

01192



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

ANALISIS Y DISEÑO DE OBSERVADORES PARA EL MOTOR
DE INDUCCION SIN SENSORES MECANICOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERIA

AREA: ELECTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A :

SEBASTIAN IBARRA ROJAS



DIRECTOR DE TESIS: DR. JAIME ALBERTO MORENO PEREZ

CIUDAD UNIVERITARIA, MEXICO, D. F.

ABRIL 2005

m. 342593



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Análisis y Diseño de Observadores para el Motor de Inducción sin Sensores Mecánicos

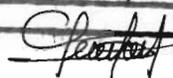
M. en I. Sebastián Ibarra Rojas
Director de tesis: Dr. Jaime A. Moreno Pérez
Co-director: Dr. Gerardo R. Espinosa Pérez

Abril 2005

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Sebastián Ibarra Rojas

FECHA: 05-04-05

FIRMA: 

Agradecimientos

Es muy posible que olvide agradecer a alguien importante para mí, por lo que le ofrezco una sincera disculpa por el olvido.

A mis padres por ser los iniciadores de esta obra. A Xóchitl por todo su amor, apoyo y comprensión, a mis hijos por aguantar muchos malos ratos y compartir a su padre con el trabajo. A mis asesores Dr. Jaime A. Moreno y Dr. Gerardo R. Espinosa por toda su paciencia y ayuda. A los miembros del jurado por su desinteresada ayuda y valiosos comentarios para la realización de este trabajo. Al Dr. José Cohen a quién agradezco su invaluable ayuda. A la familia Jacobo por ser mi familia también. A todos mis hermanos por estar siempre dispuestos a ayudar. A Mary y Chuy por ser un modelo y ejemplo a seguir. A Alberto y Alfredo Tejeda por su apoyo en todos los sentidos. A mis compañeros de posgrado Daniel, Paul, Edmundo y Cuauhtémoc siempre dispuestos a ayudar. A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser mi segunda casa y con quien siempre estaré en deuda. A la Universidad Autónoma de la Ciudad de México por darme una oportunidad de desarrollo. Al CONACYT por su valioso apoyo económico durante mis estudios de posgrado.

Vaya pues para todos, mi más sincero agradecimiento.

Resumen

En este trabajo se presenta, en detalle, un análisis global de las propiedades de observabilidad del motor de inducción en condición de operación sin sensores mecánicos. Dicho análisis se realiza utilizando los conceptos básicos de indistinguibilidad y detectabilidad de trayectorias de estado de los sistemas dinámicos. Los resultados del análisis se presentan con base a un modelo dinámico de error llamado la dinámica indistinguible del motor de inducción. En el desarrollo del modelo dinámico de error se propone, además, una metodología general aplicable a los sistemas dinámicos para obtener dicha dinámica indistinguible. Con el fin de mostrar algunas trayectorias indistinguibles del motor se presenta un diagrama de fase de la dinámica indistinguible del motor.

Un resultado importante obtenido con el uso de la dinámica indistinguible es la afirmación en el sentido de que bajo las condiciones de operación sin sensores mecánicos, el motor de inducción es inobservable para toda condición inicial y toda entrada, es decir, que no es posible estimar u observar los estados no medibles para todo tiempo, todas las condiciones del voltaje de entrada y todas las condiciones iniciales. La afirmación anterior representa una aportación importante al campo de control y diseño de observadores para el motor de inducción, debido que establece la existencia de condiciones de operación del motor de inducción para las cuales ningún observador, basado en el modelo, funcionará adecuadamente. Por lo que, la dinámica indistinguible se utilizó como una herramienta para la determinación de condiciones de inobservabilidad e indetectabilidad del motor de inducción.

En la primera parte de este trabajo se afirma la inexistencia de observadores, para la condición sin sensores mecánicos, que converjan a las trayectorias reales para toda condición inicial y entrada. Sin embargo, resulta clara la necesidad de contar con observadores que funcionen adecuadamente en ciertas condiciones de operación del motor, sobre todo en las más usuales. Por el motivo anterior, en este trabajo se presenta el diseño de tres observadores tipo Kalman para el motor de inducción en operación sin sensores mecánicos, observadores cuya convergencia se muestra para trayectorias detectables y condiciones de operación que generan tales trayectorias. El diseño de los tres observadores obedece a distintas formas de representación del modelo del motor de inducción. Para los tres diseños se presenta un análisis de convergencia. Dicho análisis se relaciona con los resultados sobre observabilidad de la primera parte del trabajo. Con el fin de considerar la variación, en operación, de algunos de los parámetros del motor se presenta un análisis de robustez que se basa en la teoría de perturbaciones regulares. Finalmente, con el propósito de mostrar el desempeño de los observadores se presentan resultados de simulación en diferentes condiciones de operación del motor de inducción. Los resultados de simulación muestran el desempeño de los observadores para algunas condiciones de operación mencionadas en la literatura como de bajo desempeño. Adicionalmente se incluyen resultados que muestran el desempeño de los observadores para algunas condiciones de indetectabilidad, cabe mencionar que dichos resultados son congruentes con lo anticipado en el análisis de observabilidad.

Abstract

A global analysis of the observability properties of the induction motor when it is operated without mechanical sensors is presented. This analysis is carried out using the basic concepts of indistinguishability and detectability of trajectories of the dynamical systems state. A error dynamic model called *indistinguishable dynamic* is used to present the analysis results. As a new result a new methodology applicable to nonlinear dynamical systems is obtained to get the indistinguishable dynamic. With the aim to show the motor indistinguishable trajectories a phase portrait is presented.

An important result obtained using the indistinguishable dynamics is the statement in the sense that under the operation conditions without mechanical sensors, the induction motor is unobservable for all initial condition and all inputs. in other words, it is not possible to estimate or to observe the non measurable states for all time, all the conditions of the input voltage and all the initial conditions. The previous statement represents an important contribution to the control theory and observers design fields for induction motors. due to it establishes the existence of operation conditions of the induction motor for whose any observer, model based, will work appropriately. The indistinguishable dynamic was used as a tool for the determination of unobservability and undetectability conditions of the induction motor.

The nonexistence of observers, to avoid mechanical measurements, that converge to the real trajectories for all initial conditions and inputs, was stated in the first part of this work. However, it is clear the necessity to have observers that work appropriately under certain (the more usual) operation conditions of the motor. For the this reason, in this work the design of three observers Kalman type is presented to estimate the mechanical variables, observers whose convergence is shown for detectable trajectories and operation conditions that generate such trajectories. The design of the three observers obeys different forms of representation of the pattern of the induction motor. For the three designs a convergence analysis is presented. This analysis is related with the results on observability of the first part of the work. With the purpose of considering the variation, in operation, of some of the parameters of the motor, an analysis of robustness is presented that is based in the theory of regular perturbations. Finally, with the purpose of showing the performance of the observers simulation results is presented under different conditions of operation of the induction motor. The simulation results show the performance of the observers for some operation conditions mentioned in the literature, like low performance. Additionally results are included that show the performance of the observers for some undetectability conditions, it is necessary to mention that these results are similar to those shown in the observability analysis.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes y motivación | 1 |
| 1.2. Revisión bibliográfica | 2 |
| 1.2.1. Revisión sobre análisis de observabilidad del motor de inducción | 2 |
| 1.2.2. Revisión sobre operación SSM del motor de inducción | 3 |
| 1.3. Formulación del problema | 7 |
| 1.4. Objetivos | 7 |
| 1.5. Principales aportes | 7 |
| 1.6. Organización del trabajo | 8 |
| 2. Análisis de observabilidad y detectabilidad del motor de inducción en operación SSM | 9 |
| 2.1. Nociones de observabilidad y detectabilidad | 9 |
| 2.1.1. Indistinguibilidad, observabilidad y detectabilidad | 10 |
| 2.1.2. Relación entre la existencia de observadores y la detectabilidad | 11 |
| 2.2. Modelo de error y dinámica indistinguible (DI) | 11 |
| 2.2.1. Construcción del modelo dinámico de error para el MI | 12 |
| 2.2.2. Dinámica indistinguible del MI: representación implícita | 14 |
| 2.2.3. Dinámica indistinguible del MI: representación explícita | 14 |
| 2.2.4. Diagrama de fase de la dinámica indistinguible | 20 |
| 2.3. Propiedades de observabilidad, detectabilidad y existencia de observadores para el MI | 21 |
| 2.4. Análisis de casos particulares de operación del MI usando la dinámica indistinguible | 23 |
| 2.4.1. Operación con flujo cero | 23 |
| 2.4.2. Operación a velocidad constante | 23 |
| 2.4.3. Operación con velocidad y par de carga constantes | 26 |
| 2.4.4. Operación con velocidad cero y par de carga constante | 27 |
| 2.5. Síntesis | 28 |
| 3. Diseño de Observadores | 29 |
| 3.1. Consideraciones generales para el diseño de los observadores | 29 |
| 3.2. Diseño de un Observador para Velocidad Constante (OVC) | 30 |
| 3.2.1. Motivación y formulación del problema | 30 |
| 3.2.2. Transformación del modelo del MI | 31 |
| 3.2.3. Construcción del observador | 32 |
| 3.2.4. Análisis de convergencia del observador OVC | 32 |
| 3.2.5. Síntesis de la sección | 34 |
| 3.3. Diseño de un Observador basado en un Estimador de Condiciones Iniciales (OECI) | 35 |
| 3.3.1. Motivación | 35 |
| 3.3.2. Construcción del observador | 35 |
| 3.3.3. Análisis de convergencia del estimador de condiciones iniciales | 39 |
| 3.3.4. Relación entre las propiedades de convergencia del OECI y la Dinámica Indistinguible | 40 |
| 3.3.5. Realización del OECI | 40 |
| 3.3.6. Eliminación de restricciones para el observador OECI | 41 |

| | |
|--|-----------|
| 3.3.7. Síntesis de la sección | 42 |
| 3.4. Diseño de un Observador de estados basado en un Modelo Extendido (OME) | 42 |
| 3.4.1. Motivación | 42 |
| 3.4.2. Construcción del observador | 43 |
| 3.4.3. Análisis de convergencia del observador OME | 45 |
| 3.4.4. Relación entre las propiedades de convergencia del OME y la Dinámica Indistinguible. | 46 |
| 3.4.5. Síntesis de la sección | 46 |
| 3.5. Un análisis de robustez de los observadores | 46 |
| 3.6. Resultados de simulación | 48 |
| 3.6.1. Condiciones de operación | 49 |
| 3.6.2. Parámetros utilizados para simulación | 49 |
| 3.6.3. Resultados de simulación para condiciones nominales | 50 |
| 3.6.4. Resultados de simulación para condiciones de baja frecuencia del voltaje de estator | 50 |
| 3.6.5. Resultados de simulación para condiciones de frecuencia cero | 52 |
| 3.6.6. Resultados de simulación para una revisión de robustez | 55 |
| 3.6.7. Síntesis de la sección | 57 |
| 3.7. Síntesis | 58 |
| 4. Conclusiones y Trabajo Futuro | 59 |
| 4.1. Conclusiones | 59 |
| 4.2. Trabajo futuro | 60 |
| A. Filtro de Kalman-Bucy | 61 |
| A.1. Filtro de Kalman | 61 |
| A.2. Ventajas del FK | 61 |
| A.3. Filtro de Kalman-Bucy | 62 |
| A.3.1. Problema de estimación óptima | 63 |
| A.3.2. Solución al problema de estimación óptima | 63 |
| B. Dinámica Indistinguible II | 66 |
| B.1. Dinámica Indistinguible con cambio de coordenadas | 66 |
| C. Dinámica indistinguible para sistemas lineales (DISL) | 69 |
| C.1. Desarrollo de la dinámica indistinguible para sistemas lineales | 69 |
| C.2. Relación de la DISL con los resultados sobre observabilidad para sistemas lineales | 70 |
| C.3. Determinación de la Grammiana de observabilidad de la DISL | 71 |
| Bibliografía | 72 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Diagrama de fase de la dinámica indistinguible | 20 |
| 2.2. Trayectorias indistinguibles con condiciones iniciales arbitrarias y velocidad constante | 25 |
| 2.3. Trayectorias indistinguibles para condiciones iniciales cercanas y velocidad constante | 26 |
| 3.1. Estructura básica del observador OECl | 35 |
| 3.2. Condiciones nominales, T_L constante | 50 |
| 3.3. Error para condiciones nominales con T_L constante | 51 |
| 3.4. Condiciones nominales, T_L variante | 51 |
| 3.5. Error para condiciones nominales con T_L variante | 52 |
| 3.6. Condiciones de baja frecuencia, T_L constante. | 53 |
| 3.7. Error para condiciones de baja frecuencia con T_L constante. | 53 |
| 3.8. Condiciones de baja frecuencia, T_L variante. | 54 |
| 3.9. Error para condiciones de baja frecuencia con T_L variante. | 54 |
| 3.10. Condiciones de frecuencia cero con T_L constante (condición de indetectabilidad). | 55 |
| 3.11. Condiciones de frecuencia cero con T_L variante. | 56 |
| 3.12. Revisión de robustez, condiciones nominales con T_L constante | 56 |
| 3.13. Revisión de robustez, condiciones nominales con T_L variante | 57 |

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presentan los antecedentes del problema a resolver y un resumen del estado del arte mediante la revisión bibliográfica. Se formula el problema estableciendo las principales restricciones, se define el alcance del trabajo por medio de los objetivos generales, y sus principales aportes. Finalmente se presenta la organización del trabajo.

1.1. Antecedentes y motivación

En los últimos años se ha vislumbrado la posibilidad de utilizar el motor de inducción en tareas que estaban asignadas, de forma casi total, a los motores de corriente directa. Esto se debe principalmente a los recientes avances tecnológicos y de la teoría de control.

En el campo de la ingeniería existen diversas razones para tratar de sustituir a los motores de corriente directa en aplicaciones industriales por los motores de inducción, entre las que se pueden mencionar: los motores de inducción son más baratos que los de corriente directa (cd), son casi libres de mantenimiento, de menores dimensiones y mecánicamente más robustos que los motores de cd para las mismas condiciones de aplicación.

Desde el punto de vista de la teoría de control se pueden mencionar algunas de las estrategias de control que han tenido avances importantes y que han permitido la aplicabilidad de los motores de inducción, a saber: control adaptable, control basado en pasividad, control por medio de redes neuronales, control difuso, etc.

Con respecto a los avances en el campo tecnológico, se puede mencionar el gran desarrollo que han tenido los sistemas electrónicos de adquisición y procesamiento de señales. Dichos sistemas están por lo general, basados en microcontroladores, microprocesadores y procesadores digitales de señales y son utilizados en la implantación de estrategias o leyes de control. Cabe mencionar que el costo de estos sistemas ha disminuido de forma considerable, haciendo factible la implantación a nivel industrial de las estrategias de control más exigentes y cuyo desempeño depende de la velocidad de cálculo de dichos sistemas.

Por otro lado, en el ambiente industrial existen aplicaciones donde se utiliza al motor de inducción como actuador. Dichas aplicaciones hacen uso de sensores (para retroalimentar las señales necesarias para realizar la acción de control) de posición o velocidad, tales como: tacogeneradores y codificadores ópticos, los cuales se colocan sobre la flecha del motor. Se puede afirmar que una de las razones para evitar el uso de sensores mecánicos es la económica, pues estos resultan caros y de difícil mantenimiento. Es digno de mencionar que dichos sistemas con sensores mecánicos presentan un desempeño muy aceptable, sin embargo, dichos sensores provocan fenómenos indeseables en el sistema controlador-motor (cargan al motor, disminuyen la confiabilidad del sistema y requieren de atención especial).

Debido a los problemas mencionados en el párrafo anterior, en años recientes se han propuesto sistemas controlador-motor sin sensores mecánicos (SSM) con las consiguientes ventajas en reducción de costo, aumento de confiabilidad y no introducción de efectos parásitos a la dinámica del sistema. El control sin sensores mecánicos persigue básicamente

lo siguiente: *conseguir un desempeño muy cercano al control con sensores mecánicos. en todo su rango de operación y bajo cualquier condición inicial de carga.*

Existe una gran cantidad de trabajo reportado, tanto con sensores mecánicos como sin sensores, que tiene que ver con controladores de motores de inducción. Éste se ha convertido, entonces, en un campo de trabajo de investigación muy activo, principalmente por la conveniencia de contar con sistemas de control confiables, económicos y de alto desempeño. además de que la naturaleza altamente no lineal de los motores de inducción, los convierte en un sistema atractivo para los investigadores del área de teoría de control.

En lo que respecta al desarrollo de sistemas de control del motor de inducción sin sensores mecánicos, por lo general es necesario realizar estimación u observación de las variables no medibles utilizando, para ello, mediciones de las salidas y el modelo matemático del sistema. Los métodos para realizar tal estimación u observación son muy diversos y provocan la generación de los sistemas de control basados en observador. En los trabajos reportados para el control basado en observador del motor de inducción sin sensores mecánicos, se hace referencia de manera recurrente a la aparición de diversos problemas, que limitan la aplicabilidad de este tipo de controladores. Se presentan diferentes soluciones para tratar de resolver los problemas encontrados, sin embargo, hasta el momento, en ningún trabajo conocido se ha dado una solución satisfactoria a éstos, incluso no se ha explicado de forma clara y completa las razones del bajo desempeño de la mayoría de éstos.

En los sistemas de control basados en observador se presenta una relación de dependencia del controlador al desempeño del observador, es decir, el buen desempeño del sistema de control depende, en gran medida, del buen desempeño del observador. Es necesario mencionar, en este punto, que son de vital importancia los conceptos de controlabilidad y observabilidad de los sistemas dinámicos aplicados al motor de inducción, sobre los que debe descansar el diseño del sistema de controlador basado en observador, pues se podrá mostrar que si un sistema es no observable, no importa que técnica se utilice en el diseño del observador, no importa cuan sofisticado sea éste, nunca funcionará adecuadamente.

A pesar de la gran cantidad de trabajos reportados sobre el diseño de observadores para el motor de inducción en operación sin sensores mecánicos y del gran esfuerzo de investigación dedicado al control basado en observador, los reportes sobre las propiedades de observabilidad del motor son muy pocos. *de hecho no existe un análisis de observabilidad del tipo global*, de ahí entonces la necesidad de realizar dicho análisis, que además incluya los resultados de tipo local reportados y que pueda explicar, por un lado, por qué funcionan los sistemas controlador-observador para ciertos rangos de velocidad del motor de inducción y por otro lado, qué pasa cuando éstos no funcionan adecuadamente. Otro aspecto importante a considerar es el diseño de un observador para el motor de inducción en operación sin sensores mecánicos, donde dicho diseño se apoye y se pueda justificar el desempeño con base en los resultados del análisis de observabilidad.

1.2. Revisión bibliográfica

En esta sección se presenta un resumen del trabajo realizado, hasta la fecha, en relación con el diseño de sistemas de control para el motor de inducción en operación sin sensores mecánicos y sobre las propiedades de observabilidad del motor de inducción, que no pretende ser exhaustiva. En ella se consideran los trabajos más recientes y su propósito principal es presentar el estado del arte en el tema, con el fin de poner en su contexto al problema a resolver en esta tesis.

1.2.1. Revisión sobre análisis de observabilidad del motor de inducción

Desde la aparición del primer reporte de control sin sensores mecánicos (Abbondanti and Brennen, 1975) y de la gran cantidad de trabajos reportados donde se realiza control del motor, el primer trabajo conocido que presenta de manera formal un análisis de las propiedades de observabilidad del motor de inducción en operación SSM es (Canudas De Wit *et al.*, 2000). En este trabajo se realiza un *análisis local* (modelo clásico de voltaje) utilizando la matriz de observabilidad (verificando la condición de rango) y se llega a la conclusión que el motor de inducción

pierde observabilidad si el *voltaje de excitación es constante*. En (Wang *et al.*, 2001) se presenta el análisis de *un caso particular* de observabilidad no lineal para el motor de inducción, en donde se asume voltaje de excitación senoidal. En este trabajo se concluye que cuando la frecuencia del voltaje de excitación es igual a cero, el voltaje se convierte a una entrada singular que provoca *indistinguibilidad* y como consecuencia pérdida de observabilidad. Como complemento a esta parte de la revisión, se puede mencionar a (Harnefors, 2000) donde se tratan los fenómenos de inestabilidad (bajo desempeño) para control indirecto de campo. Se muestra que el fenómeno de inestabilidad se presenta tanto *en baja velocidad del rotor como a velocidad nominal*. En este último caso el fenómeno se presenta cuando el motor es frenado, o cuando se presentan cambios de tipo escalón en el par de carga. En relación con los trabajos anteriormente comentados es claro que son análisis de casos particulares para diferentes condiciones de operación del motor.

