text{o} \quad \widehat{D_j f}(\omega) = 2^{-j/2} \widehat{f}(2^{-j} \omega).$$

La invarianza de dilatación de  $K^*$  significa que

$$K^* D_j f = \bar{\kappa}_j D_j K^* f,$$

o

$$\overline{\widehat{k}(\omega)} 2^{-j/2} \widehat{f}(2^{-j} \omega) = \bar{\kappa}_j 2^{-j/2} \overline{\widehat{k}(2^{-j} \omega)} \widehat{f}(2^{-j} \omega).$$

De ahí llegamos a la condición sobre  $K$ : las distintas constantes  $\kappa_j$  no dependen de  $\omega$

$$\kappa_j = \frac{\widehat{k}(\omega)}{\widehat{k}(2^{-j} \omega)} \quad \text{sea constante.} \quad (3.1)$$

Los operadores que cumplen (3.1) les denominamos operadores lineales homogéneos.

Definamos  $\kappa$  como  $\kappa_1$ ,  $\kappa = \kappa_1$ . Comprobaremos que cada  $\kappa_j$  es una potencia de  $\kappa$ :

$$\kappa_j = \kappa^j. \quad (3.2)$$

Para la comprobación de la relación (3.2) procedemos por inducción matemática. Para  $j = 1$  tenemos por definición

$$\kappa_1 = \kappa = \kappa^1.$$

Supongamos que se cumple  $\kappa_j = \kappa^j$ , el paso de inducción, y veamos que se cumple la relación para  $j + 1$

$$\begin{aligned}\kappa_{j+1} &= \frac{\widehat{k}(\omega)}{\widehat{k}(2^{-(j+1)}\omega)} = \frac{\widehat{k}(\omega)}{\widehat{k}(2^{-j}\omega)} \frac{\widehat{k}(2^{-j}\omega)}{\widehat{k}(2^{-(j+1)}\omega)} \\ &= \kappa_j \frac{\widehat{k}(2^{-j}\omega)}{\widehat{k}(2^{-1}2^{-j}\omega)} = \kappa_j \frac{\widehat{k}(\omega_1)}{\widehat{k}(2^{-1}\omega_1)} = \kappa^j \kappa_1 = \kappa^j \kappa^1 = \kappa^{j+1},\end{aligned}$$

donde  $\omega_1 = 2^{-j}\omega$  y se usó la ecuación (3.1), lo que comprueba la relación (3.2).

También se concluye que  $\psi^K$  y  $\tilde{\psi}$  son biortogonales.

### 3.2. Operadores lineales homogéneos

Ejemplos de operadores que cumplen (3.1) son los siguientes:

1. Derivación e integración

$$\widehat{k}(\omega) = (i\omega)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \kappa = 2^\alpha. \quad (3.3)$$

2. Derivación vertical o potencial de Riesz

$$\widehat{k}(\omega) = |\omega|^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \kappa = 2^\alpha. \quad (3.4)$$

3. Transformada de Hilbert

$$\widehat{k}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega), \quad \kappa = 1. \quad (3.5)$$

De hecho esta lista es exhaustiva.

### 3.3. El nuevo análisis multirresolutivo

Se necesitan las nuevas funciones de escalamiento. Es natural proponer

$$\widehat{\varphi}^K(\omega) = \overline{\widehat{l}(\omega)} \widehat{\varphi}(\omega), \quad \widehat{\varphi}^K(\omega) = \frac{1}{\widehat{l}(\omega)} \widehat{\varphi}(\omega),$$

donde  $\widehat{l}$  es una función desconocida.

La biortogonalidad de las funciones de escalamiento implica la biortogonalidad de las nuevas funciones de escalamiento  $\varphi^K$  y  $\tilde{\varphi}^K$

$$\langle \tilde{\varphi}^K, \varphi^K(\cdot - l) \rangle = \langle \tilde{\varphi}, \varphi(\cdot - l) \rangle = \delta_l,$$

pues

$$\langle \tilde{\varphi}^K, \varphi^K(\cdot - l) \rangle = \langle K^* \tilde{\varphi}, K^{-1} \varphi(\cdot - l) \rangle = \langle \tilde{\varphi}, K K^{-1} \varphi(\cdot - l) \rangle.$$

Las funciones de escalamiento deben ser biortogonales a las ondículas

$$\langle \tilde{\varphi}^K, \psi^K(\cdot - l) \rangle = \langle \tilde{\psi}^K, \varphi^K(\cdot - l) \rangle = 0,$$

que expresado en las funciones filtro es

$$\tilde{H}^K(\omega) \overline{G^K(\omega)} + \tilde{H}^K(\omega + \pi) \overline{G^K(\omega + \pi)} = 0,$$

$$\tilde{G}^K(\omega) \overline{H^K(\omega)} + \tilde{G}^K(\omega + \pi) \overline{H^K(\omega + \pi)} = 0.$$

Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega) &= \overline{\widehat{l}(\omega)} \widehat{\tilde{\varphi}}(\omega) \\ &= \overline{\widehat{l}(\omega)} \tilde{H}(\omega/2) \widehat{\tilde{\varphi}}(\omega/2) \\ &= \overline{\widehat{l}(\omega)} \tilde{H}(\omega/2) \left[ \widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega/2) / \overline{\widehat{l}(\omega/2)} \right], \end{aligned}$$

luego

$$\widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega) = \frac{\overline{\widehat{l}(\omega)}}{\widehat{l}(\omega/2)} \tilde{H}(\omega/2) \widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega/2), \quad (3.6)$$

de (2.18) aplicada a  $\tilde{\varphi}^K$  (en vez de  $\varphi$ ) tenemos

$$\widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega) = \tilde{H}^K(\omega/2) \widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega/2). \quad (3.7)$$

De las ecuaciones (3.6) y (3.7)

$$\widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega) = \frac{\overline{\widehat{l}(\omega)}}{\widehat{l}(\omega/2)} \tilde{H}(\omega/2) \widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega/2) = \tilde{H}^K(\omega/2) \widehat{\tilde{\varphi}^K}(\omega/2),$$

luego

$$\tilde{H}^K(\omega) = \frac{\overline{\widehat{l}(2\omega)}}{\widehat{l}(\omega)} \tilde{H}(\omega). \quad (3.8)$$

Asimismo

$$H^K(\omega) = \frac{\widehat{l}(\omega)}{\widehat{l}(2\omega)} H(\omega), \quad (3.9)$$

como lo muestra el cálculo siguiente

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}^K(\omega) &= \frac{1}{\widehat{l}(\omega)} \widehat{\varphi}(\omega) \\ &= \frac{1}{\widehat{l}(\omega)} H(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2) \\ &= \frac{1}{\widehat{l}(\omega)} H(\omega/2) \widehat{\varphi}^K(\omega/2) \widehat{l}(\omega/2) \\ &= \frac{\widehat{l}(\omega/2)}{\widehat{l}(\omega)} H(\omega/2) \widehat{\varphi}^K(\omega/2) \\ &= H^K(\omega/2) \widehat{\varphi}^K(\omega/2). \end{aligned}$$

De forma similar

$$\widetilde{G}^K(\omega) = \frac{\overline{\widehat{k}(2\omega)}}{\widehat{l}(\omega)} \widetilde{G}(\omega), \quad (3.10)$$

pues

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^K(\omega) &= \overline{\widehat{k}(\omega)} \widehat{\varphi}(\omega) \\ &= \overline{\widehat{k}(\omega)} \widetilde{G}(\omega/2) \widehat{\psi}(\omega/2) \\ &= \overline{\widehat{k}(\omega)} \widetilde{G}(\omega/2) \left[ \widehat{\psi}^K(\omega/2) / \widehat{l}(\omega/2) \right] \\ &= \frac{\overline{\widehat{k}(\omega)}}{\widehat{l}(\omega/2)} \widetilde{G}(\omega/2) \widehat{\psi}^K(\omega/2) \\ &= \widetilde{G}^K(\omega/2) \widehat{\psi}^K(\omega/2). \end{aligned}$$

Y finalmente

$$G^K(\omega) = \frac{\widehat{l}(\omega)}{\widehat{k}(2\omega)} G(\omega), \quad (3.11)$$

por que

$$\widehat{\psi}^K(\omega) = \frac{1}{\widehat{k}(\omega)} \widehat{\psi}(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\widehat{k}(\omega)} G(\omega/2) \widehat{\psi}(\omega/2) \\
&= \frac{1}{\widehat{k}(\omega)} G(\omega/2) \left[ \widehat{\psi}^K(\omega/2) \widehat{l}(\omega/2) \right] \\
&= \frac{\widehat{l}(\omega/2)}{\widehat{k}(\omega)} G(\omega/2) \widehat{\psi}^K(\omega/2) \\
&= G^K(\omega/2) \widehat{\psi}^K(\omega/2).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) definen los nuevos filtros con base en los filtros originales.

La biortogonalidad entre  $\tilde{\varphi}^K$  y  $\psi^K$  implica

$$\frac{\widehat{l}(2\omega)}{\widehat{k}(2\omega)} = \frac{\widehat{l}(2\omega + 2\pi)}{\widehat{k}(2\omega + 2\pi)},$$

así que  $\widehat{l}(\omega)$  debe ser elegida de forma que

$$m(\omega) = \frac{\widehat{k}(\omega)}{\widehat{l}(\omega)} \quad \text{sea } 2\pi\text{-periódica.}$$

Se debe cumplir que

$$\frac{m(\omega)}{\widehat{k}(\omega)} \rightarrow 1, \quad \text{cuando } \omega \rightarrow 0.$$

Una forma de hacer cumplir esto es considerar

$$m(\omega) = \widehat{k}(-i(e^{i\omega} - 1)),$$

ya que  $-i(e^{i\omega} - 1) = \omega + o(\omega)$  cuando  $\omega \rightarrow 0$ . Si se escribe la serie de Fourier de  $m(\omega)$

$$m(\omega) = \sum_l m_l e^{-il\omega},$$

tenemos

$$K^* \tilde{\varphi}(t) = \sum_l \overline{m_l} \tilde{\varphi}^K(t + l).$$

### 3.4. El algoritmo de diagonalización

En esta sección se resume la teoría desarrollada antes y se muestra el algoritmo para obtener  $\mathbf{Kx}$ : el operador  $\mathbf{K}$  aplicado a la señal  $\mathbf{x}$ .

El método propuesto por Ekstedt y Lindberg (1997) empieza con un conjunto de filtros biortogonales  $\tilde{\mathbf{h}}, \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g}$ . A partir de estos filtros se construye un nuevo conjunto de filtros biortogonales  $\tilde{\mathbf{h}}^K, \mathbf{h}^K, \tilde{\mathbf{g}}^K, \mathbf{g}^K$ . Esta construcción se realiza de manera que un múltiplo escalar de los coeficientes de detalle de la señal  $\mathbf{x}$  producidos mediante el análisis con la nueva base sean iguales a los correspondientes coeficientes de detalle de  $\mathbf{Kx}$  en la base original

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{Kx}) = \kappa \tilde{\mathbf{B}}^K \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

en donde  $\tilde{\mathbf{B}}$  (respectivamente  $\tilde{\mathbf{B}}^K$ ) es la matriz correspondiente a los filtros pasa altas de análisis  $\tilde{\mathbf{g}}$  (respectivamente  $\tilde{\mathbf{g}}^K$ ).

En el dominio de Fourier el nuevo filtro pasa altas de análisis es

$$\tilde{H}^K(\omega) = \frac{\overline{\kappa \hat{k}(1)}}{\hat{k}(e^{i\omega} + 1)} \tilde{H}(\omega), \quad (3.13)$$

el nuevo filtro pasa bajas de síntesis es

$$H^K(\omega) = \frac{\hat{k}(e^{i\omega} + 1)}{\kappa \hat{k}(1)} H(\omega), \quad (3.14)$$

el nuevo filtro pasa altas de análisis es

$$\tilde{G}^K(\omega) = \overline{\kappa \hat{k}(-i(e^{i\omega} - 1))} \tilde{G}(\omega), \quad (3.15)$$

y el nuevo filtro pasa altas de síntesis es

$$G^K(\omega) = \frac{1}{\kappa \hat{k}(-i(e^{i\omega} - 1))} G(\omega). \quad (3.16)$$

La señal  $\mathbf{x}$  se analiza en la nueva base para obtener

$$[\tilde{a}_{jmin}^t, \tilde{b}_{jmin}^t, \tilde{b}_{jmin-1}^t, \dots, \tilde{b}_{j-1}^t]^t, \quad (3.17)$$

es decir,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad (3.18)$$

en donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de análisis. Aplicamos el operador diagonalizado a  $\mathbf{y}$  para obtener  $\mathbf{y}^K$ , formado por los coeficientes de  $\mathbf{Kx}$  en la base ondicular original:

$$\mathbf{y}^K = \mathbf{K}_\omega \mathbf{y}, \quad (3.19)$$

en donde  $\mathbf{K}_\omega$  es el operador en el dominio ondicular el cual actúa sobre los coeficientes como

$$\tilde{\mathbf{b}}_j^K = \kappa^{J-j} \tilde{\mathbf{b}}_j, \quad (3.20)$$

y

$$\tilde{\mathbf{a}}_{jmin}^K = \kappa^{J-jmin} (\mathbf{m} * \tilde{\mathbf{a}}_{jmin}). \quad (3.21)$$

El filtro  $\mathbf{m}$  se obtiene calculando la transformada inversa de Fourier de  $\hat{m}(\omega)$ :

$$m(\omega) = \sum_l m(l) e^{-il\omega} = \hat{k}(-i(e^{i\omega} - 1)). \quad (3.22)$$

Como paso final, calculamos  $\mathbf{Kx}$  mediante la aplicación de los filtros de síntesis originales:

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{S} \mathbf{y}^K, \quad (3.23)$$

en donde  $\mathbf{S}$  es la matriz de síntesis. Este algoritmo se ilustra en la Figura 3.1.

Se observa un paralelismo entre este proceso y el que se aplica con la transformada de Fourier para este tipo de operadores: transformada directa, multiplicación (o convolución) y transformada inversa.

### 3.4.1. Derivación

Se presenta una aplicación del método de diagonalización ondicular del operador de derivación (3.3) con el fin de calcular una derivada horizontal. Se obtuvo la primera derivada horizontal de un perfil gravimétrico considerado en Campos-Enríquez et al. (2004) (Figura 3.2a). El perfil gravimétrico atraviesa con una dirección E-W, la parte oriental del cráter de impacto de Chicxulub en Yucatán. El primer gradiente corresponde a la zona de terrazas. El anillo de cenotes corresponde aproximadamente al siguiente gradiente.

El cálculo de la derivada horizontal mediante el método ondicular se muestra en la Figura 3.2b. En este proceso se anularon varios coeficientes correspondientes a altas frecuencias para obtener una versión suavizada de la derivada.

Con el propósito de comparar con otro método se calculó la derivada de dicho perfil usando el método numérico de cinco puntos (Figura 3.2c). Dicho

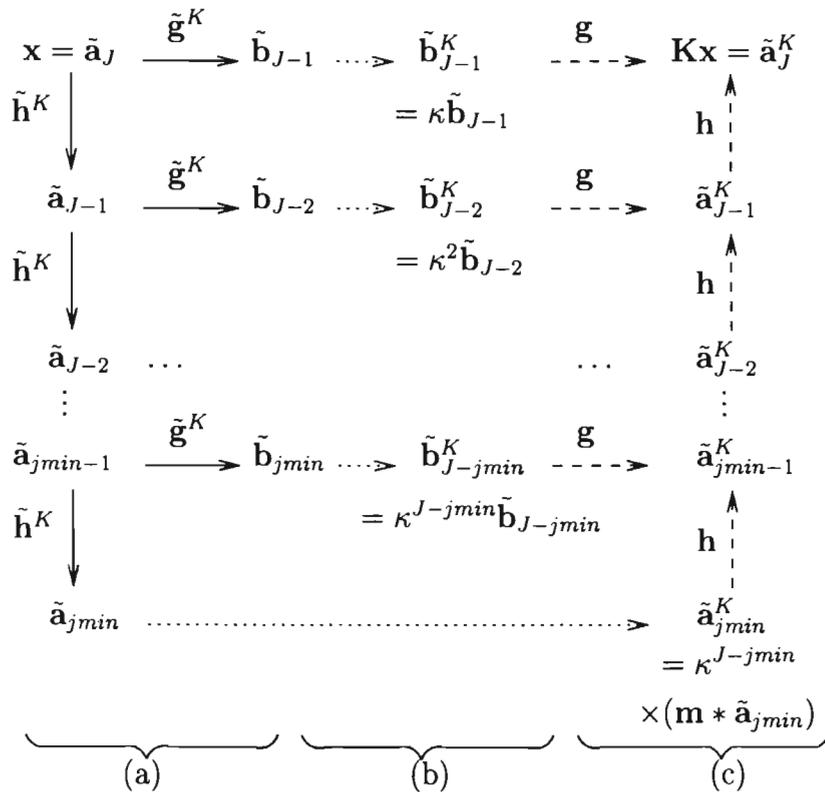


Figura 3.1: Algoritmo de diagonalización ondicular. Entrada:  $x$ . Salida:  $Kx$ .  
 (a) Transformada ondicular discreta usando los nuevos filtros  $\tilde{h}^K$  y  $\tilde{g}^K$  (flechas sólidas).  
 (b) Multiplicaciones y una convolución (flechas con puntos).  
 (c) Transformada ondicular discreta usando los filtros originales de síntesis  $h$  y  $g$  (flechas segmentadas).

método aproxima la derivada de una función  $f(t)$  en  $t = t_0$  mediante la relación

$$f'(t_0) \approx \frac{1}{12h} [f(t_0 - 2h) - 8f(t_0 - h) + 8f(t_0 + h) - f(t_0 + 2h)],$$

con un error proporcional a  $h^4$  (Burden y Faires, 1998).

La derivada se puede calcular usando la transformada de Fourier al considerar la relación siguiente:

$$f'(t) = \mathcal{F}^{-1}(i\omega \mathcal{F}f(t)),$$

ver, por ejemplo, Solnes (1992). La Figura 3.2d muestra el resultado respectivo.

Observamos que el suavizado logrado con el método ondicular no puede conseguirse de manera tan adecuada con técnicas de Fourier. Por ejemplo, en el intervalo de 0 a 10 km se observa que la derivada con el método ondicular toma un valor máximo de 0.5, aproximadamente, que concuerda más con la gráfica de los datos. En cambio los otros dos métodos producen una derivada con valores de 2 o mayores.

En el perfil se señalan con flechas los lugares en donde la derivada horizontal tiene valores elevados. Vemos en efecto que los tres métodos usados nos indican máximos de la primera derivada horizontal. Sin embargo, las derivadas obtenidas con la transformada de Fourier (FFT) y con el método de cinco puntos están muy contaminadas de ruido. Por ejemplo, el fuerte gradiente gravimétrico entre los 5 y 10 km es bastante suave sin embargo estos dos métodos no lo representan así. Debido a esta ventaja de las derivadas obtenidas por medio de la transformada ondicular, el método de diagonalización se ha empezado a usar en el cálculo de derivadas verticales por medio de la expresión (3.4).

Una aplicación más general se da en el cálculo de la señal analítica de primero y segundo orden (Ridsdill-Smith y Dentith, 1999). Con la puesta a punto del algoritmo de diagonalización ondicular se tienen los elementos para desarrollar sistemas de cómputo para obtener la señal analítica de datos magnéticos (y gravimétricos) contaminados de mucho ruido.

### 3.4.2. Operador de Hilbert

Para la transformada de Hilbert tenemos

$$\widehat{K}f(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) \widehat{f}(\omega), \quad (3.24)$$

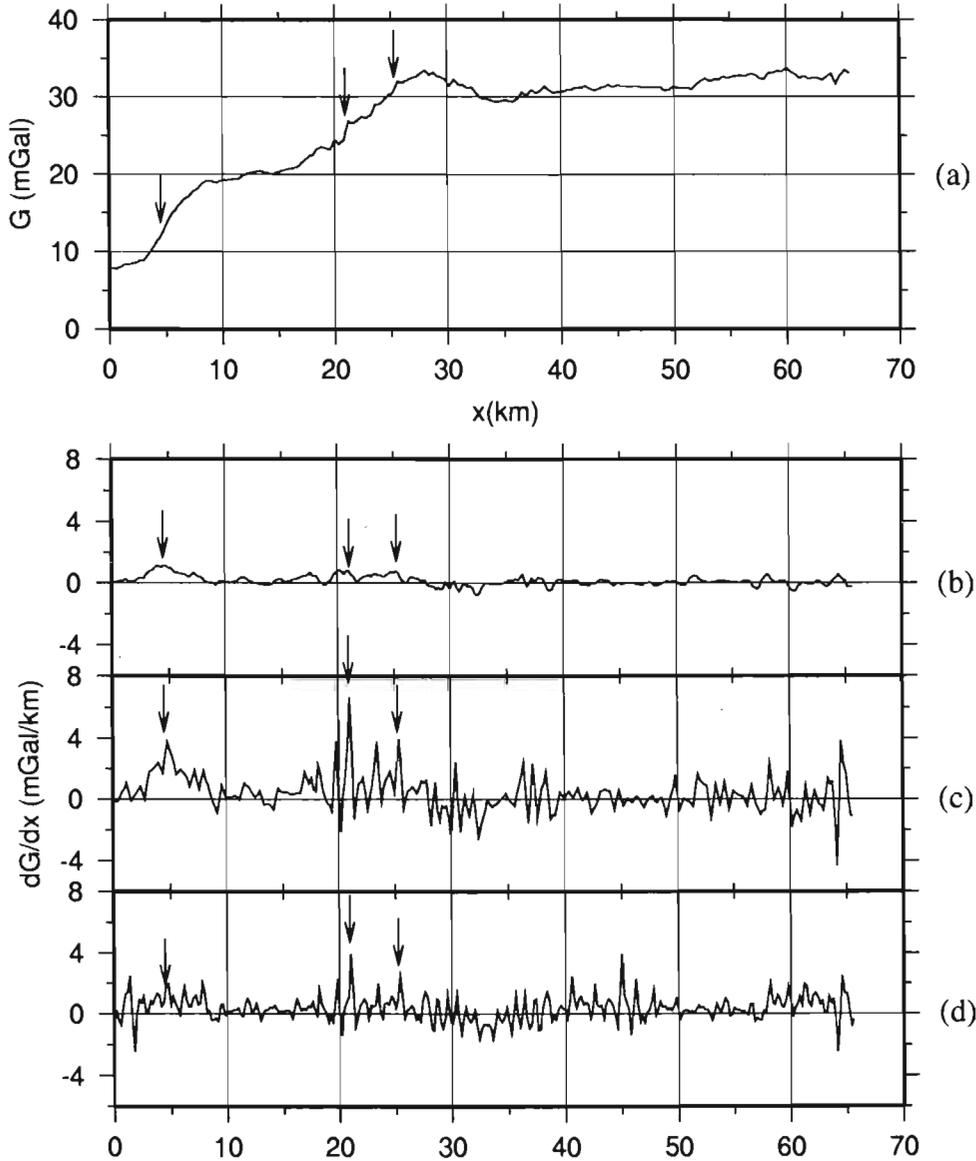


Figura 3.2: (a) Un perfil gravimétrico (Campos-Enríquez et al., 2004). (b) Derivada del perfil mediante transformada ondicular con eliminación de frecuencias altas. (c) Derivada del perfil mediante el método de cinco puntos. (d) Derivada mediante transformada de Fourier.

según la ecuación (3.5). Como  $\widehat{k}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) = -i\omega/|\omega|$  se tiene

$$m(\omega) = -\frac{e^{-i\omega} - 1}{|e^{-i\omega} - 1|}.$$

Considerando las ondículas y funciones de escalamiento correspondientes a la factorización 6/10 de los filtros semibanda con máximo aplanamiento de Daubechies (Strang y Nguyen, 1996)[pág. 126] (Figura 3.3) y el operador de Hilbert obtenemos las nuevas ondículas y funciones de escalamiento mostradas en las Figura 3.4. Estas funciones y filtros son similares a los obtenidos por Ekstedt y Lindberg (1997).

