

00372



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“Estabilidad y Oscilaciones en
Discos de Acreción Toroidales,
Alrededor de Agujeros Negros”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

EDUARDO ADOLFO RUBIO HERRERA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MÉXICO D.F.

m342699



INSTITUTO DE ASTRONOMIA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
NACIONAL
APDO. POSTAL 70-264
C.P. 04510 MÉXICO, D.F.

2005



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“Estabilidad y Oscilaciones en
Discos de Acreción Toroidales,
Alrededor de Agujeros Negros”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

EDUARDO ADOLFO RUBIO HERRERA

DIRECTOR DE TESIS: Ph.D. WILLIAM H. LEE ALARDÍN

ESTABILIDAD Y OSCILACIONES
EN
DISCOS DE ACRECIÓN
TOROIDALES
ALREDEDOR DE AGUJEROS
NEGROS

Tesis de Maestría Presentada por:

Fís. Eduardo Adolfo Rubio Herrera

Asesorado por:

PhD. William Henry Lee Alardín

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MÉXICO D.F. ABRIL 2005

El arte de caminar consiste en encontrar
el camino correcto.
En él todos son amigos tuyos y tú te sientes vigoroso;
déjate llevar por donde puedas ir cuando te sea permitido.
Si encuentras tu camino y lo andas,
tú serás la fuerza, la dirección y la meta,
y nadie ni nada podrán detenerte.

*A mi madre Aracely,
a Carlos mi hermano y
a la memoria de mi padre, Eduardo.*

Agradecimientos

Para empezar, quiero externar mi agradecimiento a William Lee Alardín, mi tutor y director de tesis, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él durante estos últimos 4 semestres, por su exigencia y paciencia como profesor, por los recursos que me proporcionó durante este tiempo a través de la dirección del proyecto a su cargo, y por motivar tanto a todos los estudiantes que tomamos cursos con él. William, con mucha gratitud ¡Gracias!

Deseo a su vez agradecer también a Armando Arellano Ferro quien me dió la oportunidad de empezar mis estudios superiores en este instituto durante el primer año; a Xavier Hernández y Silvia Torres-Peimbert miembros de mi comité tutorial, por su apoyo y consejos al final de cada semestre; a Dany Page por todas las cosas fascinantes que aprendí en sus cursos y por la lectura y revisión de esta tesis. En ese sentido va también un agradecimiento a los miembros de mi comité revisor, Leonid Georguiev, Alex Raga, José Antonio de Diego, Jorge Cantó y Gloria Königsberger, por dar parte de su tiempo para leer este trabajo y porque sus críticas comentarios y sugerencias ayudaron a hacerlo mejor. También quiero agradecer a Leticia Carigi, Luc Binnette, y José Franco por su ayuda durante este trámite kafkiano.

De inestimable valor fueron la ayuda y el apoyo que me prestaron durante estos años que viví fuera de Guatemala mi tía Aura y mi primo Francisco, así como mi querida María del Mar Girón y mis amigos Dmitri Rouwet, Marta Iorio, Lilia Arana Salinas, Lorenzo Meriggi, Erika Sohn, Fernando Garfias, Simone Fischer, Demian Schneider, Lilia Montoya, Pati Julio, Jaime Viñals, Rüdiger Escobar, Cristián Rodríguez y Fernando Ponce.

Durante mi estancia aquí en México conocí a Valeria, mi adorada albatros... con ella compartí muchos momentos hermosos e inolvidables. Quiero agradecerte aquí Valeria, con mucho cariño, por todos esos momentos especiales que pasamos juntos durante la Maestría.

También deseo agradecer a mis compañeros del Instituto de Astronomía, con quienes compartí mis alegrías y mis tristezas durante estos años: a Daniel, Juan, y Virgilio; a Isabel y Verónica; a Giovanni, Ana y Primož; a Nahiely, Lucía y Lirio; a Diego, Diana, Liliana y Atahualpa; a Tomás y Janet; y finalmente a mis buenos amigos Guillermo y Eric. A todos ellos muchas gracias.

Un agradecimiento más va dirigido a todo el personal del instituto quienes hacen posible todos los servicios con los que contamos los estudiantes, biblioteca, cómputo, contadores, vigilantes, almacén, fotocopias y personal de limpieza.

Por último, quiero agradecer a los aproximadamente 100 millones de ciudadanos mexicanos por los \$0.0015 pesos M.N. que salieron de sus bolsillos producto del pago de sus impuestos y de su arduo trabajo. Este dinero, canalizado a través de los proyectos 36632-E de CONACyT¹ e IN-113599 de DGAPA² llegó a mis manos mensualmente haciendo posible que yo realizara mis estudios superiores en el Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México, institución de la que estoy muy agradecido.

Eduardo A. Rubio Herrera
Ciudad de México, Marzo 2005

¹Marzo 2003 – Marzo 2005.

²Julio 2002 – Febrero 2003.

Índice General

Abstract	vi
Resumen	viii
Objetivos	x
1 Antecedentes	1
2 Construcción Analítica de Discos	17
2.1 Potenciales Gravitatorios	17
2.1.1 Objetos Compactos y Relatividad General	17
2.1.2 La Métrica de Schwarzschild	21
2.1.3 La Métrica de Kerr	25
2.1.4 Potenciales Pseudo-Newtonianos	29
2.2 Consideraciones Hidrodinámicas	35
2.3 Distribuciones de Momento Angular	38
3 Construcción Numérica de Discos	41
3.1 El Método SPH	43
3.2 El Código Numérico	50
3.2.1 Condiciones Iniciales (C.I.)	50

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	ii
3.2.2 Perturbando las C. I.	54
3.2.3 Análisis de los Datos	57
4 Estabilidad Ante Perturbaciones	59
4.1 Perturbaciones Radiales Impulsivas	60
4.1.1 El Modelo	65
4.1.2 Resultados	67
4.2 Oscilaciones Naturales de un Disco	70
4.3 Perturbaciones Periódicas	78
4.3.1 El Modelo	83
4.3.2 Resultados	84
Conclusiones	92
Bibliografía	95
Apéndice	102

Índice de Figuras

1.1	Ejemplo de oscilaciones dobles	11
1.2	Ejemplo de oscilaciones dobles	12
1.3	Histogramas de XTE J1550–564 y GRO J1655-40	15
2.1	Potencial efectivo de Schwarzschild	24
2.2	Potencial efectivo de Kerr	28
2.3	Potenciales efectivos Newtoniano y Relativista	31
2.4	Diferentes potenciales efectivos	32
2.5	Potencial efectivo de Paczyński–Wiita	33
2.6	Secciones meridionales de discos gruesos	38
2.7	Distribuciones de momento angular	40
3.1	Ejemplo de un árbol binario	52
3.2	Relajación de las condiciones iniciales	53
4.1	Ejemplo de la inestabilidad radial	62
4.2	Inestabilidad radial $\ell = cte.$	68
4.3	Inestabilidad radial $\ell \neq cte.$	69
4.4	Frecuencias epicíclicas vs. radio	73
4.5	Oscilaciones naturales con $\ell = cte.$	75
4.6	Oscilaciones naturales con $\ell \neq cte.$	76

4.7	CMR vs. tiempo y FFT CMR $\ell = cte.$	86
4.8	Energías vs. tiempo y FFT energías $\ell = cte.$	87
4.9	CMR vs. tiempo y FFT CMR $\ell \neq cte.$	88
4.10	Energías vs. tiempo y FFT energías $\ell \neq cte.$	89

Índice de Tablas

2.1	Propiedades de los objetos compactos	18
4.1	Mecanismos que inducen inestabilidades	65
4.2	Perturbaciones radiales impulsivas	67
4.3	Modelos de discos de diferente tamaño	74
4.4	Perturbaciones periódicas	84

Abstract

In this work we present a pseudo-Newtonian numerical study in which we investigate (1) how the size of the disc affects the oscillation frequencies and (2) the response of the disc to localized external perturbations with the aim of exciting internal modes of oscillation. Trial runs using torus of different radial extent show clearly that the epicyclic frequency at the locus of maximum density is shifted to lower values because the finite extent of the torus. Also we find that the perturbations efficiently excite global modes recently identified as acoustic p-modes, and closely related to the epicyclic oscillations of test particles. The two strongest modes occur at eigenfrequencies which are in a 3:2 ratio. This behaviour was observed using constant and non-constant angular momentum distributions within the discs. For our simulations we have used Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) in a two-dimensional version using cylindrical coordinates. Our models are in principle scale-free and can be used to simulate accretion tori around stellar or super massive black holes.

The work is presented in four chapters. In Chapter 1 we present a brief resumé of the works available to the date, and a discussion about the importance of studying disc oscillations, in particular the recent discoveries related with resonances. Also we discuss the environment in which these systems, black hole+thick discs can form.

In Chapter 2 we describe the behaviour of a test particle in a strong gravitational field, using general relativity (Schwarzschild and Kerr metrics) and the pseudo-Newtonian potentials like Paczyński–Wiita, Kluzniak–Lee and Artemova *et. al.*. In this chapter we also discuss the hydrodynamical considerations and assumptions that we used to build thick discs in hydrostatic equilibrium.

The implementation and description of the numerical SPH code, are presented in Chapter 3. Also in this chapter we describe the data analysis procedure which leads us to Chapter 4 in which we present our results. The results are divided in three sections, the first one devoted to test the code investigating the runaway–radial instability. The second one is related to the study of the oscillations of different size thick discs and finally in the third section we present our results of localized external perturbations. Our conclusions are presented at the end of the work.

Resumen

En este trabajo presento un estudio numérico donde investigo la respuesta de un disco de acreción grueso (toro) ante perturbaciones radiales impulsivas y periódicas, con la finalidad de excitar modos internos de oscilaciones que pueden producir resonancias. Hemos encontrado que las perturbaciones radiales periódicas excitan eficientemente los modos globales de oscilación y que éstos corresponden a la frecuencia epicíclica radial y a una resonancia en una relación 3:2. Encontramos que las frecuencias epicíclicas radiales que corresponderían a una partícula puntual en órbita circular se ven modificadas a frecuencias más bajas debido al tamaño del toro. Hemos realizado esta investigación utilizando una distribución uniforme y de ley de potencias para el momento angular dentro del disco. El modelo que presentamos es escalable y puede ser utilizado para simular acreción en agujeros negros estelares y supermasivos.

En la introducción se hace un resumen sobre los trabajos referentes al tema realizados hasta la fecha, se discute la importancia del estudio de las oscilaciones y algunos de los descubrimientos recientes que parecen apuntar a la existencia de resonancias en los discos. También se discuten los principales modelos referentes a la génesis de sistemas agujero negro – disco grueso.

En el Capítulo 2, se describen los procedimientos analíticos para estudiar la

gravidad en campos gravitatorios extremos, se discuten los potenciales gravitatorios bajo las métricas de Schwarzschild, Kerr y también los potenciales pseudo-Newtonianos de Paczyński-Wiita [60], Kluźniak-Lee [33] y de Artemova [10] *et. al.* Una vez que se han definido los potenciales, se presentan las consideraciones hidrodinámicas para construir analíticamente discos gruesos soportados por la presión hidrostática. El método numérico SPH empleado para las simulaciones y la implementación del mismo mediante un código numérico es descrito en el Capítulo 3. En esta parte también se explica el funcionamiento del código. Finalmente en la última parte de este capítulo se describe el procedimiento que se siguió para analizar los datos obtenidos de las simulaciones.

Los resultados se presentan divididos en tres secciones en el Capítulo 4. La primera sección está dedicada al estudio de la inestabilidad radial. Las simulaciones que corresponden al estudio de oscilaciones de un disco grueso se analizan y presentan en el la segunda sección. Finalmente los resultados que corresponden al estudio de perturbaciones radiales periódicas impulsivas se presentan en la tercera sección.

Finalmente las conclusiones a las que nos han llevado los resultados de este estudio, se enumeran en la última parte de este trabajo.

Objetivos

General:

Estudiar numéricamente la estabilidad y las oscilaciones en discos de acreción gruesos ante perturbaciones radiales impulsivas y periódicas utilizando diferentes distribuciones de momento angular dentro de un disco de acreción grueso alrededor de un agujero negro.

Específicos:

- Estudiar la estabilidad del disco ante perturbaciones radiales impulsivas usando diferentes distribuciones de momento angular.
- Estudiar el comportamiento de las frecuencias naturales de oscilación en discos gruesos.
- Estudiar la respuesta del disco ante perturbaciones radiales periódicas usando diferentes distribuciones de momento angular y si es posible inducir resonancias en las frecuencias epicíclicas del disco.

Capítulo 1

Antecedentes

Es bien sabido haciendo simples consideraciones energéticas, que uno de los procesos más eficientes para transformar energía potencial gravitatoria en radiación electromagnética es el de acreción. A partir de observaciones a diferentes longitudes de onda, así como mediante consideraciones de eficiencia, la existencia de discos de acreción alrededor de objetos compactos estelares (agujeros negros y estrellas de neutrones con masas $M > M_{\odot}$ ¹) y también de discos muy grandes rodeando a agujeros negros supermasivos ($M \sim 10^6 M_{\odot}$) en galaxias fue invocada en 1964 en los trabajos de Salpeter [77], Zel'dovich [96] y Lynden-Bell [43] como mecanismo en el que se genera la radiación en fuentes de rayos X, quásares y radio-galaxias.

Los primeros trabajos sobre acreción abordaban el problema de la acreción esférica, sin tomar en cuenta alguna dirección preferencial en el movimiento de las partículas que serían acretadas. Esto es conocido como acreción de Bondi [16]. Durante los años setentas se desarrolló lo que puede llamarse la teoría estándar de acreción, a través de discos, en los que el material

¹ $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g.

acretado posee momento angular, lo que implica una dirección preferencial de movimiento. Esto fue propuesto por primera vez para fuentes estelares compactas como estrellas de neutrones por Shvartsman [83] y estudiado a fondo, por Pringle & Rees en 1972 [63]. Shakura & Sunyaev [78] en 1973 publicaron un artículo en el que se abordaba con detalle el problema del transporte de momento angular dentro de un disco que acreta alrededor de un agujero negro estelar.

De nuevo Pringle *et. al.* [64] en 1973 abordaron el tema de la acreción alrededor de un agujero negro supermasivo considerando el momento angular del disco, lo que implicaba tener una dirección preferencial para la acreción y por ende un objeto muy luminoso ($L > 10^{46}$ erg s⁻¹) observado desde cierta perspectiva.

En la teoría estándar de discos de acreción, uno asume *a priori* que la distribución de momento angular es Kepleriana y que los procesos disipativos pueden ser descritos por medio del término α introducido por Shakura & Sunyaev en 1973 [78]. También se asume que los discos son geoméricamente delgados en la dirección vertical, es decir si H representa el grosor del disco y R su extensión radial, $H \ll R$.

El modelo que se pretende estudiar en este trabajo, consiste en un agujero negro rodeado de un disco grueso, es decir $H > R$. La idea que un objeto compacto pueda estar rodeado de un disco grueso no es nueva, data de las décadas de los 60 y 70's y fue propuesta por primera vez, cuando se estudiaban las configuraciones estables de un fluido perfecto orbitando un objeto compacto. Los primeros trabajos corresponden a Boyer [17] y Abramowicz [1]. En ellos

se estudian configuraciones estables de estrellas alrededor de objetos compactos. A finales de los setentas Fishbone y Moncrief [21] publican uno de los primeros estudios realizados en discos de acreción geoméricamente gruesos alrededor de objetos con campos gravitatorios fuertes utilizando relatividad general con métricas para fuentes gravitatorias estacionarias (métrica de Schwarzschild) y con rotación (métrica de Kerr). Estudios preliminares sobre la estabilidad y configuración de sistemas de este tipo fueron publicados a finales de los setentas, siendo relevantes los trabajos de Fishbone & Moncrief [21], Abramowicz, Jaroszyński & Sikora [2] y de Kozłowski, Jaroszyński & Abramowicz [36]. También aparecen trabajos donde se considera la acreción en discos geoméricamente gruesos con potenciales newtonianos y donde se da un tratamiento macroscópico de los procesos viscosos tomando en cuenta distribuciones no Keplerianas de momento angular (Abramowicz, Calvani & Nobili) [3].

También empiezan a ser considerados los potenciales gravitatorios pseudo-Newtonianos como los descritos por Abramowicz *et. al.* [2], Kozłowski *et. al.* [36] y de Paczyński-Wiita [60]. Este último potencial reproduce muchas de las características de la solución de la métrica de Schwarzschild. Las soluciones a los modelos propuestos en estos trabajos apuntaban a que los discos dejaban de ser discos delgados debido a la combinación de los efectos del momento angular y de la presión hidrostática sobre el disco. Se encontró entonces la existencia de configuraciones barotrópicas en las que la materia puede ser contenida dentro de superficies de presión constante.

Para objetos compactos estelares, un posible mecanismo para formar discos gruesos es a partir de procesos cataclísmicos muy violentos, como las

explosiones de supernovas y la coalescencia de dos objetos compactos. Estos procesos producirán discos muy masivos ($M \sim 0.1M_{\odot}$). Por otro lado, hay procesos como la acreción en un sistema binario de baja masa, en los que el material acretado al calentarse, puede también formar un disco grueso de menor masa ($\ll M_{\odot}$).

La génesis de un sistema que contenga un agujero negro y un toro muy masivo se explica de acuerdo a van Putten [90] mediante dos modelos principales que suponen: (a) el colapso de una estrella supermasiva como en una explosión de hipernova o bien en un *colapsar* por ejemplo y (b) la coalescencia de dos objetos compactos.

Para el primer caso, el colapso de estrellas supermasivas, muchos de los modelos son los que se utilizan para explicar las explosiones de rayos gamma (GRB²). El modelo de la hipernova fue propuesto por Paczyński [61], [62] en 1997. Consiste en suponer un sistema binario de estrellas donde una de las componentes es una estrella masiva y describe una órbita cerrada. La presencia de una estrella compañera se requiere para mantener rotando rápidamente a la estrella mas masiva. Por ejemplo un sistema de éstos lo conformaría una estrella de helio de unas $\sim 20M_{\odot}$ y un radio de $\sim 1.3R_{\odot}$ ³. Dos de estas estrellas girarán como binarias con una separación de $\sim 5R_{\odot}$ con un período de 5 horas. Entonces, luego del colapso gravitatorio de la más masiva, el núcleo de neutrones con elevada temperatura y un giro muy rápido se enfría por medio de la emisión de neutrinos y se forma un agujero negro estelar. El manto estelar que queda colapsa en un toro conformado

²*Gamma-Ray Bursts.*

³ $R_{\odot} = 6.95 \times 10^{10}$ cm.

de material degenerado (un toro de neutrones) girando y acretando gradualmente alrededor del agujero negro. Este mecanismo de formación del toro alrededor del agujero negro es semejante al propuesto por Woosley para una supernova Tipo Ib “fallida” que describiré con detalle más adelante.

Finalmente en su modelo de hipernova, Paczyński propone que el toro y la envolvente estelar quedan acoplados al agujero negro por medio de un campo magnético intenso $\sim 10^{15}$ gauss. Con un núcleo colapsado girando rápidamente y varias veces más masivo que una estrella de neutrones el reservorio de energía de uno de estos sistemas es bastante grande, $\sim 10^{54}$ erg con lo que es posible explicar un GRB. Dado que esta energía es mayor que la que produce una supernova, Paczyński propuso el término hipernova.

El modelo del colapsar o supernova fallida fue propuesto como explicación para los GRB's en 1993 por Woosley [94]. Los modelos de colapsares consisten en que una estrella de secuencia principal muy masiva $M \sim 25 - 35M_{\odot}$ colapsa de una forma diferente a la que lo hacen las supernovas. Esto se debe a que la burbuja conteniendo la envolvente de la estrella progenitora no se expande libremente debido a que este tipo de estrellas contienen un manto mas denso. Este manto rodea al núcleo y está constituido principalmente de oxígeno y de silicio y obstruirá la libre expansión de la envolvente (MacFayden & Woosley [46]). La formación del disco ocurre cuando la envolvente de la estrella colapsa en el agujero negro recién formado, en una escala de tiempo hidrodinámica (\sim ms) llevándose parte de la energía interna del sistema. Entonces, las capas externas de la estrella y el manto de la misma que no se expandieron, tendrán una gran cantidad de momento angular y caerán libremente dentro de la última órbita estable alrededor del agujero negro. Un

disco de acreción grueso en equilibrio centrífugo se formará para favorecer la expulsión de masa en lugares con alta latitud en la estrella (i.e. lugares cercanos a los polos) colimando al material y de esta forma, explicando el modelo para el GRB.

En simulaciones numéricas relativistas donde se modela el colapso de estrellas supermasivas rotantes, semejantes al modelo propuesto por Paczyński, se muestra que es posible formar agujeros negros rodeados de discos de acreción masivos con una masa de $\sim 0.1M_{\odot}$. Estos modelos computacionales fueron realizados por Shapiro & Shibata [82] y Shibata & Shapiro [80] en 2002.

Los modelos de coalescencia de un sistema binario compuesto por dos estrellas de neutrones o una estrella de neutrones y un agujero negro, proponen que luego de la fusión de las componentes, se obtiene un sistema agujero negro-toro. Esto ha sido predicho por los diferentes grupos que trabajan en las simulaciones donde se modela la coalescencia de sistemas compactos. Davies *et. al.* [20] en 1994 modelando la fusión de dos estrellas de neutrones encontraron que al cabo de pocos períodos orbitales los restos del material de las estrellas de neutrones, formaban un disco grueso alrededor del objeto que se formó. La masa de este objeto depende del espín inicial de las estrellas. En 1996 Ruffert *et. al.* [75] encuentran un resultado semejante.

Por otro lado haciendo simulaciones donde se fusiona una estrella de neutrones y un agujero negro, Kluźniak & Lee [35] encuentran que luego del episodio inicial de transferencia de masa sobrevive un remanente de material. Estos autores estudiaron también la fusión de una estrella de neutrones

con un agujero negro utilizando diferentes cocientes de masa para las componentes (M_{NS}/M_{BH}), encontrando que los discos gruesos se formaban a partir de un cociente de masas mayor que uno. Ruffert & Janka [76] en otras simulaciones más recientes encuentran que la fusión de dos estrellas de neutrones produce un toro con un agujero negro en el centro. Este toro se forma a partir de que el material de una de las componentes gana momento angular suficiente como para resistir el colapso gravitatorio que forma el agujero negro. Haciendo un estudio relativista del problema, Shibata *et. al.* [79] concluyen también que sí es posible formar un disco cuya masa corresponde a un porcentaje de la masa inicial del sistema. En cualquiera que sea el escenario, el toro se formará a partir de las fuerzas de marea gravitatorias fuera de la última órbita circular estable (ISCO⁴) del agujero negro, o sea a $R = 3r_g$ para la métrica de Schwarzschild.

Finalmente, los discos menos masivos ($M_d/M_{BH} < 1$) se forman a través de procesos de acreción donde son tomados en cuenta los efectos de la viscosidad y radiación [26], [38]. Estos discos se forman en las binarias de rayos X de baja masa (LMXB⁵) que son sistemas que contienen un objeto compacto central y una estrella menos masiva que este último cuyo material es acretado por el objeto central, formando el disco de acreción.

Uno de los problemas que surgió entonces fue el de estudiar la estabilidad de discos de acreción gruesos mediante simulaciones en las que se modificaban parámetros del disco como la viscosidad, la autogravedad o bien la distribución de momento angular $\ell(r)$. Este último aspecto es estudiado en

⁴*Innermost Stable Circular Orbit.*

⁵*Low Mass X-ray Binaries.*

los trabajos de Papaloizou y Pringle [65] donde se analiza la estabilidad de un disco con rotación diferencial, isentrópico y con momento angular l constante. Ellos encuentran que existe estabilidad ante perturbaciones axisimétricas, pero que el disco se vuelve inestable ante perturbaciones no axisimétricas. En otro trabajo Papaloizou y Pringle [66] analizan la estabilidad de un disco donde existe un gradiente de momento angular que los conduce a conclusiones semejantes a las obtenidas previamente analizando perturbaciones no axisimétricas. Zurek y Benz [97] utilizando modelos de tres dimensiones, llegan a conclusiones semejantes a las de Papaloizou & Pringle utilizando simulaciones numéricas con el método SPH, semejante al que utilizaremos en el desarrollo de nuestra investigación.

Otro aspecto estudiado es el de la inestabilidad radial⁶ en la que se tiene un intercambio violento y rápido de masa (Abramowicz, Calvani & Nobili [4]). Abramowicz *et. al.* encontraron que en un sistema de acreción alrededor de un agujero negro, existe una superficie equipotencial semejante al lóbulo de Roche, debida a los efectos de relatividad asociados a la existencia de una última órbita estable. Este criterio establece que todos los discos de acreción con masas ligeramente mayores a la masa del agujero negro, que *llenan* sus lóbulos de Roche son inestables, si el momento angular l es constante.

Otras consideraciones que han sido tomadas en cuenta en cuanto a la estabilidad radial de los discos, son las relacionadas a la dinámica del objeto central, es decir si el agujero negro rota o no. Cálculos hechos por Wilson [93] en 1984 considerando la rotación de agujeros negros, llevan a la

⁶Llamada en inglés *runaway radial instability*.

conclusión de que la inestabilidad radial no existe en sistemas de este tipo, es decir que la rotación del agujero negro tiene un efecto estabilizador en el sistema. Abramowicz *et. al.* [5] en 1998 de nuevo estudian el problema concluyendo que en efecto la rotación estabiliza el sistema. En este trabajo también se toma en cuenta la autogravedad del toro, la cual tiene un efecto desestabilizante, produciendo acreción. Otros estudios de este tipo con auto-gravedad sin tomar en cuenta relatividad general, se pueden encontrar en Khana & Chakrabarti [31], Masuda, Nishida & Eriguchi [49] y tomando en cuenta la relatividad general en Nishida *et. al.* [58]. Recientemente se ha asociado la posibilidad de que una inestabilidad radial pueda dar origen a explosiones de rayos gamma [19] y simulaciones recientes han sido hechas en este sentido también por Font & Daigne [23]. A raíz de estos estudios surgió la necesidad de entender bajo un tratamiento relativista completo, la dependencia de la estabilidad de los discos con la distribución del momento angular dentro del disco. Font & Daigne [24] usando la métrica de Schwarzschild, encuentran que si la distribución de momento angular es constante, los discos son inestables. En un artículo mas reciente los mismos autores (Font & Daigne [25]), exploran la estabilidad de discos utilizando distribuciones de momento angular no constante dentro del disco, utilizando una ley de potencias. En este último y extensivo estudio relativista concluyen que la inestabilidad radial es anulada cuando el momento angular no es constante.

También se ha estudiado la estabilidad interna de los discos, donde se investiga el comportamiento dinámico del disco de acuerdo a las propiedades hidrodinámicas del material que lo conforma. Narayan *et. al.* [57] han propuesto que cualquier objeto con alta temperatura y baja luminosidad, podría contener un agujero negro rodeado de un disco de acreción dominado por la

advección y con una temperatura elevada. Algunos candidatos para estos objetos son A0620–00, Sgr A* y NGC 4258. Para todos los casos el ajuste de las observaciones con los espectros producidos a partir de modelos de discos enfriados por flujos advectivos es muy buena. Estos objetos enfriados por flujos advectivos no pueden modelarse con discos geoméricamente delgados. Igumenshchev *et. al.* [37], estudiaron la acreción de esta clase de flujos mediante simulaciones numéricas en dos dimensiones utilizando cálculos hidrodinámicos que dependen del tiempo. En sus simulaciones encuentran que los discos son convectivamente inestables y que las inestabilidades producen vórtices que redistribuyen el momento angular. Algo interesante de este estudio es que estos vórtices introducen oscilaciones cuasi periódicas.

Las motivaciones principales que conllevan a realizar el presente estudio, son principalmente las evidencias observacionales existentes sobre variaciones cuasi-periódicas en la luminosidad de varias fuentes de rayos X en altas y bajas frecuencias (QPO's⁷), objetos que se sospecha contienen estrellas de neutrones o agujeros negros rodeados de un disco de acreción. La escala de tiempo en que se dan las variaciones es de \sim ms y es relevante puesto que todos los fenómenos dinámicos de estos sistemas tienen escalas de tiempo semejantes.