1.2.2. Revisión sobre operación SSM del motor de inducción

Las diferentes técnicas, para obtener información de la velocidad sin utilizar sensores mecánicos, pueden clasificarse, según (Rajashékara *et al.*, 1996), de manera general como:

1. Métodos de lazo abierto, utilizando el deslizamiento.
2. Métodos de lazo cerrado, utilizando estimadores y/o observadores de velocidad.

Adicionalmente, las técnicas anteriores pueden sub-clasificarse en las siguientes metodologías de implantación:

Método de cálculo de la frecuencia de deslizamiento

El cálculo de la frecuencia de deslizamiento (la diferencia entre la frecuencia del estator y la frecuencia eléctrica, correspondiente a la velocidad del rotor), en forma directa, del retraso de fase entre el voltaje y la corriente de estator se presenta en (Abbondanti and Brennen, 1975). En este trabajo se presenta una relación algebraica, obtenida de las ecuaciones de estado del motor de inducción, entre el ángulo de fase y el deslizamiento. Con dicha relación y conociendo las variables eléctricas es posible calcular la velocidad del rotor. Dicha relación es definida en un rango limitado de la frecuencia de deslizamiento y es aplicable cuando no se requiere una rápida respuesta dinámica del sistema. En este trabajo se reportan *problemas de bajo desempeño en baja velocidad del rotor*, lo que implica limitaciones de aplicabilidad y posibles problemas de observabilidad para esta condición de operación.

Estimación de flujo y control vectorial de flujo

En (Takeshita *et al.*, 2002) se propone un esquema de control que estima la velocidad del rotor por medio de una relación algebraica, llamada la velocidad secundaria de fuerza magnetomotriz. Dicha relación algebraica es función de la velocidad del rotor y la corriente de magnetización. En este trabajo se propone una solución al problema de frecuencia de excitación cero, esto es, se presenta una forma de realizar la estimación de velocidad, inyectando una corriente de estator de excitación "fluctuante". Se presentan resultados experimentales en estado estacionario para frecuencia de excitación cero y velocidad de rotor mayor que cero. Se mencionan *dificultades de estimación de velocidad* para velocidades de rotor menores de 40 (*rpm*) y frecuencia de excitación igual a cero.

En (Holtz and Quan, 2002) se presenta un estimador de flujo por medio de un integrador puro. En este trabajo se consideran todos los fenómenos que pueden causar desviación y deriva en la medición del voltaje de estator (incluso revisando los módulos componentes del inversor) para el cálculo de la integral del voltaje, con la que se estima el flujo de estator, de tal forma que se puede realizar la estimación a muy baja velocidad del rotor y muy baja frecuencia de excitación de estator. Se presenta un estimador de resistencia de estator y se muestran resultados experimentales los cuales son muy aceptables, esto es, se presentan resultados de estimación para velocidades del rotor de $0.01 \left(\frac{rad}{seg}\right)$ y frecuencias de excitación del orden de 0.16 (Hz) . Sin embargo los autores mencionan que la operación, adecuada, de sistemas de control SSM *no es posible* utilizando, únicamente, el modelo convencional del motor. Este comentario es importante pues permite vislumbrar posibles problemas de observabilidad del modelo del MI.

Observadores para control directo de par y flujo

Los esquemas de control de par directo y control por campo orientado son los dos esquemas más utilizados en control SSM, puesto que su desempeño es considerablemente mejor que los métodos de estimación en lazo abierto. En (Wolbank *et al.*, 2002a) se presenta un estudio comparativo entre estas dos metodologías de control, donde queda claro que el desempeño a velocidad nominal es casi el mismo y para ambos casos el desempeño en *baja velocidad* es reducido, mencionando que ninguno de los dos es la solución para *velocidad cero*. Para el caso de velocidad cero se mencionan los *métodos no basados en el modelo*. Sin embargo dichos métodos, hasta ahora, solo están *justificados* de manera experimental.

En (Rasmussen *et al.*, 2002) se presenta el diseño de un observador de flujo basado en la teoría de Lyapunov, se presentan resultados experimentales y el análisis de convergencia. A pesar del buen desempeño del sistema presentado en los resultados experimentales no se llega a la operación en velocidad cero y los autores mencionan al respecto que existen *limitaciones físicas* que evitan su operación bajo estas condiciones.

En (Pai *et al.*, 2000) se propone el diseño de un observador no lineal para el flujo de estator, la velocidad y el par de carga, considerando constante al par de carga ($\dot{T}_L = 0$). Para el diseño se hace una transformación de coordenadas, utilizando la inversa de la matriz de observabilidad y se presentan resultados experimentales cambiando únicamente el par de carga, es necesario mencionar que no se prueban casos reportados de bajo desempeño. El hecho de utilizar la matriz de observabilidad como matriz de transformación de coordenadas le confiere a este trabajo la naturaleza de *local*.

Sistemas adaptables basados en modelo de referencia (MRAS)

Este tipo de método de estimación se conoce por su bajo desempeño en las bajas frecuencias de excitación, tal como aparece en (Madadi and Chang, 2002), donde, incluso, se menciona que si el sistema de control se lleva al extremo de trabajar a frecuencia cero, entonces la amplitud de la salida del control MRAS tiende a cero y por lo tanto se pierde el control de velocidad.

En (Holtz, 2002) se mencionan dos formas de hacer estimación MRAS, así como una forma de mejorar el método utilizando elementos de retardo en lugar de integradores. Se menciona que existen problemas de desempeño (deriva y exactitud) a bajas frecuencias de excitación y además que existe un frecuencia mínima de operación para este método, bajo la cual el sistema se hace "inexacto".

En (Cao-Minh *et al.*, 2001) se presenta un sistema de control MRAS, donde se utiliza la potencia reactiva como función de adaptación del sistema. En éste, la estabilidad del sistema es verificada por la teoría de hiperestabilidad. Se presentan resultados experimentales, así mismo se menciona que este sistema de control *no funciona para frecuencias de excitación muy bajas o cero*. Es claro de lo anterior que con esta técnica, también, se presentan problemas en la estimación de velocidad y existen condiciones de operación del MI que provocan tales problemas.

Estimación y adaptación de parámetros en operación SSM

El desempeño de los sistemas de control, en general, depende de la buena aproximación de los parámetros del modelo a los de la planta (particularmente para el motor de inducción). De ahí entonces que sea necesario diseñar sistemas adaptables que garanticen el buen desempeño del sistema total cuando existan variaciones de los parámetros. En (Bodson and Chiasson, 2002) se presenta un análisis comparativo del método adaptable con métodos no lineales y mínimos cuadrados para el diseño de observadores. Para el observador adaptable se considera a la dinámica mecánica muy lenta y se presenta un algoritmo de identificación. Se muestra el impacto de la variación de los parámetros por medio de simulación y se menciona que es necesario estimar la velocidad del rotor y los parámetros del motor al mismo tiempo.

En (Tajima *et al.*, 2002) se despreja la dinámica mecánica en el modelo del motor y se presenta un algoritmo de estimación, en línea, de velocidad y resistencia de rotor y estator. Se presentan resultados de simulación y se menciona que el *desempeño del sistema decrece con respecto a la disminución de la velocidad del rotor*.

En (Zheng and Loparo, 1999) se propone un esquema adaptable para estimar velocidad y flujo del rotor, se contruye un observador considerando a la velocidad y resistencia del rotor como parámetros desconocidos. En este trabajo se utiliza un modelo singularmente perturbado y la ley de estimación de velocidad es un regulador basado en integración. La buena operación del observador se fundamenta en la condición de excitación persistente. Al igual que en los casos

anteriores se presentan problemas en la observación de velocidad.

Técnicas de filtrado de Kalman

Una de las mayores ventajas de utilizar filtros de Kalman es la tolerancia a errores de modelado y al ruido de medición. Como su mayor desventaja se puede mencionar la gran carga computacional necesaria para realizar la estimación. En (Qiongquan and Zhiyue, 2000) se presenta la aplicación de un filtro extendido de Kalman de orden reducido, donde la velocidad del rotor se considera constante. En este trabajo se definen dos modelos de error, los cuales cubren diferente rango de velocidad y son conmutados para mejorar *la exactitud de la identificación a baja velocidad*. Se mencionan problemas de *bajo desempeño para bajas velocidades de rotor*. Cabe mencionar que en este trabajo se dan algunas “guías” prácticas para la sintonización del observador, además se presentan resultados de simulación. En (Cuibus *et al.*, 2000) se presenta la aplicación del filtro extendido de Kalman para el motor de inducción. Se presentan resultados experimentales donde se compara el desempeño de éste con otras metodologías de estimación de velocidad, sin embargo no se menciona nada sobre la naturaleza del par de carga aplicado. De (Elbuluk and Kankam, 1997) los algoritmos de filtrado de Kalman y su extensión son observadores robustos y eficientes para sistemas lineales y no lineales respectivamente. Se utiliza un modelo en el tiempo continuo para el filtro de Kalman, mientras el filtro extendido de Kalman requiere un modelo en tiempo discreto.

Observadores de velocidad y flujo en control SSM

Una de las ventajas de utilizar observadores es la mejoría en el desempeño de los sistemas de control, pues el uso (cuidadoso) de la retroalimentación puede tolerar variaciones de cierta magnitud de los parámetros de la planta. Existe una gran diversidad de trabajos reportados que utilizan observadores. En (Holtz, 2002) se comentan las características principales de: Observadores adaptables, observadores no lineales de orden completo, observadores no lineales de orden reducido, observadores por modos deslizantes. En (Feemster *et al.*, 2001) se presenta el diseño de un observador basado en la técnica de “backstepping”, donde se considera par de carga conocido. En este trabajo se presenta una lista de los defectos de los sistemas de control SSM, esto es

- Falta de un desarrollo matemático riguroso o falta de prueba de estabilidad para el sistema de lazo cerrado.
- Se desprecian las no linealidades del sistema electro-mecánico.
- No se utiliza el modelo de orden completo del sistema, esto es, la dinámica de la corriente de estator y/o la dinámica mecánica son despreciadas.

En (Ide *et al.*, 2002) se presenta un método híbrido (estimador-observador), donde el estimador se basa en las saliencias de la máquina para estimar la velocidad (incluyendo a la frecuencia del voltaje de excitación cero), de tal forma que se pretende evitar la *zona de bajo desempeño*, de frecuencia cero, conmutando entre observador y estimador. El observador, para velocidad de rotor, es del tipo adaptable. Se presentan resultados experimentales, donde se hace una excursión de la velocidad de positiva a negativa, pasando por cero. Sin embargo no permanece en cero y no puede decirse que este sistema funciona, aceptablemente, para velocidad cero. En (Pavlov and Zaremba, 2001) se presentan observadores de flujo y velocidad utilizando una forma especial del modelo del motor (se puede obtener el flujo con una relación algebraica). Se presentan resultados experimentales y las pruebas se realizan lejos de la frecuencia de excitación cero. La aportación es que se evita el uso de integradores para el cálculo del flujo.

Estimación basada en efectos parásitos en el motor

En un motor de inducción, las ranuras sobre la superficie del núcleo de hierro del estator y el rotor producen componentes armónicos (de ranura) en el flujo del entrehierro, los cuales inducen voltajes armónicos en los devanados de estator cuando el rotor gira. Por tanto, es posible determinar el deslizamiento de los componentes armónicos presentes en los voltajes de fase del estator. Los armónicos del rotor en el entrehierro modulan el enlazamiento de flujo sobre el estator, con una frecuencia proporcional a la velocidad del rotor. De esta forma la velocidad puede ser estimada utilizando la magnitud de los armónicos de voltaje presentes en el estator o utilizando la frecuencia de los armónicos, la cual también está relacionada a la velocidad del rotor. La forma de generar los voltajes armónicos es aplicar señales de alta frecuencia superpuestas con el voltaje de excitación. Algunos trabajos reportados que utilizan

estos fenómenos son (Asher, 2002), (Holtz, 2000). Cabe mencionar que en los trabajos referenciados se reporta un buen desempeño, sin embargo estos métodos no utilizan el modelo del MI.

Otro trabajo en relación con el uso de los efectos parásitos para la estimación de la velocidad es (Wolbank *et al.*, 2002b), donde se menciona que el desempeño de los sistemas de control SSM *se deteriora en baja frecuencia* de operación o frecuencia cero. Para realizar la estimación de velocidad a frecuencia (de excitación) cero se utilizan las saliencias de flujo causadas por la saturación de núcleo y las ranuras del rotor. En este trabajo se reportan resultados de estimación para diferentes tamaños de ranuras del núcleo del rotor. Es necesario mencionar que éste trabajo presenta un resultado para un MI particular, es decir, se trata de un diseño especial del MI.

En (Holtz, 2002) se mencionan estos fenómenos (a baja frecuencia del voltaje de excitación), además del cambio que se da en éstos cuando el tamaño de las ranuras es variable dentro del mismo núcleo del rotor.

Redes neuronales como método de estimación en control SSM

Según (Elbuluk and Kankam, 1997) las redes neuronales (NN) tienen la capacidad de aprendizaje para aproximar funciones no lineales muy complicadas y por lo tanto son consideradas como un método universal de aproximación de funciones. Así mismo éstas tienen capacidad de adaptación, lo cual permite que se puedan aplicar cuando el modelo de la planta es parcialmente conocido. Es posible pensar en la utilización de las redes neuronales para la estimación de velocidad y flujo en el motor. Una de las principales desventajas de las NN es la gran cantidad de tiempo que se tiene que invertir en su entrenamiento.

A pesar de las ventajas mencionadas anteriormente en (Cuibus *et al.*, 2000) se presenta un estudio comparativo entre NN, Filtro de Kalman y Observador tipo Luenberger. En este trabajo se reporta un mejor desempeño del Filtro de Kalman y observador tipo Luenberger respecto al obtenido con NN.

En (Campbell and Sumner, 2002) se presenta la aplicación de una red neuronal para la estimación en línea de la resistencia del rotor. Esta estimación junto con un algoritmo basado en MRAS (para la estimación de velocidad) forman el sistema SSM. La red propuesta es una red de tres capas con retroalimentación y el algoritmo de entrenamiento utilizado es el de retropropagación. Se presentan resultados experimentales. Sin embargo se reporta un *error considerable para bajas velocidades* del rotor.

Síntesis de la revisión bibliográfica

En relación con la revisión bibliográfica se puede mencionar que existen problemas de bajo desempeño para los sistemas de control SSM del MI para todas las metodologías de diseño revisadas. El bajo desempeño observado está en razón, principalmente, de las condiciones de operación del MI. Los problemas encontrados de bajo desempeño se intentan resolver por medio de las técnicas de estimación y observación incluso cambiando la estructura física del motor (diseños especiales). Sin embargo, no se ha dado la importancia debida a las propiedades de observabilidad del modelo del MI. Se puede mencionar que sólo se conoce un trabajo sobre análisis de las propiedades de observabilidad y éste es del tipo local. A continuación se presenta una lista de los principales problemas reportados para los sistemas de control SSM del MI.

1. Los esquemas de control SSM del MI, presentan regiones de operación de bajo desempeño, por ejemplo, baja frecuencia de excitación y baja velocidad de rotor. En algunos trabajos se menciona que se presentan problemas de observabilidad, también, en condiciones nominales de operación.
2. No se conoce un análisis del tipo global de las propiedades de observabilidad del MI.
3. Falta un desarrollo matemático riguroso o falta de prueba de estabilidad para el sistema de lazo cerrado (controlador-observador).
4. Se desprecian las no linealidades del sistema electromecánico del MI.
5. Se utilizan métodos de estimación y observación que no usan el modelo del MI. En algunos otros se presentan soluciones para diseños particulares del MI.

1.3. Formulación del problema

El problema a resolver en este trabajo de tesis es: desarrollar un análisis de tipo global de las propiedades de observabilidad del MI en operación sin sensores mecánicos y diseñar un observador para el MI que utilice de alguna forma el resultado del análisis de observabilidad.

Para resolver el problema planteado se propone utilizar las mejores condiciones para la observabilidad, es decir, se supone que el modelo del motor de inducción describe de manera exacta al sistema, los parámetros del modelo son constantes y conocidos y que el par de carga (T_L) es constante y conocido.

El modelo a utilizar es 2ϕ clásico del motor de inducción estándar (Meisel, 1966)

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -f\omega + \alpha\psi^T\mathbb{J}i - \frac{T_L}{J} \\ \dot{\psi} &= -a\psi - n_p\omega\mathbb{J}\psi + Ma\dot{i} \\ \frac{di}{dt} &= \beta[a\psi + n_p\omega\mathbb{J}\psi - (Ma + b)i + cu]\end{aligned}\quad (1.1)$$

Donde: la velocidad del rotor ω , los flujos del rotor $\psi = [\psi_a, \psi_b]^T$, y las corrientes de estator $i = [i_a, i_b]^T$ son los estados: los voltajes de estator u y el par de carga T_L son señales externas, aplicadas al motor: la inercia del rotor $J > 0$, las inductancias de estator y rotor (L_s, L_r) > 0 , la inductancia mutua $M > 0$, las resistencias de estator y rotor (R_s, R_r) ≥ 0 , $R_r > 0$, la fricción del rotor $f \geq 0$ y el número de pares de polos $n_p > 0$ son los parámetros: \mathbb{J} y \mathbb{I} son, una matriz anti-simétrica y la matriz identidad respectivamente, de la forma

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con $\alpha = \frac{n_p M}{J L_r}$, $a = \frac{R_r}{L_r}$, $b = \frac{L_r R_r}{M}$, $\beta = \frac{M}{L_s L_r - M^2}$ y $c = \frac{L_r}{M}$.

1.4. Objetivos

Los objetivos que persigue este trabajo de tesis son:

- Realizar un análisis global de las propiedades de observabilidad y detectabilidad del motor de inducción, utilizando el modelo fundamental de voltaje.
- Diseñar un observador de flujo y velocidad para el motor de inducción en operación SSM y relacionar el desempeño de éste con el análisis de observabilidad.

1.5. Principales aportes

Las aportaciones más importantes en relación con los problemas planteados son:

Con el fin de realizar un análisis de tipo global de las propiedades de observabilidad del MI, se desarrolla una *metodología general* para sistemas no lineales y se aplica al MI. Dicha metodología se presenta en detalle y puede ser aplicada también a sistemas lineales. Ésta se fundamenta en el concepto de indistinguibilidad para sistemas no lineales, presentado en (Hermann and Krener, 1977) y consiste en la búsqueda y determinación, a partir del modelo del sistema (el MI para este caso), de un modelo dinámico de error representado por un conjunto de ecuaciones álgebra-diferenciales, para el que, el conjunto de soluciones, si existen, representan el conjunto de trayectorias indistinguibles para las cuales el sistema es inobservable.

Con base en el modelo dinámico de error encontrado (llamado la Dinámica Indistinguible del MI), y utilizando el concepto de detectabilidad, se muestra que algunas trayectorias indistinguibles del MI son indetectables y como resultado de lo anterior se enuncian, *de manera global, las propiedades de observabilidad del MI*, lo que además nos permite hacer afirmaciones en el sentido de la *inexistencia de observadores* que converjan para cualquier valor de

entrada y condiciones iniciales del MI.

Parte del trabajo desarrollado en esta tesis se presentó en el artículo de revista (Ibarra-Rojas *et al.*, 2001) y en el siguiente artículo de congreso (Moreno *et al.*, 2002).

No obstante lo mencionado en el párrafo anterior con respecto a la inexistencia de observadores (en el sentido indicado), siempre será necesario contar con observadores de velocidad y flujo para el MI en operación SSM, por lo que *se presenta el diseño de tres observadores de velocidad y flujo* considerando las limitaciones impuestas por las propiedades de observabilidad antes mencionadas. Así mismo *se presenta una interesante relación* entre las propiedades de convergencia de estos observadores con la dinámica indistinguible. Dicha relación, debido a la estructura de los observadores propuestos, toma la forma de las condiciones de excitación persistente conocidas en el control adaptable para sistemas lineales. Esta relación muestra explícitamente para los observadores propuestos, que las condiciones de convergencia determinadas implican que las trayectorias correspondientes no pueden ser trayectorias indetectables. Dichas relaciones confirman los resultados sobre el análisis de las propiedades de observabilidad encontrados.

