

01162



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**HIDRODINÁMICA Y CALIDAD DE AGUA
EN UNA MARINA**

TESIS

Como requisito para obtener el grado de

**Maestro en Ingeniería
(Ingeniería Civil - Hidráulica)**

Presenta

BEATRIZ EDITH VEGA SERRATOS

DIRECTOR DE TESIS

Dr. OSCAR A. FUENTES MARILES



m343238

MÉXICO, D.F.

MARZO 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Lista de Figuras	iv
Lista de Tablas	v
INTRODUCCIÓN	vii
1. CONCEPTOS BÁSICOS	1
1.1 Definiciones	1
1.2 Aspectos generales de una marina	2
1.3 Estudios previos	3
1.3.1 Evaluación del sitio	3
1.3.2 Geología del lecho marino y obras de protección	4
1.4 Estudios topohidrográficos	4
1.5 Estudios oceanográficos	5
1.6 Estudios de dinámica litoral	5
1.7 Estudios de mecánica de suelos	6
1.8 Estudios hidráulicos	6
1.9 Estudio con modelos matemáticos hidráulicos	7
1.10 Estudios de la embarcación de diseño	7
1.11 Otros estudios	7
2. HIDRODINÁMICA DE LA MARINA	9
2.1 Introducción	9
2.2 Aspectos generales	9
2.3 Objetivos del modelo hidrodinámico	10
2.4 Características físicas	10
2.4.1 Geometría de los cuerpos de agua en estudio	10
2.4.2 Propiedades de los fluidos	11
2.4.3 Comportamiento del flujo	11
2.4.4 Fuerzas externas	12

2.5 Ecuaciones para obtener la hidrodinámica	12
2.5.1 Ecuación de continuidad	12
2.5.2 Ecuación de cantidad de movimiento	17
2.6 Ecuaciones promediadas en la vertical	28
2.6.1 Ecuación de continuidad	28
2.6.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento	29
2.6.3 Esfuerzos de Reynolds	35
2.6.3.1 Modelos de turbulencia	36
2.6.4 Condiciones de contorno	40
2.6.4.1 Esfuerzo tangencial en la superficie	40
2.6.4.2 Esfuerzo tangencial en el fondo	41
2.6.5 Consideraciones finales	42
3. CALIDAD DEL AGUA EN LA MARINA	45
3.1 Introducción	45
3.2 Modelo de difusión-advección	46
3.2.1 Advección	46
3.2.2 Difusión	50
3.2.3 Coeficiente de dispersión	52
3.3 Cálculo de las concentraciones de OD y DBO dentro de la marina	52
3.3.1 Concentración de demanda bioquímica de oxígeno (DBO)	53
3.3.2 Concentración de oxígeno disuelto (OD)	53
3.4 Coeficientes de intercambio	54
4. MODELO NUMÉRICO	57
4.1 Introducción	57
4.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección X	57
4.3 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección Y	60
4.4 Ecuación de continuidad	62
4.5 Condiciones de frontera	66

4.5.1 Obstáculos al paso del agua	67
4.5.2 Marea	67
5. CASO DE APLICACIÓN	71
5.1 Descripción del problema	71
5.2 Localización del área de estudio	72
5.3 Recopilación de información	73
5.3.1 Batimetría	73
5.3.2 Mareas	75
5.3.3 Clasificación del tipo de marea	76
5.4 Definición del problema	76
5.5 Casos	77
5.6 Marina con geometría original	78
5.6.1 Difusión-Advección de la marina (Geometría original)	79
5.7 Marina con geometría modificada	82
5.7.1 Difusión-Advección de la marina (Geometría modificada)	84
6. CONCLUSIONES	87
BIBLIOGRAFÍA	89
ANEXO 1 Análisis hidrodinámico de la marina. Geometría original	A1-1
ANEXO 2 Análisis hidrodinámico de la marina. Geometría modificada	A2-1
ANEXO 3 Concentraciones relativas promedio. Geometría original	A3-1
ANEXO 4 Concentraciones relativas promedio. Geometría modificada	A4-1

LISTA DE FIGURAS (*Capítulo 1*)

Figura 1.1 Plano de Marina Puerto Aventuras	2
--	---

LISTA DE FIGURAS (*Capítulo 2*)

Figura 2.1 Definición de volumen de control	13
Figura 2.2 Flujo de masa en un volumen de control	14
Figura 2.3 Esfuerzos actuantes sobre un volumen de control	17
Figura 2.4 Descomposición de variables	33

LISTA DE FIGURAS (*Capítulo 3*)

Figura 3.1 Gastos forzados por bombeo	47
Figura 3.2 Balance de masa en un volumen de control	48

LISTA DE FIGURAS (*Capítulo 4*)

Figura 4.1 Ubicación de las variables independientes	48
Figura 4.2 Comparación entre la marea medida y pronosticada	68

LISTA DE FIGURAS (*Capítulo 5*)

Figura 5.1 Diseño original de la marina	71
Figura 5.2 Plano de localización	72
Figura 5.3 Planos portulanos de la zona en estudio	73
Figura 5.4 Batimetría calculada de la zona en estudio	74
Figura 5.5 Malla de la marina utilizada en el modelo numérico	76
Figura 5.6 Velocidades medias para un tiempo de simulación de 20 h	79
Figura 5.7 Concentración relativa de contaminantes (Gastos de infiltración)	81
Figura 5.8 Concentración relativa de contaminantes (Gastos de bombeo)	81
Figura 5.9 Geometría modificada de la marina	82
Figura 5.10 Velocidades medias en la marina modificada	83
Figura 5.11 Concentración relativa de contaminantes (Gastos de infiltración)	85
Figura 5.12 Concentración relativa de contaminantes (Gastos de bombeo)	85

LISTA DE TABLAS (*Capítulo 5*)

Tabla 5.1 Características principales de la marea	75
Tabla 5.2 Principales constantes armónicas	75
Tabla 5.3 Velocidades medias en la marina	78
Tabla 5.4 Concentraciones relativas promedio. Gastos de ingreso por infiltración	80
Tabla 5.5 Concentraciones relativas promedio. Gastos de ingreso por bombeo	80
Tabla 5.6 Velocidades medias en la marina. Geometría modificada	83
Tabla 5.7 Concentraciones relativas promedio, gastos de ingreso por infiltración. Geometría modificada	84
Tabla 5.8 Concentraciones relativas promedio, gastos de ingreso por bombeo. Geometría modificada	84

INTRODUCCIÓN

Uno de los desarrollos turísticos que más auge han tenido en los últimos años en el mundo son los conjuntos hoteleros o residenciales cerca de las playas, los cuales generalmente tienen un área donde las embarcaciones pueden detenerse o permanecer durante varios días. Estos conjuntos conocidos como marinas, presentan una serie de aspectos de ingeniería hidráulica y ambiental que deben ser estudiados para tener una buena planeación y asegurar su buen funcionamiento. En ello juega un papel muy importante la calidad del agua alojada en el interior de estos recintos marítimos.

La calidad del agua de las marinas está fuertemente relacionada con el movimiento del agua debido a agentes externos tales como la marea astronómica, el régimen de vientos y descargas puntuales de ríos. Tal movimiento se lleva a cabo con velocidades de flujo y niveles de la superficie libre variables en el tiempo.

Los procesos que intervienen en la calidad del agua y otros como el de arrastre de sedimentos dependen del comportamiento hidrodinámico de la marina. Este consiste en el patrón de flujo y variación de las elevaciones de la superficie libre a lo largo del tiempo.

El cálculo de la hidrodinámica se basa en leyes de la física y en varios de los factores mas importantes que intervienen en el movimiento del agua. Entre estos se incluyen la variación del nivel del mar, los ingresos de agua en la bocana de la marina, muelles y muros.

Con base en la cantidad de agua que entra a la marina durante cada ciclo de marea, el tipo de sustancias diluidas en sus aguas, la distribución temporal de las concentraciones de estas sustancias dentro de la marina, se puede evaluar la calidad de agua por medio de diversos conjuntos de modelos numéricos, cada uno de estos conjuntos está compuesto por dos modelos, siendo el primero un modelo hidrodinámico y el segundo, un modelo de difusión-advección.

En esta tesis se tiene como objetivo proponer un modelo hidrodinámico bidimensional en diferencias finitas y puede tener anchos de celda variables en el espacio, que sirve de

soporte a un modelo de difusión-advección para estimar la calidad del agua dentro una marina durante su funcionamiento normal; así como, también bajo condiciones forzadas (bombes o infiltraciones). Para ello se obtiene el patrón hidrodinámico de la marina, se detectan las áreas de la marina con menor intercambio de agua de mar. Además se analiza la distribución las concentraciones de Oxígeno Disuelto (OD) y Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO).

El contenido de esta tesis consiste en los siguientes capítulos:

El capítulo 1 describe los conceptos básicos necesarios a tomar en cuenta para el diseño de una marina, esto es, los estudios iniciales y los análisis numéricos involucrados en la planeación y construcción de una marina.

En el capítulo 2 se explica la deducción matemática general de las ecuaciones así como también la premediación en la vertical de estas. Las ecuaciones se utilizan en el modelo hidrodinámico bajo ciertas consideraciones ya que se adaptaron al caso de aplicación.

El capítulo 3 incluye las ecuaciones de difusión-advección utilizadas para determinar las concentraciones de OD y DBO para así obtener el análisis de la calidad de agua dentro de la marina.

El capítulo 4 muestra la discretización de las ecuaciones del modelo numérico en diferencias finitas. Por otro lado, explica las condiciones de frontera consideradas.

El capítulo 5 describe el caso de aplicación, el cual, consiste en analizar el funcionamiento de una marina propuesta para un desarrollo turístico en Playa Mujeres; el estudio se hace para un diseño inicial y posteriormente se propone modificar la geometría de la marina. También se hace un análisis en donde se utilizan diferentes bombes de extracción.

Finalmente se comenta en las conclusiones los diseños que se proponen bajo ciertas condiciones de funcionamiento y algunas futuras líneas de trabajo.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 Definiciones

Se denomina marina al conjunto de espacios terrestres, aguas oceánicas e instalaciones que, situada en la riva del mar, reúne las condiciones físicas, naturales o artificiales, y de organización para la realización de operaciones de tráfico de embarcaciones deportivas o de recreación de una forma segura y económica.

Según su origen los puertos se clasifican en **artificiales y naturales**. Son puertos naturales los constituidos por las aguas abrigadas por la misma disposición natural del terreno que se destinan al anclaje de temporada de embarcaciones de pesca y deportivas o de recreo. Son puertos artificiales aquellos que requieren de obras de ingeniería para su formación, tales como dragados, construcción de canales de acceso, obras de protección entre otras.

Los puertos, las dársenas y las instalaciones portuarias se clasifican, por razón de su uso o destino, en comerciales, industriales, militares, pesqueros, deportivos, de investigación científica y mixtos, según se dediquen, respectivamente, de manera exclusiva o principal, a una o a varias de estas actividades.

Son **puertos comerciales** los abrigos marinos en los cuales tienen inicio o fin operaciones de transporte por agua de personas o de bienes, así como actividades comerciales portuarias, entendiendo por tales las operaciones de estiba, desestiba, carga, descarga, transbordo y almacenamiento de mercancías de cualquier tipo, en volumen o forma de presentación que justifiquen la utilización de medios mecánicos o instalaciones especializadas. En razón a las características de su tráfico reúnen condiciones técnicas, de seguridad y de control administrativo para que en ellos se realicen dichas actividades.

Son **militares**, los puertos que sirven de base permanente a las embarcaciones de las Fuerzas Armadas, formen o no parte de una instalación militar.

Los **puertos pesqueros**, son aquellos que sirven de base a flotas de embarcaciones pesqueras y disponen de instalaciones adecuadas para la recepción o conservación de los productos de las capturas, e inclusive para la transformación industrial de dichos productos.

Son **deportivos**, regiones marinas que sirven de base a flotas de embarcaciones dedicadas a la actividad turística, deportiva o recreacional. Cuando en ellos se efectúen operaciones relacionadas con el transporte de personas, aun con fines recreacionales, estarán sometidos al régimen de los puertos comerciales.

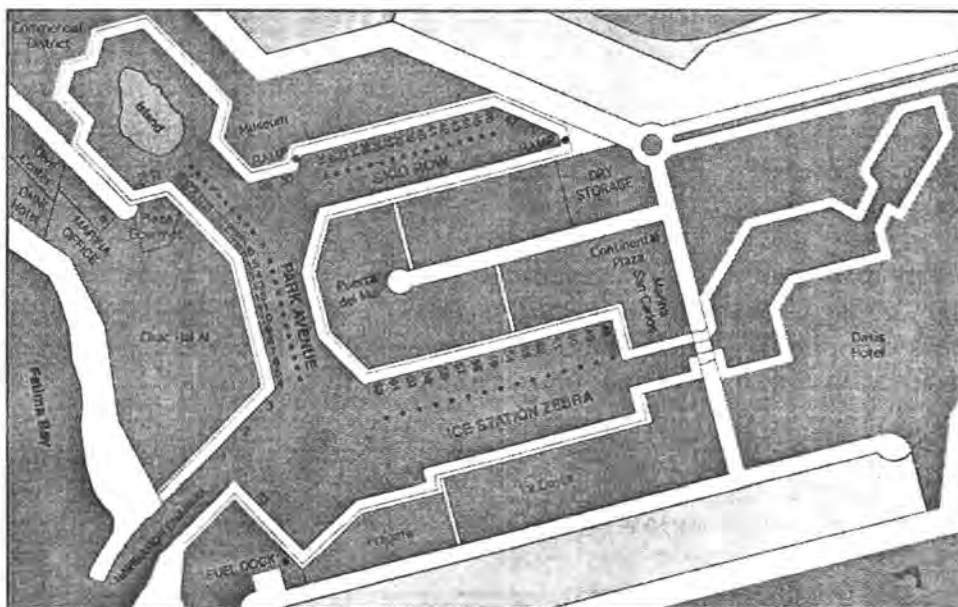


Figura 1.1 Plano de Marina Puerto Aventuras. Cancún, Quintana Roo.

De **investigación científica**, los puertos que sean de uso de instituciones públicas o privadas de investigación o actividades de exclusivo carácter científico.

Cuando en un mismo puerto coexistan dos o más funciones, los espacios e instalaciones previamente delimitados y destinados a cada función, se considerarán separadamente como un puerto, para todos los fines legales.

1.2 Aspectos generales de una marina

Las marinas son puertos cercanos a las playas, los cuales son diseñados para varios tipos de embarcaciones en los que se incluyen veleros, yates y botes de remos entre otros. En estos puertos se realizan actividades deportivas, acuáticas y de recreación.

Por las funciones que se desempeñan en las marinas, estas deben cumplir con ciertos requisitos desde el punto de vista de la ingeniería hidráulica, como protección contra el oleaje y facilidad de atraque a las embarcaciones que hacen uso de sus instalaciones; la marina debe tener tanto en el canal de acceso como en el interior las profundidades suficientes a lo largo de todas las mareas que se presenten para permitir una navegación estable dentro de esta. En cuanto a requisitos fundamentales que debe cumplir una marina están el que tenga la capacidad suficiente para fondeo, servicios, accesos a la playa y con respecto al funcionamiento, que el diseño permita un intercambio de agua (hidrodinámica), con respecto al cuerpo adyacente, suficiente para tener una buena calidad de agua dentro de la marina.

1.3 Estudios previos

Independientemente del tamaño o extensión del proyecto para el desarrollo de una marina es necesario realizar estudios previos de factibilidad los cuales involucran aspectos socioeconómicos.

La escala del estudio de factibilidad dependerá de la extensión que se ha propuesto para el desarrollo, esto incluirá una valoración tanto ingenieril como financiera. En general el propósito de este estudio será el de evaluar el potencial del sitio seleccionado asegurándose de reunir o cumplir con las funciones específicas de una marina.

1.3.1 Evaluación del sitio

La selección del sitio donde habrá de desarrollarse el proyecto de un puerto deportivo, se realiza en las primeras etapas del proceso de planeación de dicha obra. La selección del sitio involucra los factores que a continuación se describen

- El sitio debe ser tal que se haya verificado previamente la demanda de los puestos de atraque.
- El sitio debe contar con las condiciones adecuadas para una navegación segura.
- Es recomendable que cuente con accesos terrestres adecuados para el transporte de las embarcaciones y acceso propiamente de los usuarios al puerto.
- En el sitio se debe contar con un área de agua suficiente, protegida y con un calado adecuado a fin de evitar dragados excesivos.
- Es conveniente que el área de tierra sea lo suficientemente extensa para dar cabida a las instalaciones terrestres, incluyendo además el área necesaria para crecimientos posteriores.

- Es recomendable que en el sitio se cuente con los servicios básicos como son agua potable, electricidad, teléfono y alcantarillado.
- El sitio no debe ser ubicado en zonas de preservación histórica o zonas de reserva ecológica.
- Factores sociológicos. Esto es, llegar a un acuerdo económico y/o de reubicación de los usuarios iniciales del terreno.

Una buena evaluación del sitio debe proveer suficiente información teniendo en cuenta los costos involucrados en cada etapa del proyecto y debe subrayar los posibles problemas de tipo ingenieril.

1.3.2 Geología del lecho marino y obras de protección

Cualquier marina requiere una cimentación apropiada para la construcción de sus obras de protección, esto es muy importante si el predio tiene demanda para zona de servicios o construcción residencial. Si se agrega que el área de la marina es propensa a problemas de sedimentación, entonces será necesario promover la investigación de estudios que controlen las posibles consecuencias. Esta situación se presenta con frecuencia en los sitios costeros ya que el sedimento marino puede acumularse a profundidades considerables en aquellos puertos en los que existe un bajo o nulo mantenimiento. Los mapas geológicos del área a desarrollar son la primera fuente de información que se utiliza para evaluar la estructura del suelo.

El reconocimiento y observaciones de los niveles del agua y del terreno, del material de la playa, etc. junto con simples y pequeñas pruebas, de mecánica de suelos, cuando existe marea baja, esto es, para determinar la consistencia y batimetría del lecho marino, pueden proveer un complemento valioso para conocer aproximadamente un panorama general.

Por otro lado, si se planea en el proyecto de una marina una ampliación, se deben analizar a detalle las propiedades del material que se encuentra en el sitio. Las mediciones en campo deben ser necesarias y deben adaptarse para proveer suficiente información de la zona para cubrir los principales elementos de construcción.

1.4 Estudios topohidrográficos

Dichos estudios comprenden la ejecución de una poligonal de apoyo en el sitio que haya sido elegido para la construcción del proyecto. Las coordenadas de dicha poligonal se pueden obtener mediante el empleo del Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés). Se incluye también en este estudio la ejecución de monumentos para

señalar los vértices de la poligonal. Se debe establecer además como mínimo un banco de nivel y realizar la topografía del predio.

Otro aspecto también de importancia para la ejecución del puerto, es la realización de la batimetría del fondo marino empleando para ello el sistema de posicionamiento por satélite para definir las coordenadas X e Y, así como el empleo de una ecosonda para definir las profundidades (Z).

A continuación, con el propósito de ligar la batimetría con la parte terrestre de la costa se debe realizar un seccionamiento playero y la delimitación de la zona federal marítimo terrestre.

1.5 Estudios oceanográficos

Tales estudios están comprendidos básicamente por los de corrientes que se presentan en el sitio de interés; que a su vez, éstas pueden ser de densidad, generadas por el viento, de marea, y de turbidez.

Otro de los estudios que se realizan es el de oleaje, mismo que tienen por objeto conocer sus parámetros más significativos como son la altura de ola y período principalmente, factores que son de mucha importancia en el diseño de las obras de protección y niveles de agitación en el interior del puerto. Se requiere además del estudio de mareas, a fin de estimar sus niveles más importantes para el diseño de las obras ya citadas y de otros factores en el puerto.

Finalmente, un último estudio indispensable que influye en gran medida en el diseño es el de vientos.

1.6 Estudios de dinámica litoral

Uno de los efectos que provoca la construcción de las obras de protección, es el bloqueo del transporte litoral que a su vez da origen a una modificación en el equilibrio de las playas adyacentes a dichas obras. Esto significa que en la costa situada corriente arriba de estas estructuras, se origina un proceso de sedimentación provocando el avance hacia el mar de la línea de costa. Por otra parte, en la costa ubicada corriente abajo se presenta un proceso erosivo ocasionando que la línea de costa avance tierra adentro.

Además, para el conocimiento de la dinámica litoral se realizan los estudios de propagación de oleaje, zonificación del perfil de playa, granulometría y estimación del transporte sólido litoral.

1.7 Estudios de mecánica de suelos

El objetivo que persiguen es determinar las características mecánicas del suelo en donde habrán de construirse las diversas obras del puerto. El estudio comprende pozos a cielo abierto y sondeos.

En los primeros se obtienen muestras alteradas e inalteradas con el propósito de conocer parámetros como el contenido de agua, granulometría, límites de Atterberg y densidad de sólidos. Además de realizar ensayos de compresión simple y compresión triaxial, entre otros.

Por otra parte, los sondeos se realizan tanto en la zona de tierra como en la zona de agua. En ellos además de la prueba de penetración estándar, se obtienen muestras inalteradas mediante tubo de pared delgada. Aquí se requiere conocer los parámetros de contenido de agua, límites de consistencia, densidad de sólidos, contenido de finos, y al igual que con los pozos a cielo abierto, se realizan ensayos de compresión simple, compresión triaxial y ensayos de consolidación unidimensional.

1.8 Estudios hidráulicos

Los aspectos hidráulicos para desarrollar una marina deben cubrir los siguientes puntos

- Predicción del oleaje en el sitio de la marina,
- Medición o predicción de mareas en el sitio de la marina,
- Estabilidad y efectividad de los rompeolas,
- *Condiciones hidrodinámicas en el interior de la marina construida,*
- Sedimentación en la entrada, canal de acceso e interior de la marina,
- *Análisis de calidad de agua dentro de la marina,*
- Construcción de los fondeaderos y atracaderos,
- Impacto del recinto en la morfología externa, esto es, efectos en la marea, transporte litoral en playas aledañas, etc.,
- Accesibilidad a la marina de varios tipos de usuarios (señalamientos, sistemas de seguridad, etc.), y
- Mantenimiento mediante dragado.

Se puede utilizar una variedad de métodos, incluyendo estudios de escritorio basados en experiencias previas e información local, estudios de campo donde extensivas mediciones fueron tomadas con el fin de entender los procesos hidráulicos existentes, modelos matemáticos asistidos por computadora que predicen el efecto de los cambios mediante resultados numéricos, estudios de laboratorio que involucran modelos físicos de pequeña o grande escala, y cálculos teóricos utilizando conocimientos de procesos físicos en conjunto con datos del sitio.

1.9 Estudio con modelos matemáticos hidráulicos

Es posible aceptar que como regla general los estudios con modelos matemáticos son necesarios para el diseño del proyecto final. Tales modelos hidráulicos son empleados para optimizar el diseño y verificar el adecuado funcionamiento del puerto. En la investigación con modelos matemáticos generalmente se busca estimar o conocer factores como los mostrados a continuación.

- Determinar la configuración más económica de las obras de protección que den abrigo adecuado a las embarcaciones dentro del puerto ante la acción del oleaje principalmente.
- Estimar la altura de ola en el interior del puerto.
- Analizar las condiciones de oleaje y corrientes en la entrada del puerto.
- Conocer cualitativamente los efectos de las estructuras de protección en el proceso del transporte litoral.
- Analizar las condiciones de inundación.
- Analizar las condiciones de profundidad en la entrada del puerto.

1.10 Estudio de la embarcación de diseño

La embarcación o embarcaciones de diseño son seleccionadas con base en un estudio del tipo y tamaño de éstas que se espera hagan uso del puerto. Aquí cabe mencionar que se pueden tener diferentes barcos de diseño dependiendo esto de una posible división en zonas del puerto.

1.11 Otros estudios

Existen otros estudios que son necesarios y son de gran importancia, tales como evaluaciones técnicas y financieras así como el estudio de mercado en las etapas iniciales

de planeación y diseño de una marina ya que la construcción de una marina implica una gran inversión, la cual, se debe recuperar mediante la venta de los mismos servicios que esta ofrecerá.

Así pues, en este trabajo se pretende hacer hincapié en los estudios hidráulicos que involucran la hidrodinámica y la calidad del agua dentro de la marina debido a que estos aspectos se ven directamente reflejados en el impacto ambiental que implica la construcción de la obra.

CAPÍTULO 2

HIDRODINÁMICA DE LA MARINA

2.1 Introducción

En años recientes se han incrementado los cuestionamientos relativos a la calidad del agua en marinas, este aspecto es de gran importancia en la planeación y diseño de marinas y pequeños puertos, así pues, los trabajos de ingeniería deben realizarse de manera correcta ya que pueden presentarse efectos desfavorables en las características hidráulicas y a su vez en la calidad del agua convirtiendo la marina en un simple depósito de agua, en el cual el agua no tiene la adecuada circulación y esto conlleva a que la calidad del agua disminuya notablemente.

Ahora, con los avances en cuestiones de cómputo se han desarrollado modelos numéricos y el uso de éstos se ha incrementado teniendo como resultado la predicción de las corrientes producidas por mareas y a su vez el comportamiento de marinas grandes y pequeños puertos.

La necesidad de utilizar un modelo es debido a las siguientes razones. Primero, cuando se tiene la tarea de diseñar una nueva marina o modificar una ya existente, se presentan muchas opciones con respecto a condiciones de diseño originales, asociadas a estas pueden disminuir los problemas de la calidad del agua. Por otro lado, la pobre circulación y a su vez el poco intercambio de agua (entre la marina y el mar) son problemas que con frecuencia existen, estos ocurren debido a grandes regiones de estancamiento particularmente en los meses de verano cuando el viento es insignificante o nulo.

Es importante notar que las marinas tienen una demanda creciente como centros de recreación debido a que se han vigilado y controlado los aspectos de contaminación hidroecológica y ambiental.

2.2 Aspectos generales

En los recintos a estudiar, es necesario determinar varios aspectos de ingeniería hidráulica y ambiental para estimar la eficiencia del funcionamiento. La calidad del agua

de estos cuerpos depende del movimiento de este líquido, el cual, se lleva a cabo con velocidades diferentes y profundidades variables a lo largo del día; la concentración de las sustancias vertidas en el interior es función de las velocidades.

El movimiento del agua es debido principalmente al cambio del nivel del mar originado por la marea astronómica. El gasto que entra o sale de la marina por el canal de acceso (natural o artificial) entre el mar y el recinto depende del volumen que éste puede admitir en un momento determinado y de las características propias de la marea local.

La capacidad de almacenamiento de la marina depende de la batimetría y del uso que se le da a ésta, es decir el agua que entra y sale en un momento determinado está en función principalmente de las características geométricas del acceso, la topografía y la marea. Por lo anterior, es necesario revisar el diseño para evitar problemas de erosión o sedimentación, esto con la finalidad de mantener la geometría de la marina constante.

2.3 Objetivos del modelo hidrodinámico

El objetivo del estudio hidrodinámico de un cuerpo de agua, en este caso de la marina, consiste en determinar el patrón de velocidades de flujo y las elevaciones de la superficie libre del agua a lo largo del tiempo. El cálculo debe considerar la variación del nivel del mar, los ingresos y egresos de agua dentro de la marina, si existen, debe tomarse en cuenta los obstáculos y la forma de estos al paso del flujo dentro de la marina tales como islas, puentes y otras construcciones, así como la vegetación.

2.4 Características físicas

2.4.1 Geometría de los cuerpos de agua en estudio

La geometría se caracteriza por tener:

1. Una superficie libre
2. La pendiente del fondo es suave, esto es, el ángulo de inclinación α es semejante a $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ y no existe un cambio abrupto en la topografía bajo el agua (batimetría).
3. Bajo nivel de agua, es decir, la profundidad del agua o tirante h es mucho más pequeño que la longitud característica del cuerpo de agua L , $h \ll L$. Generalmente se requiere que $h/L < 10^{-3} \sim 10^{-4}$.
4. El valor de la escala espacial horizontal es frecuentemente entre 1m y 1000 km, según Weiyan (2001). Generalmente entre 100 m y 10 km.

2.4.2 Propiedades de los fluidos

1. Las propiedades físicas y mecánicas permanecen constantes, no tienen un salto en algunos puntos aislados.
2. *Viscosidad.* Para flujos laminares, el fluido puede describirse aproximadamente como un flujo newtoniano, en donde la viscosidad molecular juega un papel muy importante. Para flujos turbulentos es un fluido no-newtoniano, que es el que se presenta en las marinas.
3. *Incompresibles.* La densidad de un elemento fluido no cambia con el movimiento. El efecto en el flujo por la variación volumétrica puede ser despreciado.
4. *Homogeneidad.* El fluido, como medio de transportación de masa y conducción de carga está bien mezclado o la distribución espacial de la densidad no tiene influencia sobre el flujo. No se considera el flujo por capas debidos a la sedimentación, salinidad, contaminación, temperatura, etc. El gasto y transporte pueden calcularse por separado tomando en cuenta el resultado del nivel del agua y la velocidad del flujo como datos de entrada o iniciales en las ecuaciones de transporte. La homogeneidad junto con la incompresibilidad significa que la densidad ρ es constante. Generalmente se fijan los valores del peso específico para agua fresca de 1000 kg/m^3 y para agua de mar de 1025 kg/m^3 .
5. *Isotropía.* Se refiere a los parámetros de las propiedades del material; así como el coeficiente de viscosidad μ , éste no varía con la dirección.

2.4.3 Comportamiento del flujo

1. En el cálculo del flujo en aguas de poca profundidad y poca extensión es común tomar un plano horizontal particular como un plano de coordenadas, ignorando la curvatura de la tierra.
2. Debido a la poca profundidad se supone una distribución uniforme de la velocidad horizontal, esto es, un flujo tridimensional intrínseco puede ser simplificado en un solo plano, integrando la velocidad horizontal sobre la vertical para obtener el valor de la profundidad promedio e ignorando los efectos de las velocidades en la vertical.
3. La temperatura es generalmente considerada como constante, puesto que la producción de calor debido a la fricción disipada y la transferencia de calor es insignificante.
4. La elevación de la superficie varía gradualmente con una pequeña curvatura, así que se compara con la aceleración gravitacional, la aceleración en la dirección vertical puede ser ignorada. Esto puede formularse si se asume la distribución de la presión hidrostática (lineal) en la vertical siendo una buena aproximación en regiones de flujo

continuo. Medidas especiales deben tomarse en casos donde existe una pendiente del fondo extrema y discontinuidades como saltos hidráulicos.

5. El efecto de la tensión superficial se puede ignorar
6. El flujo tiene una escala en el tiempo comprendida entre un segundo y varios días.

2.4.4 Fuerzas externas

1. La gravedad es la fuerza principal inicial y gobernadora del flujo y ocasiona el nombre de "onda de gravedad". La batimetría es la principal manifestación de los efectos de la gravedad.
2. Fuerza inercial de Coriolis, debido a la rotación de la tierra sobre su propio eje.
3. Elevación de la marea debido a las fuerzas ejercidas por la luna y el sol.
4. Fuerzas de fricción entre el flujo y el fondo. En este término se puede incluir la disipación de energía mecánica debido a la viscosidad molecular y turbulenta.
5. Esfuerzo debido al viento sobre la superficie del agua.

Los tres primeros puntos son fuerzas de cuerpo, donde sus valores son relacionados o están en función de la profundidad del agua, mientras que los últimos dos son fuerzas de superficie.

2.5 Ecuaciones para obtener la hidrodinámica

2.5.1 Ecuación de continuidad

Se considera un volumen de control infinitesimal de caras $\Delta x \Delta y \Delta z$ con las componentes de velocidad u, v, w , definidas en el centro del volumen, como se observa en la Figura 2.1, se considera que se conocen todas las derivadas en ese punto.

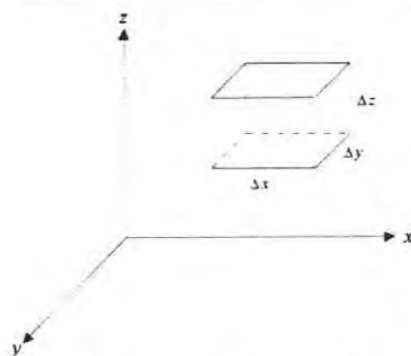


Figura 2.1. Definición volumen de control

Aplicando el desarrollo en series de Taylor, definido para cualquier característica del fluido ϕ (presión, velocidad, salinidad...)

Dirección X

$$\phi \left[x \pm \frac{\Delta x}{2} \right] = \phi(x) \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} \right] \pm \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 \phi(x)}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} \right] + \dots \quad (2.1)$$

Dirección Y

$$\phi \left[y \pm \frac{\Delta y}{2} \right] = \phi(y) \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi(y)}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} \right] \pm \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 \phi(y)}{\partial y^3} \frac{\Delta y^3}{3!} \right] + \dots \quad (2.2)$$

Dirección Z

$$\phi \left[z \pm \frac{\Delta z}{2} \right] = \phi(z) \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \frac{\Delta z}{1!} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} \frac{\Delta z^2}{2!} \right] \pm \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 \phi(z)}{\partial z^3} \frac{\Delta z^3}{3!} \right] + \dots \quad (2.3)$$

En las ecuaciones anteriores se puede asumir que los términos mayores al segundo orden son despreciables ya que al ser desarrollados se observa que son muy pequeños comparados con los términos de primer orden.

El flujo de masa se define como la cantidad de masa por unidad de tiempo

$$F_{masa} = \frac{m}{t} \quad (2.4)$$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.5)$$

$$F_{masa} = \frac{\rho V}{t} \quad (2.6)$$

$$Q = \frac{V}{t} \quad (2.7)$$

$$F_{\text{masa}} = \rho Q \quad (2.8)$$

$$Q = vA \quad (2.9)$$

$$F_{\text{masa}} = \rho vA \quad (2.10)$$

donde: m , masa; t , tiempo; ρ , densidad; V , volumen; Q , Caudal; v , velocidad.

Apoyándose en el desarrollo en series de Taylor, el flujo de masa por unidad de área en cada una de las caras del cubo infinitesimal es:

$$\rho u \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) = \rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (2.11)$$

$$\rho u \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (2.12)$$

$$\rho v \left(y - \frac{\Delta y}{2} \right) = \rho v - \frac{\partial \rho v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \quad (2.13)$$

$$\rho v \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right) = \rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \quad (2.14)$$

$$\rho w \left(z - \frac{\Delta z}{2} \right) = \rho w - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \quad (2.15)$$

$$\rho w \left(z + \frac{\Delta z}{2} \right) = \rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \quad (2.16)$$

Lo anterior se indica en la Figura 2.2

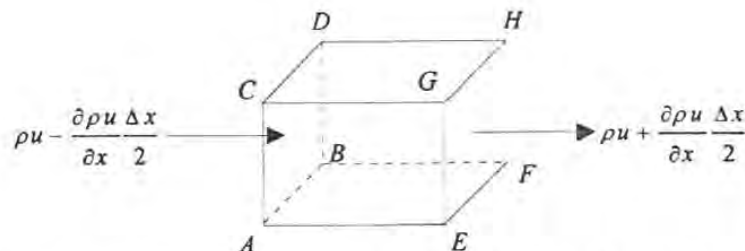


Figura 2.2. Flujo de masa en un volumen de control

Para la dirección x, el flujo de masa que entra a través de ABCD en un intervalo de tiempo Δt es:

$$M_{ent} = \left[\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.17)$$

el flujo que sale por EFGH es:

$$M_{sale} = \left[\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.18)$$

el flujo neto de masa en la dirección x es

$$M_{Neto} = M_{ent} - M_{sale} \quad (2.19)$$

$$M_{neto} = \left[\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t - \left[\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.20)$$

$$M_{neto x} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.21)$$

realizando lo mismo para las dirección Y y Z, el flujo neto para cada dirección es

$$M_{neto y} = - \frac{\partial \rho v}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.22)$$

$$M_{neto z} = - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.23)$$

El flujo neto de masa en todo el volumen de control es

$$M_{neto} = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.24)$$

La cantidad de masa en un instante t , dentro del volumen de control es

$$M = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.25)$$

con base en el desarrollo de Taylor, se obtiene

$$M \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) = \rho \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial (\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} \quad (2.26)$$

$$M\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \rho \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} \quad (2.27)$$

el incremento de la masa en Δt , es

$$M(\Delta t) = M\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - M\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (2.28)$$

$$M(\Delta t) = \rho \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} - \rho \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} \quad (2.29)$$

$$M(\Delta t) = \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \Delta t \quad (2.30)$$

Igualando 2.24 y 2.30 se obtiene

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \Delta t \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.33)$$

La ecuación 2.33 es la ecuación de continuidad tridimensional, esta ecuación se aplica a todo tipo de flujos, incluidos los flujos turbulentos compresibles no estacionarios.