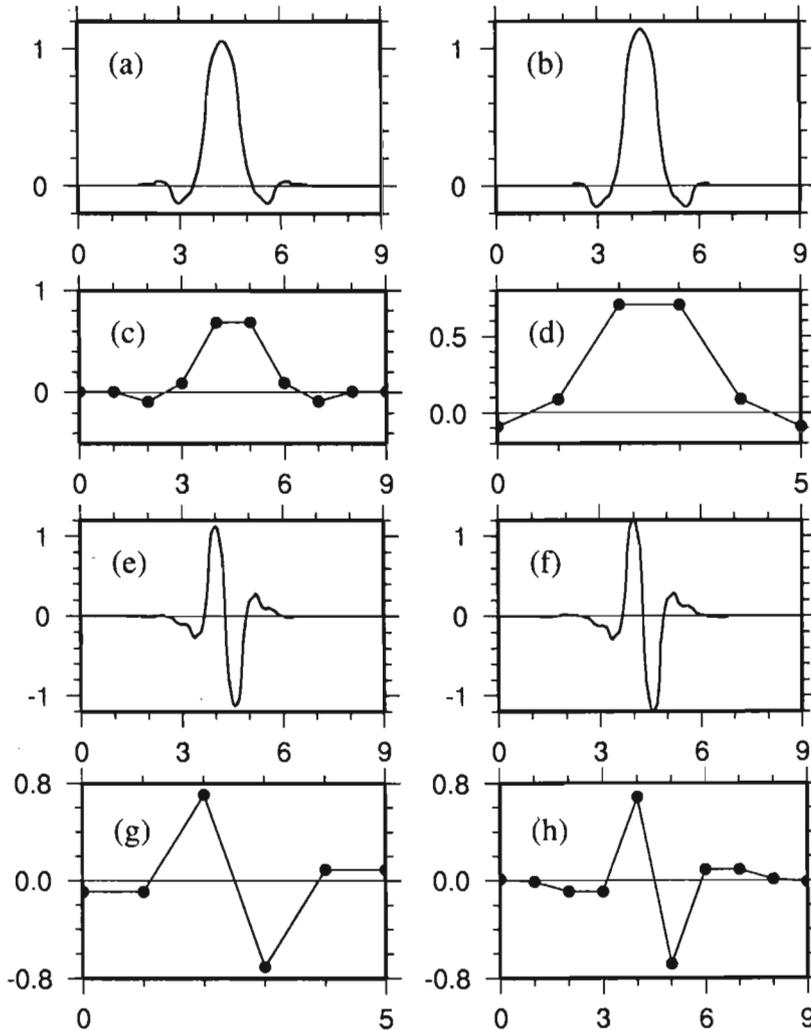


Figura 3.3: Base ondicular biortogonal correspondiente a la factorización 10/6 de los filtros semibanda de Daubechies de máximo aplanamiento (maxflat Daubechies halfband filters). (a) Función de escalamiento de análisis  $\tilde{\varphi}$ . (b) Función de escalamiento de síntesis  $\varphi$ . (c) Filtro pasa bajas de análisis  $\tilde{\mathbf{h}} = [1, 1, -8, 8, 62, 62, 8, -8, 1, 1]/128$ . (d) Filtro pasa bajas de síntesis  $\mathbf{h} = [-1, 1, 8, 8, 1, -1]/16$ . (e) Ondícula de análisis  $\tilde{\psi}$ . (f) Ondícula de síntesis  $\psi$ . (g) Filtro pasa altas de análisis  $\tilde{\mathbf{g}} = [-1, -1, 8, -8, 1, 1]/16$ . (h) Filtro pasa altas de síntesis  $\mathbf{g} = [1, -1, -8, -8, 62, -62, 8, 8, 1, -1]/128$ .

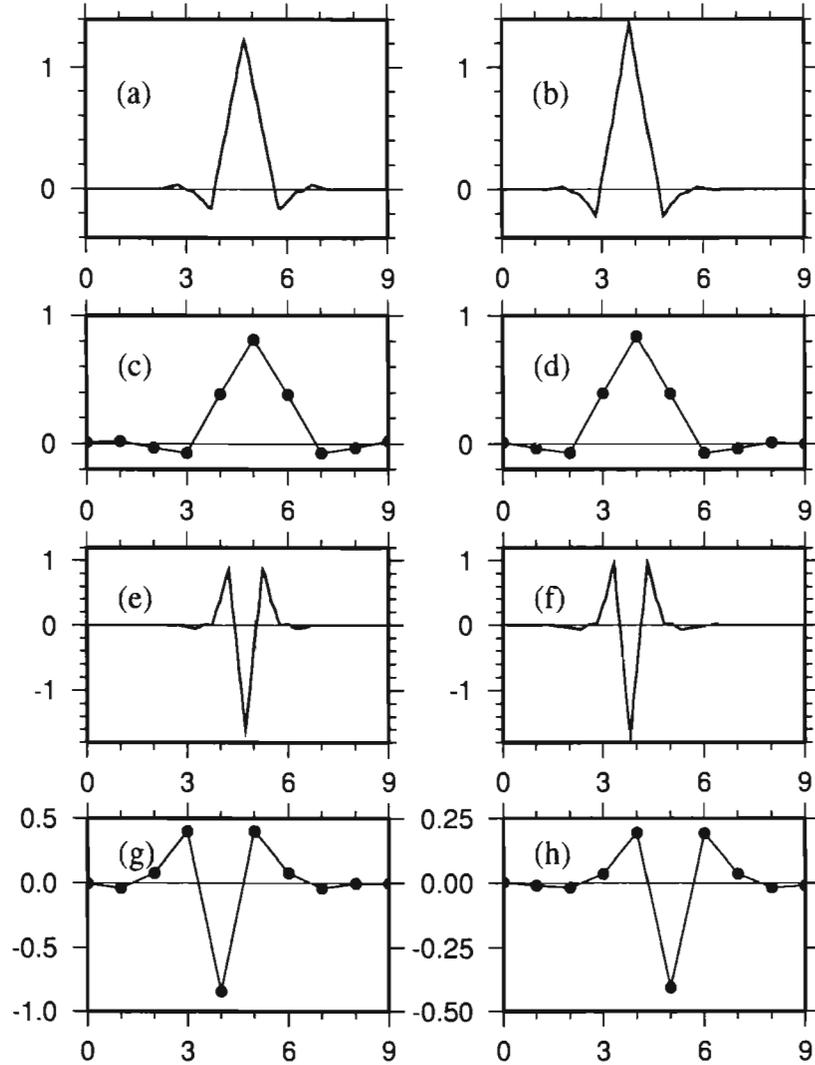


Figura 3.4: Nueva base ondicular biortogonal correspondiente al operador de Hilbert para la base de la Figura 3.3. (a) Función de escalamiento de análisis  $\tilde{\varphi}^K$ . (b) Función de escalamiento de síntesis  $\varphi^K$ . (c) Filtro pasa bajas de análisis  $\mathbf{h}^K$ . (d) Filtro pasa bajas de síntesis  $\mathbf{h}^K$ . (e) Ondícula de análisis  $\tilde{\psi}^K$ . (f) Ondícula de síntesis  $\psi^K$ . (g) Filtro pasa altas de análisis  $\tilde{\mathbf{g}}^K$ . (h) Filtro pasa altas de síntesis  $\mathbf{g}^K$ .

# Capítulo 4

## Atributos sísmicos

### 4.1. Introducción

Los atributos sísmicos se obtienen directamente de los datos sísmicos y se usan en interpretación. Los atributos son valiosos pues nos ayudan a escudriñar los datos y extraer información sísmica que de otra forma continuaría oculta. Los atributos han llegado a tener gran popularidad con el advenimiento de las prospecciones 3D. La tecnología de atributos ayuda en la exploración, caracterización y monitoreo de yacimientos de hidrocarburos.

Los atributos son una parte de los estudios exploratorios junto con los estudios petrofísicos y el modelado sísmico. Toda esta información es necesaria para tener certidumbre en que los parámetros calculados del yacimiento correspondan con las observaciones. Por esta razón las técnicas de inversión son cada vez más importantes.

Los primeros atributos estudiados fueron la amplitud instantánea, llamada también amplitud envolvente, la fase instantánea y la frecuencia instantánea (Taner y Sheriff, 1977; Taner et al., 1979). Estos atributos ayudan a delimitar cambios en el comportamiento espectral a lo largo de una sección sísmica. La amplitud envolvente representa una medida de la magnitud de la reflexión.

Debido a que el contenido de la información sísmica es increíblemente rica en términos de amplitud, frecuencia y geometría, se han propuesto muchos atributos en la década pasada. En la revisión de Chen y Sidney (1997) se mencionan más de 60 atributos. Para obtener buenos resultados es importante seleccionar el atributo más adecuado al problema que se investiga.

Una clasificación de los atributos se basa en la amplitud, frecuencia y la atenuación (Brown, 1996; Brown, 2001). Los atributos de amplitud son de los más robustos y útiles, pero los atributos de frecuencia pueden revelar detalles adicionales de las capas geológicas.

En la clasificación mencionada también se considera si los atributos se calculan antes o después de apilar. Los atributos calculados después de apilar constituyen la mayoría, en tanto que los atributos calculados antes de apilar se relacionan con las variaciones de amplitud respecto al desplazamiento (AVO: amplitude versus offset).

Los atributos híbridos combinan la amplitud y la frecuencia. Se aplican a problemas de estratigrafía y propiedades de yacimientos.

Los atributos de ventana usan valores de muestra, por ejemplo de intervalos de 2 a 4 ms. Esos valores son sumados o promediados para dar un atributo global; también se puede seleccionar un valor de atributo único o bien una distribución o tendencia del valor del atributo a lo largo de una ventana de cálculo.

Otros atributos se calculan en las fronteras geológicas o entre ellas: son los atributos de eventos (Chen y Sidney, 1997). Otros más emplean varias trazas: son los atributos multitraza. Los atributos de volumen pueden generar correlaciones entre distintos cubos.

Algunos atributos se han empleado a pesar de que las relaciones físicas entre las propiedades de los yacimientos y los atributos no se han establecido con precisión. Esos atributos se han empleado en procesos sofisticados y existen técnicas que utilizan atributos múltiples, llamados meta-atributos, los cuales se relacionan más estrechamente con la geología o las propiedades petrofísicas. Esto implica la posibilidad de calibrar con registros de pozo.

Algunos atributos ayudan a realizar el mapeo de fallas (Rooij y Tingdahl, 2002) o en la clasificación de facies sísmicas (West et al., 2002). Otros atributos se relacionan con la atenuación (Valle-García y Ramírez-Cruz, 2002).

La tecnología de los atributos se ha consolidado de forma tal que puede predecir propiedades petrofísicas, como la porosidad, la litología o los espesores de los yacimientos.

## 4.2. Atributos instantáneos

Los atributos instantáneos son algunos de los más básicos y sencillos. Son la amplitud, fase y frecuencia instantáneos. La amplitud envolvente  $A$  para una señal  $x(n)$  está dada como sigue

$$A(n) = \sqrt{x(n)^2 + (\mathcal{H}x)(n)^2}, \quad (4.1)$$

la fase  $\theta$  es

$$\theta(n) = \tan^{-1} \left( \frac{(\mathcal{H}x)(n)}{x(n)} \right), \quad (4.2)$$

y la frecuencia  $f$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn} \theta(n). \quad (4.3)$$

En la práctica la frecuencia se calcula como una aproximación numéricamente estable de la expresión (4.3). Estos atributos están basados en la transformada de Hilbert  $\mathcal{H}x$ . La transformada lleva el nombre en honor al matemático alemán David Hilbert (1862-1943). Dada una señal  $x$ , la transformada de Hilbert de  $x$ ,  $\mathcal{H}x$ , es una señal que está desplazada  $90^\circ$  en fase, de manera tal que  $x + i\mathcal{H}x$  es una señal analítica (Taner y Sheriff, 1977; Taner et al., 1979; Claerbout, 1992). También se conoce a  $\mathcal{H}x$  como la cuadratura de  $x$ . En la Figura 4.1 se presenta un diagrama a bloques del procedimiento de cálculo y en la Figura 4.2 se muestra un ejemplo de una señal, su cuadratura y la señal compleja.

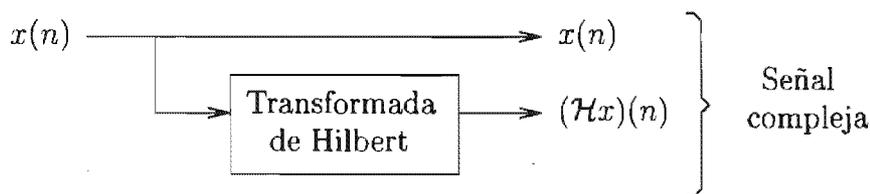


Figura 4.1: Esquema a bloques de la construcción de una señal compleja a partir de una señal real.

La transformada de Hilbert se calcula numéricamente mediante la transformada de Fourier, haciendo cero la amplitud para frecuencias negativas,

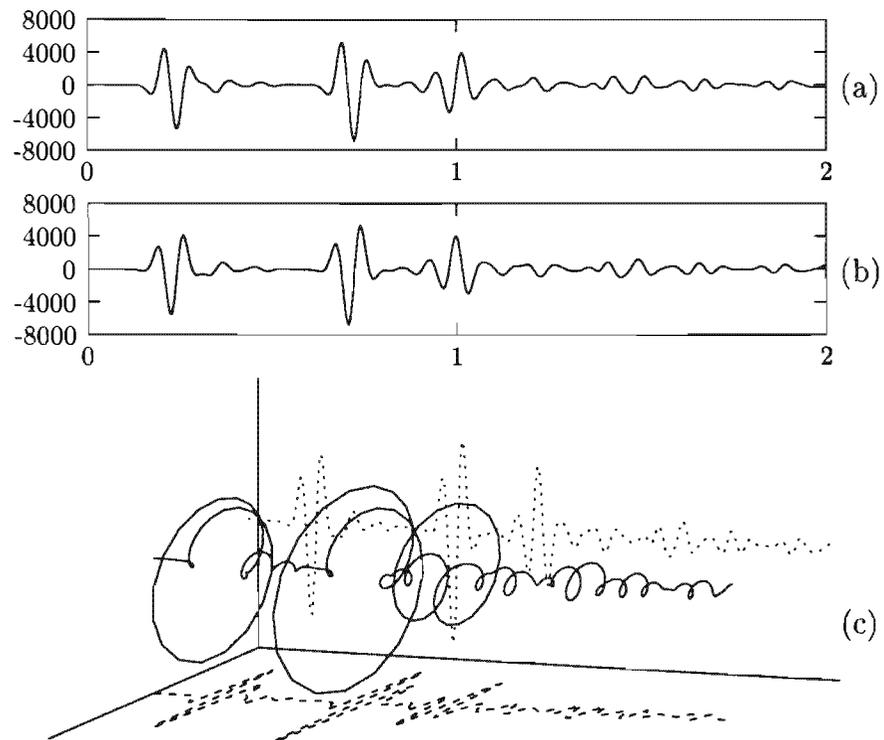


Figura 4.2: (a) Señal real. (b) Transformada de Hilbert de la señal. (c) Señal analítica constuida con las dos anteriores (Taner y Sheriff, 1977).

multiplicando por 2 las frecuencias positivas y al final se toma la transformada de Fourier inversa.

Otro método consiste en realizar una convolución con el filtro que representa el impulso correspondiente al operador de Hilbert definido por la ecuación (3.5)

$$\widehat{\mathcal{H}}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -i, & \text{si } 0 < \omega < \pi, \\ i, & \text{si } -\pi < \omega < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Al considerar la transformada inversa de Fourier de la fórmula (4.4) obtenemos la respuesta al impulso de la transformada de Hilbert:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 i e^{i\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} i e^{i\omega n} d\omega,$$

o bien

$$h(n) = \begin{cases} (\pi n/2)^{-1} \operatorname{sen}(\pi n/2), & \text{si } n \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

(Oppenheim y Schafer, 1989). Para obtener un filtro de respuesta finita se considera una ventana de Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos 2\pi n/M, & \text{si } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La Figura 4.3 muestra el filtro para  $M = 16$ ; tiene longitud  $M + 1 = 17$ .

En este trabajo se procede a calcular la transformada de Hilbert mediante la técnica que hemos desarrollado para diagonalizar el operador de Hilbert usando la transformada ondicular (Figura 3.1). Una vez hecho esto se calculan los atributos sísmicos instantáneos.

También se puede calcular la frecuencia con el mismo método debido a que el operador de derivación también es homogéneo (Ridsdill-Smith y Dentith, 1999).

### 4.3. Aplicación del algoritmo

El proceso para calcular los atributos sísmicos con el método de diagonalización de operadores se efectúa traza por traza (Figura 3.1). Para calcular la transformada de Hilbert se aplica a cada traza el algoritmo piramidal usando los nuevos filtros pasa bajas y pasa altas. Después se realiza la multiplicación

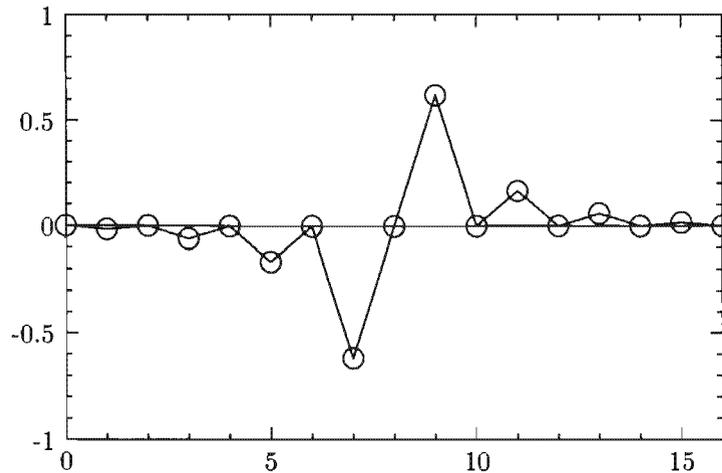


Figura 4.3: Filtro discreto de Hilbert utilizando una ventana de Hamming.

de una potencia del escalar  $\kappa$  a los coeficientes ondulares (3.20); los coeficientes correspondientes a la función de escalamiento se les convoluciona con el filtro  $m(\omega)$  (3.22) y luego se les multiplica por una potencia de  $\kappa$  (3.21). Al final se encuentra la transformada de Hilbert de la señal al aplicar los filtros originales pasa bajas y pasa altas de reconstrucción.

Una vez que se tiene la cuadratura o transformada de Hilbert de la señal se tiene la señal analítica. Para obtener los atributos sísmicos instantáneos se procede de la manera convencional.

Se desarrolló un programa basado en el algoritmo de diagonalización de la transformada de Hilbert. Este programa se construyó utilizando parte del código del sistema SU para poder tener acceso a la información en el formato SEG-Y. Se utilizó también parte de la biblioteca WVLT para tener acceso a las rutinas de análisis y síntesis ondicular. Se incluyeron en el programa los filtros biortogonales de la Figuras 3.3 y 3.4.

La biblioteca WVLT (Imager Wavelet Library) (Lewis, 1995) es un software libre creado por R. Lewis y está disponible en la dirección electrónica <http://www.cs.unc.ca/nest/imager/contributions/bobl/top.html>. Esta biblioteca implementa la transformada ondicular discreta en lenguaje C. La ventaja que tiene es que está hecha realmente como biblioteca y fue factible ligarla a programas basados en SU, Seismic Unix (Cohen y Stockwell, 2003).

Por otra parte, el código fuente del sistema SU está disponible en la internet. En su manual explica como generar otros programas similares a SU.

El algoritmo de diagonalización se construyó de manera similar al código del programa fuente SUATTRIBUTES.

También es de mencionar el código de Ridsdill-Smith que se puede obtener en <http://wavelet.freesevers.com>. Este código fue desarrollado en MATLAB para su tesis (Ridsdill-Smith, 2000) y es de bastante utilidad para entender como se puede implementar el algoritmo.

#### 4.4. Aplicación a un modelo sintético

En una primer fase el método se aplicó a un modelo sintético. Se consideró el modelo del anticlinal mencionado en Henry (1997). En la parte superior del modelo se tiene arcilla representando una capa impermeable. Luego se tiene arena con distintos fluidos: gas, aceite y agua. Abajo de la arena hay arcilla. En esta referencia no se mencionan las dimensiones del modelo así que para este estudio el modelo se digitizó de la publicación mencionada y se asignaron dimensiones convenientes. Este modelo se ilustra en la Figura 4.5 en donde también se definen las velocidades en los diferentes medios definidas en la referencia.

Una vez digitizado el modelo se preparó de manera adecuada para la entrada al programa TRISEIS de Seismic Unix (SU) (Cohen y Stockwell, 2003). De esta forma se obtuvo un sismograma sintético de offset zero. La sección se muestra en la Figura 4.6a graficada como ondas (formato wiggle) y también como imagen en la Figura 4.6b. La respuesta sísmica es la esperada: se presenta una reflexión grande en la frontera de la arcilla y la arena con gas debido al contraste de impedancias. Podemos observar también reflexiones nítidas, si bien de menor intensidad, asociadas con las interfaces entre la arcilla y la arena con agua, a ambos lados del anticlinal. El paquete de arena con aceite se asocia con una reflexión de intensidad intermedia a las asociadas con las interfaces arcilla-arena con gas y arcilla-arena con agua. Parece ser la continuación, dentro de las reflexiones propias del anticlinal, de la reflexión asociada a la interface superior del estrato de arena con agua. Sin embargo, presenta una polaridad opuesta. De hecho las polaridades al pasar de un medio de mayor contraste a otro de menor y viceversa son opuestas: por ejemplo, en la cima del estrato de arena con gas y en su base.