1.6. Organización del trabajo

En el Capítulo 2 se presentan los antecedentes teóricos básicos sobre indistinguibilidad y detectabilidad que permiten el desarrollo del modelo dinámico de error, llamado dinámica indistinguible. Esta dinámica indistinguible (DI) se desarrolla en detalle para el caso del motor de inducción (MI). Se muestra, de manera gráfica, que dicha DI tiene una gran cantidad de soluciones. Posteriormente, con el análisis de la DI se presentan de manera formal las propiedades de observabilidad del MI. Adicionalmente se presentan casos particulares en las condiciones de operación del MI relacionados con la DI y que sirven para ilustrar la utilidad de la DI.

En el Capítulo 3 se presenta el diseño de tres observadores para el MI en operación sin sensores mecánicos (SSM). Todos ellos tienen la estructura de un observador tipo Kalman, los cuales son diseñados para tres distintas representaciones equivalentes del MI, obtenidas bajo diferentes consideraciones. Se eligen observadores tipo Kalman, ya que todos los modelos del MI encontrados son afines o casi afines en los estados a estimar, con lo que el problema de observación se realiza para sistemas lineales variantes en el tiempo. Para este tipo de sistemas el observador tipo Kalman es más apropiado que uno tipo Luenberger. La idea básica para obtener el modelo del MI que se utiliza para el diseño del primer observador es suponer que la velocidad del rotor es una constante desconocida. Se realiza entonces una transformación del modelo del MI que permite diseñar un observador adaptable, que estima los flujos y el parámetro desconocido que representa la velocidad del rotor. Sin embargo, la transformación se realiza sin tener en cuenta la hipótesis de constancia de la velocidad y solo posteriormente se hace tal aproximación para realizar el diseño del observador. El segundo observador presenta un metodología novedosa de diseño de observadores que se basa en un estimador lineal de condiciones iniciales (del tipo Kalman) y en un reconstructor de estados, basado en el estimador de condiciones iniciales. El tercer observador se diseña sobre un modelo aumentado del MI que posee la propiedad de ser afín en los estados no medibles, es decir, los flujos y la velocidad. Para cada uno de los tres diseños se hace un análisis de convergencia y se analiza la relación entre las propiedades de convergencia del observador y la DI. Como una forma de medir el desempeño de los observadores diseñados se presentan resultados de simulación para varias condiciones de operación, en particular para los casos de bajo desempeño reportados en la literatura.

En el Capítulo 4 se presentan las conclusiones del trabajo realizado y se sugieren algunos temas adicionales de investigación relacionados con este trabajo.

En el Apéndice A se recopilan los resultados más importantes del Filtro de Kalman requeridos para este trabajo. En el Apéndice B se presenta otro modelo de la DI que se relaciona con el observador OEI. El Apéndice C presenta el desarrollo de la dinámica indistinguible para sistemas lineales. Dicho desarrollo se realiza con la misma metodología que para el MI. En este apéndice, se relaciona la DI para sistemas lineales con los resultados conocidos sobre observabilidad para sistemas lineales.

Capítulo 2

Análisis de observabilidad y detectabilidad del motor de inducción en operación SSM

En este capítulo se presenta el resultado principal del trabajo: la Dinámica Indistinguible (DI) del MI en operación SSM. El desarrollo del mismo se realiza presentando inicialmente las definiciones de indistinguibilidad, detectabilidad y su relación con la observabilidad de los sistemas no lineales. Posteriormente se presenta una metodología para la obtención de un modelo dinámico de error del que se obtiene la DI. Se muestra el diagrama de fase de la DI con el fin de mostrar algunas de las trayectorias indistinguibles del MI y la facilidad con que éstas se presentan. Como un resultado del trabajo anterior se presentan las propiedades de observabilidad, detectabilidad del MI en operación SSM. Finalmente, utilizando a la DI, se muestran algunos casos particulares (algunos en simulación) de operación del MI en operación SSM, presentados en la literatura como casos de bajo desempeño.

2.1. Nociones de observabilidad y detectabilidad

En el análisis y diseño de controladores para sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, en muchos de los casos se consideran accesibles (para medición) todos los estados, situación que en general no es realista. Se puede afirmar que las variables necesarias para realizar alguna acción de control en un sistema no lineal (lineal), no están disponibles (al menos no todas), por lo que en muchos casos será necesario utilizar observadores para contar con alguna estimación de estas variables o estados no medibles y de esta forma poder realizar el control de manera conveniente. Existen además otras razones por las cuales es recomendable utilizar observadores, entre las que se pueden mencionar, por ejemplo: económicas, pues el uso de observadores sustituye el uso de sensores; desempeño, el uso de sensores influye sobre el comportamiento dinámico del sistema; confiabilidad, pues esta guarda relación inversa con el número de sensores (mientras el sistema no sea redundante con respecto a los sensores).

En términos generales, se puede decir que un observador es un sistema dinámico auxiliar que permite reconstruir variables del sistema, utilizando principalmente su información entrada-salida y sus ecuaciones dinámicas. La existencia de observadores está fuertemente relacionada con la existencia y tipo de trayectorias indistinguibles. A grandes rasgos se puede decir que dos trayectorias (estados) de un sistema (no lineal) son indistinguibles entre sí si éstas son diferentes aunque la entrada y la salida del sistema sean iguales.

Sea el sistema no lineal descrito por

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x \in D_x \subset \mathbf{R}^n$ es el vector de estados, $u \in U \subset \mathbf{R}^p$ es el vector de entradas, $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$ es el vector de salidas, y D_x , U , y Y son conjuntos abiertos y conectados. Las funciones f y h son suficientemente suaves

definidas en $(x, u) \in D_x \times U$, respectivamente. La solución de (2.1) que pasa a través de x_0 en $t = 0$, correspondiendo a la función de entrada $u(\cdot)$, es denotada como $x(t, x_0, u(\cdot))$. En una forma similar, la salida se expresa como $y(t, x_0, u(\cdot)) = h(x(t, x_0, u(\cdot)))$.¹ Considere que el sistema Σ es *completo*, esto es, las trayectorias de estado $x(t)$ son definidas para todo $t \geq 0$, toda condición inicial $x_0 \in D_x$ y cualquier entrada $u(\cdot) \in U$.

Con la definición anterior de sistema no lineal, es posible definir en un contexto general las siguientes propiedades importantes (instrumentales para el desarrollo de este trabajo).

2.1.1. Indistinguibilidad, observabilidad y detectabilidad

El desarrollo siguiente se basa en gran medida en el concepto de indistinguibilidad presentado por (Hermann and Krener, 1977). Este concepto es auxiliar en la definición del concepto de detectabilidad y ambos están muy relacionados con la existencia de observadores para sistemas no lineales. Considere la siguiente definición.

Definición 2.1 (*Indistinguibilidad, Detectabilidad y Observabilidad*) Considere una entrada $u(\cdot)$ para el sistema (2.1) y una condición inicial $x_0 \in D_x$. Si $\bar{x} \in D_x$, otra condición inicial, es tal que $y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, \bar{x}, u(\cdot))$, para todo $t \in [0, T)$, para algún $T > 0$ y son diferentes para $t \geq T$ entonces \bar{x} es un estado $u(\cdot)$ -indistinguible de x_0 en el intervalo $[0, T)$. El conjunto de todos los estados $u(\cdot)$ -indistinguibles de x_0 será denotado por $\mathcal{I}_{(u, x)}$.

El sistema (2.1) es *observable* si para cualquier $x_0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in U$ se satisfacen que $\mathcal{I}_{(u, x)} = \{x_0\}$.

El sistema (2.1) es *localmente observable* si para cualquier $x_0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in U$ existe una vecindad $U_x \subset D_x$ de x_0 tal que para $U_x \cap \mathcal{I}_{(u, x)} = \{x_0\}$.

El sistema (2.1) es *detectable* si para cualquier $x_0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in U$ se satisfacen que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \bar{x}, u(\cdot)) - x(t, x_0, u(\cdot))\| = 0, \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{I}_{(u, x)}.$$

El sistema (2.1) es *localmente detectable* si para cualquier $x_0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in U$ existe una vecindad $U_x \subset D_x$ de x_0 tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \bar{x}, u(\cdot)) - x(t, x_0, u(\cdot))\| = 0, \quad \forall \bar{x} \in U_x \cap \mathcal{I}_{(u, x)}.$$

Comentario 2.1 Observe que los estados indistinguibles x_0 y \bar{x} definen a su vez a las trayectorias indistinguibles $x(t, x_0, u(\cdot))$, $x(t, \bar{x}, u(\cdot))$ respectivamente, definidas en el intervalo $t \in [0, T)$.

Comentario 2.2 Note que la definición de trayectorias indistinguibles para un intervalo de tiempo $[0, T)$, permite la definición de detectabilidad, pues se puede observar que es posible recuperar la distinguibilidad después de un tiempo finito T .

De la definición anterior es posible darse cuenta que la propiedad de detectabilidad (local) excluye la existencia (local) de trayectorias indistinguibles divergentes. De hecho si existen trayectorias indistinguibles divergentes, entonces ningún observador que se diseñe para el sistema podrá converger para toda trayectoria del sistema. Con el fin de formalizar la afirmación anterior considere la siguiente

Definición 2.2 (*Observador*) Considere un sistema

$$\Omega : \begin{cases} \dot{z} = \varphi(z, u, y) & , \quad z(0) = z_0 \\ \dot{\hat{x}} = \chi(z, u, y) & . \end{cases} \quad (2.2)$$

dónde $z \in D_z \subset \mathbb{R}^r$ y $\hat{x} \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ son vectores de estados, φ, χ son funciones suficientemente suaves definidas en $(z, u, y) \in D_z \times U \times Y$, con D_z un subconjunto abierto y conectado de \mathbb{R}^r . $z(t, z_0, u(\cdot), y(\cdot))$ represento la solución de (2.2) pasando a través z_0 en $t = 0$ y correspondiendo a $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$.

El sistema (2.2) es llamado un *Observador* para el sistema (2.1) si existe $z_0 \in D_z$ tal que para todo $x_0 \in D_x$, y para toda $u(\cdot) \in U$ se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t, z_0, u(t), y(t, x_0, u(t))) - x(t, x_0, u(\cdot))\| = 0$$

¹Si no hay confusión, estas pueden escribirse simplemente como $x(t)$ y $y(t)$

El sistema (2.2) es llamado un Observador local para el sistema (2.1) si para todo $x \in D_x$, existe V_x una vecindad abierta de x , y existe $z_0 \in D_z$ tal que para todo $x_0 \in V_x$, y para toda $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ se satisface la ecuación (2.2).

De la definición anterior se puede observar que la única restricción para que exista el observador, es que tiene que existir convergencia para toda trayectoria, esto es, para cualquier condición inicial y cualquier entrada a la planta.

2.1.2. Relación entre la existencia de observadores y la detectabilidad

El siguiente resultado es válido para toda definición razonable de observador, debido a que ésta depende de las restricciones estructurales del sistema y no de la estructura del observador.

Lema 2.1 *Suponga que el sistema (2.1) tiene un observador global (local). Entonces el sistema (2.1) es (localmente) detectable.*

Prueba. Por contradicción, suponga que el sistema (2.1) no es detectable. Entonces existe una entrada $u(\cdot)$ y dos estados $x_1, x_2 \in D_x$ tales que $y(t, x_1, u(\cdot)) = y(t, x_2, u(\cdot))$, para todo $t \geq 0$, como no es detectable, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_1, u(\cdot)) - x(t, x_2, u(\cdot))\| \neq 0$.

Para un observador global Ω (2.2) de Σ , existe $z_0 \in D_z$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_i, u(\cdot)) - \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(t, x_i, u(\cdot)))\| = 0, i = 1, 2.$$

Observe que $\hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(t, x_1, u(\cdot))) = \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(t, x_2, u(\cdot)))$ para todo $t \geq 0$.

Pero debido a que

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_1, u(\cdot)) - x(t, x_2, u(\cdot))\| = \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_1, u(\cdot)) - \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(\cdot)) + \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(\cdot)) - x(t, x_2, u(\cdot))\| \leq \\ & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [\|x(t, x_1, u(\cdot)) - \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(\cdot))\| + \|x(t, x_2, u(\cdot)) - \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(\cdot))\|] = 0 \end{aligned}$$

con lo que la consideración inicial sobre x_1 y x_2 se contradice.

Para la versión local, suponga que el sistema (2.1) no es localmente detectable, entonces existe una $u(\cdot)$ y un estado $x_1 \in D_x$ tales que para cualquier vecindad abierta U_{x_1} de x_1 , existe un $x_2 \in U_{x_1}$ tal que $y(t, x_1, u(\cdot)) = y(t, x_2, u(\cdot))$, para todo $t \geq 0$, pero $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_1, u(\cdot)) - x(t, x_2, u(\cdot))\| \neq 0$. Para un observador local Ω (2.2) de Σ existen una vecindad abierta V_{x_1} de x_1 y $z_0 \in D_z$ tales que para cualquier $x_2 \in V_{x_1}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_i, u(\cdot)) - \hat{x}(t, z_0, u(\cdot), y(t, x_i, u(\cdot)))\| = 0$ $i = 1, 2$. Pero por los mismos argumentos que en el caso global esto nos lleva a una contradicción. ■

2.2. Modelo de error y dinámica indistinguible (DI)

El propósito de introducir un modelo de error para sistemas no lineales, y en particular para el MLI, es desarrollar una herramienta que permita encontrar las trayectorias indistinguibles y poder deducir si éstas son detectables o no. En un contexto general de sistemas, el desarrollo de un modelo dinámico de error que represente el comportamiento indistinguible se puede formular de la siguiente manera:

Considere un sistema dinámico no lineal de la forma (2.1) con las variables de entrada y salida (u, y) medibles. Asuma que la estructura del sistema es conocida (incluyendo los parámetros). Determine si para el sistema (2.1) existe un modelo dinámico de error que represente el comportamiento indistinguible de trayectorias, esto es

1. *Determine un modelo dinámico de error que represente todas las trayectorias indistinguibles.*
2. *Determine si estas trayectorias indistinguibles son convergentes o no.*

En el caso particular del MI se puede realizar lo siguiente con respecto a la determinación del modelo dinámico de error. En el estudio bibliográfico se menciona que los esquemas de control SSM para el motor de inducción tienen problemas de bajo desempeño y aún llegan a inestabilizarse en el rango de baja velocidad de rotor (Camudas De Wit *et al.*, 2000), (Bodson and Chiasson, 2002), (Holtz, 1995), (Rajasekara *et al.*, 1996), etc. Se menciona, en algunos trabajos, la presencia de problemas de observabilidad en estado estacionario y con cambios, del tipo escalón, en el par de carga según (Harnefors, 2000).

Considerando lo anterior se asume la siguiente hipótesis: **el motor de inducción tiene problemas de observabilidad en diferentes condiciones de operación.**

Por lo tanto, la tarea más importante a realizar en esta parte del trabajo, será verificar la hipótesis anterior basados en el modelo dinámico de error. En las siguientes secciones se mostrará que las trayectorias indistinguibles existen para el caso del MI cuando está en operación SSM. Es importante mencionar que el resultado que se presenta en las siguientes secciones es de naturaleza global y además, es posible analizar, entre otros, los casos reportados en la literatura con problemas de observabilidad del MI.

Considerando los resultados de la sección anterior donde se establecen relaciones claras entre la existencia de observadores y la detectabilidad, y a su vez entre la detectabilidad y el concepto de trayectoria indistinguible, se puede construir un modelo dinámico de error y con éste verificar la existencia de trayectorias indistinguibles, detectables o no, en el MI y definir, apoyados en esto, las propiedades de observabilidad del MI.

2.2.1. Construcción del modelo dinámico de error para el MI

A continuación se presenta el desarrollo del modelo dinámico de error. El procedimiento es general y se puede aplicar a cualquier sistema no lineal y lineal. Aunque, en esta sección se presenta para determinar el modelo de error del MI se muestra en el Apéndice C que se puede aplicar a sistemas lineales y esta metodología conduce a los resultados conocidos sobre observabilidad para este tipo de sistemas.

Considere el modelo clásico, equivalente 2ϕ , del motor de inducción (Meisel, 1966) (1.1)

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -f\omega + \alpha\psi^T \mathbb{J}i - \frac{T_L}{J} \\ \dot{\psi} &= -\alpha\psi - n_p\omega \mathbb{J}\psi + M\alpha i \\ \frac{di}{dt} &= \beta[\alpha\psi + n_p\omega \mathbb{J}\psi - (Ma + b)i + cu]\end{aligned}\quad (2.3)$$

dónde la velocidad del rotor $\omega \in \mathbb{R}$, los flujos del rotor $\psi = [\psi_a, \psi_b]^T \in \mathbb{R}^2$, y las corrientes de estator $i = [i_a, i_b]^T \in \mathbb{R}^2$ son los estados; los voltajes de estator u y el par de carga T_L son señales externas, aplicadas al motor; la inercia del rotor $J > 0$, las inductancias de estator y rotor $(L_s, L_r) > 0$, la inductancia mutua $M > 0$, las resistencias de estator y rotor $(R_s) \geq 0, R_r > 0$, la fricción del rotor $f \geq 0$ y el número de pares de polos $n_p > 0$ son los parámetros (perfectamente conocidos); \mathbb{J} y \mathbb{I} son una matriz anti-simétrica y la matriz identidad respectivamente, de la forma

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que $\alpha = \frac{n_p M}{J L_r}$, $a = \frac{R_r}{L_r}$, $b = \frac{L_r R_s}{M}$, $\beta = \frac{M}{L_s L_r - M^2}$ y $c = \frac{L_r}{M}$.

Tomando en cuenta la Definición 2.1 y el modelo del MI (2.3) se puede pensar en el siguiente experimento:

Considere dos motores de inducción exactamente iguales (mismo modelo y parámetros) con las mismas condiciones de entrada, esto es voltaje de estator u y par de carga T_L , en donde ambos presentan la misma corriente i de salida y cada uno es inicializado con diferente condición inicial.

¿Qué se podría esperar de las trayectorias de estado internas, esto es, velocidad ω y flujo ψ ?

1. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes, para todo $t > 0$.
2. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes pero que converjan entre sí cuando $t \rightarrow \infty$.

El primer caso, implica que hay indistinguibilidad, debido a que con las mismas condiciones de entrada-salida se tienen estados internos diferentes. Esta condición de indistinguibilidad sería provocada por la función de voltaje de entrada u , de aquí el nombre de u -indistinguible (Definición 2.1). Adicionalmente, la condición de indistinguibilidad provoca que el MI sea inobservable.

El segundo caso implica, también indistinguibilidad, pero cuando $t \rightarrow \infty$ se recupera la distinguibilidad, es decir, hay detectabilidad. Esto implica (de acuerdo al Lema 2.1 y Definición 2.2) que es posible construir un observador que converja para estas condiciones de operación. Por lo tanto el caso que nos interesa es el primero, esto es, cuando se presenta la indistinguibilidad y más que eso, no hay detectabilidad.

Utilizando el experimento anterior, como motivación, es posible obtener un modelo dinámico de error utilizando el modelo (2.3), considerando las mejores condiciones de operación para la observabilidad (que los parámetros del modelo conocidos, que i, u, T_L son señales medidas y que ω y ψ son señales no medibles). El argumento de considerar las mejores condiciones de observabilidad es simple, pues si el MI es inobservable para estas condiciones lo será (aún más) también para las peores condiciones de observabilidad. El hecho de considerar a ω y ψ como señales no medibles establece la condición de operación SSM del MI.