Si el flujo es incompresible $\partial \rho / \partial t = 0$, la ecuación 2.33 queda

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.34)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (2.35)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (2.36)$$

$$\rho \operatorname{div} V + V \operatorname{grad} \rho = 0$$

como $\rho = \text{constante}$ y $\rho \neq 0$ entonces $\operatorname{grad} \rho = 0$, $\rho \operatorname{div} V = 0$

$$\text{div} V = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.38)$$

2.5.2 Ecuación cantidad de movimiento

• Formulación general

Para obtener las ecuaciones de cantidad de movimiento para un flujo no estacionario tridimensional, la segunda ley de Newton establece que la sumatoria de las fuerzas externas actuando por unidad de masa deben ser iguales a la variación de cantidad de movimiento, es decir:

$$\sum F = \frac{D(mV)}{Dt} = m \frac{DV}{Dt} + V \frac{Dm}{Dt} \quad (2.39)$$

donde F es la fuerza resultante, m es la masa y V es la velocidad, si se establece la conservación de masa, $\partial m / \partial t = 0$

$$\sum F = m \frac{DV}{Dt} \quad (2.40)$$

Esta ecuación se puede desarrollar considerando las componentes de las fuerzas en la Figura 2.3. para un volumen de control de caras dx, dy, dz .

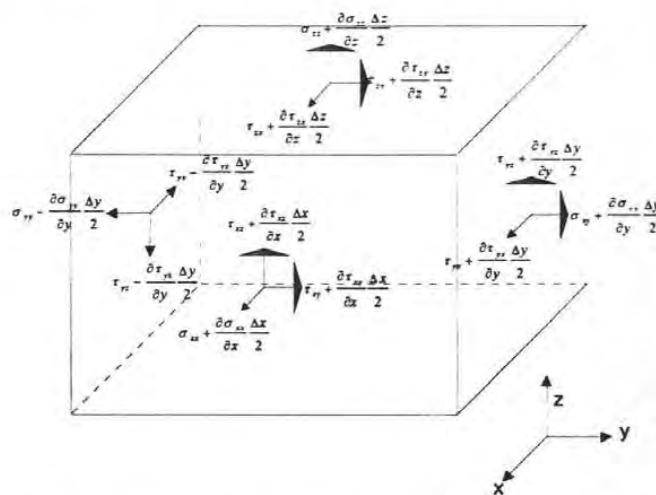


Figura 2.3. Esfuerzos actuantes sobre un volumen de control

En los esfuerzos anteriores el primer subíndice indica la cara donde actúa el esfuerzo en la dirección indicada por el segundo subíndice. Las fuerzas en la dirección X, incluyen dos tensiones tangenciales y una tensión normal, las cuales están dadas por σ_{xx} , τ_{yx} , τ_{zx} , y la fuerza másica X. La tensión normal incluye la presión y está dada por:

$$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx} \quad (2.41)$$

Si se asume que el volumen de control del elemento permanece constante, al aplicar la ecuación 2.40 se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{Du}{Dx} = & \rho X \Delta x \Delta y \Delta z + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\ & + \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{Du}{Dx} = \rho X \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.43)$$

si se reemplaza 2.41 en 2.43 se obtiene

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{Du}{Dx} = \rho X \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.44)$$

$$\rho \frac{Du}{Dx} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \quad (2.45)$$

La ecuación anterior es conocida como ecuación de Saint-Venant en la dirección X.

La derivada total se define como:

$$\frac{Du}{Dx} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

En la cual el primer término a la derecha del signo igual representa la aceleración local y los otros tres términos la aceleración convectiva.

Si expresamos la ecuación 2.45 en términos de las deformaciones, es conveniente establecer que la propiedad física que caracteriza la resistencia de los fluidos a la deformación es la viscosidad.

Por lo tanto, tenemos que los esfuerzos se expresan de la siguiente manera

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.46)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.47)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.48)$$

Por analogía con los esfuerzos tangenciales, los esfuerzos normales a los planos x, y, z , se pueden expresar como

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.50)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.51)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones 2.46, 2.47 y 2.49 en la ecuación 2.45 se obtiene,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)}{\partial z} \quad (2.52)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.53)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.54)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.55)$$

La ecuación anterior es la ecuación de Navier-Stokes en la dirección X para un flujo compresible. Al aplicar la ecuación de continuidad se obtiene

$$\rho \frac{Du}{Dx} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.56)$$

la cual es la ecuación de Navier Stokes para un flujo incompresible.

En las zonas someras y estuarios el flujo es altamente turbulento y la ecuación 2.56 debe ser modificada. Para obtener la ecuación de cantidad de movimiento, en la dirección X, para flujos turbulento incompresibles, se multiplica la ecuación de continuidad, 2.38, por u , y se le suma la ecuación 2.56, como se describe a continuación

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.57)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} = \\ \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} = \\ \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.62)$$

Si los efectos de la rotación de la tierra se desprecian y se asume Z como la coordenada vertical

$$\begin{aligned}
 X &= 0 \\
 Y &= 0 \\
 Z &= -g
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

Por otro lado, cuando los efectos de la rotación de la tierra no se pueden despreciar se debe considerar la aceleración debida al movimiento relativo la cual es conocida como fuerza de Coriolis cuyos componentes en la direcciones x , y y z son

$$\begin{aligned}
 F_x &= 2 \Omega (v \sin \phi - w \cos \phi) \\
 F_y &= -2 \Omega u \sin \phi \\
 F_z &= 2 \Omega u \cos \phi
 \end{aligned}$$

Estas aceleraciones se incluyen en las ecuaciones de cantidad de movimiento como:

$$\begin{aligned}
 X &= +2v\omega \sin \phi \\
 y &= -2u\omega \sin \phi \\
 z &= -g
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

donde ω es la rotación de la tierra, igual a 7.3×10^{-5} rad/s y ϕ es la latitud de la zona de interés

si $f = 2\omega \sin \phi$ y se sustituye (2.64) en (2.62) se obtiene

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \rho f v - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)
 \tag{2.65}$$

En la práctica, resolver esta ecuación con los métodos numéricos actuales es computacionalmente muy costoso, debido al enorme rango de escalas que intervienen en su cálculo, siendo necesario resolver el problema con escalas espaciales y temporales más pequeñas menores del milímetro y del milisegundo respectivamente.

• Ecuaciones fundamentales para flujo turbulento

Para el objeto de esta tesis, lo que interesa no son las escalas microscópicas sino las características medias del flujo como con las distribuciones medias de velocidad, temperatura y densidad. Por lo tanto, se utiliza para describir un flujo la aproximación sugerida por Osborne Reynolds, que consiste en separar las ecuaciones en dos grupos: uno que representa el movimiento medio y otro que describe las desviaciones respecto a la media:

$$u = \bar{u} + u_t \quad (2.66)$$

donde $\bar{u}$ es la componente de la velocidad promediada en el tiempo y u_t es la velocidad fluctuante, dadas por

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt \quad (2.67)$$

$$u_t = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_t dt = 0 \quad (2.68)$$

Δt es el periodo de promediación adecuado para separar correctamente el movimiento medio de las fluctuaciones

Expresando las velocidades, presión y densidad según la ecuación 2.66 y sustituyendo en la ecuación 2.65 se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(\bar{\rho} + \rho_t \right) \left(\bar{u} + u_t \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\bar{\rho} + \rho_t \right) \left(\bar{u} + u_t \right) \left(\bar{u} + u_t \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\bar{\rho} + \rho_t \right) \left(\bar{u} + u_t \right) \left(\bar{v} + v_t \right)}{\partial y} \\ & + \frac{\partial \left(\bar{\rho} + \rho_t \right) \left(\bar{u} + u_t \right) \left(\bar{w} + w_t \right)}{\partial z} = f \left(\bar{\rho} + \rho_t \right) \left(\bar{v} + v_t \right) - \frac{\partial \left(\bar{P} + P_t \right)}{\partial x} + \\ & \mu \left(\frac{\partial^2 \left(\bar{u} + u_t \right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(\bar{v} + v_t \right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\bar{w} + w_t \right)}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

al desarrollar el argumento del primer término de la ecuación anterior, se tiene:

$$\left(\bar{\rho} + \rho_t \right) \left(\bar{u} + u_t \right) = \overline{\bar{\rho} \bar{u} + \bar{\rho} u_t + \rho_t \bar{u} + \rho_t u_t} = \bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho_t u_t} \quad (2.70)$$

ya que:

$$\overline{\rho u_i} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\rho u_i) dt = \frac{\rho}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_i dt = 0 \quad (2.71)$$

Operando de la misma manera con el resto de los términos y teniendo en cuenta que, en el agua, generalmente, las fluctuaciones de densidad son muy pequeñas comparadas con la densidad media, mientras que las fluctuaciones de la velocidad pueden ser del mismo orden que la velocidad media, los términos que tienen correlaciones entre fluctuaciones de densidad y de velocidad son pequeños comparados con aquellos que contienen relaciones entre componentes de la velocidad, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} & \overline{(\bar{\rho} + \rho_i)(\bar{u} + u_i)(\bar{u} + u_i)} = \\ & \overline{(\bar{\rho}\bar{u} + \bar{\rho}u_i + \rho_i\bar{u} + \rho_i u_i)(\bar{u} + u_i)} = \\ & \overline{\bar{\rho}\bar{u}\bar{u} + \bar{\rho}\bar{u}u_i + \rho_i\bar{u}\bar{u} + \rho_i\bar{u}u_i + \bar{\rho}u_i\bar{u} + \bar{\rho}u_iu_i + \rho_i\bar{u}u_i + \rho_iu_iu_i} \\ & = \bar{\rho}\bar{u}\bar{u} + \bar{\rho}u_iu_i \end{aligned} \quad (2.72)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}u_i\bar{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}u_i\bar{v}_i}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho}u_i\bar{w}_i}{\partial z} \\ & = f\bar{\rho}\bar{v} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{w}}{\partial z} \\ & = f\bar{\rho}\bar{v} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{\rho}u_i\bar{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}u_i\bar{v}_i}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}u_i\bar{w}_i}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

La ecuación de continuidad, 2.38, multiplicada por $\bar{u}$, queda:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.75)$$

$$\bar{u} \frac{\partial (\bar{u} + u_i)}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial (\bar{v} + v_i)}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial (\bar{w} + w_i)}{\partial z} = 0 \quad (2.76)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \quad (2.77)$$

si a la ecuación 2.74 se le resta la ecuación 2.77 y a su vez se divide por $\bar{\rho}$ se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = f \bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{\rho} \overline{u_i u_i} \right) \\ + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \bar{\rho} \overline{u_i w_i} \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

al comparar la ecuación 2.78 con la ecuación original de Navier-Stokes, 2.56, se aprecia que los valores instantáneos de velocidad, presión y densidad han sido substituidos por sus valores promediados en el tiempo y además han aparecido tres nuevos términos

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\rho} \overline{u_i u_i} \right), -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho} \overline{u_i v_i} \right), -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} \overline{u_i w_i} \right)$$

los términos entre paréntesis son conocidos como tensiones de Reynolds y representan el transporte de cantidad de movimiento debido al movimiento turbulento. Pueden interpretarse como un mecanismo disipador. Estos términos, en el flujo turbulento, son mucho mas grandes que las tensiones viscosas, excepto en las proximidades de una superficie sólida.

Al despreciar las tensiones viscosas y eliminando la barra de las cantidades promediadas, para simplificar las expresiones, la ecuación 2.78 se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

La expresión anterior es para el eje X, realizando un procedimiento similar para los ejes Y y Z, se obtienen las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujo turbulento, las cuales se escriben a continuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{v_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{v_i w_i} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{w_i v_i} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{w_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{w_i w_i} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

• Hipótesis hidrostática

Los dominios de aplicación del modelo a desarrollar son áreas cerradas o semicerradas como bahías y estuarios, cuya característica principal es el diferente orden de magnitud entre sus dimensiones horizontales y verticales: la extensión horizontal generalmente es de varios kilómetros, mientras que su profundidad es del orden de decenas de metros. Debido a lo anterior los procesos de cantidad de movimiento y de transporte se realizan en una escala diferente en las direcciones horizontal y vertical.

La circulación en el dominio anteriormente definido es predominantemente horizontal, lo que supone que las aceleraciones verticales son despreciables frente a la aceleración de la gravedad. Lo anterior conduce a la hipótesis de distribución hidrostática de presiones, cuya validez ha sido probada incluso en el caso de flujos propagándose sobre fondos con apreciables irregularidades en la vertical (Koutitas y O'Connor, 1981).

Al introducir la hipótesis hidrostática en la ecuación 2.81, se eliminan las aceleraciones verticales y las tensiones tangenciales, la ecuación que se obtiene da como resultado una ecuación de variación de la presión hidrostática

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (2.82)$$

• Aproximación de Boussinesq

Para flujos que cumplan unas determinadas condiciones que se describen más adelante, Boussinesq (1903), propuso que se pueden despreciar las variaciones de densidad en el fluido, excepto en el término de gravedad, donde aparece el producto ρg .

Un primer caso en el que no se puede aplicar esta simplificación, es un flujo estacionario con un número de Mach grande, esto mayores a 0.3 hasta 1. Este número se define como u/c , donde u es la velocidad típica en el fluido y c es la velocidad del sonido en el medio.

En números de Mach grandes los efectos de compresibilidad no son despreciables debido a que grandes cambios de presión causan cambios en la densidad del fluido, sin embargo, este efecto deja de ser importante para números de Mach menores a 0.3. Para el agua $c = 1470 \text{ m/s}$ y la velocidad u es mucho menor, por lo que esta hipótesis es aceptable.

Cuando la escala vertical del flujo es tan grande que las variaciones de la presión hidrostática causan grandes variaciones en la densidad, se tiene una segunda situación en la cual la compresibilidad es importante, para que se cumpla la aproximación de Boussinesq se requiere que la escala vertical, L , cumpla $L \ll c^2/g$.

Para introducir esta hipótesis en las ecuaciones de movimiento se asume que el estado básico del fluido es hidrostático (no existe movimiento) definido por presión, p_o , y densidad ρ_o . Por lo tanto, el movimiento se produce sólo por las variaciones de presión p' y densidad ρ' :

$$\begin{aligned} P &= p_o + p' \\ \rho &= \rho_o + \rho' \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde $p' \ll p_o$ y $\rho' \ll \rho_o$

Al sustituir la ecuación 2.83 en la ecuación 2.79 se obtiene

$$\begin{aligned} (\rho_o + \rho') \left(\frac{Du}{Dt} - fv \right) &= \frac{\partial (p_o + p')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_t u_t} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_t v_t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_t w_t} \right) \end{aligned} \quad (2.84)$$

y al aplicar Boussinesq

$$\rho_o \frac{Du}{Dt} - \rho_o fv = \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_t u_t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_t v_t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_t w_t} \right) \quad (2.85)$$

Una vez introducidas las dos hipótesis (hidrostática y de Boussinesq) se necesita expresar el término desconocido de variaciones de presión, p' , en función de las cantidades conocidas. Para esto se utiliza la ecuación 2.82 expresada según la ecuación 2.83

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g(\rho_o + \rho') \quad (2.86)$$

Integrando la ecuación anterior desde cualquier profundidad z hasta la superficie libre $z = \eta(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \int_z^\eta dP &= - \int_z^\eta g (\rho_o + \rho') dz \\ P_\eta - P_z &= -g \left(\int_z^\eta \rho_o dz + \int_z^\eta \rho' dz \right) \\ P_\eta - P_z &= -g \rho_o (\eta - z) - g \int_z^\eta \rho' dz \end{aligned} \quad (2.87)$$

teniendo en cuenta que la presión en la superficie libre es igual a la presión atmosférica y que la presión en cualquier profundidad es igual a $p_o - p'$, la ecuación 2.87 queda:

$$p' = p_a - p_o + g \rho_o (\eta - z) + g \int_z^\eta \rho' dz \quad (2.88)$$

con lo que se obtiene que la variación de presión es función de p_a , presión atmosférica, p_o , presión hidrostática, η , nivel de superficie libre y por último la estratificación de la densidad.

Al introducir la ecuación 2.88 en la ecuación 2.79, se obtiene la expresión para el eje X

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= f v - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \\ &\frac{g}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho' dz + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u'_i u'_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u'_i v'_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u'_i w'_i} \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Al introducir la ecuación 2.88 en la ecuación 2.80, se obtiene la expresión para el eje Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= f u - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_o} (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial y} - \\ &\frac{g}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \rho' dz + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u'_i u'_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u'_i v'_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u'_i w'_i} \right) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Las ecuaciones 2.38, 2.82, 2.89 y 2.90 constituyen las ecuaciones de gobierno que resuelven el modelo hidrodinámico a desarrollar en esta tesis.

2.6 Ecuaciones promediadas en la vertical

2.6.1 Ecuación de continuidad

Para promediar en la vertical las ecuaciones tridimensionales se aplica la Regla de Leibnitz, cuya expresión es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, z) dz = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} f(\beta, z) - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} f(\alpha, z) \quad (2.91)$$

Para promediar la ecuación de continuidad de masa

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (2.92)$$

a los dos primeros términos se les aplica el teorema de Leibnitz, para obtener las expresiones con el símbolo de la derivada fuera de la integral, el tercer término es una deriva exacta, al operar se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - u(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz - \\ v(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - v(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial y} + w(x, y, \eta) - w(x, y, h) = 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Para seguir desarrollando la ecuación 2.93 se utilizan las condiciones cinemáticas en la superficie libre, $z = \eta$ y en el fondo $z = -h$, para lo cual se aplica la definición de la derivada total a la función de profundidad z , tanto en la superficie libre como en el fondo

Para $z = \eta$

$$w(\eta) = \frac{Dz}{Dt}_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.94)$$

Para $z = -h$

$$w(-h) = \frac{Dz}{Dt}_{z=-h} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} - v(-h) \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.95)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.94 y 2.95 en la ecuación 2.93

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - u(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz - v(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ - v(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} + u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(-h) \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.97)$$

si se define

$$\begin{aligned} H &= h + \eta \\ U &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u dz \\ V &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v dz \end{aligned} \quad (2.98)$$

al reemplazar la ecuación 2.98 en la ecuación 2.97 se obtiene

$$\frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.99)$$

La ecuación anterior establece que la suma de todos los flujos netos en la columna de agua debe ser compensada por un incremento de fluido en la columna, que en el caso de un fluido incompresible, se manifiesta como un cambio en la altura (volumen) de ésta.

En la ecuación 2.99 no se ha realizado ninguna hipótesis para su obtención, por lo tanto, se trata de una expresión exacta.

2.6.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

A continuación se presenta el procedimiento para promediar en la vertical la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección X. En la dirección Y se realiza un procedimiento similar.

A la ecuación 2.89 se le suma una ecuación de continuidad, 2.38, multiplicada por u.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\
\frac{g}{\rho_o} (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho dz + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) + & \quad (2.100) \\
\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right)
\end{aligned}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} &= fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \\
g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho dz + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) + & \quad (2.102) \\
\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \\
\frac{g}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho dz + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right) & \quad (2.103)
\end{aligned}$$

se aplican los límites de integración en toda la columna de agua a la ecuación anterior, obteniéndose.

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz &= \int_{-h}^\eta fv dz - \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^\eta \frac{\partial p_a}{\partial x} dz - g \int_{-h}^\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} dz - \\
\frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^\eta (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial x} dz - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^\eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho dz \right) dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^\eta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) \right] dz + & \quad (2.104) \\
\frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^\eta \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) \right] dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^\eta \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right) \right] dz
\end{aligned}$$

Integrando los términos a la izquierda del signo igual, con ayuda de la regla de Leibnitz

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz - u_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.105)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz - u^2_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u^2_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.106)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial uv}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - u_{(\eta)} v_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial y} - u_{(-h)} v_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.107)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial uw}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-h}^{\eta} uw dz - u_{(\eta)} w_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial z} - u_{(-h)} w_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial z} = u_{(\eta)} w_{(\eta)} - u_{(-h)} w_{(-h)} \quad (2.108)$$

Sumando las ecuaciones 2.105, 2.106, 2.107 y 2.108 y reemplazando 2.94 y 2.95 se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz - u_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz - u^2_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u^2_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial x} + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - u_{(\eta)} v_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial y} - u_{(-h)} v_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial y} + u_{(\eta)} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{(\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \\ & u_{(-h)} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - u_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{(-h)} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz \quad (2.110)$$

al reemplazar la ecuación 2.98 en 2.110 se obtiene

$$\frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz \quad (2.111)$$

Ahora integrando los términos a la derecha del signo igual (dejando indicados los términos con los esfuerzos de Reynolds) y sustituyendo la ecuación 2.98 cuando sea necesario, se obtiene

$$\int_{-h}^{\eta} f v dz = f \int_{-h}^{\eta} v dz = f V H \quad (2.112)$$

$$\frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial p_a}{\partial x} dz = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz = \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (2.113)$$

$$g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz = gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.114)$$

$$g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz = gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} (\eta - z) \frac{\partial \rho_o}{\partial x} dz &= \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (\eta - z) dz = \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \left[\eta(\eta + h) - \frac{1}{2}(\eta^2 - (-h)^2) \right] \\ \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \left[\eta^2 + \eta h - \frac{1}{2}(\eta^2 - h^2) \right] &= \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \left[\frac{\eta^2}{2} + \eta h + \frac{1}{2}h^2 \right] = \\ \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \frac{1}{2}(\eta + h)^2 &= \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho dz \right) dz = \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho dz \right) dz \quad (2.117)$$

sumando las ecuaciones 2.111,2.112,2.113,2.114,2.115,2.116 y 2.117 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz &= fVH - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} \\ - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho dz \right) dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) \right] dz &+ \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) \right] dz + \\ \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right) \right] dz & \end{aligned} \quad (2.118)$$

Si se desarrollan los términos convectivos, descomponiendo una variable como la suma de una media en profundidad mas la desviación respecto a esa media Figura 2.4

$$\begin{aligned} u &= U + u' \\ v &= V + v' \\ \rho &= \rho_o + \rho' \end{aligned} \quad (2.119)$$

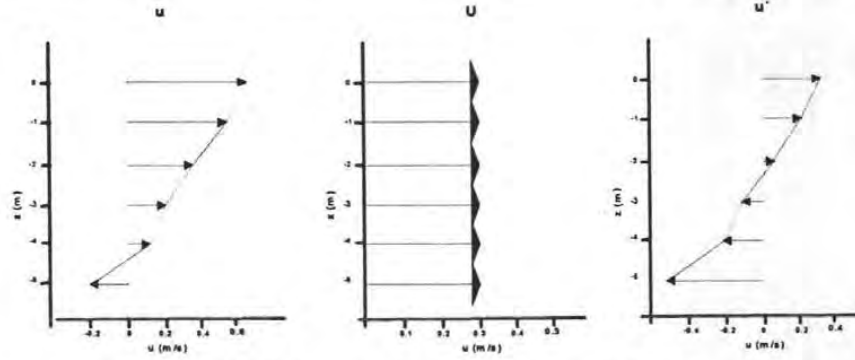


Figura 2.4. Descomposición de variables

u' , v' son las fluctuaciones en vertical de las velocidades horizontales

ρ' es la fluctuación en vertical de la densidad

Analizando el segundo término a la izquierda del signo igual

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (U + u')^2 dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} U^2 + 2Uu' + (u')^2 dz \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\eta} U^2 dz + \int_{-h}^{\eta} 2Uu' dz + \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz \right) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Primer término: debido a que U es una constante en el intervalo de tiempo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} U^2 dz = \frac{\partial U^2}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz = \frac{\partial (U^2 H)}{\partial x} \quad (2.121)$$

Segundo término: debido a que el valor medio de u' es cero, según (2.68)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\eta} 2Uu' dz \right) = 2U \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u' dz = 2U \times 0 = 0 \quad (2.122)$$

Tercer término: u' puede ser positivo o negativo, pero u'^2 es siempre positivo y por lo tanto su valor medio es diferente de cero

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz \quad (2.123)$$

Reemplazando 2.121, 2.122 y 2.123 en 2.120 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\eta} U^2 dz + \int_{-h}^{\eta} 2Uu' dz + \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz \right) = \frac{\partial (U^2 H)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz \quad (2.124)$$

analizando el tercer término a la izquierda del igual, con el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u v dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} (U + u')(V + v') dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} UV + Uv' + u'V + u'v' dz \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-h}^{\eta} UV dz + \int_{-h}^{\eta} Uv' dz + \int_{-h}^{\eta} u'V dz + \int_{-h}^{\eta} u'v' dz \right) &= \frac{\partial(UVH)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u'v' dz\end{aligned}\quad (2.125)$$

Al incluir las dos ecuaciones anteriores en 2.118 se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección X promediada en la vertical, el desarrollo de los términos que incluyen las tensiones de Reynolds se realiza a continuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz + \frac{\partial UVH}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u'v' dz = \\ fVH - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho' dz \right) dz + \\ \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u'_i u'_i} \right) \right] dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u'_i v'_i} \right) \right] dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u'_i w'_i} \right) \right] dz\end{aligned}\quad (2.126)$$

Realizando un proceso similar, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección Y, promediada en la vertical es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(VH)}{\partial t} + \frac{\partial UVH}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u'v' dz + \frac{\partial V^2 H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} (v')^2 dz = \\ fUH - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial y} - gH \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial y} - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \rho' dz \right) dz + \\ \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{v'_i u'_i} \right) \right] dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{v'_i v'_i} \right) \right] dz + \frac{1}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{v'_i w'_i} \right) \right] dz\end{aligned}\quad (2.127)$$

En las ecuaciones 2.126 y 2.127, se considera que la presión atmosférica no es constante, en caso de serlo, el segundo término después del signo igual se hace cero.

2.6.3 Esfuerzos de Reynolds

En la hidráulica, como en muchas áreas de la mecánica de fluidos, los flujos que generalmente se presentan son turbulentos, esto significa que el movimiento del fluido es altamente aleatorio, inestable y tridimensional. Debido a estas complejidades, el movimiento turbulento y los fenómenos de transporte de masa y calor asociados a este son extremadamente difíciles de describir y por lo tanto predecir teóricamente. Por lo tanto, para determinar el comportamiento de los flujos turbulentos se utilizan diversos métodos numéricos.

Las ecuaciones que describen el comportamiento exacto de un flujo turbulento son las ecuaciones de Navier-Stokes y los procedimientos numéricos para resolver estas ecuaciones también están disponibles, limitados en gran medida por la capacidad de las computadoras.

Para resolver las ecuaciones anteriormente mencionadas, y debido a que a los ingenieros generalmente no estamos interesados en los detalles del movimiento turbulento, una aproximación estadística se realiza (propuesta inicialmente por Osborne Reynolds) por lo que las ecuaciones son promediadas en una escala de tiempo mayor que la escala en la que varía la turbulencia del flujo.

Las ecuaciones resultantes describen la distribución media de la velocidad, presión, temperatura y concentración de especies en el fluido. El sistema puede cerrarse con la introducción a este de datos empíricos, por lo cuál los métodos de cálculo basados en las ecuaciones promediadas son conocidos como semi-empíricos

Un modelo de turbulencia se define como un conjunto de ecuaciones, diferenciales o algebraicas, que determinan los términos de transporte turbulento en las ecuaciones promediadas en la vertical y permiten que el sistema de estas ecuaciones se convierta en un sistema cerrado, los modelos de turbulencia se basan en hipótesis sobre los procesos turbulentos y requieren como datos empíricos en forma de constantes o funciones, es importante recalcar que estos modelos no simulan el flujo turbulento a detalle, solamente simulan los efectos de la turbulencia en el comportamiento del flujo promediado en la vertical.

Los modelos de turbulencia son problemas dependientes, por ejemplo, dependen de las condiciones geométricas a gran y pequeña escala, efectos viscosos y efectos de flotación; por lo tanto los modelos de turbulencia sólo son aplicables o para un cierto flujo o un rango de flujos. Lo ideal es tener un modelo que, a partir de constantes o datos experimentales, sea capaz de interpolar y cuando sean necesario extrapolar con criterio, para así poder abarcar un rango mayor de flujo para los cuales pueda aplicarse.

Finalmente, el modelo de turbulencia más universal no necesariamente es el más útil para un problema particular, en las situaciones prácticas, la economía en cuanto a tiempo y la facilidad de uso de un modelo son factores importantes, por lo que un modelo muy universal es muy complejo y requiere mucho tiempo de cálculo, por lo tanto, para cada problema, el nivel correcto de complejidad de cada modelo debe ser escogido dentro de los modelos disponibles, Castañeda (2000)

2.6.3.1 Modelos de Turbulencia

Como se mencionó anteriormente, para resolver las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento (2.89 y 2.90) se necesitan conocer los valores de las tensiones de Reynolds. A continuación se presentan las diferentes opciones existentes para su obtención y se utiliza la opción mas adecuada para resolver las ecuaciones desarrolladas en esta tesis

- Hipótesis de Boussinesq

La propuesta más antigua y de uso más extendido hoy en día en modelación numérica hidráulica, es el concepto de viscosidad de remolino de Boussinesq (1877), el cual, haciendo analogía con las tensiones viscosas en flujos laminares, asume que las tensiones de Reynolds turbulentas son proporcionales a los gradientes de la velocidad media.

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \Gamma \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.128)$$

donde Γ es la viscosidad de remolino absoluta, u_i , la fluctuación turbulenta de la velocidad, u la velocidad media del flujo turbulento e i y j son direcciones ortogonales.

Al aplicar la ecuación 2.128 a los términos de Reynolds en las ecuaciones 2.89 y 2.90 se obtiene:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right) \\ T_x &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (2.129) \\ T_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_y &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{v_i u_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{v_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{v_i w_i} \right) \\
T_y &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (2.130) \\
T_y &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned}$$

donde ε es la viscosidad de remolino cinemática $\varepsilon = \Gamma/\rho$.

Existen varias posibilidades para calcular el valor de la viscosidad de remolino ε .

- Hipótesis de Boussinesq modificado

Generalmente en los flujos geofísicos se acepta que las velocidades verticales son mucho mas pequeñas que las horizontales, esto implica que el intercambio de cantidad de movimiento a través de una superficie horizontal es mucho menor que a través de una superficie vertical y por lo tanto se asume que la viscosidad de remolino vertical, ε_z , es mucho más pequeña que la horizontal, ε_h , y que las tensiones turbulentas se pueden expresar de la siguiente manera (Kundu, 1990)

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u_i u_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{u_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u_i w_i} \right) \\
T_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_h \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_h \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.131) \\
T_x &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{v_i u_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{v_i v_i} \right) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{v_i w_i} \right) \\
T_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_h \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_h \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon_h \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.132) \\
T_x &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz}
\end{aligned}$$

Normalmente la hipótesis anterior se utiliza en modelos que asumen ε_h constantes en (x,y) , puesto que en este caso τ_x quedaría

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_h \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_h \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
T_x &= \varepsilon_h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \varepsilon_h \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon_h \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\
T_x &= \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon_h \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \varepsilon_h \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (2.133) \\
T_x &= \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \varepsilon_h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
T_x &= \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]
\end{aligned}$$

Este modelo es utilizado por Casulli y Stelling (1998).

Como se ha mencionado anteriormente existen gran variedad de expresiones que calculan las tensiones de Reynolds para su uso promediado en la vertical, donde se debe utilizar aquella que es más útil al dominio de cálculo particular.

Se utiliza la regla de Leibnitz para promediar las ecuaciones correspondientes.

Partiendo de la expresión 2.132 para calcular las tensiones de Reynolds promediadas en la vertical, asumiendo que las variaciones de u , v y ε_h en Z son despreciables, se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \varepsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} dz - \left(\varepsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\varepsilon_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \\
I_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_h \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_h \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \quad (2.134) \\
I_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_h \left(\frac{\partial UH}{\partial x} \right) \right] \\
I_1 &= H \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_h \frac{\partial U}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento que en la expresión anterior a los otros 2 términos de la ecuación 2.132 se obtiene

$$I_2 = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz = H \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_h \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2.135)$$

$$I_3 = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \left(\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\eta} - \left(\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{-h} = \tau_{\eta} - \tau_{-h} \quad (2.136)$$

desarrollando las ecuaciones 2.134, 2.135 y 2.136 se obtiene

$$\begin{aligned} T_x &= H \varepsilon_h \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + H \varepsilon_h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \tau_{\eta} - \tau_{-h} \\ T_x &= H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \tau_{\eta} - \tau_{-h} \end{aligned} \quad (2.137)$$

Según Castañedo, 2000, la formulación anterior es la más recomendable para utilizarse en una modelo promediado en la vertical, utilizar una ecuación más compleja no otorga avances significativos en los resultados a obtener.

La expresión en la dirección Y quedaría

$$T_y = H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \tau_{\eta} - \tau_{-h} \quad (2.138)$$

Las ecuaciones promediadas en la vertical quedan finalmente

Dirección X

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz + \frac{\partial UVH}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u' v' dz = \\ f_V H - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho' dz \right) dz + \\ H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho_o} (\tau_{xz(\eta)} - \tau_{xz(-h)}) \end{aligned} \quad (2.139)$$

Dirección Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial(VH)}{\partial t} + \frac{\partial UVH}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u' v' dz + \frac{\partial V^2 H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} (v')^2 dz = \\ f_U H - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial y} - gH \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial y} - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\eta} \rho' dz \right) dz + \\ H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho_o} (\tau_{yz(\eta)} - \tau_{yz(-h)}) \end{aligned} \quad (2.140)$$

- Coeficientes de difusión de cantidad de movimiento

Viscosidad de remolino horizontal

Para el cálculo de la viscosidad de remolino horizontal se emplea el modelo desarrollado por Smagorinsky, extendido para flujos 2D (Madsen et al 1988)

$$\varepsilon_h = l^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.141)$$

Donde U y V son las velocidades horizontales promediadas en la vertical, l es una longitud característica de mezcla que puede expresarse como $l^2 = C_s \Delta X \Delta Y$ y C_s es una constante empírica a la que Blumberg y Mellor (1987) dan el valor de 0.1

2.6.4 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno utilizadas en la superficie libre, $z=\eta(x,y)$ y en el fondo $z=h(x,y)$ son las siguientes:

2.6.4.1 Tensión tangencial en la superficie

La tensión tangencial en la superficie libre, es condición de contorno de las ecuaciones:

$$\rho_o \varepsilon_z \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\tau_{xz(\eta)}, \tau_{yz(\eta)}) \quad (2.142)$$

Esta tensión se considera producida por el viento y se supone proporcional al módulo de la velocidad del este y a la proyección de esta velocidad sobre el eje que se considere:

$$\tau_{xz(\eta)} \propto f |W| W_x \quad (2.143)$$

Para su formulación es usual la utilización de siguiente ley cuadrática, (Falconer 1994)

$$\tau_{xz(\eta)} = C_d \rho_a W_x W \quad (2.144)$$

donde:

C_d es el coeficiente de arrastre del viento, que adquiere un valor de 0.0026 según Falconer 1994,

ρ_a es la densidad del aire

W_x es la componente de la velocidad del viento en la dirección x, $W_x = W \cos \varphi$,

φ es el ángulo formado entre el viento y el eje x y

W es la velocidad del viento a 10 metros de altura sobre el nivel medio del mar.

2.6.4.2 Esfuerzo tangencial en el fondo

La tensión tangencial en el fondo es, como la tensión en la superficie, condición de contorno

$$\rho_o \varepsilon_z \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\tau_{xz(-h)}, \tau_{yz(-h)}) \quad (2.145)$$

La condición de contorno en el fondo debería ser flujo cero, es decir, condición de no deslizamiento, sin embargo, esto implicaría tener que resolver la capa límite del fondo con una gran resolución. El método más común consiste en aplicar una condición de deslizamiento en una altura z_{-h} , por encima del fondo y relacionar las tensiones tangenciales, $\tau_{xz(-h)}$ y $\tau_{yz(-h)}$ con las velocidades, $u_{(-h)}$ y $v_{(-h)}$ de esa altura (Davies *et al* 1997)

La expresión de la tensión tangencial en el fondo se obtiene suponiendo que, en una zona cercada al fondo, el perfil de velocidades es logarítmico, la ecuación que resulta en el eje x es:

$$\tau_{xz(-h)} = \rho_o C_D \left| \vec{v} \right| u_{-h} \quad (2.146)$$

donde $\vec{v}$ es el módulo de la velocidad horizontal en el fondo

$$\left| \vec{v} \right| = \sqrt{(u_{-h})^2 + (v_{-h})^2} \quad (2.147)$$

la expresión que relaciona el coeficiente de arrastre C_D con el coeficiente de fricción de Chezy es la siguiente:

$$C_D = \frac{g}{C^2} \quad (2.148)$$

La ecuación 2.149 puede expresarse a su vez en función del coeficiente de Manning utilizando la relación

$$C = \frac{H^{1/6}}{n} \quad (2.149)$$

Donde n está comprendido por $0.015 < n < 0.04$ (Falconer y Owens, 1987)

La ecuación final de cantidad de movimiento en la dirección x que se obtiene al reemplazar las ecuaciones 2.144 y 2.146 en la ecuación 2.139 es:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz + \frac{\partial UVH}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u' v' dz = \\ & f_V H - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial x} - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial x} - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho dz \right) dz + \quad (2.150) \\ & \frac{1}{\rho_o} \left(C_d \rho_a W_x W - \rho_o C_D \left| \vec{v} \right| u_{-h} \right) + H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

la ecuación final de cantidad de movimiento en la dirección Y es:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(VH)}{\partial t} + \frac{\partial UVH}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u' v' dz + \frac{\partial V^2 H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} (v')^2 dz = \\ & f_U H - \frac{H}{\rho_o} \frac{\partial p_a}{\partial y} - gH \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{gH^2}{2\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial y} - \frac{g}{\rho_o} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\eta} \rho dz \right) dz + \quad (2.151) \\ & \frac{1}{\rho_o} \left(C_d \rho_a W_y W - \rho_o C_D \left| \vec{v} \right| v_{-h} \right) + H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

2.6.5 Consideraciones finales

A continuación se muestran las simplificaciones que se harán a las ecuaciones ya obtenidas, esto debido a que el modelo numérico es para la hidrodinámica de una marina y se deben ajustar a las condiciones de los ejemplos específicos de aplicación que se presentan en el capítulo 5.