Los atributos instantáneos se calcularon con los dos métodos. Primero se utilizó el método tradicional para calcular la amplitud, la fase y la frecuencia instantáneas (Figuras 4.7a, 4.8a y 4.9a, repectivamente). En esta parte se

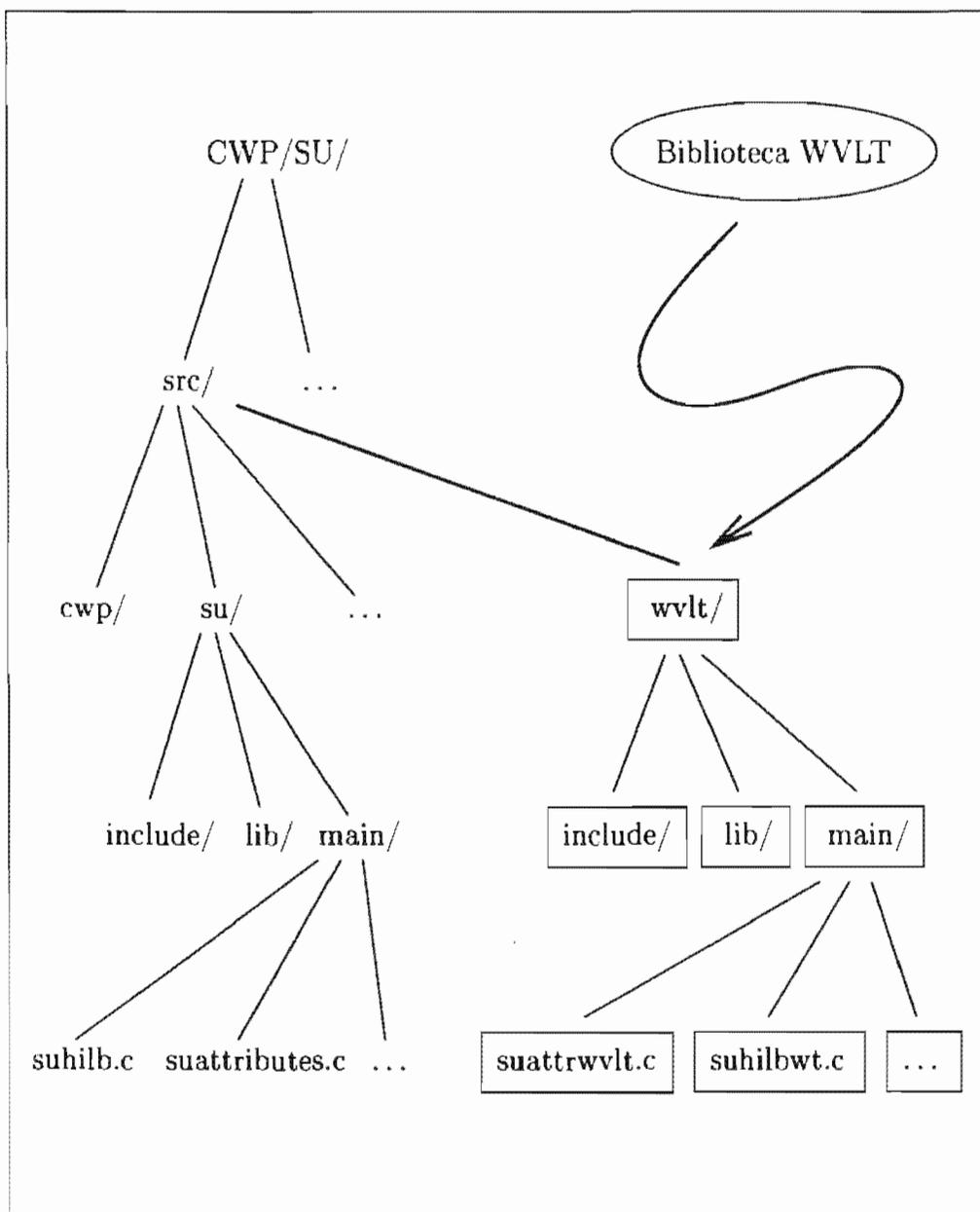


Figura 4.4: Organización en la que se implementó el algoritmo. Al sistema CWP/SU se le agregó la biblioteca WVLT modificada. Los nombres con diagonal al final representan directorios. Los nombres en recuadro representan los directorios o programas elaborados para implementar la técnica aquí expuesta. Hay muchos directorios y archivos que no se presentan y están señalados por puntos suspensivos.

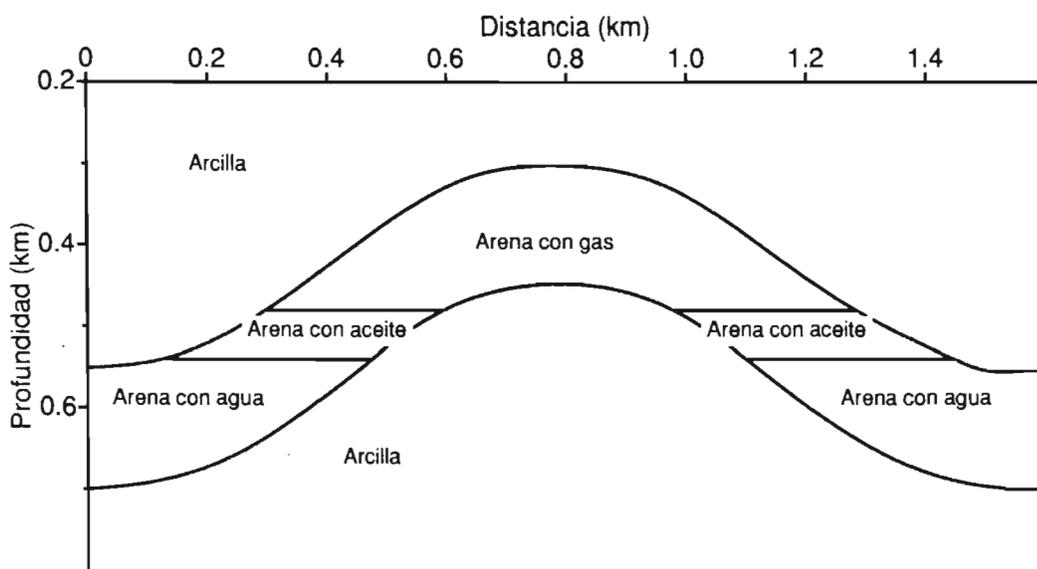


Figura 4.5: Modelo anticlinal de yacimiento en arenas (Henry, 1997); velocidades: arcilla 2440 m/s, arena con gas 1375 m/s, arena con aceite 2090 m/s, arena con agua 2370 m/s.

usó el programa SUATTRIBUTES de SU. El segundo método es el método de diagonalización ondicular de la transformada de Hilbert; los resultados se muestran en las Figuras 4.7b, 4.8b y 4.9b. Para ello se empleó el programa desarrollado para esta tesis. Los atributos obtenidos con uno y otro método han sido graficados con los mismos parámetros para facilitar su comparación.

Al comparar las amplitudes (Figures 4.7a y 4.7b), las fases (Figures 4.8a y 4.8b) y las frecuencias instantáneas (Figures 4.9a y 4.9b), se observa que los resultados obtenidos con el método ondicular son prácticamente los mismos que los obtenidos con el método tradicional. Sin embargo se observan diferencias muy interesantes. Los cambios de polaridad se definen mejor en la envolvente de amplitud obtenida con base en la transformada ondicular. Esto es más patente en las reflexiones horizontales asociadas con las interfaces del estrato con arena y agua.

En el caso de la fase instantánea, por afuera de las reflexiones principales, se tiene ruido. Sin embargo, la estructura de este ruido es diferente. En la fase instantánea obtenida con el método tradicional, el ruido parece tener menor intensidad y estar caracterizado por una mayor longitud de onda. Con la diagonalización ondicular, el ruido parece ser de menor magnitud y estar caracterizado por altas frecuencias. Los dos métodos son altamente sensibles a la estructura de las reflexiones, en particular a las polaridades de las reflexiones. La diferencia en este aspecto es mínimo y a favor de los resultados obtenidos con la transformada ondicular.

Para el caso de la frecuencia instantánea, el método de diagonalización ondicular es más sensible a la estructura de las reflexiones. Las polaridades de éstas no son resueltas con el método tradicional, y si lo son con el método de diagonalización ondicular. Cabe hacer notar que en la reflexión de la interface de arcilla-arena con gas, esta resolución se degrada en los extremos de la reflexión de la cima. La relación entre el ruido de uno y otro método es similar al caso de la fase instantánea.

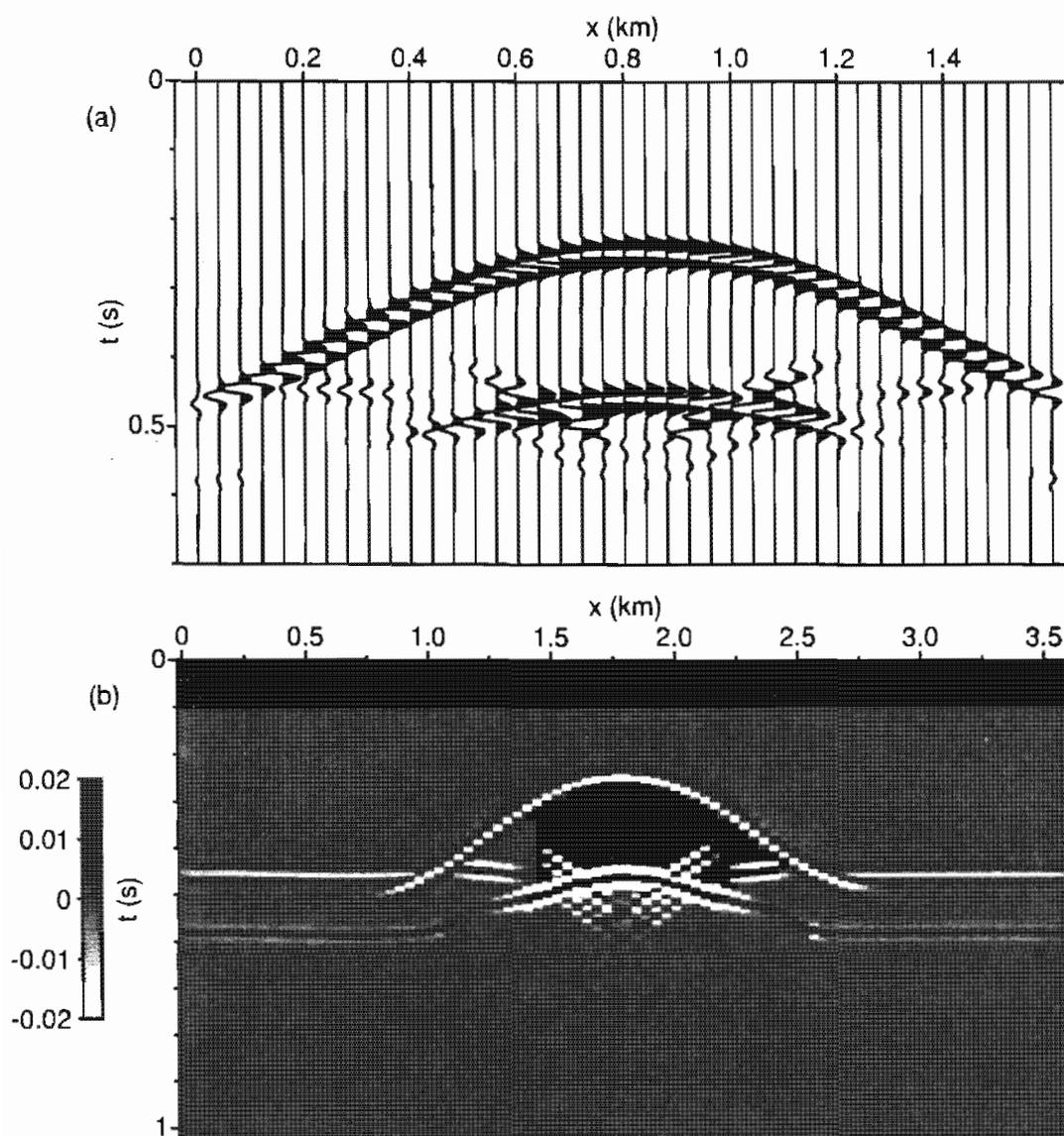


Figura 4.6: (a) Parte de la sección sísmica sintética como ondas. (b) La sección sintética como imagen.

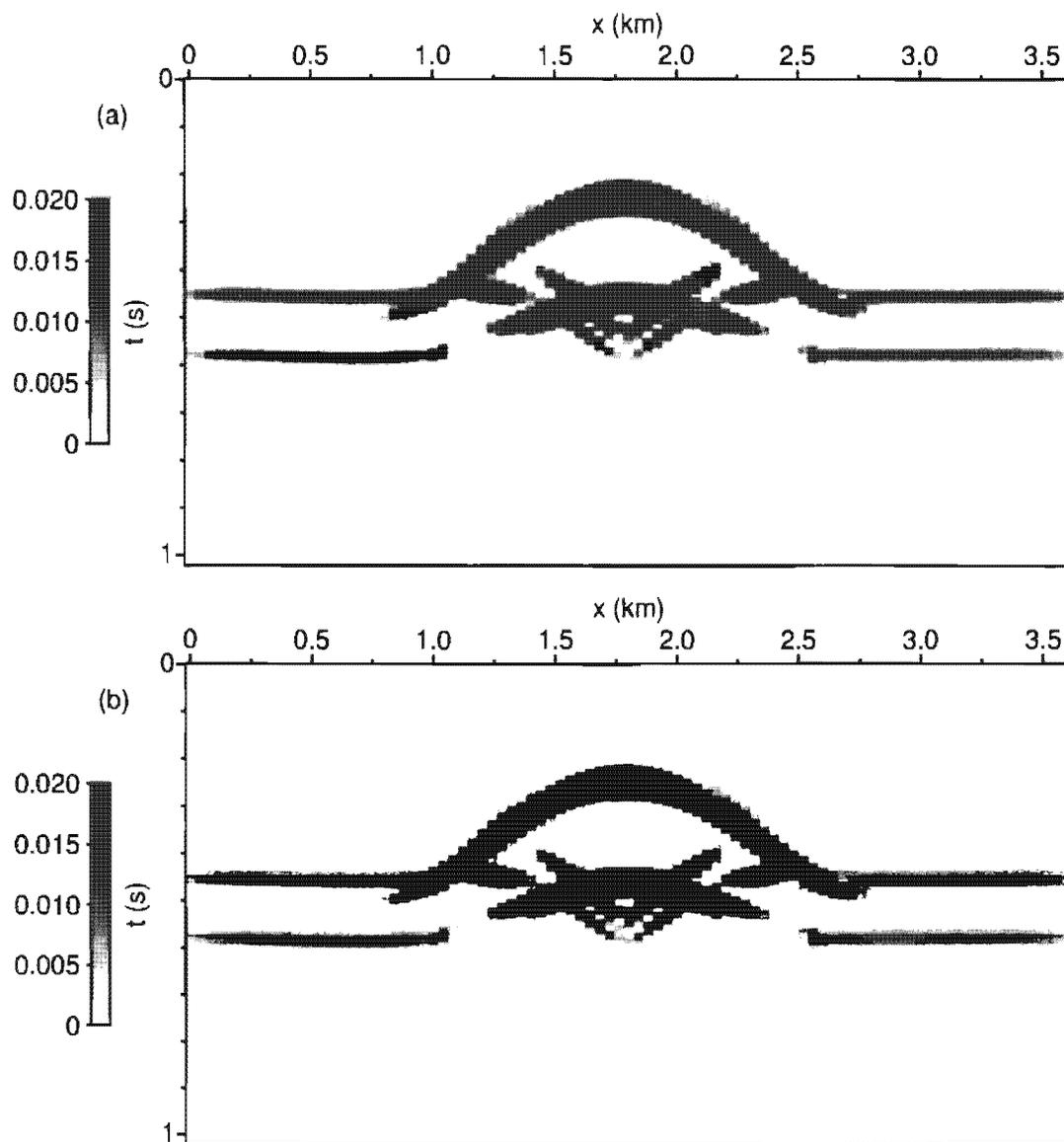


Figura 4.7: Envolvente de amplitud de la sección sísmica sintética (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular.

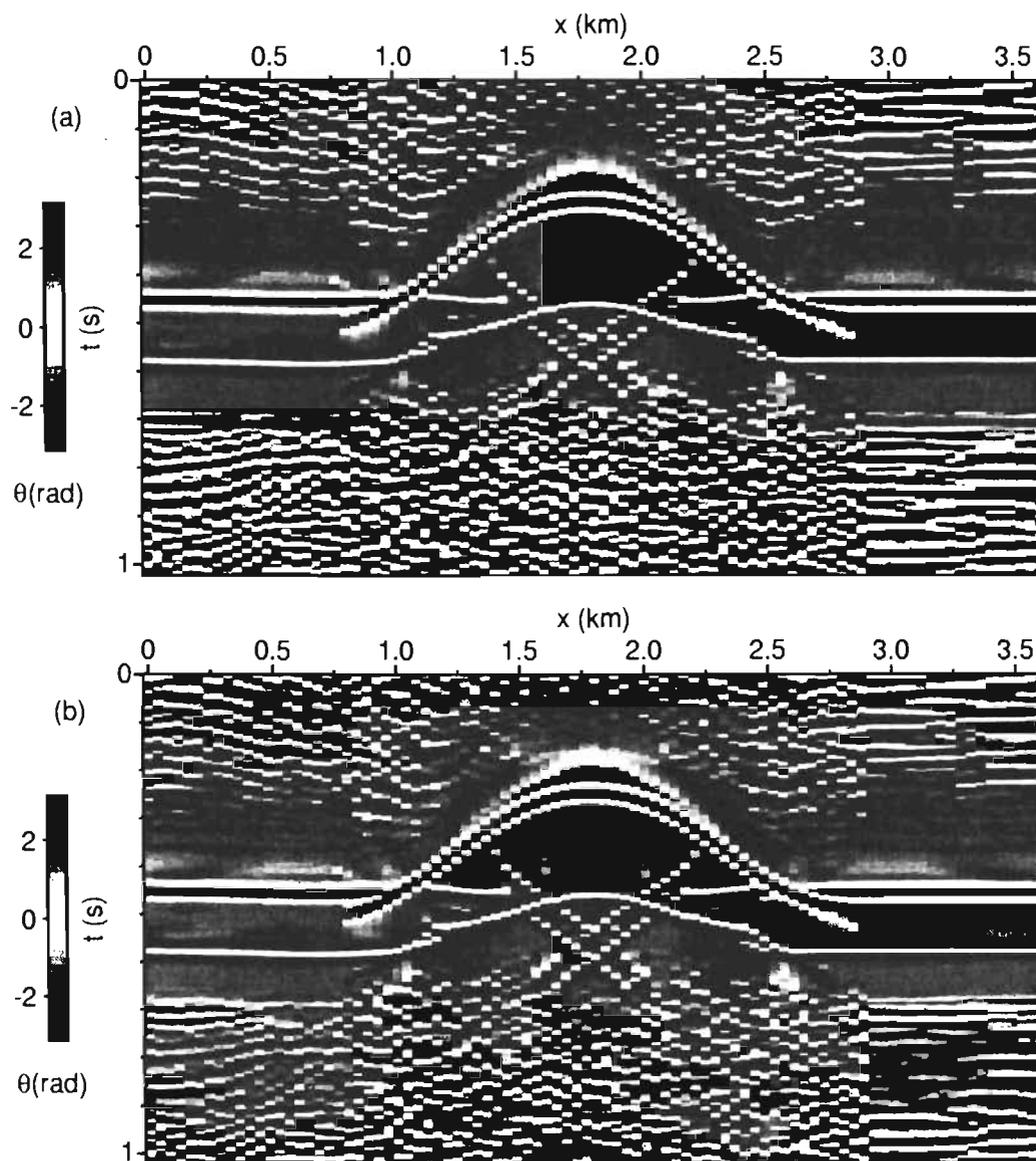


Figura 4.8: Fase instantánea de la sección sísmica sintética (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular.

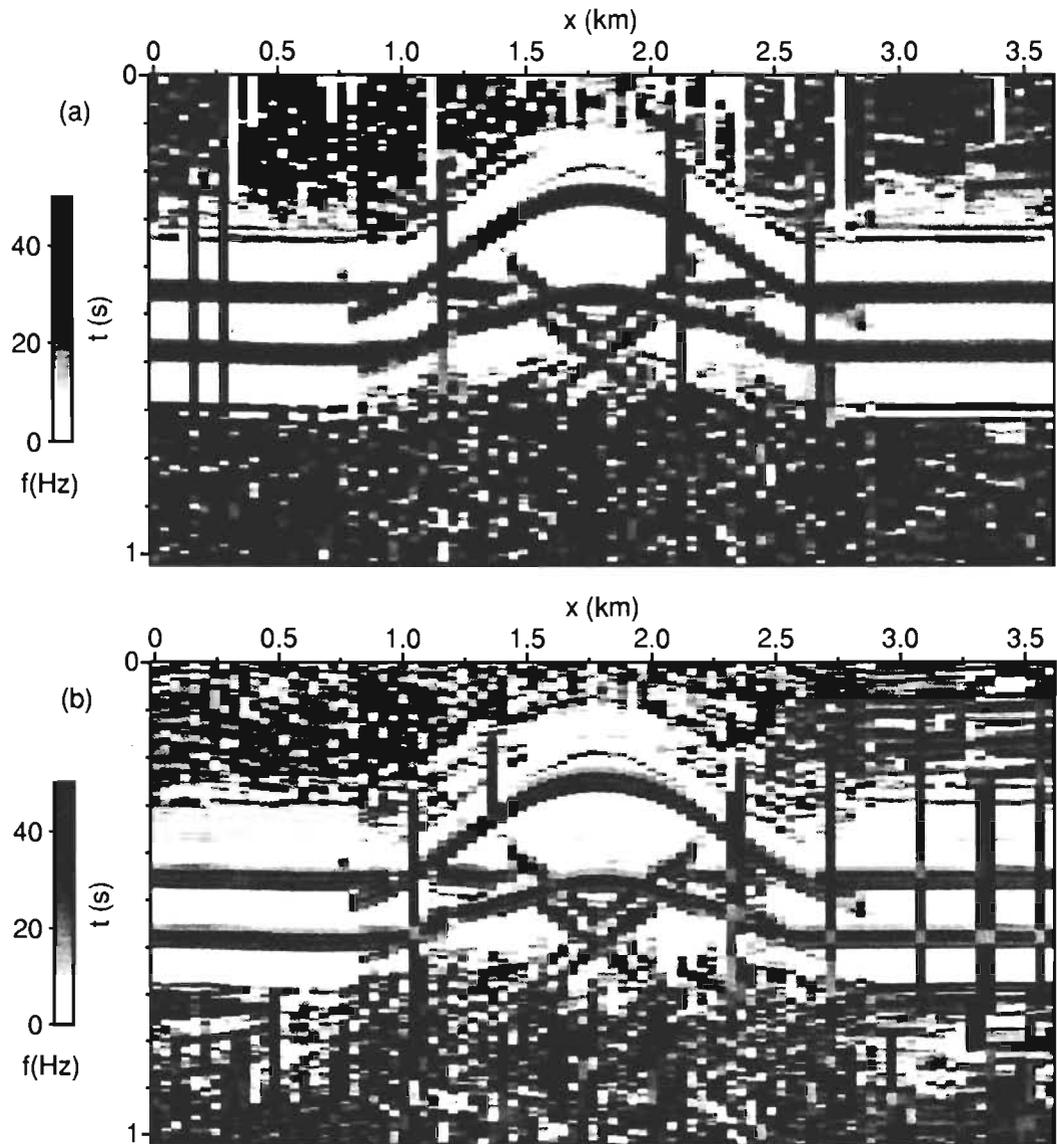


Figura 4.9: Frecuencia instantánea de la sección sísmica sintética (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular.