Muchos de estos objetos son sistemas binarios de masas comparables a la masa solar ($M \leq 2M_{\odot}$) que emiten rayos X, (LMXB). Estos sistemas usualmente tienen órbitas muy cerradas de tal forma que se pueda dar un intercambio de material entre las componentes. Dadas sus órbitas cerradas, las LMXB tienen períodos que van desde una decena de días hasta alrededor

⁷*Quasi-Periodic Oscillations*

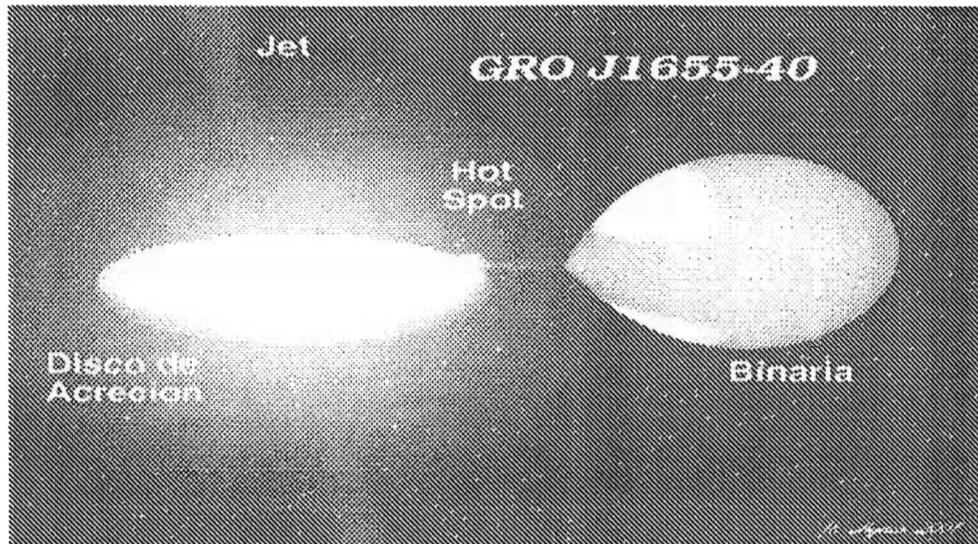


Figura 1.1: Esquema ilustrativo de la estrella binaria de rayos X de baja masa GRO 1655-40. La radiación en rayos X con la que se detectan estos objetos proviene del material que cae hacia el objeto central formando un disco de acreción. Tomado de Haynes, R. [30].

de 3/4 de hora. Muchos de estos sistemas se encuentran en cúmulos globulares donde la captura gravitatoria de estrellas de neutrones, por parte de otras estrellas ocurre a menudo.

Se cree que estas variaciones de la luminosidad están asociadas a inestabilidades u oscilaciones en el disco de acreción que rodea estos objetos. Entender estas variaciones, hace posible estudiar la física de campos gravitatorios extremos y de objetos con altas densidades.

Las oscilaciones cuasi-periódicas en las fuentes de rayos X galácticas [18] y extragalácticas, principalmente en núcleos activos de galaxias [48], ocurren a diferentes frecuencias. Estas oscilaciones pueden ser de baja o alta frecuencia y esta dependencia, podría reflejar algunas propiedades intrínsecas del objeto central del disco de acreción como la masa y su rotación (*spin*).

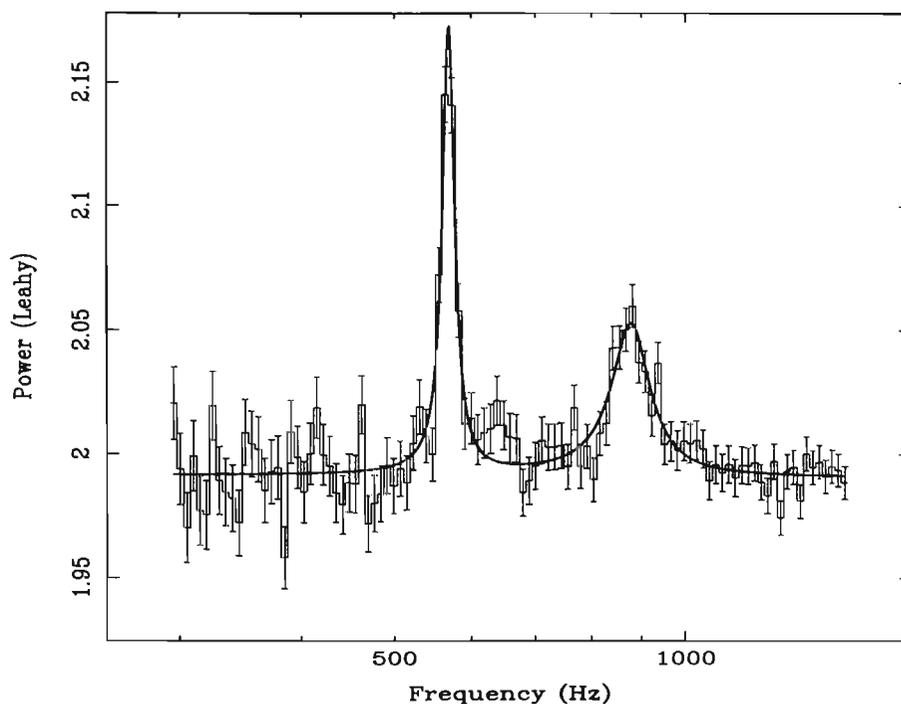


Figura 1.2: En esta figura se muestran oscilaciones dobles correspondientes al HFQPO 4U 1608–52. Nótese la relación que guardan los máximos en frecuencias, localizadas a 600 y 900 Hz. Tomada de Méndez *et. al.* [51].

También se ha observado que algunas de estas oscilaciones se presentan en parejas, localizadas a diferentes rangos de frecuencias. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 1.2. Este descubrimiento fue realizado por el satélite *Rossi X-ray Timing Explorer*, RXTE en 1995 [91].

Una buena cantidad de autores proponen que una forma de determinar parámetros tales como la masa, la ecuación de estado, el *spin* y el momento angular del objeto central del disco es a través de la interpretación de las observaciones de estas oscilaciones cuasi-periódicas [6], [68], [7], [70]. Algunos autores como Kluźniak & Abramowicz [32] y Titarchuk [87] sugieren que dichas oscilaciones se originan por resonancias de alguna clase en los dis-

cos. Entender la relación entre las oscilaciones y el objeto central puede ser la clave para determinar estas propiedades. Se ha propuesto una gran cantidad de modelos para interpretar la rica fenomenología observada con estas oscilaciones, pero aún no parece haber un consenso favorable hacia alguno de los mecanismos propuestos. Algunos de los modelos son descritos por van der Klis en [91].

Es aquí donde se justifica que se deba de hacer una investigación sistemática de las propiedades oscilatorias de los discos. Los modos de oscilación en los discos son consecuencia de fuerzas restauradoras que responden ante las perturbaciones, y como describiré mas adelante, las perturbaciones ofrecen la posibilidad de clasificar las oscilaciones que son inducidas. En los discos, las fuerzas restauradoras pueden ser fuerzas centrífugas, gradientes de presión y una tercera fuerza consistiría en fuerzas gravitatorias perpendiculares al plano vertical del disco. Cada una de estas fuerzas tiene asociada un modo de oscilación, la primera se asocia con oscilaciones epicíclicas, la segunda con oscilaciones debidas a la propagación de ondas de sonido (modos p) y finalmente la tercera, oscilaciones armónicas transversales al plano ecuatorial [38] que *corrugarían* al disco.

El estudio de las oscilaciones de los discos es llamado algunas veces *sismología de discos*. Abramowicz *et. al.* [8], han propuesto el modelo de resonancia en el que se reproducen oscilaciones cuasi-periódicas como resultado de resonancias orbitales. El mismo autor [7] ha demostrado que pueden darse resonancias cerca de las posiciones radiales a las que las frecuencias epicíclicas quedarían en un cociente de 3:2.

Recientemente Schnittman [84] ha propuesto también un modelo en que los espectros observados de los QPO's pueden ser explicados invocando un *hot-spot* para explicar la posición y la amplitud de los picos del espectro de las oscilaciones cuasi-periódicas. Este *hot-spot* se explica suponiendo que existe emisión excesiva que proviene de partículas masivas moviéndose geodésicamente dentro del disco. Este modelo esta caracterizado por la masa del agujero negro, el espín, la inclinación del disco, la forma y el tamaño del *hot-spot*. En otra publicación de Schnittman & Bertschinger [85], invocan los efectos de dilución del *hot-spot* en el disco, y también estudian los efectos de la precesión del disco originada por el efecto relativista Lens-Thirring alrededor del eje del agujero negro.

Como motivación final, se tiene el reciente descubrimiento de las observaciones cuasi-periódicas observadas en el objeto SAX J1808.4-3658 reportadas por Wijnands *et. al.* [92]. Este objeto contiene una estrella de neutrones cuyo período de rotación es conocido por lo que la información que pueda extraerse de las oscilaciones cuasi-periódicas con este último permitirían establecer la masa de dicha estrella.

Otras observaciones relevantes son las que se han realizado en los objetos GRO J1655-40, XTE J1550-564 y GRS 1915+105. Estos objetos son especiales porque a diferencia del anterior, no muestran una sola frecuencia máxima, sino que muestran picos dobles que guardan una relación 3:2. Las frecuencias de estos sistemas son 450, 300 Hz (Strohmayer [86], Remillard *et. al.* [69]), 276, 184 Hz (Remillard *et. al.* [68]) y 168, 113 Hz (Remillard *et. al.* [67], McClintock & Remillard [47]) para cada objeto respectivamente. En la Figura 1.3 se muestran los histogramas de las detecciones para los objetos

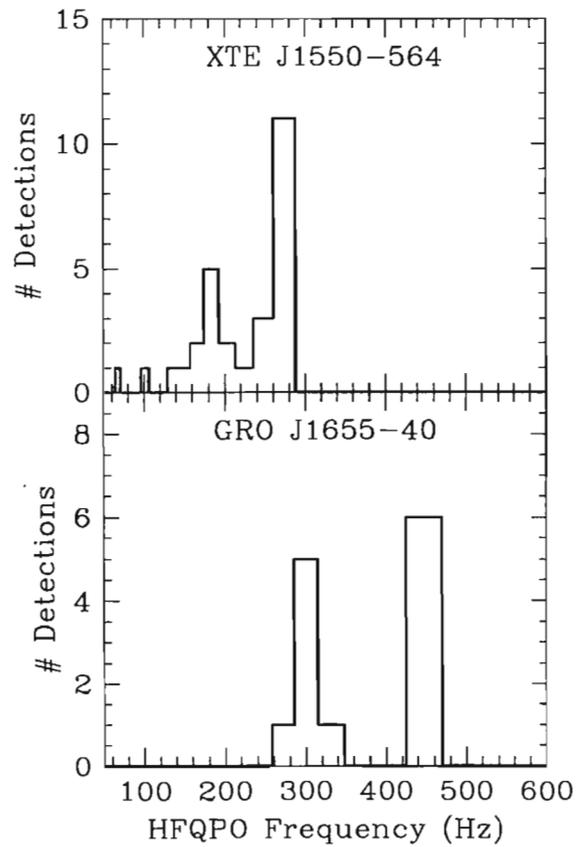


Figura 1.3: Histogramas de frecuencias de dos osciladores cuasi-periódicos XTE J1550-564 y GRO J1655-40. Las ordenadas muestran el número de cuentas en el detector, mientras que en las abscisas se han graficado las frecuencias. Cada fuente muestra una distribución con dos máximos que guardan una relación 3:2 en frecuencias. Tomado de Remillard *et. al.* [67].

XTE J1550–564 y GRO J1655–40, obsérvense los picos máximos observados en cada objeto. En particular los tres objetos aquí citados son candidatos a contener un agujero negro como objeto central.

Estas observaciones son pruebas directas de la relación 3:2 predicha teóricamente y apoyan la idea expuesta por Kluźniak y Abramowicz [34] sobre los efectos de las resonancias en el disco. En objetos más masivos como los núcleos de algunas AGN's⁸ y el mismo centro de la Vía Láctea Sgr A* se observan fenómenos semejantes pero a diferentes frecuencias (infrarrojo cercano [27] y rayos X observados por los satélites *Chandra* y *XMM-Newton*), con una relación 3:2:1 [11].

Estas observaciones, junto con los modelos teóricos nos pueden conducir al entendimiento de los discos de acreción finalmente y este campo podría ser el caballo de batalla que permitiría determinar las propiedades físicas de los objetos compactos centrales y de los campos gravitatorios extremos.

⁸*Active Galactic Nuclei.*

Capítulo 2

Construcción Analítica de Discos Gruesos

2.1 El Potencial Gravitatorio en las Cercanías de Objetos Compactos

2.1.1 Objetos Compactos y Relatividad General

En el universo existe una gran diversidad de objetos como estrellas, nubes de gas y planetas. Cada uno de estos objetos tiene un cociente radio a masa propios, es decir poseen una densidad que los caracteriza. Hay objetos cuyas densidades son extremadamente bajas, como por ejemplo un cúmulo de galaxias que tiene una densidad promedio de $10^{-30} \text{g cm}^{-3}$; por otro lado existen objetos cuyas densidades son bastante elevadas, sobrepasando los 10^7g cm^{-3} . La gran mayoría de estos objetos de alta densidad tienen radios que van desde unos cuantos miles de kilómetros, hasta decenas de kilómetros, bastante más pequeños que el radio del Sol. Por otro lado, existen algunos

Tabla 2.1: Propiedades de Algunos Objetos Compactos*

Objeto	Masa (M_{\odot})	Radio (R_{\odot})	Densidad (g cm^{-3})	Potencial (GM/Rc^2)
Enana Blanca	≤ 1	$\sim 10^{-2}$	$\leq 10^7$	$\sim 10^{-4}$
Estrella de Neutrones	$\sim 1 - 3$	$\sim 10^{-5}$	$\leq 10^{15}$	$\sim 10^{-1}$
Agujero Negro	arbitraria	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	~ 1

* Tomado de [81]

casos donde pueden llegar a tener un radio de minutos luz, semejante al radio del sistema solar. Estos objetos son llamados dados sus altas densidades, objetos compactos. Los tres miembros principales de la familia de objetos compactos son las estrellas enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros. Algunas propiedades de los objetos compactos se listan en la Tabla 2.1.

Debido al alto grado de compactación de la materia en el interior de estos objetos, los campos gravitatorios de los mismos son extremadamente elevados, por lo que deforman el espacio-tiempo en sus cercanías. Alrededor de estos objetos se cree frecuentemente que existe un disco de acreción, del que es emitida la radiación de altas energías que delata su existencia. Dado que estos objetos tienen campos gravitatorios muy elevados, no es posible describir completamente el movimiento de una partícula alrededor de ellos por medio de las ecuaciones de la mecánica Newtoniana. Para poder describir el movimiento de una partícula de prueba es necesario usar una descripción más completa del campo gravitatorio, dada por la teoría general de la relatividad, herramienta que, por lo que sabemos a la fecha, nos permite describir correctamente el espacio-tiempo en condiciones de gravedad extrema.

La teoría general de la relatividad establece que las fuentes de material describirán la forma del espacio-tiempo que las rodea. Las ecuaciones

de Einstein (2.1) nos permiten establecer una relación entre un campo gravitatorio intenso, como el que es producido por los objetos compactos, y la geometría del espacio-tiempo circundante a estos. Estas ecuaciones también se conocen como las ecuaciones de campo gravitatorio y son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales¹:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \quad (2.1)$$

la parte izquierda de esta ecuación nos describe la geometría del espacio-tiempo y tiene dos términos: el término del tensor de Ricci, R_{ik} que es el que nos describe la curvatura del espacio-tiempo, y el término $\frac{1}{2}g_{ik}R$, que está compuesto del escalar de curvatura R multiplicado por la métrica g_{ik} . Esta última depende de las propiedades geométricas que tenga la distribución de materia (simetría por ejemplo). La parte derecha corresponde al tensor momento-energía T_{ik} , e introduce a las ecuaciones las propiedades intrínsecas de la materia. G es la constante de gravitación universal y c representa la velocidad de la luz en el vacío.

Asumiremos en este trabajo que el objeto central en los discos de acreción es un agujero negro. Hasta la fecha es posible describir a un agujero negro por medio de tres parámetros que son i) la masa M , ii) el momento angular asociado a la rotación del agujero, ℓ y iii) la carga eléctrica Q .

Utilizando diferentes métricas, es posible describir a un agujero negro por medio de estos tres parámetros. La métrica determinará las propiedades de la

¹En todos los desarrollos matemáticos, a menos que se indique hemos utilizado la convención de signos (+ - - -) para la métrica. Por otro lado los índices latinos i, k, l, \dots toman los valores 0,1,2,3 para las coordenadas t, x, y, z respectivamente.

geometría espacio-temporal. Un agujero negro con una masa M diferente de cero, estático, es decir sin rotación ($\ell = 0$), y eléctricamente neutro ($Q = 0$), está descrito completamente por medio de la métrica de Schwarzschild que es la única solución para una configuración de masa de este tipo encontrada por Birkhoff en 1923. Es válido suponer en una primera aproximación que un agujero negro sea estático, sin embargo existen algunos argumentos muy fuertes que nos hacen pensar que los agujeros negros a) parecen tener rotación debido a que son producto de un colapso gravitatorio de algún objeto en rotación, ($\ell \neq 0$), b) no necesariamente deben de tener simetría esférica y c) no necesariamente deben de ser eléctricamente neutros ($Q \neq 0$).

La solución de Schwarzschild fue publicada en 1916, y no fue sino hasta 1963 que se encontró una solución a las ecuaciones de Einstein que permitió describir las propiedades de una distribución sin simetría esférica y con rotación. Esta solución fue encontrada por el matemático Roy Kerr y es llamada la métrica de Kerr. La solución estacionaria más general a las ecuaciones de Einstein, es la métrica de Kerr-Newmann que aunque no sea única, describe a un agujero negro con masa, momento angular y carga eléctrica, (M, ℓ, Q) . Los casos especiales de esta métrica son las métricas de Kerr, que describe a un agujero rotante sin carga; la métrica de Reissner-Nördstrom ($\ell = 0$) que describe un agujero negro con masa y carga y la métrica de Schwarzschild que ya he mencionado.

Es natural pensar que la gran mayoría de objetos astrofísicos son eléctricamente neutros, por lo que despreciaremos el papel de la carga eléctrica y por consiguiente solamente discutiré en las siguientes subsecciones el movimiento de una partícula alrededor de un agujero negro estacionario y rotante, utilizando las métricas de Schwarzschild y de Kerr respectivamente.

2.1.2 La Métrica de Schwarzschild:

Agujeros Negros Estáticos

Cuando se impone la condición de que la materia se distribuya de forma isotrópica (esférica) localizada alrededor de un punto central, la solución a las ecuaciones de Einstein es la métrica de Schwarzschild. Esta solución a las ecuaciones de Einstein dada en la Ec. (2.2) fué encontrada por Karl Schwarzschild en 1916, poco tiempo después de que Einstein publicara su trabajo de la relatividad general. Utilizando coordenadas esféricas (r , θ y ϕ) toma la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} c^2\right) dt^2 - r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - r_g/r}. \quad (2.2)$$

En esta ecuación ds^2 representa al intervalo espacio-temporal entre dos sucesos. La métrica de Schwarzschild depende exclusivamente de la masa central que se introduce en las ecuaciones a través del término r_g , denominado radio del horizonte o “radio de Schwarzschild” y en este aspecto es análoga a una distribución Newtoniana de materia. Es un parámetro importante pues es la escala típica de distancias de un agujero negro y está definido (en cm) como:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = 3 \frac{M}{M_\odot} \times 10^5. \quad (2.3)$$

En la Ec. (2.3) M la masa del agujero negro central y M_\odot representa la masa del Sol. En esta métrica se asume que el campo gravitatorio tiene simetría esférica, y es válida inclusive en el supuesto caso de que la materia central tenga movimiento en la dirección de simetría por ejemplo, pulsaciones radiales. La métrica de Schwarzschild determina completamente el campo gravitatorio en el vacío producido por una distribución de materia como la descrita (teorema de Brikhoff).

Para describir el movimiento de una partícula, es necesario conocer la posición espacial como la función del tiempo propio de la partícula. En esta parte, una vez hemos impuesto la métrica de un agujero negro estático, sin rotación, deduciremos las ecuaciones de movimiento con la que una partícula de prueba se movería alrededor de uno de estos objetos.

Las partículas se moverán a lo largo de geodésicas del espacio-tiempo, y éstas geodésicas pueden ser derivadas a partir de varios métodos, por ejemplo, utilizando el Lagrangiano o bien utilizando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. En la presente descripción, utilizaré éste último método, siguiendo el formalismo utilizado por Landau-Lifshitz [40] en su obra sobre teoría clásica de campos.

Vamos a suponer que la acción S del sistema está conformada de dos cantidades conservativas, la energía E_0 , el momento angular ℓ y también de una contribución de la acción de la partícula a lo largo de la coordenada r , llamada $S_r(r)$. Suponiendo que nuestra partícula de prueba tiene una masa m , es posible establecer la trayectoria de la misma a través de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la métrica descrita por la ecuación (2.2) podemos establecer dichas ecuaciones:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{c \partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m^2 c^2 = 0. \quad (2.5)$$

Como ya he mencionado, suponemos que la acción es de la forma:

$$S = -E_0 t + \ell \phi + S_r(r). \quad (2.6)$$

Donde E_0 y ℓ son las constantes de movimiento. Calculando las derivadas $\partial S/\partial t$ y $\partial S/\partial \phi$ y sustituyéndolas en la ecuación (2.5) se encuentra fácilmente una expresión para calcular la derivada dS_r/dr , dada por la ecuación (2.7):

$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2 c^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}}. \quad (2.7)$$

Calculando la derivada $\partial S/\partial E_0$ e igualándola a una constante y utilizando la relación (2.8),

$$\frac{\partial S}{\partial E_0} = -t + \frac{\partial S_r}{\partial E_0}, \quad (2.8)$$

es posible establecer una relación explícita $t = t(r)$:

$$c \frac{dt}{dr} = \frac{E_0}{mc^2} \left\{ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right]^{1/2} \right\}^{-1/2}. \quad (2.9)$$

A partir de esta última expresión (2.9), se puede establecer el movimiento radial de la partícula, re-expresando esta última ecuación de la forma:

$$\frac{r}{c(r - r_g)} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{E_0} \left[E_0^2 - V_{eff}^2(r) \right]^{1/2}, \quad (2.10)$$

donde el potencial “efectivo” del sistema, queda definido de la siguiente manera:

$$V_{eff}(r) = mc^2 \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

En esta expresión, m es la masa de la partícula prueba y r_g es el radio de Schwarzschild del objeto central. Es fácil ver que el potencial “efectivo” depende exclusivamente de la masa del objeto central M y del valor del momento angular ℓ . En la Figura 2.1 se presenta la gráfica de la ecuación 2.11 mostrándose la dependencia de $V_{eff}(r)$ con diferentes valores de momento angular. Es de hacer notar la existencia de una órbita llamada marginalmente estable, ($\ell = \ell_{ms}$) localizada en la gráfica a $r_{ms} = 3r_g$ y una órbita llamada marginalmente ligada, localizada a $r_{mb} = 2r_g$ ($\ell = \ell_{mb}$), Estas órbitas se

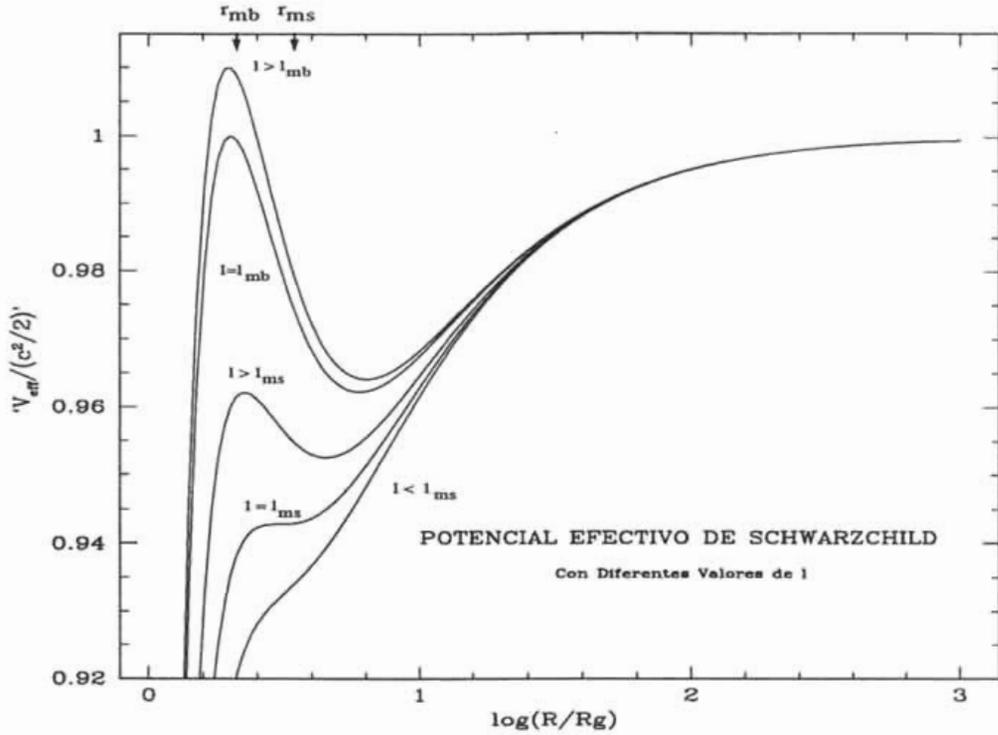


Figura 2.1: El potencial *efectivo* de Schwarzschild para una distribución de momento angular constante y diferentes valores del momento angular. Se han utilizado los valores $l_{mb} = 2r_g c$ y $l_{ms} = 0.9186l_{mb}$ para el momento angular indicado. Las órbitas marginalmente estables y marginalmente ligadas se indican con las flechas en la parte superior.

localizan en la gráfica por medio de las flechas de la parte superior. La primera es la última órbita interna circular estable (punto silla) de todas las configuraciones posibles con diferentes valores de l , mientras que la otra corresponde a la última órbita interna circular inestable ante perturbaciones radiales. En el caso donde $l_{ms} < l < l_{mb}$ existen diferentes órbitas ligadas al objeto central. Finalmente calculando la derivada $\partial S/\partial M = \text{const}$, es posible determinar la trayectoria de la partícula por medio de una expresión análoga a (2.9):

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (2.12)$$

2.1.3 La Métrica de Kerr:

Agujeros Negros con Rotación

Como ya mencioné antes, es posible describir el comportamiento de un agujero negro con rotación por medio de la métrica de Kerr, descubierta por Roy Kerr en 1963. Esta métrica depende de dos parámetros, que son la masa del agujero negro M y su momento angular J definido a través del parámetro a y relacionado con el momento angular por medio de $J = Ma$. Aquí hemos introducido por comodidad, las coordenadas geometrizadas, en las que $G = c = 1$, y donde es conveniente medir la masa y el momento angular del objeto central en unidades de longitud, mediante el factor de conversión: $1.476\ 64 \pm 0.00002 \times 10^5 \text{ cm} = 1 M_{\odot}$. Lo anterior se debe a que de esta manera es más fácil evaluar las ecuaciones resultantes con métricas diferentes a las de Schwarzschild. Al igual que en el caso anterior de la métrica de Schwarzschild, r_g es el radio gravitacional definido en la Ec. (2.3).