Se considera que la variación de la velocidad dentro de la marina con respecto a la velocidad media es pequeña y más aún, su valor elevado al cuadrado.

$$\int_{-h}^{\eta} (u')^2 dz = 0; \quad \int_{-h}^{\eta} u'v' dz = 0$$

Se considera que no existe una variación en la densidad del agua, así como también se considera que la presión atmosférica es constante.

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} = 0; \quad \int \rho' dz = 0; \quad \frac{\partial p_a}{\partial x} = 0$$

Así, al aplicar las consideraciones mencionadas tenemos que la ecuación 2.153 queda de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial UVH}{\partial y} &= fVH - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ \frac{1}{\rho_o} \left(C_d \rho_a W_x W - \rho_o C_D \left| \vec{v} \right| u_{-h} \right) &+ H \epsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.155 el módulo de la velocidad del viento, W , queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial UVH}{\partial y} &= fVH - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ \frac{1}{\rho_o} (C_d \rho_a) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} W_x - \frac{1}{\rho_o} \left(\rho_o C_D \left| \vec{v} \right| u_{-h} \right) &+ H \epsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.153)$$

Ahora, si aplicamos las ecuaciones 2.157 y 2.158

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial UVH}{\partial y} &= fVH - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ \frac{1}{\rho_o} (C_d \rho_a) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} (W_x) - \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\rho_o g n^2}{H^{1/3}} \left| \vec{v} \right| u_{-h} \right) &+ H \epsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.154)$$

Si se reemplaza la ecuación 2.160 se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección X , esto para nuestro caso de aplicación y bajo las consideraciones citadas:

$$\frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} + \frac{\partial UVH}{\partial y} = fVH - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$\frac{1}{\rho_o} (C_d \rho_a) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} (W_x) - \frac{gn^2}{H^{1/3}} \sqrt{u_{-h}^2 + v_{-h}^2} (u_{-h}) + H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.155)$$

Para la dirección Y queda:

$$\frac{\partial(VH)}{\partial t} + \frac{\partial UVH}{\partial x} + \frac{\partial V^2 H}{\partial y} = fUH - gH \frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$\frac{C_d \rho_a}{\rho_o} \sqrt{W_x^2 + W_y^2} (W_y) - \frac{gn^2}{H^{1/3}} \sqrt{u_{-h}^2 + v_{-h}^2} (v_{-h}) + H \varepsilon_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.156)$$

CAPÍTULO 3

CALIDAD DEL AGUA EN LA MARINA

3.1 Introducción

La evaluación de calidad del agua del interior de las marinas depende del intercambio de agua entre este recinto y el mar que se lleva a cabo en cada ciclo de marea y, las cantidades de materia que se vierten a ella ya sea por las embarcaciones, corrientes de agua formadas por lluvia, drenaje urbano, etc. Además puede influir la descomposición de materia contenida en el agua por encontrarse en un recinto cerrado excepto en su comunicación con el mar. Aunque existan normas reglamentarias que prohíban a los navíos arrojar sus aguas residuales en la marina o que su abastecimiento de combustible no se haga dentro de ella; en ocasiones, por accidente o descuido se tienen aportaciones de sustancias indeseables que puedan afectar la calidad de su agua. El deterioro de la calidad del agua implica la degradación de las cualidades físicas, contenido químico y el tipo de vida en el agua de la marina.

El intercambio de agua es resultado de la variación del nivel de la superficie libre del agua debido a la marea y el viento. Entre los factores que intervienen en la determinación de los volúmenes de intercambio, están el rango de marea, el volumen de agua de mar que entra durante el lapso de bajamar a pleamar (prisma de marea), el volumen de agua de mar que sale en el tiempo entre un pleamar y un bajamar, el área de la superficie libre de la marina (depende de la forma, islas, muelles, etc.), el tipo de materiales utilizados en su construcción, etc.

Para no afectar la calidad del agua se debe evitar el vertido de aguas residuales, combustibles, aceites, entre otros. Para llevar a cabo lo anterior la marina requiere de instalaciones especiales, maniobras periódicas de limpieza y reglamentos que sancionen a los usuarios que arrojen al agua cualquier clase de materia contaminante.

Si las disposiciones anteriores son implantadas y se tienen volúmenes de intercambio insuficientes para mantener una buena calidad del agua es necesario efectuar, durante ciertos lapsos, acciones encaminadas a aumentar estos volúmenes, como son los "intercambios forzados". Uno de estos consiste en bombear agua limpia a la marina; otro en la extracción de agua de la marina por un medio ajeno al de la marea.

El estudio del intercambio es importante para el análisis de la calidad del agua, afinar la geometría física de la marina, calcular el tiempo en que tardan en salir los contaminantes, estimar la concentración de contaminantes que se tendrán a largo plazo, conocer las ventajas de intercambios forzados, etc. se lleva a cabo en esta tesis mediante la aplicación de un modelo numérico bidimensional de advección-difusión.

La evaluación de la calidad del agua se hace de acuerdo con los usos y servicios que de ella se desean; para conocer la evolución de alguna sustancia con cierto contenido de materia orgánica vertida en su interior es conveniente tomar en cuenta la concentración de oxígeno disuelto (OD) y la cantidad de oxígeno requerido para la descomposición biológica de la materia orgánica en el agua (demanda bioquímica de oxígeno, DBO), ya que son indicadores de la calidad del agua. El OD mide la capacidad del agua para asimilar materia orgánica contaminante y soportar vida acuática.

El agua en una marina con buena calidad de agua está saturada con OD, cuando se agrega agua con un cierto contenido de materia orgánica en descomposición, el OD es consumido. Durante el proceso anterior, cierta cantidad de oxígeno que existe en el aire se disuelve en el agua y el OD se puede incrementar, inclusive hasta alcanzar su valor de saturación. Cuando la materia orgánica se descompone totalmente, el agua de la marina llega a saturarse con OD otra vez, este proceso natural de purificación tiene una duración de varios días. Por lo tanto, es necesario averiguar la variación de las concentraciones de OD y DBO para determinar el efecto de la materia orgánica en descomposición en el agua de la marina.

La distribución de OD y DBO dentro de la marina dependen de las velocidades del flujo, la turbulencia, la difusión, de los ingresos y egresos de agua de mar, del régimen de vientos, etc.

3.2 Modelo de difusión-advección

El modelo numérico para calcular la distribución espacial y temporal en el agua de cierta materia se basa en dos procesos de transporte: el debido al flujo de agua, producido por la velocidad media, en la cual está la materia disuelta o suspendida (advección) y el resultante de la turbulencia del agua (difusión).

3.2.1 Advección

Sean P la masa de una sustancia diluida (por unidad de área y tiempo) que ingresa continuamente a la marina, Q_p el gasto del agua limpia (por unidad de área) que se ingresa por bombeo al interior de la marina y Q_c el gasto de agua de la marina (por unidad de área) que se extrae por bombeo. Estos gastos son opcionales y tienen como objeto incrementar el intercambio de agua de la marina con el agua del mar. Puede existir uno o el otro, y en condiciones de intercambio muy pequeño, ambos. La presencia de estos gastos es solamente durante ciertos lapsos de acuerdo con la marea.

Se considera que la masa de la sustancia que ingresa a la marina es despreciable en comparación con la del agua, por lo que no altera su hidrodinámica. Además, la variación espacial de la concentración tiene lugar principalmente en las direcciones horizontales x e y .

La masa de la sustancia vertida diluida en el agua de la marina cambia durante el descenso de la marea (reflujo, de pleamar a bajamar) porque sale de la marina, dado que el flujo de agua en la bocana es desde la marina hacia el mar; durante este lapso el agua mezclada mantiene la misma concentración de la sustancia (Fig. 3.1a). Posteriormente, para el tiempo en el que asciende el nivel de la marea (flujo, de bajamar a pleamar), al recinto entra agua de mar (agua limpia) por lo que no sale al mar masa de la sustancia; sin embargo, la concentración de esta disminuye debido a que el agua de la marina se combina con el agua limpia que entra durante este lapso (Fig. 3.1b).

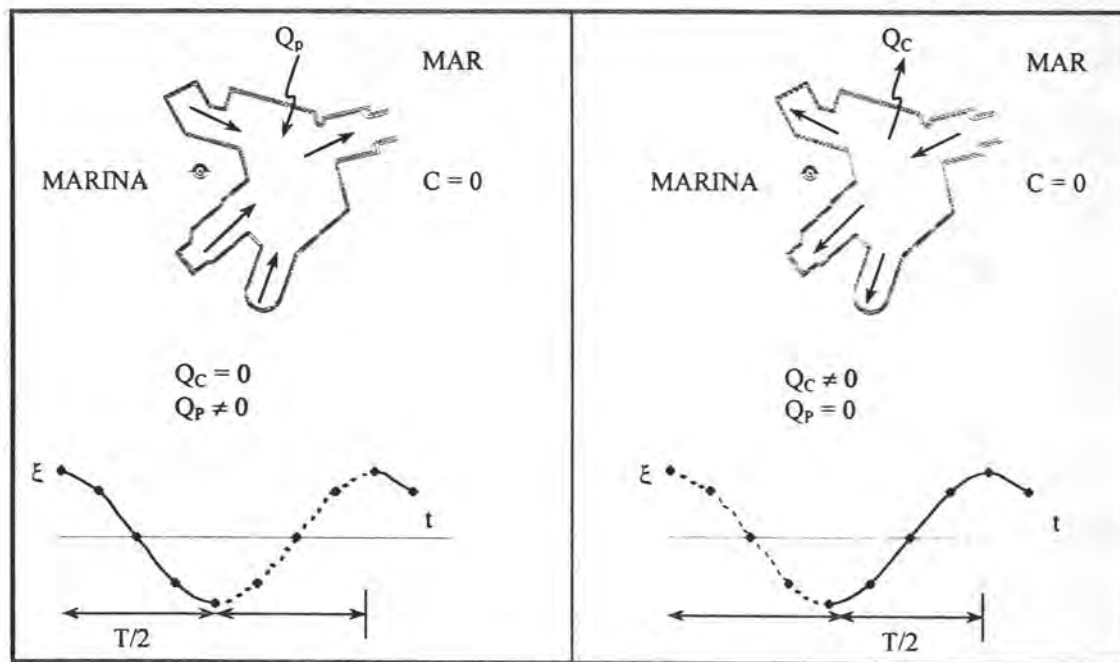


Fig. 3.1 Gastos forzados por bombeo de agua limpia o contaminada, para aumentar el volumen de intercambio de agua de mar

La ecuación de conservación de masa es derivada a partir del volumen de control con área horizontal $\Delta x \Delta y$ y altura h mostrado en la Fig. 3.2. De acuerdo con el principio de conservación de masa, la masa que entra (M_E) al volumen de control menos la que sale (M_S) de él es igual al cambio en el tiempo de la masa ($\partial M / \partial t$) dentro de este volumen; es decir,

$$M_E - M_S = \frac{\partial M}{\partial t} \Delta t \quad (3.1)$$

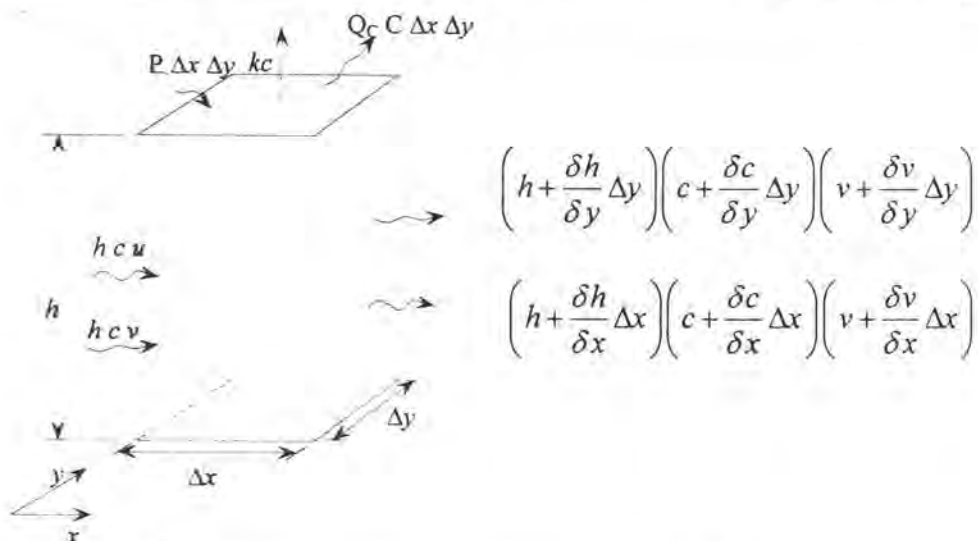


Fig. 3.2 Balance de masa en un volumen de control

A continuación se disgregan los términos incluidos en la ecuación 3.1. En ello se tiene en cuenta que C es la concentración de la sustancia (en unidades de masa entre volumen); h es el tirante, u y v los son componentes de la velocidad en las direcciones X y Y .

La masa que entra está compuesta por:

a) El flujo de agua en la dirección X

$$h C u \Delta y \Delta t$$

b) El flujo de agua en la dirección Y

$$h C v \Delta x \Delta t$$

c) La que se vierte desde el exterior del cuerpo de agua (no desde el mar)

$$P \Delta x \Delta y \Delta t$$

d) La que proviene de difusión isotrópica

$$q_D \Delta x \Delta y \Delta t$$

e) La que se genera dentro del volumen de control

$$r_E h \Delta x \Delta y \Delta t$$

Por lo que, la masa que ingresó al volumen de control es,

$$M_E = h C u \Delta y \Delta t + h C v \Delta y \Delta t + P \Delta x \Delta y \Delta t + q_D \Delta x \Delta y \Delta t + r_E h \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.2)$$

La masa que sale incluye a los términos siguientes:

f) Debido al flujo en la dirección X

$$\left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) \left(C + \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta t$$

g) Debido al flujo en la dirección Y

$$\left(h + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y \right) \left(C + \frac{\partial C}{\partial y} \Delta y \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta t$$

h) Hacia el exterior del cuerpo de agua (no hacia el mar)

$$Q_C C \Delta x \Delta y \Delta t$$

i) La masa que disminuye dentro del volumen de control.

$$r_s h \Delta x \Delta y \Delta t$$

Después de despreciar los términos de segundo orden, la masa que sale resulta ser,

$$M_s = h C u \Delta y \Delta t + \frac{\partial h C u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + h C v \Delta x \Delta t + \frac{\partial h C v}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta t + Q_C C \Delta x \Delta y \Delta t + r_s h \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.3)$$

El cambio de masa dentro del volumen de control respecto al tiempo es

$$\frac{\partial M}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial h C}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.2 y 3.3 en la 3.1 y simplificando resulta

$$\frac{\partial hC}{\partial t} = -\frac{\partial huC}{\partial x} - \frac{\partial hvC}{\partial y} + P - Q_C C - r_s h + r_e h + q_D \quad (3.5)$$

Para los volúmenes de control ubicados en la bocana no existe ingreso de masa de la sustancia de interés desde el mar. Aún cuando la marea está en el lapso de ascenso (el flujo es del mar hacia la marina), ya que entra solamente agua limpia.

Como se mencionó, para forzar a un volumen de intercambio de agua mayor se puede extraer un gasto de agua (Q_C) de la marina solo durante la fase de marea de ascenso de nivel (Fig. 3.1a). Esto induce la entrada de un mayor volumen de agua de mar, ya que tiene que ingresar el volumen de agua necesario para alcanzar en la marina el nivel de pleamar más el volumen de agua que ha salido debido al gasto Q_C . Como este volumen es mayor al que se presenta para llegar al nivel de pleamar, al mezclarse con el agua de la marina, la concentración de la sustancia disminuye todavía más. Esto implica una mayor limpieza de la marina.

Otra alternativa para incrementar el volumen de intercambio consiste en incorporar a la marina, (por ejemplo, por bombeo), un gasto de agua limpia (Q_P) solo durante el lapso en que la marea esta bajando de nivel. Esto hace que salga de la marina un volumen de agua mezclada mayor que el normal (aquel que se tiene exclusivamente por marea). Este gasto de agua limpia introducido artificialmente origina un aumento en velocidades de flujo en el lapso de descenso de la marea (las corrientes son desde la marina hacia el mar) cuando baja el nivel del agua en la marina, por lo que da lugar a un mayor arrastre de la sustancia hacia el mar.

3.2.2 Difusión

Por otra parte, de acuerdo con la primera ley de Fick para difusión isotrópica, la velocidad del flujo de masa es directamente proporcional al gradiente de concentración, es decir, para un flujo en la dirección del eje X.

$$\rho v_{Dx} = -E_T \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.6)$$

de manera similar, para la dirección Y

$$\rho v_{Dy} = -E_T \frac{\partial C}{\partial y} \quad (3.7)$$

donde E_T es el coeficiente de difusión molecular, ρ es la densidad, v_{Dx} es la velocidad en la dirección X, v_{Dy} es la velocidad en la dirección Y y C es la concentración de la sustancia.

Como la diferencia entre la masa que entra y la que sale en cada dirección es

$$(\rho v_{Dx} h \Delta y \Delta t)_E - (\rho v_{Dx} h \Delta y \Delta t)_S + (\rho v_{Dy} h \Delta x \Delta t)_E - (\rho v_{Dy} h \Delta x \Delta t)_S \quad (3.8)$$

Esta diferencia debe ser igual al cambio de masa en el tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} (h C \Delta x \Delta y) \Delta t = q_D' \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.9)$$

Al sustituir las ecuaciones 3.8 y 3.9 en 3.1 y después de dividir entre $\Delta x \Delta y \Delta t$ se tiene

$$q_D' = \frac{(\rho v_{Dx} h)_E - (\rho v_{Dx} h)_S}{\Delta x} + \frac{(\rho v_{Dy} h)_E - (\rho v_{Dy} h)_S}{\Delta y} \quad (3.10)$$

Cuando los incrementos Δx y Δy tienden a cero, se llega a

$$q_D = -\frac{\partial}{\partial x} \rho v_{Dx} h - \frac{\partial}{\partial y} \rho v_{Dy} h \quad (3.11)$$

Si se sustituyen las ecs 3.6 y 3.7, se plantea que

$$q_D = E_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] \quad (3.12)$$

De manera que al tomar en cuenta a la ec 3.12 en la 3.5 se encuentra

$$\frac{\partial h C}{\partial t} = -\frac{\partial h u C}{\partial x} - \frac{\partial h v C}{\partial y} + E_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] + P - Q_C C - r_S h + r_E h \quad (3.13)$$

La expresión anterior es la ecuación de balance de masa en la marina.

Para esta tesis, el coeficiente E_T se consideró como un coeficiente de dispersión.

3.2.3 Coeficiente de dispersión

Para estimar el coeficiente de dispersión se pueden emplear ecuaciones de tipo empírico. Cuando el flujo es turbulento y a superficie libre, se cuenta con expresiones como las de Elder (1959), Fischer (1979), Harleman (1964) y Liu (1977) las cuales son respectivamente

$$E_T = 5.93 r u_* \quad (3.14)$$

$$E_T = 0.011 \frac{q^2}{h u_*} \quad (3.15)$$

$$E_T = 63 n U_m r^{5.6} \quad (3.16)$$

$$E_T = \beta \frac{q^2}{h^3 u_*} \quad (3.17)$$

siendo

$$\beta = 0.18 \left(\frac{u_*}{\bar{u}} \right)^{1.5} \quad (3.18)$$

en estas ecuaciones u es la velocidad media, U_m es la velocidad máxima, r es el radio hidráulico, q es un gasto (igual a u por el ancho), h es el tirante, n el coeficiente de rugosidad de la fórmula de Manning, u_* es la velocidad de corte $(\tau_0/\rho)^{1/2}$, τ_0 el esfuerzo cortante en las paredes y fondo del canal y ρ densidad del agua).

3.3 Cálculo de las concentraciones de OD y DBO dentro de la marina

Con base en los desarrollos del subcapítulo anterior se plantean dos ecuaciones que toman en cuenta el proceso de transporte del oxígeno disuelto (OD) y de demanda bioquímica de oxígeno (DBO).

3.3.1 Concentración de DBO

La concentración de DBO se representa por b y corresponde a la literal C empleada en el apartado 3.1.1 con las consideraciones siguientes:

- La cantidad de masa vertida desde el exterior P incluida en el inciso c, se identificará como P_G (en $\text{kg}_m/\text{m}^2/\text{s}$)
- El término involucrado en el inciso e no existe, es decir, r_E es igual a cero, ya que no hay aportación de DBO desde el aire.
- Por lo que se refiere al inciso i, se tiene r_S y es igual a la razón de consumo de oxígeno que depende, entre otros factores de las concentraciones de OD y DBO, la composición del agua de la marina, la temperatura, etc. Se tomará como

$$r_S = k_S b \quad (3.19)$$

para una concentración de OD mayor a cero.

Por lo que para la concentración de DBO la ec 3.13 queda como

$$\frac{\partial h b}{\partial t} = -\frac{\partial h u b}{\partial x} - \frac{\partial h v b}{\partial y} + E_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial b}{\partial y} \right) \right] + P_B - Q_C b - k_S b h \quad (3.20)$$

3.3.2 Concentración de OD

La concentración de OD se representa por c y corresponde a la literal C descrita en el apartado 3.1.1. Además se toman en cuenta estos planteamientos.

- La cantidad de masa proveniente del exterior P propuesta en el inciso c, se identificará como P_G .
- El término involucrado en el inciso e, r_E se llamará razón de oxigenación atmosférica. Será proporcional a la diferencia entre c y la concentración de saturación c_S , es decir,

$$r_E = k_E (c_S - c) \quad (3.21)$$

- La concentración c_S de OD depende de la temperatura y la constante k_E de la temperatura, área de la interfase aire-agua, de la turbulencia del aire y del agua, etc.
- Por lo que se refiere al inciso i, se tiene que r_S es igual a la razón de consumo de oxígeno que se calcula con la ecuación 3.19 como se planteó en el apartado 3.2.1.

Por lo que la ecuación 3.13 para el caso de la concentración del OD resulta ser

$$\frac{\partial h c}{\partial t} = -\frac{\partial h u c}{\partial x} - \frac{\partial h v c}{\partial y} + E_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] + P_C - Q_C c - k_S b h + k_E (c_S - c) h \quad (3.22)$$

La demanda de oxígeno de sedimentos, la fotosíntesis y la respiración son fuentes y sumideros de OD. Estos últimos no se incorporaron al modelo por considerar que tienen menor importancia que las tasas r_E y r_S .

3.4 Coeficientes de intercambio

Sea $\forall$ el volumen del agua de la marina en un pleamar dado por,

$$\forall = h \Delta x \Delta y \quad (3.23)$$

donde h es el tirante en una celda de base rectangular cuyos lados son Δx y Δy .

La masa (M_o) de una sustancia alojada con el agua en el interior del volumen anterior en el tiempo t_o , da lugar a la concentración C_o , de modo que

$$M_o = C_o \forall \quad (3.24)$$

Si la masa de la sustancia en el pleamar i -ésimo es

$$M_i = C_i \forall \quad (3.25)$$

donde C_i es la concentración de la sustancia en dicha pleamar.

Cuando la masa M_i se "acomoda" dentro de un volumen $\forall'$ en el cual la concentración es C_0 , se tiene que

$$M_i = C_0 \forall' \quad (3.26)$$

De igualar las ecuaciones 3.25 y 3.26 se puede escribir

$$\forall' = \frac{C_i}{C_0} \forall \quad (3.27)$$

El volumen de agua con concentración C_0 que ha salido ($\forall_i$) durante el lapso entre el pleamar del tiempo t_0 y el i -ésimo es igual a la diferencia $\forall$ menos $\forall'$, es decir

$$\forall_i = \forall - \frac{C_i}{C_0} \forall \quad (3.28)$$

Si se divide ambos miembros de la expresión anterior entre $\forall$, se obtiene,

$$\frac{\forall_i}{\forall} = 1 - \frac{C_i}{C_0} \quad (3.29)$$

La relación de volúmenes que aparece en el primer miembro de la expresión anterior se llamará coeficiente de intercambio E_i , por lo que

$$E_i = 1 - \frac{C_i}{C_0} \quad (3.30)$$

El coeficiente de intercambio indica la proporción del volumen de agua (en un pleamar) que se ha limpiado después del ciclo i -ésimo de marea. Este coeficiente se determina para cada uno de los volúmenes de control (celdas) dentro de la marina.

Las celdas con valores cercanos a cero del coeficiente de intercambio permiten localizar las zonas de la marina donde ha ingresado un pequeño volumen de agua de mar después de cierto número de mareas, lo que puede representar una menor calidad de agua con respecto a aquellas zonas en las que se tuvo un mayor ingreso de agua de mar.

Para tener una idea preliminar del coeficiente de intercambio conviene comparar el volumen de agua alojado dentro de la marina $\forall_s$ con respecto al prisma de marea (P_M), para ello se establece que

$$I_M = \frac{2V_s}{P_M} \quad (3.31)$$

o bien, como P_M es igual al producto del área de la superficie libre de la marina (A_s) por el rango de la marea (R_M) y V_s es igual a $A_s h$ donde h es el tirante medio de la marina, resulta que

$$I_M = \frac{2\bar{h}}{R_M} \quad (3.32)$$

El parámetro I_M se conoce con el nombre de parámetro de lavado por marea. Se esperan coeficientes de intercambio altos, cuando posee un valor pequeño, es decir, la marea es suficiente para sustituir el agua original de la marina por la de mar.

CAPÍTULO 4

MODELO NUMÉRICO

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones del modelo numérico de diferencias finitas empleado para calcular la elevación del agua y las velocidades dentro de la marina.

Se utiliza una malla regular con celdas de distinto tamaño la cual trata de cubrir toda el área de la superficie libre de la marina. Se ubica en el centro de cada celda la elevación de la superficie libre y en su perímetro a la velocidad del agua. Se planteó un método de tipo implícito en el que aparecen como incógnitas en cada ecuación lineal cinco elevaciones del agua. Mediante la solución del sistema lineal, se obtienen las elevaciones del agua ($\eta = \xi$) en diferentes puntos de la marina para cada tiempo y después, a partir de ellas se calculan las componentes U y V de la velocidad del flujo.

4.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección X

La aproximación de diferencias finitas correspondiente a la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección X se basa en la expresión 3.42, la cual se escribe a continuación sin marcar con testa a la elevación de la superficie libre.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = fV - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{C_a \rho_a}{\rho H} \frac{W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{H} - \frac{g n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{4/3}} + \nu_e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

Las diferencias finitas se proponen para intervalos de longitudes variables, las velocidades se especifican en el perímetro de las celdas, en el centro de ellas a la elevación de la superficie libre del agua como se muestra en la figura 4.1.

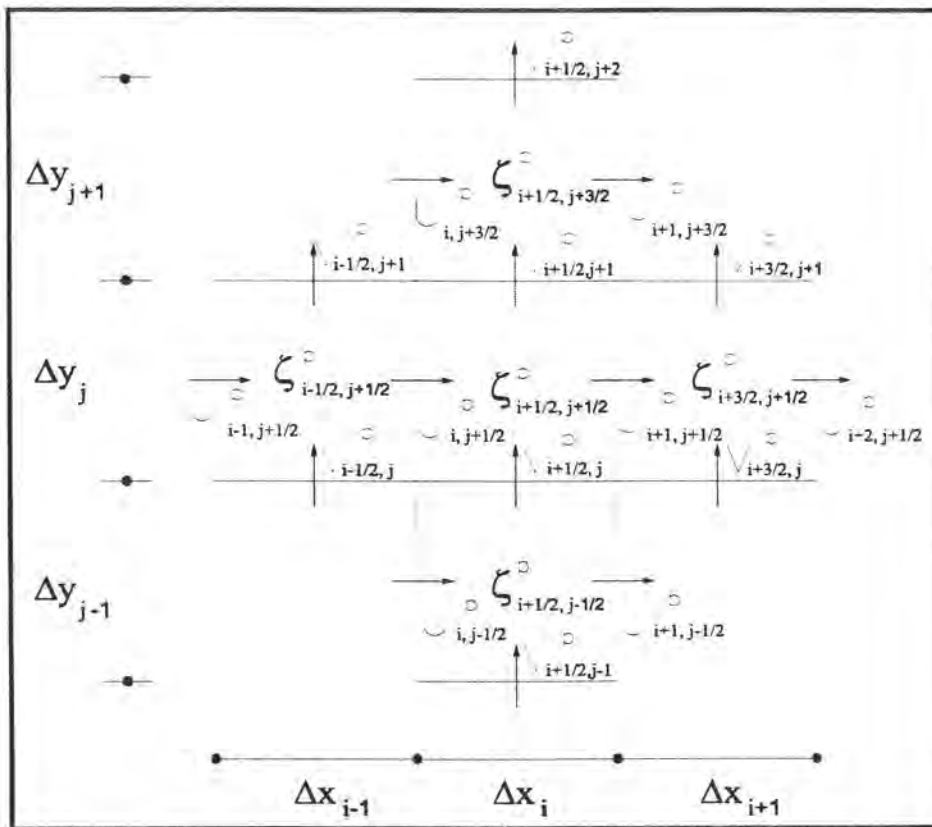


Figura 4.1 Ubicación de las variables independientes

Se plantearon las expresiones de aproximación tomando como apoyo al componente horizontal de velocidad en i y $j + \frac{1}{2}$ en los tiempos $t = p\Delta t$ y $t + \Delta t = (p + 1)\Delta t$. Se utilizó p como superíndice

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i+1, j+\frac{1}{2}}^{p+1} - U_{i+1, j+\frac{1}{2}}^p}{\Delta t} \quad (4.2)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_{i, j+\frac{1}{2}}^{p+1} \frac{U_{i+1, j+\frac{1}{2}}^p - U_{i-1, j+\frac{1}{2}}^p}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (4.3)$$

$$V \frac{\partial U}{\partial y} = \bar{V} \frac{U_{i,j+\frac{3}{2}}^p - U_{i,j-\frac{3}{2}}^p}{\Delta y_j + 0.5(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \theta \frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1}}{0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + (1-\theta) \frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p}{0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \tau_{wx} = \frac{1}{\Delta t} A_{x,i,j+\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \tau_{fx} = \frac{1}{\Delta t} F_{x,i,j-\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

siendo

$$\bar{V} = 0.5 \left[V_{i-\frac{1}{2},j+1}^p + V_{i-\frac{1}{2},j}^p + \left(V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p + V_{i+\frac{1}{2},j}^p - V_{i-\frac{1}{2},j+1}^p - V_{i-\frac{1}{2},j}^p \right) \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right] \quad (4.8)$$

$$\rho H = \frac{\rho}{2} \left(h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) \quad (4.9)$$

$$A_{x,i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\rho h} \left(W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

$$F_{x,i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\rho h} C_F U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} \sqrt{\left(U_{i,j+\frac{1}{2}}^p \right)^2 + (\bar{V})^2} \quad (4.11)$$

$$v_e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = v_e \left(\frac{U_{i+3,j+\frac{1}{2}}^p - 2U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p + U_{i,j+\frac{1}{2}}^p}{4(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)^2} + \frac{U_{i+1,j+\frac{7}{2}}^p - 2U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p + U_{i+1,j-\frac{1}{2}}^p}{4(\Delta y_{i-1} + \Delta y_i)^2} \right) \quad (4.12)$$

En la ecuación 4.8, está implícita una interpolación lineal para ubicar la posición de las variables, dado que los intervalos de longitud son distintos.

Sustituyendo las ecuaciones 4.2 a 4.12 en la ecuación 4.1 y ordenando, se encuentra

$$U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} = R_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} - P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} \quad (4.13)$$

donde

$$R_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left(U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i-1,j+\frac{1}{2}}^p \right) + F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}} \left[U_{i,j+\frac{1}{2}}^p - \frac{\Delta t \bar{V}}{\Delta y_j + 0.5(\Delta y_{j-1} + \Delta y_{j+1})} \left(U_{i,j-\frac{3}{2}}^p - U_{i,j-\frac{1}{2}}^p \right) - \frac{2\Delta t g(1-\theta)}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left(\zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) - U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} + A_x \right] \quad (4.14)$$

$$P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{2\Delta t g \theta}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left(U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i-1,j+\frac{1}{2}}^p \right) + F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.15)$$

4.3 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección Y

Procediendo con desarrollo similar al presentado en el inciso anterior, tomando como apoyo a la ecuación 3.43, se llega a obtener

$$V_{i+\frac{1}{2},j}^{p+1} = R_{y_{i+\frac{1}{2},j}} - P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} \quad (4.16)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 R_{y_{i+\frac{l}{2},j}} = & \frac{l}{l + \frac{\Delta t}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left(V_{i+\frac{l}{2},j+1}^p - V_{i+\frac{l}{2},j-1}^p \right) + F_{y_{i+\frac{l}{2},j}}} \left[V_{i+\frac{l}{2},j}^p - \right. \\
 & - \frac{\Delta t \bar{U}}{\Delta x_i + 0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1})} \left(U_{i+\frac{l}{2},j}^p - U_{i-\frac{l}{2},j}^p \right) - \frac{2\Delta t g(1-\theta)}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left(\zeta_{i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}}^p - \zeta_{i+\frac{l}{2},j-\frac{l}{2}}^p \right) - \\
 & \left. - v_{i+\frac{l}{2},j}^{p+1} F_{y_{i+\frac{l}{2},j}} + A_y \right]
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$P_{y_{i+\frac{l}{2},j}} = \frac{\frac{2\Delta t g \theta}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}}{l + \frac{\Delta t}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left(V_{i+\frac{l}{2},j+1}^p - V_{i+\frac{l}{2},j-1}^p \right) + F_{y_{i+\frac{l}{2},j}}} \tag{4.18}$$

siendo

$$\frac{l}{\rho(h+\zeta)} \tau_w = \frac{l}{\Delta t} A_y \tag{4.19}$$

$$\frac{l}{\rho(h+\zeta)} \tau_{fy} = \frac{l}{\Delta t} F_{y_{i+\frac{l}{2},j}} \tag{4.20}$$

$$\bar{U} = 0.5 \left[U_{i+l,j-\frac{l}{2}}^p + U_{i,j-\frac{l}{2}}^p + \left(U_{i+l,j+\frac{l}{2}}^p + U_{i,j+\frac{l}{2}}^p - U_{i+l,j-\frac{l}{2}}^p + U_{i,j-\frac{l}{2}}^p \right) \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \right] \tag{4.21}$$

$$\rho H = \frac{\rho}{2} \left(h_{i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}}^p + h_{i+\frac{l}{2},j-\frac{l}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{l}{2},j-\frac{l}{2}}^p \right) \tag{4.22}$$

$$A_{y_{i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}}} = \frac{\Delta t}{\rho h} \left(W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \right)_{i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}} \tag{4.23}$$

$$F_{y_{i+\frac{l}{2},j}} = \frac{\Delta t}{\rho h} C_F V_{i+\frac{l}{2},j}^{p+1} \sqrt{\left(V_{i+\frac{l}{2},j}^p \right)^2 + (\bar{U})^2} \tag{4.24}$$

4.4 Ecuación de continuidad

En la ecuación de continuidad existen términos no lineales que son tratados en forma aproximada. Para ello se considera que el incremento de la función $z = f(x, y) = xy$ se puede aproximar con base en el desarrollo de la serie de Taylor (se involucra hasta la primera derivada). Esto es,

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + \Delta x \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \quad (4.25)$$

para

$$z(x, y) = xy$$

se tiene

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = x$$

así, al sustituir en la ecuación 4.26 se obtiene

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + y \Delta x + x \Delta y \quad (4.26)$$

Si ahora, se hace el siguiente cambio de variables:

$$\begin{array}{ll} x = x_n & ; \quad \Delta x = x_{n+1} - x_n \\ y = y_n & ; \quad \Delta y = y_{n+1} - y_n \end{array}$$

entonces la ecuación 4.27 queda

$$x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n + y_n (x_{n+1} - x_n) + x_n (y_{n+1} - y_n)$$

que se reduce a

$$x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n + y_n x_{n+1} + x_n y_{n+1} \quad (4.27)$$

La expresión anterior sirve para aproximar en cualquier función de un producto de dos variables independientes.