## 4.5. Aplicación a datos reales

En una segunda fase se calcularon los atributos a una sección sísmica real. La sección se muestra en la Figura 4.10. Esta sección fue procesada para preservar amplitud y forma de onda. El procesamiento incluyó edición, corrección de geometría, deconvolución consistente con la superficie, análisis de velocidades, corrección dinámica (NMO, normal move out) y en profundidad (DMO, depth move out), apilamiento y filtrado. Los intervalos de interés están entre 0.7 y 0.9 s. Por otros estudios se espera producción de aceite asociado con un bajo porcentaje de gas.

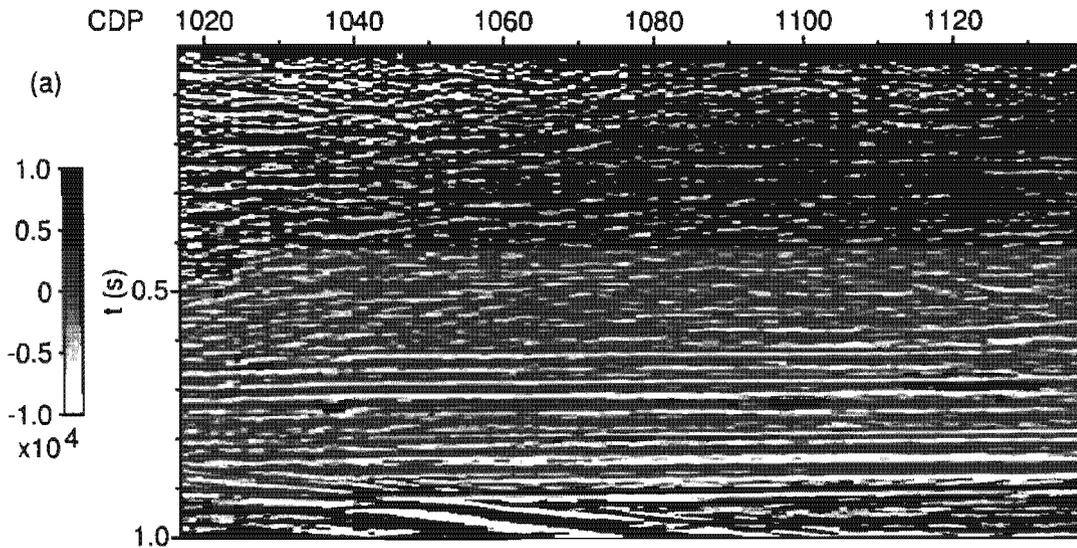


Figura 4.10: Sección sísmica real.

A diferencia del caso teórico, el sismograma real es más complejo. Podemos definir tres zonas marcadas en la Figura 4.11. Una zona es superficial, señalada como Z1, alrededor de 0.1 s, que es más angosta hacia la derecha de la sección. A continuación tenemos una zona, Z2, con amplitudes suaves, tiene dos reflexiones más o menos coherentes: la primera antes de los 0.3 s, señalada como A en la figura; la segunda reflexión, B, se encuentra alrededor

de los 0.5 s y está formado por un conjunto subparalelo y no tan continuo. La tercera zona, Z3, comprende desde 0.6 s hasta 1.0 s. En esta zona se observan 10 reflexiones más continuas que en los dos dominios anteriores. Estas reflexiones están marcadas con un número y una flecha en la parte derecha de la sección. En la parte izquierda, alrededor de la traza 1018 y 0.85 s y hasta la traza 1080 y 1.0 s, se observa un par de reflectores que corresponden a una falla, señalada como C. Por otros estudios se sabe que hay hidrocarburos alrededor de la traza 1020. La falla inclinada actúa como una trampa estructural e incrementa la porosidad secundaria.

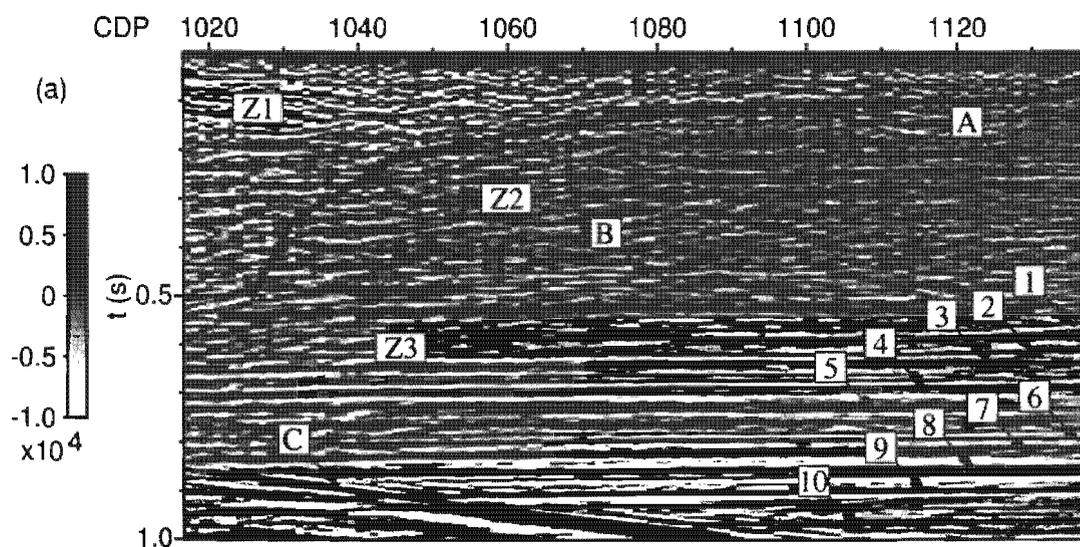


Figura 4.11: Sección sísmica real.

La amplitud calculada con el método tradicional y el ondicular se presenta en las Figuras 4.12a y 4.12b, la fase se muestra en las Figuras 4.13a y 4.13b, y la frecuencia instantánea en las Figuras 4.14a y 4.14b.

Por la riqueza de amplitudes y frecuencias que caracterizan a esta sección a primera vista no son tan obvias las diferencias entre los atributos obtenidos con uno y otro método. Sin embargo un análisis más detallado nos confirma las bondades de los atributos obtenidos con el método de diagonalización

ondicular. Por ejemplo, la continuidad de la reflexión A parece más nítida en la envolvente de amplitud obtenida de la diagonalización ondicular. Su traza es aproximadamente realizada de igual manera en la fase por los dos métodos. Sin embargo, en la frecuencia instantánea tradicional ésta se pierde en el ruido y es difícil de seguirla a lo largo de la sección; pero es más fácil de observar con el método de diagonalización ondicular.

El análisis de cada una de las reflexiones en los diferentes atributos nos indica que el método de diagonalización ondicular tiene más resolución. Por ejemplo, la reflexión 5 puede trazarse en la envolvente de amplitud tradicional muy bien desde la derecha hasta la traza 1060, y todavía ser continuada hasta la traza 1040. Con la diagonalización ondicular la información aparece más coherente entre las trazas 1060 y 1090 permitiéndolo su trazado sin dudas. La reflexión 4 es igualmente más clara en este último atributo.

Las diferencias entre las fases obtenidas con estos dos métodos son mínimas pero también debemos recordar que a partir de la fase se calcula la frecuencia instantánea.

Para la frecuencia instantánea el método de diagonalización ondicular es más sensible que el método tradicional. Véase por ejemplo la reflexión 9. De estas dos aplicaciones se empieza a desprender una conclusión: el uso de la transformada ondicular es más sensible a la estructura de las reflexiones.

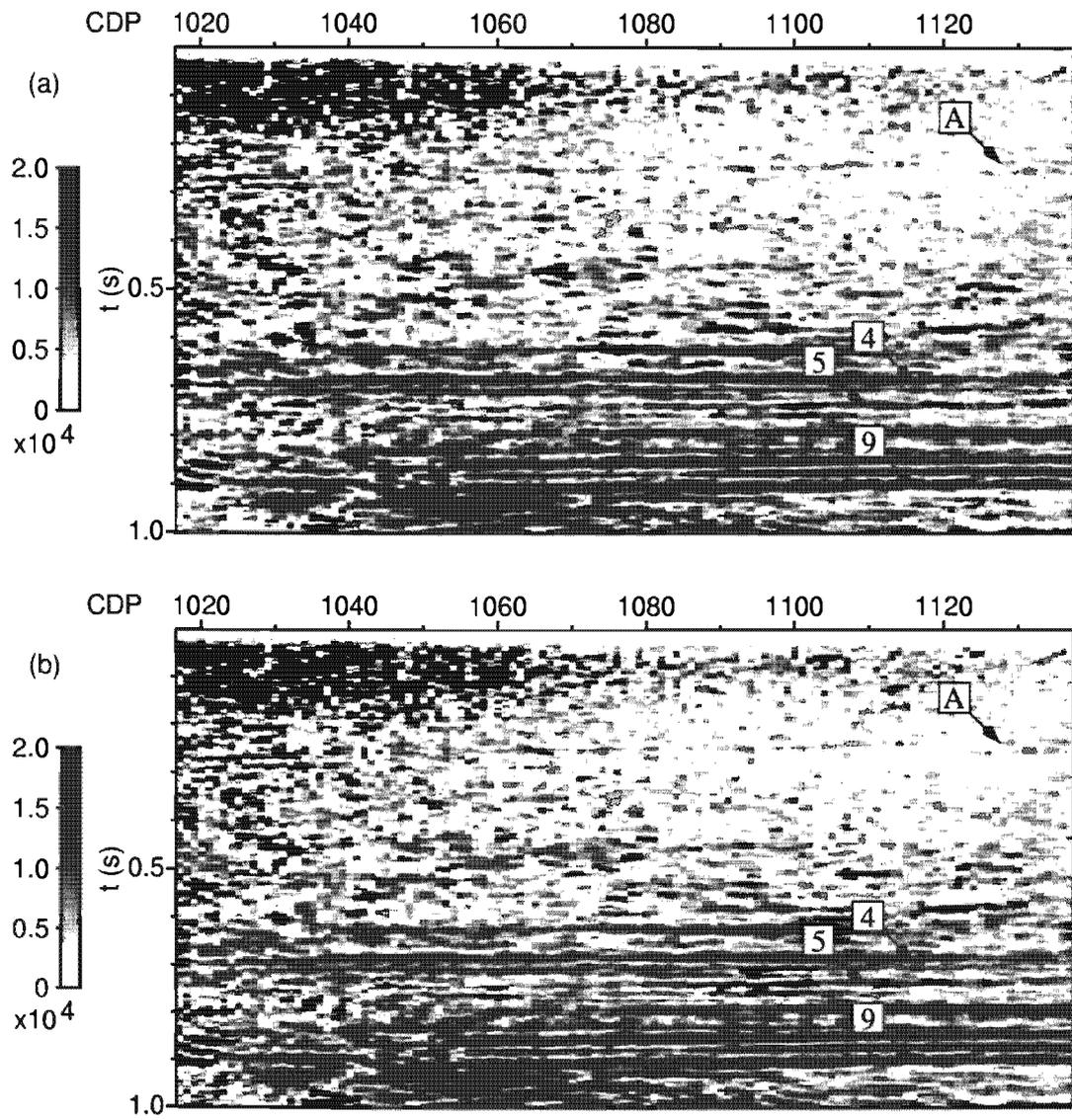


Figura 4.12: Envolvente de amplitud de la sección sísmica real (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular.

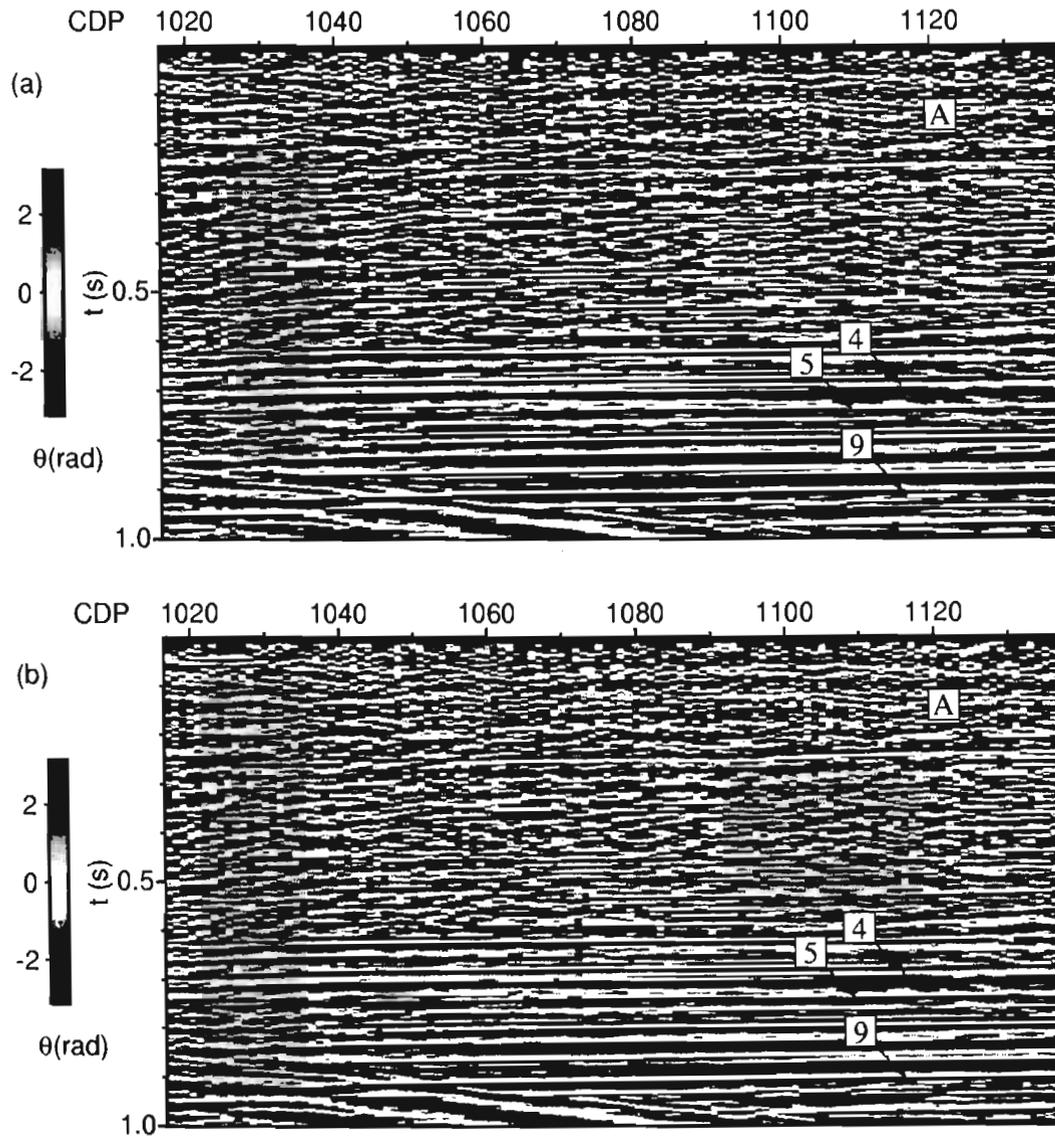


Figura 4.13: Fase instantánea de la sección sísmica real (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular.

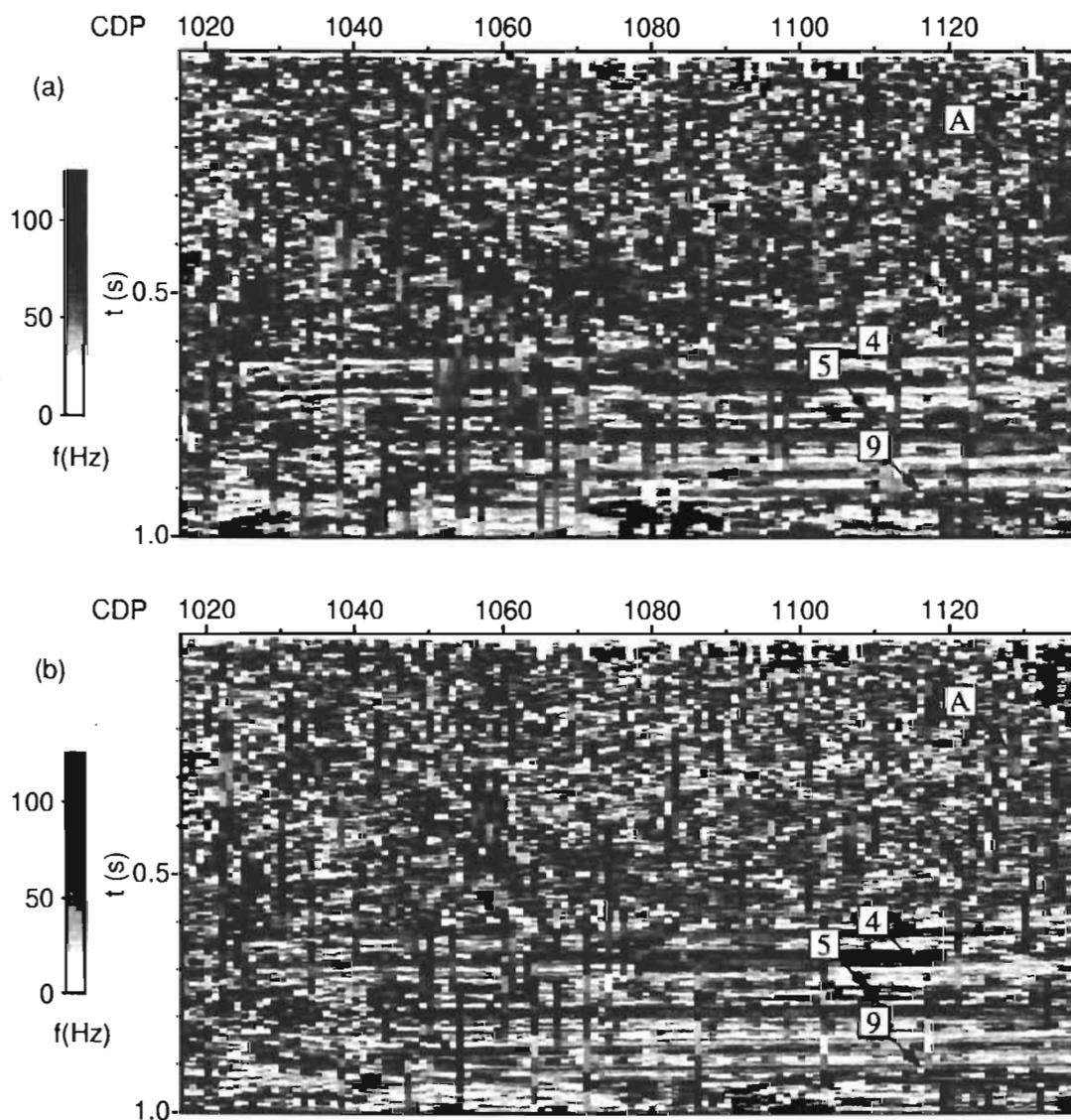


Figura 4.14: Frecuencia instantánea de la sección sísmica real (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular.

## 4.6. Atributos y multirresolución

El análisis multirresolutivo permite representar o descomponer los datos a diferentes escalas que corresponden a determinadas frecuencias. Esta característica constituye la esencia del análisis multirresolutivo.

Ciertas características de los datos sísmicos pueden resultar ser dominantes en determinados rangos de frecuencias, de tal manera que el análisis multirresolutivo puede contribuir a realzar estas características de interés para el intérprete. Adicionalmente, otra manera de enfatizar las características así realzadas es el uso adicional de los atributos sísmicos. Esta doble combinación de análisis multirresolutivo y de atributos sísmicos tiene un potencial de aplicación muy interesante en el análisis de datos sísmicos.

Se presentan dos maneras de aplicar el análisis multirresolutivo. La primera consiste en realizar el análisis multirresolutivo de la información sísmica y después calcular los atributos de cada una de las proyecciones (Ronquillo-Jarillo y Lozada-Zumaeta, 1997; Lozada-Zumaeta, 2002). La segunda calcula los atributos y luego realiza el análisis multirresolutivo a cada uno de dichos atributos.

A continuación se presenta un ejemplo de la aplicación conjunta de análisis multirresolutivo y atributos sísmicos a datos reales. En la Figura 4.15 se presenta la ventana de datos sísmicos utilizada. La Figura 4.15a presenta los datos como trazas (wigggle-trace plot) y la Figura 4.15b como imagen. La sección sísmica fue procesada para preservar amplitud y forma de onda.

En la sección sísmica se observan varios grupos de reflexiones. El primero se inclina a la izquierda; la reflexión más baja de este grupo va de cerca de 0.6 s en la traza 1 a 0.2 s en la traza 300. Las trazas no se siguen con facilidad hacia la derecha. Las reflexiones de este grupo son claras, continuas y de frecuencia alta. El intervalo de interés se localiza alrededor de 0.6 s y 0.8 s y entre las trazas 240 y 300. Se espera producción de aceite asociado con un porcentaje de gas.

Las reflexiones del segundo grupo son claras y de mayor amplitud. Se presentan entre las trazas 200 y 400 y entre 0.6 s y 1.0 s. Su continuación hacia la izquierda es sugerida por la presencia de varias reflexiones. Se observan algunas reflexiones de amplitud pequeña sin coherencia entre estos dos grupos.

La Figura 4.16 presenta los atributos sísmicos convencionales calculados con base en la transformada de Fourier. La amplitud envolvente, la fase instantánea y la frecuencia de la ventana de datos sísmicos se representan en las

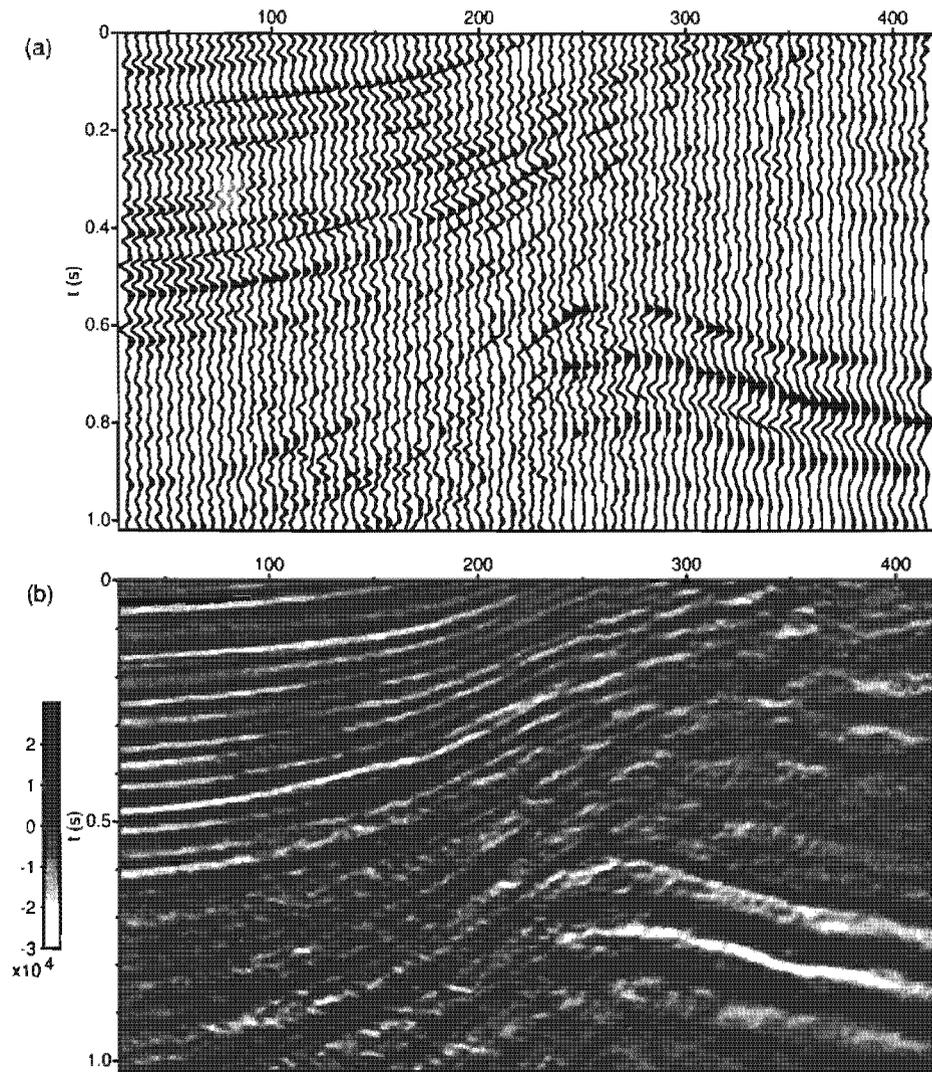


Figura 4.15: Sección sísmica real. (a) Gráfica de trazas. (b) Gráfica de imagen.