Considere los siguientes modelos con las condiciones iniciales (arbitrarias) indicadas.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\omega}_1 = -f\omega_1 + \alpha\psi_1^T \mathbb{J}i_1 - \frac{T_L}{J}, & \omega_1(0) = \omega_{10} \\ \dot{\psi}_1 = -a\psi_1 - n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 + Ma i_1, & \psi_1(0) = \psi_{10} \\ \frac{di_1}{dt} = \beta [a\psi_1 + n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 - (Ma + b)i_1 + cu], & i_1(0) = i_{10} \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\omega}_2 = -f\omega_2 + \alpha\psi_2^T \mathbb{J}i_2 - \frac{T_L}{J}, & \omega_2(0) = \omega_{20} \\ \dot{\psi}_2 = -a\psi_2 - n_p\omega_2 \mathbb{J}\psi_2 + Ma i_2, & \psi_2(0) = \psi_{20} \\ \frac{di_2}{dt} = \beta [a\psi_2 + n_p\omega_2 \mathbb{J}\psi_2 - (Ma + b)i_2 + cu], & i_2(0) = i_{20} \end{cases}$$

Definiendo las variables de error, involucrando a las señales no medidas (caso SSM)

$$\begin{aligned} \epsilon &\triangleq \omega_1 - \omega_2 \Rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 \\ \Delta &\triangleq \psi_1 - \psi_2 \Rightarrow \dot{\Delta} = \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 \\ e &= i_1 - i_2 \Rightarrow \dot{e} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

se tiene que

$$\dot{\epsilon} = -f\omega_1 + \alpha\psi_1^T \mathbb{J}i_1 - \frac{T_L}{J} - \left[-f\omega_2 + \alpha\psi_2^T \mathbb{J}i_2 - \frac{T_L}{J} \right]$$

de donde

$$\dot{\epsilon} = f(-\omega_1 + \omega_2) + \alpha [\psi_1^T \mathbb{J}i_1 - (\psi_1 - \Delta)^T \mathbb{J}(i_1 - e)]$$

por lo que

$$\dot{\epsilon} = -f\epsilon + \alpha [\psi_1^T \mathbb{J}i_1 - (\psi_1 - \Delta)^T \mathbb{J}(i_1 - e)] \quad (2.4)$$

Por otro lado

$$\dot{\Delta} = -a\psi_1 - n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 + Ma i_1 - [-a\psi_2 - n_p\omega_2 \mathbb{J}\psi_2 + Ma i_2]$$

que es equivalente a

$$\dot{\Delta} = -a\Delta - n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 + n_p(\omega_1 - \epsilon) \mathbb{J}(\psi_1 - \Delta) + Ma e \quad (2.5)$$

Finalmente, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \beta [a\psi_1 + n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 - (Ma + b)i_1 + cu] - \beta [a\psi_2 + n_p\omega_2 \mathbb{J}\psi_2 - (Ma + b)i_2 + cu] \\ \dot{e} &= \beta [a\Delta + n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 - n_p(\omega_1 - \epsilon) \mathbb{J}(\psi_1 - \Delta) - (Ma + b)e] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ordenando las ecuaciones de Σ_1 con (2.4), (2.5) y (2.6) se puede obtener el siguiente sistema que en adelante será llamado el modelo de error

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\omega}_1 = -f\omega_1 + \alpha\psi_1^T \mathbb{J}i_1 - \frac{T_L}{J}, & \omega_1(0) = \omega_{10} \\ \dot{\psi}_1 = -a\psi_1 - n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 + Ma i_1, & \psi_1(0) = \psi_{10} \\ \frac{di_1}{dt} = \beta [a\psi_1 + n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 - (Ma + b)i_1 + cu], & i_1(0) = i_{10} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\Xi : \begin{cases} \dot{\epsilon} = -f\epsilon + \alpha [\psi_1^T \mathbb{J}i_1 - (\psi_1 - \Delta)^T \mathbb{J}(i_1 - e)], & \epsilon(0) = \omega_{10} - \omega_{20} \\ \dot{\Delta} = -a\Delta - n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 + n_p(\omega_1 - \epsilon) \mathbb{J}(\psi_1 - \Delta) + Ma e, & \Delta(0) = \psi_{10} - \psi_{20} \\ \dot{e} = \beta [a\Delta + n_p\omega_1 \mathbb{J}\psi_1 - n_p(\omega_1 - \epsilon) \mathbb{J}(\psi_1 - \Delta) + (Ma + b)e], & e(0) = i_{10} - i_{20} \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2.2. Dinámica indistinguible del MI: representación implícita

Considerando el modelo dinámico de error formado por los sistemas (2.7) y (2.8) se puede obtener un sistema de ecuaciones álgebra-diferenciales, la dinámica indistinguible (DI) para el MI. Para lo cual, considere que se presentan las **condiciones de indistinguibilidad**, es decir, que existe una entrada $v(\cdot)$, un par de carga T_L iguales para ambos motores y un conjunto de condiciones iniciales tales que la salida de ambos motores es igual, esto es, $i = i_1 = i_2$ para todo $t \geq 0$.

Con esta consideración se puede mostrar (de las ecuaciones de error) que $e = 0 \Rightarrow \dot{e} = 0$. Sustituyendo $e = 0$ en la primer ecuación de Ξ se obtiene

$$\dot{\epsilon} = -f\epsilon + \alpha\Delta^T \mathbb{J}i \quad (2.9)$$

Sustituyendo $e = 0$ en la segunda ecuación de Ξ se obtiene

$$\dot{\Delta} = -a\Delta - n_p(\omega_1 - \epsilon)\mathbb{J}\Delta - n_p\epsilon\mathbb{J}\psi_1 \quad (2.10)$$

Usando $e = 0$ y $\dot{e} = 0$ en la tercer ecuación de Ξ se puede obtener la siguiente ecuación

$$0 = a\Delta + n_p(\omega_1 - \epsilon)\mathbb{J}\Delta + n_p\epsilon\mathbb{J}\psi_1 \quad (2.11)$$

donde el lado derecho de (2.10) es igual al lado derecho de (2.11) por lo que se puede decir que para la condición de indistinguibilidad $\dot{\Delta} = 0$, lo que implica que $\Delta = cte$

De acuerdo con los resultados anteriores el sistema formado por Σ y Ξ (modelo de error) se puede escribir como ²

$$DI : \begin{cases} \dot{\omega} = -f\omega + \alpha\psi^T \mathbb{J}i - \frac{T_L}{J} \\ \dot{\psi} = -a\psi - n_p\omega\mathbb{J}\psi + M\alpha i \\ \frac{di}{dt} = \beta[a\psi + n_p\omega\mathbb{J}\psi - (\lambda I a + b)i + cu] \\ \dot{\epsilon} = -f\epsilon + \alpha\Delta^T \mathbb{J}i \\ \dot{\Delta} = 0 \\ 0 = a\Delta + n_p(\omega - \epsilon)\mathbb{J}\Delta + n_p\epsilon\mathbb{J}\psi \end{cases} \quad (2.12)$$

El sistema DAE (2.12) será llamado la Dinámica Indistinguible del MI. Éste se puede interpretar como la dinámica zero del sistema (2.7-2.8), que se puede ver como la conexión en cascada de la planta Σ y un sistema dinámico de error Ξ . Es importante mencionar que el resultado anterior (2.12) es de naturaleza global, pues representa todas las trayectorias indistinguibles (detectables o no detectables) para el modelo del motor de inducción (1.1).

Con base en el resultado anterior se puede establecer la siguiente proposición

Proposición 2.1 *Considere el motor de inducción caracterizado por (1.1), bajo condiciones de indistinguibilidad. El conjunto de soluciones, continuas, del sistema de ecuaciones álgebra-diferenciales (2.12) está en correspondencia uno a uno con el conjunto de trayectorias indistinguibles del motor de inducción, es decir, $(\omega(\cdot), \psi(\cdot), i(\cdot), \epsilon(\cdot), \Delta(\cdot), T_L(\cdot), u(\cdot))$, con $(\omega(\cdot), \psi(\cdot), i(\cdot), \epsilon(\cdot), \Delta(\cdot))$ continuas es una solución de (2.12) si y sólo si las trayectorias $(\omega_1(\cdot), \psi_1(\cdot), i(\cdot), T_L(\cdot), u(\cdot))$ y $(\omega_2(\cdot), \psi_2(\cdot), i(\cdot), T_L(\cdot), u(\cdot))$ son trayectorias indistinguibles del motor de inducción (1.1).*

2.2.3. Dinámica indistinguible del MI: representación explícita

Las trayectorias indistinguibles del MI corresponden a un subconjunto de trayectorias del sistema (2.7-2.8) que tiene una salida cero, esto es, $e = 0$. Esto se puede describir por una familia de sistemas dinámicos que viven en sub-variedades de \mathbb{R}^{10} del espacio de estados de (2.7-2.8), de esta forma, las DAEs ³ se pueden interpretar como ecuaciones diferenciales definidas sobre variedades, según (Rheinboldt, 1984). En la siguiente sección se presentan todas las posibles ecuaciones diferenciales (DE) definidas sobre variedades y que describen a la dinámica indistinguible del MI.

²Eliminando los subíndices, debido a que el sistema queda en función de las variables de error y las del motor Σ

³Sistemas de ecuaciones álgebra-diferenciales

Dinámica Indistinguible en sub-variedad

Usando un procedimiento similar al utilizado para encontrar la dinámica cero de un sistema, se puede mostrar que la DI (2.12) se puede representar por un sistema de ecuaciones diferenciales definido en una subvariedad \mathcal{M} del espacio de estados, es decir, considerando a la última ecuación de (2.12) como la ecuación de salida, se puede obtener con facilidad el vector de flujos ψ y derivando esta misma ecuación se puede obtener el vector de corrientes i en función de las variables de error y la velocidad. La ecuación matricial que define al vector i genera también la subvariedad de existencia de la DI.

A continuación se presenta el sistema de ecuaciones diferenciales que definen a la DI de forma explícita. El desarrollo de la misma se presenta en la prueba de la Proposición 2.2

$$\dot{\omega} = -f\omega + \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) - \frac{M n_p \epsilon^2}{J(M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)} T_L \quad (2.13)$$

$$i = - \left[f + \frac{\alpha \Delta^T \Delta (a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon))}{M a n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta} \right] \epsilon \quad (2.14)$$

$$\dot{\Delta} = 0$$

con

$$\begin{aligned} \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) &\triangleq \frac{\alpha \Delta^T \Delta p(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta)}{a(M n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta)(M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)} \\ p(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) &\triangleq a^2(\epsilon - 2\omega)(M n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta) + \\ &+ \{\alpha(\epsilon - 2\omega)\Delta^T \Delta + (\omega - \epsilon)(M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)\} \{a(a+f) - n_p^2 \omega(\omega - \epsilon)\} \end{aligned}$$

sobre la variedad

$$\mathcal{M} = \left\{ (\omega, \epsilon, \Delta) \in \mathbb{R}^4; \epsilon \neq \sqrt{\frac{\alpha}{M n_p}} \Delta^T \Delta, \epsilon \neq 0 \right\} \quad (2.15)$$

Adicionalmente es posible mostrar que las trayectorias de la DI que no pertenecen a la subvariedad \mathcal{M} tienden a los puntos de equilibrio de (2.12). Si $\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{M n_p}} \Delta^T \Delta$, entonces las soluciones de (2.12) quedan definidas por el siguiente punto de equilibrio (de (2.12))

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{n_p \epsilon} (a\mathbb{J} - n_p(m - \epsilon)\mathbb{I})\Delta \\ i &= \frac{1}{M f a} (a\mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \\ u &= \frac{b}{M a r} (a\mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \\ T_L &= -J f \omega + J \alpha \psi^T \mathbb{J} i \end{aligned} \quad (2.16)$$

por los parámetros del MI y por los puntos $(\epsilon_+, \omega_{++})$, $(\epsilon_+, \omega_{+-})$, $(\epsilon_-, \omega_{-+})$ y $(\epsilon_-, \omega_{--})$ con

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha}{M n_p} \Delta^T \Delta} \\ \omega_{\pm} &= \frac{\epsilon_{\pm}}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4 M n_p} \Delta^T \Delta + \frac{a^2 + a f}{n_p^2}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

En relación con el resultado anterior se establece la siguiente

Proposición 2.2 *Asuma que T_L es diferenciable. El conjunto de trayectorias indistinguibles (no triviales) del motor de inducción (1.1) está en correspondencia uno a uno con la unión del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -f\omega + \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) - \frac{M n_p \epsilon^2}{J(\lambda f n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)} T_L \\ \dot{\epsilon} &= - \left[f + \frac{\alpha \Delta^T \Delta (a(a+f) - n_p^2 \omega(\omega - \epsilon))}{M a n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta} \right] \epsilon \\ \dot{\Delta} &= 0\end{aligned}\quad (2.18)$$

con

$$\begin{aligned}\rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) &\triangleq \frac{\alpha \Delta^T \Delta p(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta)}{\alpha (M n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta) (M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)} \\ p(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) &\triangleq a^2 (\epsilon - 2\omega) (M n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta) + \\ &+ \{ \alpha (\epsilon - 2\omega) \Delta^T \Delta + (\omega - \epsilon) (M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta) \} \{ a(a+f) - n_p^2 \omega(\omega - \epsilon) \}\end{aligned}$$

definidas sobre la variedad no conectada \mathcal{M}

$$\mathcal{M} = \left\{ (\omega, \epsilon, \Delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \epsilon \neq \sqrt{\frac{\alpha}{M n_p} \Delta^T \Delta}, \epsilon \neq 0 \right\} \quad (2.19)$$

y el conjunto de puntos de equilibrio $\mathcal{E} = \{\omega, \psi, i, \epsilon, \Delta, T_L, u\} \in \mathcal{R}^{11}$ de (2.12) localizados fuera de la variedad \mathcal{M} , definidos por $\Delta \neq 0$ y los puntos $(\epsilon_+, \omega_{++}, (\epsilon_+, \omega_{+-}), (\epsilon_-, \omega_{-+}), (\epsilon_-, \omega_{--})$

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{n_p \epsilon} (a \mathbb{J} - n_p (w - \epsilon) \mathbb{I}) \Delta \\ i &= \frac{1}{\lambda f a} (a \mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \\ u &= \frac{b}{\lambda a c} (a \mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \\ T_L &= -J f \omega + J \psi \psi^T \mathbb{J} i \\ \epsilon_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha}{M n_p} \Delta^T \Delta} \\ \omega_{\pm} &= \frac{\epsilon_{\pm}}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4 \lambda f n_p} \Delta^T \Delta + \frac{a^2 + a f}{n_p^2}}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Es decir, para cualquier T_L (continuamente diferenciable) cualquier solución $(\omega(\cdot), \epsilon(\cdot), \Delta(\cdot)) \in \mathcal{M}$ del sistema de ecuaciones (2.18) corresponde a una solución $(\omega(\cdot), \psi(\cdot), i(\cdot), \epsilon(\cdot), \Delta(\cdot), T_L(\cdot), u(\cdot))$ de (2.12). Además, toda solución de (2.12) corresponde a una solución de (2.18) o a uno de los puntos de equilibrio \mathcal{E} .

Prueba. De la última ecuación de (2.12) se puede obtener ψ , (explícitamente) en términos de las variables de error, esto es

$$\psi = \frac{1}{n_p \epsilon} (a \mathbb{J} - n_p (w - \epsilon) \mathbb{I}) \Delta \quad (2.21)$$

Con lo que la segunda ecuación de (2.12) no es necesaria.

Ahora, derivando la última ecuación de (2.12) y sustituyendo las ecuaciones diferenciales, respectivas, se obtiene la ecuación de la corriente i en términos de las variables de error

$$Ri = (\varphi_1 \mathbb{I} + \varphi_2 \mathbb{J}) \Delta + \frac{n_p}{J} \mathbb{J} \Delta T_L \quad (2.22)$$

donde $\varphi_1 \triangleq a(a+f) - n_p^2 \omega(\omega - \epsilon)$, $\varphi_2 \triangleq a n_p (2\omega - \epsilon)$ y

$$R \triangleq \frac{\alpha n_p}{\epsilon} \left((\epsilon - 2\omega) \mathbb{J} \Delta \Delta^T + \frac{a}{n_p} (\mathbb{J} \Delta \Delta^T - \Delta \Delta^T) \mathbb{J} \right) + M a n_p c \mathbb{J} \quad (2.23)$$

con

$$\det[R] = \left[Mn_p \epsilon - \frac{\alpha a}{\epsilon} \Delta^T \Delta \right] \left[Mn_p \epsilon + \frac{\alpha a}{\epsilon} \Delta^T \Delta \right]$$

la matriz R es regular en cualquier parte excepto en los valores $\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda n_p} \Delta^T \Delta}$.

Con el propósito de definir completamente el conjunto de soluciones para (2.12) se presentan dos casos en razón del valor de ϵ , a saber:

Caso 1: $\epsilon \neq \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda n_p} \Delta^T \Delta}$.

De (2.22) las corrientes del MI se pueden expresar como

$$i = (\phi_1 \mathbb{I} + \phi_2 \mathbb{J}) \Delta + \frac{n_p}{J \Psi_2} \mathbb{J} \mathcal{J} \Delta, \quad (2.24)$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1 &\triangleq \frac{(\epsilon - 2\omega)n_p}{\Psi_2} \left(\frac{\alpha}{\epsilon} \Delta^T \Delta \phi_2 + a \right), \\ \phi_2 &\triangleq \frac{1}{\Psi_1} (a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon)), \\ \Psi_1 &\triangleq Mn_p \epsilon - \frac{\alpha a}{\epsilon} \Delta^T \Delta, \\ \Psi_2 &\triangleq Mn_p \epsilon + \frac{\alpha a}{\epsilon} \Delta^T \Delta \end{aligned} \quad (2.25)$$

En consecuencia, el orden de la DI (2.12) se puede reducir utilizando (2.24) en lugar de la tercera ecuación de (2.12). Con base en lo anterior se puede obtener un modelo equivalente de la DI (2.12) sobre la variedad \mathcal{M} , esto es

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -f\omega + \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) - \frac{Mn_p \epsilon^2}{J(\lambda n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)} \mathcal{I} \mathcal{I}, \\ \dot{\epsilon} &= - \left[f + \frac{\alpha \Delta^T \Delta (a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon))}{\lambda n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta} \right] \epsilon \\ \dot{\Delta} &= 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) &\triangleq \frac{\alpha \Delta^T \Delta p(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta)}{a(Mn_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta)(Mn_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)}, \\ \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) &\triangleq a^2(\epsilon - 2\omega)(Mn_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta) + \\ &+ \{ \alpha(\epsilon - 2\omega) \Delta^T \Delta + (\omega - \epsilon)(Mn_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta) \} \{ a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon) \} \end{aligned}$$

sobre la variedad

$$\mathcal{M} = \left\{ (\omega, \epsilon, \Delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \epsilon \neq \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda n_p} \Delta^T \Delta}, \epsilon \neq 0 \right\}$$

Diferenciando una vez más la restricción algebraica o la ecuación (2.24) se puede obtener el siguiente vector de voltajes de estator u para la condición de indistinguibilidad y sobre la variedad \mathcal{M}

$$u = \frac{1}{\beta c} (\phi_1 \mathbb{I} - \phi_2 \mathbb{J}) \Delta + \frac{n_p}{J \beta c} \frac{\Psi_2 \mathcal{J} \Delta - \left(\frac{\Psi_1}{\epsilon} (-f\epsilon + \alpha \Delta^T \mathbb{J} i) \right)}{\Psi_2^2} \Delta + \frac{1}{c} [(a \mathbb{I}) \psi + (\lambda a + b) i]$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left(\frac{\alpha}{\epsilon} \Delta^T \Delta \phi_2 + a \right) \frac{n_p \Psi_2 \left(-f\epsilon + \alpha \Delta^T \mathbb{J} i - 2 \left(-f\omega + \alpha \psi^T \mathbb{J} i - \frac{\mathcal{I} \mathcal{I}}{J} \right) \right)}{\Psi_2^2} + \frac{-n_p \frac{\Psi_1}{\epsilon} (\epsilon - 2\omega) (-f\epsilon + \alpha \Delta^T \mathbb{J} i)}{\Psi_2^2} + \\ &+ \frac{n_p \alpha \Delta^T \Delta (\epsilon - 2\omega) (\epsilon \phi_2 - \phi_2 (-f\epsilon + \alpha \Delta^T \mathbb{J} i))}{\epsilon^2 \Psi_2^2} \\ \phi_2 &= \frac{1}{\Psi_1} n_p^2 [(-2\omega + \epsilon) + (-f\omega + \alpha \psi^T \mathbb{J} i - \frac{\mathcal{I} \mathcal{I}}{J}) + \omega (-f\epsilon + \alpha \Delta^T \mathbb{J} i)] + \\ &+ \{ a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon) \} \frac{\Psi_2 (-f\epsilon + \alpha \Delta^T \mathbb{J} i)}{\epsilon \Psi_1^2} \end{aligned}$$