En el capítulo 4 se estableció que la ecuación de continuidad que se escribe a continuación (no se marca con testa la elevación de la superficie libre):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} U(h + \zeta) - \frac{\partial}{\partial y} V(h + \zeta) \quad (4.28)$$

Para contar con una adecuada aproximación a la derivada temporal entre el tiempo $t = p \Delta t$ y el tiempo $t + \Delta t = (p+1) \Delta t$ se propone el promedio ponderado

$$\frac{\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} - \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p}{\Delta t} = \theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \quad (4.29)$$

donde θ es una constante que sirve para dar mayor importancia a cualquiera de los dos sumandos de la ecuación conocida tal que $0 \leq \theta \leq 1$ y p es un superíndice relacionado con el tiempo. De acuerdo con la ecuación 4.28,

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} U(h + \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} V(h + \zeta) \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} = \quad (4.30)$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial x} U^{p+1}(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial y} V^{p+1}(h + \zeta^{p+1}) \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p = - \left(\frac{\partial}{\partial x} U(h + \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} V(h + \zeta) \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p = \quad (4.31)$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^p) + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^p) \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$$

Ahora, si en la aproximación definida por la ecuación 4.27 el índice h se cambia por el superíndice p la ecuación 4.30 se puede que dar de este modo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial x} U^{p+1}(h + \zeta^p) - \frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^p) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial y} V^{p+1}(h + \zeta^p) - \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^p) \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

al sustituir las ecuaciones 4.31 y 4.32 en 4.29 y después de ordenar y reducir términos se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} = & \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p - \Delta t \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial x} U^{p+1}(h + \zeta^p) + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^{p+1}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} V^{p+1}(h + \zeta^p) \right) - \Delta t (1 - 2\theta) \left(\frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^p) + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^p) \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

aproximando por diferencias finitas las derivadas parciales respecto a x y y se tiene

$$\begin{aligned} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} = & \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p - \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}}^{p+1} + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} \right) - \right. \\ & - U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} \right) + U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} \left(h_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) - U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) \left. \right] - \\ & - \frac{\Delta t \theta}{\Delta y_j} \left[V_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^{p+1} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{p+1} \right) - V_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{p+1} \right) + V_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + \right. \\ & \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \right) - V_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \right) \left. \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Sustituyendo $U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1}$ y $V_{i+\frac{1}{2},j}^{p+1}$ dadas por las ecuaciones 4.13 y 4.16, así como las que

corresponderían a $U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{p+1}$ y $V_{i-\frac{1}{2},j+1}^{p+1}$ (según estas ecuaciones) y después de ordenar queda la ecuación lineal con cinco incógnitas siguientes:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[-U_{i,j+\frac{1}{2}}^p - \left(h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \zeta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
 & + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - \left(h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i+1,j-\frac{1}{2}}} \right] \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
 & + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left[-V_{i+\frac{1}{2},j}^p - \left(h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \zeta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
 & + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left[V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p - \left(h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^p \right) P_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}} \right] \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
 & + \left[1 + \frac{\Delta t \theta}{\Delta x_i} \left(U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i,j+\frac{1}{2}}^p + \left(h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i,j-\frac{1}{2}}} + \left(h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i+1,j-\frac{1}{2}}} \right) + \\
 & + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p - V_{i+\frac{1}{2},j}^p + \left(h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} + \right. \\
 & \left. \left. + \left(h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^p \right) P_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}} \right) \right] \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p - \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) + \left(h_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{x(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} - U_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) + \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{x(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} \right] - \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left[V_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) + \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{y(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} - V_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{3}{2}} \right) + \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \right) R_{y(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})} \right] - \frac{\Delta t (1 - 2\theta)}{2 \Delta x_i} \left[U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) - U_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) \right] - \\
&\quad - \frac{\Delta t (1 - 2\theta)}{2 \Delta y_j} \left[V_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) + \right. \\
&\quad \left. + V_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \left(h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.35}$$

La aplicación de la ecuación 4.35 para cada celda de la región donde interesa obtener las velocidades inducidas por la marea y la elevación promedio del agua da lugar a un sistema de ecuaciones lineales con cinco incógnitas (en la mayoría de las ecuaciones) que al ser resuelto permite disponer para la etapa $p + 1$ de las elevaciones promedio del agua. Una vez que se cuenta con estas elevaciones por medio de las ecuaciones 4.13 y 4.16 se obtienen para dicha etapa los valores de los componentes de velocidad de las corrientes tanto en la dirección X como en la Y.

4.5 Condiciones de frontera

En el perímetro de la región en estudio se imponen varias ecuaciones que junto con las ecuaciones de diferencias finitas hacen posible encontrar una solución aproximada de las

ecuaciones diferenciales de movimiento (capítulo 4). Esta solución corresponde a la elevación promedio del agua y la velocidad del flujo producido por el oleaje.

4.5.1 Obstáculo al paso del agua

Los cuerpos inmersos en el mar que impiden el flujo del agua a través de ellos se localizan en los extremos de las celdas (donde se valúan las velocidades, figura 4.1). Corresponden a rompeolas, u obstáculos naturales como arrecifes o islas. En los sitios donde están estos cuerpos se establece que la velocidad perpendicular a ellos es nula. A saber, puede ser

$$U_{i, j+\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.36)$$

para un obstáculo de largo Δy_j ubicado en la cara de la celda donde se localiza $U_{i, j+\frac{1}{2}}$, o bien

$$V_{i+\frac{1}{2}, j} = 0 \quad (4.37)$$

para un cuerpo impermeable de largo Δx_i ubicado en la cara de la celda donde aparece $V_{i+\frac{1}{2}, j}$.

Para la línea de costa, orientada en la dirección del eje de las abscisas, también se plantea una condición de frontera de este tipo.

En la figura 4.2 se han marcado los puntos donde se considera esta clase de condición de frontera.

4.5.2 Marea

Para este caso en particular, el trabajo está enfocado a cuerpos de agua con una entrada, como es el caso de las marinas o estuarios, donde la velocidad perpendicular a la orilla de la marina es nula, excepto en la entrada o canal de acceso. El contorno se toma como el perímetro del área de la superficie libre de la marina correspondiente al nivel medio del mar.

El elemento que excita al sistema de la marina es la marea astronómica (en adelante se llamará marea). Esta se toma en cuenta al proporcionar, a la entrada de la marina, la elevación del nivel del mar en cada tiempo de interés.

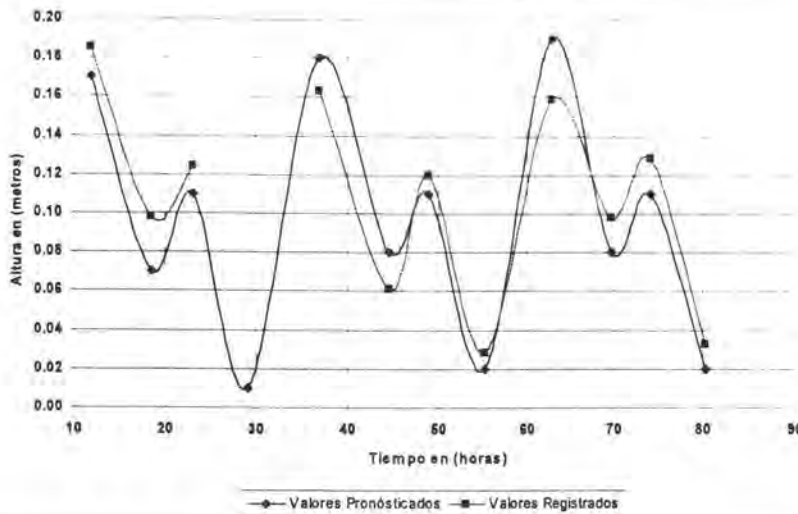


Figura 4.2 Comparación entre la marea medida y pronosticada

Para tener información de las frecuencias, amplitudes y ángulos de fase más importantes de las variaciones cíclicas de los ascensos y descensos del nivel del agua es conveniente descomponer la marea en sus componentes.

Las características de sus componentes se determinan a partir de un modelo teórico o de observación en una localidad (análisis de marea). La ecuación básica con la que se representa la marea es la siguiente

$$\zeta(t) = d + \sum_{i=1}^N a_i \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i} - \phi_i\right) \quad (4.40)$$

en la cual

$\zeta(t)$ nivel del agua en el tiempo t

d profundidad respecto al nivel medio del mar

a_i amplitud del componente i

T_i periodo del componente i

ϕ_i ángulo de fase del componente i

N número de componentes

Existen versiones modificadas de la ecuación 4.40 que pretenden mejorar la estimación de $\zeta(t)$ por medio de algunos factores correctivos aplicados a la amplitud y ángulo de fase.

El modelo matemático utiliza una marea similar a la de la figura 4.3 por medio de la asignación de los valores del nivel del agua a través de cuatro funciones coseno.

La elevación de la marea en el tiempo t comprendido entre t_k y t_{k+1} se obtiene por medio de la ecuación siguiente

$$\zeta = \frac{\zeta_k - \zeta_{k+1}}{2} \cos\left(\frac{\pi(t - t_k)}{t_{k+1} - t_k}\right) + \frac{\zeta_k + \zeta_{k+1}}{2} \quad (4.41)$$

Los valores ζ_k corresponden a puntos extremos, a saber pleamar alto, pleamar bajo, bajamar alta y bajamar baja y t_k a los tiempos en que se presentan.

CAPÍTULO 5

CASO DE APLICACIÓN

5.1 Descripción del problema

En este capítulo se aplican los modelos hidrodinámico y de calidad de agua al diseño propuesto de la marina ubicada dentro del complejo hotelero "Playa Mujeres".

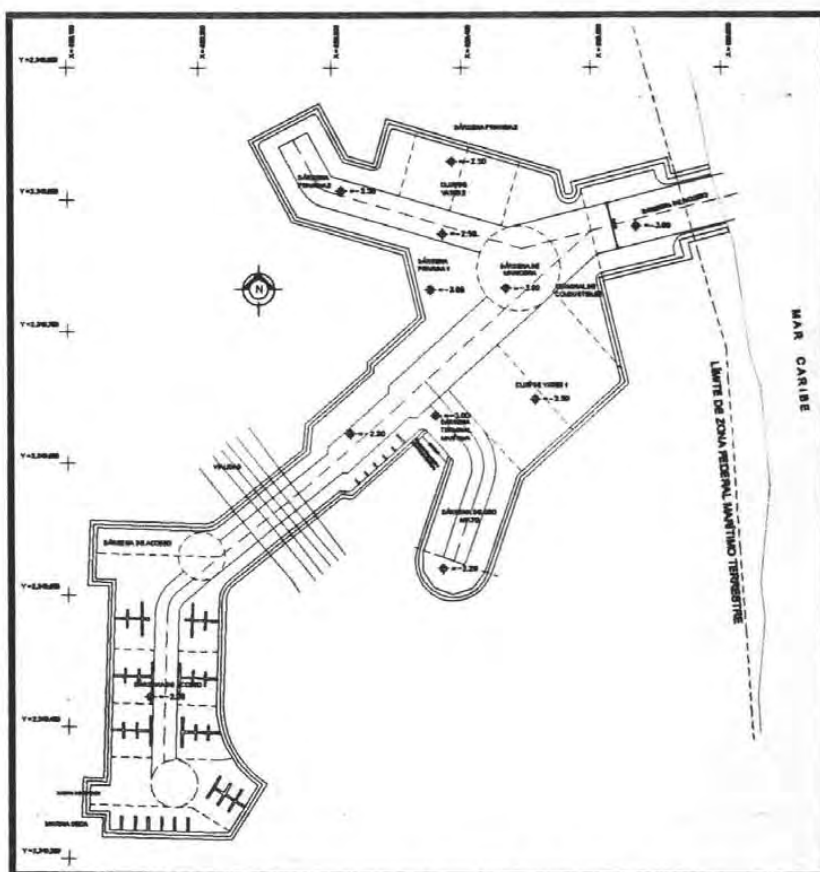


Figura 5.1 Diseño original de la marina

Algunas de las características de la marina son las siguientes:

1. Área de la superficie libre: $83,508 \text{ m}^2$,
2. Volumen de agua alojado (al nivel medio del mar): $171,191.40 \text{ m}^3$,
3. Ancho de la boca: 40 m
4. Prisma de marea: $25,056 \text{ m}^3$
5. Gasto medio de entrada (o de salida): $1.18 \text{ m}^3/\text{s}$

5.2 Localización del área de estudio

La zona de estudio está ubicada sobre Punta Sam, en el municipio de Isla Mujeres, donde se lleva a cabo el desarrollo turístico denominado **Playa Mujeres**. El desarrollo se localiza en el litoral del Caribe Mexicano, a 6.5 km. al norte de la Ciudad de Cancún, en el estado de Quintana Roo. De acuerdo con García (1964) el clima es cálido subhúmedo con lluvias en verano (Aw), con una temperatura media anual de 26°C . Sus coordenadas son $21^\circ 3' 52.6''$ latitud norte y $86^\circ 47' 58.9''$ longitud oeste.

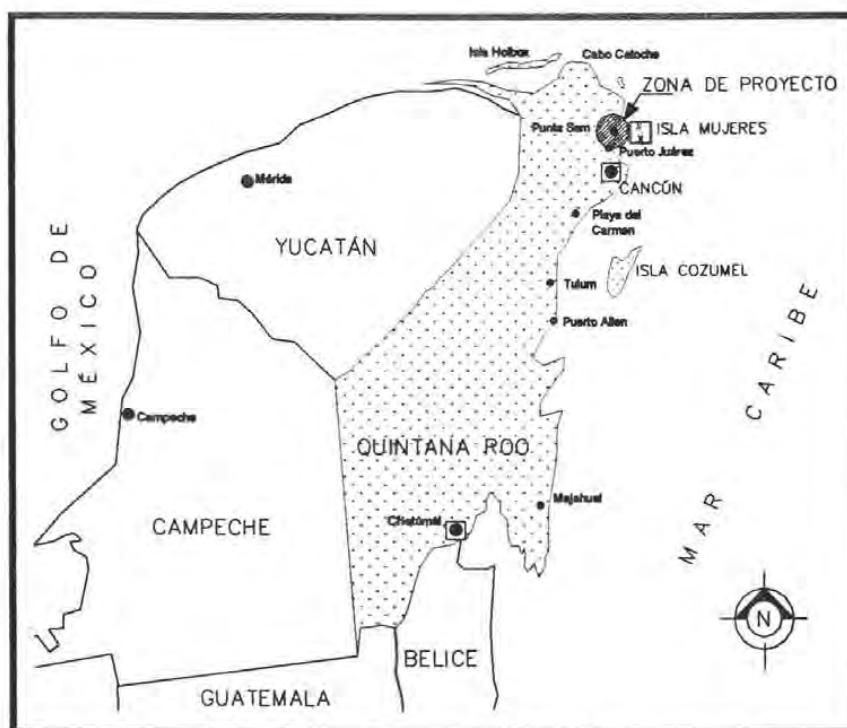


Figura 5.2. Plano de localización

5.3 Recopilación de información

5.3.1 Batimetría

El procesamiento de la información batimétrica consiste en crear los archivos de datos necesarios para el funcionamiento de los modelos matemáticos. Para llegar a los anterior se utilizaron los siguientes planos portulanos:

- S. M. 923 Bahía de Mujeres. Portulano escala 1:17,500 editado por la Secretaría de Marina a través de la Dirección General de Oceanografía Naval. Último levantamiento en 1996, actualmente en revisión.
- S. M. 924 Isla Mujeres a Isla Cozumel. Portulano escala 1:100,000 editado por la Secretaría de Marina a través de la Dirección General de Oceanografía Naval. Último levantamiento en 1986 y última revisión en agosto de 1993.

Los planos anteriores fueron escaneados para obtener puntos X , Y , Z con los cuales se forman los archivos de datos que requieren los modelos numéricos. En la figura 5.3 se muestra el portulano escala 1:17,500.

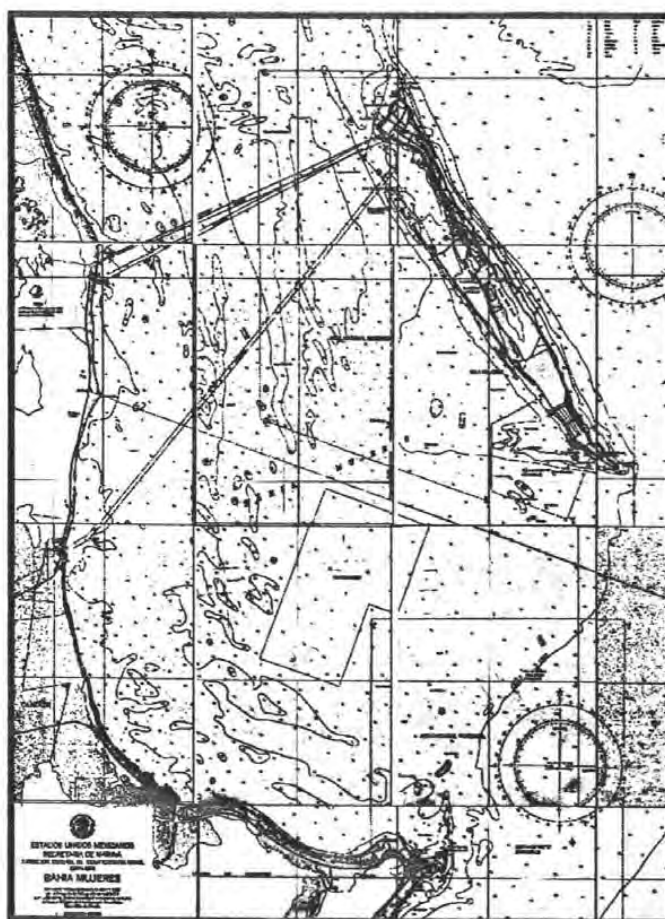


Figura 5.3 Planos portulanos de la zona en estudio

Con la información procesada se dibujaron los puntos XYZ de la figura 5.4 con el fin de obtener una mejor definición de las curvas de nivel y a su vez poder manipular la batimetría para el estudio. Comparando la nueva batimetría detallada con la encontrada en los portulanos se observa que existe una concordancia aceptable.

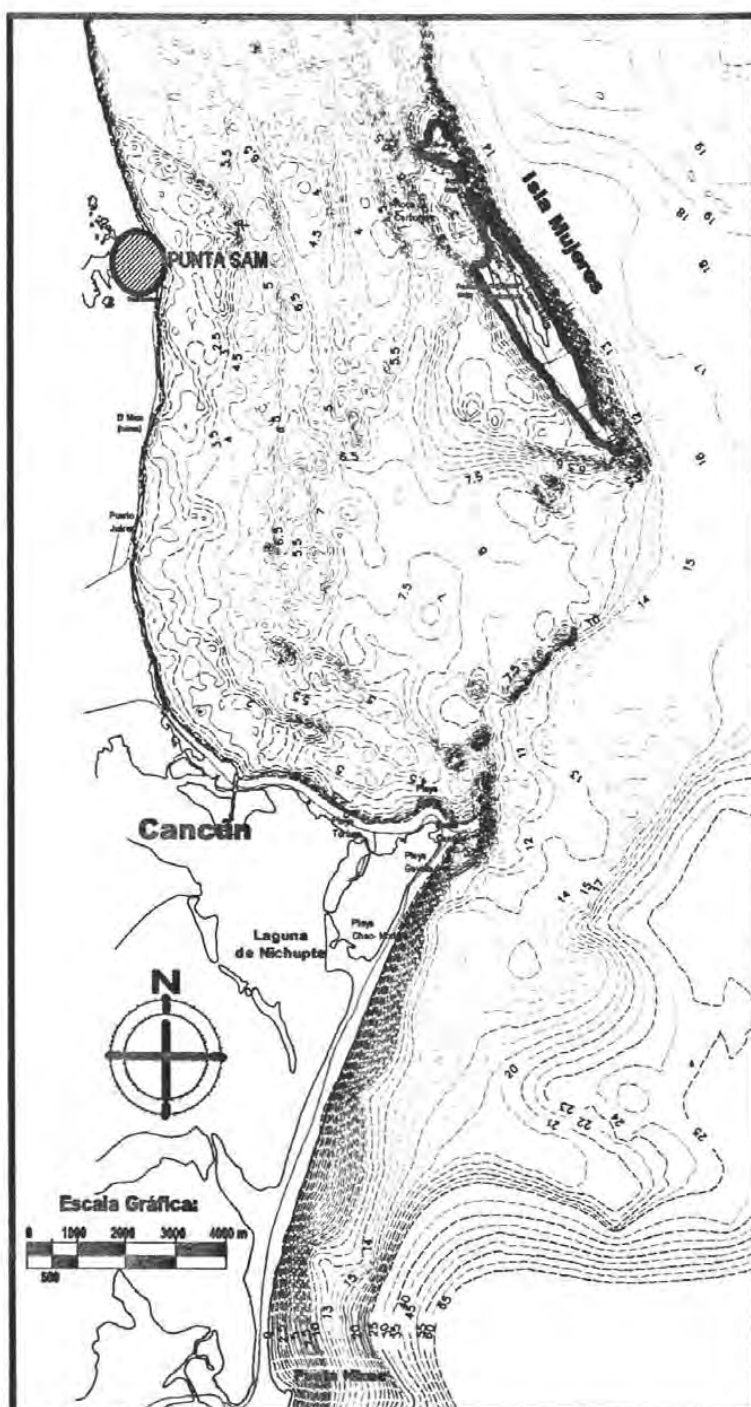


Figura 5.4 Batimetría calculada de la zona en estudio

5.3.2 Mareas

La información característica de la marea para la zona de estudio se obtuvo de los siguientes documentos:

1. Tablas de mareas. Golfo de México y Mar Caribe. Secretaría de Marina. Dirección General de Oceanografía Naval. México, 2001.
2. Calendario Gráfico de predicción de mareas. Secretaría de Marina. Dirección General de Oceanografía Naval. México, 2001.

La marea astronómica media tiene un rango del orden de 0.20 m y período 12 h 25 m. Otras características de la marea se observan en la tabla 5.1

Tabla 5.1 Características principales de la marea.

Pleamar máxima registrada	0.466 m
Pleamar media superior	0.201 m
Nivel de pleamar media	0.178 m
Nivel medio del mar	0.099 m
Nivel de bajamar media	0.000 m
Bajamar mínima registrada	-0.117 m

Tabla 5.2 Principales constantes armónicas

Componente	H	g(grados) 90 °W
M ₂	0.074	261.43
S ₂	0.027	225.70
N ₂	0.025	248.92
K ₁	0.012	318.02
O ₁	0.025	302.06
P ₁	0.060	324.70

5.3.3 Clasificación del tipo de marea

La marea se clasifica de acuerdo con la importancia relativa de los cuatro mayores componentes armónicas: M_2 , S_2 , K_1 y O_1 según la expresión siguiente:

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2}$$

En este caso:

$$F = \frac{0.012 + 0.025}{0.074 + 0.027} = 0.366$$

El tipo de marea es mixta semidiurna, presentándose dos pleamares y dos bajamares por día. El rango de la marea viva se calcula como:

$$2(M_2 + S_2) = 2(0.074 + 0.027) = 0.202 \text{ m}$$

5.4 Definición del problema

Se utilizó una malla en donde las celdas ΔX y ΔY tienen una longitud de 20 m, el paso de tiempo Δt es igual a 2 s, a continuación se muestra la figura 5.5 en la cual se establece la geometría de la marina en función de dichas celdas.

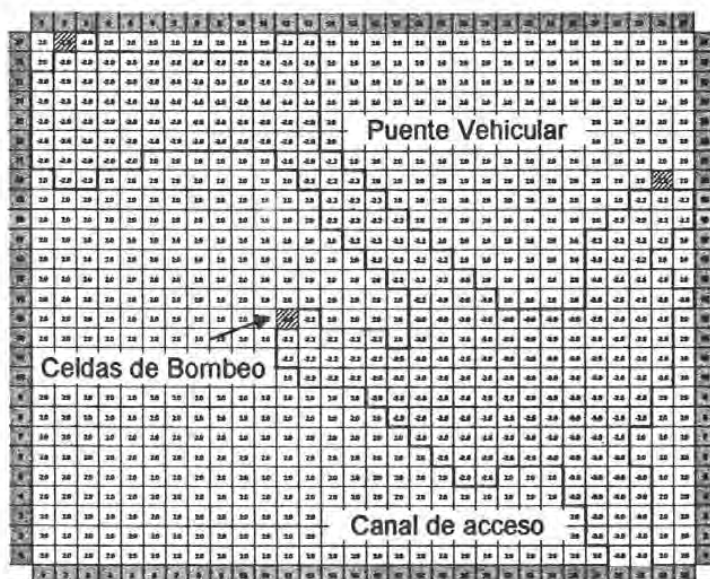


Figura 5.5 Malla de la marina utilizada en el modelo numérico

5.5 Casos

Para conocer el comportamiento del cuerpo de agua es necesario conocer en primer lugar la hidrodinámica del mismo, con esta información se procede al cálculo de la difusión de una sustancia.

Con la hidrodinámica se obtienen la magnitud del módulo de la velocidad, así como también las profundidades hidráulicas alcanzadas por el agua en distintos puntos dentro de ella, lo anterior, para diferentes periodos de marea. Posteriormente se obtiene la concentración del agua para un periodo de 20 días con la finalidad de observar el tiempo en que tarda la marina en renovar el agua contaminada por agua limpia.

Se hicieron cálculos para dos geometrías diferentes de la marina, esto es, para el diseño propuesto originalmente, el cual consta de un área de la superficie libre del agua de $83,508 \text{ m}^2$. Después de observar los resultados, que se explican más adelante, se propone recortar la geometría, quedando así el área de la superficie libre del agua de $59,200 \text{ m}^2$.

Para cada condición se consideraron las opciones siguientes:

1.Sin ingreso adicional (sólo el proveniente del mar a través de la boca)

2.Ingreso por infiltración de agua freática de:

- a) $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ (época de lluvia)
- b) $0.125 \text{ m}^3/\text{s}$ (época de estiaje)

3.Con gasto forzado (bombeo total) en tres sitios:

- a) $0.500 \text{ m}^3/\text{s}$
- b) $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$
- c) $0.125 \text{ m}^3/\text{s}$

4.Con gasto forzado (bombeo) en un sitio:

- a) $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$

5.6 Marina con geometría original

Es importante aclarar que la velocidad promedio tomada en el sitio es del orden de 0.05 m/s (5 cm/s). Por otro lado, se hicieron pruebas en laboratorio en donde se determinó que la velocidad a la cual, la arena fina, similar a la que se ubica en la zona del desarrollo turístico, inicia su movimiento y es transportada, es de 0.46 m/s (46 cm/s).

En la tabla 5.3 se indican las velocidades medias en dos secciones diferentes de la marina original (en el canal de acceso y bajo el puente vehicular de la dársena 3) para 12 y 20 horas de modelación.

Al analizar las velocidades en el canal de acceso, se observa que los mayores módulos de la velocidad se tienen en la época de lluvias (caso 2, caudal de infiltración de 250 lt/s) pero a su vez los menores módulos se tienen en la época de verano (caso 3), para corregir el problema de la baja velocidad y por lo tanto la poca circulación del agua en la marina se proponen 4 tipos diferentes de bombeo (casos 4 a 7), se puede concluir que el mejor escenario es el obtenido por el caso 7, seguido muy de cerca por el caso 4.

Al realizar el análisis anterior a la sección del puente (Figura 5.6), se observa el mismo comportamiento, pero con el inconveniente que las velocidades son muy bajas en esta sección, lo que conlleva a que la circulación del agua de la dársena 3 sea muy pobre.

Tabla 5.3 Velocidades medias en la marina

Caso	Q_B ó Q_I (m^3/s)	Canal de Acceso		Puente	
		12 h	20 h	12 h	20 h
1	$Q_B = 0, Q_I = 0$	0.0050	0.0097	0.0020	0.0050
2	$Q_I = 0.250$	0.0123	0.0077	0.0020	0.0050
3	$Q_I = 0.125$	0.0057	0.0083	0.0020	0.0050
4	$Q_B = 0.500$ (3 sitios)	0.0083	0.0083	0.0020	0.0090
5	$Q_B = 0.250$ (3 sitios)	0.0057	0.0097	0.0020	0.0060
6	$Q_B = 0.125$ (3 sitios)	0.0050	0.0103	0.0020	0.0050
7	$Q_B = 0.250$ (1 sitio)	0.0083	0.0090	0.0030	0.0140

Nota : Q_B es el gasto de ingreso por bombeo y Q_I es el gasto de ingreso por infiltración

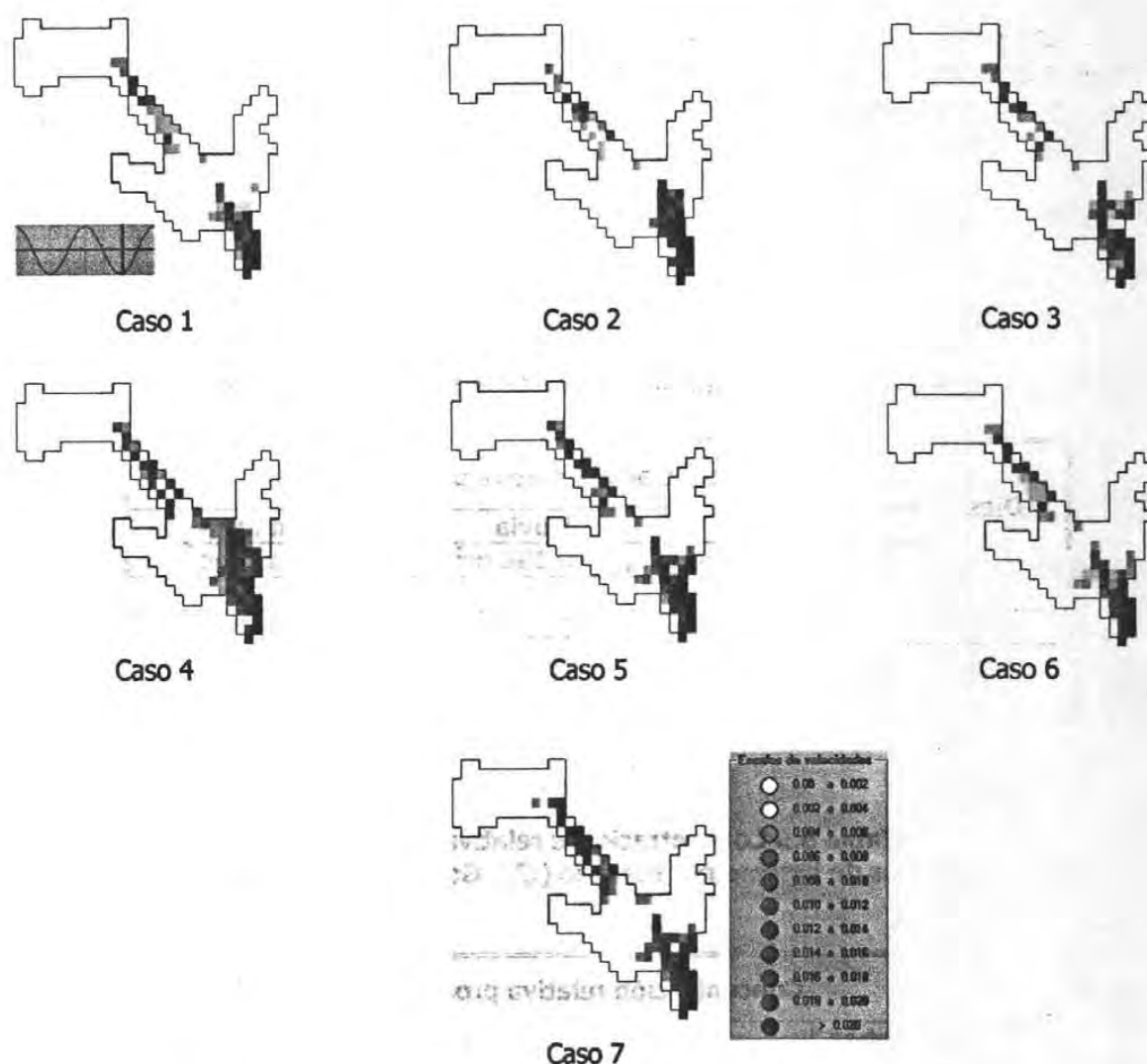


Figura 5.6 Velocidades medias para un tiempo de simulación de 20 h

5.6.1 Difusión-advección de la marina (Geometría original)

Para conocer cual es la mejor opción se realiza un análisis de concentraciones relativas promedio para 20 días de simulación, en el anexo 3 se presentan los resultados cada 12 horas para cada uno de los casos analizados.

En la tabla 5.4 se presentan las concentraciones relativas promedio para 5,10,15 y 20 días, se observa nuevamente que el mejor comportamiento es para la época de lluvias cuando al final de 20 días la concentración de una sustancia es de 13.64%, pero el comportamiento mas deficiente es para la época de estiaje, cuando la concentración de una sustancia es del orden 29%. Por esta razón es necesario considerar un sistema de bombeo que permita disminuir las altas concentraciones en la época de estiaje.

En la tabla 5.5 se presenta el análisis para los 4 tipos de bombeo (operando solamente durante el descenso de la marea), se observa que el mejor comportamiento se tiene cuando se bombean $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ en tres sitios, con este sistema la concentración a los 20 días es solamente del 7%. Si se bombea $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$ en un solo sitio la concentración relativa de un contaminante es del orden de 14%.

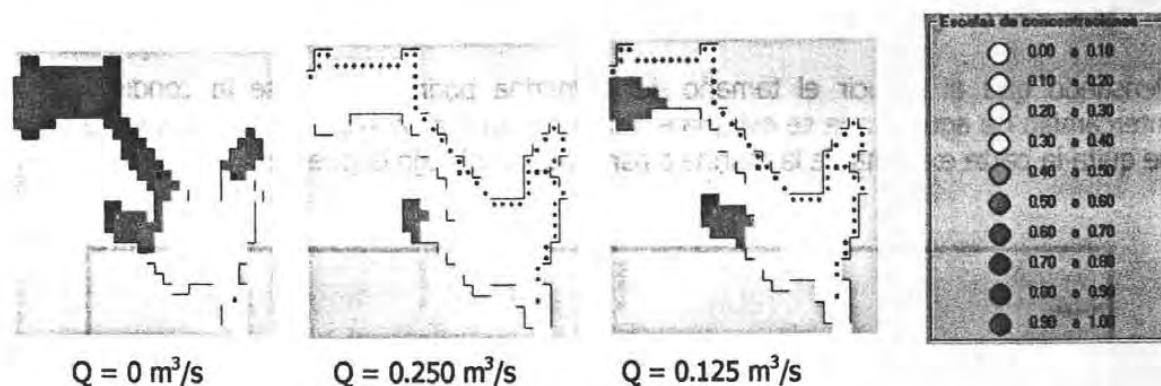
En las figuras 5.9 y 5.10 muestra las concentraciones relativas de un contaminante para 20 días de simulación.