La métrica de Kerr es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi dt. \quad (2.13)$$

En esta ecuación para la métrica se utilizan las coordenadas desarrolladas por Boyer & Lindquist en 1967, donde

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad (2.14)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.15)$$

Se puede ver que haciendo el límite $a \rightarrow 0$, la Ec. (2.13) se reduce a la métrica de Schwarzschild (Ec. 2.2). Haciendo un análisis semejante al que

se mostró para el caso de la métrica de Schwarzschild, es posible establecer las ecuaciones que rigen el movimiento de una partícula alrededor de un agujero negro rotante. Asumiendo que la partícula que se mueve alrededor del agujero negro tiene masa m , las ecuaciones de Hamilton–Jacobi son:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 = 0. \quad (2.16)$$

Una vez establecida las ecuaciones de Hamilton–Jacobi, es necesario conocer las componentes contravariantes del tensor g^{ik} , las cuales se calculan por medio del siguiente operador:

$$g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2 \Delta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Suponiendo la existencia de cantidades conservativas asociadas a las variables t y ϕ tales como la energía del sistema E_0 y ℓ , la componente del momento angular a lo largo del eje de simetría, es posible escribir nuevamente la acción de la siguiente forma:

$$S = -E_0 t + \ell \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (2.18)$$

Siguiendo un procedimiento semejante al descrito en la sección 2.1.2 es posible mediante separación de variables, deducir las ecuaciones de movimiento. Entonces calculando las derivadas $\partial S/\partial t$ y $\partial S/\partial \phi$, a partir de (2.18), sustituyendo el operador dado en (2.17), mediante un poco de álgebra y utilizando una constante de separación K , es posible llegar a:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \left(aE_0 \sin \theta - \frac{\ell}{\sin \theta} \right)^2 + a^2 m^2 \cos^2 \theta = K, \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} \left[(a^2 + r^2) E_0 - a\ell \right]^2 + m^2 r^2 = -K. \quad (2.20)$$

Estas son las relaciones a partir de las cuales deduciremos las ecuaciones de movimiento de la partícula. Para ello, es necesario establecer el cuatro-momento de la partícula dado por:

$$p^i = m \frac{dx^i}{ds} = -g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x_k}. \quad (2.21)$$

Entonces utilizando (2.13), (2.18), (2.19) y (2.20), y calculando la expresión del lado derecho de (2.21) establecemos las ecuaciones de movimiento respecto a ds . Por brevedad solamente mostraré las ecuaciones para r y θ que son las que nos interesan para establecer el potencial "efectivo" del sistema.

$$m^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} [(a^2 + r^2)E_0 - a\ell]^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^4} (K + m^2 r^2), \quad (2.22)$$

$$m^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} (K - a^2 m^2 \cos^2 \theta) - \left(aE_0 \sin \theta - \frac{\ell}{\sin \theta} \right)^2. \quad (2.23)$$

Estas ecuaciones (2.22) y (2.23) representan las ecuaciones de movimiento es decir, las geodésicas del movimiento. Para encontrar el potencial efectivo nos valemos de la simetría radial de las ecuaciones. Imponiendo la condición que una partícula se mueva en el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$), a partir de (2.22) y (2.23), estableciendo el movimiento para un valor fijo de θ , y encontrando el valor de K en términos de E_0 y de ℓ , llegamos a la siguiente ecuación:

$$m^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} [(a^2 + r^2)E_0 - a\ell]^2 - \frac{\Delta}{\rho^4} [(aE_0 - \ell)^2 + m^2 r^2]. \quad (2.24)$$

Definiremos el potencial efectivo $V_{eff}(r)$ como aquella función valuada en r para la cual el miembro derecho de la ecuación (2.24) se hace cero, es decir:

$$[(a^2 + r^2)V_{eff}(r) - a\ell]^2 - \Delta [(aV_{eff}(r) - \ell)^2 + m^2 r^2] = 0. \quad (2.25)$$

Despejando $V_{eff}(r)$ de esta última expresión, tenemos finalmente el potencial efectivo para una partícula que se mueve en el plano ecuatorial:

$$V_{eff}(r) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (2.26)$$

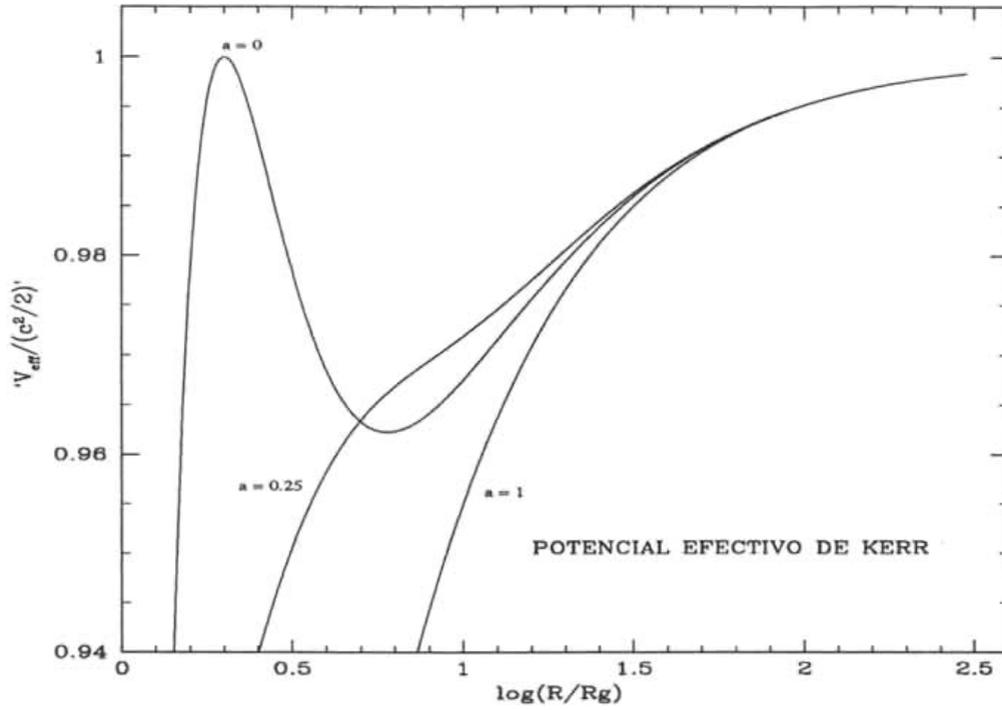


Figura 2.2: El potencial *efectivo* de Kerr para una distribución de momento angular constante y diferentes valores del parámetro de rotación del agujero negro a . En todas las gráficas se ha utilizado el mismo valor del momento angular $\ell = 2.86r_g c$.

donde:

$$A = [(a^2 + r^2) - a^2 \Delta], \quad (2.27)$$

$$B = 2al [al(a^2 + r^2) + \Delta], \quad (2.28)$$

$$C = (a^2 \ell^2 + \Delta r^2 m^2). \quad (2.29)$$

El comportamiento de órbitas alrededor de agujeros negros en la métrica de Kerr fue estudiado por primera vez por R. Ruffini y J.A. Wheeler en 1969 [74]. Una deducción semejante es la expuesta por Misner, Thorne y Wheeler en su célebre obra *Gravitation* [53]. Los radios de las órbitas estables se obtienen a partir de calcular $V_{eff}(r) = E_0$, $V'_{eff}(r) = 0$, para $V''_{eff}(r) > 0$. Dado que nos interesan la posición de las órbitas límite para el caso

marginalmente ligado y marginalmente estable, que acotan el movimiento de una partícula, mostramos a continuación las funciones que describen estas dos órbitas:

$$r_{ms}^2 - 3r_g r_{ms} \pm 4a\sqrt{2r_g r_{ms}} - 3a^2 = 0, \quad (2.30)$$

cuya solución analítica fue encontrada por Bardeen *et. al.* [13] en 1972 y corresponde a las siguientes ecuaciones:

$$Z_1 = 1 + (1 - a_*^2)^{1/3} \left[(1 + a_*)^{1/3} + (1 - a_*)^{1/3} \right], \quad (2.31)$$

y

$$Z_2 = \sqrt{3a_*^2 + Z_1^2}, \quad (2.32)$$

Para un agujero negro de Scharzschild $a_* = 0$ y $r_{ms} = 3r_g$, mientras que para un agujero negro de Kerr extremo $a_* = 1$ y $r_{ms} = r_g/2$. En estas ecuaciones se tiene:

$$a_* \equiv \frac{c^2}{GM_{BH}} a, \quad (2.33)$$

donde a es el parámetro de spin del agujero negro de Kerr. Finalmente para la órbita ligada marginalmente, se tiene la expresión:

$$r_{mb} = r_g \left(1 \mp \frac{a_*}{2} + \sqrt{1 \mp a_*} \right), \quad (2.34)$$

Para un agujero negro de Schwarzschild, $r_{mb} = 2r_g$, mientras que para un agujero negro de Kerr extremo ($a_* = 1$), $r_{mb} = r_g/2$ (órbita prógrada) y $r_{mb} = 2.91r_g$ (órbita retrógrada).

2.1.4 Potenciales Pseudo-Newtonianos:

Una Buena Aproximación

Debido a las complicaciones matemáticas que surgen con las ecuaciones de la relatividad general, una forma alternativa de atacar el problema de describir

el movimiento de una partícula alrededor del campo gravitatorio de un agujero negro estático y neutro es por medio de potenciales pseudo-Newtonianos. Estos potenciales reproducen correctamente muchas de las características obtenidas por medio de los potenciales efectivos a través de las métricas de Schwarzschild y de Kerr.

Los potenciales efectivos obtenidos a través de las ecuaciones de la relatividad general describen principalmente tres clases de órbitas para partículas con masa ($m > 0$): a) de captura, b) órbitas no ligadas y c) órbitas ligadas. La existencia de órbitas de *captura* en los potenciales relativistas es la diferencia más grande respecto de un potencial Newtoniano, puesto que en este último no es posible la *captura* de una partícula debido a la existencia de una *barrera centrífuga* que da lugar a órbitas no ligadas. Las diferencias más notables de estos potenciales respecto del Newtoniano, ocurren en las regiones muy cercanas al objeto central, y es por eso que se hace necesario introducir la relatividad, para describir la dinámica en estas regiones. Todo esto se ilustra en la Fig. 2.3 donde se muestran las gráficas de un potencial efectivo Newtoniano ($\Phi_{eff} = -\frac{GM_{BH}}{r} + \frac{l^2}{2r^2}$) y el potencial efectivo de Schwarzschild mostrado en la Ec. 2.11.

El primer potencial pseudo-Newtoniano fue introducido por Paczyński y Wiita [60] en 1980 y tiene la forma:

$$\Phi_{PN} = \frac{-GM_{BH}}{R - r_g}, \quad (2.35)$$

donde r_g es el radio de Schwarzschild, R es la distancia al centro $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ del objeto en coordenadas cilíndricas (r, z) , donde r es la distancia radial, z es la altura medida desde el origen y M_{BH} es la masa del agujero

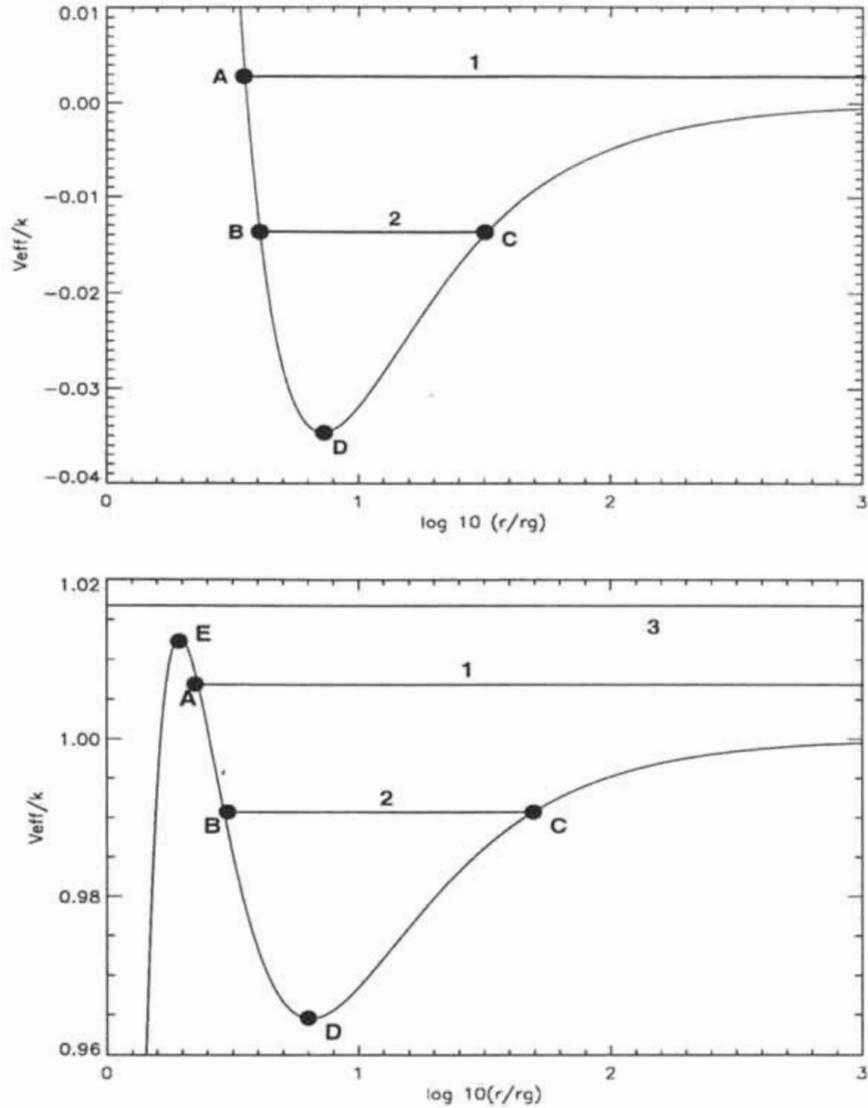


Figura 2.3: En la figura superior se muestran las características de un potencial efectivo Newtoniano para un objeto con una masa $M = 2.5M_{\odot}$ con $\ell = 1.90r_g c$. Se muestran las órbitas no ligadas (1) y órbitas ligadas (2). Se muestran los llamados puntos de retorno para (A) una órbita no ligada y (B), (C) para una órbita ligada. El punto (D) localiza una órbita circular. En el p nel inferior se muestra el potencial efectivo relativista para un objeto con masa $M = 2.5M_{\odot}$ y $\ell = 1.90r_g c$. En este caso se identifica la principal diferencia de un potencial relativista, la existencia de órbitas de captura (3). Con (1) y (2) se identifican las órbitas no ligadas y ligadas y sus respectivos puntos de retorno (A), (B) y (C). Las órbitas circulares inestables y estables se muestran con los puntos (E) y (D) respectivamente.

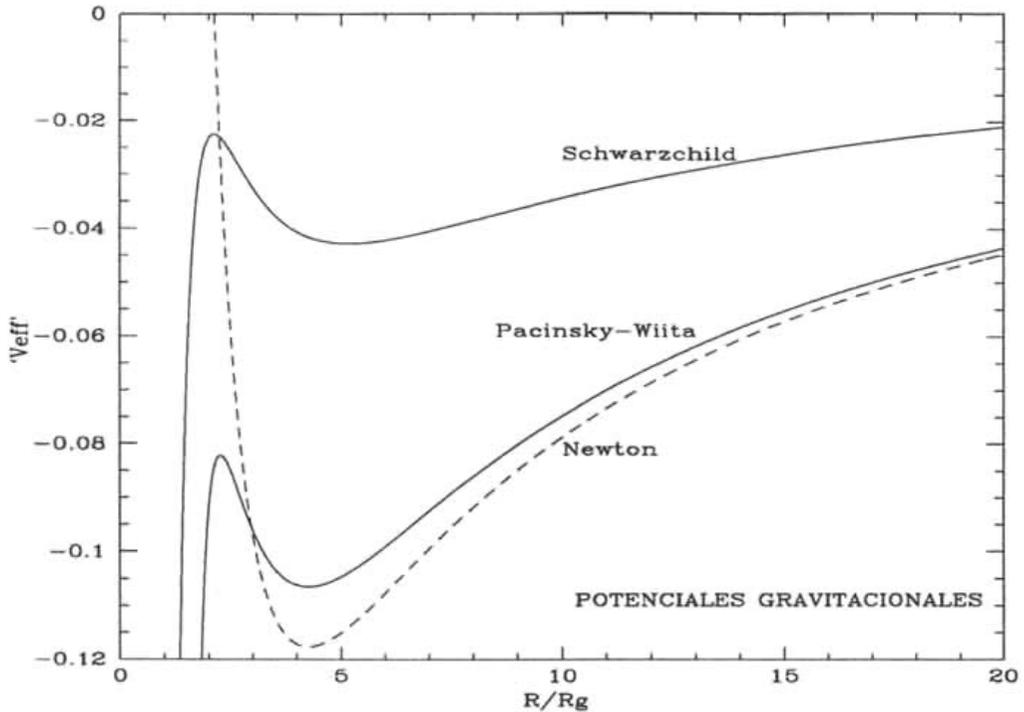


Figura 2.4: Diferentes potenciales gravitatorios efectivos (“ V_{eff} ” esta en unidades arbitrarias). Nótese la diferencia entre el potencial Newtoniano, que no considera una órbita de captura, mientras que el de Schwarzschild y de Paczyński-Wiita si lo hacen. Es también interesante ver las ligeras diferencias entre un potencial pseudo-Newtoniano y uno relativista. En los tres gráficos se ha utilizado el mismo valor de $\ell = 1.90r_g c$.

negro. El potencial de Paczyński-Wiita da una aproximación muy buena de entre 10% y 20% dentro de la región $r \geq r_{ms}$ respecto a un potencial relativista. Este potencial describe correctamente las posiciones de la última órbita circular estable $r = 3r_g$, y de la órbita circular marginalmente ligada r_{mb} , es decir una órbita donde ante cualquier perturbación radial dirigida hacia el centro, la partícula caerá inexorablemente al objeto central. Otro punto a favor de este potencial es que reproduce, en concordancia con el valor para la métrica de Schwarzschild, el valor de la energía mecánica total por unidad de masa para una partícula en la última órbita estable. Este potencial ha

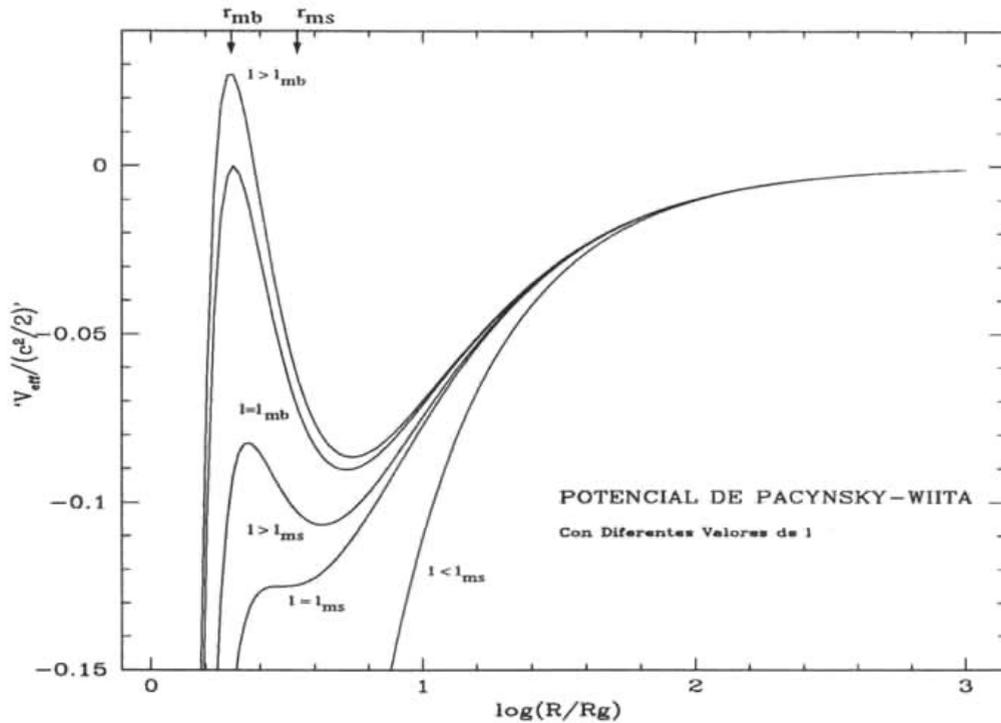


Figura 2.5: El potencial *efectivo* de Paczyński–Wiita. Nótese las similitudes con el potencial efectivo que corresponde a una métrica de Schwarzschild al igual que en la Fig. 2.1, con $\ell_{mb} = 2r_g c$ y $\ell_{ms} = 0.9186\ell_{mb}$. Las flechas en la parte superior indican las órbitas marginalmente estables y marginalmente ligadas.

sido usado extensamente por muchos autores desde entonces, para calcular la estructura de discos de acreción.

En la búsqueda de reproducir algunas de las características de las órbitas en la métrica de Schwarzschild, hay algunos otros potenciales como el introducido por Kluźniak & Lee [33] recientemente (2002). Este último potencial resulta útil puesto que reproduce dos características de una órbita relativista: i) la existencia de una última órbita estable, a $r_{ms} = 3r_g$ y, ii) reproduce el cociente de las frecuencias epicíclicas de las órbitas en completa concordancia con el cociente dado por la métrica de Schwarzschild. Este potencial tiene la

forma:

$$\Phi_{KL} = \frac{GM_{BH}}{r_g} [1 - \exp(r_g/r)]. \quad (2.36)$$

Los potenciales descritos hasta aquí reproducen muy bien las características de la métrica de Schwarzschild. En 1996 Artemova, Björson y Novikov [10] presentaron una interesante revisión de los potenciales pseudo-Newtonianos conocidos hasta entonces, demostrando que potenciales simples reproducían con una buena precisión las características relevantes de la relatividad general. La aportación más significativa de ese artículo fue la propuesta de un potencial pseudo-Newtoniano que describiera las características de un agujero negro rotante. La propuesta de Artemova *et. al.* tiene propiedades análogas a las del potencial de Paczyński-Wiita y se reduce a éste en el caso de un agujero negro sin rotación. La ecuación para la fuerza por unidad de masa (campo) dada por Artemova *et. al.* es:

$$F_{PK} = \frac{GM_{BH}}{r^{2-\beta}(r - r_H)^\beta}, \quad (2.37)$$

donde r_H representa el radio *gravitatorio* o radio del horizonte, el cual ya no es simplemente el radio de Schwarzschild, puesto que en este caso el agujero negro está rotando. Nótese que en las siguientes ecuaciones, $r_H \rightarrow r_g$ para el caso en el que el parámetro de rotación a es nulo. Ambos radios están definidos por las siguientes expresiones:

$$\beta = \frac{r_{ms}}{r_H} - 1, \quad (2.38)$$

donde r_{ms} representa el radio de la órbita marginalmente estable y

$$r_H = \frac{r_g}{2} (1 + \sqrt{1 - a^2}), \quad (2.39)$$

$$r_{ms} = \frac{r_g}{2} \left[3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right], \quad (2.40)$$

y donde:

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3} \left[(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3} \right], \quad (2.41)$$

$$Z_2 = \sqrt{3a^2 + Z_1^2}. \quad (2.42)$$

De acuerdo a Artemova *et. al.* esta propuesta da una buena aproximación a las soluciones relativistas de un agujero negro con cualquier valor de a permitido. Las desviaciones entre las soluciones exactas y esta propuesta se encuentran en el rango entre el 10% y 20%.

En este trabajo emplearemos el potencial de Paczyński–Wiita para nuestras simulaciones debido a que como ya se ha expuesto, reproduce con poco error las propiedades de un potencial de Schwarzschild.

2.2 Consideraciones Hidrodinámicas

En este trabajo se ha considerado que el material que rodea al agujero negro central es un fluido con movimiento azimutal, isentrópico y relativista que se encuentra en equilibrio hidrostático. La ecuación de Euler establece la conservación del momento de cada elemento de gas de acuerdo a:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \rho \vec{F}. \quad (2.43)$$

En esta ecuación, \vec{v} representa el vector de velocidad de una componente del gas, mientras que ρ representa la densidad del mismo. El primer término corresponde a la densidad de fuerza, es decir, a las fuerzas debidas a alguna aceleración en las componentes de gas, el segundo término representa la densidad de momento debido a la advección producida por gradientes de velocidades en los elementos del fluido. Dado que estamos considerando un fluido estacionario, todos los términos y derivadas que dependen del tiempo

son iguales a cero, y dado que nuestro fluido está en equilibrio hidrostático, el término correspondiente a gradientes de velocidades es diferente de cero, debido a que hemos considerado: $v_r = 0$, $v_\phi = r\Omega$ y $v_z = 0$. Esto nos conduce a:

$$\nabla P = \rho F - \rho(r\Omega^2) \quad (2.44)$$

que es la ecuación de equilibrio hidrostático, donde las fuerzas externas gravitatorias y centrífugas, son equilibradas por la presión P del fluido.

La construcción de discos toroidales consiste básicamente en establecer una configuración de equilibrio entre las fuerzas gravitatorias y la presión hidrostática.

Hemos asumido que el gas está descrito por una ecuación de estado politrópica de la forma $P = P(\rho)$:

$$P = K\rho^\gamma \quad (2.45)$$

donde γ es el índice politrópico correspondiente al gas; en nuestro caso, las simulaciones se han realizado usando un gas relativista, $\rho \gg 10^9 \text{ kg m}^{-3}$ con un valor de $\gamma = 4/3$, y una constante politrópica $K = 9.6 \times 10^8$ en unidades mks. Esta constante politrópica depende de los elementos que constituyen al gas, en nuestro caso un gas relativista degenerado constituido de electrones relativistas, típicos componentes de una estrella de neutrones.

En coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , la configuración de un toro axisimétrico constituido por un fluido sin auto-gravedad y con una ecuación de estado politrópica, viene dada a partir de la fuerza gravitatoria, obtenida a partir de

la ecuacion (2.35) del potencial gravitatorio efectivo:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi_{eff} \quad (2.46)$$

donde Φ_{eff} corresponde a la suma del potencial gravitatorio más el término centrífugo (ver Ec. 2.44), que en este caso escribimos en términos del momento angular asociado a la partícula de prueba:

$$\Phi_{eff} = \frac{-GM_{BH}}{\sqrt{r^2 + z^2 - r_g}} + \int_r^\infty \frac{\ell^2(r')}{r'^3} dr. \quad (2.47)$$

El teorema de von Zeipel [24] y [25], establece que si tenemos una ecuación de estado politrópica $P = P(\rho)$, el momento angular dependerá únicamente de la distancia medida desde el eje de rotación, es decir, $\ell = \ell(r)$. Integrando sobre r la ecuación (2.46) es posible establecer una relación entre la presión, la densidad y las fuerzas gravitatorias de la forma:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \Phi_{eff}(r, z) + \Phi_0 = 0. \quad (2.48)$$

En esta última ecuación, la constante de integración Φ_0 puede ser interpretada como el *factor de llenado* del potencial gravitacional efectivo y la extensión radial del toro quedará determinada por este factor. La *frontera* del toro, es decir la superficie del mismo, es la zona donde la presión y la densidad se hacen cero y está dada por la relación entre r y z dada por la ecuación anterior, que en forma explícita toma la forma siguiente:

$$z = \left\{ \left[GM_{BH} \left(\frac{\ell^2}{2r^2} + \Phi_0 \right)^{-1} + r_g \right]^2 - r^2 \right\}^{1/2} \quad (2.49)$$

En la Figura 2.6 se ilustran diferentes perfiles de configuraciones toroidales en el plano ecuatorial para diferentes valores de Φ_0 .

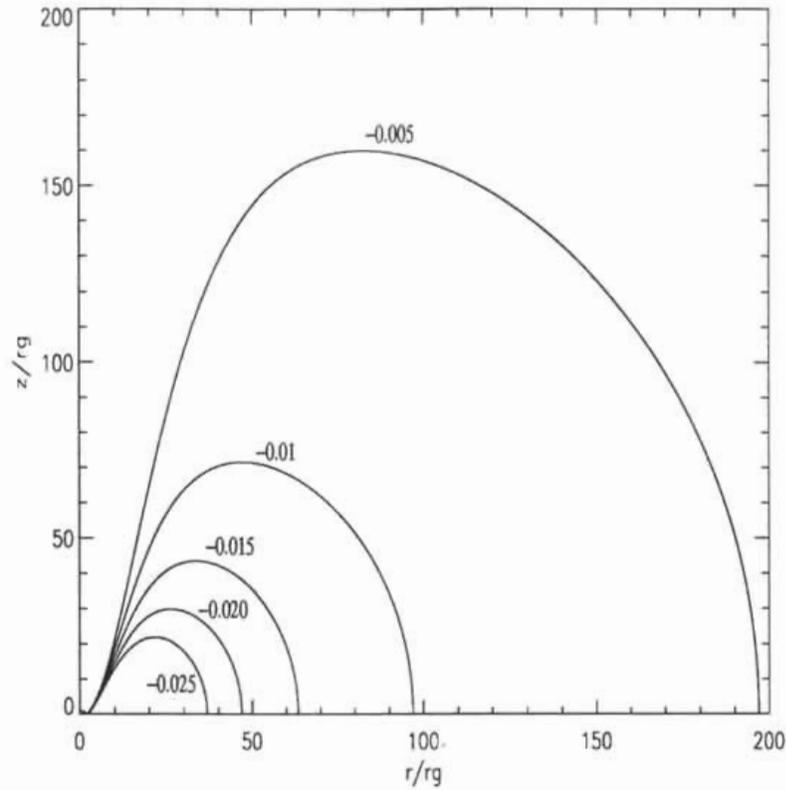


Figura 2.6: Sección meridional para varias superficies donde la presión y la densidad se hacen cero, para varios toros construidos de acuerdo al procedimiento descrito en el texto. Cada curva corresponde a diferentes valores del factor de llenado Φ_0 en unidades $c^2/2$.

2.3 Distribuciones de Momento Angular

Como se ha ido mostrando a lo largo de las secciones donde describo el movimiento de una partícula alrededor de un agujero negro, los diferentes potenciales efectivos, ya sean relativistas o pseudo-Newtonianos, tienen un parámetro libre muy importante del que depende que exista un pozo de potencial o no y es, el momento angular por unidad de masa ℓ .