Caso 2: $\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda n_p} \Delta^T \Delta}$

Considerando que $\Delta \neq 0$ (si $\Delta = 0$, entonces $\epsilon = 0$, implica la inexistencia de trayectorias indistinguibles). Así mismo

observe que la matriz R es singular y no se puede invertir. Sin embargo, como ϵ es constante ($\dot{\epsilon} = 0$) y de la cuarta ecuación de (2.12) se obtiene

$$\Delta^T \mathbb{J} j = \frac{f}{\alpha} \epsilon \quad (2.26)$$

Las ecuaciones para i , (2.26) y (2.22), se deben satisfacer de manera simultánea. Por lo tanto, premultiplicando (2.22) por Δ^T se obtiene

$$\Delta^T R i = -\Delta^T \{\varphi_1 \mathbb{I} + \varphi_2 \mathbb{J}\} \Delta + \Delta^T \mathbb{J} \Delta \frac{T_L n_p}{J}$$

como $\Delta^T \mathbb{J} \Delta = 0$, la ecuación anterior queda

$$\Delta^T R i = -\varphi_1 \Delta^T \Delta \quad (2.27)$$

desarrollando (2.27) se puede obtener

$$\Delta^T R i = [a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon)] \Delta^T \Delta \quad (2.28)$$

Ahora, premultiplicando y postmultiplicando (2.23) por Δ^T e i , respectivamente, se obtiene

$$\Delta^T R i = \frac{\alpha n_p}{\epsilon} \left(-\frac{a}{n_p} \Delta^T \Delta (\Delta^T \mathbb{J} i) \right) + M a n_p \epsilon (\Delta^T \mathbb{J} i) \quad (2.29)$$

usando (2.26) la ecuación (2.29) queda

$$\Delta^T R i = -a f \Delta^T \Delta + M a n_p \frac{f}{\alpha} \epsilon^2 \quad (2.30)$$

igualando (2.28) con (2.30)

$$[a^2 - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon)] \Delta^T \Delta = \frac{M a n_p f}{\alpha} \epsilon^2 \quad (2.31)$$

sustituyendo el valor de $\epsilon^2 = \frac{\alpha}{M a n_p} \Delta^T \Delta$ en la ecuación anterior se obtiene

$$\omega^2 - \epsilon \omega - \frac{a^2 + a f}{n_p^2} = 0 \quad (2.32)$$

con la que se pueden calcular los dos valores de ω para un valor de ϵ , esto es

$$\omega_{\pm} = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4 M a n_p} \Delta^T \Delta + \frac{a^2 + a f}{n_p^2}}}{2} \quad (2.33)$$

con

$$\epsilon_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{M a n_p} \Delta^T \Delta}$$

se puede ver que las soluciones de (2.33), para Δ y ϵ constantes, serán también constantes, es decir, ω es constante. Con base en lo anterior se puede observar, retomando (2.21),

$$\psi = \frac{1}{n_p \epsilon} (a \mathbb{I} - n_p (\omega - \epsilon) \mathbb{J}) \Delta$$

que ψ también es constante. Por otro lado, de la segunda ecuación de (2.12) se puede observar que

$$0 = -a \psi - n_p \omega \mathbb{J} \psi + M a i$$

con la que se obtiene el valor de i

$$i = \frac{1}{M a} (a + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \quad (2.34)$$

que resulta, también, constante. Siguiendo el mismo procedimiento, y con el resultado anterior, de la tercera ecuación de (2.12) se observa que $\frac{d\psi}{dt} = 0$, es decir

$$0 = \beta \{a\psi + n_p \omega \mathbb{J} \psi - (Ma + b) i + cu\}$$

usando (2.34) y la ecuación anterior se obtiene el voltaje de estator u

$$u = \frac{b}{Mac} (a\mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \quad (2.35)$$

finalmente de la primera ecuación de (2.12) se obtiene

$$T_L = -Jf\omega + J\alpha\psi^T \mathbb{J} i \quad (2.36)$$

En relación con los resultados anteriores se puede afirmar para el Caso 2 lo siguiente.

Si $\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{Mn_p}} \Delta^T \Delta$, entonces las soluciones de (2.12) quedan definidas por el punto de equilibrio de (2.12),

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{n_p \epsilon} (a\mathbb{J} - n_p(\omega - \epsilon)\mathbb{I}) \Delta \\ i &= \frac{1}{Ma} (a\mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \\ u &= \frac{b}{Mac} (a\mathbb{I} + n_p \omega \mathbb{J}) \psi \\ T_L &= -Jf\omega + J\alpha\psi^T \mathbb{J} i \end{aligned} \quad (2.37)$$

definido por los parámetros del MI, por los puntos $(\epsilon_+, \omega_{++}), (\epsilon_+, \omega_{+-}), (\epsilon_-, \omega_{-+})$ y $(\epsilon_-, \omega_{--})$, con

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha}{Mn_p}} \Delta^T \Delta \\ \omega_{\pm \pm} &= \frac{\epsilon_{\pm}}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4Mn_p} \Delta^T \Delta + \frac{a^2 + af}{n_p^2}}. \end{aligned}$$

Conclusiones importantes sobre la DI

Todas las trayectorias indistinguibles del motor se describen (esencialmente) por el sistema (2.18), definido sobre la variedad \mathcal{M} . Geométricamente esta variedad se puede considerar como una sub-variedad del espacio de estados \mathbb{R}^{10} del sistema de ecuaciones (2.7-2.8) con $e = 0$. (2.21) y (2.24) describen como \mathcal{M} se embebe en \mathbb{R}^{10} . Una trayectoria de (2.7-2.8) corresponde a dos trayectorias del motor de inducción. Cuando una trayectoria de (2.7-2.8) está en \mathcal{M} por algún intervalo de tiempo, entonces las correspondientes trayectorias del motor son indistinguibles durante ese intervalo de tiempo. El sistema (2.18) describe, de manera exacta, sólo las trayectorias de $\Sigma - \Xi$ que son posibles sobre \mathcal{M} . Es conveniente hacer notar que es necesario elegir condiciones iniciales sobre \mathcal{M} para que las trayectorias de $\Sigma - \Xi$ estén definidas sobre \mathcal{M} y aplicar funciones de entrada tales que las trayectorias permanezcan en \mathcal{M} .

Aunque \mathcal{M} es de dimensión cuatro es interesante observar que dos de las variables (Δ) de la dinámica indistinguible (2.18) son constantes, lo anterior implica que cualquier trayectoria indistinguible del motor de inducción está caracterizada por el hecho de que los vectores de flujos ψ_1 y ψ_2 difieren para todo el intervalo de tiempo (donde se presenta la indistinguibilidad) en un valor constante. Por otro lado, esto permite considerar a la dinámica indistinguible (2.18) como un sistema de segundo orden, parametrizado por un vector constante Δ , de hecho por el cuadrado de su norma, esto es, $\|\Delta\|^2 = \Delta^T \Delta$. Esto resulta ventajoso debido a que se pueden aplicar las técnicas existentes de análisis de sistemas de segundo orden y para alguna de ellas, las trayectorias de la DI se pueden visualizar sobre el plano (ϵ, ω) . Otra observación importante es que la DI (2.18) es válida para cualquier conjunto de parámetros del motor de inducción.

2.2.4. Diagrama de fase de la dinámica indistinguible

La solución cerrada de las ecuaciones que definen a la dinámica indistinguible es muy difícil de obtener debido a que se trata de un sistema de ecuaciones altamente no lineal. A pesar de lo anterior y debido a que (2.18) se puede expresar como un sistema de segundo orden es posible realizar un análisis gráfico donde se muestre la existencia de trayectorias indistinguibles del MI.

Diagrama de fase de la DI

Con el fin de ilustrar la existencia de soluciones para la dinámica indistinguible (trayectorias indistinguibles), se procederá a generar el diagrama de fase para (2.18), asumiendo Δ como un parámetro constante, con lo que (2.18) se convierte en un sistema de segundo orden parametrizado en $\Delta = [k_1, k_2]^T$, donde los k_i son constantes.

Utilizando "simulink"⁴ y el modelo de la DI (2.18), se realizaron varias pruebas de simulación de la DI, para diferentes condiciones iniciales del motor y considerando un rango de velocidades del rotor que incluye a la velocidad nominal $[-360 \text{ (rad/seg)} \leq \omega \leq 360 \text{ (rad/seg)}]$

Las condiciones para la realización de esta simulación son:

El valor de los parámetros es el siguiente: $L_r = 0,076 \text{ H}$, $L_s = 0,142 \text{ H}$, $R_r = 0,93 \text{ } \Omega$, $R_s = 1,633 \text{ } \Omega$, $M = 0,099 \text{ H}$, $n_p = 2$, $J = 0,029 \text{ Kg m}^2$, $f = 0,13 \text{ s}^{-1}$, $\Delta = [0,1, 0,1]^T \text{ web}$, $T_L = 4 \text{ Nm}$

Los valores elegidos para Δ y T_L , corresponden a condiciones nominales de operación del motor de inducción⁵.

Las condiciones iniciales para ϵ , fueron: $0 < \epsilon_c < \epsilon$, donde ϵ_c queda definido en la variedad \mathcal{M} como $\epsilon_c = \sqrt{\frac{\rho}{M n_r} \Delta^T \Delta}$

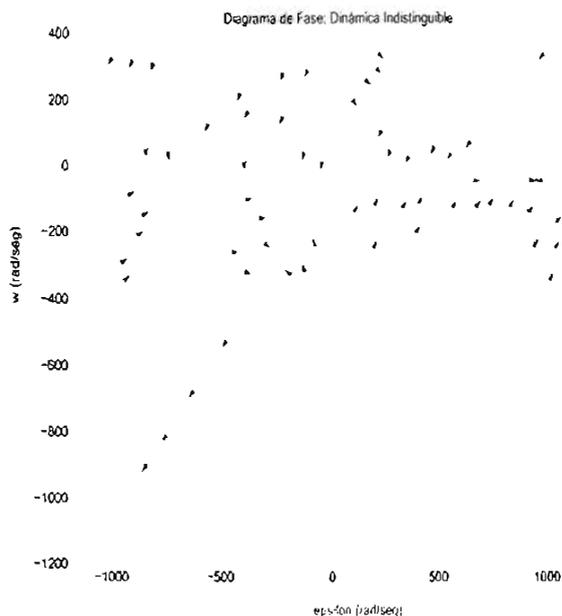


Figura 2.1: Diagrama de fase de la dinámica indistinguible

En la Fig.2.1 se presentan algunas de las trayectorias de estado de la DI para diferentes condiciones iniciales (ϵ_0, ω_0) , con lo cual se muestra la existencia de soluciones de la DI y la facilidad con la que dichas trayectorias

⁴Matlab V.5.3 The MathWorks, Inc.

⁵Para un motor que corresponde con los parámetros utilizados

pueden generarse. Es posible, también, ver la dirección que siguen dichas trayectorias dirigiéndose a los dos puntos de equilibrio del sistema DI.

Comentario 2.3 *Es necesario subrayar que las condiciones iniciales utilizadas están dentro de la variedad M .*

Otra de las formas de verificar la existencia de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales es calcular sus puntos de equilibrio. Adicionalmente al diagrama de fase se presentan los puntos de equilibrio para la DI (2.18) obtenidos de forma numérica:

$$\begin{aligned} \left[\omega_{eq1} = -41.119 \left[\frac{rad}{seg} \right], \quad \epsilon_{eq1} = 9.6944 \times 10^2 \left[\frac{rad}{seg} \right] \right] \\ \left[\omega_{eq2} = -1.0105 \times 10^3 \left[\frac{rad}{seg} \right], \quad \epsilon_{eq2} = 9.6944 \times 10^2 \left[\frac{rad}{seg} \right] \right] \end{aligned}$$

Observaciones adicionales sobre el diagrama de fases Fig.2.1

- Existen soluciones para (2.18) en todo el rango de velocidades.
- Existen soluciones para (2.18) para toda ϵ con tal que $0 < \epsilon_c < \epsilon$
- De acuerdo con las dos observaciones anteriores, es muy probable que existan trayectorias indistinguibles para cualquier condición inicial, esto implica que la probabilidad de que exista alguna trayectoria indistinguible para el motor de inducción, es muy alta.
- La consideración básica para utilizar el concepto de diagrama de fase es Δ igual a constante, por lo que variando Δ se puede obtener una familia de diagramas de fase, pero es posible que no se obtenga información adicional, pues serían superficies de nivel iguales. Por lo que, en este trabajo se considera suficiente verificar (2.18) para condiciones nominales del motor de inducción (para el valor de Δ).
- La existencia de los puntos de equilibrio para (2.18) de hecho implica la existencia de al menos una solución para la dinámica indistinguible.

Comentario 2.4 *Otra aportación de utilidad para el tema de control SSM podría ser, obtener todas las condiciones del voltaje de alimentación tales que se produzcan trayectorias indistinguibles no detectables, para todas las condiciones de operación (reales) del motor de inducción. Para esto se requiere relacionar la derivada de la ecuación (2.22) con la tercera ecuación de Σ_1 . De esta ecuación se podría, teóricamente, obtener el vector de voltajes que satisfacen a (2.18). Con el conocimiento de este vector se podría establecer una estrategia para emitir estos voltajes y de esta forma evitar la posibilidad de pérdida de observabilidad del motor. El procedimiento anterior se ha intentado sin éxito, pues no fue posible obtener el vector de voltajes de forma cerrada, debido a que en la manipulación algebraica resulta un sistema de dos ecuaciones algebraicas de alto grado.*

2.3. Propiedades de observabilidad, detectabilidad y existencia de observadores para el MI

La observabilidad y la detectabilidad (tanto global como local) se pueden caracterizar en términos de la dinámica indistinguible de un sistema. Este resultado general se establece aquí, especialmente, para el motor de inducción.

Las propiedades de observabilidad del motor de inducción se establecen en la siguiente

Proposición 2.3 *El motor de inducción en operación sin sensores mecánicos es:*

1. *Observable, si y solo si, la dinámica indistinguible (2.18) no tiene soluciones*
2. *Localmente observable si y solo si, la dinámica indistinguible (2.18) no tiene soluciones en una vecindad del punto $(\epsilon, \Delta) = 0$.*

3. Detectable si y solo si, el punto $(\epsilon, \Delta) = 0$ de la dinámica indistinguible (2.18) es globalmente atractivo, para toda trayectoria que esté definida para todo tiempo, esto es, $t \in [0, \infty)$.
4. Localmente detectable si y solo si, el punto $(\epsilon, \Delta) = 0$ de la dinámica indistinguible (2.18) es localmente atractivo, para toda trayectoria que este definida para todo tiempo, esto es, $t \in [0, \infty)$.

Prueba. 1) De acuerdo con la Definición 2.1 es claro que el sistema será observable si las trayectorias indistinguibles no existen, donde dichas trayectorias son las soluciones de la dinámica indistinguible (2.18). 3) De acuerdo con la Definición 2.1 es claro que el sistema será detectable si hay convergencia global para todas las trayectorias indistinguibles. Suficiencia de 2): Si el sistema es localmente observable, entonces existe, para cualquier punto x y para toda entrada $u(\cdot)$ una vecindad de x tal que cualquier trayectoria que inicia en la vecindad no es indistinguible (es distinguible). Esto implica, de acuerdo con la Proposición 2.1, que las ecuaciones (2.12) no tienen soluciones en una vecindad de $(\epsilon, \Delta) = 0$. Necesidad de 2): Suponga que para cualquier vecindad de $(\epsilon, \Delta) = 0$ existen soluciones de (2.12), entonces por la Proposición 2.1, el sistema no es localmente observable. Suficiencia de 4): Suponga que el sistema es localmente detectable. Entonces las trayectorias que inician en una cierta vecindad de un punto x (arbitrario) convergen unas a otras, o abandonan la variedad en tiempo finito. En base a la Proposición 2.1 se tiene la siguiente conclusión. Necesidad de 4): Suponga que existe un punto x y una entrada $u(\cdot)$, tales que en cualquier vecindad del punto $(\epsilon, \Delta) = 0$ existen trayectorias de (2.12) tales que $(\epsilon(t), \Delta(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por la Proposición 2.1 el sistema no es localmente detectable ■

Con la Proposición 2.3 se pueden establecer las propiedades de observabilidad del motor de inducción por medio del siguiente

Teorema 2.1 *El motor de inducción (1.1) en operación sin sensores mecánicos, para cualquier conjunto de parámetros es: 1) No observable. 2) No es localmente observable. 3) No es detectable. 4) No es localmente detectable.*

Prueba. Por la Proposición 2.3 y las siguientes observaciones:

1. Debido a que (2.18) satisface las condiciones estándar para la existencia de soluciones, entonces la dinámica indistinguible tiene soluciones, lo cual implica la existencia de trayectorias indistinguibles y por tanto el MI no es observable.
2. La dinámica indistinguible (2.18) tiene soluciones que pueden iniciar en cualquier vecindad de $(\epsilon, \Delta) = 0$.
3. Como Δ es constante a lo largo de cualquier trayectoria de (2.18), el punto $(\epsilon, \Delta) = 0$ no es globalmente atractivo.
4. Como Δ es constante a lo largo de cualquier trayectoria de (2.18), el punto $(\epsilon, \Delta) = 0$ no es localmente atractivo.

■

Como una consecuencia del Teorema 2.1 y el Lema 2.1 se obtiene el siguiente importante resultado

Corolario 2.1 *Para el motor de inducción (1.1) en operación sin sensores mecánicos, no existe un observador global ni uno local en el sentido de la Definición 2.2.*

Comentario 2.5 *Es necesario mencionar que pueden existir observadores con propiedades más débiles que aquellos enunciados por la Definición 2.2. Sin embargo, los resultados aquí presentados excluyen algunos métodos de diseño de observadores, debido a que éstos requieren propiedades de observabilidad más fuertes que las que son satisfechas por el motor de inducción. Así, por ejemplo, el MI en operación SSM, no satisface las condiciones para observadores de altas ganancias (Gauthier and Kupka, 2001).*

Comentario 2.6 *Debido a la simplicidad de (2.18) se puede mencionar el hecho de que se puede garantizar, con facilidad, la existencia de trayectorias indistinguibles. Para cualquier condición inicial de velocidad del rotor $\omega(0)$ y cualquier función del par de carga $T_L(t)$ existe una gran cantidad de soluciones para (2.18), por ejemplo, aquellas obtenidas para cada elección de $\Delta(0)$ y $\epsilon(0)$.*

Comentario 2.7 *Es necesario poner énfasis en que, si las condiciones (mejores condiciones para observabilidad) asumidas para el modelo del motor y el par de carga en la formulación del problema no se satisfacen, aún así, el Teorema 2.1 y el Corolario 2.1 mantienen su validez.*

2.4. Análisis de casos particulares de operación del MI usando la dinámica indistinguible

A pesar de que no se presenta la solución cerrada de la dinámica indistinguible, es posible analizar algunos casos prácticos de operación del motor de inducción utilizando el modelo de la dinámica indistinguible (2.18), con el propósito de dar una interpretación del comportamiento del MI en tales condiciones de operación SSM. A continuación se presenta el análisis teórico y de simulación para algunos casos referidos en la literatura como de bajo desempeño o con problemas de estabilidad de los sistemas controlador-observador.

2.4.1. Operación con flujo cero

Cabe mencionar que este régimen de operación no es usual, aunque puede presentarse cuando el motor pierde el voltaje de excitación (estando ya en operación). Sólo se presenta como un ejemplo de aplicación e ilustración del uso de la dinámica indistinguible.

Para este caso, se considera que $\Delta = 0$ (y $\epsilon \neq 0$) entonces $\psi = 0$ de (2.21), $i = 0$ de (2.22). Por lo tanto $u = 0$ y la dinámica indistinguible (2.18) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -f\omega - \frac{1}{J}T_L \\ \dot{i} &= -fi \\ \dot{\Delta} &= 0\end{aligned}$$

De la primera ecuación del sistema anterior, es claro que cualquier velocidad ω es indistinguible, dado que T_L se puede elegir arbitrariamente. Por otro lado si $f > 0$, entonces $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y las velocidades convergen, esto es, se hacen detectables y la velocidad se puede reconstruir asintóticamente. Con $f = 0$, $\epsilon(t) = \epsilon(0)$ para todo $t \geq 0$, esto es, las velocidades indistinguibles tienen una diferencia constante y por lo tanto, éstas no serán detectables (ni global ni localmente).