Tabla 5.4 Concentraciones relativas promedio.
Gastos de ingreso por infiltración (Q_I). Geometría original

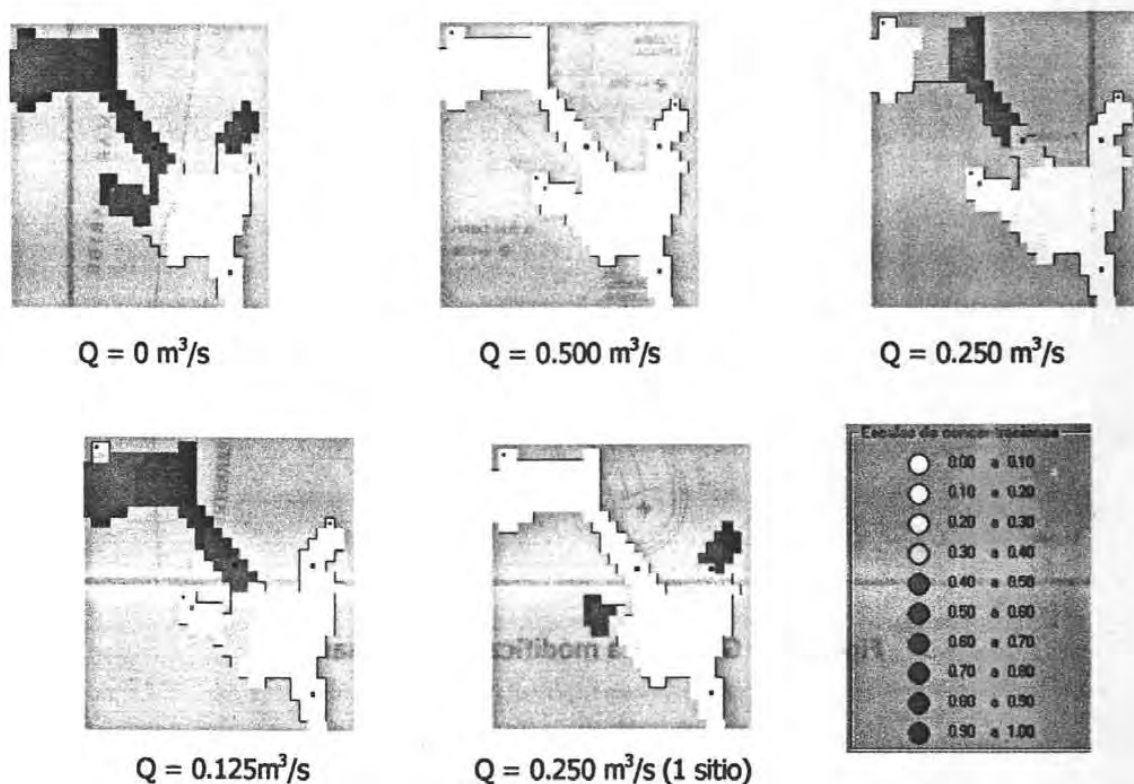
Días	Concentración relativa promedio C/C_0		
	S/Bombeo	Lluvia	Estiaje
	$Q_I = 0.00 \text{ m}^3/\text{s}$	$Q_I = 0.250 \text{ m}^3/\text{s}$	$Q_I = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$
5	0.7431	0.5467	0.6711
10	0.6346	0.3318	0.4975
15	0.5573	0.2100	0.3759
20	0.4975	0.1364	0.2876

Tabla 5.5 Concentraciones relativas promedio
Gastos de ingreso por bombeo (Q_P). Geometría original

Días	Concentración relativa promedio C/C_0				
	S/Bombeo	Bombeo en 3 sitios (m^3/s)			1 Sitio
	$Q_P = 0.000$	$Q_P = 0.500$	$Q_P = 0.250$	$Q_P = 0.125$	$Q_P = 0.250$
5	0.7431	0.4898	0.6186	0.6790	0.6114
10	0.6346	0.2620	0.4245	0.5215	0.3824
15	0.5573	0.1400	0.3017	0.4135	0.2316
20	0.4975	0.0730	0.2189	0.3356	0.1417



**Figura 5.7 Concentración relativa de contaminantes para gastos de infiltración
Tiempo de simulación: 480 h (20 días)**



**Figura 5.8 Concentración relativa de contaminantes para gastos de bombeo
Tiempo de simulación: 480 h (20 días)**

Con el objetivo de aumentar la velocidad dentro de la marina y por lo tanto disminuir las concentraciones relativas de un contaminante se analiza una modificación en la geometría de la marina.

5.7 Marina con geometría modificada (Área reducida a 59,200 m²)

Pensando que al reducir el tamaño de la marina podría mejorarse la condición de intercambio de agua y que se evitaría el estancamiento se analizó la condición en la que se quita la parte extrema de la marina a partir del canal bajo el puente.

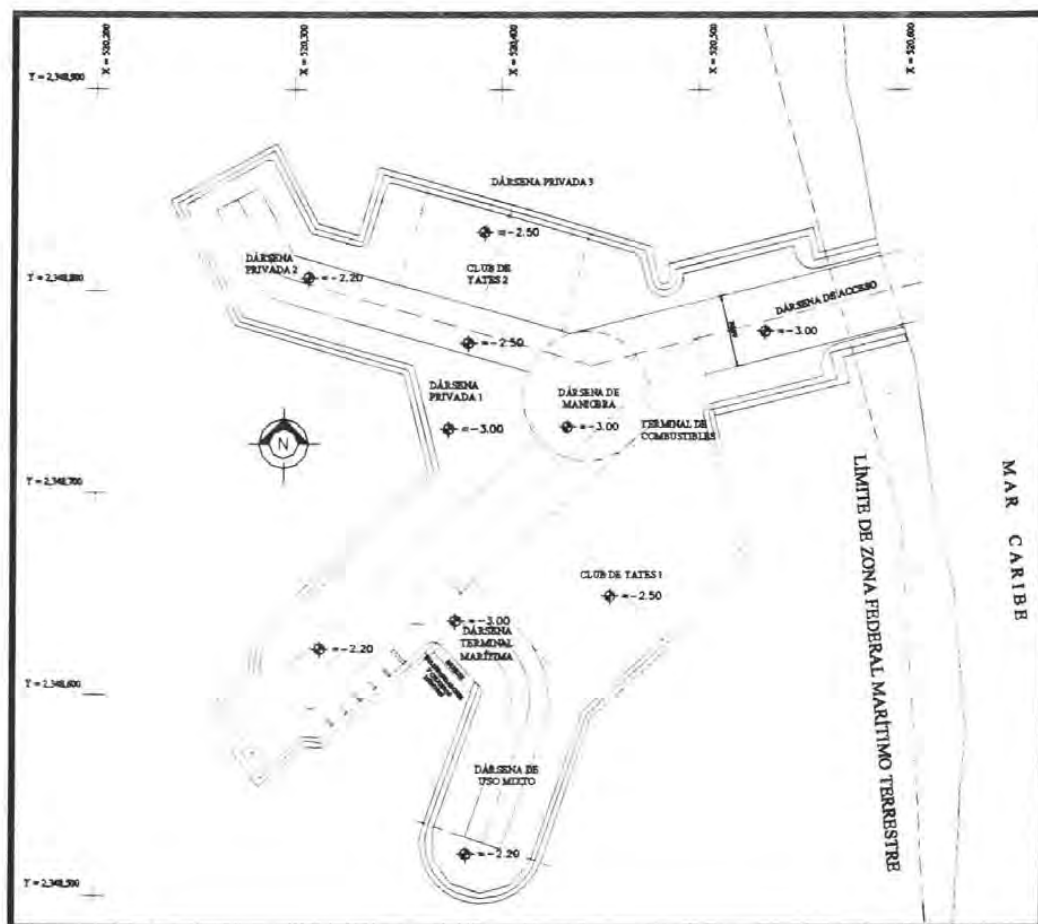
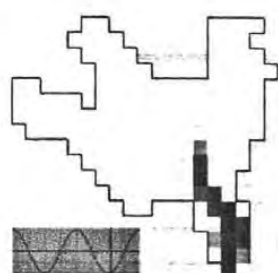


Figura 5.9 Geometría modificada de la marina

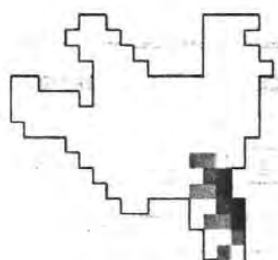
En la tabla 5.6 se indican las velocidades en el canal de acceso para los instantes de tiempo 12 y 20 horas respectivamente. Al reducir el área de la marina también se redujeron los caudales de infiltración a 0.125 m³/s y 0.0625 m³/s para las épocas de lluvia y estiaje respectivamente, los caudales por bombeo se redujeron a la mitad en todos los casos. Al analizar la tabla 5.7 se puede observar que para las 12 h el caso mas favorable es el caso 4 (bombeo en 3 sitios con 250 lts/s), los casos que consideran los caudales de infiltración dan resultados semejantes, en la figura 5.10 se esquematizan los resultados anteriormente mencionados

Tabla 5.6 Velocidades medias en la marina. Geometría modificada

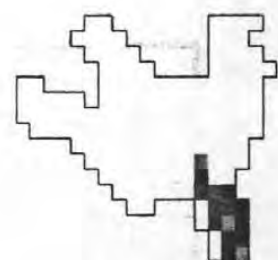
Caso	Q_B ó Q_T (m^3/s)	Canal de Acceso	
		12 h	20 h
1	$Q_B = 0, Q_T = 0$	0.0050	0.0090
2	$Q_T = 0.125$	0.0050	0.0077
3	$Q_T = 0.0625$	0.0050	0.0083
4	$Q_B = 0.250$ (3 sitios)	0.0070	0.0037
5	$Q_B = 0.125$ (3 sitios)	0.0063	0.0043
6	$Q_B = 0.0625$ (3 sitios)	0.0050	0.0043
7	$Q_B = 0.125$ (1 sitio)	0.0063	0.0037



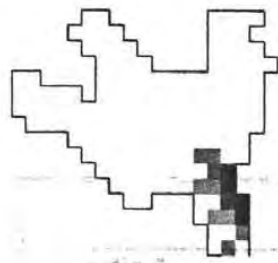
Caso 1



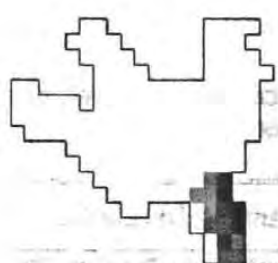
Caso 2



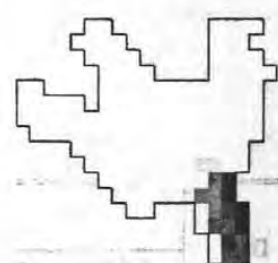
Caso 3



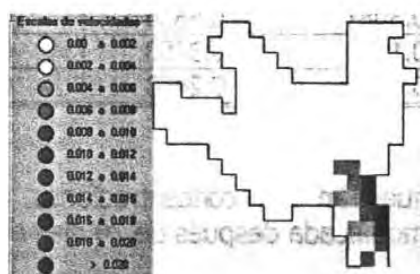
Caso 4



Caso 5



Caso 6



Caso 7

Figura 5.10 Velocidades medias en la marina modificada.
Tiempo de simulación de 20 h

5.7.1 Difusión-advección de la marina (Geometría modificada)

Para conocer cual es caso que permite una mejor calidad del agua en la marina se procede a realizar un análisis de la variación de las concentraciones relativas promedio de una sustancia, los resultados del cálculo se muestran las figuras del Anexo 4.

Al analizar los resultados expresados en las tablas 5.7 y 5.8 para 20 días de modelación se deduce que el mejor caso corresponde al bombeo de $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ en tres sitios el agua de la marina se renueva en un 91.3%, el segundo caso corresponde al bombeo en un sitio de $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$, con este arreglo se obtiene una renovación del agua de la marina un poco mayor al 85%.

Tabla 5.7 Concentraciones relativas, gastos de ingreso por infiltración (Q_I). Geometría modificada

Días	Concentración relativa promedio C/C_0		
	S/Bombeo	Lluvia	Estiaje
	$Q_I = 0.00 \text{ m}^3/\text{s}$	$Q_I = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$	$Q_I = 0.0625 \text{ m}^3/\text{s}$
5	0.7717	0.6223	0.7019
10	0.6633	0.4131	0.5393
15	0.5752	0.2758	0.4174
20	0.5007	0.1852	0.3245

Tabla 5.8 Concentraciones relativas promedio Geometría modificada

Días	Concentración relativa promedio C/C_0				
	S/bombeo	Bombeo en 3 sitios (Q_p en m^3/s)			1 sitio
	$Q_p = 0.000$	$Q_p = 0.250$	$Q_p = 0.125$	$Q_p = 0.0625$	$Q_p = 0.250$
5	0.7717	0.5582	0.6721	0.7234	0.5608
10	0.6633	0.3087	0.4836	0.5744	0.3366
15	0.5752	0.1648	0.3450	0.4571	0.2105
20	0.5007	0.0869	0.2453	0.3639	0.1348

Las figuras 5.11 y 5.12 muestran las concentraciones relativas promedio de un contaminante para la marina modificada después de 20 días de simulación.

Como conclusión se obtiene que al reducir el área de la marina en un 29% y bombear la mitad del agua en tres sitios se obtiene una renovación del agua de 91.3%, muy cercana al 92.7% esperada para la geometría original y un caudal de bombeo de $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$, además con esta modificación se producirá un ahorro considerable en gastos de dragado y bombeo.

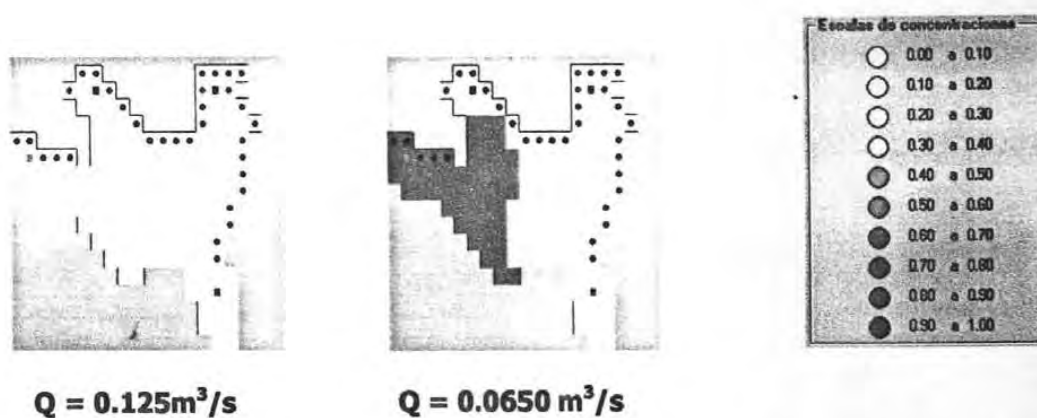


Figura 5.11 Concentración relativa de contaminantes para gastos de infiltración
Tiempo de simulación: 480 h (20 días)

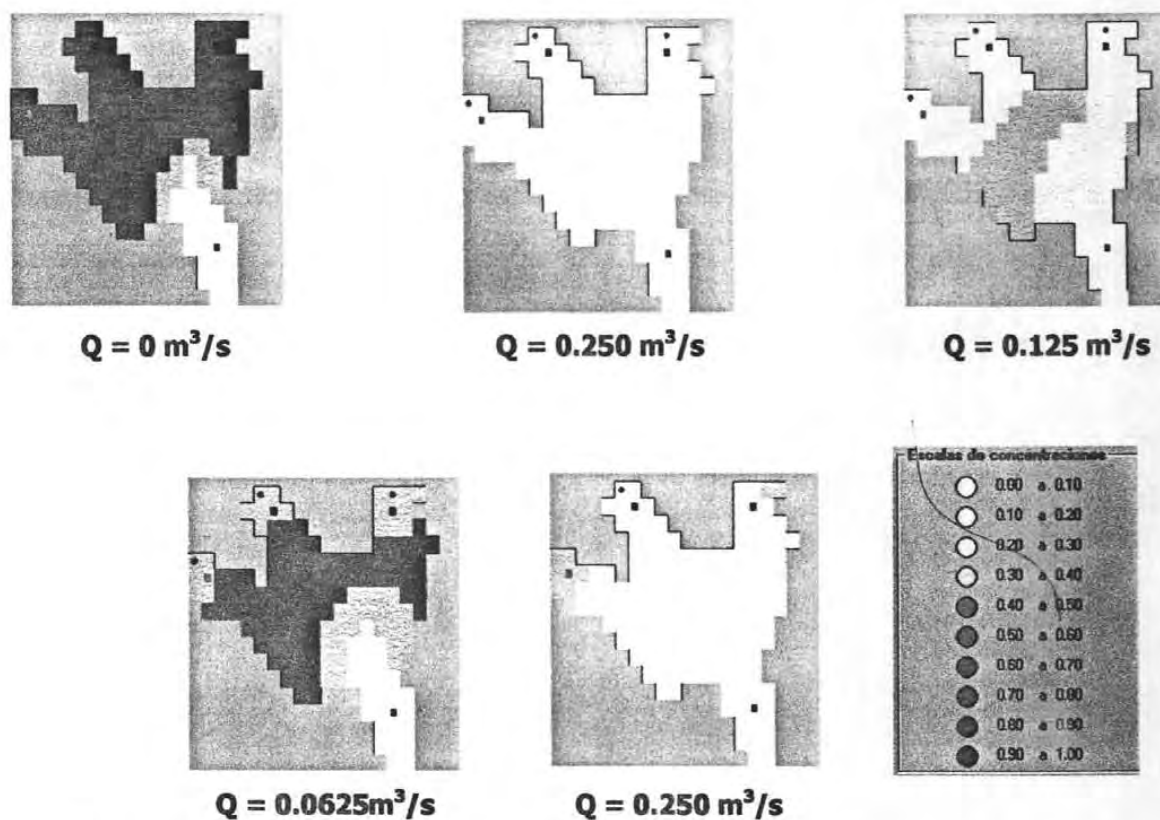


Figura 5.12 Concentración relativa de contaminantes para gastos de bombeo
Tiempo de simulación: 480 h (20 días)

CONCLUSIONES

Al diseñar una marina se debe prestar especial atención a las zonas en donde existe poca movilidad en el agua (donde la velocidad es casi nula), ya que esto repercute directamente en la calidad del agua. Para resolver el problema en aquellos casos en donde las concentraciones relativas promedio son muy elevadas se propone realizar las siguientes acciones (a) modificar la geometría y (b) utilizar sistemas de bombeo ya sea introducción o extracción de agua ubicados en puntos estratégicos que funcionen durante el periodo de bajamar

El modelo hidrodinámico bidimensional desarrollado en esta tesis representa adecuadamente el comportamiento del mar por la acción de la marea en zonas someras, es un modelo implícito en diferencias finitas que puede tener anchos de celdas variables. El método utilizado es robusto y eficiente, que permite considerar diferentes variables en el dominio de cálculo, como por ejemplo bombeos e infiltraciones

En los resultados obtenidos en el caso de aplicación, se observó que para la marina original en estudio, las velocidades del flujo son mínimas por lo que el coeficiente de intercambio es insuficiente. Así pues, se propone para esta misma geometría colocar bombeos en diferentes puntos. Estos gastos hacen posible mejorar el funcionamiento de la marina, sobre todo cuando se bombea un gasto de $0.500 \text{ m}^3/\text{s}$ (Tabla 5.5)

Para el caso en donde se reduce el área de la marina se observa que, para cuando existe un gasto de aportación del orden de $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ las concentraciones relativas de agua limpia son muy pequeñas después de 20 días (Tabla 5.8).

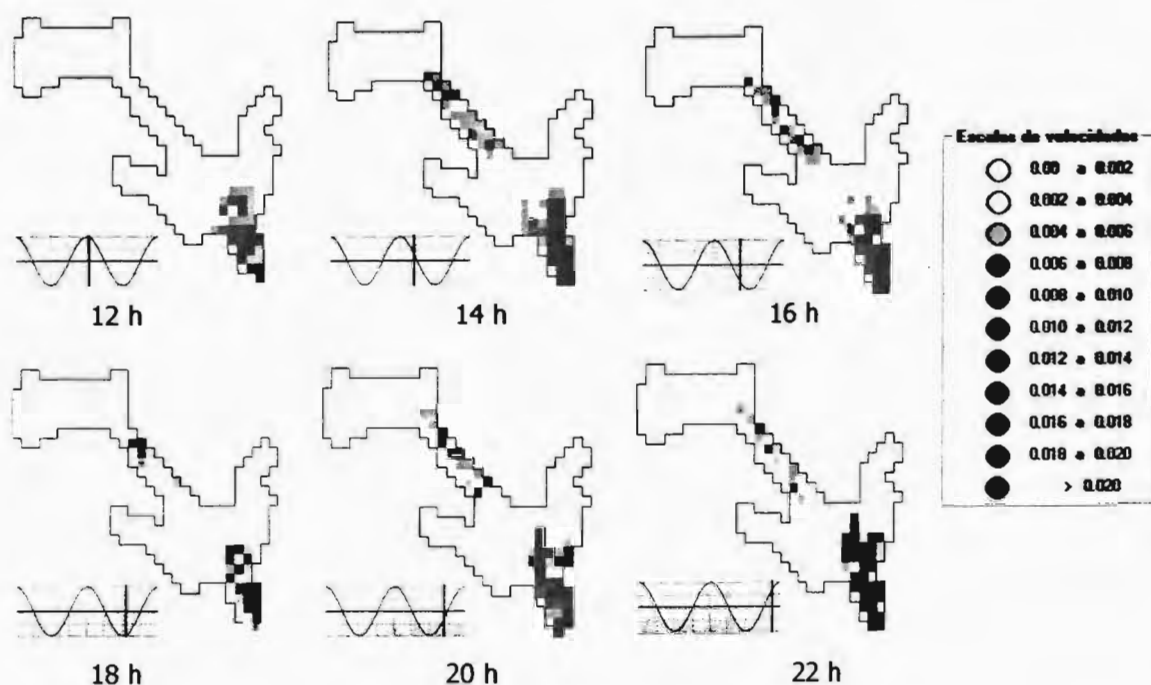
BIBLIOGRAFÍA

1. Blain, W.R. Marina Developments; "Computational Mechanics Publications", 1993, Southampton Boston.
2. Castañeda Bárcena Sonia "Desarrollo de un modelo hidrodinámico tridimensional para el estudio de la propagación de ondas largas en estuarios y zonas someras". Tesis doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Cantabria, 2000.
3. Falconer, Roger A. "Water Quality simulation study of a natural harbor". Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ASCE. Vol. 112, No. 1 January, 1986.
4. Fuentes M. O.A., Carrillo S. J.J., De Luna C. F. "Marina Calculations of concentrations of a pollutant, and volume of seawater that enters in marine", Planning, Design and Operation 99 Conference Meeting. Wessex Institute of Technology, 1999.
5. Peña Martínez, Porfirio "Diseño Hidráulico y Geométrico de Marinas o Puertos Deportivos". Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2000.
6. Proyecto elaborado por el Instituto de Ingeniería para MEGALAND S.A de C.V. "Hidrodinámica, Volúmenes de Intercambio y Calidad de Agua de la Marina Mazatlán. Abril 1993
7. Proyecto elaborado por el Instituto de Ingeniería para DIRAC, S.A. de C.V. "Análisis Hidrodinámico y de Calidad de Agua en la Marina del Desarrollo Turístico Playa Mujeres en el Municipio de Isla Mujeres, Quintana Roo", Junio de 2001.
8. Silva C. Rodolfo, "Apuntes de hidráulica marítima", División de estudios de posgrado de la facultad de ingeniería, UNAM, 2004
9. Weiyan, Tan. Shallow Water Hydrodynamics, Elsevier Oceanography Series 55, p. 1-27.1992
10. Wen-Li Chiang "Simulation of large-scale circulation in harbors". Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ASCE, Vol. 108, No. WW1, February, 1982

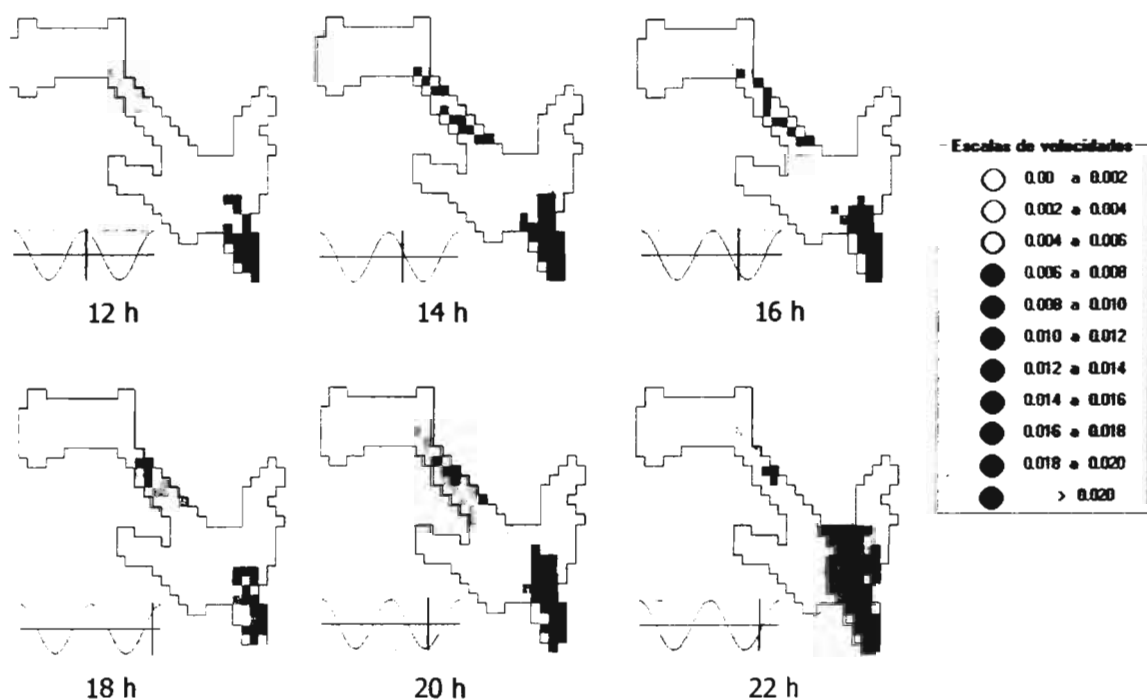
ANEXO 1

ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE LA MARINA

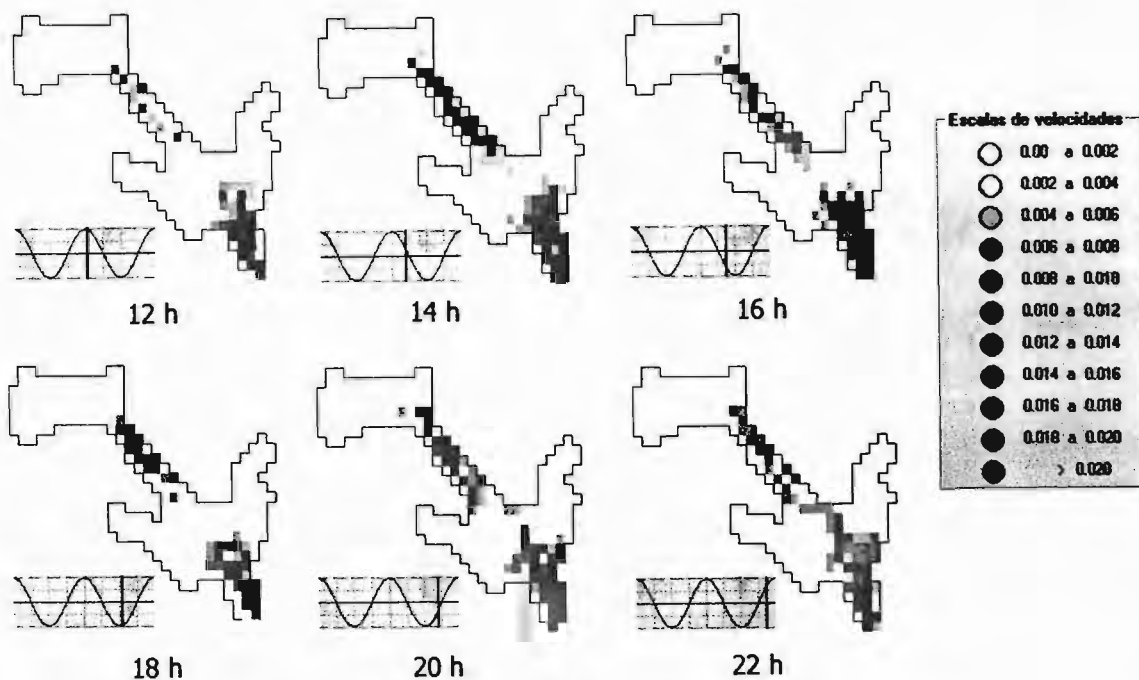
CONDICIÓN: GEOMETRÍA ORIGINAL



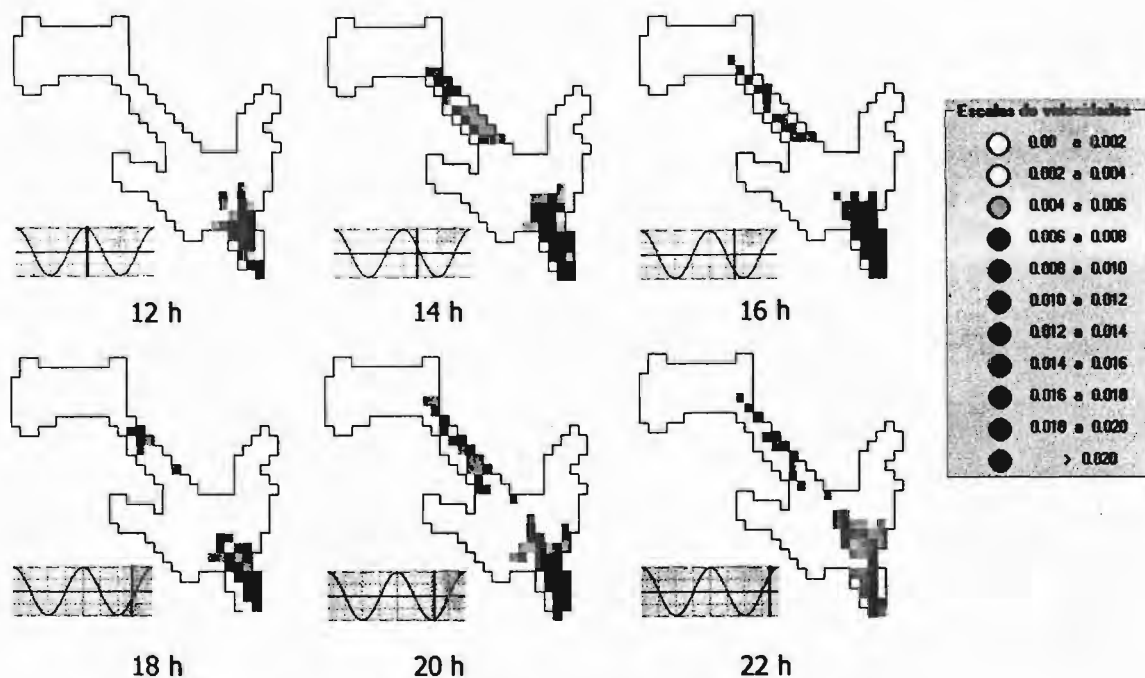
GASTO TOTAL DE ORIGEN FREÁTICO 0.125 m³/s



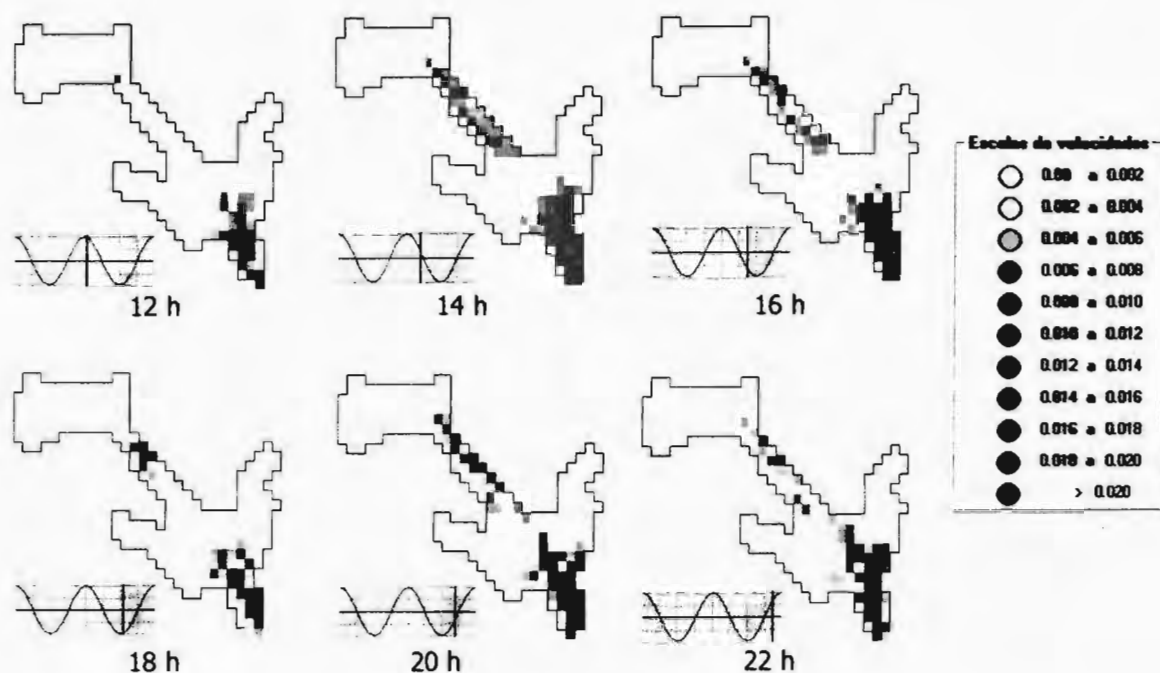
GASTO TOTAL DE ORIGEN FREÁTICO 0.250 m³/s



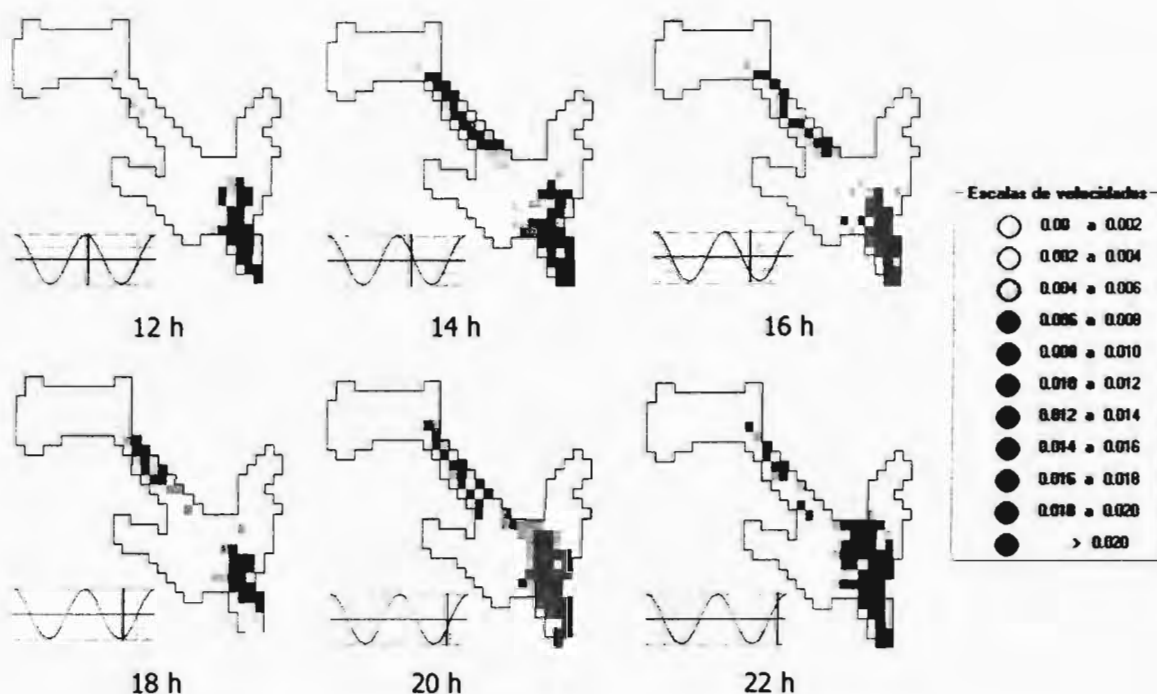
GASTO TOTAL DE BOMBEO 0.250 m³/s (1 SITIO)



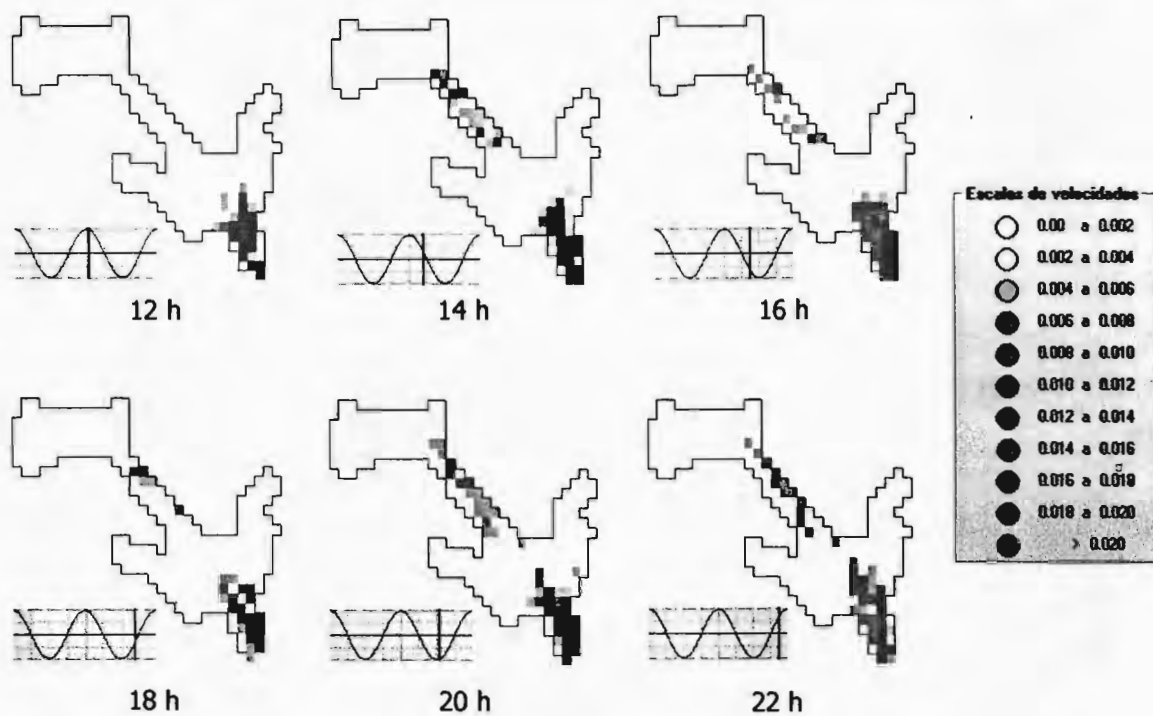
GASTO TOTAL DE BOMBEO 0.125 m³/s (3 SITIOS)