Por lo tanto es natural pensar que vale la pena explorar el comportamiento de los potenciales gravitatorios con diferentes distribuciones de momento

angular, y sus consecuencias para la estabilidad de los discos de acreción. El primer caso posible es el que hasta ahora hemos desarrollado y consiste en suponer que el momento angular del objeto es independiente de la posición de la partícula, y que también permanece constante a lo largo del tiempo. Sin embargo, recientemente varios autores como Font *et. al.* [25], [24], Masuda *et. al.* [49] y Daigne & Mochkovitch [19] han hecho estudios considerando que el momento angular aumenta hacia afuera del disco mediante una distribución de ley de potencias como la que se muestra a continuación:

$$\ell \propto r^\alpha \quad (2.50)$$

En las distribuciones que hemos utilizado, se utilizan como constantes de proporcionalidad el valor del momento angular correspondiente a una órbita Kepleriana y normalizada al valor del radio que corresponda a dicha órbita, es decir:

$$\ell(r) = \ell_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha \quad (2.51)$$

en esta última ecuación, el valor del momento inicial es $\ell_0 = \ell_K$, donde el momento angular ℓ_K en el plano ecuatorial está dado por:

$$\ell_0 = \ell_K(r_0) = \left[r^3 \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \right]_{r=r_0}^{1/2} = \left[\frac{GM_{BH} r^3}{(r - r_g)^2} \right]_{r=r_0}^{1/2} \quad (2.52)$$

En una distribución de momento angular como la descrita arriba, se pueden investigar tres casos de movimiento, de acuerdo al valor que se le asigne al exponente α de la Ec. (2.51), siendo estos, super-Kepleriano $\alpha > 0.5$, Kepleriano $\alpha = 0.5$ y sub-Kepleriano $\alpha < 0.5$. Con estas distribuciones, autores como Font *et. al.* [25] investigaron la estabilidad de discos bajo una distribución de momento angular como la descrita en la Ec. 2.51 y han concluido que, cuando se asume una distribución de esa forma, algunas inestabilidades como la radial son suprimidas o reducidas. En la Figura 2.7 se muestran las

distribuciones de momento angular correspondientes a las ecuaciones 2.51 y 2.52 y su dependencia radial. En nuestros modelos hemos utilizado el valor del momento angular Kepleriano que corresponde a la posición radial del disco para el caso del momento angular constante (línea continua), mientras que para el caso no constante, hemos seguido la distribución de ley de potencias mostrada en la figura (línea discontinua).

Con la finalidad de establecer la estabilidad de los toros y darle completitud a este estudio, hemos analizado la estabilidad correspondiente a ambos casos de distribuciones de momento angular, constante y no constante.

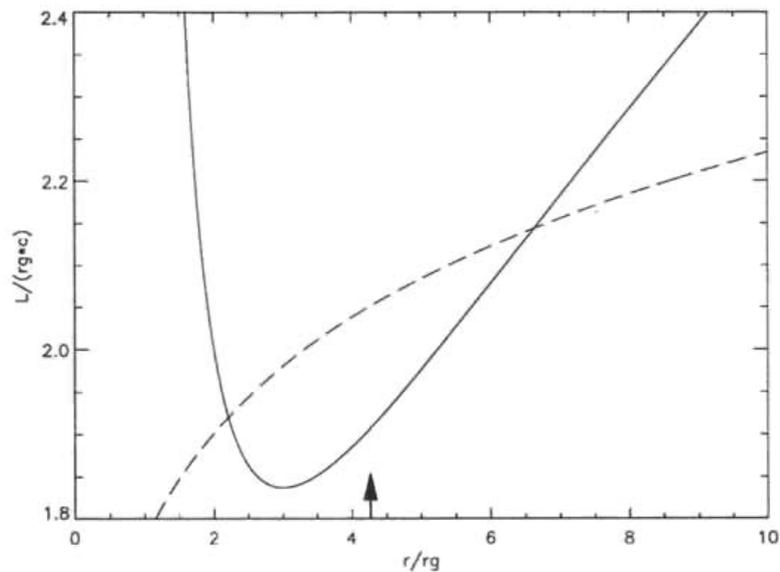


Figura 2.7: Distribuciones de momento angular. En la línea sólida se muestra una distribución Kepleriana que corresponde a la Ec. 2.52, mientras que la línea discontinua muestra la distribución de ley de potencias dada por la Ec. 2.51. La flecha señala la localización del valor del momento angular constante usado en los modelos a $r_0 = 4.25r_g$.

Capítulo 3

Construcción Numérica de Discos

Como se describió en el Capítulo 2, para construir un toro necesitamos una fuente de gravedad (i.e. un objeto central con un campo gravitatorio elevado), una ley de distribución angular de materia y el material que conformará el toro que en nuestro caso es un gas. Aunque utilizamos una constante politrópica de $\gamma = 4/3$, ésta es válida tanto para un gas relativista degenerado (como es nuestro caso) como para un gas ideal con un campo de radiación.

Modelar numéricamente un gas es bastante complicado, dado que inclusive un volumen pequeño ($\sim 1 \text{ cm}^3$) está compuesto por un número tan enorme de partículas ($\sim 10^{23}$) que es prácticamente imposible describir las propiedades de cada partícula con una computadora. Para poder trabajar de una manera cuantitativa y poder describir de forma general y formal las propiedades térmicas de la materia se desarrolló a principios del siglo XIX la termodinámica. Conforme el avance de la ciencia se fue dando, se hizo necesario poder resolver problemas a través de simulaciones numéricas y ya en

el siglo XX, se desarrollaron métodos computacionales, modelos numéricos, que permiten reproducir o imitar con una cantidad de datos finita las propiedades de un fluido. Existen dos formas de describir matemáticamente el comportamiento cinemático de un fluido: Euleriana y Lagrangiana. Ambas nos ofrecen marcos de referencia válidos para la descripción del fluido.

En el marco Euleriano las variables independientes son las coordenadas espaciales x , y , z , y la coordenada temporal t . Básicamente este sistema establece las ecuaciones conservativas de masa, momento y energía en un volumen que se mantiene constante en una región del espacio. El fluido dentro de este volumen consistirá, para cualquier instante de tiempo, de partículas diferentes de las que estaban en un tiempo previo o posterior al instante t . Las partículas contenidas en este volumen cambian. La descripción Euleriana consiste en aplicar las leyes de conservación a este volumen estándar de fluido y es análoga a la descripción del campo electromagnético, puesto que asigna una cantidad (velocidad, densidad, etc.) a cada posición del espacio. Cuando se aplica este método numéricamente se utilizan mallas donde están contenidas las propiedades del fluido.

Por otro lado en la aproximación Lagrangiana, todo está centrado en describir las propiedades de una masa determinada de fluido. Es análoga a la mecánica clásica debido a que trata de describir las propiedades de partículas que representan el fluido. Esta forma de describir la cinemática del fluido consiste en seguir la trayectoria y evolución de las *parcelas* de gas a lo largo del tiempo. Las propiedades del fluido están definidas como función del tiempo y pueden describir la historia dinámica de la *parcela* de fluido. Este método al aplicarlo entonces, se transforma en un método de partículas.

Nosotros hemos empleado en nuestras simulaciones un método numérico que utiliza la descripción Lagrangiana, donde el gas suele representarse como una colección de partículas (parcelas) con cierta viscosidad artificial macroscópica, que reproduce las propiedades de un gas real con un error muy bajo en los cálculos. Este método de representar al gas por medio de partículas se llama en inglés *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) y ha sido aplicado extensamente en diversos problemas astrofísicos como fisión estelar [45], modelado de discos [97] y problemas cosmológicos entre otros (ver las aplicaciones citadas por Monaghan [55]).

En la siguiente sección se describirá con cierto detalle este método, resumiendo los aspectos más relevantes del mismo, expuestos por Monaghan en [55]. Luego en la Sección 3.2 se describirá brevemente el código numérico y su funcionamiento, para finalmente describir, en la Sec. 3.3 cómo se han realizado las simulaciones.

3.1 El Método SPH

SPH es un método de partículas. Básicamente la idea del método SPH es interpolar la función que uno desea evaluar, como función de un conjunto de valores permitidos que representan cantidades asociadas a las variables de cada partícula que conforma el sistema. Para interpolar por ejemplo, la función $A(r)$ que depende de la distancia y que representa un grupo de partículas espaciadas entre sí a cierta distancia, se utiliza la siguiente integral:

$$A(r) = \int A(r')W(r - r', h)dr', \quad (3.1)$$

donde esta es sobre todo el espacio de r , h es la separación característica de las partículas y W es la función de distribución de partículas llamada *kernel*¹, que tiene las siguientes propiedades:

$$\int W(r - r', h) dr' = 1, \quad (3.2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r - r', h) = \delta(r - r'). \quad (3.3)$$

En lo que respecta al aspecto numérico, la interpolación puede tratarse como una suma sobre número total de partículas que rodean a la partícula de interés que toma la forma:

$$A_s(r) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(r - r_b, h). \quad (3.4)$$

El índice b denota la *etiqueta* de cada partícula, y por ejemplo, la partícula b tiene una masa m_b , una posición \vec{r}_b y velocidad \vec{v}_b y una densidad ρ_b . Por lo tanto, el valor de cualquier cantidad A en el punto \vec{r}_b , está dado por A_b .

El error al aproximar la integral de interpolación (Ec. 3.1) mediante la suma mostrada en la Ec. 3.4, depende del grado de desorden de las partículas y es del orden de $\sim h^2$. Sin embargo se debe notar que no todas las partículas contribuyen en la sumatoria, puesto que puede escogerse una función *kernel* tal, que el valor $|r - r_b|$ tienda a cero para cierto valor de normalización h de la función *kernel* W .

Un punto importante es que mediante el empleo de una función *kernel* diferenciable, es posible interpolar cualquier otra función. Por ejemplo, las

¹ *Kernel* significa núcleo en inglés, y debe su nombre a que es la función más importante de este método.

derivadas de una cantidad interpolada, pueden obtenerse a partir de derivadas ordinarias de la función *kernel* como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\nabla A(r) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(r - r_b, h). \quad (3.5)$$

Tanto las ecuaciones de movimiento de una partícula como las ecuaciones hidrodinámicas, expuestas en el Capítulo 1 pueden ser re-escritas mediante una interpolación a través de una función *kernel* adecuada. De esta forma, es posible escribir la ecuación de momento de la forma:

$$\rho_a \nabla P_a = \sum_b m_b (P_a - P_b) \nabla_a W_{ab}; \quad (3.6)$$

mientras que la ecuación de continuidad toma las formas:

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}, \quad (3.7)$$

o bien,

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \vec{v}_{ab} W_{ab}, \quad (3.8)$$

donde $W_{ab} = W_a - W_b$ y $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$. Cuando se trata de mover partículas, es decir, evolucionarlas en el tiempo se utiliza para la posición, el algoritmo:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_r dt, \quad (3.9)$$

mientras que para la velocidad se utiliza:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{F} dt, \quad (3.10)$$

en estas ecuaciones, las variables sin subíndices representan una cantidad en un instante de tiempo $t + dt$, mientras que las variables con subíndice 0, representan cantidades en un instante t . La fuerza \vec{F} es por unidad de masa es decir, representa la aceleración sobre una partícula.

Nuestras simulaciones no toman en cuenta la viscosidad intrínseca del gas (gas invíscido), por lo que la forma más general de las ecuaciones de Navier–Stokes para el movimiento toma la forma:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi_{PN} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{art}. \quad (3.11)$$

Esta ecuación que es análoga a la Ec. 2.38, es la ecuación de movimiento de las partículas en el código SPH. El último término con el subíndice *art* es el que describe la viscosidad artificial macroscópica que se incluye en las simulaciones.

La implementación del método SPH para los cálculos en dos dimensiones y con simetría azimutal requiere el escribir las expresiones mostradas aquí en coordenadas cilíndricas. Por completitud, damos a continuación las ecuaciones de conservación de momento,

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM_{BH}r}{R(R-r_g)^2} + r\Omega^2 + \left(\frac{dv_r}{dt}\right)_{art}, \quad (3.12)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{GM_{BH}z}{R(R-r_g)^2} + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)_{art}, \quad (3.13)$$

$$\frac{d\ell}{dt} = 0, \quad (3.14)$$

donde nuevamente $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ y hemos considerado que el momento angular por partícula no cambia en el tiempo; finalmente para la energía ϵ , se tiene:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\left(\frac{P}{\rho}\right)\nabla \cdot \vec{v} + \left(T\frac{ds}{dt}\right)_{const}; \quad (3.15)$$

en esta última ecuación, T es la temperatura del sistema y s representa la entropía. El subíndice *const* indica que no estamos considerando calentamiento ni enfriamiento del disco mediante agentes externos, es decir $\Delta Q = 0$,

únicamente la interacción de energía interna del mismo, es decir el intercambio de ϵ por un trabajo PdV (proceso adiabático).

Para la viscosidad artificial se ha implementado la prescripción de Balsara [12], con la finalidad de minimizar los esfuerzos de corte en la evolución del disco. Las formas explícitas para la disipación de la aceleración y de la energía son, para la i -ésima partícula:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{i,art} = - \sum_{j \neq i} m_j \Pi_{ij} \nabla_i W_{ij}, \quad (3.16)$$

y

$$\left(T \frac{ds}{dt}\right)_{i,art} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} m_j \Pi_{ij} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (3.17)$$

En estas ecuaciones W es el *kernel* de la interpolación SPH y el término Π se define como:

$$\Pi_{ij} = \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) = (-\alpha_b \mu_{ij} + \beta_b \mu_{ij}^2), \quad (3.18)$$

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{h_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2/h_i^2 + \eta^2)} \frac{(f_i + f_j)}{2c_{ij}} & \text{si } (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) < 0; \\ 0 & \text{si } (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \geq 0; \end{cases} \quad (3.19)$$

y donde f_i es una función para la partícula i definida por:

$$f_i = \frac{|\nabla \cdot \vec{v}|_i}{|\nabla \cdot \vec{v}|_i + |\nabla \times \vec{v}|_i + \eta' c_i/h_i}. \quad (3.20)$$

El factor $\eta' \simeq 10^{-4}$ previene la existencia de divergencias numéricas, es decir que el denominador de (3.19) y (3.20) se anule por efectos de redondeo. h_i representa la longitud de escala y c_i representa la velocidad del sonido para la i -ésima partícula; $\alpha_b = \beta_b = \gamma/2$ son constantes del orden de la unidad, donde γ es el índice politrópico de la ecuación de estado.

La viscosidad artificial se utiliza en el método SPH para modelar choques debidos a ondas de presión que se generan al interactuar las partículas entre sí, y también para evitar la interpenetración de las partículas. También ayuda a reducir el ruido numérico espúreo. El modelo para la viscosidad empleado en este trabajo es tal que las viscosidades de corte son suprimidas cuando la compresión en el fluido es baja y la vorticidad alta $|\nabla \cdot \vec{v}| \ll |\nabla \times \vec{v}|$, pero sus efectos permanecen si la compresión domina el fluido $|\nabla \cdot \vec{v}| \gg |\nabla \times \vec{v}|$.

Como mencioné ya, el orden de magnitud del error de la función interpolada es del orden de h^2 . Cualquier cálculo utilizando SPH se inicia especificando la masa, la posición, la velocidad y la energía térmica de cada partícula. La resolución espacial de las simulaciones, así como el número de vecinos que contribuyen a las propiedades en un punto determinado de las simulaciones dependen únicamente del valor escogido para h . La eficiencia y los cálculos dependerán notablemente si h es escogido de tal forma que dependa de la densidad local, es decir de la cantidad de partículas que esten alrededor.

Para finalizar esta descripción del método *SPH* resulta necesario describir las funciones *kernel* pues son de suma importancia en el tratamiento de las simulaciones numéricas con este método. Un *kernel* muy utilizado es el que corresponde a una distribución Gaussiana en una o varias dimensiones. Sin embargo, ha resultado altamente efectivo en cuanto eficiencia en los procesos de cómputo, un *kernel* que utiliza funciones llamadas “funciones de ajuste” (*spline functions* en inglés), desarrolladas por Isaac Schöenberg en 1946 y empezadas a utilizar en métodos numéricos durante los 60’s.

El *kernel* que utilizamos es una adaptación del desarrollo realizado por Monaghan & Lattanzio en 1985 [54], adaptado para la condición de simetría azimutal.

$$W(r, h) = \frac{\sigma}{h^\nu} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}(r/h)^2 + \frac{3}{4}(r/h)^3 & \text{si } 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1; \\ \frac{1}{4}(2 - r/h)^3 & \text{si } 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2; \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.21)$$

En estas funciones, ν representa el número de dimensiones y σ es una constante de normalización que depende del número de dimensiones en el que se está trabajando, siendo ésta $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{7\pi}$ ó $\frac{1}{\pi}$ para 1, 2 y 3 dimensiones respectivamente. De nuevo el *kernel* descrito en la Ec. 3.21 tiene ciertas ventajas, su segundas derivadas son continuas por lo que no es sensible a errores cuando se aproximan las integrales de interpolación mediante sumas, es igual a cero cuando $r/h > 2$ y el orden del error es $\sim h^2$. Este error puede calcularse mediante una expansión en series de Taylor de $A(r')$ alrededor de \bar{r} en la Ecuación 3.1.

En nuestro caso, las simulaciones han sido realizadas en dos dimensiones ($\nu = 2$), por lo que utilizamos una constante de normalización con un valor de $\sigma = \frac{10}{7\pi}$, la variable r es la distancia medida desde el origen en coordenadas cilíndricas y h es el parámetro de normalización. Este parámetro se inicializa de la forma $h_i = 0.5r_g$, luego se evoluciona mediante el algoritmo:

$$h_n = \begin{cases} h_{n-1} + 0.1r_g & \text{si } N_p = 0, \\ 0.5h_{n-1} \left(1 + \sqrt{24/N_p}\right) & \text{si } N_p > 0; \end{cases} \quad (3.22)$$

donde el numerador de la fracción se debe a que siempre se ha de tener el mismo número de partículas vecinas que en nuestro caso es 24. Una partícula vecina j es aquella que se encuentra a una distancia d de la i -ésima partícula, tal que $d_{ij} < 2h_i$. El denominador N_p , representa la cantidad de partículas reales alrededor de una partícula.

3.2 El Código Numérico

Una vez descrita la manera en que se simula un gas por medio del método SPH, describiré el código empleado para hacer las simulaciones. Este código está escrito en el lenguaje *FORTRAN 77* y consiste en dos programas principales que evalúan varias sub-rutinas durante cada ejecución.

El primer programa se utiliza para generar las condiciones iniciales adecuadas, mientras que en el segundo programa las condiciones iniciales son evolucionadas en el tiempo. Las ejecuciones se han realizado en una computadora con un procesador Ultra Sparc 60 SUN y en otra con arquitectura Linux con un procesador dual Intel-Xeon. Dependiendo de la resolución deseada, las ejecuciones toman alrededor desde 10000 s hasta 27500, para simulaciones con ~ 1500 y ~ 4000 partículas respectivamente. Todos nuestros cálculos emplean el sistema de unidades mks.

3.2.1 Condiciones Iniciales (C.I.)

El ciclo de cómputo comienza definiendo los *kernels* que se utilizarán para hacer las simulaciones con SPH mostrados en la Ecuación 3.21. A continuación se definen las constantes y parámetros tales como la masa del agujero negro central, las constantes γ y K de la ecuación de estado y las constantes físicas G , M_{\odot} y c así como el número de vecinos de las partículas entre otras.

A continuación se define el potencial gravitatorio que en nuestro caso es un potencial pseudo-Newtoniano de Paczyński-Wiita, con alguna distribución de momento angular, ya sea $\ell = cte$, o bien $\ell = \ell(r)$ como se describió en el capítulo anterior. Una vez definido el potencial y la forma del mo-

mento angular, se calcula la velocidad de rotación Ω de las partículas y con ésta última se determina el tamaño inicial del intervalo de tiempo con el que arrancarán las simulaciones, que es una diezmilésima del tiempo dinámico del sistema definido a partir de $t_{din} = r_g/c$.

Cuando ya se impusieron las condiciones de movimiento de las partículas se genera una distribución toroidal de partículas en el plano r - z . El tamaño del toro quedará determinado por el *factor de llenado* del potencial gravitatorio; es decir, el intervalo de energías permitido para el conjunto de partículas, dado un potencial gravitatorio, que no es más que la constante de integración Φ_0 que aparece en la Ecuación 2.48 de la Sección 2.2. Este parámetro determina la extensión del toro como puede apreciarse en la Figura 2.6.

Como es natural al trabajar con agujeros negros, existe una frontera interna donde la materia pierde conexión espacio-temporal con el resto del universo en el que nos encontramos, esta frontera está definida en el código y equivale al horizonte de eventos o radio de Schwarzschild, $r_g = 2GM_{BH}/c^2$. Cualquier partícula que atraviese este radio, se considerará acretada, por lo que desaparecerá del cálculo y no será tomada en cuenta en las siguientes iteraciones.

A continuación, un generador de números aleatorios utilizando una técnica de Monte Carlo, permite crear una distribución de N partículas con un perfil toroidal en el plano r , z . Estas partículas son las que representarán al gas. Cada partícula tiene posición (\vec{r}) y velocidad (\vec{v}) definidas y a partir de éstas se le hace evolucionar en el tiempo.

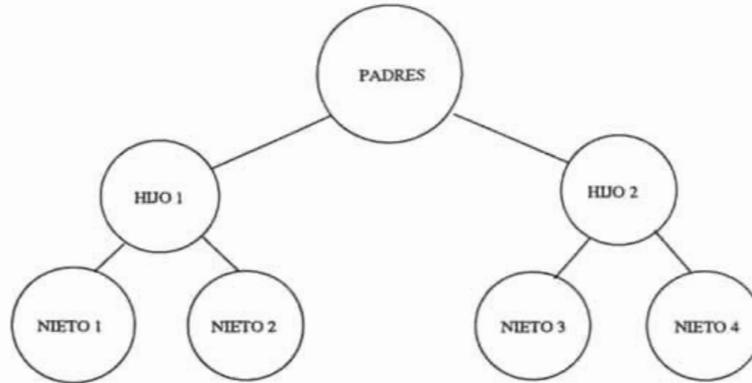


Figura 3.1: Ejemplo de un árbol binario, las interacciones se llevan a cabo por *niveles*, empezando por el nivel inferior, las partículas más próximas entre sí, “nietos”, conformarán una pareja que puede ser representada por un “hijo” que a su vez, al ser combinado con otro “hijo” próximo será representada por un “padre”. Entonces las cuatro partículas iniciales pueden ser representadas por una sola.

Para simular que esta colección de partículas representa un gas, se les hace interactuar entre sí. La manera de realizar esto es determinando las interacciones de la i -ésima partícula con sus vecinos más próximos. La manera más eficiente de realizar esta operación es por medio de un *árbol binario*. Aquí se utiliza una subrutina llamada *vecinos próximos* que establece una relación a través de las variables “padres”, “hijos” y “nietos”, a manera de hacer posible los cálculos numéricos. La idea de este algoritmo se ejemplifica en la Figura 3.1.

Supongamos que se tienen 4 partículas como las mostradas en la Figura 3.1 con la etiqueta “nietos”. Si deseamos calcular el centro de masa de las cuatro partículas etiquetadas como “nietos”, empezamos calculando el centro de masa de cada pareja de partículas, así podremos representar a las partículas “nieto 1” y “nieto 2” por medio de una sola partícula, etiquetada como “hijo 1”. La condición que hemos impuesto para que los nietos puedan interactuar entre sí es que ambos estén a cierta distancia mínima como

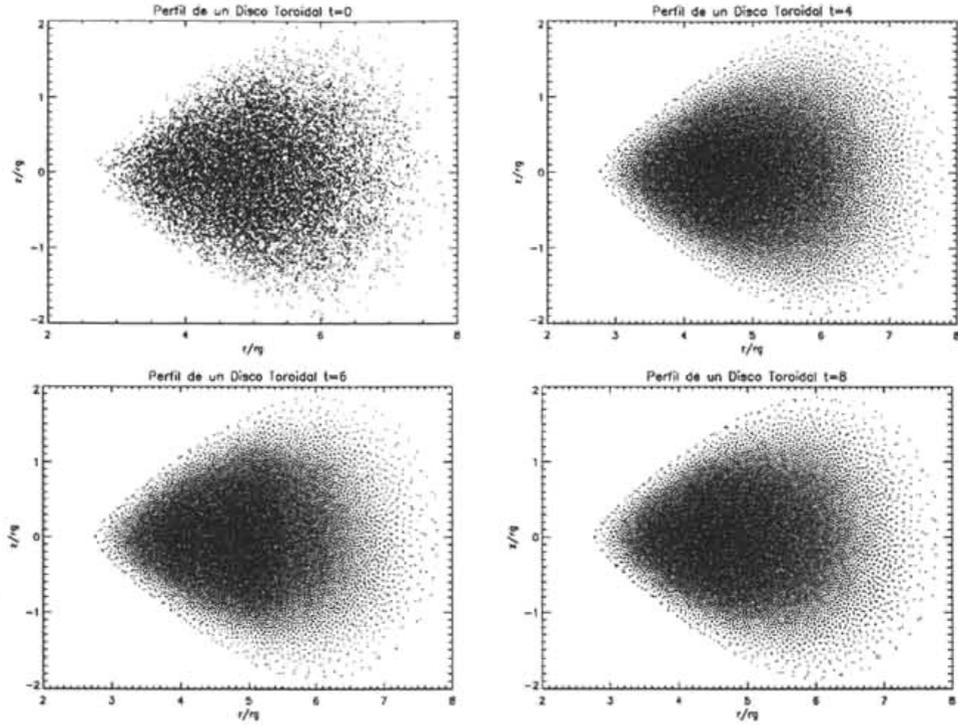


Figura 3.2: Relajación de las condiciones iniciales. En cada figura se muestra el perfil de un toro numérico utilizando el código SPH; cada punto representa a una *partícula* de gas. Se muestran cuatro instantáneas mostrando cómo se relajan las condiciones iniciales, desde un $t = 0$, hasta $t = 8$ veces el tiempo dinámico. El *locus* de densidad máxima se encuentra a $r = 4.25r_g$.

se describió al final de la Sección 3.1. Una vez hemos representado a los nietos por medio de las partículas etiquetadas “hijo 1” e “hijo 2”, podemos combinar ambos hijos, para representarlos por medio de una sola partícula “padre”, la cual tendrá las propiedades de las 4 partículas iniciales y en el ejemplo del centro de masa, representará el centro de masa del sistema. De manera análoga es posible calcular otras variables asociadas a la colección de partículas.

Al interactuar las partículas entre sí, sus propiedades físicas como velocidad, fuerza y energía interna (\vec{r} , \vec{v} , ϵ) van cambiando a lo largo del tiempo. A

partir de estos parámetros, se pueden determinar la energía interna y las fuerzas que actúan sobre cada “parcela de gas” representado por una partícula. Todos estos cálculos son realizados dentro de un gran ciclo en el tiempo, por lo que es posible seguir la evolución de la colección de partículas a diferentes tiempos como se muestra en la Figura 3.2.

La idea que está detrás de esta evolución temporal es la de relajar el sistema de tal forma que se consiga una distribución toroidal de partículas en el estado más cercano al equilibrio posible. Esto se consigue introduciendo en las ecuaciones de las fuerzas sobre cada partícula, un término de amortiguamiento que es proporcional a las velocidades radial y vertical de la partícula es decir $-\vec{v}_r/t_{damp}$ y $-\vec{v}_z/t_{damp}$ respectivamente. El término de amortiguamiento, t_{damp} se calcula a partir del inverso de la velocidad angular inicial $t_{damp} = 1/\Omega_0$ y altera la ley de rotación de las partículas. Durante todo el proceso, se mantienen constantes la entropía y la energía interna del gas, por lo que la ecuación de estado politrópica permanece inalterada.

La salida de este programa, es un conjunto de puntos que representan las partículas que serán utilizadas como condiciones iniciales (C.I.) en el siguiente paso. Estas partículas tienen una configuración toroidal en el estado más cercano al equilibrio y con un mínimo de ruido numérico.

3.2.2 Perturbando las C. I.

El segundo código es semejante al anterior en cuanto a la estructura y procedimientos numéricos. La diferencia entre los códigos estriba en que: (a) la distribución de puntos ya está dada y no es generada automáticamente, (b)

es introducida una perturbación, (c) dado que se desea evolucionar las partículas, se toman en cuenta los cambios de la energía interna del gas y (d) la salida del programa permite estudiar los cambios en el tiempo de los parámetros de la distribución. A pesar de estas diferencias, la idea general de ambos códigos es esencialmente la misma: evolucionar en el tiempo una distribución de *partículas* que representan al gas.

Dado que ambos códigos son semejantes, describiré la forma en que se han introducido las diferencias mencionadas, remitiendo al lector a los párrafos anteriores donde se encuentra la descripción del primer programa, que sigue la mismas prescripciones en los cálculos.