En relación con lo anterior, para esta condición de operación se puede presentar la pérdida de detectabilidad y en consecuencia ningún observador funcionaría adecuadamente; para estas condiciones, según el lema (2.1). Aunque, se debe mencionar que la condición $f = 0$ no es una condición realista.

2.4.2. Operación a velocidad constante

En una gran cantidad de aplicaciones es necesario mantener la velocidad del rotor constante. Por tanto, se considera este caso a la luz de la dinámica indistinguible (2.18).

Considere el par de carga T_L que se obtiene de (2.18) haciendo $\dot{\omega} = 0$

$$T_L = \frac{J(Mn_p\epsilon^2 + \alpha\Delta^T\Delta)}{Mn_p\epsilon^2} (-f\omega + \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T\Delta))$$

Con este T_L la velocidad ω será constante y la dinámica indistinguible queda definida como

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= 0 \\ \dot{i} &= - \left[f + \frac{\alpha\Delta^T\Delta(n_p + f) - n_p^2\omega(\omega - \epsilon)}{Mn_p\epsilon^2 - \alpha\Delta^T\Delta} \right] i \\ \dot{\Delta} &= 0\end{aligned}$$

donde se pueden presentar dos casos, en razón del valor de f :

Si $f = 0$ los puntos de equilibrio del sistema son

$$\epsilon = 0 \text{ y } \epsilon = \frac{(n_p^2\omega^2 - a^2)}{n_p^2\omega}, \text{ con } \omega \neq 0.$$

Si $\epsilon \neq 0$ entonces los correspondientes puntos de equilibrio de la dinámica indistinguible representan una trayectoria indistinguible del motor.

Si $f > 0$, los puntos de equilibrio son

$$\epsilon = \frac{-\alpha \Delta^T \Delta n_p^2 \omega \pm \sqrt{(\alpha \Delta^T \Delta n_p^2 \omega)^2 - \chi}}{2f M \alpha n_p}$$

donde

$$\chi = 4f M \alpha n_p \alpha \Delta^T \Delta (a^2 - n_p^2 \omega^2)$$

Estas soluciones corresponden a trayectorias indistinguibles, si éstas son reales y diferentes de cero.

La desventaja del análisis anterior, estriba en el hecho de no imponer restricciones a la función del voltaje de estator y al par de carga, esto es, para cualquier conjunto de trayectorias indistinguibles, el voltaje de entrada que genere tales trayectorias, puede ser una función de la forma

$$u_1 = g_1(\Delta, T_L, \omega, \epsilon); \quad u_2 = g_2(\Delta, T_L, \omega, \epsilon)$$

Donde se pueden obtener señales de voltaje que no existen para ninguna condición práctica de operación del MI.

Como ejemplos de la condición de operación del MI a velocidad constante se presentan a continuación dos casos de simulación que muestran el comportamiento de la velocidad ω y el flujo ψ en condiciones de indistinguibilidad. Los casos presentados se realizaron utilizando el modelo de la DI para el MI en condiciones SSM.

Simulación de trayectorias indistinguibles con condiciones iniciales arbitrarias

En el primer ejemplo de simulación de la DI se presenta el comportamiento de las variables de interés, velocidad ω y flujo ψ para condiciones iniciales arbitrarias de ω y ϵ (donde ϵ es la diferencia de velocidades) manteniendo a $\Delta = \epsilon t e$.

Las condiciones para la realización de la simulación son las siguientes

Considere que los valores de los parámetros del motor son: $L_r = 0,076 \text{ H}$, $L_s = 0,142 \text{ H}$, $R_r = 0,93 \text{ } \Omega$, $R_s = 1,633 \text{ } \Omega$, $M = 0,099 \text{ H}$, $n_p = 2$, $J = 0,029 \text{ Kg m}^2$, $f = 0,13 \text{ s}^{-1}$, $\Delta = [1, 1]^T \text{ web}$

Condiciones iniciales: $(\epsilon_0 = 160 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}, \omega_0 = 160 \frac{\text{rad}}{\text{seg}})$.

Para velocidad constante T_L se define por la siguiente relación, que se obtiene de la primera ecuación de (2.18).

$$T_L = \frac{J(M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)}{\lambda M n_p \epsilon^2} (-f \omega + p(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta)) \quad (2.38)$$

y la dinámica indistinguible queda como

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= 0 \\ \dot{\epsilon} &= - \left[f + \frac{\alpha \Delta^T \Delta (a(a+f) - n_p^2 \omega (\omega - \epsilon))}{M \alpha n_p r^2 - \alpha \alpha \Delta^T \Delta} \right] \epsilon \\ \dot{\Delta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Con la ecuación (2.39) se construyó un modelo, en "simulink", junto con las variables de error y (2.38), obteniendo los resultados que se muestran en Fig. 2.2, donde se pueden observar las indistinguibilidad, predicha, de las trayectorias en las variables de interés ω y ψ . Para este caso se consideraron condiciones nominales de operación del motor (según los parámetros usados), es decir, el valor de Δ queda dentro del rango de flujos de rotor en estado estacionario.

En la gráfica superior izquierda de la Fig. 2.2 se muestra la indistinguibilidad de la velocidad del rotor, es decir una trayectoria de velocidad ($\omega_1(0) = 0$) inicia en cero y se queda en cero para todo $t > 0$, mientras que ($\omega_2(0) = 160$) para todo $t > 0$. En la parte inferior izquierda se muestra la indistinguibilidad del vector de flujos, para este caso, en línea discontinua se presenta uno de los dos vectores de flujo de rotor. Es claro entonces, que las trayectorias indistinguibles existen y además éstas son indetectables, pues la diferencia entre las trayectorias se mantiene constante y diferente de cero para todo $t > 0$.

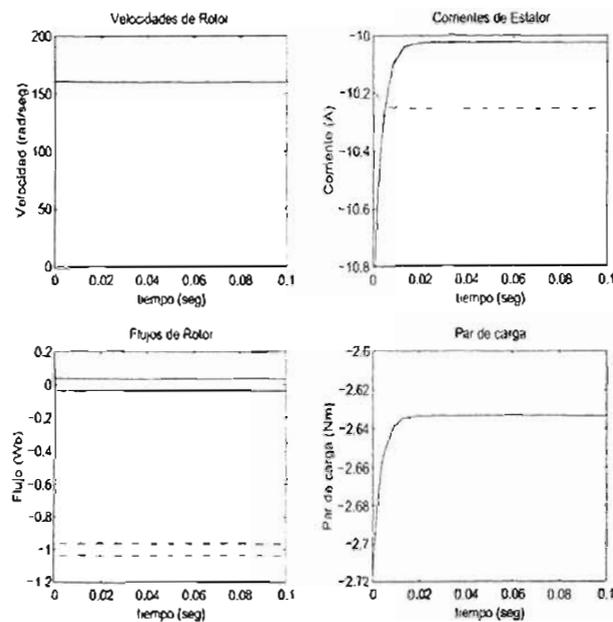


Figura 2.2: Trayectorias indistinguibles con condiciones iniciales arbitrarias y velocidad constante

Comentario 2.8 Con la Fig. 2.2 se muestra que las trayectorias indistinguibles se pueden obtener con relativa facilidad, incluso en condiciones nominales de operación del motor de inducción (caso mostrado). El resultado gráfico nos permite ilustrar que el motor de inducción presenta trayectorias indistinguibles e indetectables para el caso de velocidad constante.

Trayectorias indistinguibles con condiciones iniciales “cercanas”

Con la finalidad de mostrar un caso de indistinguibilidad e indetectabilidad local, se presenta la simulación de la DI que muestra el comportamiento de las variables de interés, velocidad ω y flujo ψ para condiciones iniciales de velocidad cercanas entre ω y ϵ (donde ϵ es la diferencia de velocidades) manteniendo a $\Delta = cte$. Las condiciones para la realización de la simulación son las siguientes.

El valor de los parámetros del MI son: $L_r = 0,076 H$, $L_s = 0,142 H$, $R_r = 0,93 \Omega$, $R_s = 1,633 \Omega$, $M = 0,099 H$, $n_p = 2$, $J = 0,029 Kg m^2$, $f = 0,13 s^{-1}$, $\Delta = [1, 1]^T Web$

Condiciones iniciales: $\epsilon_0 = -8(\frac{rad}{seg})$, $\omega_0 = 2(\frac{rad}{seg})$

En Fig. 2.3 se muestran las trayectorias indistinguibles para velocidad y flujos de rotor, donde se puede ver con claridad que pueden existir trayectorias que inicien arbitrariamente cercanas, pero que finalmente serán no detectables (no hay convergencia entre trayectorias). Se muestra también el valor de T_L (para este caso constante), tal que la velocidad se mantiene constante. Cabe hacer notar que para este caso T_L es mayor que el valor para condiciones nominales de operación.

Comentario 2.9 En esta subsección se han presentado dos casos de trayectorias indistinguibles del motor de inducción, donde es claro que éstas existen, aún considerando condiciones nominales de operación del motor de inducción. Además de su existencia se puede comentar que fueron obtenidas con relativa facilidad y esto, por supuesto, implica que existen una gran cantidad de trayectorias indistinguibles que además pueden ser indetectables y evitar que cualquier observador funcione adecuadamente. Este resultado es un argumento más que muestra tal como se mencionó en la subsección del diagrama de fase que no existen observadores, ni locales ni globales, para el motor de inducción en operación SSM.

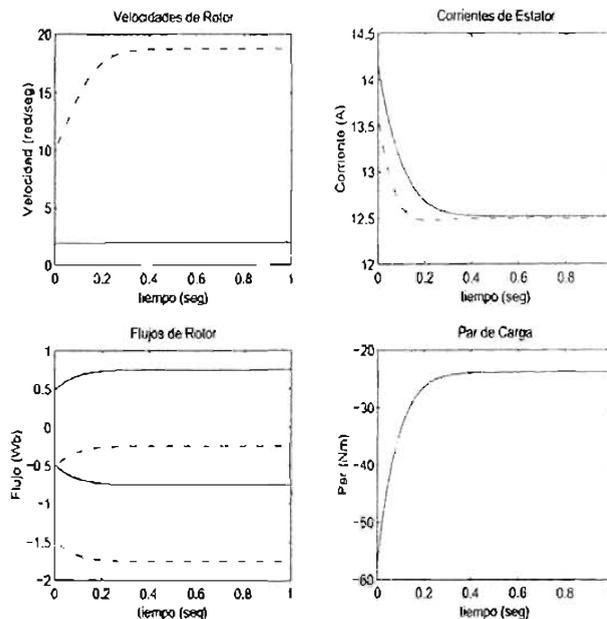


Figura 2.3: Trayectorias indistinguibles para condiciones iniciales cercanas y velocidad constante

2.4.3. Operación con velocidad y par de carga constantes

El interés en esta condición de operación proviene del hecho que gran cantidad de trabajos SSM reportados, por ejemplo, (Holtz, 1995; Wolbank *et al.*, 2002b), hacen referencia a velocidad y par constantes. Adicionalmente, para la mayoría de aplicaciones industriales se consideran par y velocidad constantes.

Esta condición de operación resulta atractiva desde el punto de vista del análisis de sistemas, pues como se puede observar del modelo del motor (1.1), bajo las condiciones establecidas dicho modelo se convierte en un sistema lineal y por lo tanto permite la aplicación de técnicas clásicas de diseño de observadores, tales como filtro de Kalman o estimadores por modelo de referencia (Cuibus *et al.*, 2000). Por otro lado dichos esquemas, aplicados al motor de inducción, son caracterizados por:

- Mostrar un buen desempeño en condiciones de estado estacionario, esto es, cuando la velocidad de rotor ω es constante (Damiano *et al.*, 1998)
- Bajo desempeño durante el comportamiento transitorio, es decir, cuando se presentan cambios, tipo escalón, en el par de carga (Harnfors, 2000)
- Considerablemente mal desempeño, cuando el voltaje de excitación es de baja frecuencia (Madadi and Chang, 2002).

Considerando ω y T_L constantes en (2.18) se puede obtener lo siguiente (en la variedad \mathcal{M})

$$0 = -f\omega + \rho(\omega, \epsilon, \Delta^T \Delta) - \frac{Mfn_p c^2}{J(Mfn_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta)} T_L$$

De la última ecuación es claro que ϵ es constante. Ahora re-escribiendo la ecuación del flujo de rotor

$$\psi = \frac{1}{n_p \epsilon} (\alpha \mathbb{I} + n_p (\omega - c) \mathbb{J}) \Delta$$

Es claro que ψ , también es constante, revisando (2.25) se puede observar que Ψ_2 , ϕ_1 , ϕ_2 son constantes. Ahora revisando (2.22) es claro que i también es constante. Como i es constante, entonces el voltaje de estator es así mismo constante y definido por

$$u = \left(\frac{1}{c}\right) [-(a\mathbb{1} + n_p\omega\mathbb{J})\psi + (Ma + b)i] \quad (2.40)$$

Este resultado es importante debido a que representa una explicación clara y de sentido global al buen desempeño presentado por los esquemas clásicos de control SSM basados en observador, puesto que estos esquemas clásicos consideran operación en estado estacionario con velocidad y par de carga constantes. Por lo tanto, en relación con el resultado anterior se puede afirmar lo siguiente

Considerando velocidad de rotor ω y par de carga T_L constantes, el motor de inducción tendrá trayectorias indistinguibles, si el voltaje aplicado al estator es constante e igual a (2.40).

La afirmación anterior se puede relacionar con el caso de operación en estado estacionario del MI, es decir,

En condiciones de estado estacionario con voltajes de alimentación senoidal fijos y balanceados, con velocidad y par de carga constantes, el motor de inducción es detectable y se puede estimar la velocidad correctamente.

2.4.4. Operación con velocidad cero y par de carga constante

El presente caso cabe dentro del caso de análisis de la subsección anterior, es decir ω y T_L constantes. Sin embargo, se tratará de forma independiente debido a la gran cantidad de referencias que existen para esta condición de operación del motor de inducción, por ejemplo, (Canudas De Wit *et al.*, 2000), (Holtz and Quan, 2002), (Hamefors, 2000), (Madadi and Chang, 2002), etc.,

Considerando nuevamente que T_L es constante y que $\omega = 0$, el modelo de la dinámica indistinguible (2.18) (en la variedad \mathcal{M}) queda como

$$\begin{aligned} 0 &= -\epsilon \frac{[T_L M^2 n_p^2 \epsilon^3 + \alpha \lambda n_p J f \Delta^T \Delta \epsilon^2 - \alpha M n_p T_L \Delta^T \Delta \epsilon + \alpha^2 \alpha J (\Delta^T \Delta)^2]}{(M n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta)(J(M n_p \epsilon^2 + \alpha \Delta^T \Delta))} \\ \dot{\epsilon} &= -\epsilon \frac{(M n_p f \epsilon^2 + \alpha \alpha \Delta^T \Delta)}{(M n_p \epsilon^2 - \alpha \Delta^T \Delta)} \\ \dot{\Delta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

de la primera ecuación de (2.41) se puede mostrar que ϵ es constante, por consiguiente $\dot{\epsilon} = 0$, con este resultado (2.41) se convierte en un sistema de dos ecuaciones algebraicas que resolviendo de forma simultánea tal sistema se puede obtener lo siguiente

$$\epsilon^3 - \frac{T_L}{fJ} \epsilon^2 + \frac{\alpha \alpha \Delta^T \Delta}{M n_p f} \epsilon + \frac{\alpha T_L \Delta^T \Delta}{\lambda f n_p f J} = 0 \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42) muestra que existirán condiciones para las cuales ϵ sea constante y diferente de cero siempre y cuando $T_L \neq 0$ y los parámetros del modelo del MI sean diferentes de cero. Además, de la subsección anterior se puede mostrar que (2.41) tiene soluciones si el voltaje de excitación del estator es constante. Tomando en consideración (Canudas De Wit *et al.*, 2000), donde se menciona que "mientras más baja es la velocidad, el voltaje necesario para excitar el estator del motor, tiende a un valor constante".

Con los resultados anteriores se puede obtener la siguiente conclusión: bajo las condiciones de ω cero y par de carga $T_L > 0$ constante, la velocidad del motor de inducción resulta indetectable. Se puede decir, adicionalmente, que siempre existirán valores de T_L , tales que la velocidad del rotor del motor sea indetectable (inobservable) y no será posible diseñar un observador que funcione adecuadamente.

En ésta sección se ha mostrado otra utilidad de la dinámica indistinguible, al revisar algunos casos de estudio a la luz de ésta. Esto nos ha permitido obtener algunos resultados, teóricos, que ilustran (o justifican) algunos casos de bajo desempeño reportados en la literatura.

2.5. Síntesis

En el capítulo recién concluido se presentó una metodología general (aplicada al MI) para la obtención de un modelo dinámico de error, dicho modelo permitió el desarrollo de la DI del MI. Se presentó de manera explícita a la DI, hecho que permitió realizar un análisis cualitativo de la misma por medio de un diagrama de fase. Con base en la DI se definieron las propiedades de observabilidad del MI en operación SSM. Finalmente, utilizando a la DI, se da interpretación a algunos de los casos de operación del MI en operación SSM declarados en la literatura como de bajo desempeño y se justifica la operación aceptable de los sistemas controlador observador, para el MI en operación SSM, en condiciones de estado estacionario.

Capítulo 3

Diseño de Observadores

En este capítulo se presenta el diseño de tres observadores para el MI en operación SSM. Todos ellos tienen la estructura de un observador tipo Kalman, diseñados para tres distintas representaciones equivalentes del MI, obtenidas bajo distintas consideraciones. Se eligen observadores tipo Kalman, ya que todos los modelos del MI encontrados son afines o aproximadamente afines en los estados a estimar, lo que convierte el problema de observación en uno lineal pero variante en el tiempo. Para este tipo de sistemas el observador tipo Kalman es más apropiado que uno tipo Luenberger.

La idea básica para obtener el modelo del MI que se utiliza para el diseño del primer observador es suponer que la velocidad del rotor es una constante desconocida. Se realiza entonces una transformación del modelo del MI que permite diseñar un observador adaptable, que estime los flujos y el parámetro desconocido que representa la velocidad del rotor. Sin embargo, la transformación se realiza sin tener en cuenta la hipótesis de constancia de la velocidad y solo posteriormente se hace tal aproximación para realizar el diseño del observador. El segundo observador presenta una metodología novedosa de diseño de observadores que se basa en un estimador lineal de condiciones iniciales (del tipo Kalman) y en un reconstructor de estados, basado en el estimador de condiciones iniciales. El tercer observador se diseña sobre un modelo aumentado del MI que posee la propiedad de ser afín en los estados no medibles, es decir, los flujos y la velocidad. Para cada uno de los tres diseños se presenta la relación entre las propiedades de convergencia del observador y la DI, resultados de simulación para varias condiciones de operación y un análisis de robustez, basado prácticamente en resultados de simulación.

3.1. Consideraciones generales para el diseño de los observadores

En esta sección se presentan las consideraciones generales comunes al diseño de los observadores del presente capítulo. Considérese el modelo del MI (1.1), que se repite aquí para facilitar la lectura,

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -f\omega + \alpha\psi^T\mathbb{J}i - \frac{T_L}{J} \\ \dot{\psi} &= -a\psi - n_p\omega\mathbb{J}\psi + M\alpha i \\ \frac{di}{dt} &= \beta[\alpha\psi + n_p\omega\mathbb{J}\psi - (Ma + b)i + cu] ,\end{aligned}\tag{3.1}$$

dónde la velocidad del rotor ω , los flujos del rotor $\psi = [\psi_a, \psi_b]^T$, y las corrientes de estator $i = [i_a, i_b]^T$ son los estados; los voltajes de estator u y el par de carga T_L , son señales externas aplicadas al motor; la inercia del rotor $J > 0$, las inductancias de estator y rotor ($L_s, L_r > 0$), la inductancia mutua $M > 0$, las resistencias de estator y rotor ($R_s \geq 0, R_r > 0$), la fricción del rotor $f \geq 0$ y el número de pares de polos $n_p > 0$ son los parámetros; \mathbb{J} e \mathbb{I} son una matriz anti-simétrica y la matriz identidad, respectivamente, de la forma

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

con $\alpha = \frac{n_p M}{J L_r}$, $a = \frac{R_s}{L_r}$, $b = \frac{L_s R_r}{M}$, $\beta = \frac{M}{L_r L_s - M^2}$ y $c = \frac{L_r}{M}$.