GASTO TOTAL DE BOMBEO 0.250 m³/s (3 SITIOS)



GASTO TOTAL DE BOMBEO 0.500 m³/s (3 SITIOS)

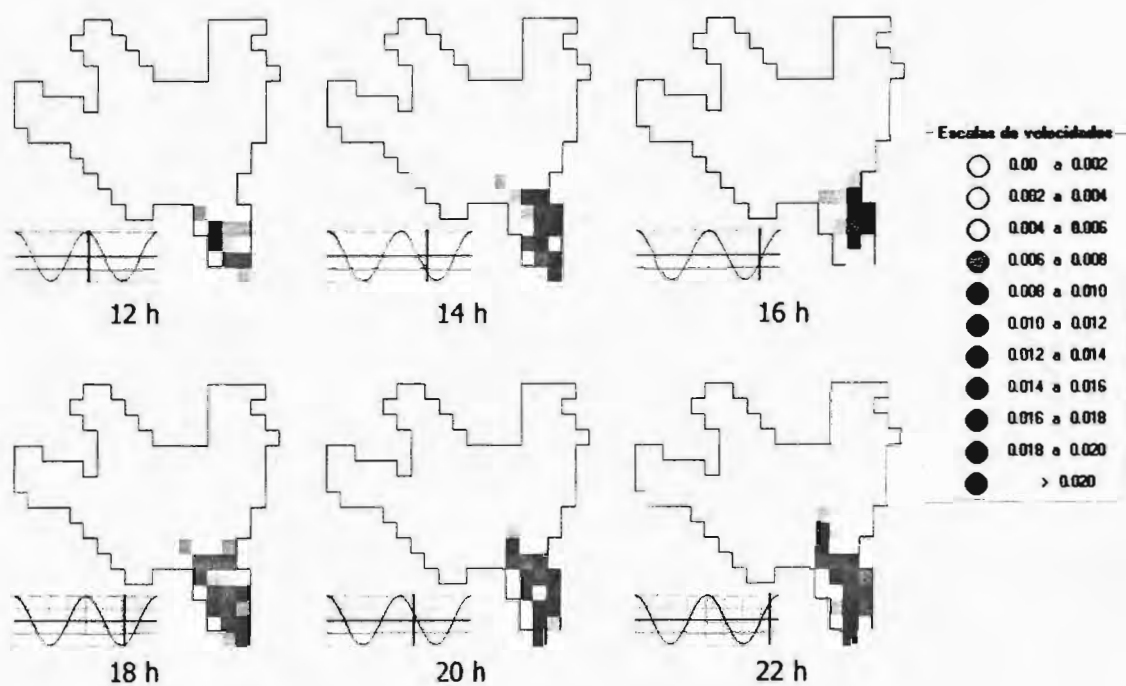


SIN GASTO DE BOMBEO Y SIN INGRESO DE AGUA FREÁTICA

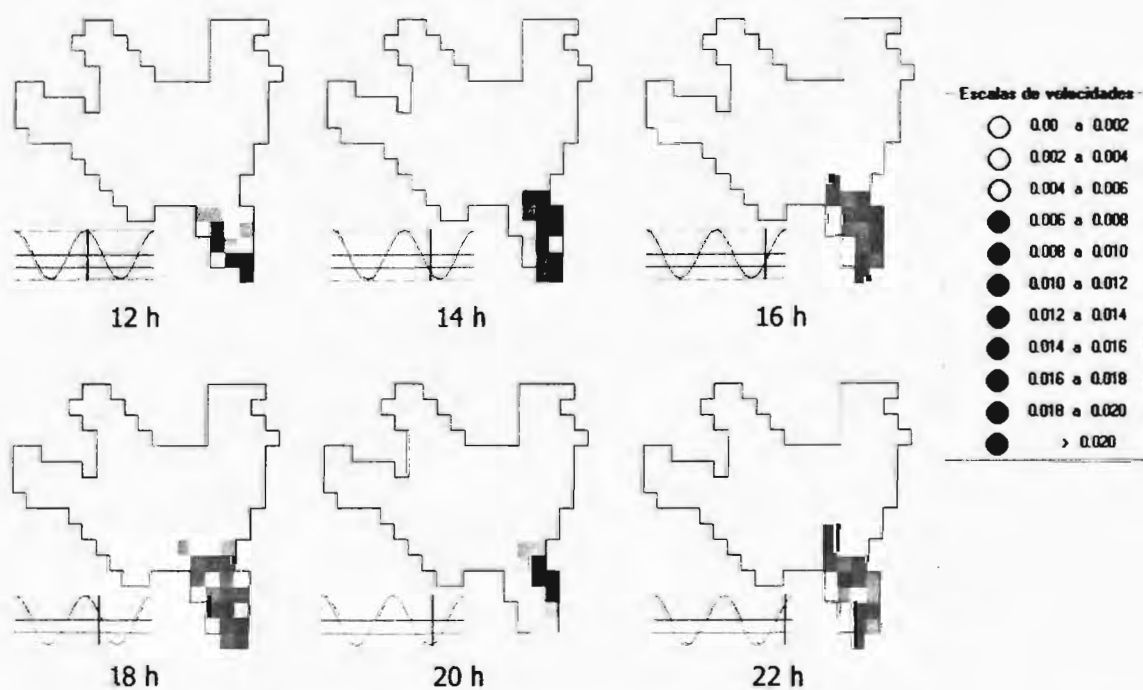
ANEXO 2

ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE LA MARINA

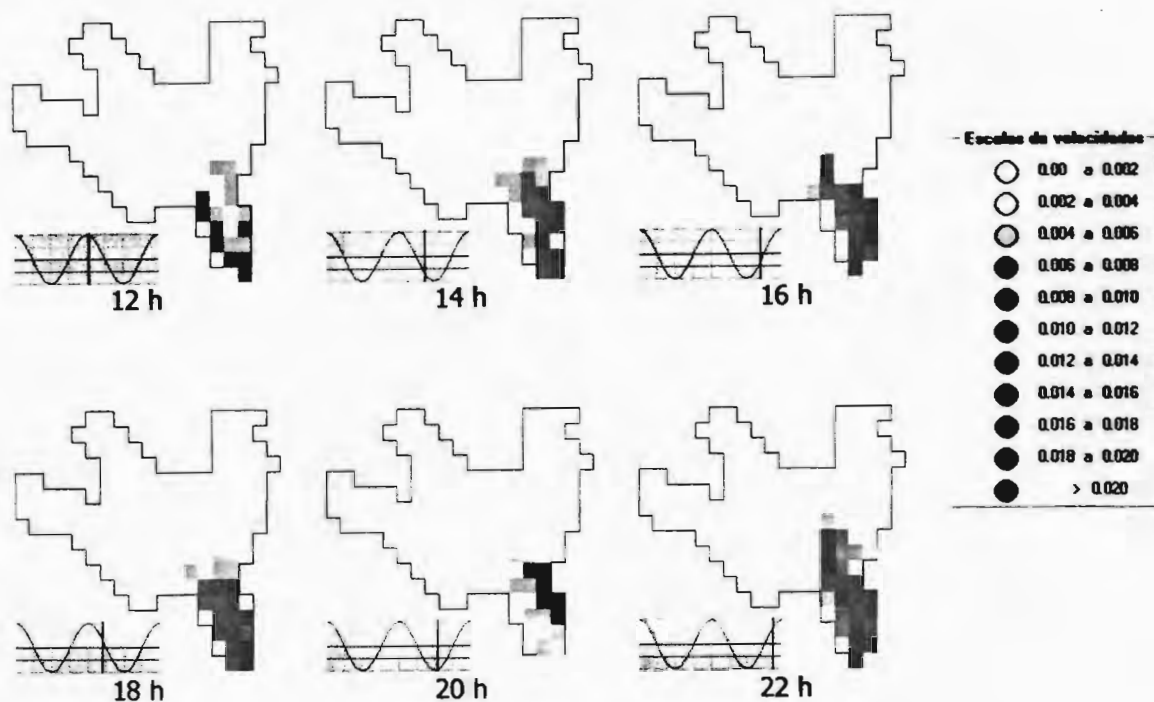
CONDICIÓN: GEOMETRÍA MODIFICADA



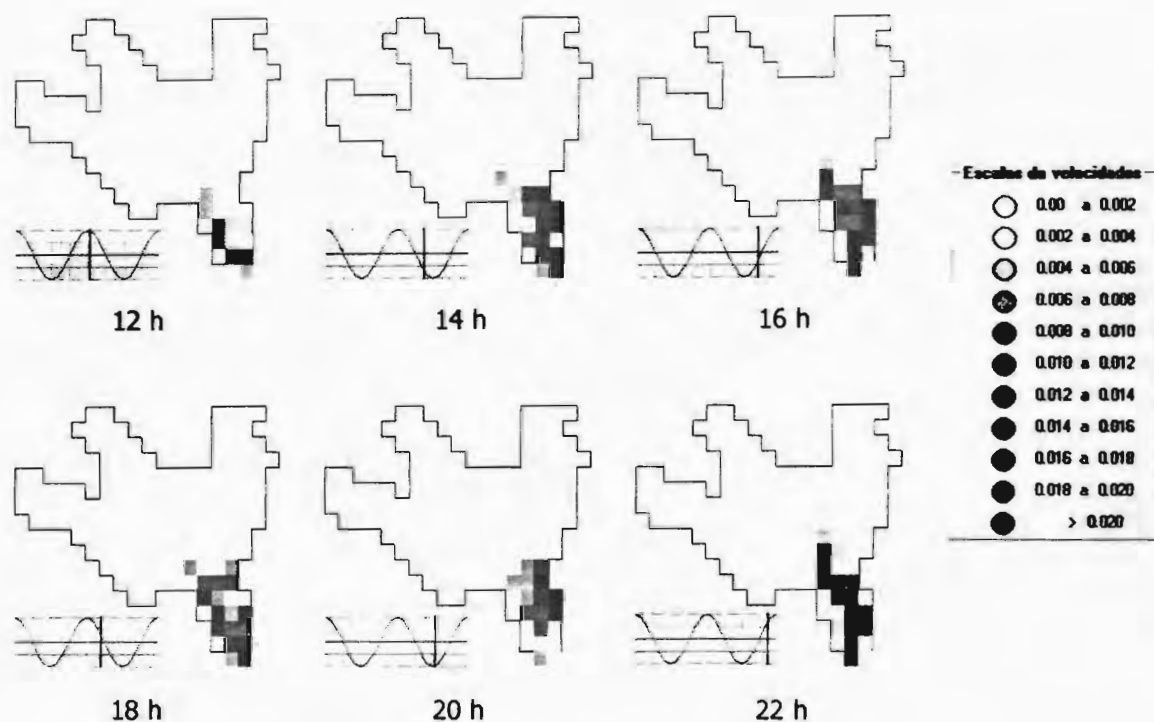
GASTO TOTAL DE ORIGEN FREÁTICO 0.0625 m³/s



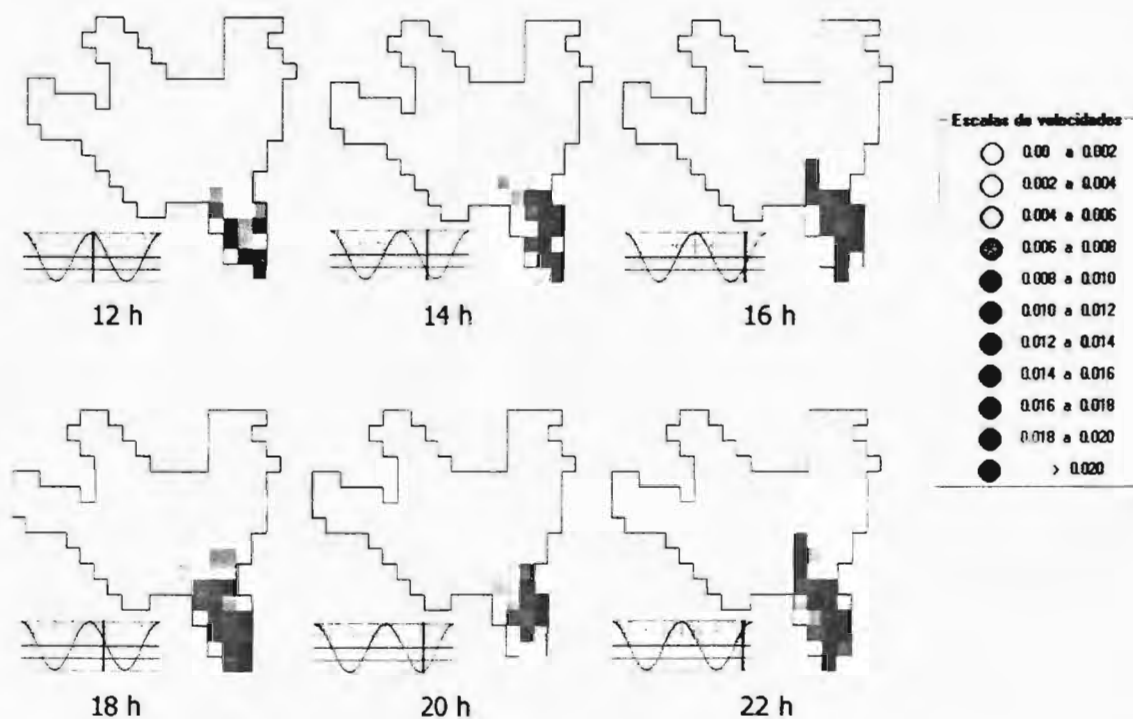
GASTO TOTAL DE ORIGEN FREÁTICO 0.125 m³/s



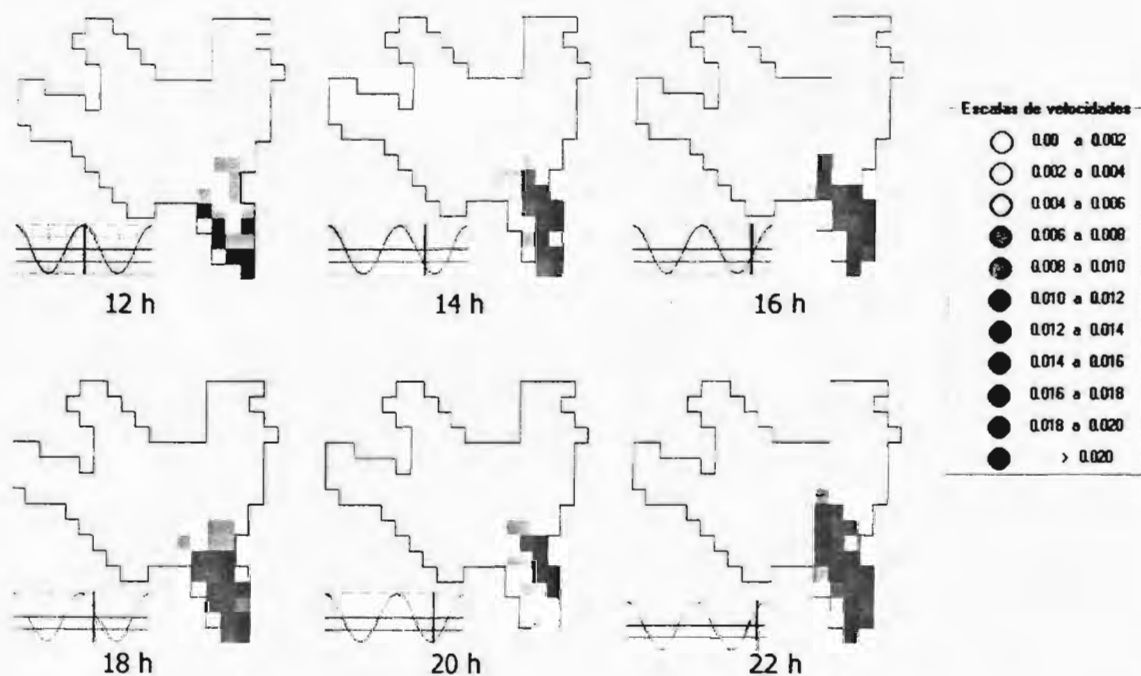
GASTO DE BOMBEO = 0.125 m³/s (1 SITIO)



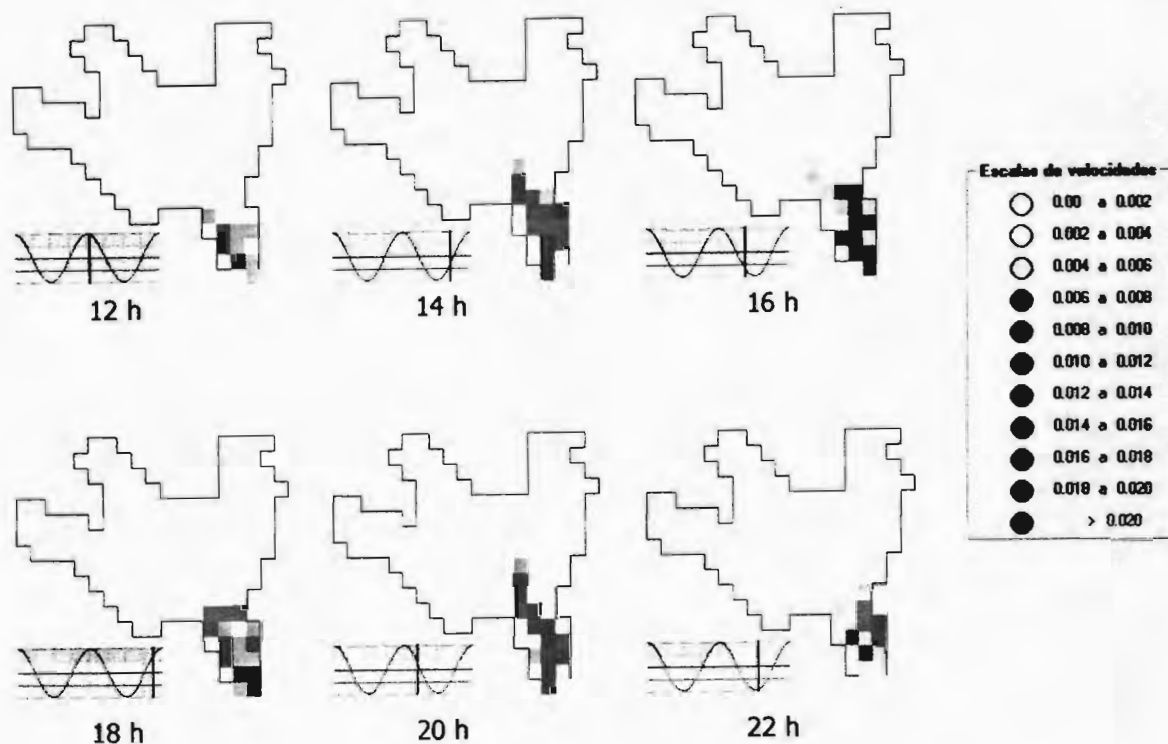
GASTO DE BOMBEO = 0.0625 m³/s (3 SITIOS)



GASTO DE BOMBEO = 0.125 m³/s (3 SITIOS)



GASTO DE BOMBEO = 0.250 m³/s (3 SITIOS)



SIN GASTO DE BOMBEO Y SIN INGRESO DE AGUA FREÁTICA

ANEXO 3

CONDICIÓN: GEOMETRÍA ORIGINAL

CONCENTRACIONES RELATIVAS PROMEDIO

SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

SIN GASTO DE BOMBEO



12 h



24 h



36 h



48 h



60 h



72 h



84 h



96 h



108 h



120 h



132 h



144 h



156 h



168 h



180 h



192 h



204 h



216 h



228h



240h



252 h



264 h



276 h



288 h



300 h



312 h



324 h



336 h



348 h



360 h



372 h



384 h



396 h



408 h



420 h



432 h



444 h



456 h



468 h



480 h

Escalas de concentraciones

- 0.00 a 0.10
- 0.10 a 0.20
- 0.20 a 0.30
- 0.30 a 0.40
- 0.40 a 0.50
- 0.50 a 0.60
- 0.60 a 0.70
- 0.70 a 0.80
- 0.80 a 0.90
- 0.90 a 1.00

SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

BOMBEO TOTAL (TRES SITIOS)

$$Q_p = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$$



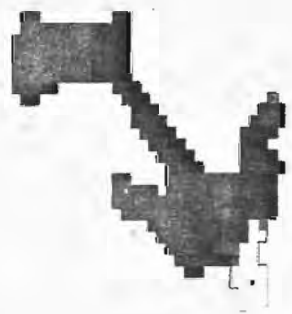
12 h



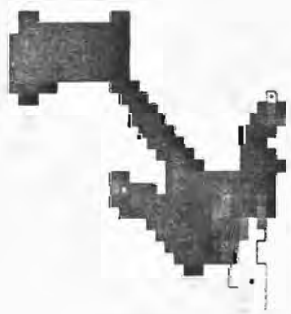
24 h



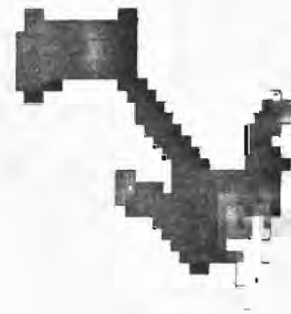
36 h



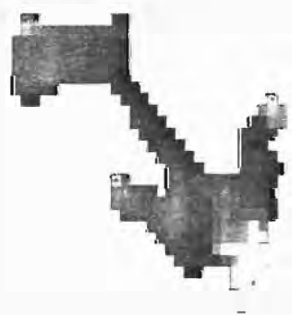
48 h



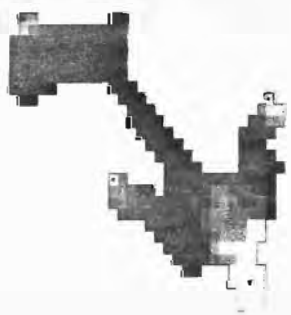
60 h



72 h



84 h



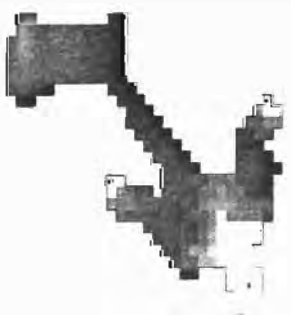
96 h



108 h



120 h



132 h



144 h



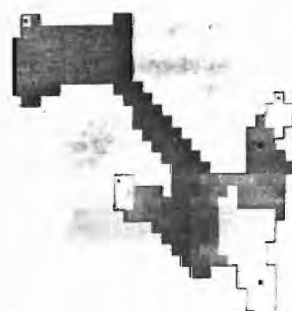
156 h



168 h



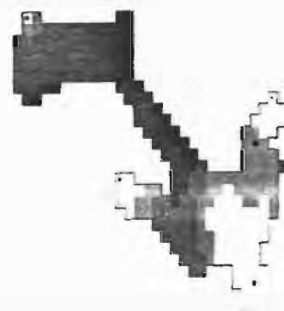
180 h



192 h



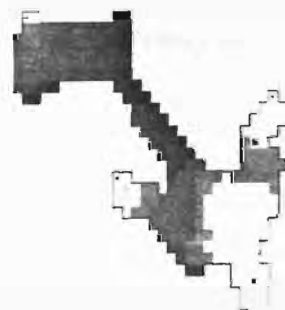
204 h



216 h



228 h



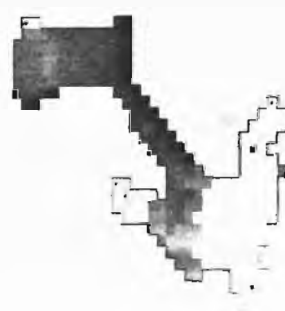
240 h



252 h



264 h



276 h



288 h



300 h



312 h



324 h



336 h



348 h



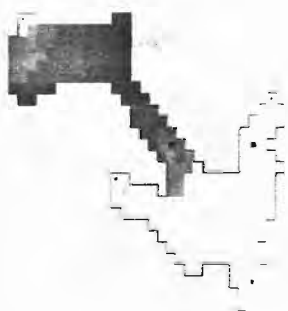
360 h



372 h



384 h



396 h



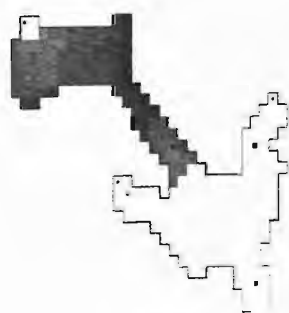
408 h



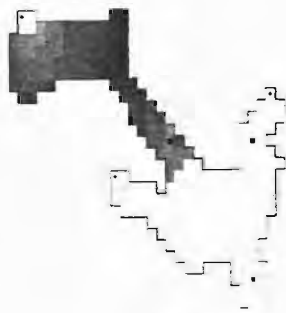
420 h



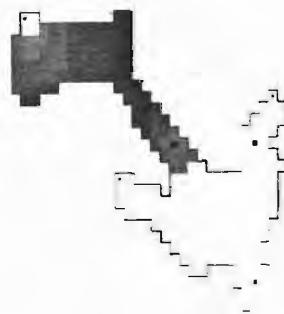
432 h



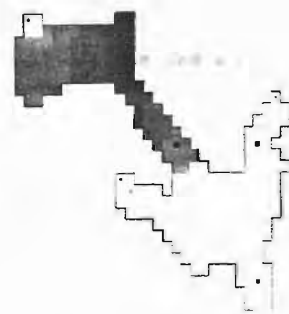
444 h



456 h



468 h



480 h

Escalas de concentraciones

- 0.00 a 0.10
- 0.10 a 0.20
- 0.20 a 0.30
- 0.30 a 0.40
- 0.40 a 0.50
- 0.50 a 0.60
- 0.60 a 0.70
- 0.70 a 0.80
- 0.80 a 0.90
- 0.90 a 1.00

SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO
BOMBEO TOTAL (TRES SITIOS)

$$Q_p = 0.250 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



24 h



36 h



48 h



60 h



72 h



84 h



96 h



108 h



120 h



132 h



144 h



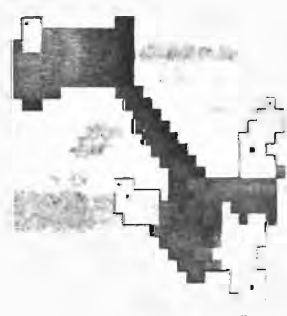
156 h



168 h



180 h



192 h



204 h



216 h



228 h



240 h



252 h



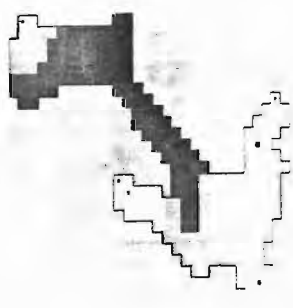
264 h



276 h



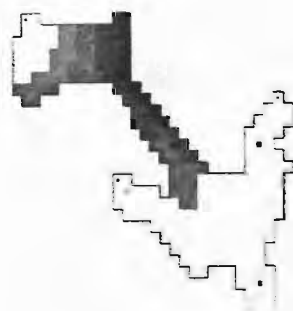
288 h



300 h



312 h



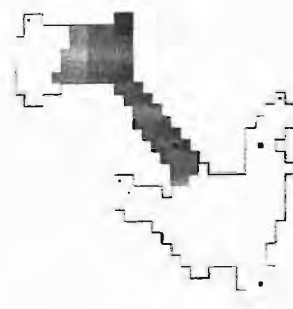
324 h



336 h



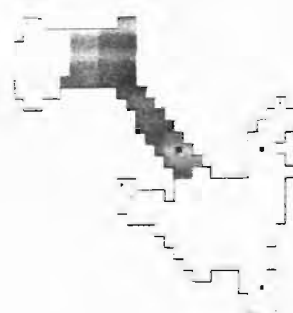
348 h



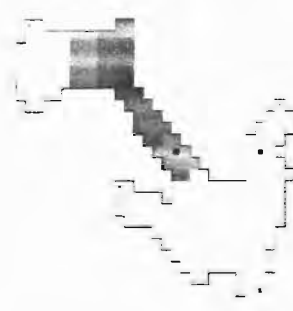
360 h



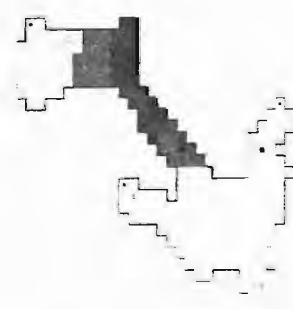
372 h



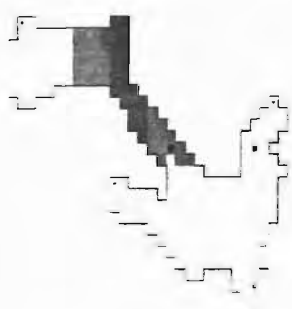
384 h



396 h



408 h



420 h



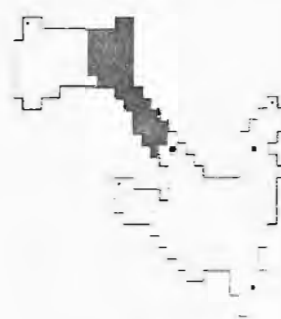
432 h



444 h



456 h



468 h



480 h

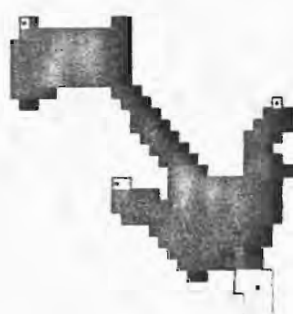
Escalas de concentraciones

○	0.00 a 0.10
○	0.10 a 0.20
○	0.20 a 0.30
○	0.30 a 0.40
●	0.40 a 0.50
●	0.50 a 0.60
●	0.60 a 0.70
●	0.70 a 0.80
●	0.80 a 0.90
●	0.90 a 1.00

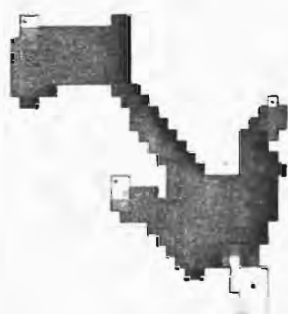
SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

BOMBEO TOTAL (TRES SITIOS)

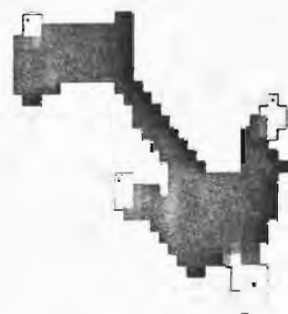
$$Q_p = 0.500 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



24 h



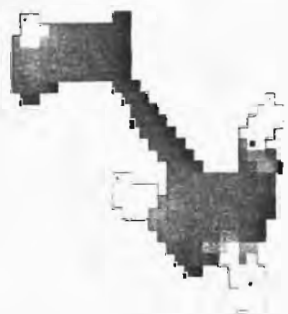
36 h



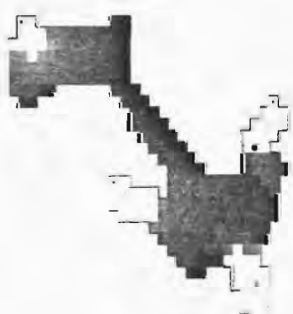
48 h



60 h



72 h



84 h



96 h



108 h



120 h



132 h



144 h



156 h



168 h



180 h



192 h



204 h



216 h



228 h



240 h



252 h



264 h



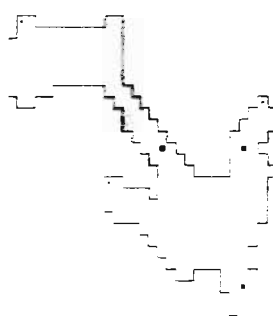
276 h



288 h



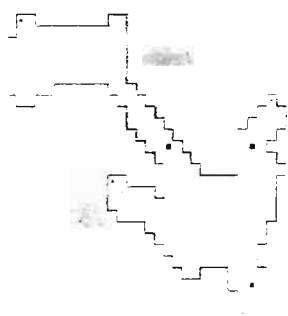
300 h



312 h



324 h



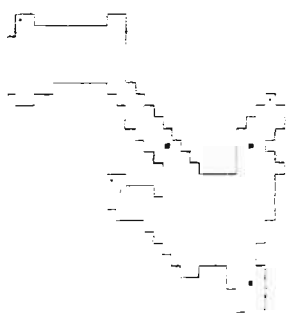
336 h



348 h



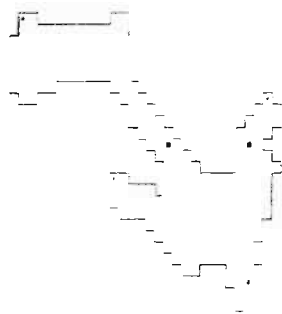
360 h



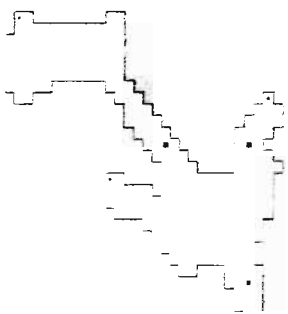
372 h



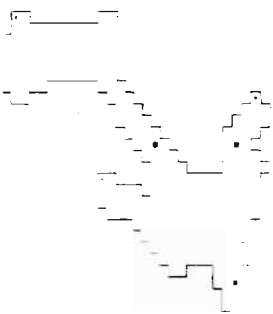
384 h



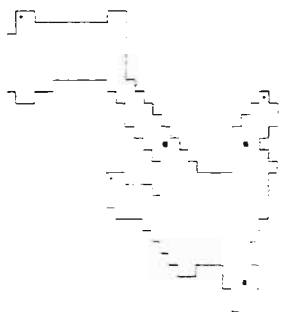
396 h



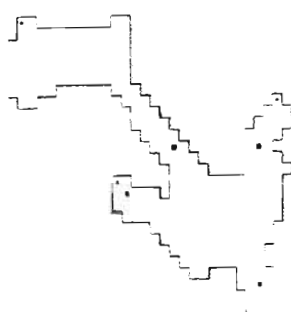
408 h



420 h



432 h



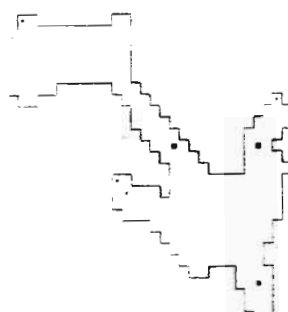
444 h



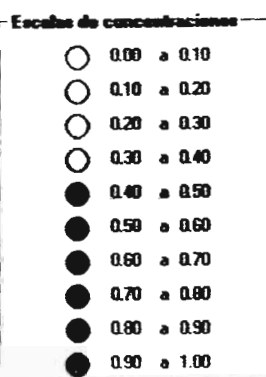
456 h



468 h



480 h



**SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN
FREÁTICO**

BOMBEO EN UN SITIO

$$Q_p = 0.250 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



24 h



36 h



48 h



60 h



72 h



84 h



96 h



108 h



120 h



132 h



144 h



156 h



168 h



180 h



192 h



204 h



216 h



228 h



240 h



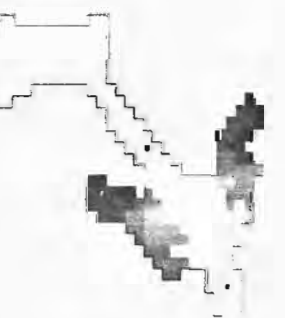
252 h



264 h



276 h



288 h



300 h



312 h



324 h



336 h



348 h



360 h



372 h



384 h



396 h



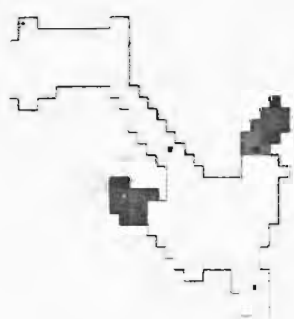
408 h



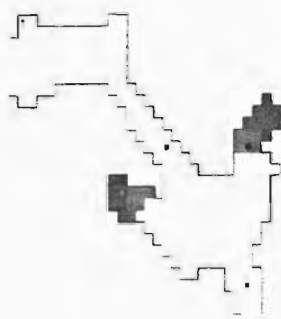
420 h



432 h



444 h



456 h

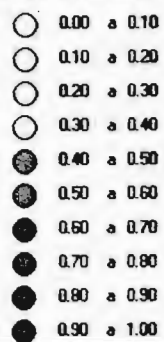


468 h



480 h

Escalas de concentraciones



INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

$$Q_I = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



24 h



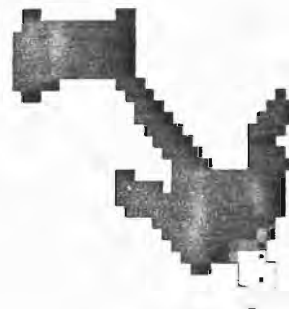
36 h



48 h



60 h



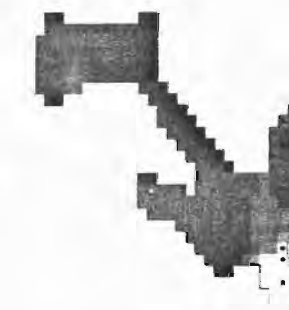
72 h



84 h



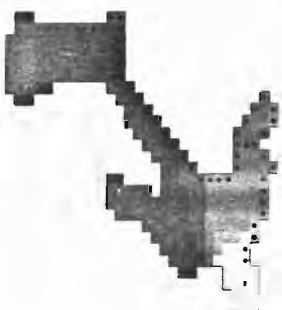
96 h



108 h



120 h



132 h



144 h



156 h



168 h



180 h



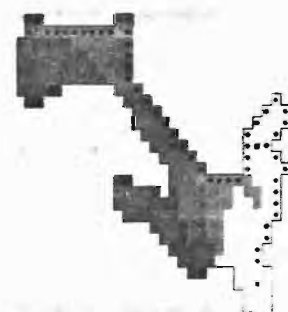
192 h



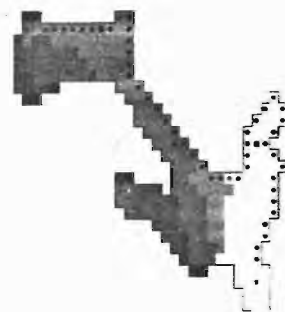
204 h



216 h



228 h



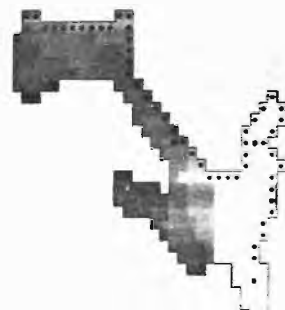
240 h



252 h



264 h



276 h



288 h



300 h



312 h



324 h



336 h



348 h



360 h



372 h



384 h



396 h



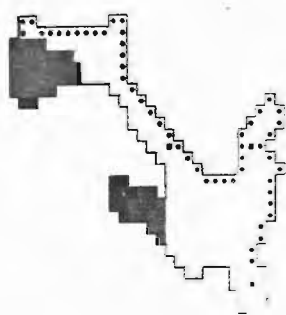
408 h



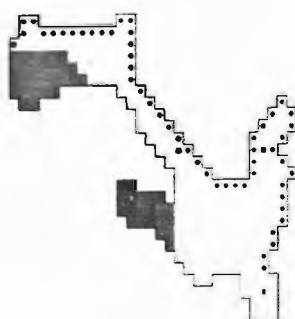
420 h



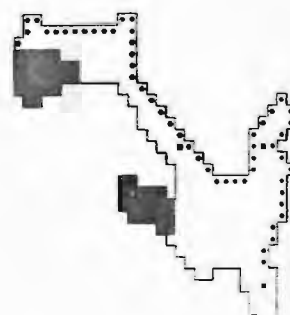
432 h



444 h



456 h



468 h



480 h

Escalas de concentraciones

- 0.00 a 0.10
- 0.10 a 0.20
- 0.20 a 0.30
- 0.30 a 0.40
- 0.40 a 0.50
- 0.50 a 0.60
- 0.60 a 0.70
- 0.70 a 0.80
- 0.80 a 0.90
- 0.90 a 1.00

INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

$$Q_I = 0.250 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



24 h



36 h



48 h



60 h



72 h



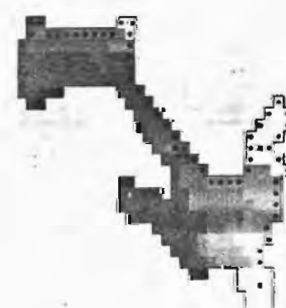
84 h



96 h



108 h



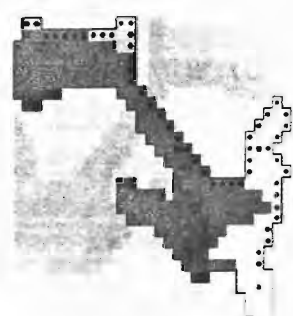
120 h



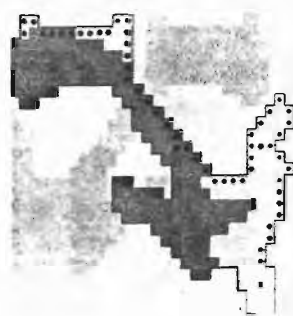
132 h



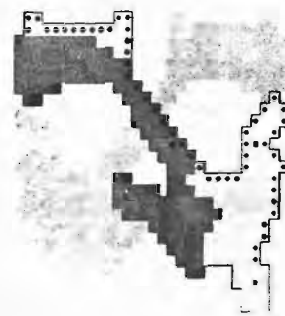
144 h



156 h



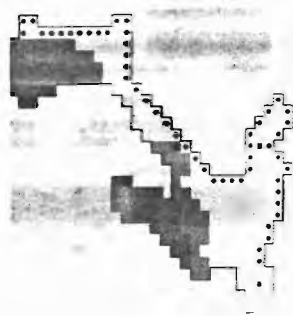
168 h



180 h



192 h



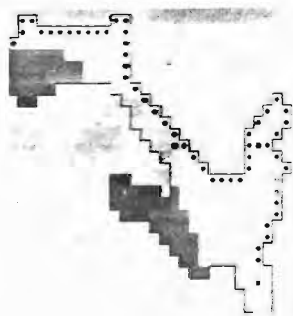
204 h



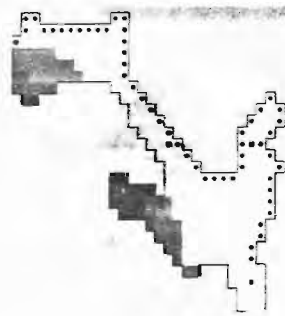
216 h



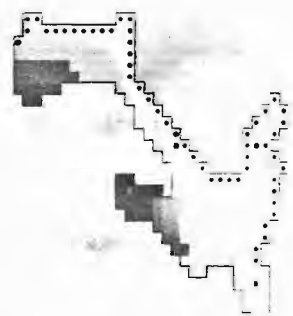
228 h



240 h



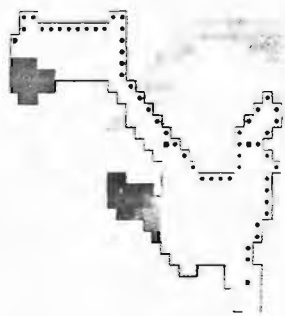
252 h



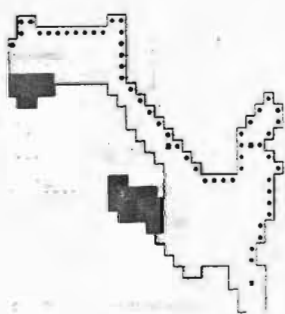
264 h



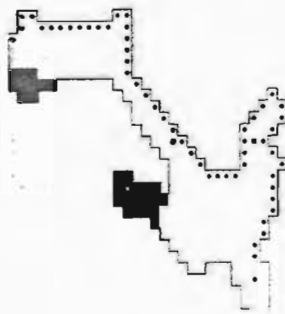
276 h



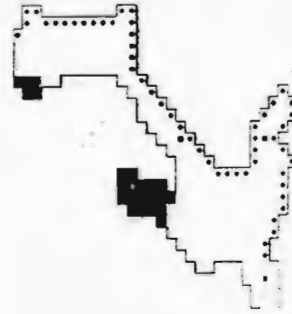
288 h



300 h



312 h



324 h



336 h



348 h



360 h



372 h



384 h



396 h



408 h



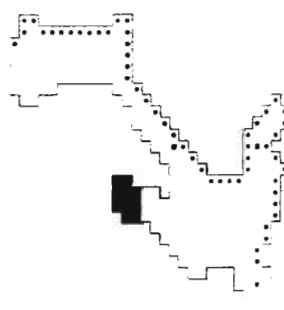
420 h



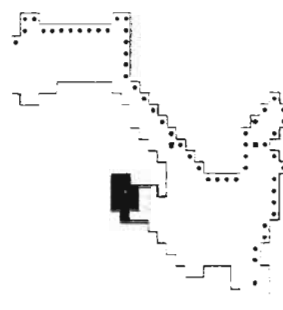
432 h



444 h



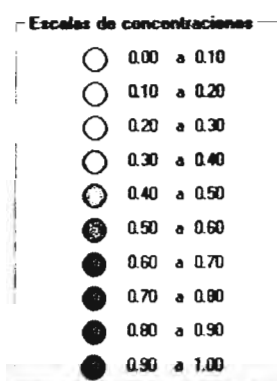
456 h



468 h



480 h



ANEXO 4

CONDICIÓN: GEOMETRÍA MODIFICADA

CONCENTRACIONES RELATIVAS PROMEDIO

SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO
SIN GASTO DE BOMBEO



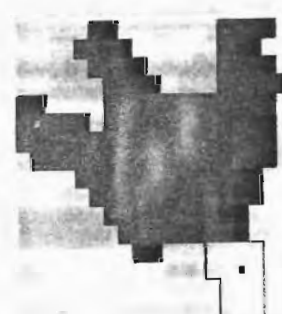
12 h



24 h



36 h



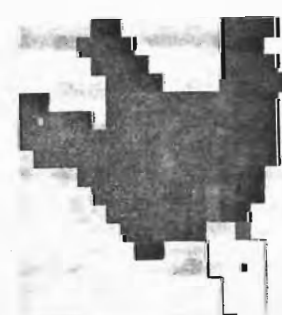
48 h



60 h



72 h



84 h



96 h



108 h



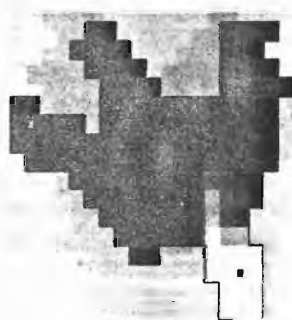
120 h



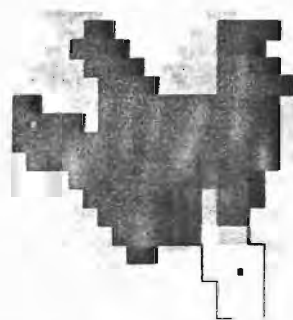
132 h



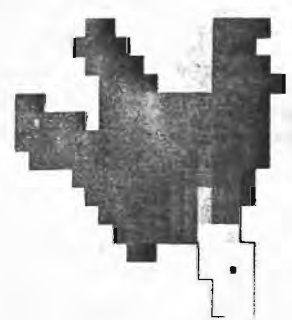
144 h



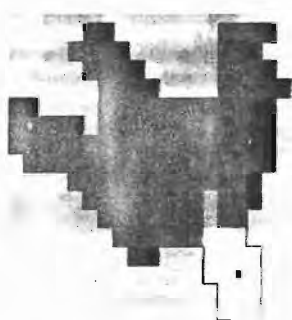
156 h



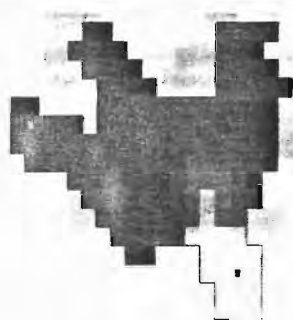
168 h



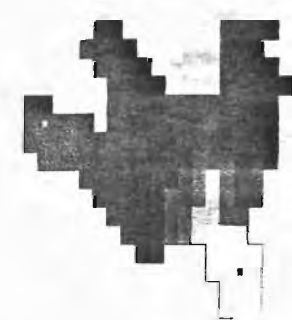
180 h



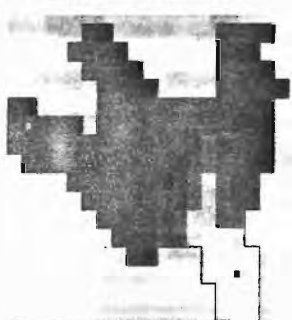
192 h



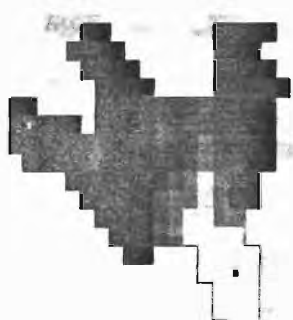
204 h



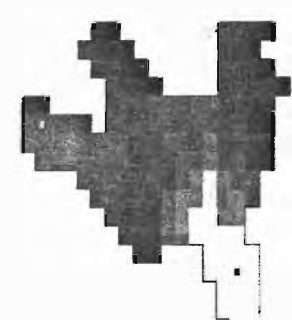
216 h



228 h



240 h



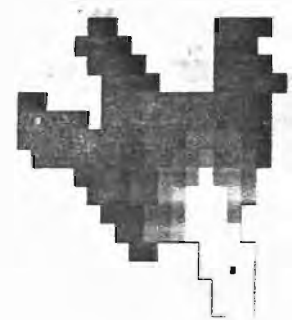
252 h



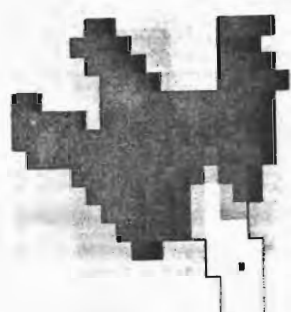
264 h



276 h



288 h



300 h



312 h



324 h



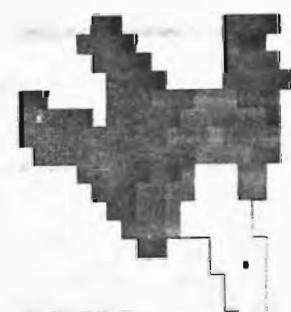
336 h



348 h



360 h



372 h



384 h



396 h



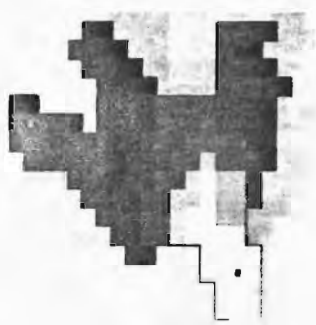
408 h



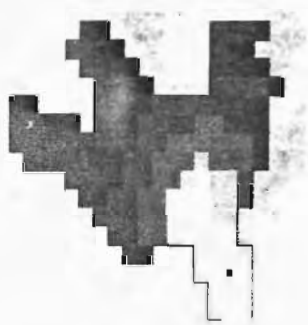
420 h



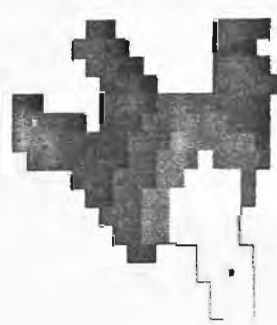
432 h



444 h



456 h

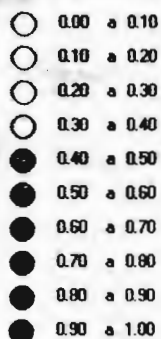


468 h



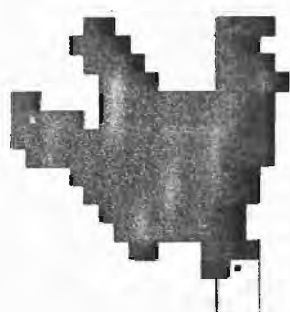
480 h

Escala de concentraciones

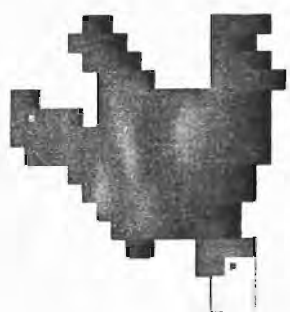


SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO
BOMBEO TOTAL (TRES SITIOS)

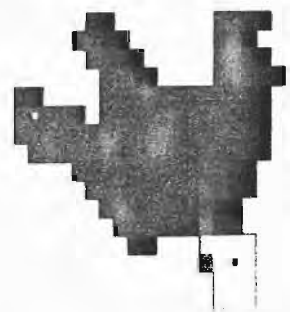
$$Q_p = 0.0625 \text{ m}^3/\text{s}$$



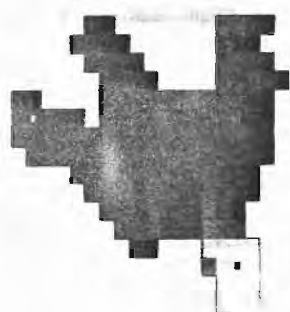
12 h



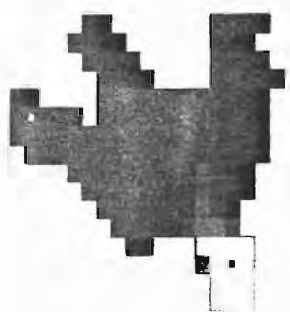
24 h



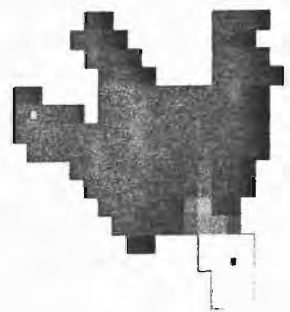
36 h



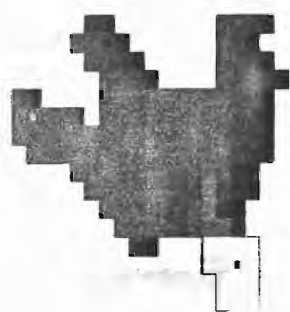
48 h



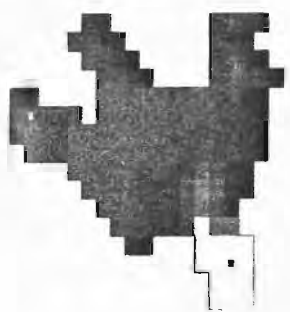
60 h



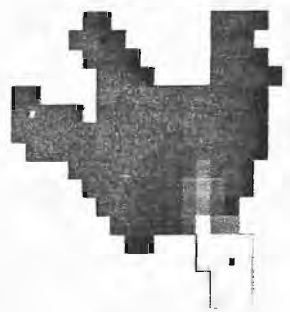
72 h



84 h



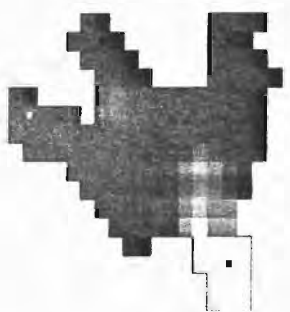
108 h



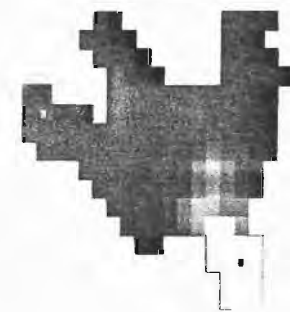
120 h



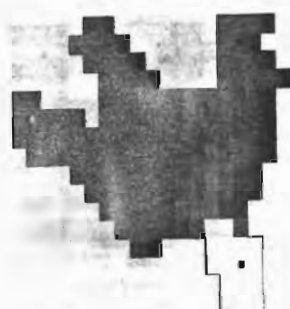
132 h



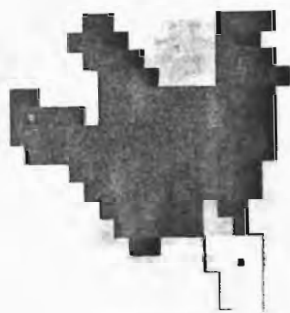
144 h



156 h



168 h



180 h



192 h



204 h



216 h



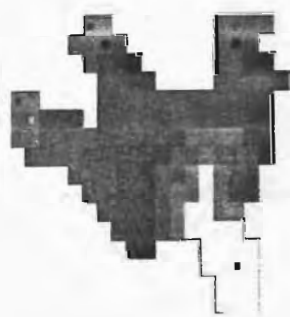
228 h



240 h



252 h



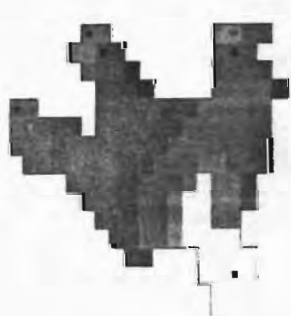
264 h



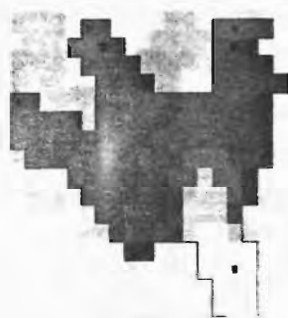
276 h



288 h



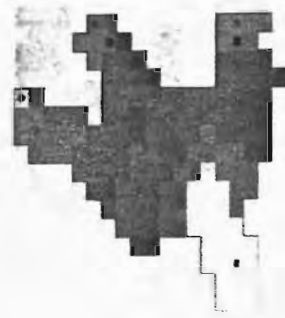
300 h



312 h



324 h



336 h



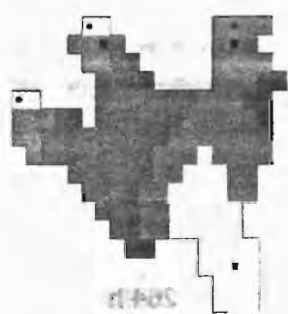
348 h



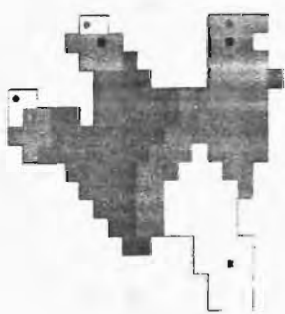
360 h



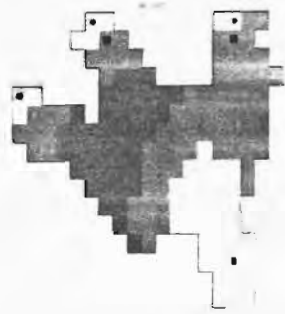
372 h



384 h



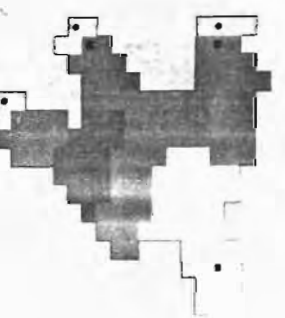
396 h



408 h



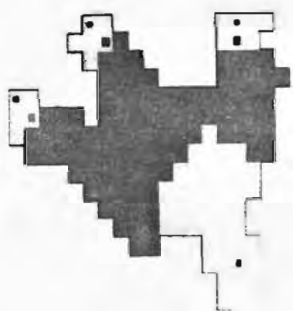
420 h



432 h



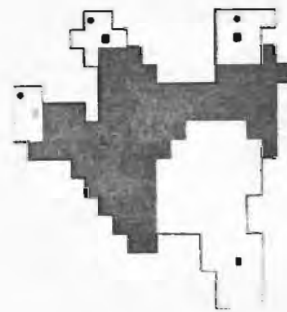
444 h



456 h



468 h



480 h

Escalas de concentraciones

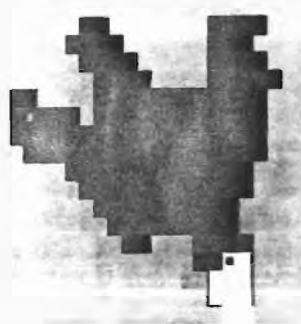
○	0.00	a	0.10
○	0.10	a	0.20
○	0.20	a	0.30
○	0.30	a	0.40
◐	0.40	a	0.50
◑	0.50	a	0.60
◒	0.60	a	0.70
◓	0.70	a	0.80
◔	0.80	a	0.90
◕	0.90	a	1.00

SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO
BOMBEO TOTAL (TRES SITIOS)

$$Q_p = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$$



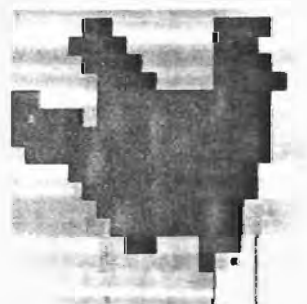
12 h



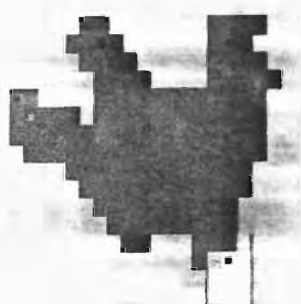
24 h



36 h



48 h



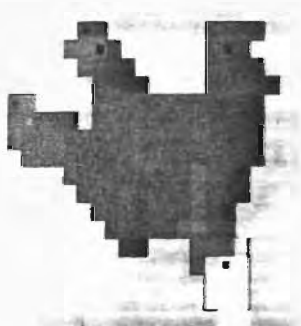
60 h



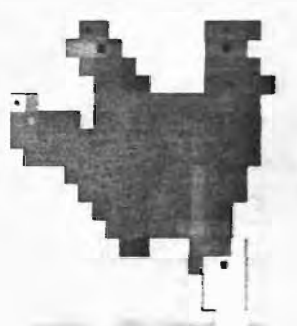
72 h



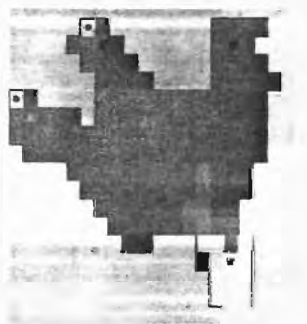
84 h



96 h



108 h



120 h



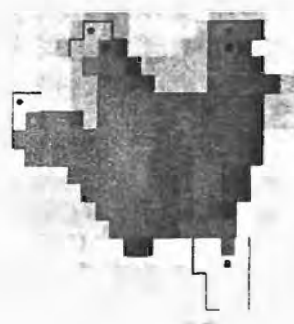
132 h



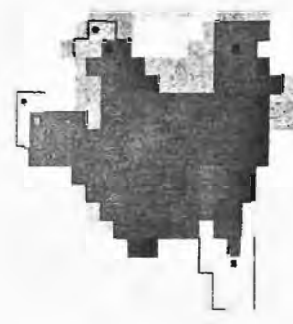
144 h



156 h



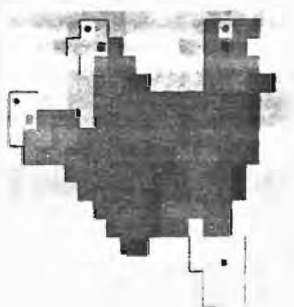
168 h



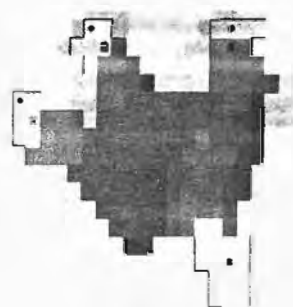
180 h



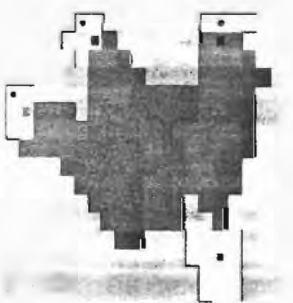
192 h



204 h



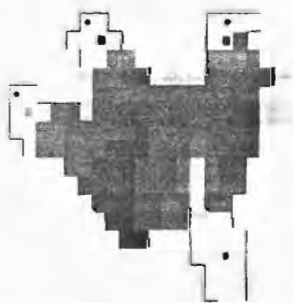
216 h



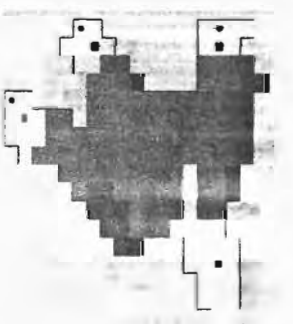
228 h



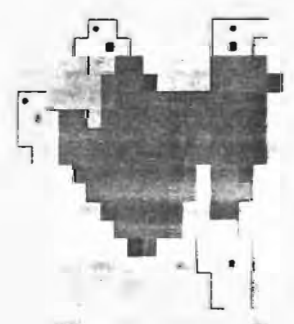
240 h



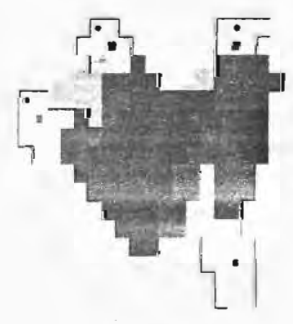
252 h



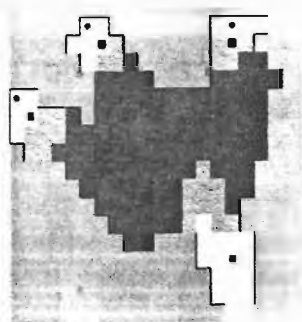
264 h



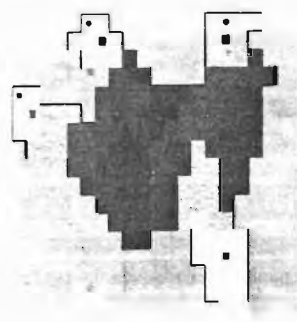
276 h



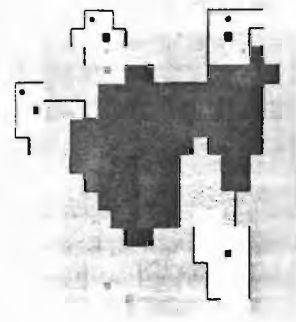
288 h



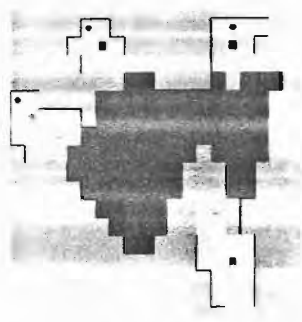
300 h



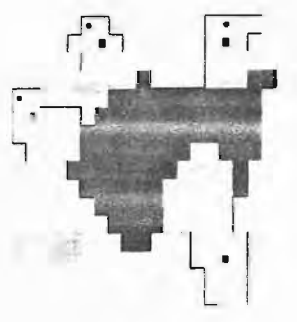
312 h



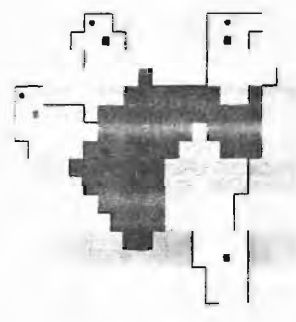
324 h



300 h



312 h



324 h



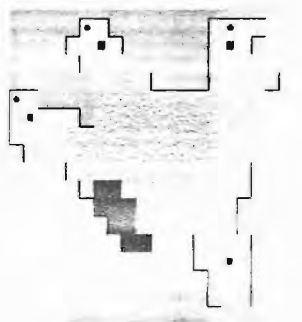
372 h



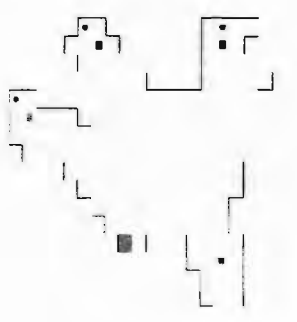
384 h



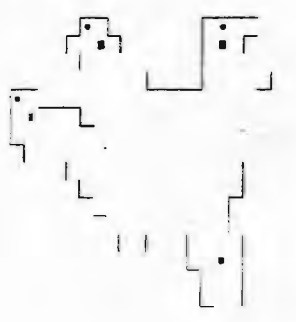
396 h



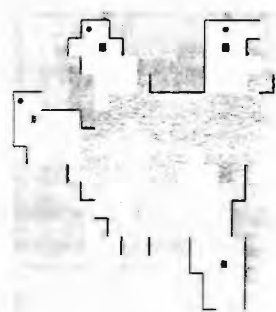
408 h



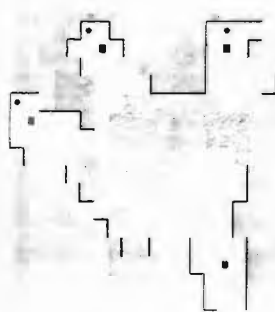
420 h



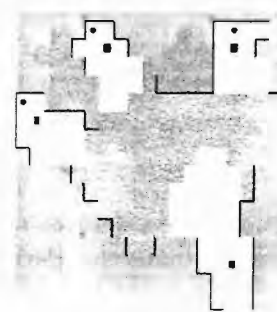
432 h



444 h



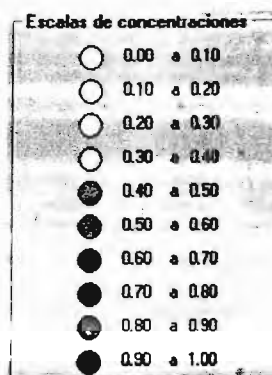
456 h



468 h



480 h



SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO
BOMBEO TOTAL (TRES SITIOS)