El ciclo de cálculos de la segunda parte del código se inicia de manera análoga a la primera parte, definiendo las leyes de rotación que regirán al movimiento de las partículas. El ciclo donde se generaba la distribución de partículas ha sido sustituido por un ciclo donde se incluye la distribución de partículas ya relajada producida por la primer parte del código.

Una vez que se tiene la distribución de partículas, los cálculos se inician con el método descrito en la primera parte, buscando los vecinos más próximos mediante el empleo de un árbol binario. Dado que hemos trabajado con dos clases de perturbaciones, impulsivas y periódicas, esto produce dos versiones del programa. Para la primera, que concierne a las perturbaciones impulsivas, se ha agregado un ciclo donde se impone a $t = 0$ una distribución de velocidades a las partículas. Por otro lado, para las perturbaciones periódicas, la versión del programa correspondiente incluye un término de fuerza perturbativa al ciclo donde se calculan las fuerzas ejercidas sobre ca-

da partícula. La forma funcional de estas perturbaciones será descrita con detalle en el capítulo siguiente. En ambas versiones del código, se ha suprimido la fuerza de amortiguamiento ya mencionada en 3.2.1. debido a que las condiciones iniciales han sido ya relajadas.

Otra de las cosas en que difiere este programa es en que toma en cuenta el cambio en la energía interna del gas. En este caso ya no se tiene un fluido isoentrópico (pero si adiabático) puesto que existen cambios en la entropía del sistema, por lo que la ecuación de estado utilizada es:

$$P_i = (\gamma - 1)\rho_i\epsilon_i, \quad (3.23)$$

donde al igual que antes, γ es el índice politrópico, ϵ_i y ρ_i representan la energía interna y la densidad, para el i -ésimo punto dentro del disco.

Este programa arroja varios archivos de salida en los que está contenida información que permite observar la evolución del disco en el tiempo. Básicamente las salidas son archivos con los datos de las posiciones de las partículas en el plano r - z en los se puede seguir una instantánea de cada paso de la evolución del disco.

Por otro lado están los archivos donde se encuentra la información sobre la evolución temporal de los parámetros importantes referentes al disco como la masa, la tasa de acreción sobre el agujero negro, la densidad, la velocidad del sonido, la posición del centro de masa y las energías cinética, interna y potencial.

Los datos no estan espaciados igualmente en el tiempo, debido a que el paso de tiempo es determinado atendiendo tres criterios: cinemático, dinámico

y termodinámico. El primero se determina usando la longitud característica h_i con la velocidad de la i -ésima partícula $dt_1 = h_i/v_i$, para el segundo se utiliza h_i de nuevo y se calcula usando la fuerza total de la i -ésima partícula de la forma $dt_2 = (h_i/f_i)^{\frac{1}{2}}$ y finalmente el tercero se determina usando la velocidad del sonido y h_i de la forma: $dt_3 = h_i/cs_i$. El paso de tiempo utilizado al final será el mínimo de estos tres tiempos. Estos datos serán analizados posteriormente con la finalidad de buscar frecuencias asociadas a oscilaciones inducidas por las perturbaciones.

Durante la implementación del programa, hemos verificado que este programa no introduzca ningún ruido a la simulación, para lo cual hemos realizado algunas ejecuciones donde hemos suprimido las perturbaciones.

3.2.3 Análisis de los Datos

El análisis de los datos se hizo utilizando las rutinas de IDL existentes. Dado que deseamos buscar frecuencias asociadas a las oscilaciones inducidas del disco de acreción, se hace necesario utilizar un método numérico para determinar tales frecuencias, siendo éste la transformada rápida de Fourier (FFT). Para poder utilizar este método numérico, los datos deben de cumplir dos condiciones:

- (a) que estén igualmente espaciados en el tiempo y
- (b) que el número de datos sea una potencia de 2, por ejemplo $2^{14} = 16384$.

Como el paso del tiempo del programa es el mínimo de tres pasos posibles y además se tiene un número arbitrario de partículas (dependiendo de la

resolución deseada), los datos de salida no cumplen las condiciones (a) y (b) expuestas arriba. Entonces se hace necesario interpolarlos primero para luego hacer el análisis con la FFT.

La interpolación se hizo con la rutina INTERPOL de IDL, esta rutina permite convertir un arreglo de malla irregular en uno de malla regular. Básicamente se hace un arreglo de N elementos, donde N debe de cumplir la condición (b) para la FFT. Este arreglo está escalado al mayor valor posible de la variable independiente que en nuestro caso es el tiempo t . Entonces, el arreglo x, t de m elementos al cabo de la interpolación queda como un arreglo x', t' de 2^n elementos.

Una vez se han interpolado los datos se calcula la FFT de los mismos. La FFT es un algoritmo eficiente para calcular transformadas discretas de Fourier y fue desarrollado en 1965 por Cooley y Tukey. La transformada discreta de Fourier, $F(u)$ de N elementos, para una función unidimensional $f(x)$ se define como:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp(2i\pi ux/N). \quad (3.24)$$

Finalmente para calcular la frecuencia i -ésima, se empleó el algoritmo mostrado a continuación:

$$f_i = \frac{N_i - 1}{N\Delta t'}. \quad (3.25)$$

Capítulo 4

Estudio de Estabilidad Ante Perturbaciones

En este capítulo se describirán las consideraciones sobre las perturbaciones introducidas a un sistema disco grueso + objeto compacto.

Básicamente las perturbaciones pueden originarse debido a (a) el movimiento del sistema toro + objeto compacto en el medio interestelar, (b) campos magnéticos [42] y c) emisión de ondas gravitacionales [95]. El primer proceso es lo que se conoce como acreción de Bondi, que en el caso relativista corresponde a la solución encontrada por J. Michel en 1972 [52].

Las perturbaciones pueden tener una forma general que no atienda necesariamente una condición de simetría. Sin embargo considerando el origen de las perturbaciones, se puede pensar como primera aproximación en perturbaciones puramente radiales y radiales–periódicas. En el caso de la acreción esférica estudiada por Michel, las perturbaciones son puramente radiales, y pueden inducir situaciones que provocarán inestabilidades radiales. Estas

inestabilidades de existir, pueden tener consecuencias catastróficas, induciendo el colapso completo del sistema y serán descritas con detalle en la siguiente sección.

En lo que corresponde a las perturbaciones periódicas inducidas por los campos magnéticos o bien por la emisión de ondas gravitacionales, dado que la fuente central puede estar girando, se tiene una perturbación que se repite de acuerdo al período del objeto central. Estas perturbaciones pueden inducir oscilaciones en el disco de acreción, como lo han propuesto recientemente Lee, Abramowicz y Kluźniak [42].

En la primera sección de este capítulo se describirá el estudio ante las perturbaciones radiales impulsivas, mientras que en la sección siguiente se presenta el estudio ante perturbaciones radiales periódicas. El estudio de las perturbaciones, se realiza utilizando las distribuciones de momento angular constante y no constante mencionadas en la Sec. 2.3.

4.1 Perturbaciones Radiales Impulsivas

Para estudiar las inestabilidades se ha modelado un disco grueso de tal forma que su potencial gravitacional efectivo esté por debajo de la energía potencial mínima necesaria para mantener a las partículas ligadas al agujero negro, en una última órbita circular estable (ver el panel superior de la Figura 4.1 mas adelante). Este potencial se determina en función del término que llamamos *factor de llenado* Φ_0 en el Cap. 2., y que permite construir toros de diferente tamaño, es decir, distribuciones diferentes de material que llenan el lóbulo de Roche del sistema disco + objeto compacto.

Como es bien sabido, en sistemas binarios existe un punto, llamado el punto interior de Lagrange L_1 , en la superficie equipotencial gravitacional localizado a cierta distancia llamada radio o límite de Roche R_{lo} del objeto central, donde existe un balance entre las fuerzas gravitacionales de las componentes y la fuerza centrífuga. En nuestro caso es válido hacer una analogía a un sistema binario, considerando el sistema objeto central+disco y que el disco llena un lóbulo de Roche.

Entonces un toro delgado será más estable ante las perturbaciones que un toro grueso, debido a que este último acretará material sobre el agujero negro más fácilmente, es decir habrán partículas que ante una perturbación *caerán* inexorablemente al agujero negro, modificando el campo gravitacional de tal forma que los puntos de Lagrange estén más alejados del objeto central. Esto permitirá que sea acrezada una mayor cantidad de material, lo que finalmente conllevará al colapso del sistema y su destrucción completa en una escala de tiempo dinámica.

Esto se ilustra de manera esquemática en la Figura 4.1, donde se muestran dos potenciales gravitacionales con un objeto central de masa diferente. En la parte superior el potencial gravitacional corresponde a un agujero negro de $2.5M_{\odot}$ y en la parte inferior uno de $2.65M_{\odot}$. En el panel superior, el disco está ligado al potencial gravitacional, el factor de llenado es $\Phi_0 = W_s$ y está por debajo de la barrera del potencial que corresponde a $\Phi_0 = W_0$. Cuando la materia es acrezada, la masa del agujero negro aumenta y el potencial se modifica hasta que $\Phi_0 > W_0$ entonces, el disco se expande y ocurre una pérdida de masa a través del borde interno localizado en R_i , cuando $R_i = R_{lo}$.

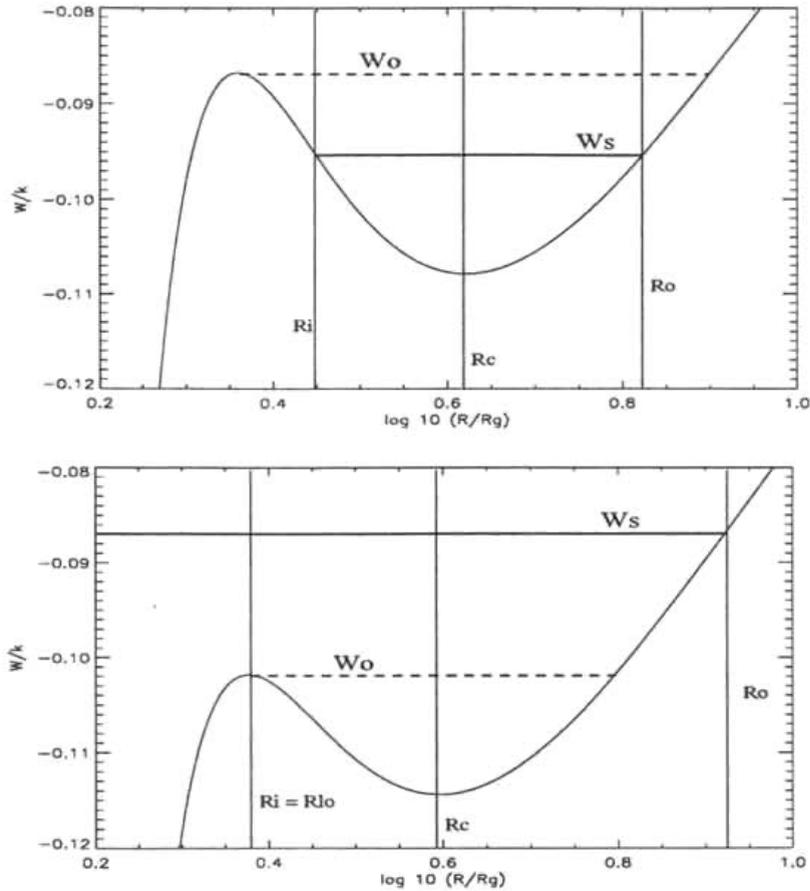


Figura 4.1: Un disco típico que no rebalsa su lóbulo de Roche (panel superior) y uno que sí lo rebalsa (panel inferior). En ambos paneles se muestra un corte meridional de la estructura del potencial gravitacional. El panel superior muestra el potencial correspondiente a un agujero negro de $2.5M_{\odot}$, mientras que el panel inferior a un agujero negro de $2.65M_{\odot}$ donde hemos exagerado la acreción, a fin de hacer notar la modificación en la estructura del potencial gravitacional. Nótese como el radio del lóbulo de Roche R_{lo} se iguala al radio interno del disco ($R_i = R_{lo}$), cuando se modifica el potencial gravitacional, permitiendo la acreción de material hacia el agujero negro. En ambos paneles $k = c^2/2$.

La inestabilidad radial fue descubierta por Abramowicz, Calvani & Nobili en 1983 [4] en el contexto de discos de acreción orbitando alrededor de agujeros negros. Inmediatamente luego del descubrimiento, se empezaron a hacer estudios sobre los mecanismos que podían estabilizar este fenómeno. Al poco tiempo en que se publicó este resultado, Wilson [93] en 1984 investigó la existencia de este fenómeno en el contexto de un agujero negro de Kerr, concluyendo que la rotación del agujero negro suprimía la inestabilidad. Nishida, Lanza, Eriguchi y Abramowicz [58] re-investigan el problema utilizando las ecuaciones de campo de Einstein, pero considerando la autogravedad del sistema. En esta publicación, Nishida *et. al.* concluyen nuevamente que la inestabilidad aparece en períodos de tiempo cortos y por primera vez se propone que este mecanismo podría explicar fuentes asociadas a estallidos de rayos gamma a partir de la coalescencia de estrellas de neutrones.

Uno de los parámetros que se había asumido constante en el toro es el valor del momento angular de las parcelas de gas que lo componen. Uno de los trabajos pioneros en ese sentido, donde se reporta que si el momento angular intrínseco del disco aumenta con el radio se obtiene un disco estable, es el de Daigne & Mochkovitch [19]. Ellos proponen también que el colapso de uno de estos sistemas puede explicar las energías observadas en explosiones de rayos gamma. Masuda & Eriguchi [50] utilizando SPH, tomando en cuenta la autogravedad del disco y utilizando diferentes distribuciones de momento angular demostraron que para discos muy masivos la inestabilidad radial conducía los sistemas al colapso.

Tomando en cuenta nuevamente una distribución de momento angular con una métrica de Kerr, Abramowicz, Karas y Lanza [5] encontraron que si

el agujero negro giraba rápidamente la inestabilidad radial desaparecía. Este estudio fue realizado sin tomar en cuenta la autogravedad del sistema a diferencia del realizado por Masuda & Nishida quienes toman en cuenta ambos factores concluyendo que los discos autogravitantes y con una distribución de momento angular son inestables. Los resultados obtenidos por varios de los autores citados aquí fueron también confirmados por Lu, Cheng, Yang & Zhang [44].

Esta inestabilidad radial permite una posible explicación para fenómenos en los que intervienen intercambios de masa en escalas de tiempo pequeñas (pocos milisegundos para un agujero negro de masa estelar) lo que implica que esta inestabilidad debe ocurrir antes que cualquier otro proceso. La energía puede ser extraída de este sistema vía dos reservorios: la acreción del material en el agujero negro y la energía rotacional del agujero negro que puede ser extraída vía el mecanismo Blandford–Znajek [14]. Las energías son del orden de 10^{53} – 10^{54} erg, dependiendo de la masa del disco y de las propiedades (spin y masa) del agujero negro y es suficiente para explicar las energías observadas en muchos GRBs. En este contexto son importantes las aportaciones realizadas por Font & Dainge [24], quienes argumentan que el motor central de un GRB es un disco grueso alrededor de un agujero negro y que el proceso de colapso de un sistema tal estaría asociado a la inestabilidad radial. En este estudio ellos utilizan un código numérico totalmente relativista con la métrica de Schwarzschild y con momento angular constante concluyendo que los discos son inestables. Finalmente, en un estudio más reciente [25], los mismos autores investigan esta inestabilidad utilizando la métrica de Kerr confirmando los resultados previos.

Un resumen de los criterios de inestabilidad dinámicos existentes en discos de acreción gruesos se enlista en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Criterios Dinámicos de la Inestabilidad Radial

Criterios de estabilidad del disco	Estable	Inestable
Distribución de ℓ	$\ell \propto r^\nu$ ($\nu > 0$)	$\ell = \text{const}$
Rotación del objeto central	Si ($a \neq 0$)	No ($a = 0$)
Gravedad del sistema	sin Autogravedad	con Autogravedad
Masa del objeto central	$M_{BH} = \text{const}$	$M_{BH} \neq \text{const}$

Hay que hacer notar el hecho de que un disco grueso ha sido propuesto para explicar la emisión de radiación por medio de chorros relativistas que se forman en la parte polar del disco. En esta región, las superficies isobáricas formarán *toberas* que colimarán la radiación [3]. El tamaño de la tobera queda definido dependiendo de la distribución de momento angular. Esto fue investigado por Zurek y Benz [97] haciendo simulaciones numéricas en tres dimensiones. Las toberas más abiertas corresponden a distribuciones de momento angular no constante, mientras que las toberas más cerradas corresponden a discos con momento angular constante.

4.1.1 El Modelo

Esta parte del trabajo ha servido básicamente para calibrar los modelos numéricos y verificar el código numérico.

En nuestro modelo, a las partículas que conforman el toro numérico de las condiciones iniciales, se les ha perturbado con una velocidad radial, a fin de

inducir un movimiento de *caída* hacia el objeto central. La forma funcional de esta velocidad corresponde como ya he dicho a la solución encontrada por J. Michel en 1972 [52], para la acreción esférica de material alrededor de un agujero negro y se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= -\eta \cdot c \sqrt{\frac{r_g}{R}} \hat{\mathbf{r}} \\ \vec{v}_z &= -\eta \cdot c \sqrt{\frac{r_g}{R}} \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde η es un parámetro de intensidad en la fuerza de perturbación, r_g es el radio de Schwarzschild del objeto central y $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ es la distancia al objeto central.

Para suprimir la inestabilidad radial e investigar el comportamiento dinámico del disco, se ha ejecutado una versión del programa donde hemos suprimido la actualización de la masa del agujero negro en cada distribución de momento angular. El resumen de los modelos con perturbaciones radiales se describe en la Tabla 4.2. En todos los modelos el objeto central tiene una masa de $M_{BH} = 2.5M_{\odot}$; mientras que γ y K toman los valores definidos en la Sec. 2.2.

La primer columna indica el modelo en cuestión, luego se indica el cociente entre la masa del disco y la masa del agujero negro (M_d/M_{BH}), seguido del valor o distribución de momento angular utilizado según sea el caso (ℓ). Luego se indican la posición del punto de máxima densidad y presión que hemos llamado *centro del disco* (R_c), la densidad media del mismo $\langle \rho \rangle$, el período orbital de una partícula de prueba en el centro del disco, el valor del parámetro de la perturbación (η), el número de puntos de cada simulación N y finalmente si se tomó en cuenta la actualización de la masa del agujero negro.

Tabla 4.2: Modelos con Perturbaciones Radiales

Modelo	M_d/M_{BH}	$\ell/r_g c$	R_c/r_g	$\langle \rho \rangle$ (kg m^{-3})	t_{din} (ms)	η	N	Actualización M_{BH}
(a)	0.14	1.9197	4.25	2.63×10^{16}	1.462	0.1	4082	SI
(b)	0.14	1.9197	4.25	2.63×10^{16}	1.462	0.1	4082	NO
(c)	0.03	$\propto r^{0.1}$	5.10	4.33×10^{15}	2.021	0.1	3237	SI
(d)	0.03	$\propto r^{0.1}$	5.10	4.33×10^{15}	2.021	0.1	3237	NO

4.1.2 Resultados

A partir de las simulaciones numéricas hemos encontrado resultados semejantes a los que otros grupos de investigación como Zanotti *et. al* [95] y Font & Daigne [23], [24] han encontrado previamente. La inestabilidad radial aparece cuando se tienen discos con distribución de momento angular constante. Esta inestabilidad aparece en escalas de tiempo del orden del tiempo dinámico (t_{din}) es decir, al cabo de pocas órbitas alrededor del objeto central y como ya he apuntado antes, tiene consecuencias catastróficas para el sistema. Esto se puede observar en la Fig. 4.2, donde se muestra la variación de la masa del disco y de la densidad como función del tiempo. La inestabilidad radial aparece alrededor de $\sim 3t_{din}$. A partir de este tiempo nótese como la masa del disco va disminuyendo y a medida que disminuye, aumenta la masa del agujero negro central modificando el potencial gravitacional hasta que el disco es acretado en su totalidad al cabo de ~ 0.06 s, o sea unas 40 veces el tiempo dinámico apuntado en la Tabla 4.2.

Por otro lado, en la Fig. 4.3 se muestran los resultados de las simulaciones realizadas utilizando una distribución de momento angular no constante,

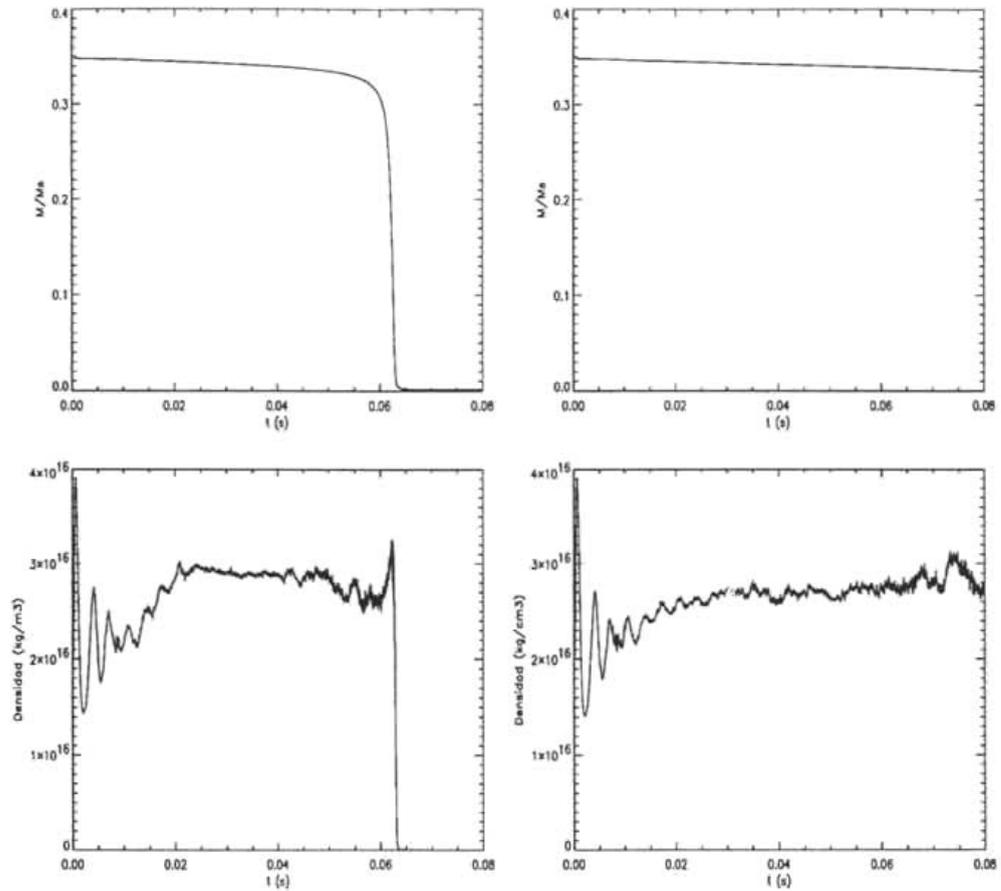


Figura 4.2: En los paneles de arriba se muestra la evolución de la masa del disco en el tiempo. La masa se ha graficado en unidades de M_{\odot} . En los paneles de abajo se muestra el comportamiento de la densidad en el tiempo. Las gráficas de la derecha corresponden a simulaciones donde se ha suprimido la actualización de masa del agujero negro, [modelo (b)]. Ambos paneles corresponden a simulaciones con momento angular constante. Nótese cómo en el panel izquierdo [modelo (a)] al cabo de ~ 0.06 s. se presenta la inestabilidad radial, es decir, el disco es acretado completamente por el objeto central.

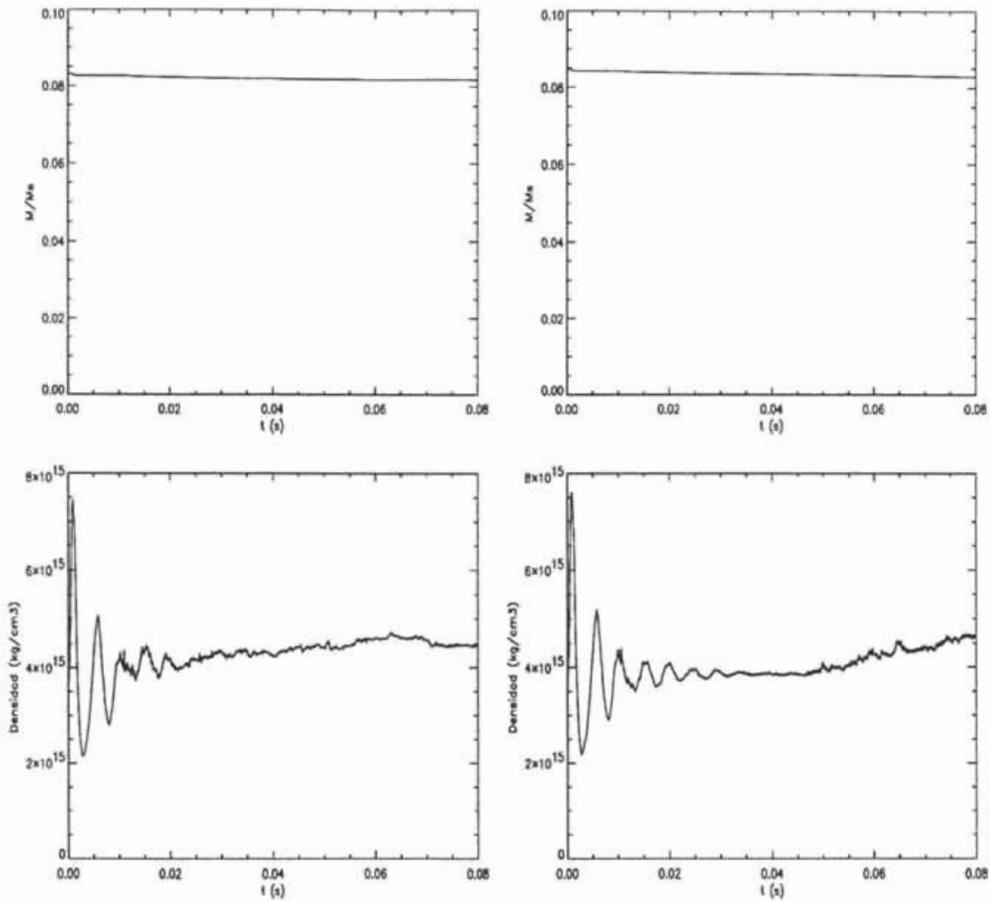


Figura 4.3: Las figuras de arriba corresponden a la evolución de la masa del disco en el tiempo. La masa se ha graficado en unidades de M_{\odot} . En la parte inferior, se muestra la evolución de la densidad en el tiempo. Ambos paneles corresponden a simulaciones con una distribución de momento angular no constante. Al igual que en la Fig. 4.2, en las figuras del lado derecho [modelo (d)], se ha suprimido la actualización de la masa del agujero negro. Las figuras del lado izquierdo corresponden al modelo (c). Nótese cómo en ambos casos, se ha suprimido la inestabilidad radial.

tomando en cuenta la actualización de la masa del agujero negro (paneles de la izquierda) y suprimiendo la actualización de masa (paneles de la derecha). La disminución de la masa del disco que se aprecia en la figura se debe a la acreción, puesto que lo que hemos inhibido en el programa es la actualización de la masa del agujero negro. En estas últimas simulaciones hemos utilizado una distribución de momento angular con la forma:

$$\ell(r) = \ell_k \left(\frac{r}{r_0} \right)^{0.1}, \quad (4.2)$$

donde $\ell_k = 1.92r_g c$ y $R_0 = 2.2r_g$. En este caso concluimos que la inestabilidad radial ha sido suprimida tal y como puede apreciarse en las figura 4.3. Nótese como la masa (panel superior) y la densidad del disco (panel inferior) permanecen constantes, para el caso en que ha sido suprimida la actualización de masa en el agujero negro (paneles de la derecha) y en el caso donde no ha sido suprimida (paneles de la izquierda).

4.2 Oscilaciones Naturales de un Disco

Para entender el comportamiento oscilatorio de un disco, hemos realizado simulaciones donde hemos evolucionado las condiciones iniciales en el tiempo incluyendo una perturbación impulsiva muy pequeña. Esto lo hemos hecho para saber cómo el espesor del disco modifica las frecuencias de oscilación radiales. En este sentido, para verificar el comportamiento oscilatorio, hemos realizado tres simulaciones por cada distribución de momento angular con discos de diferente tamaño, chico, mediano y grande.