Para todos los diseños de observadores que se describen en este capítulo se harán, en general, las siguientes suposiciones. Cuando se modifiquen estas hipótesis se hará la aclaración explícitamente.

Consideraciones 3.1

- *El modelo (3.1) describe al motor completamente.*
- *Los parámetros del motor son perfectamente conocidos.*
- *Las variables medibles son corriente y voltaje de estator. No se miden variables mecánicas.*

Es necesario resaltar que de acuerdo con el resultado del análisis de observabilidad en el Capítulo 2, **no existe un observador** capaz de estimar flujo y velocidad para el motor de inducción sin sensores mecánicos que pueda operar correctamente para todas las condiciones de operación del sistema. Esto es ocasionado por la existencia de trayectorias indistinguibles divergentes para el MI, que hacen al MI inobservable e indetectable, tanto local como globalmente. No obstante lo anterior, el conjunto de trayectorias “malas” para el MI es pequeño comparado con el conjunto total de trayectorias del sistema, y existe una gran cantidad de aplicaciones de los MI donde las condiciones de operación no generan trayectorias indistinguibles o donde éstas son detectables. El análisis de observabilidad/detectabilidad del capítulo anterior permite esperar que sea posible construir observadores que funcionen de manera adecuada bajo condiciones de operación para las que el MI sea detectable, y que su desempeño se deteriore, llegando incluso a ser inaceptable, para trayectorias indetectables.

Por lo tanto, los observadores que se presentan en este capítulo sólo convergen para un subconjunto de las trayectorias detectables del MI. El tamaño de tal conjunto depende de las propiedades del observador particular. Nótese que es posible que alguno o todos los observadores diseñados diverjan para trayectorias que son detectables u observables. El desempeño de los observadores diseñados se muestra de manera conjunta en la sección de resultados de simulación, para diferentes condiciones de operación, incluyendo las de inobservabilidad.

3.2. Diseño de un Observador para Velocidad Constante (OVC)

En esta sección se presenta el diseño de un observador tipo Kalman para una representación equivalente del MI, obtenida mediante una transformación de estados motivada por la que se realizaría para diseñar un observador adaptable si la velocidad del rotor ω fuera un parámetro constante.

3.2.1. Motivación y formulación del problema

En gran cantidad de aplicaciones del MI la velocidad del rotor es constante o cambia de manera muy lenta. Además, en general para el MI, la velocidad cambia más lentamente que las variables eléctricas, lo que permite esperar que se cometa un pequeño error si se considera que la aceleración mecánica es cercana a cero. El diseño del presente observador se basa precisamente en esta idea, la cual se puede formalizar aplicando la teoría de perturbaciones singulares (Khalil, 1996). Si se considera que la velocidad del rotor es constante, entonces el modelo del MI se convierte en un modelo lineal en las corrientes de estator y los flujos del rotor, con un parámetro desconocido. Para esta clase de sistemas la teoría clásica de control adaptable para sistemas lineales (Sastry and Bodson, 1989) muestra que es posible encontrar una representación equivalente del MI que sea afín en los estados y en el parámetro (o los parámetros) desconocidos, para la cual se puede diseñar un observador adaptable, que usualmente es del tipo Kalman. Para diseñar el OVC se halla la transformación de estados que permite llevar al sistema lineal parametrizado por la velocidad ω a la forma canónica observable. Sin embargo, se completa tal transformación haciéndola un difeomorfismo de los estados del modelo completo del MI, y se realiza la transformación del modelo sin considerar para esto la velocidad como una constante. El sistema obtenido es equivalente al modelo original del MI, pero es afín en los estados no medibles, excepto por un término que depende de la aceleración $\dot{\omega}$, que proviene del hecho de que la transformación es dependiente de la velocidad. El desprecio de este término perturbador, motivado por las consideraciones mencionadas, permite diseñar un observador (aproximado) para el MI. Este, como es de esperarse, funcionará adecuadamente siempre y cuando la aceleración $\dot{\omega}$ sea pequeña.

Un aspecto importante del presente diseño de observador, que lo distingue de otros diseños basados en la idea de despreciar a la dinámica mecánica, es que el efecto de la aceleración no se desprecia en el modelo original sino en el modelo transformado, para el cual el efecto no lineal de la aceleración es más “pequeño” que en el original, permitiendo una mayor precisión del observador.

A continuación se presenta la transformación del modelo del MI como un paso intermedio al diseño del observador y como un punto importante en la formulación del problema. Para simplificar la presentación se considerará que el torque de carga T_L es medible y que todos los demás parámetros del modelo son conocidos. Sin embargo el procedimiento aplicado se puede generalizar al caso en que esto no sea cierto.

3.2.2. Transformación del modelo del MI

El modelo del MI se puede representar por medio de dos subsistemas, uno que representa a la parte mecánica y otro que representa a la parte eléctrica, tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -f\omega + \alpha x^{1T} \mathbb{J}x^2 - \frac{T_L}{J} \\ \dot{x} &= A(\omega)x + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (3.2)$$

dónde

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} -a & -n_p\omega & Ma & 0 \\ n_p\omega & -a & 0 & Ma \\ \beta a & \beta n_p\omega & -\beta(Ma+b) & 0 \\ -\beta n_p\omega & \beta a & 0 & -\beta(Ma+b) \end{bmatrix}, \quad x^1 = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta c & 0 \\ 0 & \beta c \end{bmatrix}.$$

Nótese que el subsistema eléctrico es lineal en las variables de estado eléctricas, y que la matriz $A(\omega)$ en (3.2) contiene como un parámetro a la velocidad de rotor ω . Si este parámetro se considerara constante, para diseñar un observador adaptable que lo estime simultáneamente con el vector de estados x se requiere transformar al subsistema eléctrico de (3.2) a su forma canónica observable (Chi-Tsong, 1970). Esto se puede lograr utilizando la transformación de estados $Q(\omega)z = x$, donde

$$Q(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{a}{\beta(a^2+n_p^2\omega^2)} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{n_p\omega}{\beta(a^2+n_p^2\omega^2)} & 0 \\ \frac{n_p\omega}{\beta(a^2+n_p^2\omega^2)} & 0 & \frac{a}{\beta(a^2+n_p^2\omega^2)} & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q(\omega)^{-1} = \begin{bmatrix} \beta a & \beta n_p\omega & a & n_p\omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta n_p\omega & \beta a & -n_p\omega & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Dado que $\det[Q(\omega)] = -\frac{1}{\beta^2(a^2+n_p^2\omega^2)}$ la transformación es regular para toda ω , siempre y cuando $a \neq 0$. Si se define la transformación de estados para (3.2) dada por

$$\begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{T}(\omega, x) = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ Q^{-1}(\omega)x \end{bmatrix},$$

que como se puede ver fácilmente es un difeomorfismo global si $a \neq 0$, se obtiene la siguiente representación del sistema (3.2) en las nuevas variables

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= A(y, u) \begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix} + B_0u - \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_L + \begin{bmatrix} -\alpha y^T \mathbb{J} D \\ \dot{\omega} N(\omega) \end{bmatrix} z, \\ y &= C_0 \begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

dónde

$$A(y, u) = \begin{bmatrix} -f & 0 \\ M_1 y + B_1 u & A_0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta ab & 0 & 0 \\ 1 & -a - \beta(Ma+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta ab \\ 0 & 0 & 1 & -a - \beta(Ma+b) \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta n_p b \\ 1 & 0 & 0 & -n_p \\ 0 & \beta n_p b & 0 & 0 \\ 0 & n_p & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$B_0 \triangleq \beta c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_1 \triangleq n_p \beta c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad N(\omega) \triangleq \frac{n_p}{a^2 + n_p^2 \omega^2} \begin{bmatrix} n_p \omega & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -n_p \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$M_1 = n_p \begin{bmatrix} 0 & -\beta b \\ 0 & -1 \\ \beta b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad D = \frac{1}{\beta(a^2 + n_p^2 \omega^2)} \begin{bmatrix} a & 0 & -n_p \omega & 0 \\ n_p \omega & 0 & a & 0 \end{bmatrix} .$$

Comentario 3.1 Nótese que el modelo (3.4) es una representación equivalente a (3.2) del MI. Aunque la motivación de la transformación proviene de considerar la velocidad del rotor ω como constante, esto no se supuso para realizar el cambio de coordenadas. Adicionalmente, si se asume en (3.4) que ω es constante, entonces la parte eléctrica del modelo (correspondiente a la variable z) se encuentra en la forma canónica de observabilidad. Esta representación del MI se descompone en un modelo afín en los estados con un término perturbador que depende de la aceleración $\dot{\omega}$. Esta perturbación es más "pequeña" que la que se obtendría si se asumiera desde un comienzo que la aceleración es nula.

3.2.3. Construcción del observador

La idea básica para el diseño del presente observador es considerar que la velocidad varía lentamente (en relación con las variables eléctricas) o es constante. Despreciando el término no lineal correspondiente a la aceleración $\dot{\omega}$ en (3.4) y considerando el torque de carga T_L medible, el modelo (3.4) es afín en los estados no medibles y se puede construir un observador tipo Kalman para estimar las variables de estado no medidas, de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{z} \end{bmatrix} &= A(y, u) \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + B_0 u - \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_L + K(t) (y(t) - \hat{y}(t)) , \\ \hat{y} &= C_0 \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{z} \end{bmatrix} , \\ \dot{x} &= Q(\hat{\omega}) \hat{z} , \end{aligned} \quad (3.5)$$

dónde la matriz de ganancia $K(t)$ es la matriz de ganancia óptima para el observador (3.5) definida como

$$K(t) = P(t) C_0^T R^{-1}(t) , \quad (3.6)$$

y $R^{-1}(t)$ es una matriz simétrica, positiva definida y acotada, que se asigna libremente. $P(t)$ es la solución simétrica y positiva definida de la ecuación diferencial matricial de Riccati

$$\dot{P}(t) = A(y, u) P(t) + P(t) A^T(y, u) - P(t) C_0^T R^{-1}(t) C_0 P(t) + Q_k(t) . \quad (3.7)$$

con $P(0) = \mathbb{I}$, y $Q_k(t)$ es una matriz simétrica, positiva definida y acotada, que se asigna libremente.

Nótese que la estimación de las variables eléctricas en coordenadas originales requiere de la inversión de la transformación realizada en el párrafo anterior (ver la tercera ecuación de (3.5)), que, como es dependiente de la velocidad ω , no medible, debe realizarse utilizando el valor estimado $\hat{\omega}$.

3.2.4. Análisis de convergencia del observador OVC

Para establecer las propiedades de convergencia del observador propuesto (3.5-3.7) se requiere analizar la estabilidad de la ecuación diferencial de los errores de estimación. Si estos se definen como $e_z \triangleq \hat{z} - z$, $e_\omega \triangleq \hat{\omega} - \omega$ y $e_x \triangleq \hat{x} - x$ su dinámica queda descrita por (ver (3.5) y (3.4))

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_\omega \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} &= \{ A(y, u) - K(t) C_0 \} \begin{bmatrix} e_\omega \\ e_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha y^T \mathbb{I} D \\ \hat{\omega} N(\hat{\omega}) \end{bmatrix} z , \\ e_x &= Q(\omega + e_\omega) (z + e_z) - Q(x) z . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nótese que el término dependiente de la aceleración $\dot{\omega}$ en (3.8) constituye una perturbación externa a la ecuación del error de estimación. Si esta perturbación no es nula, entonces no es, en general, posible la convergencia del observador. El error de estimación en las coordenadas originales (3.8, segunda ecuación) depende, además, no linealmente de los errores de observación.

Sin embargo, se puede demostrar que el sistema error es ISS (estable entrada/estado) con respecto a la perturbación (entrada) y al estado e , de tal manera que cuando la perturbación sea acotada, el error de observación será acotado, y cuando esta perturbación tienda a cero, lo hará el error de observación.

Lema 3.1 *Supóngase que los estados del motor de inducción (3.1) permanecen acotados, y que la trayectoria es tal que la pareja $(C_0, A(y, u))$ es uniforme y completamente observable (UCO). Entonces el sistema (3.5-3.7) es un observador que es estable entrada/estado con respecto a la entrada de perturbación*

$$\varrho(\omega, z) = \begin{bmatrix} -\alpha y^T \mathbb{J} D \\ \dot{\omega} N(\omega) \end{bmatrix} z$$

y al error de estimación e . Por lo tanto, siempre que la perturbación $\varrho(\omega, z)$ sea acotada, el error de observación será acotado.

Prueba. Si se propone como candidata a función de Lyapunov a $V(t, e) = e^T P^{-1}(t)e$, donde $e = [e_\omega, e_z]^T$ es el vector de error total, y tomamos su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema error (3.8) se obtiene

$$\dot{V}(t, e) = \dot{e}^T P^{-1}(t)e + e^T P^{-1}(t)\dot{e} + e^T \frac{d}{dt} P^{-1}(t)e$$

y como

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}P) = \frac{dP^{-1}}{dt}P + P^{-1}\dot{P} = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e) &= e^T (A - KC_0)^T P^{-1}e + e^T P^{-1} (A - KC_0)e - e^T P^{-1} \dot{P} P^{-1}e - \dot{\omega} z^T N^T P^{-1}e - \dot{\omega} e^T P^{-1} N z \\ &= e^T (A - PC_0^T R^{-1} C_0)^T P^{-1}e + e^T P^{-1} (A - PC_0^T R^{-1} C_0)e + \\ &\quad - e^T P^{-1} (AP + PA^T - PC_0^T R^{-1} C_0 P + Q_k) P^{-1}e - \dot{\omega} z^T N^T P^{-1}e - \dot{\omega} e^T P^{-1} N z \\ &= e^T [A^T P^{-1} - C_0^T R^{-1} C_0 + P^{-1}A - C_0^T R^{-1} C_0 - P^{-1}A - A^T P^{-1} + C_0^T R^{-1} C_0 - P^{-1}Q_k P^{-1}] e + \\ &\quad - \dot{\omega} z^T N^T P^{-1}e - \dot{\omega} e^T P^{-1} N z \\ &= e^T [-C_0^T R^{-1} C_0 - P^{-1}Q_k P^{-1}] e - \dot{\omega} z^T N^T P^{-1}e - \dot{\omega} e^T P^{-1} N z. \end{aligned}$$

Se requiere que V sea positiva definida y decreciente, lo que se satisface si la matriz $A(y, u)$ es uniformemente acotada en el tiempo, y la pareja (C_0, A) es uniforme y completamente observable (UCO) (ver (Kalman and Bucy, 1961) y Apéndice A). Cuando $\varrho(\omega, z) = 0$ se sigue que

$$\dot{V}(t, e) = e^T [-C_0^T R^{-1} C_0 - P^{-1}Q_k P^{-1}] e < -\gamma e^T e,$$

para algún $\gamma > 0$, constante. Esto implica la estabilidad uniforme y asintótica del error de observación a cero. Por otro lado, si los estados del MI son acotados, y cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(\omega(t), z(t)) = 0$ se sigue con facilidad que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. De igual manera, y bajo las mismas condiciones, se puede mostrar que el sistema error es ISS (estable entrada/estado) con respecto a la entrada $\varrho(\omega, z)$ y al estado e . De tal manera que cuando la perturbación $\varrho(\omega, z)$ sea acotada, el error de observación será acotado. ■

Comentario 3.2 *Para la deducción del estimador anterior se supuso que el torque de carga T_L es conocido. lo que constituye una hipótesis poco realista. Sin embargo esta suposición puede ser relajada de manera muy simple si se considera que el torque de carga es constante, y se incorpora al modelo del MI (3.4), y posteriormente en el observador, como un estado adicional con derivada nula. O, en forma más general, se puede incorporar un exosistema (lineal) para modelar su comportamiento. De la misma manera se puede incorporar la estimación de otros parámetros del modelo. Sin embargo, a diferencia del torque de carga, esto implica recalcular la transformación de estados.*

3.2.5. Síntesis de la sección

En la sección recién finalizada se presentó el diseño de un observador (OVC) para el MI en condiciones de operación SSAM, dicho diseño utiliza la técnica de control adaptable, de considerar a los parámetros como estados constantes, con el fin de convertir al modelo del MI a un modelo afín en los estados no medibles. Con el modelo afín en los estados no medibles se utilizó el filtro de Kalman como método de estimación de parámetros. La búsqueda de los parámetros de sintonización del filtro se realizó con facilidad, cabe destacar la facilidad de implantación (para simulación) del observador, lo cual se convierte en una ventaja. Una desventaja importante de este diseño es el requerimiento de velocidad constante para la convergencia del observador. Aunque se debe mencionar que en muchas de las aplicaciones del MI se requiere de velocidad constante. Se presentó el análisis de convergencia del observador, dicho análisis muestra que, si la velocidad varía lentamente el desempeño del observador no se reduce de manera considerable.

3.3. Diseño de un Observador basado en un Estimador de Condiciones Iniciales (OECI)

En esta sección se propone el diseño de un observador cuya idea básica es descomponer el problema de estimación del estado actual en dos etapas. En la primera se estiman las condiciones iniciales, que por ser constantes se reduce a un problema de identificación de parámetros. En la segunda etapa se calculan los estados actuales a partir de las condiciones iniciales estimadas y el modelo del sistema. Además, en esta sección, se establece la relación entre la DI y las propiedades de convergencia de dicho estimador.

3.3.1. Motivación

La idea principal que permite el diseño del observador propuesto es el concepto de observabilidad. Esta corresponde básicamente a la posibilidad de reconstruir el estado inicial de un sistema dinámico por medio de señales medidas (entradas y salidas) y del conocimiento perfecto del modelo del sistema. Por tal motivo, si un sistema es observable el siguiente procedimiento es, en principio, siempre posible:

1. Determinar el estado inicial a partir de las señales de entrada-salida y del modelo del MI, mediante la inversión del mapa de observabilidad, y
2. Con el estado inicial, el modelo del sistema y las señales de entrada-salida, determinar el estado actual.

La idea anterior se ilustra gráficamente en Fig.(3.1) para el MI, donde u e Y son el voltaje y la corriente de estator del MI, respectivamente, X_0 el estado inicial y \hat{X} el estado estimado.

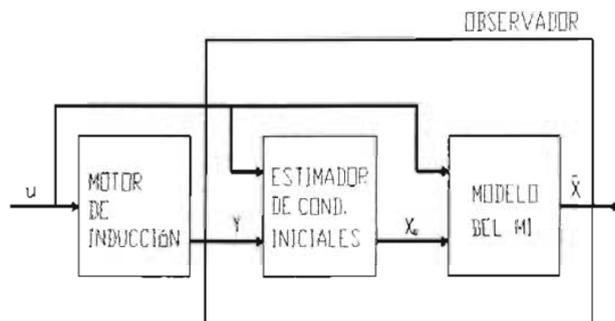


Figura 3.1: Estructura básica del observador OECI

Un aspecto útil en este esquema, es que la estimación de los estados iniciales, dado que son constantes, se convierte en un problema de estimación de parámetros, para el que se conocen técnicas especiales en la literatura. Para el MI es posible encontrar una representación simple de la dinámica del sistema parametrizado no linealmente por las condiciones iniciales. Mediante una sobreparametrización es posible encontrar una representación afín en los parámetros desconocidos. La utilización de técnicas de estimación paramétrica usuales permite identificar las condiciones iniciales del MI, si se satisfacen condiciones de Excitación Persistente. Finalmente, es posible determinar los estados actuales de una manera simple, si se conocen los estados iniciales.

3.3.2. Construcción del observador

Para el diseño del observador se consideran las hipótesis hechas en la Sección 3.1. Adicionalmente, y para facilitar la presentación inicial de la idea básica, se asume que tanto el torque de carga T_L como la derivada de la corriente de estator (di/dt) son medibles. Al final de la presente sección se describe cómo se pueden eliminar estas dos restricciones

y la necesidad de conocer perfectamente los parámetros del MI.

Ya que la idea básica consiste en identificar primero las condiciones iniciales del MI ($\omega(0)$ y $\psi(0)$), es necesario obtener una representación paramétrica del modelo del MI. Posteriormente a partir de ésta se obtendrá una representación lineal en las condiciones iniciales, con base en la que, y mediante el uso de un filtro de Kalman, se estimarán las condiciones iniciales. A partir de estas y del modelo del MI se calcularán los estados actuales del MI.