Figuras 4.16 b, c y d, respectivamente. El análisis de los atributos nos permite inferir los siguientes rasgos. La envolvente de amplitud resalta la presencia de los dos grupos de reflexiones mencionados antes, mostrando que el segundo grupo tiene mayor amplitud y mayor longitud de onda. La continuidad de las reflexiones se muestra de manera clara en la fase instantánea; de forma particular la continuidad hacia la izquierda del segundo grupo de reflexiones parece confirmarse. Este segundo grupo de reflexiones está caracterizado por una sombra: tiene bajos valores.

La primer manera de aplicar conjuntamente el análisis multirresolutivo y los atributos consiste en realizar en una primera fase el análisis multirresolutivo. El cálculo de los atributos se puede realizar entonces de manera selectiva sobre determinadas proyecciones. La Figura 4.17 presenta el análisis multirresolutivo de la ventana original de datos sísmicos (es decir, la Figura 4.15). Se obtuvo empleando la base de Daubechies de orden 6. La sección original se considera como una proyección sobre  $V_{11}$ . Esta multirresolución nos permite observar el rango de frecuencias dominantes en cada proyección. Vemos que las reflexiones del primer grupo se caracterizan por frecuencias altas y medias, como se observa en las proyecciones sobre los espacios  $W_{10}$ ,  $W_9$  y  $W_8$ . De las proyecciones en los espacios  $V_{10}$  a  $V_7$  se observa como va desapareciendo el primer grupo de reflexiones. Al mismo tiempo van apareciendo en los espacios  $W_{10}$  a  $W_8$ . Las reflexiones del segundo grupo contienen frecuencias medias y bajas, como se observa por su persistencia en los espacios  $V_{10}$ ,  $V_9$ ,  $V_8$  y  $V_7$ . Las proyecciones sobre  $V_7$  y  $W_7$  sugiere la continuidad hacia la izquierda de esas reflexiones, aunque esa continuidad no presenta las mismas amplitudes ni frecuencias. Tanto en la sección sísmica original como en las proyecciones a los espacios  $V$ 's, parece que las reflexiones de este segundo grupo están desplazadas de sus eventuales continuaciones. Este posible desplazamiento podría indicar una falla. De esta forma se tendría un anticlinal afectado por una falla inversa. Esta misma interpretación parece ser apoyada por la fase instantánea de la sección sísmica original.

En la Figura 4.18 tenemos los atributos sísmicos de la proyección en el espacio de promedio  $V_{10}$ . Similarmente, se presentan los atributos de las proyecciones en los espacios  $V_9$ ,  $V_8$  y  $V_7$  en las Figuras 4.19, 4.20 y 4.21, respectivamente. Los atributos correspondientes a las proyecciones en los espacios de detalles  $W_{10}$ ,  $W_9$ ,  $W_8$  y  $W_7$  se muestran en las Figuras 4.22, 4.23, 4.24 y 4.25, respectivamente. Los atributos nos ayudan en esta parte al análisis en detalle de cada una de las diferentes proyecciones. En particular observamos en los espacios  $V_{10}$  y  $V_9$  en la fase instantánea que las reflexiones de

este segundo grupo y sus continuaciones hacia la izquierda presentan una estructura distinta. Las reflexiones originales son de mayor longitud de onda y amplitud, en tanto que sus continuaciones a la izquierda tienen más contenido de alta frecuencia. La diferencia de origen da la impresión de una frontera rectilínea. Ahora bien, en los espacios  $V_8$  y  $V_7$  esta diferencia ya no es tan patente y tenemos la impresión de que hay continuidad en las reflexiones, aunque la fábrica de las reflexiones es diferente. Las eventuales continuaciones no son tan suaves, es decir, contienen altas frecuencias. De acuerdo a estos atributos tenemos: que aunque hay continuidad a bajas frecuencias (fase instantánea), no hay la misma intensidad de reflexión (envolvente de amplitud), y la firma en la frecuencia instantánea es diferente (siendo de baja frecuencia a la derecha). Podemos concluir que la estructura que nos están marcados estos reflectores es un anticlinal asimétrico afectado por una falla inversa, cuya parte izquierda actuaría como trampa de hidrocarburos. La presencia de hidrocarburos está indicada por las bajas frecuencias instantáneas (sombra).

Pasemos ahora a la segunda alternativa de este proceso, en la que al principio se calculan los atributos y luego se realiza el análisis multirresolutivo a los atributos. En la Figura 4.26 se representa el análisis multirresolutivo de la envolvente de la amplitud (Figura 4.16b o bien Figura 4.26a) de los datos originales (Figura 4.15 o bien Figura 4.16a). La importancia del segundo grupo de reflectores se resalta en las proyecciones sobre  $V_{10}$  y  $V_9$  (Figura 4.26b y 4.26d). Ya habíamos observado que en la fase instantánea (Figura 4.16c) los reflectores en la parte inferior derecha parecen continuarse hacia la izquierda. Dicha continuación también parece ser observada del análisis multirresolutivo de la amplitud en la proyección sobre  $W_7$  (Figura 4.26i).

En la Figura 4.27 tenemos el análisis multirresolutivo de la fase instantánea. La información sísmica entre las reflexiones más someras y las antes descritas es transparente a la amplitud (Figura 4.26). Sin embargo la fase instantánea nos permite ver la coherencia en esta información sísmica (Figura 4.27) y podemos correlacionar la información a lo largo de toda la sección. En particular la fase instantánea apoya la continuación hacia la izquierda de los reflectores más profundos. La fase instantánea nos muestra igualmente, que si bien se puede establecer la continuidad de los reflectores profundos, también se hace evidente la diferencia de fábrica. ¿A qué se debe esta diferencia de fábrica? Si tuvieramos una falla, la fábrica de las reflexiones sería semejante a ambos lados de ésta. ¿Tenemos además un fuerte fracturamiento o un cambio de fase? ¿Es únicamente la presencia de hidrocarburos la

explicación a esta diferencia de fábrica?

La Figura 4.28 muestra el correspondiente análisis de la frecuencia instantánea. Los reflectores del segundo grupo y sus continuaciones hacia la izquierda presentan una diferencia grande en la frecuencia instantánea. La frecuencia instantánea en la parte izquierda del segundo grupo es transparente en la proyecciones sobre  $W_{10}$ ,  $W_9$ ,  $W_8$  y  $W_7$ , es decir, a altas frecuencias.

Las comparaciones correspondientes muestran que los atributos obtenidos después del análisis multirresolutivo tienen menor contenido de altas frecuencias. Este último comportamiento también es aparente en las proyecciones de las fases y frecuencias instantáneas a los espacios  $V_{10}$  y  $V_9$  (Figuras 4.27 y 4.28). Esto no es muy evidente para la amplitud. En el caso de la frecuencia hay un mayor contenido de alta frecuencia en las proyecciones a los dos primeros espacios  $V_{10}$  y  $V_9$  (Figura 4.28). Sin embargo en los espacios  $V_8$  y  $V_7$  ya es menor el contenido de altas frecuencias (Figura 4.28).

Se obtienen mejores definiciones y correlaciones en la frecuencia instantánea obtenida antes del análisis multirresolutivo. La obtención de atributos después del análisis multirresolutivo permite realizar algún tipo de filtrado (por ejemplo "denoising") lo cual implica el uso de más herramientas para el estudio de algunas reflexiones en particular. Veamos que la obtención de atributos antes o después del análisis multirresolutivo son procesos que no son equivalentes, es decir, no son conmutativos. Esto es debido a que en si mismo el análisis multirresolutivo va filtrando selectivamente el contenido de frecuencias. De esta manera el contenido de frecuencias disponible para la obtención de atributos está más limitado después de un análisis multirresolutivo. Esto puede ser una ventaja cuando se trabaja con secciones sísmicas muy ruidosas. Esto explica que los atributos obtenidos después de la multirresolución tengan un menor contenido de altas frecuencias con relación a los atributos obtenidos antes del análisis multirresolutivo. Sin embargo para el análisis de una sección sísmica con bajo contenido de altas frecuencias y ruido sería una buena alternativa realizar el análisis multirresolutivo después.

En el presente caso la información en el espacio  $V_7$ , tanto para la amplitud envolvente como para la frecuencia instantánea no es de muy buena calidad en los atributos obtenidos después del análisis multirresolutivo. En conjunto, para este ejemplo, los atributos obtenidos antes del análisis multirresolutivo proporcionan más información. En todo caso, las informaciones son complementarias.

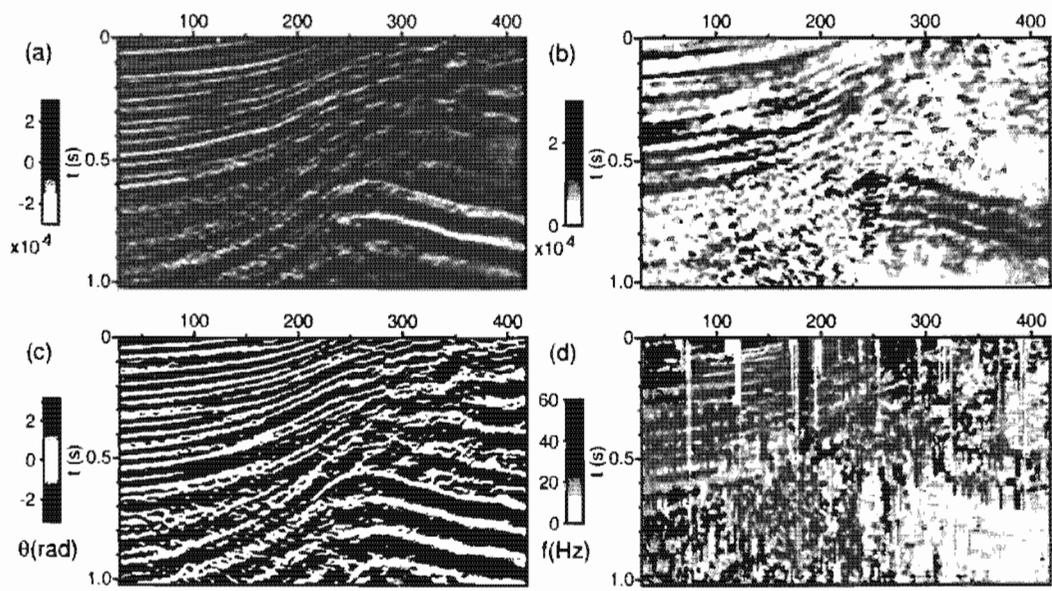


Figura 4.16: Atributos sísmicos convencionales para la sección sísmica. (a) La sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

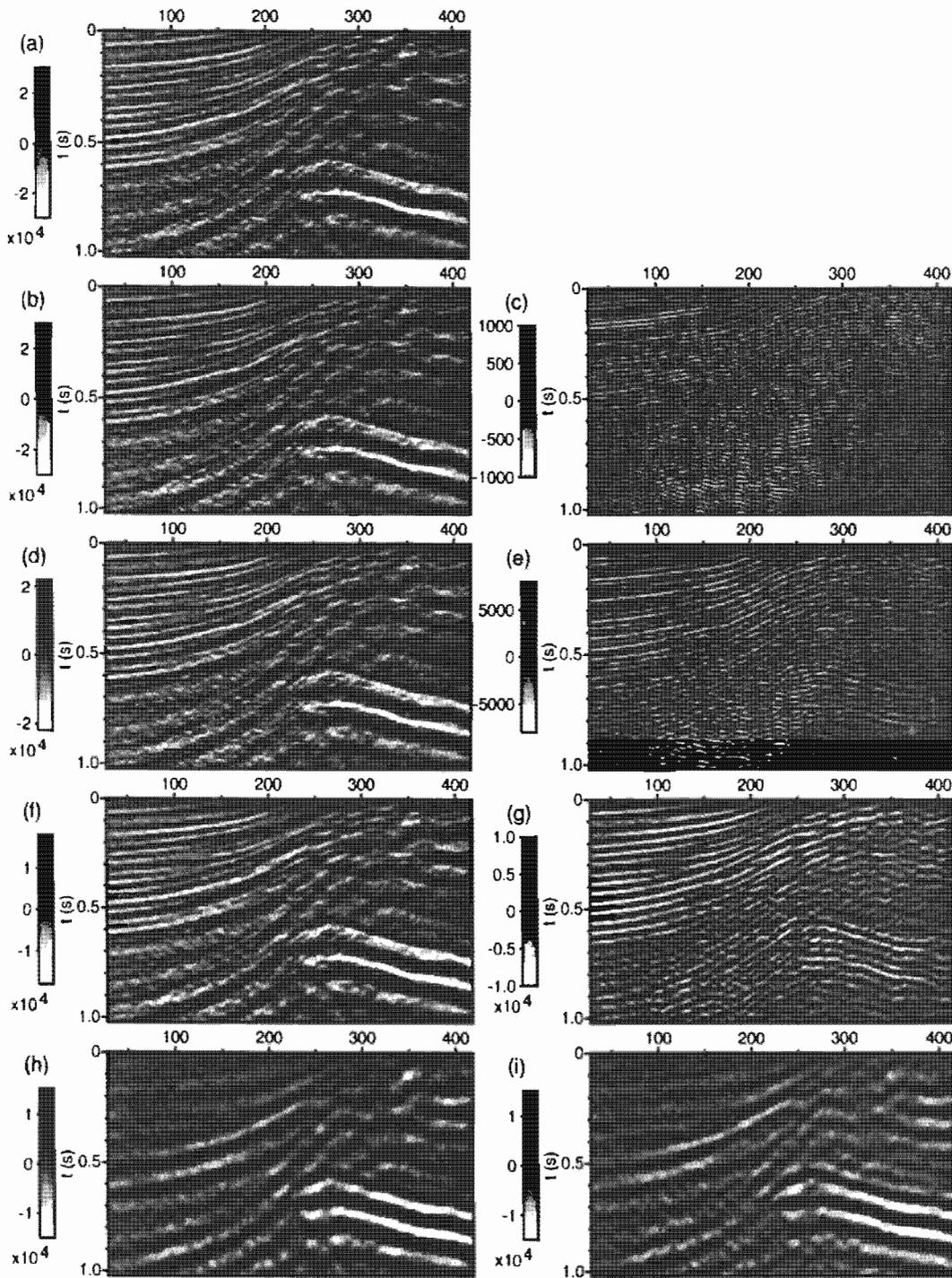


Figura 4.17: Análisis multirresolutivo de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La sección sísmica (considerada como proyección sobre  $V_{11}$ ); proyecciones de la sección sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ .

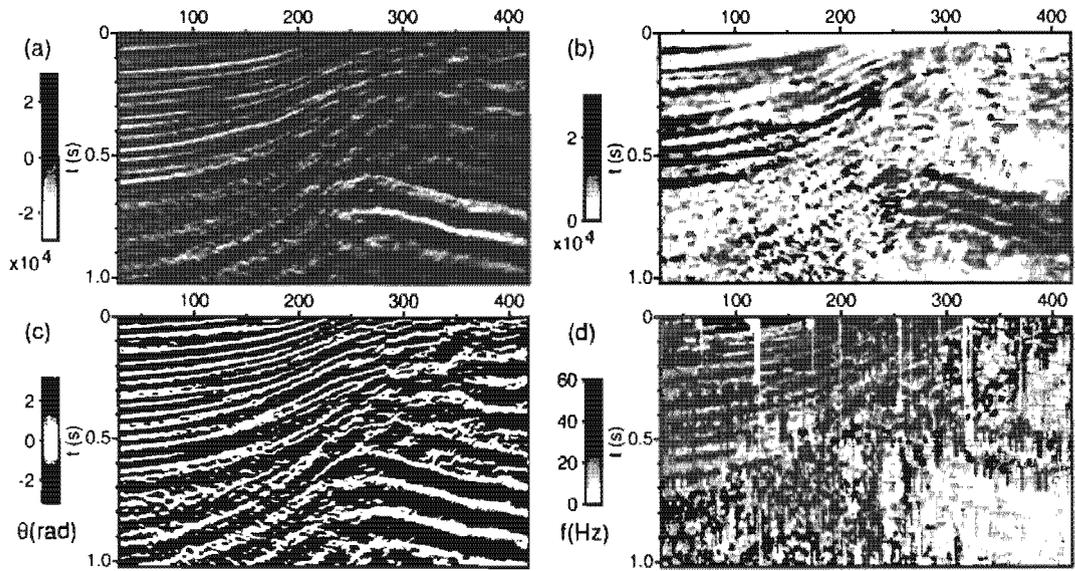


Figura 4.18: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $V_{10}$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

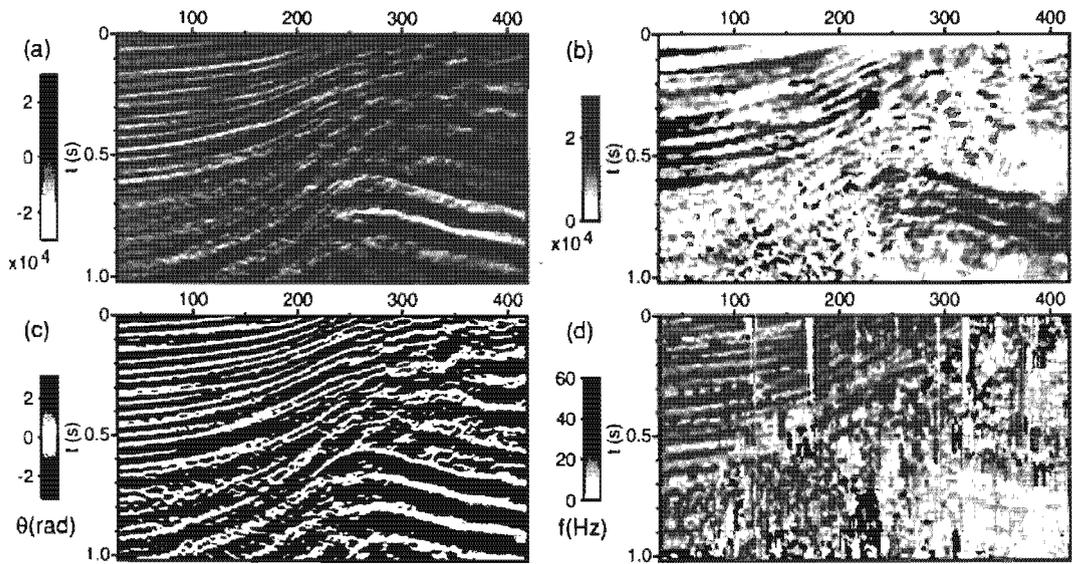


Figura 4.19: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $V_9$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

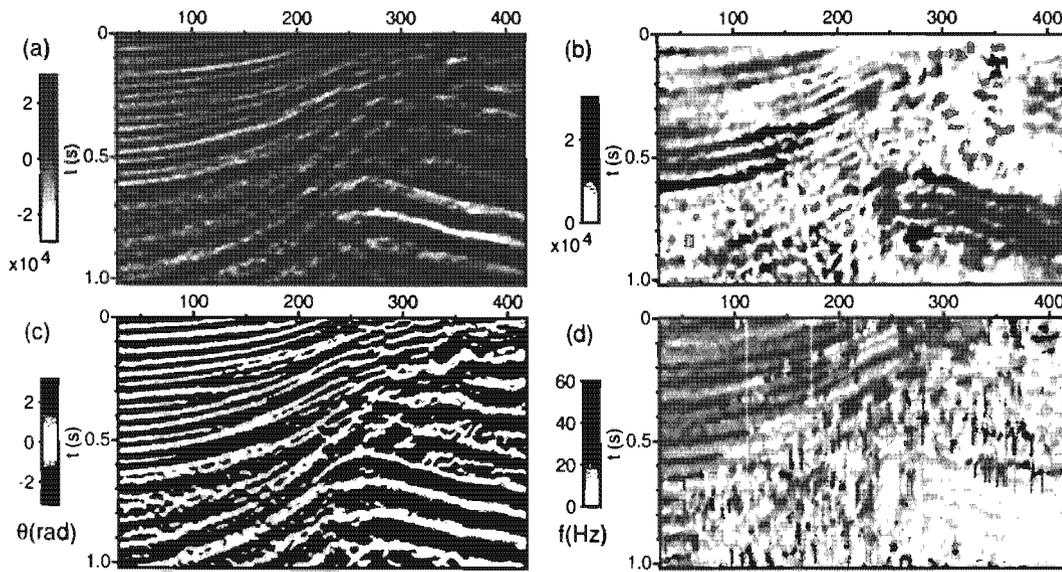


Figura 4.20: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $V_8$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

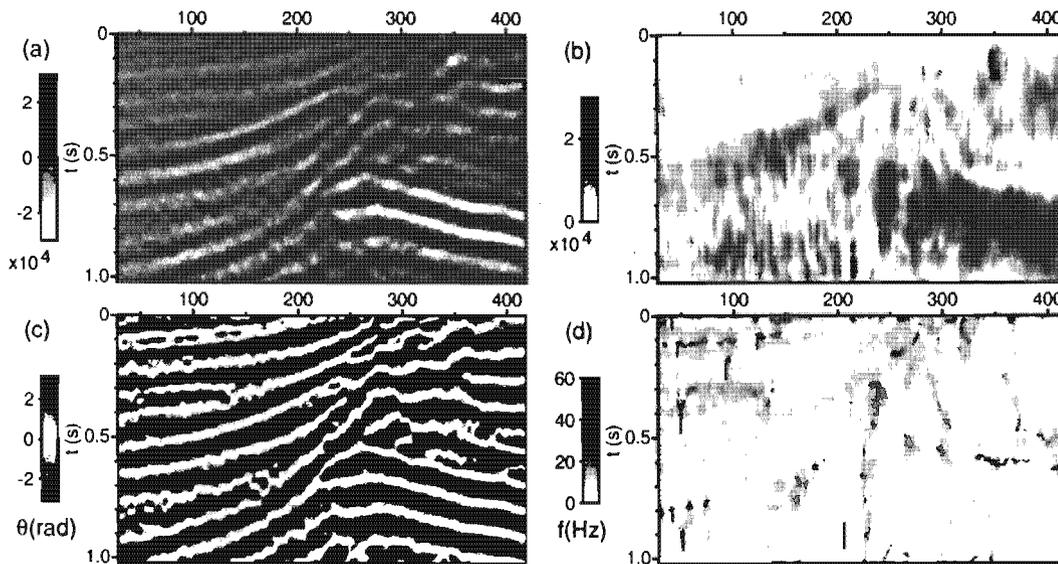


Figura 4.21: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $V_7$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