Si consideramos una partícula de prueba que está girando en órbita circular alrededor de un objeto central axisimétrico, sufre una perturbación radial

infinitesimal que la saca de su estado en equilibrio, observaremos que la partícula oscilará radialmente alrededor de ésta órbita. Supondremos ahora que se tiene un conjunto de partículas de prueba girando alrededor de un objeto central y que éstas se encuentran ligeramente fuera del radio de la órbita circular, como es el caso de nuestra colección de partículas que conforman un toro con radio interior chico. Entonces se observará que este conjunto de partículas oscilará con una frecuencia muy cercana a la frecuencia epicíclica.

El movimiento de una partícula en una órbita perturbada radialmente es periódico a lo largo de la trayectoria circular, un ciclo completo se llama una oscilación epicíclica, y su frecuencia es la frecuencia epicíclica radial κ . Esta frecuencia es muy importante para entender las oscilaciones de un disco. La distribución radial en discos donde se toman en cuenta los efectos relativistas es bastante diferente de la de los discos Newtonianos. Esta diferencia introduce algunas propiedades oscilatorias en discos alrededor de agujeros negros. La ecuación que describe las oscilaciones radiales se obtiene a partir de la ecuación de movimiento radial:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{d\Phi_{eff}}{dr}. \quad (4.3)$$

Perturbando esta ecuación se obtiene la conocida ecuación para un oscilador armónico. Para nuestro caso el potencial efectivo Φ_{eff} , es el potencial pseudo-Newtoniano de Paczyński-Wiita (Ec. 2.42), es decir $\Phi_{eff} = \Phi_{PN_{eff}}$. En esta ecuación se puede ver que si la derivada de $\Phi_{PN_{eff}}$ se hace cero, se obtienen órbitas circulares, porque no habría aceleraciones radiales, es decir, se tiene el equilibrio centrífugo de la partícula. En este caso, la frecuencia a la que la partícula gira es:

$$\nu_{PN} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM_{BH}}{r(r-r_g)^2}}, \quad (4.4)$$

Si introducimos una perturbación $\Delta r = r - r_0$, la ecuación (4.3) toma la forma, utilizando una expansión en series de Taylor a primer orden:

$$\frac{d^2 \Delta r}{d\tau^2} = - \left(\frac{d^2 \Phi_{eff}}{dr^2} \right)_0 \Delta r, \quad (4.5)$$

donde las derivadas respecto a r se hacen a un valor de momento angular fijo ℓ , y el subíndice 0, denota que se evalúa en el radio de la órbita circular. Esta ecuación entonces, nos muestra que la partícula de prueba oscila con una frecuencia dada por $(\frac{d^2 \Phi_{eff}}{dr^2})_0^{1/2}$ que es justamente la frecuencia epicíclica. Para el caso que mostramos aquí toma la forma (para $\ell = cte$):

$$\kappa(r)_{PN} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM_{BH}(r - 3r_g)}{r(r - r_g)^3}} = \nu_{PN} \sqrt{\frac{r - 3r_g}{r - r_g}}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, cuando se tiene una distribución de momento angular no constante, como la mostrada en la Ec. 4.2, la función que representa las frecuencias epicíclicas está dada por:

$$\kappa(\ell \neq cte)_{PN} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-2GM_{BH}}{(r - r_g)^3} + \Psi r^{2\nu-4}}, \quad (4.7)$$

donde

$$\Psi = \frac{l_0^2}{2r_0^{2\nu}} \cdot (2\nu - 2)(2\nu - 3), \quad (4.8)$$

Para nuestras simulaciones hemos empleado un exponente $\nu = 0.1$, mientras que l_k y r_0 son los que se anotaron a continuación de la Ec. 4.2. en la sección anterior. En la Figura 4.4 se muestra la dependencia radial de las frecuencias epicíclicas para los casos (a) momento angular constante que se representa con la línea continua (Ec. 4.6), y (b) distribución de momento angular no constante ($\nu = 0.1$), representada por la línea discontinua (Ec. 4.7).

El desarrollo aquí presentado es válido cuando se aplica a partículas puntuales. En nuestro caso hemos generalizado esto a cada partícula que conforma el disco en el método numérico SPH. Cuando queremos representar al

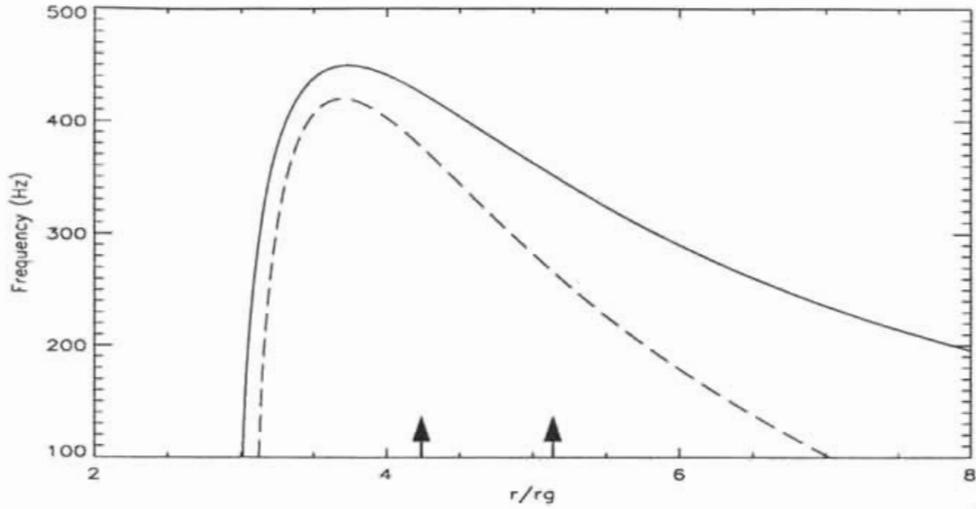


Figura 4.4: En esta figura se muestran las curvas correspondientes a las frecuencias epicíclicas radiales para una partícula moviéndose alrededor de un objeto compacto de $2.5M_{\odot}$. Se ha utilizado el potencial de Paczyński–Wiita. La línea sólida representa las frecuencias para una partícula con una distribución de momento angular constante, mientras que la línea discontinua representa a una partícula con una distribución de momento angular que varía con r . Nótese las frecuencias que corresponden a: (a) el caso de una partícula localizada en $r = 4.25r_g$ y (b) una partícula localizada a $r = 5.1r_g$ (señaladas con las flechas) y compárense con el panel superior de la Fig. 4.5 y 4.6 respectivamente.

conjunto de partículas es decir al disco, obtenemos lo que hemos llamado el *centro del disco* que se ubica cerca del punto de máxima densidad y presión.

En las simulaciones que hemos realizado se encontró que la frecuencia de las oscilaciones radiales disminuye a medida que el disco se hace mas grueso. Estos resultados son comparables a los obtenidos por Rezzolla, Yoshida, Maccarone & Zanotti [71] y son reportados aquí por primera vez en la literatura de forma explícita para discos de diferentes grosores.

Tabla 4.3: Modelos de Discos de Diferente Tamaño

Modelo	M_d/M_{BH}	$\ell_0/r_g c$	R_c/r_g	$\Phi_0/(c^2/2)$	κ Hz	N
chico	3.0×10^{-8}	1.9197	4.25	-0.1183	425	2337
medio	5.9×10^{-3}	1.9197	4.25	-0.1060	355	2886
grande	0.14	1.9197	4.25	-0.0841	290	4082
chico	1.6×10^{-8}	$\propto r^\nu$	5.10	-0.0749	275	2317
medio	2.0×10^{-3}	$\propto r^\nu$	5.10	-0.0678	240	1866
grande	0.3	$\propto r^\nu$	5.10	-0.0595	200	4082

Un resumen de los resultados se presenta en la Tabla 4.3. En esta tabla se enlistan las propiedades de cada disco. En la primer columna se compara la masa de cada disco con la del agujero negro (M_d/M_{BH}), seguido de la distribución de momento angular utilizada o bien del valor cuando el momento es constante ($\ell_0/r_g c$), el centro o punto de máxima densidad y presión del disco (R_c/r_g), el valor del factor de llenado [$\Phi_0/(c^2/2)$], la frecuencia máxima (en Hz) observada en el espectro de Fourier del centro de masa f , y el número de partículas que se empleó en cada ejecución (N). En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran los resultados de cada simulación. En ambas figuras en la columna izquierda se muestra el perfil de un disco grueso en el plano r - z , mientras que en la columna derecha se muestra el espectro de potencia (FFT) del movimiento del centro de masa en la coordenada radial r .

En ambas figuras, el panel superior muestra un disco con un radio interno chico $r_i < r_g$, mientras que en los paneles medio e inferior, se muestran dos discos, con radios internos $r_i \sim r_g$ y $r_i > r_g$ respectivamente, localizados a la misma distancia del objeto central.

En el caso de los discos con momento angular constante ($\ell=\text{cte}$, Fig. 4.5) se puede observar que en el caso del disco chico, este oscila a una frecuencia

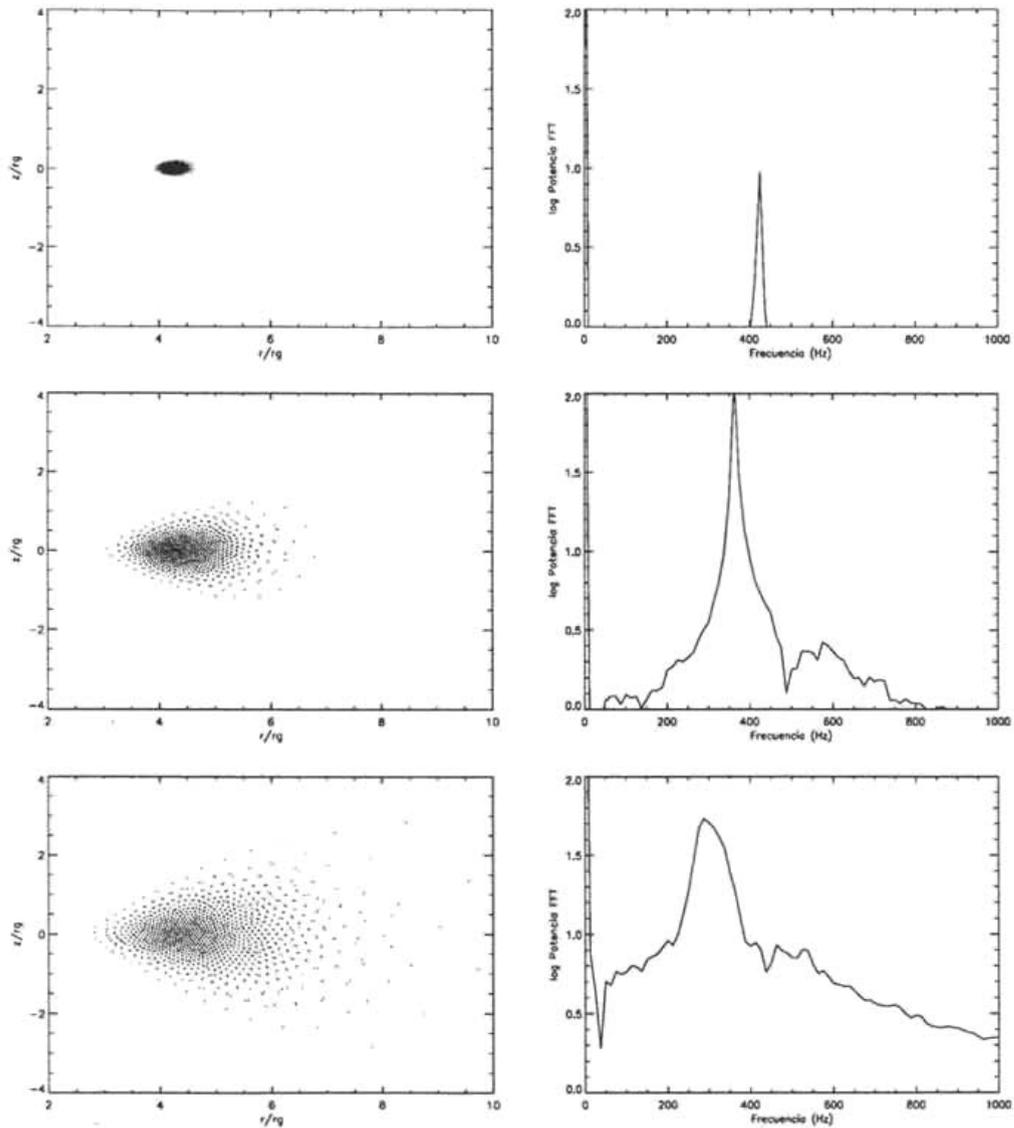


Figura 4.5: En esta figura se muestra la forma en que varía la frecuencia fundamental de oscilación radial para discos de diferentes tamaños, con centro en $r = 4.25r_g$. En la columna izquierda se muestra un corte meridional en el plano r - z donde se puede apreciar el tamaño del disco. Al otro lado se tienen las gráficas del $\log(\text{FFT})$ del movimiento del centro de masa del disco, las simulaciones han sido realizadas con aproximadamente el mismo número de partículas. Nótese cómo, conforme el disco se hace más grueso, la frecuencia de oscilación disminuye. Los datos de cada modelo pueden consultarse en la Tabla 4.3.

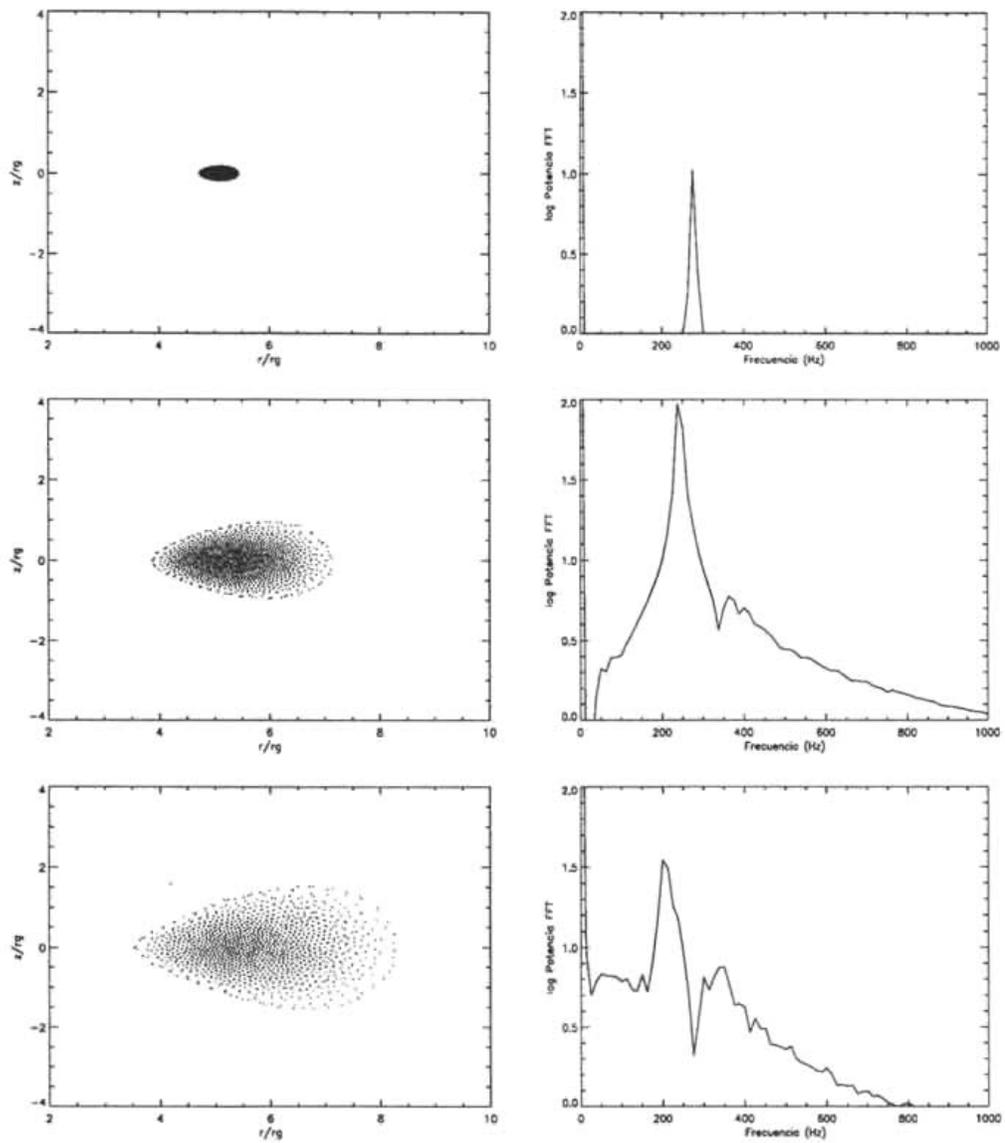


Figura 4.6: En esta figura se muestra la forma en que varía la frecuencia epicíclica radial de oscilación para discos de diferentes tamaños con una distribución de momento angular no constante dentro del disco. El centro de los discos se localiza a $r = 5.1r_g$. Véase pie de Figura 4.5

cerca de la frecuencia epicíclica que corresponde a una masa oscilando alrededor de un $r_0 = 4.25r_g$. Esto puede verificarse en la curva punteada de la Figura 4.5. Al situarse en el radio mencionado, la frecuencia de oscilación será ~ 425 Hz y esto puede verse en el espectro de frecuencias de la FFT mostrado en el panel superior de la figura 4.4. Como puede apreciarse, el pico de máxima potencia corresponde a una $\nu \sim 425$ Hz.

Para los discos mas gruesos (paneles medio e inferior), se encontró, como puede apreciarse en el espectro de potencias del centro de masa, que las frecuencias a las que oscilan los centros de masa, se han desplazado hacia frecuencias más bajas de las que corresponden a una partícula puntual orbitando el objeto central. Para el toro medio, la frecuencia es de ~ 350 Hz, mientras que el toro mayor oscila a unos 300 Hz (panel inferior).

Cosa similar ocurre con los discos que tienen una distribución de momento angular no constante (Ec. 4.2). Como puede verse al comparar las curvas mostradas en la Fig. 4.4, si se tiene una distribución de momento angular, las frecuencias de oscilación serán menores a las que corresponde el caso con momento angular constante. Esto puede verse al comparar las Figuras 4.5 y 4.6, ya que aunque el disco con momento no constante está en una órbita mas alejada, éste oscila a una frecuencia aún menor que la que le corresponde a un disco con momento angular constante. Como puede apreciarse de las Figuras 4.5 y 4.6, el disco chico oscila a la frecuencia epicíclica correspondiente ~ 280 Hz, y conforme los discos aumentan su radio interno, esta frecuencia disminuye hasta ~ 200 Hz, para el caso del disco más grueso.

Podemos concluir entonces que a medida que el disco aumenta su grosor, la frecuencia fundamental de las oscilaciones radiales de éste disminuyen sin importar la distribución de momento angular que se esté utilizando.

4.3 Perturbaciones Radiales Periódicas

Finalmente en el presente estudio hemos decidido investigar como se comporta el disco bajo perturbaciones periódicas. Las oscilaciones y la existencia de ondas son fenómenos ubicuos en muchos sistemas físicos. En los discos de acreción, al igual que en otros sistemas, es de esperar que existan diferentes tipos de movimientos oscilatorios. Estos movimientos son en general, el resultado de fuerzas restauradoras.

Como se mostró en la sección anterior, un elemento de fluido que se desplace hacia fuera en la dirección radial retornará a su radio original debido a una fuerza restauradora debida a la rotación. Las oscilaciones asociadas a estas fuerzas restauradoras son las llamadas oscilaciones epicíclicas que describimos en la sección anterior. Como discutiré a continuación, muchos autores (Rezzolla, Yoshida & Zanotti [70], Rezzolla, Yoshida Maccarone & Zanotti [71] y Montero, Rezzolla & Yoshida [56]) han asociado estas oscilaciones del disco a ondas de presión acústicas desplazándose dentro del disco (modos-p).

Otros modos representativos son los asociados a ondas inerciales gravitacionales (modos-g) propuestos por Nowak *et. al.* [59] y a ondas acústicas inerciales llamadas ondas de corrugación. Las ondas asociadas a los modos-g se deben a oscilaciones verticales del disco y la fuerza restauradora es la

componente vertical de la gravedad en el disco. Esta onda puede ser interpretada como las ondas que se producen en la interfase entre dos fluidos diferentes. En el caso de las ondas de corrugación, estas son producto del efecto de oscilaciones verticales y radiales del disco. Una revisión completa de las oscilaciones que pueden darse en un disco de acreción se encuentra en el trabajo de Kato, Fukue & Mineshige [38].

El estudio de las inestabilidades y oscilaciones de un disco geoméricamente grueso es importante debido a que es una posible fuente de ondas gravitacionales intensas y por lo tanto detectables en un futuro cercano con los nuevos instrumentos (Zurek & Górski [98], van Putten [89], [90] y Zanotti, Rezzolla & Font [95]). También es importante entender las oscilaciones de discos porque estas podrían explicar las oscilaciones cuasi-periódicas de alta frecuencia (HFQPC) observadas en las estrellas binarias de rayos-X de baja masa (LMXB), sistemas en los que una de las componentes es posiblemente un agujero negro, (Nowak *et. al.* [59], Kato [39], Abramowicz & Kluzniak [6], Abramowicz *et. al.* [7], [8]).

En estos últimos sistemas la luminosidad de los rayos X está modulada de forma cuasi-periódica, dando lugar a picos conspicuos en los espectros de potencias. Estos espectros han mostrado que la modulación está relacionada por números enteros pequeños 2:3:... Algunos de estos objetos son los microcuásares GRO J1655-40 (Strohmayer [86], Remillard *et. al.* [69]), XTE J15550-564 (Remillard *et. al.* [68]) y GRS 1915+105 (Remillard *et. al.* [67], McClintock & Remillard [47]). También un comportamiento semejante ha sido observado en el centro de la galaxia, en la fuente de radio denominada Sgr A* (Genzel *et. al.* [27] y Aschenbach [11]).

Algunos posibles mecanismos que pueden inducir perturbaciones periódicas en un sistema con una topología toroidal pueden originarse ya sea a través de alguna interacción entre el objeto central y el disco o bien mediante algún mecanismo intrínseco en el disco.

Para el primer caso, la interacción entre el objeto central–disco, existen muchas formas en que se pueden llevar a cabo las interacciones. El campo magnético asociado al objeto central, las deformaciones sobre la superficie o bien un campo de radiación cambiante en el objeto central, son posibilidades ideales para el caso de una estrella de neutrones, pero debido a que estamos trabajando con agujeros negros no las tomaremos en cuenta.

Otras formas de interacción objeto central–disco, pueden deberse a la acreción del agujero negro y las consecuencias que pueda tener sobre el disco, puesto que el material puede ser acretado de forma cuasi–periódica, rompiendo la simetría axial en el agujero negro y teniendo como consecuencia, la emisión de ondas gravitacionales de forma periódica. Esto producirá variaciones del cuadrupolo de masa del toro y por consiguiente, la emisión de una gran cantidad de ondas gravitacionales. Este punto ha sido explorado por Zanotti, Rezzolla & Font [95], quienes enfocaron su atención en la respuesta de uno de estos sistemas ante perturbaciones axisimétricas. Como resultado de estas perturbaciones, los discos gruesos exhiben un comportamiento oscilatorio regular, que conlleva a una variación cuasi–periódica de la tasa de acreción y del cuadrupolo de masa responsable de la intensa emisión gravitacional.

Una propuesta también plausible publicada por van Putten [89], consiste en suponer que en un sistema agujero negro–toro, este último pierde su simetría axial; van Putten supone que el toro ha sido magnetizado por el flujo remanente del progenitor que, como se discutió en la introducción, puede ser una estrella de neutrones en coalescencia con el agujero negro, o bien una estrella supermasiva colapsando en una explosión de hipernova. Entonces el agujero negro rodeado por la magnetósfera del toro se ajustará a su energía mínima para estar en equilibrio magnético con el toro; la cara interna del toro estará bajo un flujo constante de radiación gravitacional proveniente del agujero negro, que a su vez será radiada por diferentes mecanismos e incluirá la emisión de ondas gravitacionales. Dado que la radiación gravitacional que recibe el toro es periódica en el tiempo, ésta puede dar lugar a una perturbación periódica en el toro.

Pueden existir condiciones intrínsecas del toro como las propiedades termodinámicas del material, la vorticidad y la viscosidad (Igumenshchev *et. al.* [37]), que pueden inducir inestabilidades las cuales darán origen a las oscilaciones del disco. En el caso de la viscosidad del fluido que conforma el toro, en nuestras simulaciones no hemos incluido los procesos viscosos directamente, pero es posible pensar que estos procesos puedan inducir una perturbación con una componente radial periódica como la que pretendemos simular. Un interesante resumen de los procesos que inducen comportamientos oscilatorios en discos delgados ha sido expuesto en el trabajo de Kato [39]. Dentro de los procesos asociados a las propiedades termodinámicas del gas hay algunos que toman lugar a través de los mecanismos κ^- y η^- . El mecanismo κ^- es un proceso donde se da un intercambio entre el flujo de energía radiada del disco en energía cinética que induce oscilaciones. Este inter-

cambio se da debido a la opacidad del material que conforma el disco. Las oscilaciones pueden atenuarse o aumentar debido a los gradientes de temperatura y densidad dentro del disco.

Por otro lado, los procesos viscosos generan dos efectos importantes en los discos, uno está relacionado al intercambio de energía térmica a través del calentamiento debido a la viscosidad, mientras que el otro es un intercambio de momento angular que tiene lugar debido al transporte de momento angular realizado por la viscosidad. Podemos pensar que un proceso está asociado a procesos térmicos (1) y el otro asociado a procesos dinámicos (2). Los procesos viscosos térmicos (1) son una generalización del mecanismo η -. Cuando el gas se encuentra comprimido durante la oscilación, la densidad, la temperatura y la presión se incrementarán. Esto usualmente producirá un incremento en la viscosidad, lo que conducirá a un incremento en la generación de calor y de la presión de la fuerza restauradora de la oscilación. En el caso opuesto, durante la expansión, habrá un cambio igual de las cantidades termodinámicas, pero con signo opuesto.

Para el proceso (2) vamos a suponer un elemento de fluido oscilando en un sistema con simetría axial. Este elemento de fluido describirá un movimiento azimutal periódico en el tiempo, puesto que su momento angular intrínseco se conserva durante cada órbita. Por otro lado, si se toma en cuenta la viscosidad, el elemento del fluido experimentará una fuerza en la dirección azimutal. Si la viscosidad aumenta durante la fase en que el gas es comprimido, esta fuerza aumentará, haciendo que las oscilaciones en el disco se incrementen.

Otros procesos que pueden inducir inestabilidades y excitar oscilaciones son modelos recientes que invocan discos truncados es decir sistemas formados por un disco caliente rodeado de un disco frío. Esta idea ha sido introducida por Giannios & Spruit [28] suponiendo que la parte exterior fría del disco es excitada por un flujo ionizado que se extiende hacia afuera del centro. En este sentido Giannios & Spruit afirman que los modos-p de excitación pueden ser fácilmente excitados con una frecuencia cercana a la frecuencia de oscilación en el borde interno del disco frío.

Finalmente se tiene que las perturbaciones periódicas pueden tener origen en la génesis del sistema agujero negro-toro. Como se expuso al final de la introducción en la discusión sobre los modelos que pueden dar lugar a sistemas agujero negro-toro, uno de los modelos consiste en suponer la coalescencia de un sistema binario conformado por una estrella de neutrones y un agujero negro. En este sentido, Ruffert & Janka [76] investigando la fusión entre estrellas de neutrones y agujeros negros en el contexto de explosiones de rayos gamma, han encontrado en sus modelos que los toros que se forman, están en un estado cuasi-estacionario, con campos de velocidades radiales en el gas que conforma el disco. Este mecanismo puede también introducir una perturbación periódica al sistema.

4.3.1 El Modelo

En cualquiera de los casos que he expuesto aquí, es natural pensar que las perturbaciones serán más fuertes en la parte interna del disco. Si el espín del objeto central está involucrado en producir la perturbación, su amplitud

variará y se repetirá a intervalos regulares dados por el inverso del período del espín, $\Delta T = 1/\nu_s$.

A partir de lo expuesto hasta aquí y tratando de tomar en cuenta las dos características importantes de una perturbación como la que queremos simular, (a) su intensidad dependiendo de la posición en el disco, y (b) su periodicidad, hemos propuesto una perturbación que induce una aceleración en el disco dada por:

$$a_{pert} = -\eta a_g \cdot \exp\left(\frac{r_o - r}{\delta r}\right) \cdot \sin(2\pi\nu_s t). \quad (4.9)$$

donde a_g representa la aceleración debida a la gravedad, r_o es el radio exterior del toro y $\eta \ll 1$ es un parámetro que modula la fuerza de la perturbación. El término exponencial decae en una escala $\delta r \simeq R$, donde R es la extensión radial del disco, reproduciendo el efecto deseado y descrito en (a). Esta aceleración induce oscilaciones radiales en el disco, que pueden ser analizadas buscando frecuencias importantes de oscilación, mediante un análisis de Fourier, como lo han hecho recientemente, Lee *et. al.* [42], para toros delgados.