$$Q_p = 0.250 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



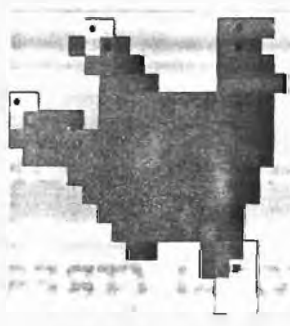
24 h



36 h



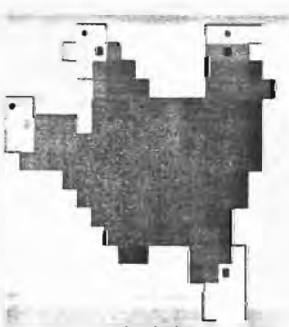
48 h



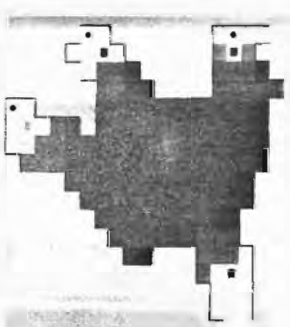
60 h



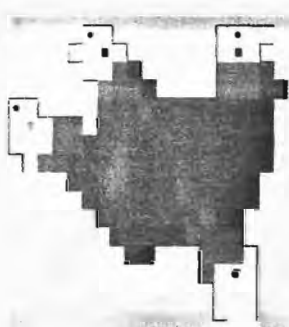
72 h



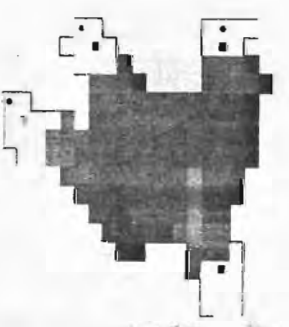
84 h



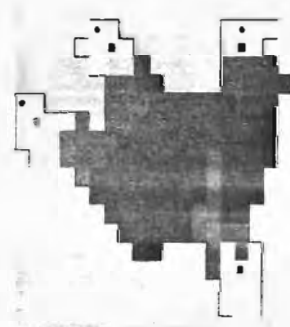
96 h



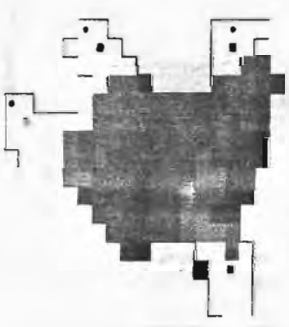
108 h



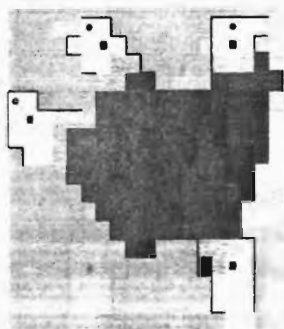
120 h



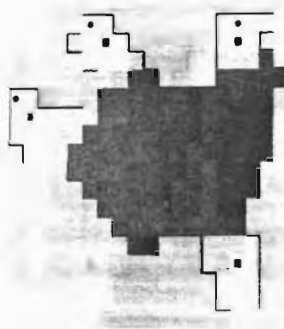
132 h



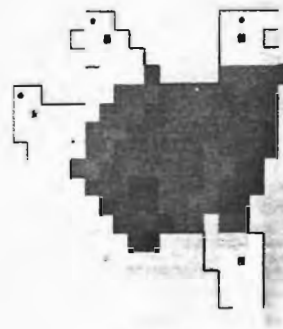
144 h



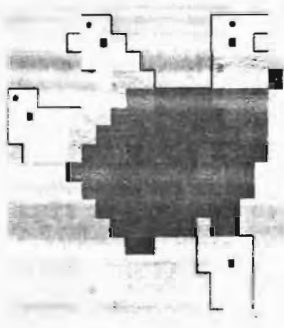
156 h



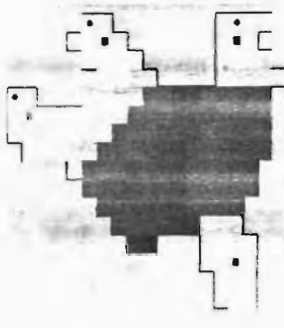
168 h



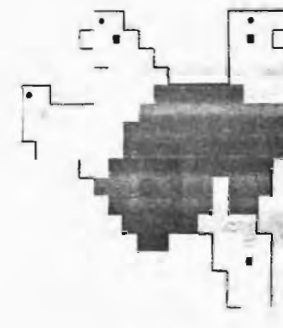
180 h



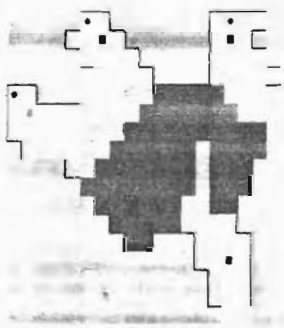
192 h



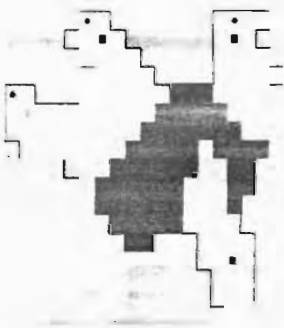
204 h



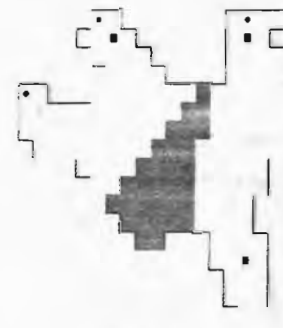
216 h



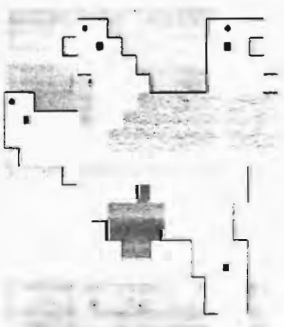
228 h



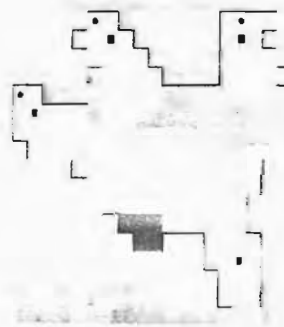
240 h



252 h



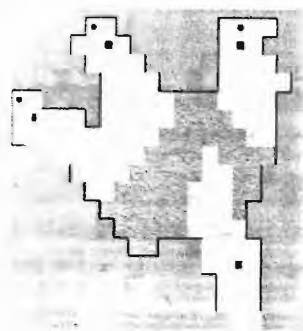
264 h



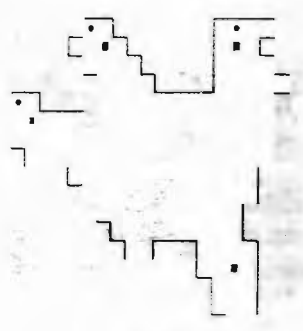
276 h



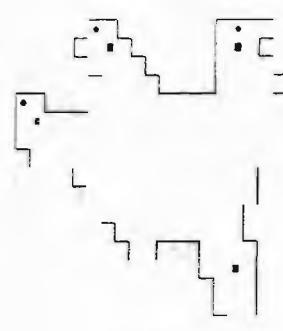
288 h



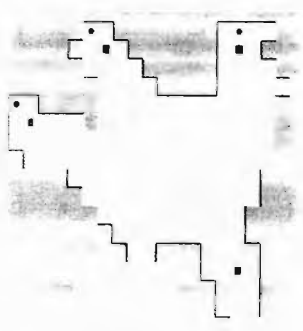
300 h



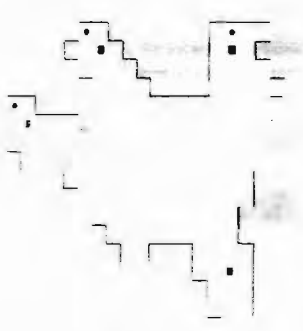
312 h



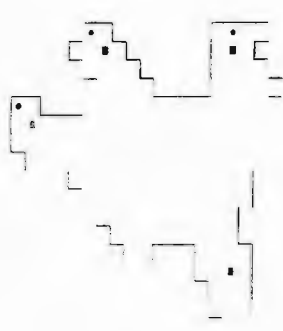
324 h



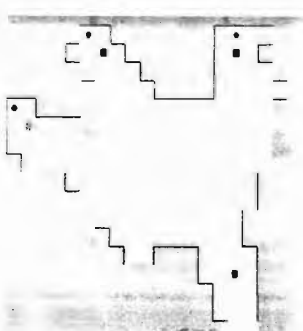
336 h



348 h



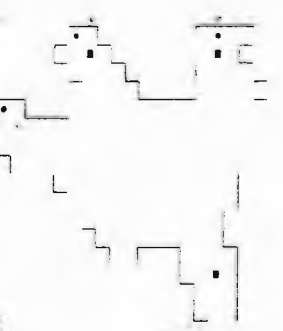
360 h



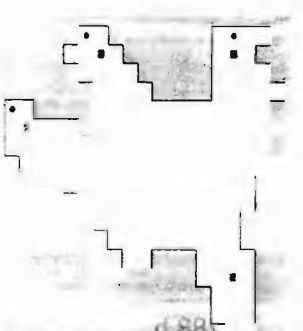
372 h



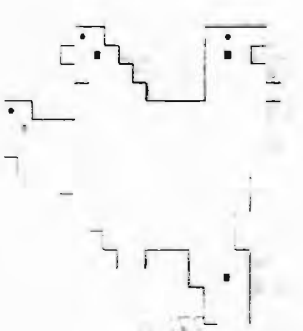
384 h



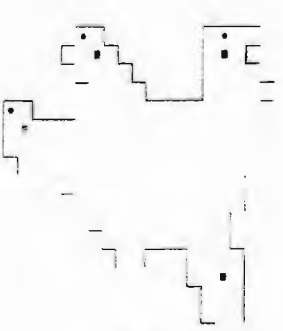
396 h



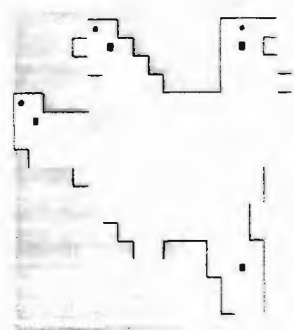
408 h



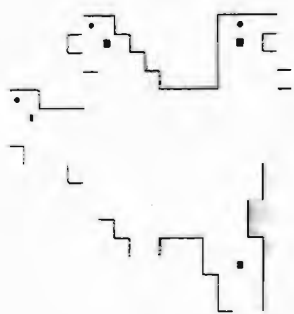
420 h



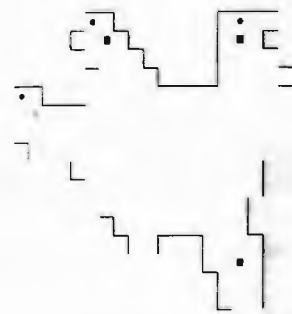
432 h



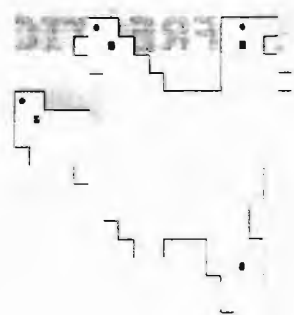
444 h



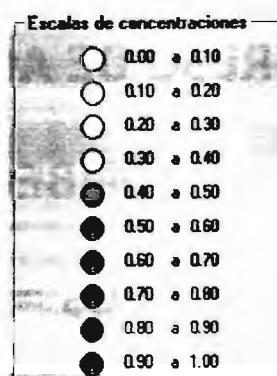
456 h



468 h



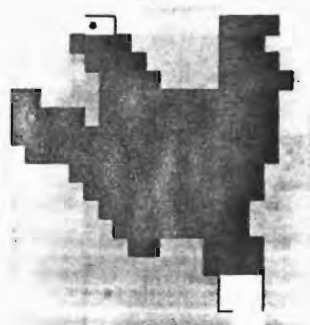
480 h



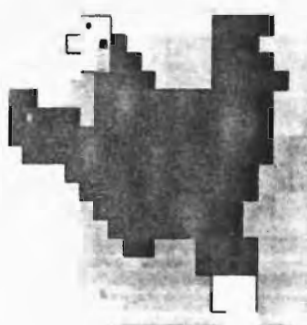
SIN INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

BOMBEO EN UN SITIO

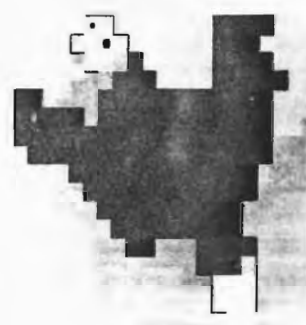
$$Q_p = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$$



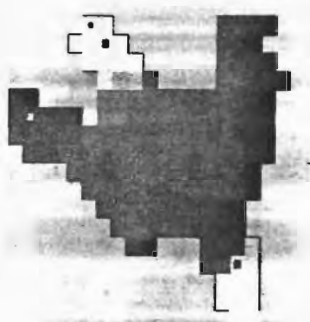
12 h



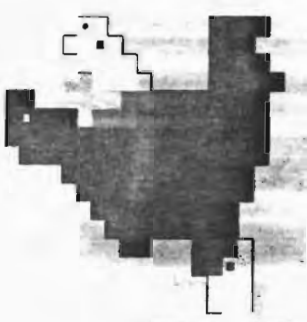
24 h



36 h



48 h



60 h



72 h



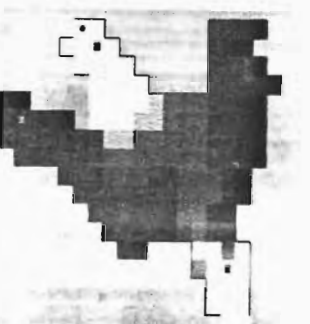
84 h



96 h



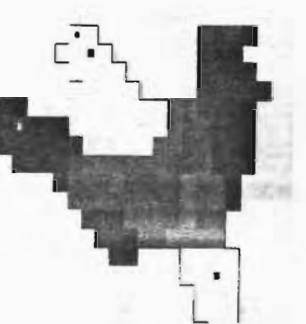
108 h



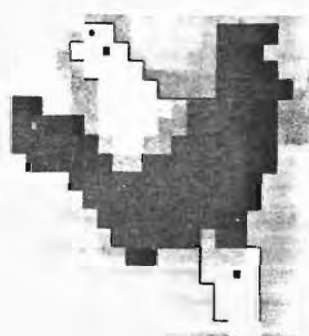
120 h



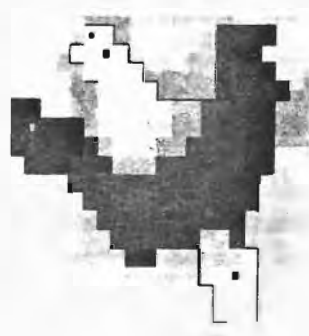
132 h



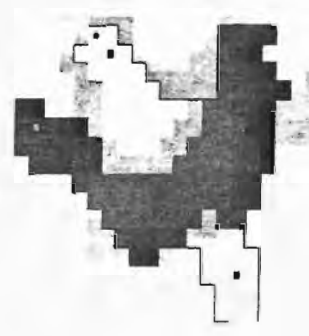
144 h



156 h



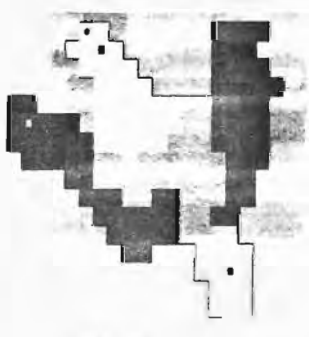
168 h



180 h



192 h



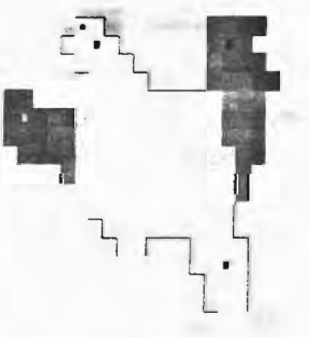
204 h



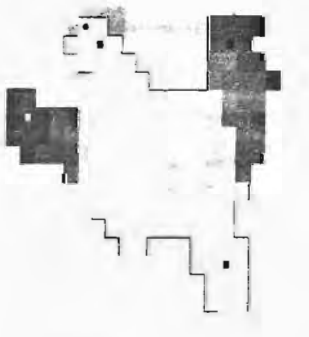
216 h



228 h



240 h



252 h



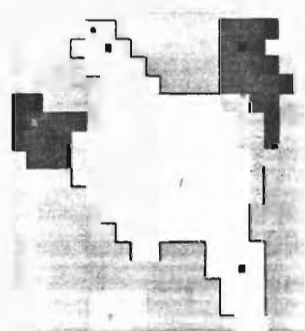
264 h



276 h



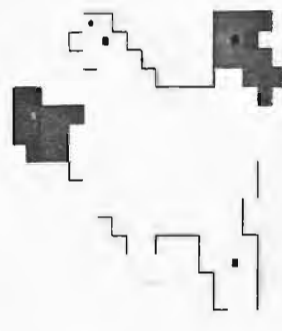
288 h



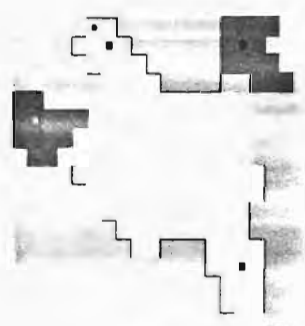
300 h



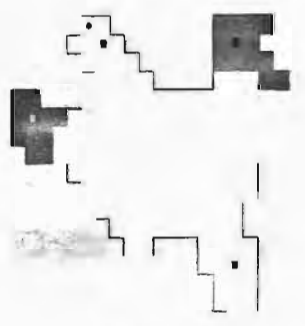
312 h



324 h



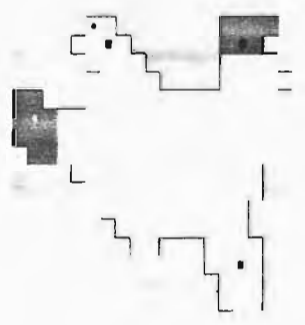
336 h



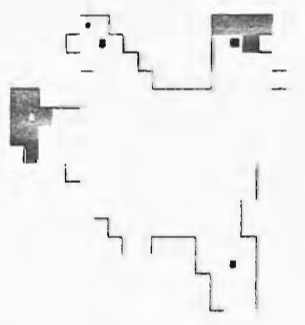
348 h



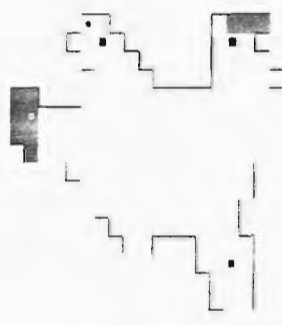
360 h



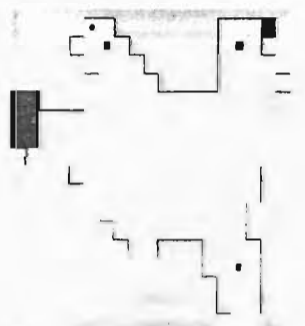
372 h



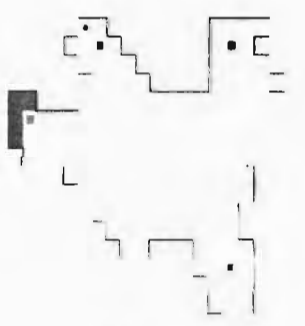
384 h



396 h



408 h



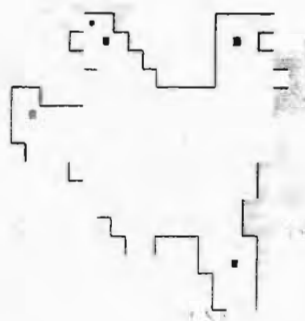
420 h



432 h



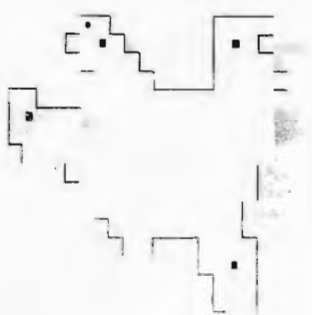
444 h



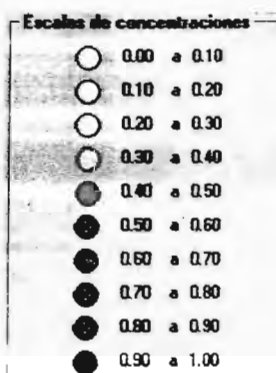
456 h



468 h



480 h

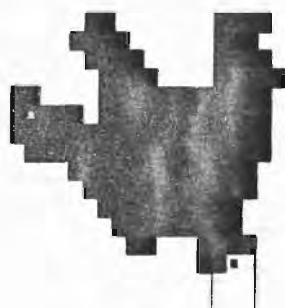


INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

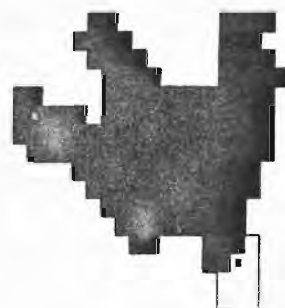
$$Q_I = 0.0625 \text{ m}^3/\text{s}$$



12 h



24 h



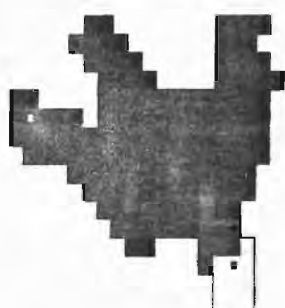
36 h



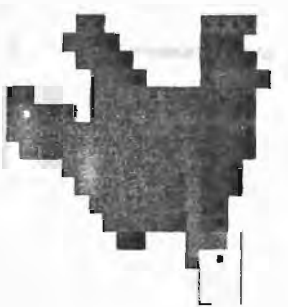
48 h



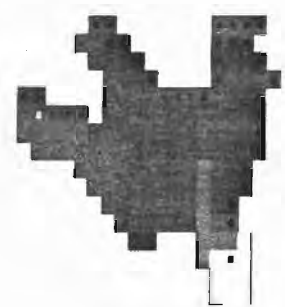
60 h



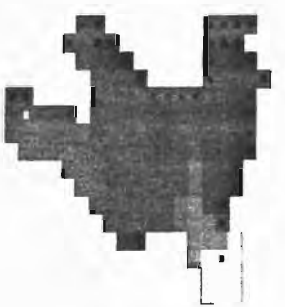
72 h



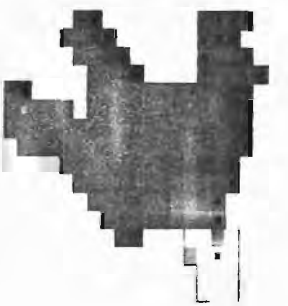
84 h



96 h



108 h



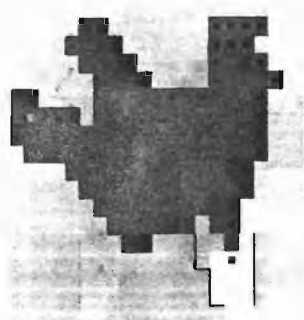
120 h



132 h



144 h



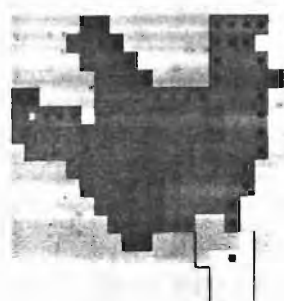
156 h



168 h



180 h



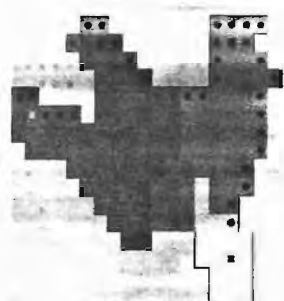
192 h



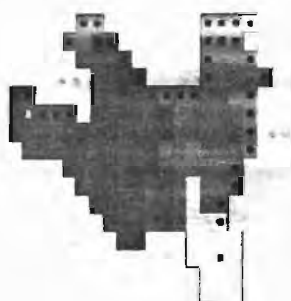
204 h



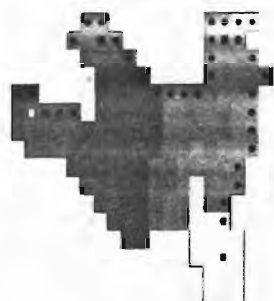
216 h



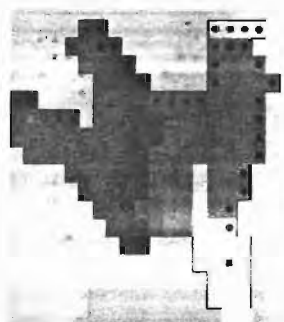
228 h



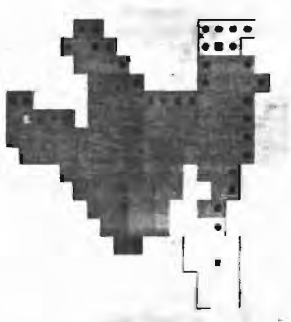
240 h



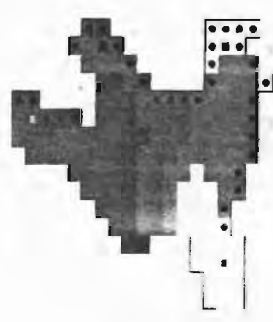
252 h



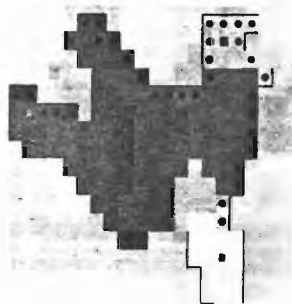
264 h



276 h



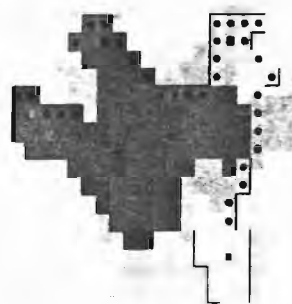
288 h



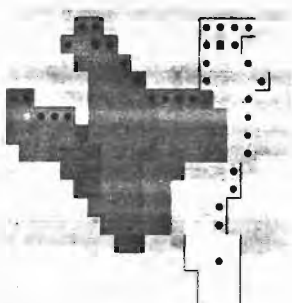
300 h



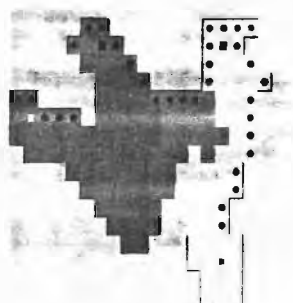
312 h



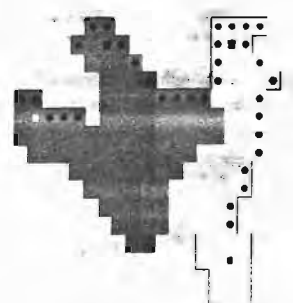
324 h



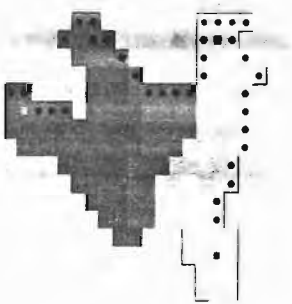
336 h



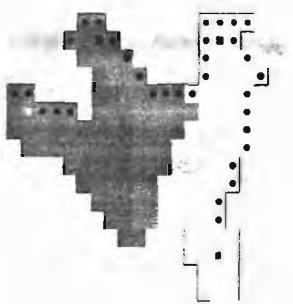
348 h



360 h



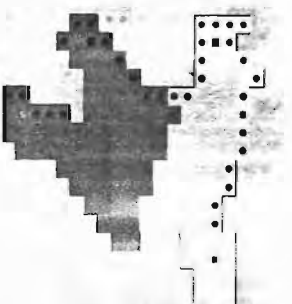
372 h



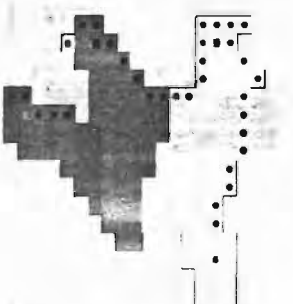
384 h



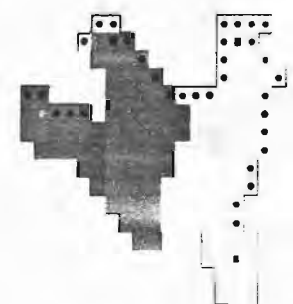
396 h



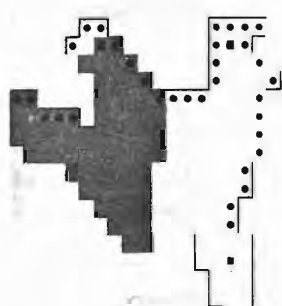
408 h



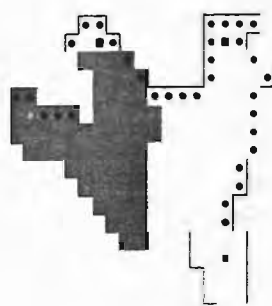
420 h



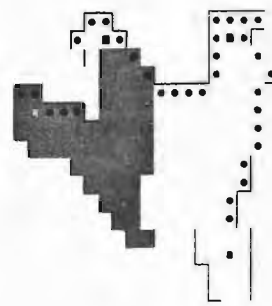
432 h



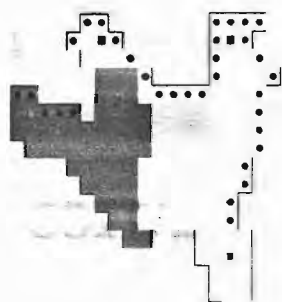
444 h



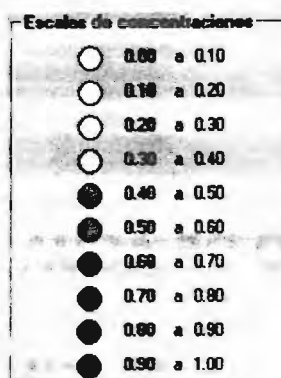
456 h



468 h

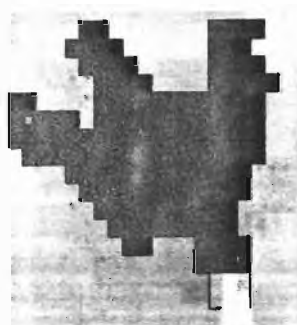


480 h

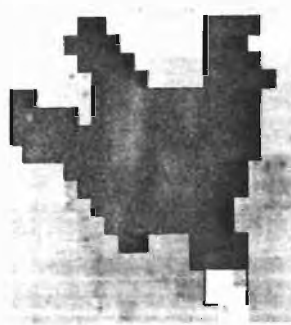


INGRESO DE AGUA DE ORIGEN FREÁTICO

$$Q_I = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$$



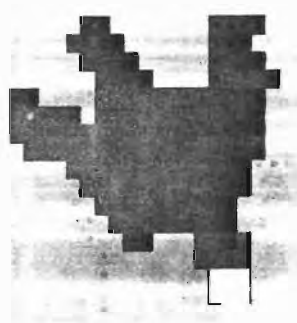
12 h



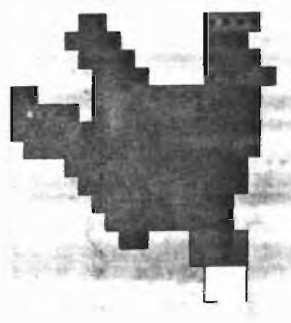
24 h



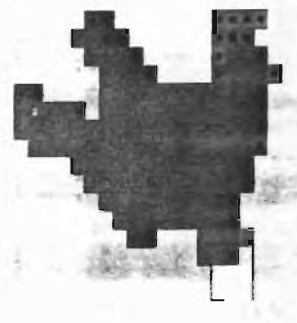
36 h



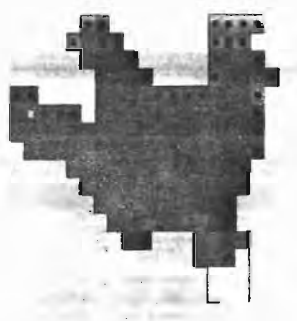
48 h



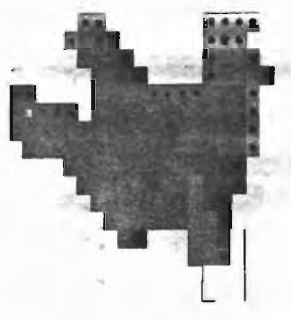
60 h



72 h



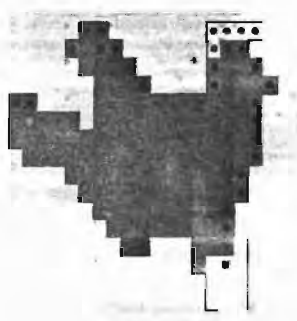
84 h



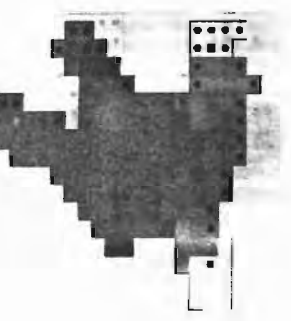
96 h



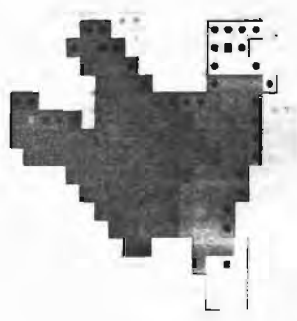
108 h



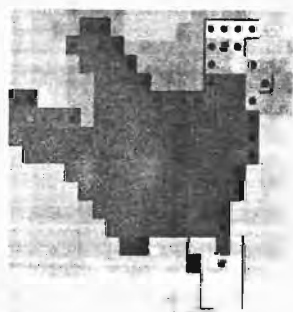
120 h



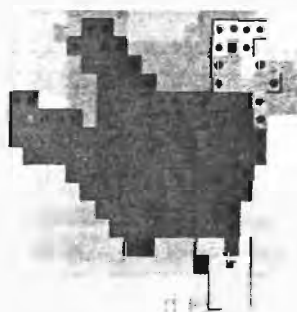
132 h



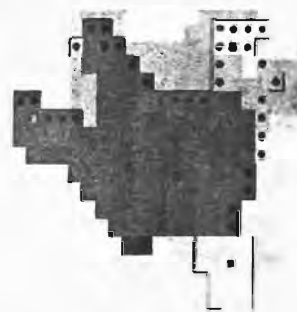
144 h



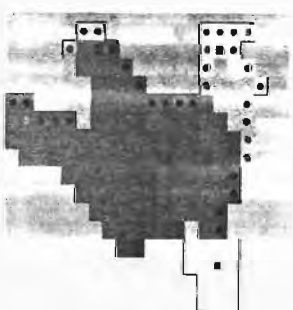
156 h



168 h



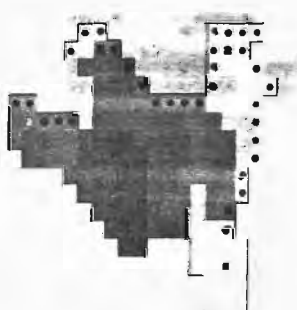
180 h



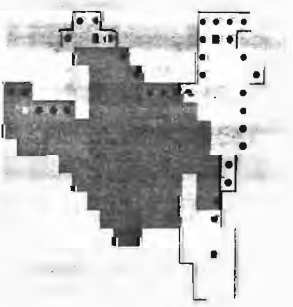
192 h



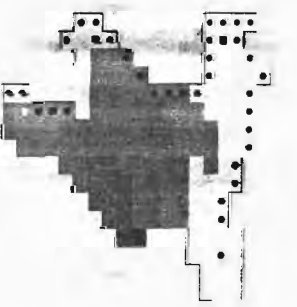
204 h



216 h



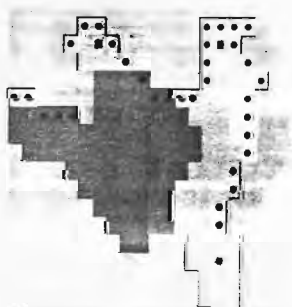
228 h



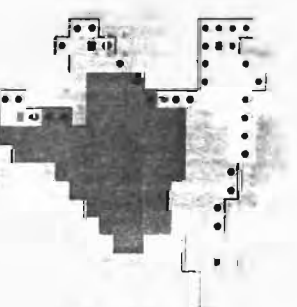
240 h



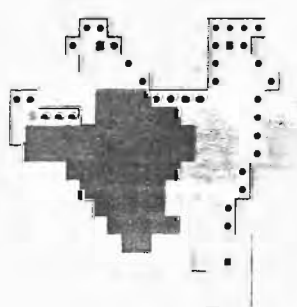
252 h



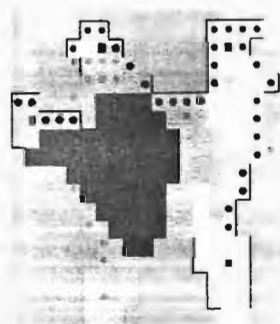
264 h



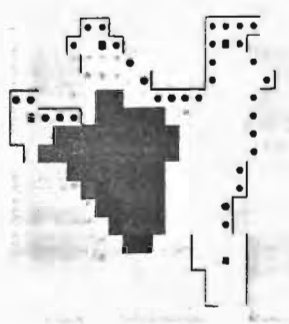
276 h



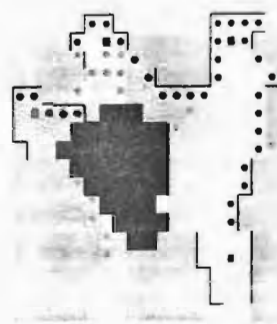
288 h



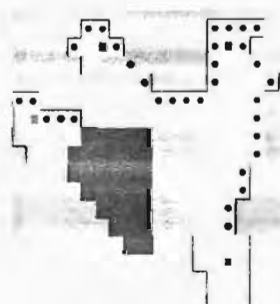
300 h



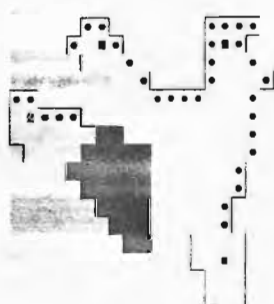
312 h



324 h



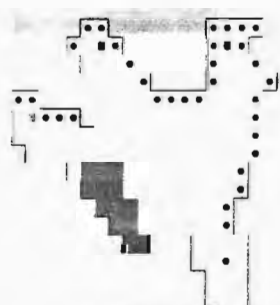
336 h



348 h



360 h



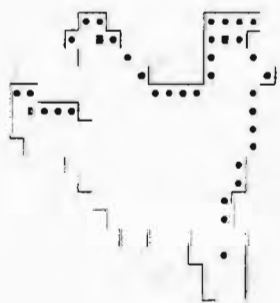
372 h



384 h



396 h



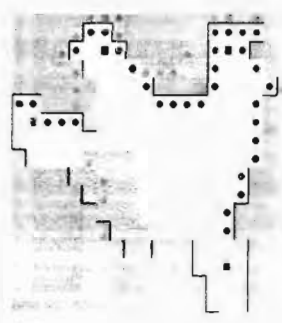
408 h



420 h



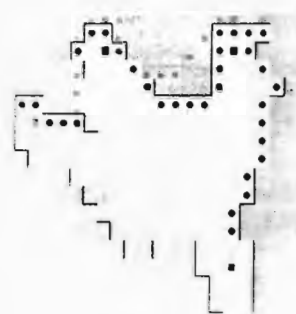
432 h



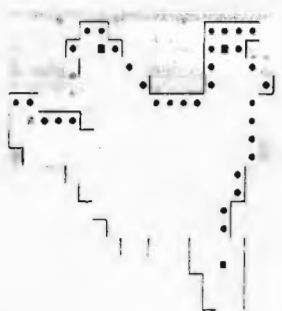
444 h



456 h



468 h



480 h