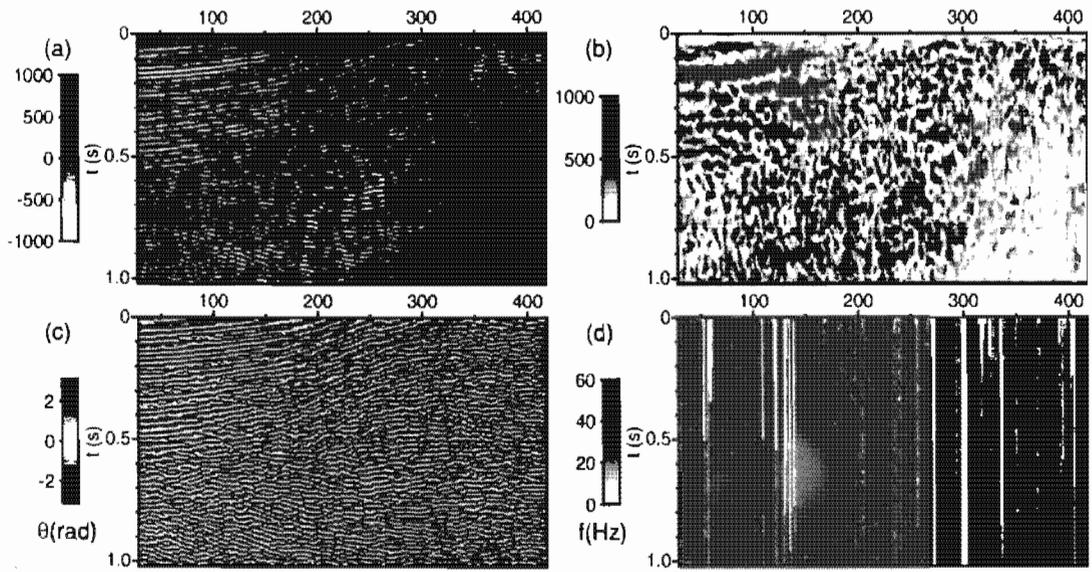


Figura 4.22: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_{10}$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

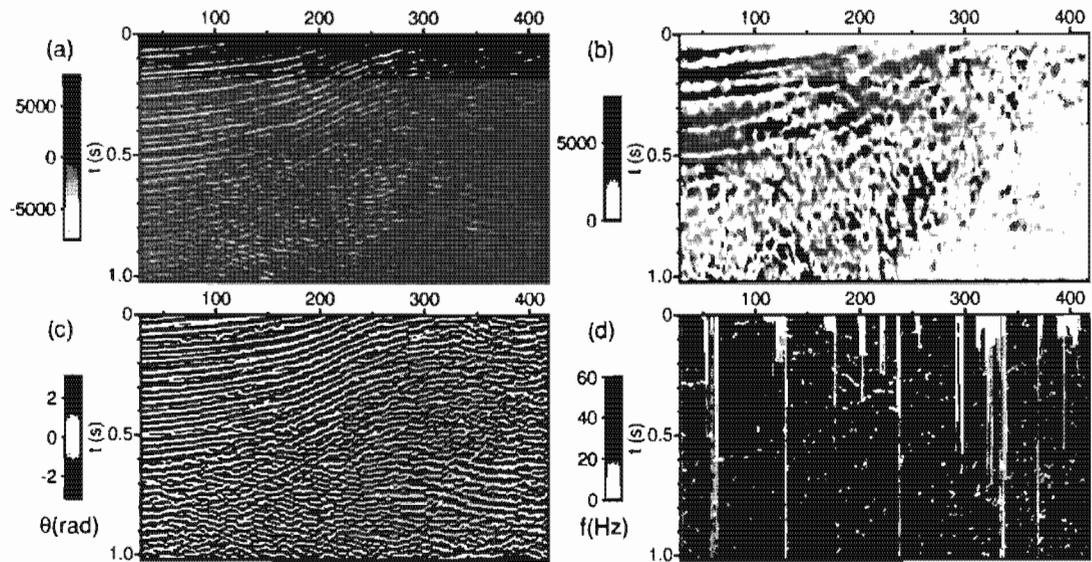


Figura 4.23: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_9$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

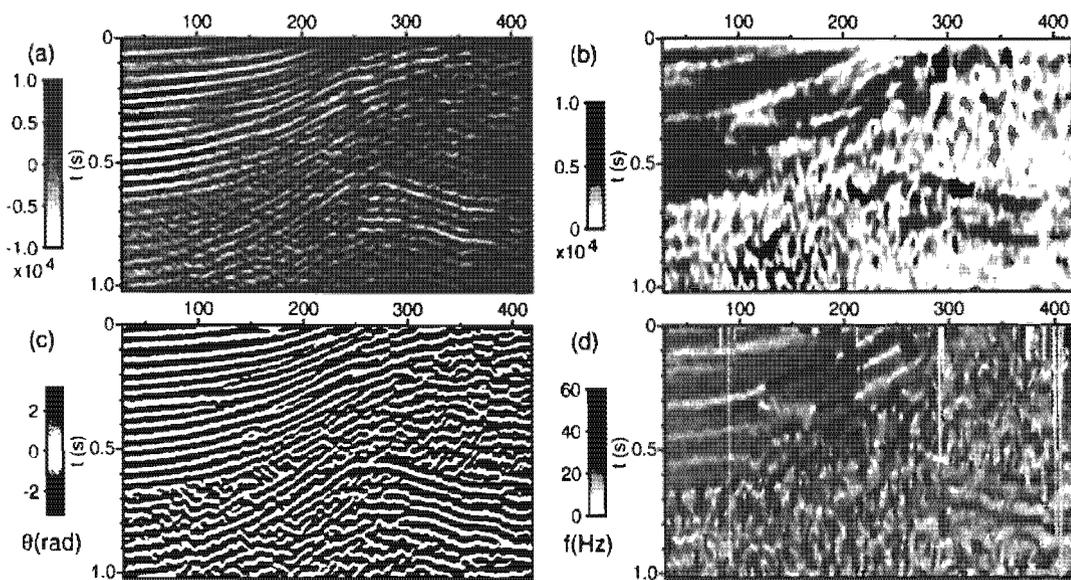


Figura 4.24: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_8$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

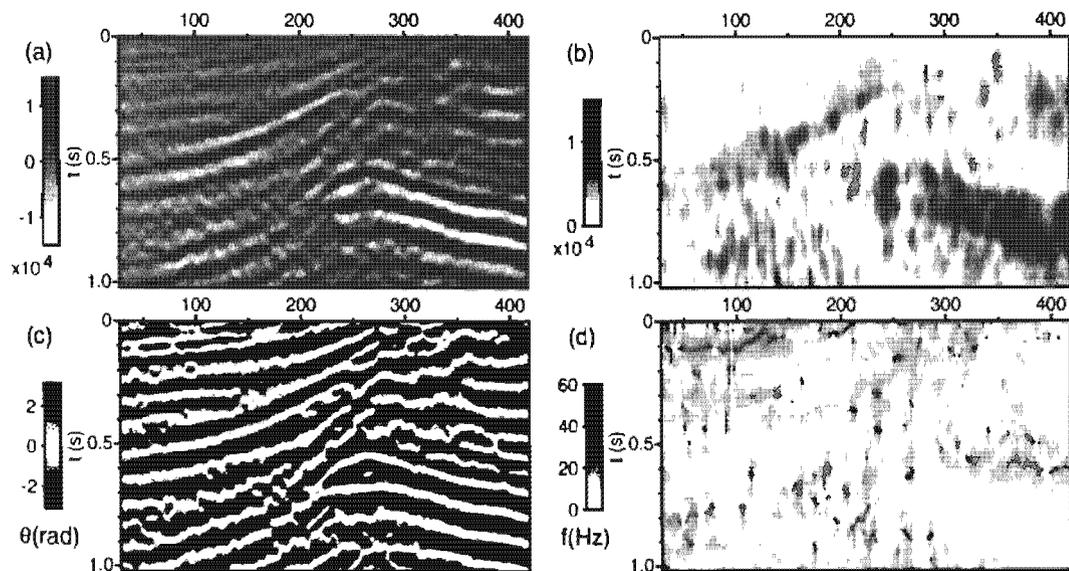


Figura 4.25: Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_7$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltura de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea.

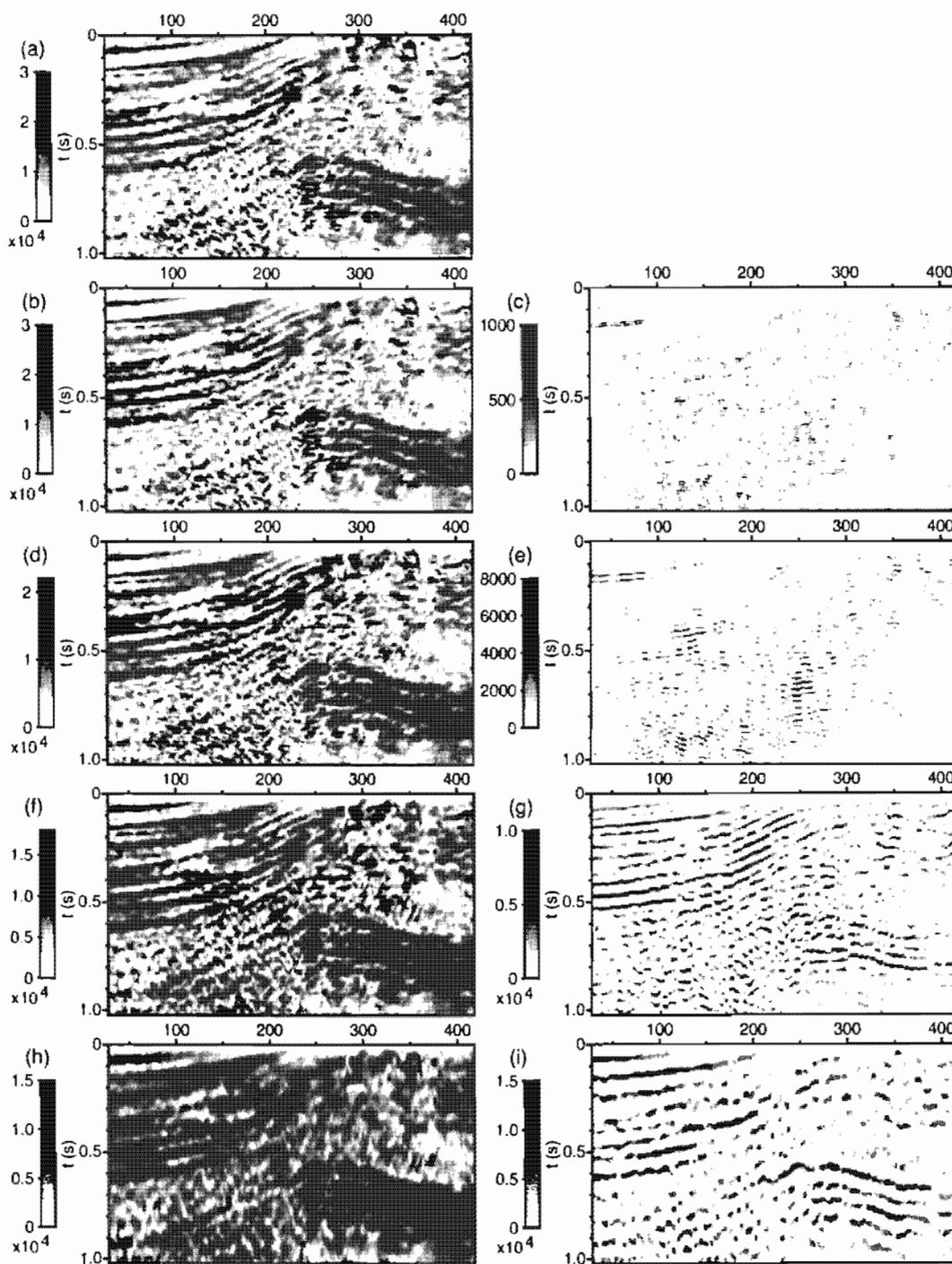


Figura 4.26: Análisis multirresolutivo de la envolvente de amplitud de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La envolvente de amplitud; sus proyecciones sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ .

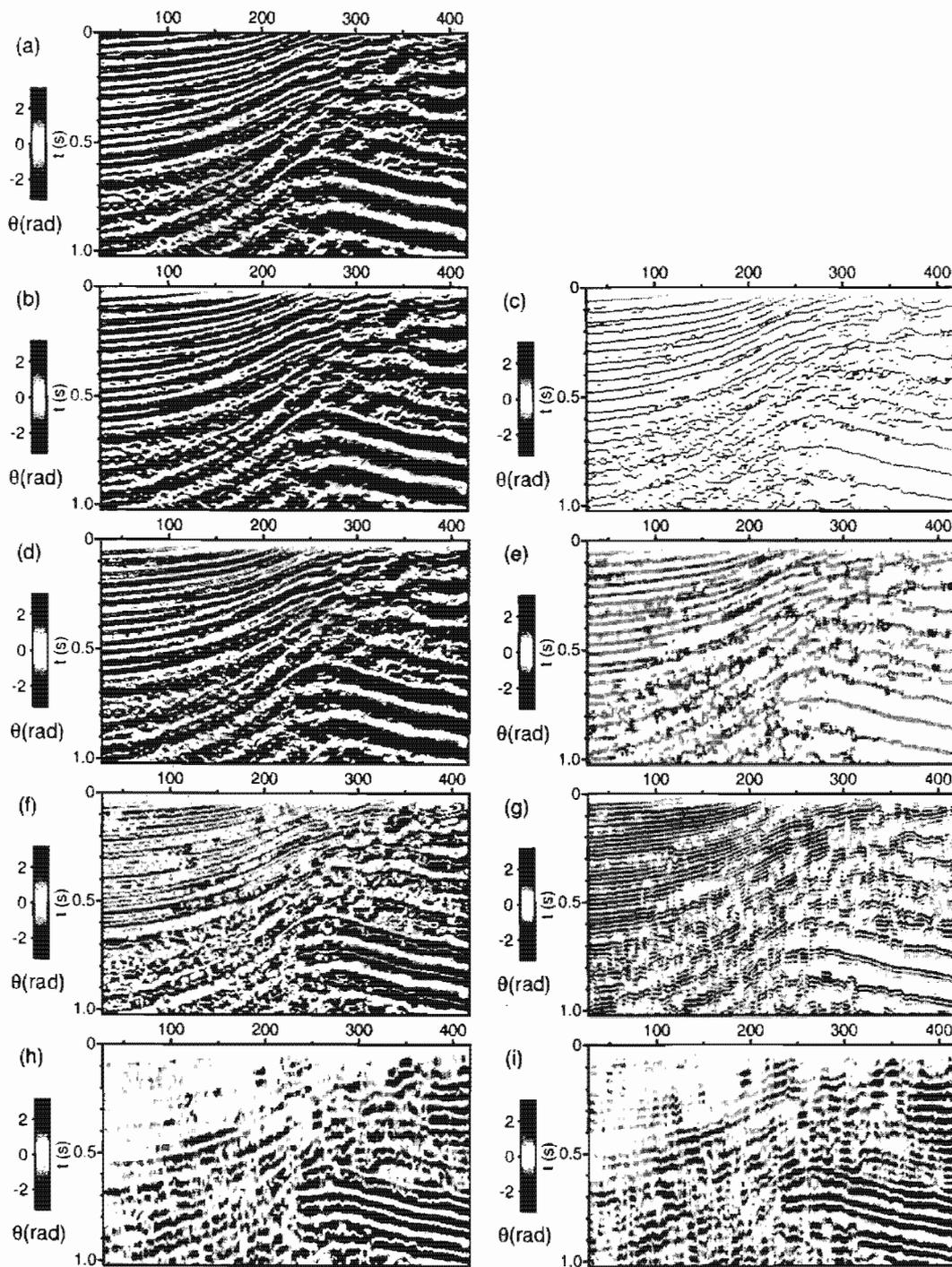


Figura 4.27: Análisis multirresolutivo de la fase instantánea de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La fase instantánea; sus proyecciones sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ .

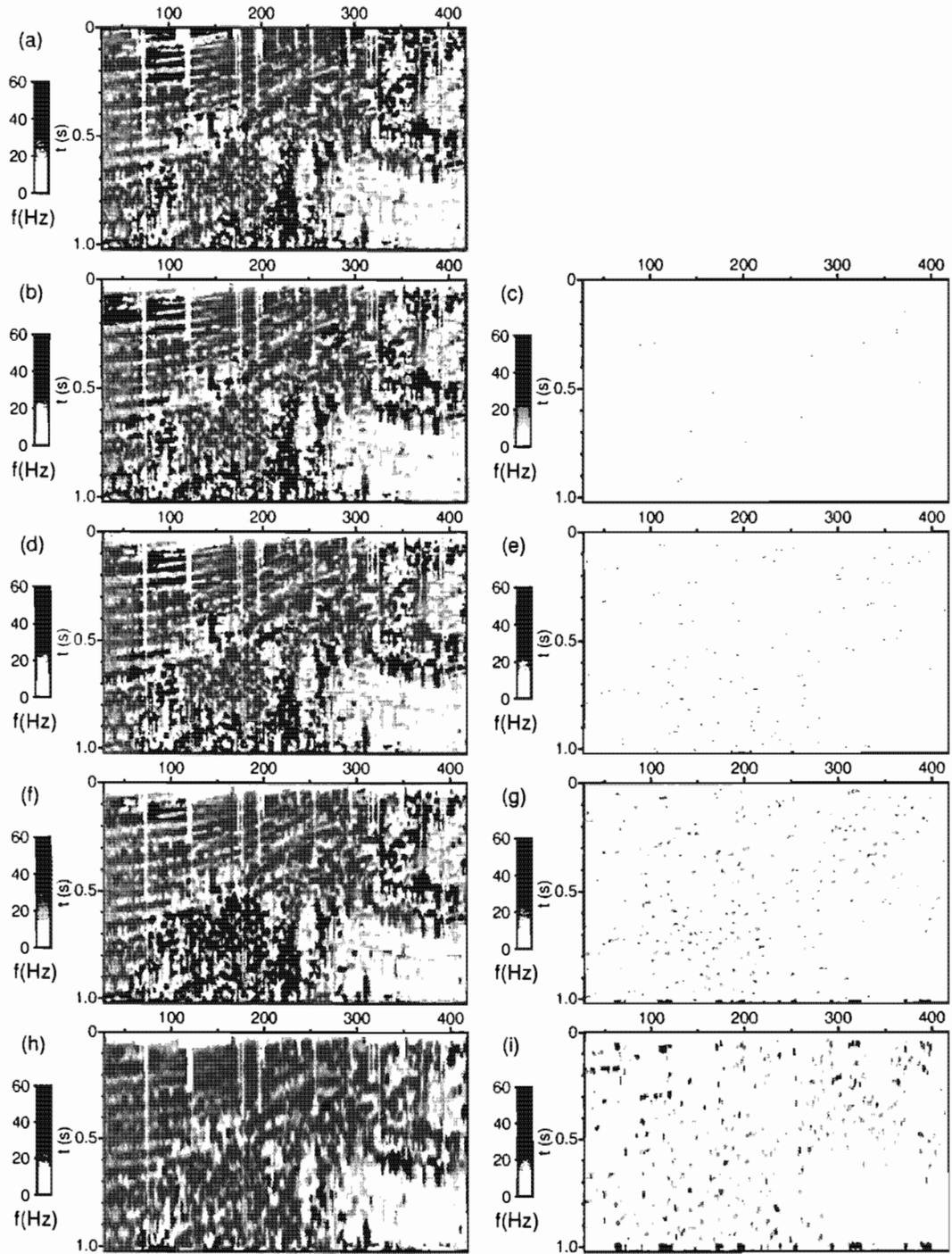


Figura 4.28: Análisis multirresolutivo de la frecuencia instantánea de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La frecuencia instantánea; sus proyecciones sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

Se ha aplicado la transformada ondicular discreta para diagonalizar el operador de Hilbert. El método parte de una base ondicular biortogonal definida por un conjunto de cuatro filtros: de análisis y síntesis, pasa bajas y pasa altas. Después construye otra base ondicular biortogonal. Con esta técnica se obtiene una representación del operador de Hilbert.

A partir de este método se han calculado los atributos sísmicos instantáneos: amplitud, fase y frecuencia instantáneos. El método se aplicó a datos reales y sintéticos presentando buen comportamiento. El análisis de los resultados permite observar que los atributos así obtenidos son más sensibles a la estructura de las reflexiones, permitiendo una mayor resolución de los eventos sísmicos.

El método ondicular proporciona una alternativa a las técnicas convencionales basadas en el análisis de Fourier.

Un método convencional emplea la transformada rápida de Fourier. Una característica de este método es que trae consigo el fenómeno de Gibbs. Esto se debe a que la transformada de Hilbert corresponde a una función que es un escalón en frecuencia. La discontinuidad del escalón origina que se presenten frecuencias altas por la naturaleza del análisis de Fourier: el análisis considera todo el dominio temporal.

Por otro lado, el análisis ondicular realiza un análisis local en el tiempo. En la práctica, el fenómeno de Gibbs se sigue presentando, pero se atenúa de manera considerable. La mayor resolución obtenida en los atributos basados en la transformada ondicular se debe asociar a este hecho.

Ahora bien, el número de operaciones que usa el algoritmo de la transformada rápida de Fourier es de orden  $\mathcal{O}(n \ln n)$ . El algoritmo piramidal calcula

la transformada ondicular discreta en  $\mathcal{O}(n)$  operaciones. Esto muestra que el método ondicular tiene ventajas en tiempo de cálculo.

Por otra parte, si hablamos de la representación del operador de Hilbert mediante un filtro de respuesta finita, tenemos que emplear filtros de longitud considerable. Para calcular la transformada de Hilbert se convoluciona ese filtro con la señal de entrada. Una ventaja sustantiva del método ondicular estudiado es el tamaño de los filtros biortogonales que se utilizan, pues en este trabajo son considerablemente más cortos. Esto representa también un ahorro en el tiempo de cálculo.

La transformada ondicular continua se ha utilizado en otros estudios para el cálculo de atributos. Sin embargo, como la transformada ondicular continua requiere aproximaciones numéricas de integrales, el costo computacional es mucho mayor. Un método publicado de este tipo tiene que estimar primero un parámetro de atenuación, mientras que el método de esta tesis no lo requiere.

La manera en que está estructurado el método permite considerar filtros que generen ondículas simétricas. Esto se ajusta a la preferencia de la comunidad geofísica por las ondículas simétricas pues éstas son útiles porque preservan la fase.

El método de diagonalización de operadores también se puede aplicar al operador de derivación. Esto significa que también la frecuencia se puede calcular con la misma metodología.