4.3.2 Resultados

Tabla 4.4: Modelos con Perturbaciones Radiales Periódicas

Modelo	M_d/M_{BH}	$\ell_0/r_g c$	R_c/r_g	$\Phi_0/(c^2/2)$	η	ν_s Hz	N
(e)	0.14	1.9197	4.25	-0.08	0.005	200	4082
(f)	0.14	1.9197	4.25	-0.08	0.003	200	4082
(g)	0.14	1.9197	4.25	-0.08	0.001	200	4082
(h)	0.14	1.9197	4.25	-0.08	0.001	200	1615
(i)	0.03	$\propto r^\nu$	5.10	-0.06	0.001	150	1820
(j)	0.03	$\propto r^\nu$	5.10	-0.06	0.001	150	4082

Hemos realizado varias simulaciones tomando en cuenta diferentes distribuciones de momento angular y en cada caso, diferentes parámetros η . El resumen de las simulaciones que hemos realizado se muestra en la Tabla 4.4. En dicha tabla se muestran los parámetros de las simulaciones que realizamos utilizando una distribución de momento angular constante y no constante. Asimismo se anotan los valores correspondientes a la masa del disco, el valor del momento angular en el centro del disco, el radio donde se localiza el centro del disco, el factor de llenado, el valor del parámetro η y el número de partículas de cada simulación.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran uno de los resultados donde se observa claramente el comportamiento oscilatorio del disco, obtenidos para las simulaciones con momento angular constante. Estas simulaciones corresponden al modelo (g) y son similares al modelo (h) cuyos parámetros se enlistaron en la Tabla 4.4.

En el caso de los modelos (e) y (f), ocurre que la perturbación es tan fuerte que el disco se expande con consecuencias catastróficas, debido al bombeo constante de energía inducido por la perturbación. Se hizo un ensayo con un parámetro η más bajo (> 0.001) y los resultados obtenidos no tienen ningún efecto apreciable sobre el disco. Los modelos (i) y (j) son modelos donde investigamos el comportamiento de un disco con una distribución de momento angular no constante.

Al observar las figuras 4.9 y 4.10 que corresponden al modelo (g), la primera característica que se observa es un máximo pronunciado localizado a 200 Hz que corresponde a la perturbación introducida en la simulación. Los

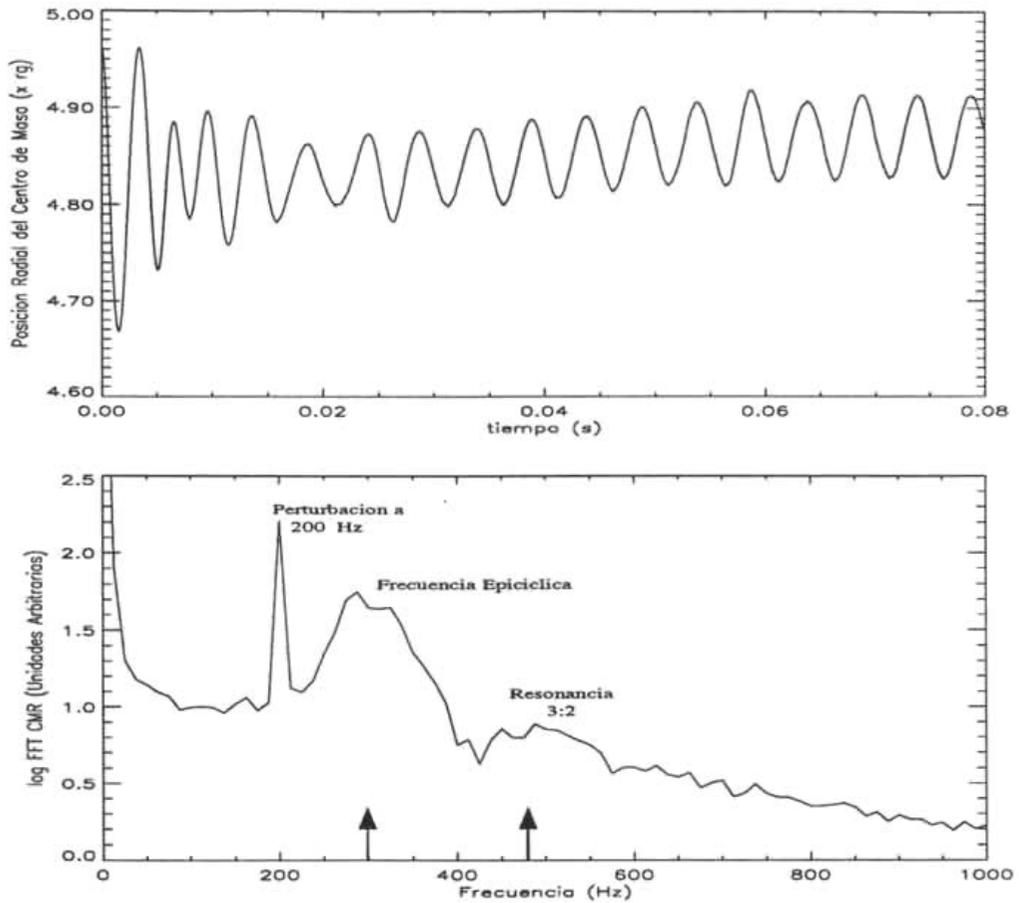


Figura 4.7: En el panel superior se muestra la evolución de la posición radial del centro del disco como función del tiempo. Pueden verse claramente las oscilaciones del mismo alrededor del centro del sistema localizado a $r = 4.84r_g$. En el panel inferior, se muestra la potencia del espectro de Fourier correspondiente. Nótese los máximos de frecuencia localizados a $\nu_{pert} = 200$ Hz, $\nu_k \approx 300$ Hz y $\nu_{res} \approx 450$ Hz. Los datos corresponden al modelo (g).

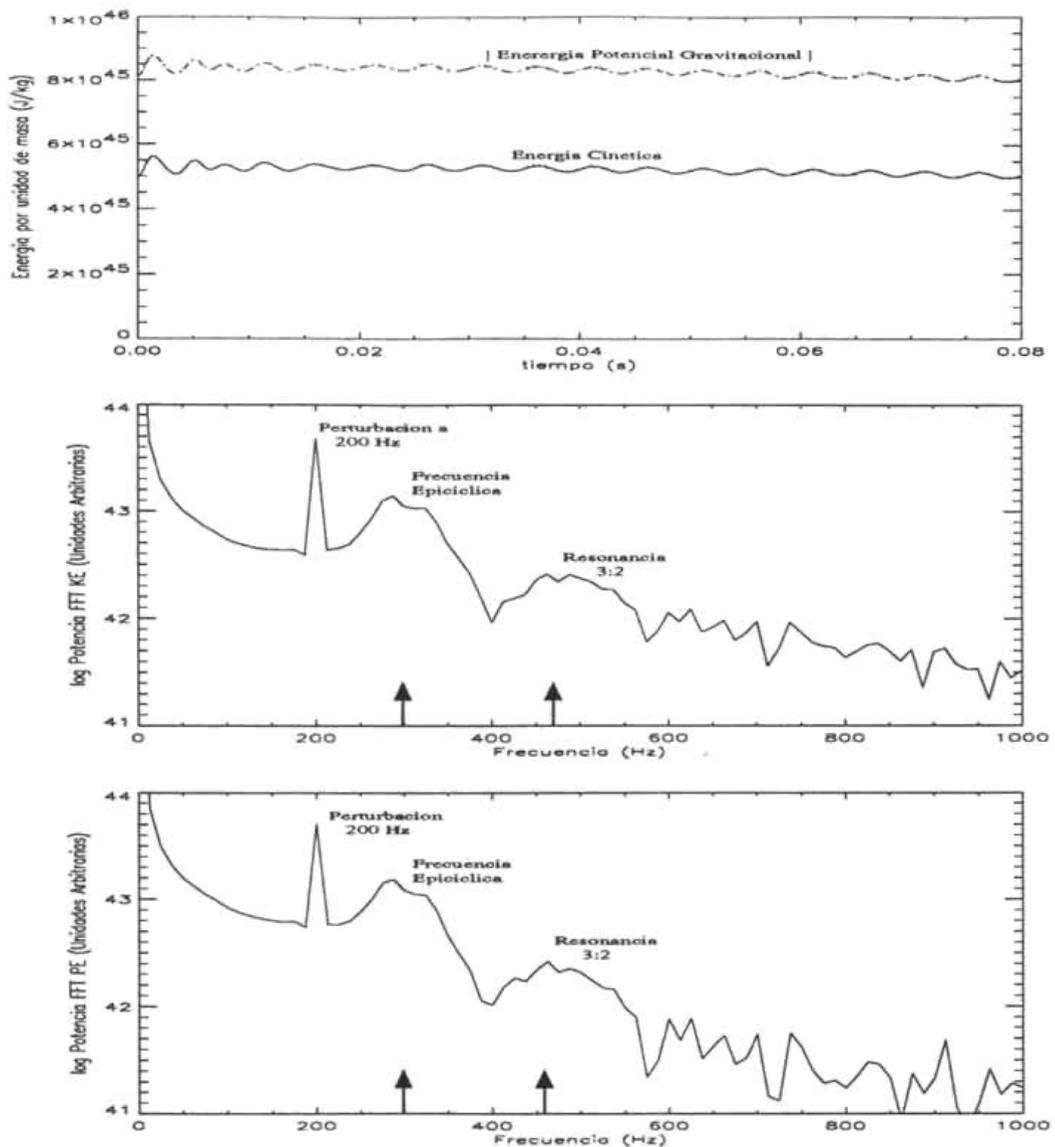


Figura 4.8: En el panel superior se muestran las energías cinética (línea continua) y el valor absoluto de la energía potencial gravitacional (línea punteada) como función del tiempo. En los paneles medio e inferior, la potencia, del espectro de Fourier, de la energía cinética y de la energía potencial gravitacional para el modelo (g). En ambas figuras, el máximo al lado izquierdo corresponde a la perturbación introducida a 200 Hz, el segundo a la frecuencia epicíclica desplazada hacia bajas frecuencias debido al tamaño del toro y la tercera a 1.5 veces la frecuencia epicíclica.

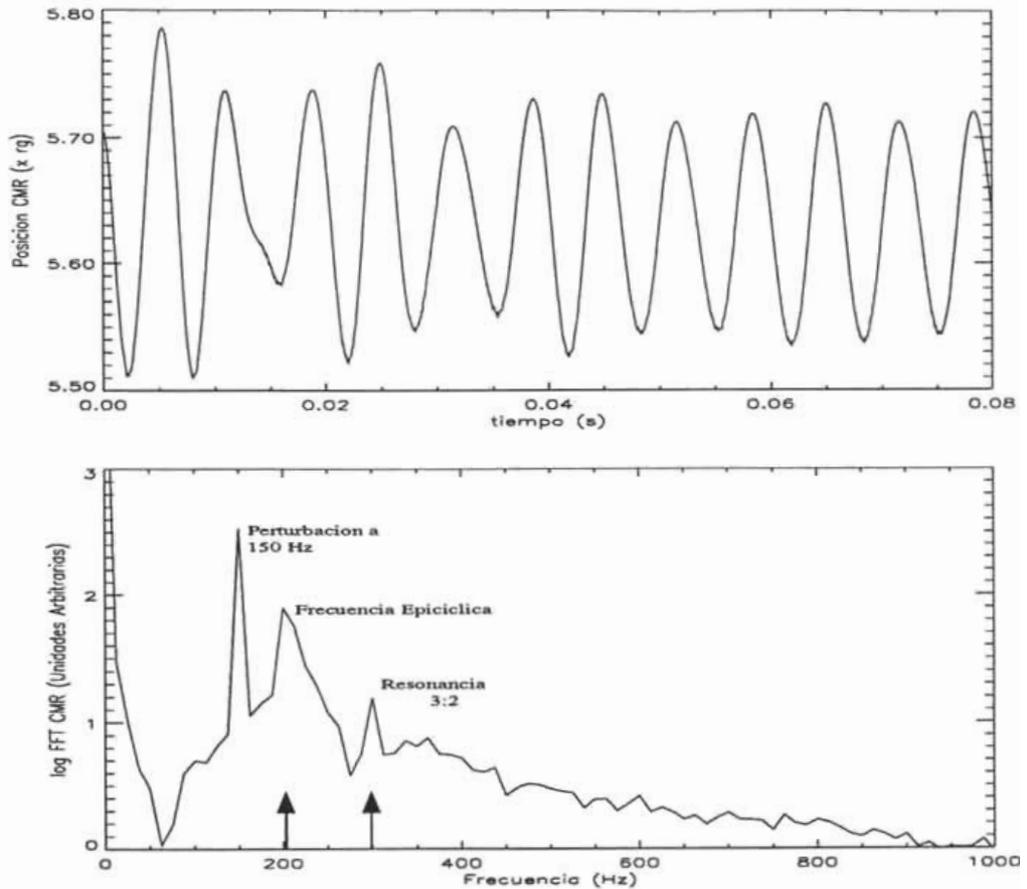


Figura 4.9: Ídem la figura 4.7, pero en estas simulaciones hemos utilizado una distribución de momento angular no constante como la descrita en la Sec. 4.1. Los resultados son semejantes a los encontrados utilizando momento angular constante dentro del disco. En este caso el centro del disco se localiza a $r = 5.66 r_g$ y las frecuencias máximas del espectro son $\nu_{pert} = 150$ Hz, $\nu_{\kappa} \approx 200$ Hz y $\nu_{res} \approx 300$ Hz. Los datos corresponden al modelo (j).

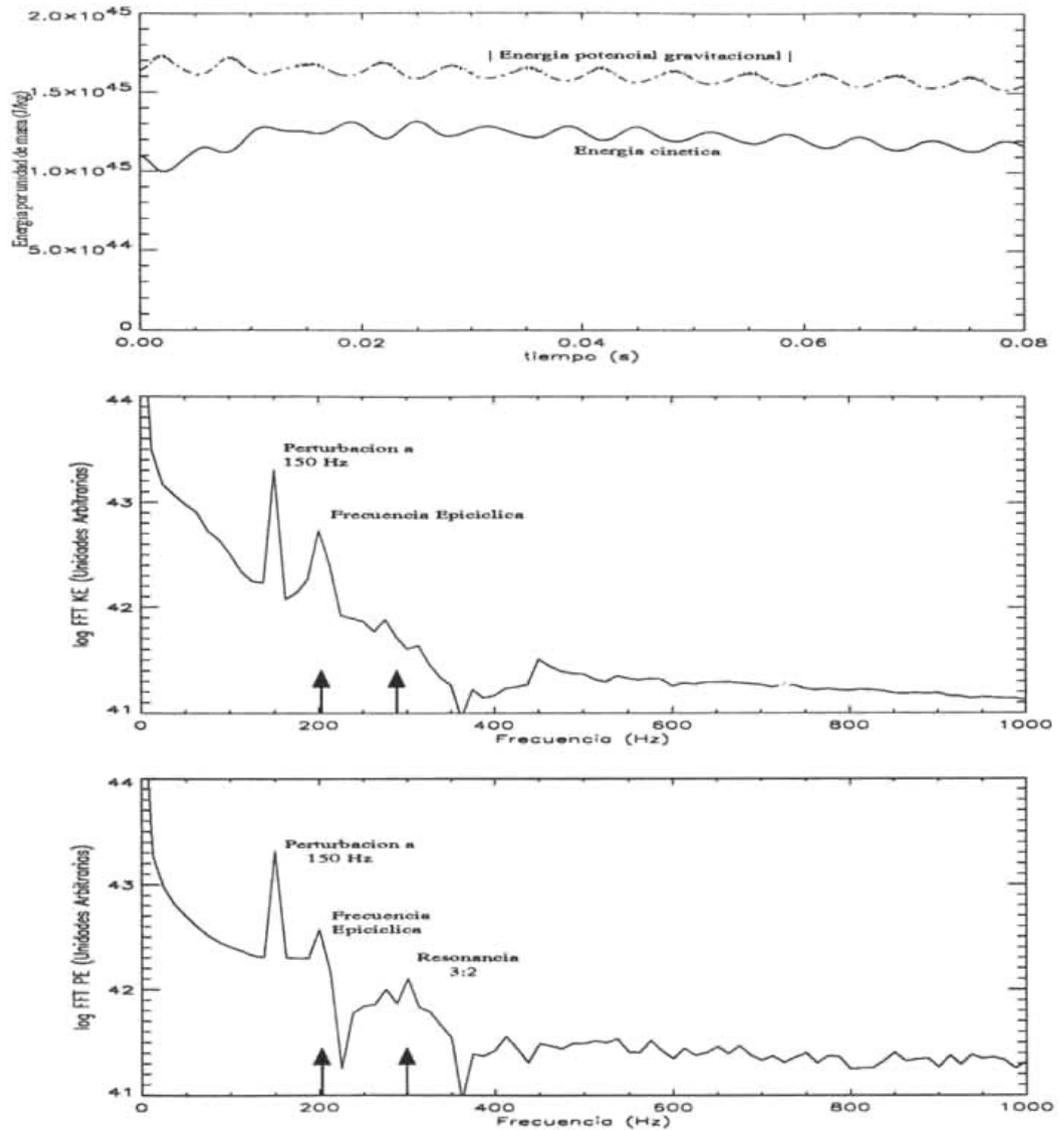


Figura 4.10: Ídem de la figura 4.8 para toros gruesos con distribución de momento angular no constante, los datos corresponden al modelo (j). Obsérvense los máximos a $\nu_{pert} = 150$ Hz, $\nu_{\kappa} = 200$ Hz y $\nu_{res} = 300$ Hz correspondientes a la perturbación inducida, a la frecuencia fundamental y a la resonancia inducida.

otros dos picos tienen frecuencias, localizados a $\nu_1 \approx 300$ Hz y $\nu_2 \approx 450$ Hz. Ambos máximos guardan una relación 3:2, hasta la resolución que permiten nuestras simulaciones.

En el caso donde tomamos en cuenta una distribución de momento angular no constante, hemos obtenido resultados semejantes. Una perturbación periódica induce eficientemente modos de oscilación en una relación 3:2, como puede observarse en las Figs. 4.9 y 4.10.

Como ya ha sido expuesto en la sección anterior, y comparando el presente trabajo con el de Zanotti, Rezzolla y Font [95] y el de Rezzolla, Yoshida y Zanotti [71], el pico observado a $\nu_1 \approx 300$ Hz es la frecuencia epicíclica de oscilación desplazada hacia frecuencias menores y que corresponde al punto de máxima densidad. En nuestro caso, cuando se tienen toros con extensión finita, el punto de máxima densidad no corresponde al del centro de masa, como puede verse al comparar el panel superior de la figura 4.8 con la Fig. 4.4, donde el punto medio (que corresponde al centro de masas) está a $r = 4.84r_g$.

Por otro lado, el segundo pico a más alta frecuencia está asociado a modos acústicos relacionados con ondas de presión que se dispersan dentro del disco, y es el segundo en la secuencia 2:3:4:... de dichos modos. En el contexto de perturbaciones axisimétricas Zanotti *et. al.* [95], utilizando la solución de Michel expuesta en la Sec. 4.1., han encontrado resultados similares en los que proponen que estas perturbaciones axisimétricas inducen perturbaciones globales sobre el disco y las identifican también con modos acústicos de oscilación asociados a ondas de presión desplazándose dentro del disco (modos-p). El modelo que pretende explicar las oscilaciones de los discos gruesos mediante modos-p, se basa en lo bien que los modelos numéricos de-

sarrollados por Rezzolla *et. al.* se ajustan a las observaciones de los sistemas binarios de baja masa observados en rayos X (LMXB).

Rezzolla *et. al.* [70] a partir de resultados similares concluyen que los objetos que muestran oscilaciones cuasi-periódicas de alta frecuencia (HFQPO) podrían ser candidatos a contener un agujero negro rodeado de un toro delgado orbitando la vecindad del mismo. Apuntan también que las oscilaciones observadas pueden ser inducidas por un proceso asociado a viscosidad, turbulencia, inestabilidades hidrodinámicas o magnetohidrodinámicas que modifican el carácter de la órbita de una parcela de flujo cerca de un agujero negro.

Es de hacer notar que la propuesta de Rezzolla *et. al.* radica en dos puntos importantes, (1) las simulaciones son realizadas introduciendo una perturbación impulsiva global y (2) las soluciones analíticas corresponden a discos integrados en z . Mientras tanto, en el presente trabajo hemos obtenido resultados semejantes, pero utilizando simulaciones en $r-z$, introduciendo perturbaciones periódicas y más localizadas (el término exponencial de la Ec. 4.9) dentro del disco.

Conclusiones

Utilizando simulaciones numéricas pseudo-Newtonianas en 2 dimensiones hemos modelado un disco grueso y su comportamiento ante (a) la inestabilidad radial y (b) ante perturbaciones radiales periódicas impulsivas. No hemos considerado la autogravedad del disco, los efectos del campo magnético ni la viscosidad interna del gas que lo compone. Sin embargo nuestras simulaciones consideran discos con distribuciones intrínsecas de momento angular constante y no constante. Algunos de los resultados obtenidos son semejantes a los que han obtenido otros grupos de investigación. En el presente estudio hemos encontrado que:

1. La inestabilidad radial es suprimida cuando se tiene una distribución no constante de momento angular. Las configuraciones del disco más estables son las que tienen una distribución no constante de momento angular dentro del mismo. Esta consideración es cercana a la realidad, puesto que las simulaciones numéricas que modelan la coalescencia de estrellas de neutrones con estrellas de neutrones o bien con agujeros negros, muestran que la distribución final del momento angular no es constante. En este sentido, nuestros resultados están en completo acuerdo con los obtenidos previamente por los modelos pseudo-Newtonianos sin autogravedad obtenidos por Daigne & Mochkovitch [19] y los modelos

relativistas sin autogravedad estudiados por Abramowicz *et. al.* [5] y los extensos estudios relativistas presentados en los diferentes trabajos de Font & Daigne [23], [24], [25].

2. Se encontró que la extensión del disco (i.e. su diámetro medio interior) modifica hacia frecuencias más bajas la frecuencia epicíclica radial fundamental. Esto se ha demostrado numéricamente en el presente trabajo, construyendo discos gruesos de diferente extensión, con distribuciones de momento angular constante y no constante (ley de potencias). Previamente se había mostrado de manera analítica que las eigenfrecuencias para los modos fundamentales de un disco disminuyen a medida que la extensión radial del disco aumenta. Esto fue presentado por Rezzolla *et. al.* [70] quienes investigaron teóricamente las propiedades oscilatorias de discos gruesos relativistas utilizando la métrica de Schwarzschild. Montero *et. al.* [56] más recientemente, utilizando la métrica de Kerr han obtenido resultados semejantes. En nuestro caso hemos comparado la frecuencia radial de oscilación de una partícula puntual que puede suponerse como un disco grueso con extensión nula, con partículas que presentan extensión finita.
3. Finalmente hemos encontrado que las perturbaciones radiales periódicas inducen de manera eficiente los modos de oscilación, en una relación de frecuencias 3:2. Comparando los resultados obtenidos con los modelos numéricos de Zanotti, Rezzolla y Font [95] introduciendo perturbaciones que corresponden a la solución de Michel [52] y los de Rezzolla *et. al.* [70] donde investigan las propiedades oscilatorias de discos gruesos, se propone que el segundo máximo localizado a más alta frecuencia está relacionado con ondas de presión que se dispersan dentro del disco

(modos-p). Este pico es el segundo en la secuencia 2:3:4:... de dichos modos.

4. Los estudios de oscilaciones muestran que los discos pueden responder a perturbaciones axisimétricas en una serie de modos cuyas frecuencias siguen la secuencia 2:3:4:..., que se interpretan como modos acústicos dentro del disco.
5. El estudio de los modos de oscilación es importante puesto que estos pueden ser el origen físico de la fenomenología observada en las variaciones cuasi-periódicas de luminosidad observadas en los sistemas conformados por binarias de rayos-X.
6. El modelo que proponemos es un modelo que se enfoca en la respuesta del disco cuando la perturbación se localiza en la región interna del toro. Es importante notar que esta es una suposición muy válida puesto que es razonable suponer que la perturbación es generada por el objeto central. Aunque el trabajo es un estudio puramente dinámico, los resultados obtenidos contribuyen hacia modelos más reales de estos sistemas.

Bibliografía

- [1] Abramowicz, M. *Acta Astronom.*, **24**, 45, 1974.
- [2] Abramowicz, M. A. Jaroszyński, M. Sikora, M. *A&A.* **63**, 221, 1978.
- [3] Abramowicz, M. A. Calvani, M. Nobili, L. *ApJ.* **242**, 772, 1980.
- [4] Abramowicz, M. A. Calvani, M. Nobili, L. *Nature.* **302**, 597, 1983.
- [5] Abramowicz, M. Karas, V. Lanza, A. *A&A.* **331**, 1143, 1998.
- [6] Abramowicz, M. A., Kluźniak, W. *A&A.* **374**, L19, 2001.
- [7] Abramowicz, M. A., Karas, V., Kluźniak, W., Lee, W.H., Rebusco, P. *PASJ.* **55**, 467, 2003.
- [8] Abramowicz, M. A., Bulik, T., Bursa, M., Kluźniak, W. *A&A.* **404**, L21, 2003.
- [9] Abramowicz, M. A. Björson, G. Pringle, J. (Editores) **Theory of Black Hole Accretion Disks**. Cambridge University Press, Rino Unido 1998.
- [10] Artemova, I.V., Björson, G., Novikov, I.D. *ApJ.* **461**, 565, 1996.
- [11] Aschenbach, B. *A&A.* **425**, 1075, 2004.
- [12] Balsara, D. *Computational Physics*, **121**, 357, 1995.

- [13] Bardeen, J., Press, W., Teukolsky, S. ApJ. **178**, 347, 1972.
- [14] Blandford, R., Znajek, R., MNRAS. **179**, 433, 1977.
- [15] Bodenheimer, P., Woosley, S. E. ApJ. **269**, 281, 1983.
- [16] Bondi, H. MNRAS. **112**, 195, 1952.
- [17] Boyer, R.H., Proc. Camb. Phil. Soc. **61**, 527, 1965.
- [18] Charles, P. en **Theory of Black Hole Accretion Disks**. Abramowicz *et. al.* (Editores) Cambridge University Press, Reino Unido. 1998.
- [19] Daigne, F., Mochkovitch, R. MNRAS. **285**, L15, 1997.
- [20] Davies, M.B., Benz, W., Piran, T., Thielemann, F. K. ApJ. **431**, 742, 1994.
- [21] Fishbone, L. G. Moncrief, V. ApJ. **207**, 962, 1976.
- [22] Fishbone, L. G. ApJ. **175**, L155, 1972.
- [23] Font, José. Daigne, Frédéric. ApJ. **581**, L23, 2002.
- [24] Font, J.A., Daigne, F. MNRAS. **334**, 383, 2002.
- [25] Font, J.A., Daigne, F. MNRAS. **349**, 841, 2004.
- [26] Frank, J. King, A. Raine, D. **Accretion Power in Astrophysics**. 3ra. Edición, Cambridge University Press. Reino Unido. 2002.
- [27] Genzel, R., Schödel, R. Ott, T., Eckart, A., Alexander, T., Lacombe, F., Rouan, D., Aschenbach, B. Nature. **425**, 934, 2003.
- [28] Giannios, D., Spruit, H.C. astro-ph/0407474

- [29] Gingold, R. A. Monaghan, J.J. MNRAS. **181**, 375, 1977.
- [30] Hynes, R., <http://obelix.as.utexas.edu/~rih/>
- [31] Khanna, R. Chakrabarti, S. K. MNRAS. **334**, 259, 1992.
- [32] Kluźniak, W., Abramowicz, M. A. astro-ph/0304345
- [33] Kluźniak, W., Lee, W.H., MNRAS. **335**, L29, 2002.
- [34] Kluźniak, W., Abramowicz, M. A. astro-ph/0105057
- [35] Kluźniak, W., Lee, W.H., ApJ. **494**, L53, 1998.
- [36] Kozłowski, M, Jarozyński, M; Abramowicz, M.A. A&A. **63**, 209, 1978.
- [37] Igumenshchev, I. Chen, X. Abramowicz, M. MNRAS 278 236 1996.
- [38] Kato, S. Fukue, J. Mineshige, S. **Black Hole Accretion Disks**. Kyoto University Press. Japón. 1998.
- [39] Kato, S. PASJ. **53**, 1, 2001.
- [40] Landau L.D., Lifshitz, E.M. **The Classical Theory of Fields**. 4ta. Edición. Butterworth-Heinenann. Reino Unido, 1996.
- [41] Lee, W.H. Kluzniak, W., ApJ. **526**, L178, 1999.
- [42] Lee, W.H. Abramowicz, M.A. Kluźniak, W. ApJ. **603**, 93L, 2004.
- [43] Lynden-Bell, D. Nature. **223**, 690, 1969.
- [44] Lu, Y., Cheng, K., Yang, L., Zhang, L. MNRAS. **314**, 453, 2000.
- [45] Lucy, L. AJ. **82**, 1013, 1977.