La introducción de este método de cálculo de la transformada de Hilbert y de los atributos sísmicos instantáneos expande el panorama de la transformada ondicular. Constituye una nueva línea de investigación en la industria sísmica muy interesante. Por ejemplo, se puede asociar al análisis multirresolutivo. También se puede incluir técnicas de filtrado propias del análisis ondicular (por ejemplo el “denoising”). Estas cualidades hacen que este método de cálculo de atributos sea muy prometedor.

Finalmente debe decirse que este es un desarrollo de primera línea en la investigación de técnicas de procesamiento de datos sísmicos. Cabe mencionar que existen grupos de investigación que aplican la transformada ondicular para la obtención de atributos sísmicos, pero siguiendo otros enfoques al presentado aquí.

# Apéndice A

## Análisis funcional

### General

Se usan los símbolos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  para denotar a los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente. Consideraremos espacios vectoriales que tienen a  $\mathbb{C}$  como campo escalar. Se denota por  $\bar{z}$  el conjugado del número complejo  $z$  y por  $|z|$  el módulo de  $z$ . Un espacio métrico es un espacio vectorial que tiene asociada una función de distancia entre parejas de puntos:  $d(x, y)$  denota la distancia entre  $x$  y  $y$ . Una vecindad de  $x$  de radio  $\varepsilon$  está formado por los elementos  $y$  que cumplen  $d(x, y) < \varepsilon$ . Un punto pertenece a la cerradura de un conjunto si cada vecindad del punto contiene al menos un punto del conjunto. La cerradura de  $S$  se denota por  $\bar{S}$ . Un conjunto es compacto si es cerrado y acotado. Un espacio vectorial provisto de una norma es un espacio normado y el símbolo  $\|\cdot\|$  representa la norma. Una sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy si para cualquier  $\varepsilon$  existe  $N$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$  para  $n > N$ ,  $m > N$ . Un espacio de Banach es un espacio normado completo, esto es, todas las sucesiones de Cauchy convergen. Un espacio de Hilbert es un espacio de Banach cuya norma es la inducida por el producto interno. Dos subespacios  $A$  y  $B$  de un espacio  $S$  forman una descomposición en suma directa de ese espacio si cada elemento de  $S$  puede ser escrito de forma única como la suma de un elemento de  $A$  y uno de  $B$ ; en este caso se escribe  $S = A \oplus B$ . Este concepto se generaliza para una familia de subespacios  $A_j$  de un espacio  $S$  y se escribe como  $S = \bigoplus_j A_j$ .

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto acotado desde arriba y  $X$  el conjunto de todas las cotas superiores de  $A$ . La cota superior de  $A$  es el mínimo de  $X$ . Este

mínimo de  $X$  se le llama el supremo de  $A$  y se denota por  $\sup A$ .

Supongamos que  $X$  es un espacio métrico con métrica  $d$ , y que  $S$  y  $D$  son dos conjuntos de  $X$  tales que  $D \subset S$ . Se dice que  $D$  es denso en  $S$  si para cada elemento  $x \in D$  y para cada  $\varepsilon > 0$  existe un elemento  $x_0 \in S$  tal que  $d(x, x_0) < \varepsilon$ . En ese caso la cerradura de  $D$  coincide con  $S$ , es decir,  $\bar{D} = S$ .

En un espacio  $V$  con producto interno se puede definir el ángulo  $\theta$  entre dos vectores usando su producto interno  $\langle x, y \rangle$  mediante la relación  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta$ . En particular dos vectores son ortogonales si su producto interno se anula. Dado  $V$  un espacio con producto interno y  $S$  un subconjunto cualquiera de  $V$ , entonces el complemento ortogonal de  $S$ , denotado por  $S^\perp$ , se forma con todos los elementos que son ortogonales a cada elemento de  $S$ . Se observa que  $S^\perp$  se define para cualquier conjunto y es un subespacio lineal de  $V$ .

## Funciones

Dados dos conjuntos  $X$  y  $Y$  se define una función  $f$  con dominio  $X$  mediante la asociación de cada elemento  $x \in X$  con un único elemento  $y$  de  $Y$ ,  $f(x) = y$ ; el contradominio es el conjunto formado por los elementos  $y$  para los que existe un  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ . Si para cada elemento  $y$  de  $Y$  existe sólo un elemento  $x \in X$ , entonces se define la función inversa  $f^{-1}$  con dominio  $Y$ . Consideraremos principalmente funciones con dominio en  $\mathbb{R}$  y contradominio en  $\mathbb{C}$ . Para estas funciones se considera la medida de Lebesgue (Royden, 1988; Rudin, 1987; Reddy y Rasmussen, 1990; Kolmogorov y Fomín, 1978); esta medida es la generalización del concepto de longitud, área y volumen. Una función real valuada es medible si tiene dominio medible y cuando los conjuntos  $\{x \mid f(x) < A\}$  son medibles para todo  $A \in \mathbb{R}$ . Una propiedad se cumple en casi todas partes si el conjunto de puntos en donde no se cumple es de medida cero. Un ejemplo de medida cero es un conjunto numerable.

Una función pertenece al espacio de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$ , para  $1 \leq p < \infty$ , si

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Los espacios de Lebesgue son espacios de Banach. Sus elementos son clases de funciones que coinciden en casi todas partes.

El espacio  $L^2(\mathbb{R})$  es un espacio de Hilbert en donde el producto interno

de dos funciones  $f$  y  $g$  está definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Dos funciones son ortogonales si su producto interno es cero. También se consideran espacios de Lebesgue con funciones definidas en algún subconjunto de los números reales: en ese caso se substituye  $\mathbb{R}$  por ese subconjunto. Cuando sea claro que se refiere a la recta real se abreviará escribiendo  $L^2$ .

Una sucesión es una función definida en los enteros y denotada por  $\{t_k\}$ . Una sucesión  $\{t_k\}$ , donde  $t_k \in \mathbb{C}$ , pertenece al espacio de Hilbert de las sucesiones sumables,  $l^2(\mathbb{Z})$  o  $l^2$ , si

$$\sum_k |t_k|^2 < \infty. \quad (\text{A.1})$$

El soporte de una función es la cerradura del conjunto de puntos en donde la función no es cero

$$\text{sop } f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}},$$

en donde la barra indica la cerradura del conjunto.

## Bases

Una base del espacio  $V$  es una sucesión de vectores  $\{v_k\}$  o funciones  $\{v_k(t)\}$  con la propiedad de representación única: cada vector  $v$  o cada función  $v(t)$  del espacio se puede representar en una y sólo una forma como  $v = \sum c_k v_k$  o  $v(t) = \sum c_k v_k(t)$ . Una base tiene dos propiedades: independencia lineal y completéz. Al agregar más vectores se destruye la independencia, al quitar vectores se elimina la completéz. Cuando los vectores son ortonormales la independencia es automática.

En el caso de dimensión infinita pueden existir bases que no son estables. Por ejemplo, las funciones  $1, t, t^2, t^3, \dots$  constituyen una base del espacio  $L^2[0, 1]$ , las funciones de cuadrado integrable sobre el intervalo  $[0, 1]$ , sin embargo los productos internos  $\langle t^k, t^l \rangle = 1/(k+l+1)$  se acercan a cero tanto como se quiera, lo que ocasiona problemas en la práctica con la ortogonalidad entre las funciones. En este tipo de casos la base es inestable y los coeficientes

$c_k$  se salen de control. Para evitar esa dificultad y tener un caso sano se pide que los coeficientes satisfagan la relación

$$A\|v\|^2 \leq \sum_k |c_k|^2 \leq B\|v\|^2,$$

para constantes positivas  $A$  y  $B$ , para evitar el problema anterior o que los coeficientes sean enormes. Resumiendo, un conjunto numerable  $\{f_k\}$  de un espacio de Hilbert es una base de Riesz si cada elemento  $f$  del espacio puede ser escrito de manera única como  $f = \sum_k c_k f_k$  y si existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tales que

$$A\|v\|^2 \leq \sum_k |c_k|^2 \leq B\|v\|^2. \quad (\text{A.2})$$

Una base de Riesz se le conoce también como una base estable, base incondicional o base uniformemente independiente (Strang y Nguyen, 1996). Una base de Riesz es ortogonal si los elementos  $f_k$  son mutuamente ortogonales. En este caso  $A = B = 1$ .

## Operadores

Un operador es una función cuyo dominio y contradominio son espacios vectoriales. Consideraremos sólo operadores que sean lineales y continuos de un espacio de Hilbert  $S$  en sí mismo. La norma de un operador  $T$  se define como el supremo de las evaluaciones del operador en la esfera unitaria:

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\|.$$

El operador  $T^*$  es el adjunto del operador  $T$  si

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle, \quad (\text{A.3})$$

para todo  $f, g \in S$ . El núcleo de un operador está dado por

$$\ker T = \{x \in S \mid Tx = 0\},$$

y su rango por

$$\text{ran } T = \{Tx \mid x \in S\}.$$

Un operador  $F$  es invertible si su núcleo es igual a  $\{0\}$  y si existe un operador acotado  $G$  tal que  $GF = FG = 1$ . El número de condición de un operador  $T$  está definido como  $\kappa = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ . Un operador es autoadjunto si  $T^* = T$  y es unitario si  $T^* = T^{-1}$ .

Un operador  $T$  es una proyección cuando  $T^2 = T$ , donde  $T^2 \equiv TT$ . El rango y el núcleo de una proyección forman una descomposición en suma directa del espacio. Una proyección es ortogonal si su rango es ortogonal a su núcleo. Una proyección es ortogonal si y sólo si es autoadjunta.

El teorema de la proyección dice lo siguiente (Reddy y Rasmussen, 1990): sea  $S$  cualquier subespacio lineal cerrado de un espacio  $H$  de Hilbert, entonces son válidos los siguientes enunciados:

- (i)  $H = S + S^\perp$ ,
- (ii) cada  $u \in H$  puede expresarse unívocamente como  $u = v + w$ , donde  $v \in S$  y  $w \in S^\perp$ ,
- (iii) existe una y sólo una proyección ortogonal  $P$  con  $\text{ran } P = S$ .

Podemos decir que  $P$  es la proyección sobre  $S$  paralela a  $S^\perp$ , puesto que para cada  $v \in S$  y cada  $w \in S^\perp$  se tiene que  $P(v) = v$  y  $P(w) = 0$ .



# Bibliografía

Battle, G., 1987, A block spin construction of ondelettes: *Comm. Math. Phys.*, **110**, 601–615.

Beylkin, G., Coifman, R., and Rokhlin, V., 1991, Fast wavelet transforms and numerical algorithms I: *Comm. Pure and Appl. Math.*, **44**, 141–183.

Beylkin, G., and Torr sani, B., 1996, Implementation of operator via filter banks: Autocorrelation shell and hardy wavelets: *Appl. and Comput. Harmonic Anal.*, **3**, 164–185.

Boschetti, F., Hornby, P., and Horowitz, F. G., 2001, Wavelet based inversion of gravity data: *Exploration Geophysics*, **32**, 48–55.

Brown, A. R., 1996, Interpreter’s corner - Seismic attributes and their classification: *The Leading Edge*, **15**, no. 10, 1090.

Brown, A. R., 2001, Understanding seismic attributes: *Geophysics*, **66**, no. 1, 47–48.

Burden, R. L., and Faires, J. D., 1998, *Análisis numérico*, sexta edición: International Thompson Editores.

Burt, P., and Adelson, E., April 1983, The laplacian pyramid as a compact image code: *IEEE Trans. Comm.*, **31**, 482–540.

Calderón, A. P., 1964, Intermediate spaces and interpolation, the complex method: *Stud. Math.*, **24**, 113–190.

Campos-Enríquez, J. O., Chávez-García, F. J., Cruz, H., Acosta-Chang, J. G., Matsui, T., Arzate, J. A., Unsworth, M., and Ramos-López, J., 2004, Shallow crustal structure of Chicxulub impact crater imaged with seismic,

gravity, and magnetotelluric data: inferences about central uplift, in press: *Geophysical Journal International*.

Chakraborty, A., and Okaya, D., 1995, Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet-based methods: *Geophysics*, **60**, no. 06, 1906–1916.

Chapin, D., and Moscher, C., 1997, Method and apparatus for identifying geological structures using wavelet analysis of potential fields: U.S. Patent 5 673 191.

Chapin, D. A., 1997, Wavelet transforms: A new paradigm for interpreting gravity and magnetics data?: 67th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 486–489.

Chen, Q., and Sidney, S., 1997, Seismic attribute technology for reservoir forecasting and monitoring: *The Leading Edge*, **16**, no. 05, 445,447–448,450,453–456.

Chui, C. K., 1992a, *An introduction to wavelets*: Academic Press.

——— 1992b, *Wavelets: a tutorial in theory and applications*: Academic Press.

Claerbout, J. F., 1992, *Earth sounding analysis: procesing versus inversion*: Blackwell Scientific Publications.

Cohen, J. K., and Stockwell, J. W., 2003, CWP/SU: Seismic Unix release no. 36: a free package for seismic research and processing: Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines.

Cohen, L., 1995, *Time frequency analysis*: Prentice Hall.

Daubechies, I., 1988, Orthonormal bases of compactly supported wavelets: *Comm. in Pure Appl. Math.*, **41**, 909–906.

Daubechies, I., 1990, The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis: *IEEE Trans. Inf. Theory*, **36**, 961–1005.

Daubechies, I., 1992, *Ten lectures on wavelets*: Soc. for Ind. and Appl. Math.

Daubechies, I., 1993, Wavelet transform and orthonormal wavelet bases: Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, **47**.

Deighan, A. J., and Watts, D. R., 1997, Ground-roll suppression using the wavelet transform: *Geophysics*, **62**, no. 06, 1896–1903.

Dessing, F. J., and Wapenaar, C. P. A., 1995, Efficient migration with one-way operators in the wavelet transform domain: 65th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1240–1243.

Donoho, P. L., Ergas, R. A., and Villasenor, J. D., 1995, High-performance seismic trace compression: 65th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 160–163.

Ekstedt, F., and Lindberg, M., 1997, Diagonalization of homogeneous linear operators in biorthogonal wavelet bases (preprint): <ftp://ftp.md.chalmers.se/pub/users/mlind/diag-lettere.ps.gz>.

Esteban, D., and Galand, C., 1977, Application of quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes: *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Signal Speech Process.*, 191–195.

Faqui, L., Nurul-Kabir, M. M., and Verschuur, D. J., 1995, Seismic processing using the wavelet transform and the radon transform: *Journal of Seismic Exploration*, **4**, 375–390.

Fedi, M., and Quarta, T., 1998, Wavelet analysis for the regional-residual and local separation of potential field anomalies: *Geophys. Prosp.*, **46**, no. 5, 507–525.

Foufoula-Georgiou, E., and Kumar, P., Eds., 1994, Wavelets in geophysics, volume 4 of **Wavelet Analysis and its Applications** Academic Press, Inc, San Diego.

Frazier, M., Jawerth, B., and Weiss, G., 1991, Littlewood-paley theory and the study of function spaces:, number 79 in *Regional Conference Series in Mathematics* American Mathematical Society, Providence.

Gabor, D., 1946, Theory of communication: *J. Inst. Elec. Eng.*, **93**, no. Part III, 429–457.

- Gao, J., Li, Y., and Chen, W., 1998, On the instantaneous attributes analysis of seismic data via wavelet transform: 68th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1084–1087.
- Gao, J., Dong, X., Wang, W., Li, Y., and Pan, C., 1999, Instantaneous parameters extraction via wavelet transform: IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, **37**, no. 2, 867–870.
- Gao, J., Wu, R., and Wang, B., 2001, A new type of analyzing wavelet and its applications for extraction of the instantaneous spectrum bandwidth: 71th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1937–1940.
- Goupillaud, P., Grossman, A., and Morlet, J., 1984, Cycle-octave and related transforms in seismic analysis: *Geoexploration*, **23**, 85–102.
- Grossman, A., and Morlet, J., 1984, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape: *SIAM J. Math. Ann.*, **15**, 723–736.
- Grubb, H., and Walden, A., 1997, Characterizing seismic time series using the discrete wavelet transform: *Geophys. Prosp.*, **45**, no. 2, 183–205.
- Haar, A., 1910, Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-Systeme: *Math. Ann.*, **69**, 331–371.
- Henry, G., 1997, *Geophysics for sedimentary basins*: Editions Technip.
- Holschneider, M., 1995, *Wavelets: an analysis tool*: Clarendon Press.
- Hornby, P., Boschetti, F., and Horowitz, F. G., 1999, Analysis of potential field data in the wavelet domain: *Geophys. J. Int.*, **137**, 175–196.
- Jawerth, B., and Sweldens, W., An overview of wavelet based multiresolution analyses: Technical Report 1993:1, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1993.
- Kolmogorov, A., and Fomin, S. V., 1978, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*: Ed. Mir.
- Kumar, P., and Fofoula-Georgiou, E., 1994, Wavelet analysis in geophysics: An introduction, In Fofoula-Georgiou and Kumar (1994), 1–43.

Leblanc, G. E., and Morris, W. A., 2001, Denoising of aeromagnetic data via the wavelet transform: *Geophysics*, **66**, no. 6, 1793–1804.

Lemarié, P. G., 1988, Une nouvelle base d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ : *J. de Math. Pures et Appl.*, **67**, 227–236.

Lewis, R., 1995, Wvlt - the imager wavelt library: <http://www.cs.unc.ca/nest/imager/contributions/bobl/top.html>.

Li, X.-P., Zuhlsdorff, L., and Liebhardt, G., 1995, Eliminating the effects of the surface-weathered layer by using an inverse transfer function: 65th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1342–1345.

Li, X.-G., Sacchi, M. D., and Ulrych, T. J., 1996, Wavelet transform inversion with prior scale information: *Geophysics*, **61**, no. 05, 1379–1385.

Li, X.-P., and Haury, J. C., 1995, Characterization of heterogeneities from sonic velocity measurements using the wavelet transform: 65th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 488–491.

Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1997, Fast inversion of large scale magnetic data using wavelets: 67th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 490–493.

Li, X.-G., and Ulrych, T. J., 1995, Tomography via wavelet transform constraints: 65th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1070–1073.

Lozada-Zumaeta, M., and Ronquillo-Jarillo, G., 1996, Transformación ondicular como herramienta de análisis y procesamiento de datos sísmicos: Memorias del VII Simposium de Geofísica y Exhibición de Equipo, AMGE.

Lozada-Zumaeta, M., and Ronquillo-Jarillo, G., 1997a, Aplicaciones de la transformada ondicular en la determinación de atributos sísmicos en sismología de reflexión: Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, 211–212.

——— 1997b, Maximización de la relación señal-ruido en el dominio de la transformada ondicular: Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, 214–215.

——— 1997c, Wavelet transform and seismic attribute: International Geoscience Conference, Moscow, Expanded Abstracts.

Lozada-Zumaeta, M., 2002, Análisis tiempo-frecuencia aplicado al análisis y procesamiento de datos sísmicos de reflexión: Master's thesis, Programa de Posgrado en Ciencias de la Tierra, UNAM.

Magrin-Chagnolleau, I., Steeghs, P., Baraniuk, R., Choi, H., and van Spaendonck, R., 1999, Multiscale texture segmentation of dip-cube slices using wavelet-domain hidden Markov trees: 69th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1512–1515.

Mallat, S., 1989a, Multiresolution approximations and wavelets: Trans. Amer. Math. Soc., **315**, no. 1, 69–87.

——— 1989b, A theory for multiresolution signal decomposition: IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, **11**, 674–693.

Martelet, G., Sailhac, P., Moreau, F., and Diament, M., 2001, Characterization of geological boundaries using 1-D wavelet transform on gravity data: Theory and applications to the Himalayas: Geophysics, **66**, no. 4, 1116–1129.

Meyer, Y., 1986, Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées: Lectures given at the University of Torino, Italy.

Meyer, Y., 1993, Wavelets: Algorithm and applications: Soc. for Ind. and Appl. Math.

Moreau, F., Gibert, D., Holschneider, M., and Saracco, G., 1999, Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Basic theory: Journal of Geophysical Research, **104**, 5003–5013.

Moreau, F., 1995, Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes: Ph.D. thesis, Univ. de Rennes I.

Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D., 1982a, Wave propagation and sampling theory - Part I: Complex signal and scattering in multilayered media: Geophysics, **47**, no. 02, 203–221.

——— 1982b, Wave propagation and sampling theory - Part II: Sampling theory and complex waves: Geophysics, **47**, no. 02, 222–236.

Okaya, D. A., Karageorgi, E., McEvelly, T. V., and Malin, P. E., 1992, Removing vibrator-induced correlation artifacts by filtering in frequency-uncorrelated time space: *Geophysics*, **57**, no. 07, 916–926.

Oppenheim, A. V., and Schaffer, R. W., 1989, *Discrete-time signal processing*: Prentice Hall.

Pinsky, M. A., 2003, *Introducción al análisis de Fourier y las ondas*: International Thompson.

Reddy, J., and Rasmussen, M. L., 1990, *Análisis matemático avanzado*: Ed. Limusa.

Ridsdill-Smith, T. A., and Dentith, M. C., 1999, The wavelet transform in aeromagnetic processing: *Geophysics*, **64**, no. 4, 1003–1013.

Ridsdill-Smith, T. A., 2000, *The application of the wavelet transform to processing of aeromagnetic data*: Ph.D. thesis, University of Western Australia.

Rivera-Recillas, D. E., Enríquez, J. O. C., Lozada-Zumaeta, M., and Ronquillo-Jarillo, G., 2001, Transformada de Hilbert mediante transformada ondicular: Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, 296.

Rivera-Recillas, D. E., Enríquez, J. O. C., Lozada-Zumaeta, M., and Ronquillo-Jarillo, G., 2002, Cálculo de atributos sísmicos mediante la transformada ondicular discreta: Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, 202.

Rivera-Recillas, D. E., Enríquez, J. O. C., Lozada-Zumaeta, M., and Ronquillo-Jarillo, G., 2003a, Aplicaciones del cálculo de atributos sísmicos mediante la transformada ondicular discreta: Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, 134.

——— 2003b, Calculation of seismic attributes with the discrete wavelet transform: 73th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 2028–2031.

Ronquillo-Jarillo, G., Lozada-Zumaeta, M., Navarro-Rodríguez, M., and Alzaga-Ruiz, H., 1997, Seismic attribute applied to a gas reservoir in sand: International Geoscience Conference, Moscow, Expanded Abstracts.

- Ronquillo-Jarillo, G., and Lozada-Zumaeta, M., 1997, Atributos sísmicos y análisis de multirresolución aplicado a la delimitación de un yacimiento de gas: Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM.
- Ronquillo-Jarillo, G., and Lozada-Zumaeta, M., 1998, Multirresolución unidimensional y bidimensional aplicada a un yacimiento de gas: Memorias del VIII Simposium de Geofísica y Exhibición de Equipo, AMGE.
- Rooij, M. D., and Tingdahl, K., 2002, Meta-attributes - the key to multi-volume, multiattribute interpretation: *The Leading Edge*, **21**, 1050-1053.
- Royden, W., 1988, *Real analysis*: Macmillan Publishing Company.
- Rudin, W., 1987, *Functional analysis*: McGraw-Hill.
- Sailhac, P., Galdéano, A., Gibert, D., Moreau, F., and Delor, C., 2000, Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana: *J. Geophys. Res.*, **105**, 19455-19475.
- Saito, N., and Coifman, R. R., 1997, Extraction of geological information from acoustic well-logging waveforms using time-frequency wavelets: *Geophysics*, **62**, no. 06, 1921-1930.
- Sheriff, R. E., 1991, *Encyclopedic dictionary of exploration geophysics*: Soc. Expl. Geophys.
- Simmons, G. F., 1972, *Differential equations with applications and historical notes*: McGraw-Hill.
- Solnes, J., 1992, *Theory of stochastic processes and random vibration with applications in geophysics and engineering*: Instituto de Geofísica, UNAM.
- Spiegel, M. R., 1970, *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*: McGraw-Hill.
- Strang, G., and Fix, G., 1973, A Fourier analysis of the finite element variational method: *Constructive aspects of Functional Analysis*, 796-830.
- Strang, G., and Nguyen, T., 1996, *Wavelets and filter banks*: Wesley-Cambridge Press.