- [46] MacFayden, A., Woosley, S.E. ApJ. **524**, 262, 1999.
- [47] McClintock, J.E., Remillard, R. astro-ph/0306213
- [48] Madejski, G. en **Theory of Black Hole Accretion Disks**. Abramowicz *et. al.* (Editores) Cambridge University Press, Reino Unido 1998.
- [49] Masuda, N. Nishida, S. Eriguchi, Y. MNRAS. **297**, 1139, 1998.
- [50] Masuda, N. Eriguchi, Y. ApJ. **489**, 804, 1997.
- [51] Méndez, M., van der Klis, M., Wijnands, R. van Paradijs, J., Vaughan, B. ApJL. **505**, L23, 1998.
- [52] Michel, F. Ap&SS. **15**, 153, 1972.
- [53] Missner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. **Gravitation**. 1ra. Edición. W.H. Freeman & Cía. Estados Unidos 1973.
- [54] Monaghan, J.J., Lattanzio, J.C. A&A. **149**, 135, 1985.
- [55] Monaghan, J.J. ARA&A. **30**, 543, 1992.
- [56] Montero, P., Rezzolla, L., Yoshida, S. astro-ph/0407642
- [57] Narayan, R. McClintock, J. Yi, I. ApJ. **457**, 821, 1996.
- [58] Nishida, S. Lanza, A. Eriguchi, Y. Abramowicz, M. A. MNRAS. **278**, L41, 1996.
- [59] Nowak, M., Wagoner, R., Begelman, M. Kehr, D. ApJ, **477**, L91, 1997.
- [60] Paczyński, B. Wiita, P. A&A. **88**, 23, 1980.
- [61] Paczyński, B. astro-ph/9706232

- [62] Paczyński, B. *ApJ.* **494**, L45, 1998.
- [63] Pringle, J.E. Rees, M. *A&A.* **21**, 1, 1972.
- [64] Pringle, J. E. Rees, M. Pachilczyk, A. *A&A.* **29**, 179, 1973.
- [65] Papaloizou, J.C; Pringle, J.E. *MNRAS.* **208**, 31, 1984.
- [66] Papaloizou, J.C; Pringle, J.E. *MNRAS.* **213**, 899, 1985.
- [67] Remillard, R. A., Muno, M., McClintock, J. E., Orosz, J. AAS meeting #35, #30.03 Estados Unidos. 2003.
- [68] Remillard, R. A., Muno, M. P., McClintock, J. E., Orosz, J. A. *ApJ.* **580**, 1030, 2002.
- [69] Remillard, R. A., Morgan, E., McClintock, J. E., Bailyn, C. Orosz, J. *ApJ.* **522**, 397, 1999.
- [70] Rezzolla, L., Yoshida, S., Maccarone, T. J., Zanotti, O. *MNRAS.* **344**, 978, 2003.
- [71] Rezzolla, L., Yoshida, S., Zanotti, O. *MNRAS.* **344**, L37, 2003.
- [72] Rubio-Herrera, E., Lee, W. H., *MNRAS.* **357**, L31, 2005.
- [73] Rubio-Herrera, E., Lee, W.H., en **Growing Black Holes: Accretion in a Cosmological Context** Merloni, A., Nayakshin, S., Sunyaev, R., (Editores) Proceedings of the MPA/ESO/MPE/USM Joint Astronomy Conference ESO Astrophysics Symposia. 2005.
- [74] Ruffini, R., Wheeler, J.A. "Relativistic Cosmology and Space Platforms" en **Proceedings of the Conference on Space Physics** ESA. 1971.

- [75] Ruffert, M. Janka, H.Th. Schaefer, G. *A&A.* **311**, 532, 1996.
- [76] Ruffert, M. Janka, H.Th. *A&A.* **344**, 573, 1999.
- [77] Salpeter, E. *ApJ.* **140**, 796, 1964.
- [78] Shakura, N. Sunyaev, R. *A&A.* **24**, 337, 1973.
- [79] Shibata, M., Taniguchi, K., Uryu., *Phys. Rev. D.* **68**, 84020, 2003.
- [80] Shibata, M., Shapiro, S. *ApJL.* **572**, L39, 2002.
- [81] Shapiro, S. Teukolsky, S. **Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars.** John Wiley & Sons, Estados Unidos. 1993.
- [82] Shapiro, S. Shibata, M., *ApJ.* **577**, 904, 2002.
- [83] Shvartsman, V.F. *Sov. Ast.* **16** No. 3 377 1971.
- [84] Schnittman, J.D., *astro-ph/0407179*
- [85] Schnittman, J.D., Bertschinger, E., *ApJ.* **606**, 1098, 2004.
- [86] Strohmayer, T.E. *ApJ.* **552**, L49, 2001.
- [87] Titarchuk, L. *ApJ.* **578**, L71, 2002.
- [88] Treves, A. Maraschi, L. Abramowicz, M. **Accretion, A Collection of Influential Papers.** Advanced Series in Astrophysics and Cosmology, Vol. 5. World Scientific. Estados Unidos. 1989.
- [89] van Putten, M.H.P.M. *Phys. Rev. Lett.* **Vol. 87**, No. 9. (091101-1) 2001.
- [90] van Putten, M.H.P.M. *Phys. Rep.* **345**, 1, 2001.
- [91] van der Klis, M. *ARA&A.* **38**, 717, 2000.

- [92] Wijnands, R., van der Klis, M., Homan, J., Chakrabarty, D., Markwardt C.B., Morgan, E.H. *Nature*. **424**, 44, 2003.
- [93] Wilson, D.B. *Nature*. **312**, 620, 1984.
- [94] Woosley, S.E. 1993, *ApJ*. **405**, 273, 1993.
- [95] Zanutti, O. Rezzolla, L. Font, J. *MNRAS*. **341**, 832, 2003.
- [96] Zel'dovich, Y. B. *Sov. Phys. Dokl.* **9**, 195, 1964.
- [97] Zurek, W.H; Benz, W. *ApJ*. **308**, 123, 1986.
- [98] Zurek, W.H., Górski, K.M., *ApJ*. **347**, L17, 1989.

Apéndice

A continuación se presenta uno de los artículos producidos por este trabajo, que ya ha sido publicado en la revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* Rubio–Herrera & Lee (2005a) [72] la versión preliminar está disponible en:

<http://lanl.arxiv.org/abs/astro-ph/0411654>

Asimismo los resultados preliminares de este trabajo se presentaron en la conferencia *GROWING BLACK HOLES* celebrada en Garching, Alemania en Junio de 2004, Rubio–Herrera & Lee (2005b) [73].

Finalmente, se encuentra en preparación un artículo más extenso que el aquí incluido, donde se publicarán todos los resultados obtenidos de esta investigación.

Oscillations of thick accretion discs around black holes

Eduardo Rubio-Herrera^{*} and William H. Lee

Instituto de Astronomía, UNAM, Apartado Postal 70-264, CP 04510, México DF, México

Accepted 2004 November 19. Received 2004 November 18; in original form 2004 September 22

ABSTRACT

We present a numerical study of the response of a thick accretion disc to a localized, external perturbation with the aim of exciting internal modes of oscillation. We find that the perturbations efficiently excite global modes recently identified as acoustic p-modes, and closely related to the epicyclic oscillations of test particles. The two strongest modes occur at eigenfrequencies which are in a 3:2 ratio. We have assumed a constant specific angular momentum distribution within the disc. Our models are in principle scale-free and can be used to simulate accretion tori around stellar or super-massive black holes.

Key words: accretion, accretion discs – black hole physics – hydrodynamics – stars: neutron – X-rays: binaries.

1 INTRODUCTION

Accretion discs around compact objects (black holes and neutron stars) are natural laboratories for the study of strong gravitational fields and their effects (such as Lense–Thirring precession). From the physics that lies behind these accretion processes and the accompanying radiation, it is in principle possible to determine important parameters of the central object, such as mass and spin for the black hole case (Abramowicz & Kluźniak 2001; Wagoner, Silbergleit & Ortega-Rodríguez 2001), and to place constraints on the equation of state of dense matter in the case of neutron stars (Kluźniak, Michelson & Wagoner 1990).

It has also been pointed out that these objects can be potential sources of gravitational waves, arising from different processes, such as non-axisymmetric instabilities (Zurek & Górski 1989), non-axisymmetric tori powered by the spin energy of the black hole (van Putten 2001), magnetized thick accretion discs (Mineshige et al. 2002), and global oscillations which induce a time-varying mass quadrupole (Zanotti, Rezzolla & Font 2003). The energy released as a result of accretion from such systems, if dynamically stable, has also been proposed as a mechanism for the production of cosmological gamma-ray bursts. In this case, super-Eddington accretion rates in flows cooled by neutrino emission feed the central black hole while powering a relativistic outflow, which produces the gamma-ray burst. Such a disc possibly forms following core collapse in a massive rotating star (Woosley 1993) or after the merger of two compact objects in a tight binary (Narayan, Paczyński & Piran 1992). One mechanism that could potentially produce the collapse of such a disc on to the black hole is the runaway radial instability. This was identified by Abramowicz, Calvani & Nobili (1983) and appears in discs with constant angular momentum distributions which overflow their Roche lobes at high rates, and thus increase the mass

of the black hole substantially. This alteration of the potential is a runaway process, and can destroy the entire disc within a few dynamical times. However, studies of tidal disruption and torus formation from compact binary mergers (Ruffert & Janka 1999; Lee 2001) show that the distribution of angular momentum in the disc is far from being constant, and this can in fact suppress the instability (Daigne & Mochkovitch 1997).

In the context of low-mass X-ray binaries, observations performed with *RXTE* (van der Klis 2000) have shown that there are millisecond oscillations in systems containing neutron stars or black holes surrounded by an accretion disc. An important result, first noted in GRO#J1655 – 40 by Abramowicz & Kluźniak (2001), is that in at least four black hole sources (H1743 – 322, GRO J1655 – 40, XTE J1550 – 564 and GRS 915 + 105), two apparently stable peaks in the power spectrum appear at frequencies in the mHz range in a 3:2 ratio. A similar result was found by Abramowicz et al. (2003a) for the neutron star source Sco X-1. This lends support to the resonance model originally proposed by Abramowicz & Kluźniak (2001), and further developed in terms of parametric resonance in a thin disc by Abramowicz et al. (2003b) and Rebusco (2004). In this interpretation, the frequencies reflect epicyclic motion of perturbed flow lines in the accretion disc, or combinations between these and a fixed, perturbation frequency (Kluźniak et al. 2004; Lee, Abramowicz & Kluźniak 2004), perhaps due to the stellar spin in neutron star sources (Wijnands et al. 2003). Pressure coupling allows resonances to occur and manifest themselves in the X-ray light curve.

Recently, Zanotti et al. (2003) have shown that an extended torus can respond to external perturbations in a global fashion, in a series of modes the frequencies of which follow the sequence 2:3:4: These are attributed to acoustic p-modes within the torus, excited by an impulsive perturbation. Follow-up analytical and numerical work (Rezzolla, Yoshida & Zanotti 2003a; Montero, Rezzolla & Yoshida 2004) has extended these results, by calculating the set of corresponding eigenfrequencies (in height-integrated discs) and

^{*}E-mail: eduardo@astroscu.unam.mx

also by investigating the effects of different background metrics (e.g. Schwarzschild versus Kerr for a rotating hole). In all cases where a numerical experiment was carried out, the perturbation was impulsive and global, affecting the entire torus. This idea has now been advanced as an explanation for the kHz quasi-periodic oscillations (QPOs) in low-mass X-ray binaries containing the black hole candidates where the 3:2 frequency ratios have been reported, as mentioned above (Rezzolla et al. 2003b)

In this Letter we show that it is possible to excite these modes in a thick accretion disc for a perturbation that is local, only affecting a small portion of the disc strongly. A frequency ratio of 3:2 for the two strongest modes is apparent. The lower frequency itself is related to the radial epicyclic value for test particles in circular motion, shifted to a lower frequency because of the finite extent of the torus. The second frequency maintains a 3:2 relation with the first.

2 INITIAL CONDITIONS AND NUMERICAL METHOD

2.1 Hydrostatic equilibrium for a thick torus

We construct tori that are in hydrostatic equilibrium, have low mass, $m < M_{\text{BH}}$, and a radial extension $L \sim R$, where R is the distance separating the torus from the central mass, M_{BH} . They are thick in the sense that their vertical extent, H , is comparable to L . We neglect the self-gravity of the torus, and additionally assume azimuthal symmetry. A polytropic equation of state, $P = K \rho^\gamma$, has been used for the construction of initial conditions. Integrating the equations of hydrodynamics, it is possible to write

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \Phi_e + \Phi_0 = \text{constant}, \quad (1)$$

where Φ_e is the effective potential. Here Φ_0 can be interpreted as a filling factor of the effective potential well. Through its variation, tori of different sizes are constructed (Fig. 1 shows their cross-sections over one half of the r - z plane). The gravitational potential of the central mass is computed with the pseudo-Newtonian expression of Paczyński & Wiita (1980):

$$\Phi_{\text{PN}} = \frac{-GM_{\text{BH}}}{R - r_g} \quad (2)$$

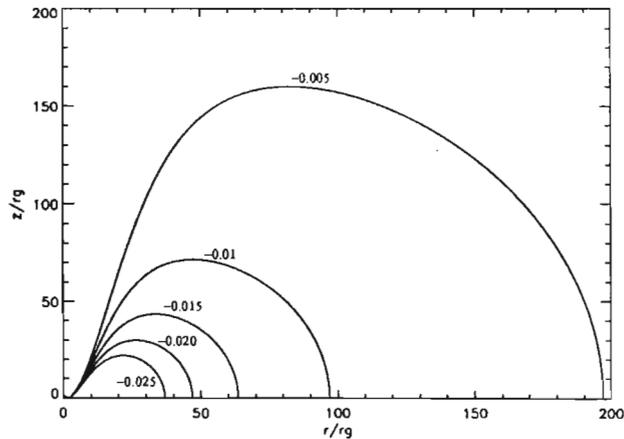


Figure 1. Surfaces of zero density and pressure, in meridional cross-section, for various tori constructed according to the procedure described in the text. Each curve corresponds to different values of the filling factor Φ_0 in units of $c^2/2$.

which describes the behaviour of a test particle in a strong gravitational field and, importantly for our purposes, reproduces the existence and positions of the marginally stable and marginally bound orbits in general relativity ($r_g = 2GM_{\text{BH}}/c^2$ denotes the gravitational radius throughout). With this potential, and using a constant distribution of specific angular momentum, $l(r) = \text{constant}$, the effective potential is

$$\Phi_e = \frac{-GM_{\text{BH}}}{R - r_g} + \int \frac{l(r')^2}{2r'^3} dr'. \quad (3)$$

Finally, we note that, with this potential, the frequency of small radial oscillations for a perturbed circular orbit (i.e. the radial epicyclic frequency) is given by

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{GM(r - 3r_g)}{r(r - r_g)^3} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

2.2 Numerical method

For our simulations, we have used smooth particle hydrodynamics [SPH, see Monaghan (1992) for a review], in a two-dimensional version using cylindrical coordinates. We refer the reader to Lee & Ramirez-Ruiz (2002) for details of the implementation. There is no physical viscosity present in the code, only the usual artificial viscosity to model the presence of shocks.

Initial conditions are generated by distributing N fluid elements over the torus volume after specifying values for M , $l(r)$ and Φ_0 , and relaxing them for several dynamical times in order to obtain a distribution close to equilibrium (see Fig. 2). This configuration is then evolved in time with the desired perturbation to study its dynamical behaviour.

Our initial configurations are thus non-accreting tori fully contained within their Roche lobe. Specifically, the inner edge of the disc and the inner Lagrange point, L_1 , are located at $r_{\text{in}} = 2.60r_g$ and $r_{L_1} = 2.25r_g$ respectively. During the dynamical evolution described below, no accretion takes place, so the potential produced by the black hole is unaltered.

The analysis of the data is carried out by performing the Fourier decomposition of the main hydrodynamic variables as functions of time (e.g. the position of the centre of the disc, the maximum and mean densities, and the various total energies).

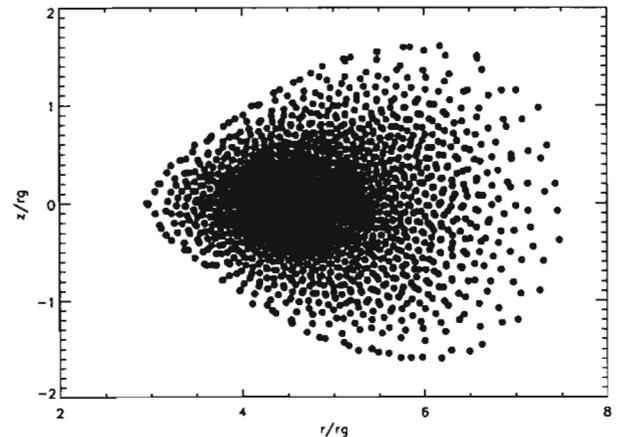


Figure 2. An example of a thick torus in hydrodynamical equilibrium. This snapshot shows the relaxed initial conditions. Each point represents a gas cell. The locus of maximum density is at $r = 4.25 r_g$.

3 INTRODUCING A PERTURBATION

The perturbation acting on the disc can be considered as arising from the central object, through its magnetic field, a deformation on its surface or a changing radiation field (in the case of neutron stars), or as the emission of gravitational waves from an accreting black hole. Instabilities in the accretion disc itself are another possible source of time variability, which can induce oscillations in the fluid. In either case, these would presumably be more intense at small radii. If the spin of the central object is involved in producing the perturbation, its amplitude will vary and repeat at intervals given by the inverse of the spin period, $\Delta T = 1/\nu_s$.

We have chosen, then, a perturbation that induces an acceleration in the disc given by

$$a_{\text{pert}} = -\eta a_g \exp\left(\frac{r_0 - r}{\delta r}\right) \sin(2\pi\nu_s t). \quad (5)$$

Here a_g is the acceleration due to gravity, r_0 is the outer edge of the torus and $\eta \ll 1$ is a parameter that modulates the strength of the perturbation. The exponential term decays on a scale $\delta r \simeq R$, the radial extent of the disc, thus reproducing the desired behaviour for this perturbative force, which will be strong near the inner radius and weak in the outer regions. This acceleration induces radial oscillations in the disc, which can be Fourier-analysed to extract the main frequencies as was done by Lee et al. (2004) recently for a slender torus.

4 RESULTS AND DISCUSSION

A Fourier transform of the total kinetic energy in the torus in a typical calculation is shown in Fig. 3. The black hole mass in this case was $2.5 M_\odot$, and the perturbation frequency was fixed at $\nu_s = 200$ Hz, which clearly shows up prominently in the spectrum as a narrow peak.

Two additional broad features are clearly seen, centred at $\nu_1 \approx 300$ Hz and $\nu_2 \approx 450$ Hz, and are, to the limit of our resolution, in a 3:2 ratio. The radial epicyclic frequency for a test particle at the locus of maximum density ($4.25r_g$) is in this case $\kappa = 426$ Hz (see equation 4). Trial runs with tori of different radial extent (Rubio-Herrera, in preparation) and a comparison with the work of Zanotti et al. (2003) and Rezzolla et al. (2003a) show clearly that the lower of the two peaks is simply the epicyclic frequency at the locus of maximum density, shifted to lower values because of the finite extent of the torus, i.e. the fundamental acoustic p-mode. The second peak at higher frequency is the second in the sequence 2:3:4:... of acoustic p-modes.

We draw from these results the following conclusions.

(1) Global modes of oscillation in thick tori, as studied in the relativistic regime (Zanotti et al. 2003), can be efficiently excited by a localized perturbation, affecting only the inner edge of the torus strongly. The characteristic frequencies apparent in the Fourier decomposition of the total internal energy exhibit the sequence 2:3:...

(2) The lower of the two frequencies in the series is the first acoustic p-mode, closely tied to the radial epicyclic frequency for test particles, and shifted to lower frequencies because of the finite extent of the torus.

The nature of the excitation mechanism, as stated above, is left as an open question. It could be some disturbance associated with the pulsar spin frequency in the case of neutron star systems, or oscillations in the disc itself which excite these modes. In either case, the

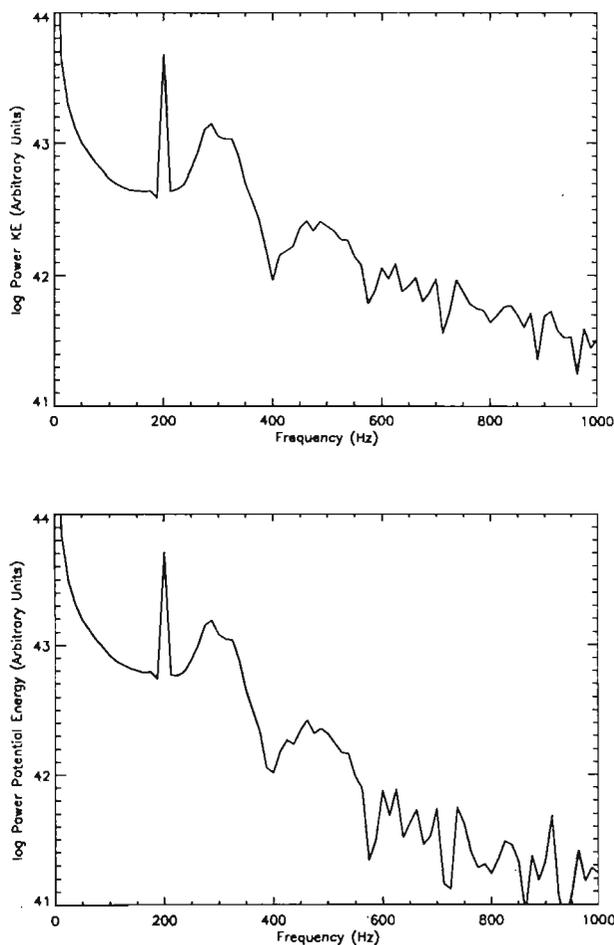


Figure 3. Fast Fourier transform spectra for the kinetic energy (top) and total potential energy (bottom), for a torus orbiting a $2.5 M_\odot$ black hole. From left to right, the first peak corresponds to the perturbation introduced at 200 Hz, the second corresponds to the radial epicyclic frequency, shifted to lower frequencies owing to the size of the torus (the first acoustic p-mode), and the third corresponds to 1.5 times the second.

modulation in the X-ray light curve will presumably occur in the innermost regions of the accretion flow. Since its inner boundary is defined most likely by the effects of strong gravity, one would expect that the frequencies would scale inversely with the mass of the central object, as is indeed the case (McClintock & Remillard 2004) for X-ray binaries – and may in principle allow for a mass determination in the intermediate-mass black hole candidates (Abramowicz et al. 2004).

Two potentially limiting simplifications in this study deserve justification. First, in the context of low-mass X-ray binaries, the ratio of disc mass to black hole mass is very low, $M_d/M_{\text{BH}} \ll 1$. Hence it is reasonable to suppose that the gravitational potential of the disc is negligible when compared with that of the black hole, as we have assumed. Secondly, we have not considered the effects of magnetic fields. This is simply because we wish to carry out a study of global, purely hydrodynamical modes, and does not imply that magneto-hydrodynamic (MHD) effects are negligible or irrelevant. Recently, Kato (2004) has obtained interesting results in the context of kHz QPOs through three-dimensional MHD calculations performed in a pseudo-Newtonian potential.

Finally, one may question the choice of a constant distribution of specific angular momentum within the torus, assumed here for simplicity and as a first step. However, we note that in viscous, hydrodynamical flows, even if the injection of matter at large distances occurs at nearly Keplerian values of the angular momentum, the flow near the compact object may follow a flatter distribution (Igumenshchev & Abramowicz 1999). The Papaloizou–Pringle instability (Papaloizou & Pringle 1984) appears when non-axisymmetric perturbations act on non-accreting discs with constant angular momentum. When accretion is taken into account, this instability is suppressed, as was shown by Blaes (1987). This leads to flat distributions of angular momentum near the central object and a power-law distribution in the outer region of the torus. We thus believe that it is reasonable to assume a constant angular momentum for the discs as a first approximation.

How the oscillations of the fluid in the disc may translate into variations in the X-ray light curve and be observed as kHz QPOs is ultimately still unsolved, and requires more complex physical processes than those included here. Assuming that oscillations at such frequencies do in fact occur as a result of the presence of inhomogeneities in the accretion flow, the luminosity modulation with account of space–time curvature in the vicinity of a black hole has been investigated by Schnittman & Bertschinger (2004) and Schnittman (2004). Their results indicate that a range of variation would in fact be reflected in the X-rays, which encourages the investigation of simple modes of fluid oscillation. In future work we will discuss the behaviour of discs with non-constant angular momentum subject to various perturbations.

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to acknowledge many suggestions and discussions on this matter with L. Rezzolla. Financial support for this work was provided by CONAcYT (36632E).

REFERENCES

- Abramowicz M. A., Calvani M., Nobili L., 1983, *Nat*, 302, 597
 Abramowicz M. A., Kluźniak W., 2001, *A&A*, 374, L19
 Abramowicz M. A., Bulik T., Bursa M., Kluźniak W., 2003a, *A&A*, 404, L21
 Abramowicz M. A., Karas V., Kluźniak W., Lee W. H., Rebusco P., 2003b, *PASJ*, 55, 467
 Abramowicz M. A., Kluźniak W., McClintock J. E., Remillard R., 2004, *ApJ*, 609, L63
 Blaes O. M., 1987, *MNRAS*, 227, 975
 Daigne F., Mochkovitch R., 1997, *MNRAS*, 285, L15
 Igumenshchev I. V., Abramowicz M. A., 1999, *MNRAS*, 303, 309
 Kato Y., 2004, *PASJ*, 56, 931
 Kluźniak W., Michelson P., Wagoner R., 1990, *ApJ*, 358, 538
 Kluźniak W., Abramowicz M. A., Kato S., Lee W. H., Stergioulas N., 2004, *ApJ*, 603, L89
 Lee W. H., 2001, *MNRAS*, 328, 583
 Lee W. H., Ramirez-Ruiz E., 2002, *ApJ*, 577, 893
 Lee W. H., Abramowicz M. A., Kluźniak W., 2004, *ApJ*, 603, L93
 McClintock J. E., Remillard R., 2004, in Lewin W. H. G., van der Klis M., eds, *Compact Stellar X-Ray Sources*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, in press (astro-ph/0306213)
 Mineshige S., Hosokawa T., Machida M., Matsumoto R., 2002, *PASJ*, 54, 655
 Monaghan J., 1992, *ARA&A*, 30, 543
 Montero P., Rezzolla L., Yoshida S., 2004, *MNRAS*, 354, 1040
 Narayan R., Paczyński B., Piran T., 1992, *ApJ*, 395, L83
 Paczyński B., Wiita J., 1980, *A&A*, 88, 23
 Papaloizou J. C. B., Pringle J. E., 1984, *MNRAS*, 208, 721
 Rebusco P., 2004, *PASJ*, 56, 553
 Rezzolla L., Yoshida S., Zanotti O., 2003a, *MNRAS*, 344, 978
 Rezzolla L., Yoshida S., Maccarone T. J., Zanotti O., 2003b, *MNRAS*, 344, L37
 Ruffert M., Janka H.-Th., 1999, *A&A*, 344, 573
 Schnittman J. D., 2004, *ApJ*, submitted (astro-ph/0407179)
 Schnittman J. D., Bertschinger E., 2004, *ApJ*, 606, 1098
 van der Klis M., 2000, *ARA&A*, 38, 717
 van Putten M. H. P. M., 2001, *Phys. Rev. Lett.*, 87, 091101
 Wagoner R., Silbergleit A., Ortega-Rodríguez M., 2001, *ApJ*, 559, L25
 Wijnands R., van der Klis M., Homan J., Chakrabarty D., Markwardt C., Morgan E., 2003, *Nat*, 424, 44
 Woosley S. E., 1993, *ApJ*, 405, 273
 Zanotti O., Rezzolla L., Font J., 2003, *MNRAS*, 341, 832
 Zurek W., Górski K., 1989, *ApJ*, 347, L47

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.