Strömberg, J. ., 1981, A modified Franklin system and higher order spline systems on  $\mathbb{R}^n$  as unconditional bases for Hardy spaces A modified Franklin system and higher order spline systems on  $\mathbb{R}^n$  as unconditional bases for Hardy spaces, Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, 475–494.

Sweldens, W., 1994, Construction and applications of wavelets in numerical analysis: Ph.D. thesis, Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

Taner, M. T., Koehler, F., and Sheriff, R. E., 1979, Complex seismic trace analysis: *Geophysics*, **44**, no. 06, 1041–1063.

Taner, M., and Sheriff, R., 1977, Application of amplitude, frequency, and other attributes to stratigraphic and hydrocarbon determination: Payton, C., Ed. *Seismic stratigraphy - Applications to hydrocarbon exploration*: Am. Assoc. Petr. Geol. Memoir 26, 389–416.

Tchamitchian, P., 1987, Biorthogonalité et théorie des opérateurs: *Rev. Math. Iberoamer.*, **3**, 163–189.

Valens, C., 1999, A really friendly guide to wavelets: <http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html>.

Valle-García, R., and Ramírez-Cruz, L., 2002, Spectral attributes for attenuation analysis in a fractured carbonate reservoir: *The Leading Edge*, **21**, no. 10, 1038–1041.

Ville, J., 1948, Théorie et applications de la notion de signal analytique: *Cables et Transmission*, **2A**, 61–74.

Wapenaar, C. P. A., 1997, Multi-scale AVA analysis: 67th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 218–221.

West, B. P., May, S. R., Eastwood, J. E., and Rossen, C., 2002, Interactive seismic facies classification using textual attributes and neural networks: *The Leading Edge*, **21**, no. 10, 1042–1049.

Wu, Y., and McMechan, G. A., 1995, Wavefield extrapolation in the wavelet domain with application to poststack migration: 65th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1236–1239.



# Relación de figuras

1.1.	Esquema de adquisición sísmica marina; en tierra se emplean geófonos para detectar la respuesta. Las principales fuentes de energía son explosiones de dinamita o pistolas de aire. . . . .	2
1.2.	Algoritmo piramidal. Para cada pareja $x_1, x_2$ de un renglón se calcula su promedio $(x_1 + x_2)/2$ y la mitad de su diferencia $(x_1 - x_2)/2$ . . . . .	6
1.3.	Funciones de Haar (a) $\varphi(t)$ y (b) $\psi(t)$ . . . . .	7
1.4.	Ejemplo introductorio de transformada ondicular. . . . .	8
2.1.	Núcleo de integración $e^{-i\omega t}$ de la transformada de Fourier (a) $\omega = 3$ , (b) $\omega = 6$ y (c) $\omega = 9$ . Las líneas continuas representan las partes reales y las líneas punteadas representan las partes imaginarias. . . . .	17
2.2.	Filtro pasa bajas ideal que muestra (a) periodicidad en la respuesta de frecuencia (b) un período, en donde $0 < \omega_c \leq \pi/2$ . (c) Filtro pasa altas ideal que muestra un período, en donde $\pi/2 < \omega_c \leq \pi$ (Oppenheim y Schaffer, 1989). . . . .	19
2.3.	(a) Núcleo de integración de la transformada de Gabor $g_{\omega,t}(u) = g(u-t)e^{-i\omega u}$ , en donde $g(t) = (1/2\sqrt{\pi\alpha}) e^{-t^2/(4\alpha)}$ para $\omega_1 = 3$ , $\omega_2 = 6$ , $\omega_3 = 9$ y $t = 0$ . Las líneas continuas representan las partes reales, las líneas punteadas representan las partes imaginarias y también se muestra la envolvente. (b) Representación de la resolución de la transformada de Gabor en el plano tiempo contra frecuencia en donde $\sigma_g$ y $\sigma_{\dot{g}}$ son las dispersiones de $g$ en tiempo $t$ y frecuencia $\omega$ . . . . .	21
2.4.	Algunos ejemplos de las ondículas $\psi_{\lambda,t}(u)$ . La ondícula $\psi_{1/2,-5}(u)$ está comprimida y $\psi_{2,10}(u)$ está dilatada. . . . .	24

- 2.5. (a) Ondículas  $\psi_{\lambda,t}(u)$  para  $\lambda = 1, 2, 1/2$  y  $t = 0$ . (b) Espectro de esas ondículas  $|\widehat{\psi_{\lambda,t}}(\omega)|$ . . . . . 25
- 2.6. (a) Núcleo de integración de la transformada de ondícula (ondícula de Morlet); las líneas continuas representan las partes reales y las líneas punteadas representan las partes imaginarias. (b) Representación de la resolución de la transformada de ondícula en el plano tiempo contra frecuencia. . . . . 26
- 2.7. (a) Ondícula de Haar. (b) Ondícula de sombrero mexicano. . . 27
- 2.8. (a) Ondícula de Morlet aproximada. La línea continua es la parte real y la punteada es la parte imaginaria. (b) Espectro de la ondícula de Morlet aproximada. . . . . 28
- 2.9. Espectro de la ondícula de Morlet aproximada en 2 dimensiones. Este tipo de ondículas permite realizar un análisis espectral de funciones dependientes de dos variables,  $t$  y  $t'$ , para las frecuencias correspondientes,  $\omega$  y  $\omega'$ . . . . . 29
- 2.10. Algoritmo piramidal. . . . . 42
- 2.11. Algoritmo piramidal para la transformada ondicular (a) directa e (b) inversa. . . . . 45
- 2.12. Análisis multirresolutivo de un registro sínico de pozo. (a) El registro sínico de pozo. (b) Coeficientes ondiculares del registro usando los filtros de Haar. Las proyecciones de esta señal sobre los espacios (c)  $V_j$  y (d)  $W_j$  para la escala  $i = 10, 9, \dots, 0$ . . . . . 47
- 3.1. Algoritmo de diagonalización ondicular. Entrada:  $\mathbf{x}$ . Salida:  $\mathbf{Kx}$ . (a) Transformada ondicular discreta usando los nuevos filtros  $\mathbf{h}^K$  y  $\mathbf{g}^K$  (flechas sólidas). (b) Multiplicaciones y una convolución (flechas con puntos). (c) Transformada ondicular discreta usando los filtros originales de síntesis  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{g}$  (flechas segmentadas). . . . . 57
- 3.2. (a) Un perfil gravimétrico (Campos-Enríquez et al., 2004). (b) Derivada del perfil mediante transformada ondicular con eliminación de frecuencias altas. (c) Derivada del perfil mediante el método de cinco puntos. (d) Derivada mediante transformada de Fourier. . . . . 59

3.3. Base ondicular biortogonal correspondiente a la factorización  $10/6$  de los filtros semibanda de Daubechies de máximo aplanamiento (maxflat Daubechies halfband filters). (a) Función de escalamiento de análisis  $\tilde{\varphi}$ . (b) Función de escalamiento de síntesis  $\varphi$ . (c) Filtro pasa bajas de análisis  $\tilde{\mathbf{h}} = [1, 1, -8, 8, 62, 62, 8, -8, 1, 1]/128$ . (d) Filtro pasa bajas de síntesis  $\mathbf{h} = [-1, 1, 8, 8, 1, -1]/16$ . (e) Ondícula de análisis  $\tilde{\psi}$ . (f) Ondícula de síntesis  $\psi$ . (g) Filtro pasa altas de análisis  $\tilde{\mathbf{g}} = [-1, -1, 8, -8, 1, 1]/16$ . (h) Filtro pasa altas de síntesis  $\mathbf{g} = [1, -1, -8, -8, 62, -62, 8, 8, 1, -1]/128$ . . . . . 61

3.4. Nueva base ondicular biortogonal correspondiente al operador de Hilbert para la base de la Figura 3.3. (a) Función de escalamiento de análisis  $\tilde{\varphi}^K$ . (b) Función de escalamiento de síntesis  $\varphi^K$ . (c) Filtro pasa bajas de análisis  $\tilde{\mathbf{h}}^K$ . (d) Filtro pasa bajas de síntesis  $\mathbf{h}^K$ . (e) Ondícula de análisis  $\tilde{\psi}^K$ . (f) Ondícula de síntesis  $\psi^K$ . (g) Filtro pasa altas de análisis  $\tilde{\mathbf{g}}^K$ . (h) Filtro pasa altas de síntesis  $\mathbf{g}^K$ . . . . . 62

4.1. Esquema a bloques de la construcción de una señal compleja a partir de una señal real. . . . . 65

4.2. (a) Señal real. (b) Transformada de Hilbert de la señal. (c) Señal analítica constuida con las dos anteriores (Taner y Sheriff, 1977). . . . . 66

4.3. Filtro discreto de Hilbert utilizando una ventana de Hamming. 68

4.4. Organización en la que se implementó el algoritmo. Al sistema CWP/SU se le agregó la biblioteca WVLT modificada. Los nombres con diagonal al final representan directorios. Los nombres en recuadro representan los directorios o programas elaborados para implementar la técnica aquí expuesta. Hay muchos directorios y archivos que no se presentan y están señalados por puntos suspensivos. . . . . 70

4.5. Modelo anticlinal de yacimiento en arenas (Henry, 1997); velocidades: arcilla 2440 m/s, arena con gas 1375 m/s, arena con aceite 2090 m/s, arena con agua 2370 m/s. . . . . 71

4.6. (a) Parte de la sección sísmica sintética como ondas. (b) La sección sintética como imagen. . . . . 73

4.7. Envolvente de amplitud de la sección sísmica sintética (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular. . . . . 74

4.8. Fase instantánea de la sección sísmica sintética (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular. . . . .	75
4.9. Frecuencia instantánea de la sección sísmica sintética (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular. . . . .	76
4.10. Sección sísmica real. . . . .	77
4.11. Sección sísmica real. . . . .	78
4.12. Envoltente de amplitud de la sección sísmica real (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular. . . . .	80
4.13. Fase instantánea de la sección sísmica real (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular. . . . .	81
4.14. Frecuencia instantánea de la sección sísmica real (a) con método tradicional, (b) con diagonalización ondicular. . . . .	82
4.15. Sección sísmica real. (a) Gráfica de trazas. (b) Gráfica de imagen. . . . .	84
4.16. Atributos sísmicos convencionales para la sección sísmica. (a) La sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . .	88
4.17. Análisis multirresolutivo de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La sección sísmica (considerada como proyección sobre $V_{11}$ ); proyecciones de la sección sobre (b) $V_{10}$ , (c) $W_{10}$ , (d) $V_9$ , (e) $W_9$ , (f) $V_8$ , (g) $W_8$ , (h) $V_7$ , (i) $W_7$ . . . . .	89
4.18. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio $V_{10}$ de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . .	90
4.19. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio $V_9$ de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . .	90
4.20. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio $V_8$ de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . .	91
4.21. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio $V_7$ de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . .	91

- 4.22. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_{10}$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . . 92
- 4.23. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_9$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . . 92
- 4.24. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_8$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . . 93
- 4.25. Atributos sísmicos convencionales para la proyección sobre el espacio  $W_7$  de la sección sísmica. (a) La proyección de la sección sísmica. (b) Envoltente de amplitud. (c) Fase instantánea. (d) Frecuencia instantánea. . . . . 93
- 4.26. Análisis multirresolutivo de la envoltente de amplitud de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La envoltente de amplitud; sus proyecciones sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ . . . . . 94
- 4.27. Análisis multirresolutivo de la fase instantánea de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La fase instantánea; sus proyecciones sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ . . . . . 95
- 4.28. Análisis multirresolutivo de la frecuencia instantánea de la sección sísmica con la base de Daubechies de orden 6. (a) La frecuencia instantánea; sus proyecciones sobre (b)  $V_{10}$ , (c)  $W_{10}$ , (d)  $V_9$ , (e)  $W_9$ , (f)  $V_8$ , (g)  $W_8$ , (h)  $V_7$ , (i)  $W_7$ . . . . . 96



# Notación

## Símbolos

Símbolo	Descripción	Página
$\in$	pertenece, es elemento de ( $x \in A$ )	100
$\subset$	subconjunto	99
$\forall$	para todo	30
$ $	tal que	100
$\widehat{f}(\omega)$	transformada de Fourier de $f$	16
$\bar{z}$	el conjugado complejo del número complejo $z$	99
$\bar{A}$	cerradura de un conjunto	99
$ z $	módulo de un número complejo	99
$\ f\ $	norma de espacio vectorial	99
$\ f\ _p$	norma de $L^p(\mathbb{R})$	100
$\langle f, g \rangle$	producto interno de las funciones $f(t)$ y $g(t)$	101
$\oplus$	suma directa de dos espacios vectoriales	99
$S^\perp$	complemento ortogonal de $S$	100
$T^*$	el adjunto del operador $T$	102
$f^{-1}$	función inversa de $f$	100
$\downarrow 2$	decimación de un arreglo	44
$\mathbb{C}$	el conjunto de números complejos	99
$d(x, y)$	distancia o métrica	100
$\delta(t)$	función delta	20
$\delta_{j,k}$	delta de Kronecker	36
$\mathcal{F}f(t)$	transformada de Fourier de $f$	16
$\mathcal{F}^{-1}F(\omega)$	transformada inversa de Fourier de $F$	16

$G$	filtro pasa bajas de análisis	32, 36
$\tilde{G}$	filtro pasa bajas de síntesis	32
$\mathcal{H}f(t)$	transformada de Hilbert de $f$	65
$H$	filtro pasa bajas de análisis	31, 36
$\tilde{H}$	filtro pasa bajas de síntesis	31
$\ker T$	el núcleo de $T$	103
$l^2(\mathbb{Z}), l^2$	espacio de sucesiones sumables	101
$L^p(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^2$	espacio funcional de Lebesgue	100
$\mathcal{L}(S)$	espacio vectorial generado por $S$	9
$\mathcal{O}(L)$	$\mathcal{O}$ grande, es del orden de, proporcional a	3, 45
$\mathbb{N}$	el conjunto de números naturales	99
$\mathbb{R}$	el conjunto de números reales	99
$\text{ran } T$	el rango de $T$	103
$\text{sop } f$	soporte de la función	101
$\sup_{x \in A} f(x)$	el supremo de $f(x)$ para $x \in A$	102
$W(\lambda, t), W_\psi(\lambda, t)$	coeficiente ondicular	24
$W[\psi; f](\lambda, t)$	"	24
$\mathbb{Z}$	el conjunto de números enteros	99
$\varphi$	función de escalamiento	35
$\tilde{\varphi}$	función de escalamiento dual	35
$\psi$	ondícula	23, 35
$\tilde{\psi}$	ondícula dual	35
$\psi_{\lambda, t}$	ondícula (nivel $\lambda$ , posición $t$ )	23

## Abreviaciones

Abreviación	Descripción	Página
AVO	amplitude versus offset	64
AMR	Análisis multirresolutivo	29
FFT	Transformada rápida de Fourier (fast Fourier transform)	18
FWT	Transformada rápida ondicular (fast wavelet transform)	45
SU	Seismic Unix	68
WVLT	Imager Wavelt Library	68
NMO	normal move out, corrección dinámica	77
DMO	depth move out, corrección en profundidad	77

# Índice analítico

- Adelson, 14
- admisibilidad, condición de, 27
- algoritmo
  - de diagonalización, 55, 57
  - piramidal, 5, 6, 14, 29, 41, 42, 45
- amplitud instantánea, 2, 63
- análisis multirresolutivo, 10, 29
- apilamiento, 64
- atributos sísmicos, 2, 63
  - burdos, 64
  - de eventos, 64
  - de ventana, 64
  - de volumen, 64
  - híbridos, 64
  - meta-atributos, 64
  - mutitraza, 64
- AVO, 64
  
- Banach, espacio de, 99
- banco de filtros, 7
- base, 101
  - de Riesz, 30, 102
  - ondicular biortogonal, 3, 35, 49, 61
- Battle, 35
- Beylkin, 3
- Boschetti, 16
- Brown, 64
- Burden, 58
  
- Burt, 14
  
- Calderón, 14
  - identidad de, 27
- Campos-Enríquez, 56, 59
- Cauchy, sucesión de, 99
- cerradura, 99
- Chakraborty, 15
- Chapin, 16
- Chen, 63, 64
- Chui, 14, 39
- Claerbout, 65
- Cohen, 13, 16
- Coifman, 15
- complemento ortogonal, 100
- condición de admisibilidad, 27
- condiciones de Strang y Fix, 33
- convolución, 18
- Croissier, 14
- cuadratura, 65
- CWP/SU, 68, 69
  
- Daubechies, 1, 3, 14, 15, 23, 35, 60, 85
- decimación, 7, 44
- Deighan, 15
- delta de Kronecker, 36
- denso, 100
- Dentith, 3, 4, 16, 58
- derivación, 51
  - vertical, 51

- Dessing, 15  
 diagonalización de operadores, 49  
 dilatación, 23  
     ecuación de, 31  
 distancia, 99  
 Donoho, 15  
  
 ecuación  
     de dilatación, 31  
     ondicular, 32  
 Ekstedt, 3, 4, 49, 55, 60  
 envolvente de amplitud, 2  
 escalamiento, función de, 30  
 escalas, relación de dos, 31  
 espacio  
     de Banach, 99  
     de Hilbert, 99  
     de sucesiones sumables, 101  
     métrico, 99  
 Esteban, 14  
  
 Faires, 58  
 Faqui, 15  
 fase instantánea, 2, 63  
 Fedi, 16  
 filtro, 18  
     pasa altas, 7, 18, 32  
     pasa bajas, 7, 18, 19, 31  
 Fix, 33  
 Fomin, 100  
 Foufoula, 22  
 Foufoula-Georgiou, 15  
 Fourier, 14  
     coeficientes de, 17  
     serie de, 17  
     transformada de, 1  
 Frazier, 14  
 frecuencia instantánea, 2, 63  
  
 función delta, 20  
 función  
     de escalamiento, 7, 30, 32  
     medible, 100  
     soporte de, 101  
 funciones ortogonales, 101  
  
 Gabor, 20  
 Gabor, transformada de, 1, 20  
 Galand, 14  
 Gao, 4  
 Goupillaud, 3, 13, 14  
 Grossman, 3, 13, 14, 27  
 Grubb, 4, 15  
  
 Haar, 3, 7, 14, 15, 27, 34, 42, 45, 46  
 Henry, 69  
 Hilbert, 65  
     espacio de, 99  
     operador de, 58  
     transformada de, 2, 51, 65  
 Holschneider, 14, 17  
 Hornby, 16  
  
 identidad de Parseval, 17, 26  
 integración, 51  
  
 Jawerth, 1  
  
 Koehler, 3  
 Kolmogorov, 100  
 Kumar, 15  
  
 Lebesgue  
     medida de, 100  
     norma de, 100  
 Leblanc, 16  
 Lemarié, 35  
 Lewis, 68  
 Li X.-G., 15

- Li X.-P., 15
- Li Y., 16
- Lindberg, 3, 4, 49, 55, 60
- Littlewood, 14, 34
- Lozada-Zumaeta, 15, 83
- Lusin, 14
  
- métrica, 99
- MacMechan, 15
- Magrin-Chagnolleau, 4
- Mallat, 14, 30
- Martlet, 16
- medida de Lebesgue, 100
- meta-atributos, 64
- Meyer, 14, 30, 34
- momento de ondícula, 40
- Moreau, 16
- Morlet, 3, 13-15, 27
  - ondícula de, 28, 35
- Morris, 16
- Mosher, 16
- multirresolución, 10, 29
- multirresolutivo, análisis, 10, 29
  
- número de condición de operador, 103
- Nguyen, 5, 14, 23, 60, 102
  
- Okaya, 15
- Oldenburg, 16
- ondícula, 1, 7
  - de Battle-Lemarié, 35
  - de Daubechies, 35
  - de Haar, 7, 14, 27, 34, 46
  - de Littlewood-Paley, 34
  - de Meyer, 34
  - de Morlet, 25, 28, 29, 35
  - de sombrero mexicano, 25, 27, 28
  - de Strömberg, 34
  - definición, 23
  - diseño de, 34
- ondeleta, 1
- ondelette, 1
- ondicular
  - ecuación, 32
  - transformada, 9, 23
- ondoleta, 1
- operador, 102
  - acotado, 103
  - adjunto, 102
  - autoadjunto, 103
  - lineal homogéneo, 50, 51
  - núcleo, 103
  - número de condición, 103
  - rango, 103
  - unitario, 103
- Oppenheim, 13, 16, 67
  
- Paley, 14, 34
- Parseval, identidad de, 17, 26
- Pinsky, 1
- Poission, sumatoria de, 17
- potencial de Riesz, 3, 51
- producto infinito, 33
- proyección, 103
  - ortogonal, 103
  - paralela, 103
  - teorema de la, 103
  
- Quarta, 16
  
- Ramírez-Cruz, 64
- Rasmussen, 100, 103
- Reddy, 100, 103
- relación de dos escalas, 31
- Ridsdill-Smith, 3, 4, 16, 58, 67, 69
- Riemann, 14

- Riesz  
 base de, 30, 102  
 potencial de, 3, 51
- Rivera-Recillas, 4
- Ronquillo-Jarillo, 15, 83
- Rooij, 64
- Royden, 100
- Rudin, 100
- Sailhac, 16
- Saito, 15
- Seismic Unix, 68, 69
- Sheriff, 2, 3, 63, 65
- Sidney, 63, 64
- Simmons, 16
- Solnes, 13, 16, 58
- soporte, 101  
 compacto, 23
- Spiegel, 17
- Strömberg, 14, 34
- Strang, 5, 14, 23, 33, 45, 60, 102
- SU, 68, 69
- suma  
 directa, 99
- sumatoria  
 de Poission, 17
- Sweldens, 1, 17, 23
- Taner, 3, 63, 65
- Tchamitchian, 35
- Torrésani, 3
- transformada  
 z, 18  
 de Fourier, 1, 13, 16  
 inversa, 16  
 rápida, 18  
 de Gabor, 1, 13, 20  
 inversa, 20
- de Hilbert, 2, 51, 65
- ondicular, 1, 9, 13, 23  
 continua, 24  
 discreta, 40  
 inversa, 27  
 rápida, 41
- traslación, 23
- Ulrych, 15
- Valens, 5, 14
- Valle-García, 64
- vecindad, 99
- Ville, 14
- Walden, 4, 15
- Wapenaar, 15
- Watts, 15
- wavelet, 1, 14
- West, 64
- Wu, 15
- WVLT, 68