Representación paramétrica del MI

Convirtiendo la representación diferencial del MI (3.1) en una representación integral es fácil llegar a una representación equivalente de la dinámica del sistema, parametrizada por las condiciones iniciales y dependiente de señales determinadas por las variables medibles

Lema 3.2 *El modelo del MI (3.1) se puede representar en forma paramétrica como*

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + g_1(t) , \\ \omega(t) &= e^{-ft} \omega_0 - g_2(t) z_0 - g_3(t) , \\ \gamma_1(t) &= \gamma_2(t) \omega_0 + \gamma_3(t) z_0 + \gamma_4(t) \omega_0 \mathbb{J} z_0 + \gamma_5(t) Z_0 . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con las siguientes funciones de variables conocidas y con $z = \beta\psi + i$

$$\begin{aligned} g_1(t) &\triangleq \beta \int_0^t (-bi(\tau) + cu(\tau)) d\tau , \\ g_2(t) &= [g_{21}(t) \quad g_{22}(t)]^T \triangleq \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} i^T(\tau) \mathbb{J} d\tau z_0 , \\ g_3(t) &\triangleq \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} \left[i^T(\tau) \mathbb{J} g_1(\tau) + \frac{\beta T_L(\tau)}{\alpha} \right] d\tau , \\ \gamma_1(t) &\triangleq \frac{di(t)}{dt} - [a\mathbb{I} - n_p g_3(t) \mathbb{J}] (g_1(t) - i(t)) + \beta(Ma + b) i(t) - \beta cu(t) , \\ \gamma_2(t) &\triangleq n_p e^{-ft} \mathbb{J} (g_1(t) - i(t)) , \\ \gamma_3(t) &\triangleq a\mathbb{I} - n_p g_3(t) \mathbb{J} - n_p \mathbb{J} (g_1(t) - i(t)) g_2(t) , \\ \gamma_4(t) &\triangleq n_p e^{-ft} , \\ \gamma_5(t) &\triangleq n_p G_2(t) , \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde ω_0 y $z_0 = [z_{01} \quad z_{02}]^T$ son las condiciones iniciales y

$$G_2(t) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -g_{21}(t) & -g_{22}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & 0 \end{bmatrix} , \quad Z_0 \triangleq \begin{bmatrix} z_{01}^2 \\ z_{01} z_{02} \\ z_{02}^2 \end{bmatrix}$$

Prueba. Definiendo $z \triangleq \beta\psi + i$ y realizando el cambio de variable en (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \beta(-bi + cu) \\ \dot{\omega} &= -f\omega - \frac{\alpha}{\beta} i^T \mathbb{J} z - \frac{T_L}{J} \\ \frac{di}{dt} &= az + n_p \omega \mathbb{J} z - n_p \mathbb{J} i \omega - [a + i(Ma + b)] i + \beta cu \end{aligned} \quad (3.11)$$

De (3.11) se puede observar su estructura triangular: la primera variable, \dot{z} , sólo depende de variables medibles (y parámetros), la segunda variable, $\dot{\omega}$, depende de variables medibles (y parámetros) y de z , y la tercera ($\frac{di}{dt}$) depende de

z , ω y de variables medibles. Por lo que usando (3.11) es posible integrar explícitamente las dos primeras ecuaciones de la siguiente forma

$$z(t) = z_0 + \beta \int_0^t (-bi + cu) d\tau = z_0 + g_1(t) , \quad (3.12)$$

con

$$g_1(t) \triangleq \beta \int_0^t (-bi + cu) d\tau .$$

Usando (3.12) e integrando $\dot{\omega}$ de (3.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \omega(t) &= e^{-ft} \omega_0 - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} i^T \mathbb{J} z d\tau - \int_0^t e^{-f(t-\tau)} \frac{T_L}{J} d\tau , \\ &= e^{-ft} \omega_0 - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} i^T \mathbb{J} (z_0 + g_1(\tau)) d\tau - \int_0^t e^{-f(t-\tau)} \frac{T_L}{J} d\tau , \\ &= e^{-ft} \omega_0 - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} i^T \mathbb{J} d\tau z_0 - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} \left[i^T \mathbb{J} g_1(\tau) + \frac{\beta T_L}{\alpha J} \right] d\tau , \\ &= e^{-ft} \omega_0 - g_2(t) z_0 - g_3(t) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

con

$$\begin{aligned} g_2(t) &\triangleq \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} i^T \mathbb{J} d\tau z_0 , \\ g_3(t) &\triangleq \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} \left[i^T \mathbb{J} g_1(\tau) + \frac{\beta T_L}{\alpha J} \right] d\tau . \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo (3.12) y (3.13) en la tercera ecuación de (3.11) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= a(z_0 + g_1) + n_p (e^{-ft} \omega_0 - g_2 z_0 - g_3) \mathbb{J} (z_0 + g_1) - n_p \mathbb{J} (e^{-ft} \omega_0 - g_2 z_0 - g_3) + \\ &\quad - |a + \beta(Ma + b)| i + \beta cu \\ &= az_0 + ag_1 + n_p e^{-ft} \omega_0 \mathbb{J} z_0 - n_p (g_2 z_0) \mathbb{J} z_0 - n_p g_3 \mathbb{J} z_0 + n_p e^{-ft} \omega_0 \mathbb{J} g_1 - n_p g_2 z_0 \mathbb{J} g_1 - n_p g_3 \mathbb{J} g_1 + \\ &\quad - n_p \mathbb{J} i e^{-ft} \omega_0 + n_p \mathbb{J} i g_2 z_0 + n_p \mathbb{J} i g_3 - |a + \beta(Ma + b)| i + \beta cu \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ya que el término $-n_p (g_2 z_0) \mathbb{J} z_0$ de (3.14) se puede expresar como

$$\begin{aligned} -(g_2 z_0) \mathbb{J} z_0 &= - \left(\begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \end{bmatrix} \\ &= - (g_{21} z_{01} + g_{22} z_{02}) \begin{bmatrix} z_{02} \\ -z_{01} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} g_{21} z_{01} z_{02} + g_{22} z_{02}^2 \\ - (g_{21} z_{01}^2 + g_{22} z_{01} z_{02}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -g_{21} & -g_{22} \\ g_{21} & g_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{01}^2 \\ z_{01} z_{02} \\ z_{02}^2 \end{bmatrix} = G_2(t) Z_0 . \end{aligned}$$

la ecuación (3.14) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} - |a \mathbb{J} - n_p g_3 \mathbb{J}| (g_1 - i) + \beta (Ma + b) i - \beta cu &= n_p e^{-ft} \mathbb{J} (g_1 - i) \omega_0 + [a \mathbb{J} - n_p g_3 \mathbb{J} - n_p \mathbb{J} (g_1 - \tau) g_2] z_0 + \\ &\quad + n_p e^{-ft} \omega_0 \mathbb{J} z_0 + n_p G_2 Z_0 . \end{aligned}$$

Usando las definiciones (3.10) esta ecuación se puede escribir finalmente como

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \omega_0 + \gamma_3(t) z_0 + \gamma_4(t) \omega_0 \mathbb{J} z_0 + \gamma_5(t) Z_0 , \quad (3.15)$$

que conduce directamente a la representación (3.9) ■

El modelo (3.9) es una representación no lineal en los parámetros (condiciones iniciales) del MI. Mediante técnicas de estimación paramétrica no lineal es posible determinar las condiciones iniciales a partir de este modelo. Sin embargo, en general tales técnicas no aseguran una convergencia global. En el siguiente apartado se usará una sobreparametrización, con el fin de obtener una representación lineal en los parámetros, para la cual se pueden aplicar métodos lineales de estimación de parámetros, para este caso el filtro de Kalman, que asegura convergencia global cuando hay excitación persistente.

Representación lineal en los parámetros del MI

El modelo del MI (3.9) mostrado en el lema anterior es una descripción de la máquina en términos de variables medibles y de parámetros desconocidos (las condiciones iniciales de flujo y velocidad), y puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0 \\ \gamma_1(t) &= H(t, \xi) \\ \begin{bmatrix} \omega(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= F(t, \xi) \triangleq \Gamma_2(t) \xi + \varphi(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

dónde ξ corresponde a los parámetros desconocidos (las condiciones iniciales)

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \cdot H(t, \xi) = \begin{bmatrix} \gamma_2(t) & \gamma_3(t) & \gamma_4(t) & \gamma_5(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ z_0 \\ \omega_0 \mathbb{J} z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$

y

$$\Gamma_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-ft} & -g_2(t) \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \varphi(t) = \begin{bmatrix} -g_3(t) \\ g_1(t) \end{bmatrix}.$$

La primera igualdad en (3.16) representa el hecho de que las condiciones iniciales son constantes, siempre y cuando el tiempo inicial ha sido fijado. La segunda ecuación corresponde a la forma en que la señal de salida depende de las condiciones iniciales. La tercera representa el valor de los estados actuales como función de las condiciones iniciales. Utilizando la segunda ecuación de (3.16) es posible estimar los parámetros utilizando métodos de identificación de parámetros de sistemas parametrizados no linealmente, ya que $H(t, \xi)$ es una función no lineal de las condiciones iniciales ξ . Con la tercera ecuación se puede entonces calcular el valor actual de los estados no medidos.

Para convertir este problema no lineal en uno de estimación lineal, se puede realizar una sobreparametrización. Si se define un nuevo conjunto de parámetros ζ , dados por la siguiente reparametrización

$$\zeta = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ z_0 \\ \omega_0 \mathbb{J} z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \Upsilon(\xi) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^8, \quad (3.17)$$

se puede reescribir el sistema (3.16) como

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= 0, \\ \gamma_1(t) &= \Gamma_1(t) \zeta, \\ \begin{bmatrix} \omega(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Gamma_2(t) & 0_{3 \times 5} \end{bmatrix} \zeta + \varphi(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

dónde

$$\Gamma_1(t) = \begin{bmatrix} \gamma_2(t) & \gamma_3(t) & \gamma_4(t) & \gamma_5(t) \end{bmatrix}.$$

La estimación de los parámetros ζ a partir de (3.18) es un problema de identificación lineal ampliamente conocido (Sastry and Bodson, 1989, Capítulo 2), (Ioannou and Sun, 1996), que utiliza las dos primeras ecuaciones de (3.18).

Una vez conocido ζ se puede calcular con facilidad ξ , y con ello las condiciones iniciales originales, y determinar el valor de los estados actuales, mediante la tercera ecuación de (3.18). Esto nos permite realizar efectivamente la idea general descrita en el apartado 3.3.1 para el MI, como se detalla a continuación.

Estimador de parámetros

En relación con el procedimiento propuesto anteriormente, la primera parte del problema, la estimación de las condiciones iniciales ζ , se puede resolver con la utilización del filtro de Kalman como método de estimación. Con el sistema (3.18) y de (Kalman and Bucy, 1961) es posible proponer la siguiente estructura para el estimador, que también es una de las estructuras propuestas en (Sastry and Bodson, 1989)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\zeta}}(t) &= -gP(t)\Gamma_1^T(t)e_\gamma(t) \\ \dot{P}(t) &= Q(t) - gP(t)\Gamma_1^T(t)\Gamma_1(t)P(t) \quad , \quad P(0) > 0 \quad , \\ \hat{\gamma}_1(t) &= \Gamma_1(t)\hat{\zeta}(t) \\ e_\gamma(t) &= \hat{\gamma}_1(t) - \gamma_1(t)\end{aligned}\tag{3.19}$$

dónde $Q(t) = Q > 0$ y $g > 0$ son parámetros de diseño.

Estimación de los estados actuales

Para la segunda parte del proceso de observación se requiere calcular los estados no medibles. Esto se logra de la tercera ecuación de (3.18), utilizando el valor estimado de los parámetros (condiciones iniciales), es decir

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_2(t) & 0_{3 \times 5} \end{bmatrix} \hat{\zeta}(t) + \varphi(t) \quad .\tag{3.20}$$

Con los resultados anteriores se puede decir que el observador queda formado por el estimador de condiciones iniciales (3.19), con el que se estiman las condiciones iniciales de velocidad ω_0 y flujo (de manera indirecta) ψ_0 , y el reconstructor de los estados actuales (3.20), que utiliza las condiciones iniciales estimadas por (3.19). Nótese que el cálculo de las condiciones iniciales es solo un paso intermedio para el cálculo de los estados actuales. Es posible eliminar este paso intermedio si se toma en (3.20) la derivada con respecto al tiempo y se elimina de las ecuaciones a ζ^* . Esto requiere obtener una pseudo inversa del mapa de reparametrización (3.17).

3.3.3. Análisis de convergencia del estimador de condiciones iniciales

Para verificar el desempeño del observador basado en el estimador de condiciones iniciales (OECI) es necesario hacer un análisis de las propiedades de convergencia del estimador de condiciones iniciales (3.19), que se llevará a cabo utilizando la teoría de Lyapunov sobre estabilidad de puntos de equilibrio (Khalil, 1996). Una forma de realizar el análisis de convergencia del observador, parecido al que aquí se presenta, se puede consultar en (Gonzalez-Fonseca *et al.*, 2004), donde se verifican las condiciones para que la solución de la matriz de Riccati ($P(t)$) sea positiva definida en términos de las propiedades de observabilidad de los sistemas afines en los estados a observar.

De las ecuaciones del sistema en representación paramétrica (3.18) y del filtro de Kalman (3.19) se obtiene que la dinámica del error de estimación $e(t) \triangleq \hat{\zeta}(t) - \zeta(t)$ está dada por

$$\dot{e}(t) = -gP(t)\Gamma_1^T(t)\Gamma_1(t)e(t) \quad .\tag{3.21}$$

La derivada con respecto al tiempo de la candidata a función de Lyapunov $V(t) = e^T(t)P^{-1}(t)e(t)$ a lo largo de las trayectorias de (3.21) es

$$\dot{V}(t) = -e^T(t) \left[g\Gamma_1^T(t)\Gamma_1(t) + P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t) \right] e(t) \quad .\tag{3.22}$$

$\dot{V}(t)$ es negativa definida, y por lo tanto el punto de equilibrio de (3.21) es uniforme y asintóticamente estable, si $Q(t)$ es positiva definida y acotada, y la pareja $(\Gamma_1(t), 0)$ es uniforme y completamente observable (UCO), es decir,

si (Kalman and Bucy, 1961. Teorema 3, p. 101) (ver Apéndice A) existen constantes positivas α_1 , α_2 y δ tales que la Grammiana de observabilidad satisfice

$$\alpha_1 < \int_t^{t+\delta} \Gamma_1^T(\tau) \Gamma_1(\tau) d\tau < \alpha_2, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.23)$$

Esta condición corresponde a la de excitación persistente (Ioannou and Sun, 1996) en la literatura de control adaptable. Bajo estas condiciones el estado estimado $\hat{\zeta}(t)$ converge exponencialmente rápido a su valor verdadero $\zeta(t)$. Finalmente, de (3.20) se sigue entonces que los estados estimados convergen exponencialmente rápido a los estados reales.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \hat{\omega}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

si adicionalmente $\Gamma_2(t)$ es acotada. Con esto se demuestra el siguiente Lema.

Lema 3.3 *Considere el observador OECI dado por (3.19-3.20) y suponga que $Q(t)$ es positiva definida y acotada. Si una trayectoria del MI es tal que satisface que $\Gamma_2(t)$ sea acotado y que la pareja $(\Gamma_1(t), 0)$ sea uniforme y completamente observable (UCO), entonces el error de observación converge a cero uniforme y asintóticamente.*

3.3.4. Relación entre las propiedades de convergencia del OECI y la Dinámica Indistinguible

Como se aclaró al inicio de este capítulo, ningún observador puede converger para trayectorias no detectables. Para el OECI las condiciones de convergencia dadas en el Lema anterior aseguran además que las trayectorias del MI que satisfacen tales condiciones no pueden pertenecer a la dinámica indistinguible (DI) por un tiempo indefinido, y son por lo tanto detectables.

Lema 3.4 *Considere el observador OECI dado por (3.19-3.20). Si una trayectoria del MI satisface las condiciones suficientes para asegurar la convergencia del observador, es decir, se satisfacen las condiciones del Lema 3.3, entonces tal trayectoria no pertenece a la dinámica indistinguible del MI para todo tiempo.*

Prueba. De la representación del sistema dada por (3.18) y del concepto de dinámica indistinguible definido en el Capítulo 2 se sigue que para dos trayectorias del MI que sean indistinguibles, dadas por

$$\begin{array}{l} \dot{\zeta}_1 = 0 \\ \gamma_1(t) = \Gamma_1(t) \zeta_1 \\ \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_2(t) & 0_{3 \times 5} \end{bmatrix} \zeta_1 + \varphi(t) \end{array}, \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} \dot{\zeta}_2 = 0 \\ \gamma_1(t) = \Gamma_1(t) \zeta_2 \\ \begin{bmatrix} \omega_2(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_2(t) & 0_{3 \times 5} \end{bmatrix} \zeta_2 + \varphi(t) \end{array}$$

se debe satisfacer para el error $\tilde{\zeta} = \zeta_1 - \zeta_2$ que

$$\begin{array}{l} \dot{\tilde{\zeta}} = 0 \\ 0 = \Gamma_1(t) \tilde{\zeta} \end{array}$$

Sin embargo, la condición UCO (3.23) implica que la última igualdad solo puede ser satisfecha para $\tilde{\zeta} = 0$. ■

3.3.5. Realización del OECI

Para implementar el OECI (3.19-3.20) se requiere generar la funciones (3.10) que lo constituyen.

Comentario 3.3 *Se puede observar que algunas señales como $y_1(t)$, $y_2(t)$, y $y_3(t)$ pueden crecer demasiado, lo que es inconveniente para la estimación. El análisis de tales efectos puede ser importante para la verificación de las propiedades del esquema de estimación. Es posible que estos problemas se puedan enfrentar usando algún algoritmo de normalización (Sastry and Bodson, 1989) en la identificación.*

Las señales y_i se pueden realizar como las salidas de los siguientes filtros lineales:

- Para $g_1(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \beta(-b\nu_1 + \tau i) ; \nu_{10} = \nu_1(0) \\ \hat{g}_1 &= \nu_1 \end{aligned}$$

- Para $g_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_2 &= -f\nu_2 - \frac{\alpha}{\beta} \mathbb{J}i ; \nu_{20} = \nu_2(0) \\ \hat{g}_2^T &= \nu_2 \end{aligned}$$

- Para $g_3(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_3 &= -f\nu_3 + \frac{\alpha}{\beta} \left[i^T \mathbb{J} \hat{g}_1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{T_L}{J} \right] ; \nu_{30} = \nu_3(0) \\ \hat{g}_3 &= \nu_3 \end{aligned}$$

Se puede observar que si los filtros tienen condiciones iniciales diferentes de cero, entonces las señales realizadas serán $\hat{g}_i(t) = g_i(t) + \nu_{i0}$. Para el presente trabajo se consideran dichas condiciones iniciales iguales a cero, lo que no implica un problema mayor debido a que el estimador utilizado, filtro de Kalman, puede soportar (por medio de sintonización) algunos errores de modelado.

3.3.6. Eliminación de restricciones para el observador OECI

Al inicio del diseño del OECI se hicieron algunas hipótesis restrictivas, que sin embargo pueden ser eliminadas con relativa facilidad. A continuación se discute brevemente como se pueden eliminar dichas restricciones.

Eliminación de restricción 1: Los parámetros del motor son desconocidos.

Se había supuesto que todos los parámetros del MI son conocidos. Si esto no es satisfecho, entonces se puede incluir en el vector de parámetros ξ de la ecuación (3.16) los parámetros desconocidos. El procedimiento adicional es idéntico al desarrollo realizado para el caso mostrado. Es necesario considerar en este punto que si algunos parámetros no son identificables, entonces el algoritmo tendrá problemas. Sin embargo, formalmente, todo se puede desarrollar en la misma forma.

Eliminación de restricción 2: Par de carga no medible.

La hipótesis de que el par de carga sea medible es difícilmente satisfecha en la práctica. Para suavizarla se puede asumir, por ejemplo, que el par de carga es un parámetro constante pero desconocido. De esta forma el par de carga T_L se puede incluir en el algoritmo de observación de la misma forma que cualquier otro parámetro, tal como se discute en el párrafo anterior. Podría presentarse el caso de que el par de carga no sea constante pero que este sea generado por un exosistema (conocido). Para tal caso las ecuaciones del sistema se podrían extender para incluir al exosistema, lo cual se realizaría de manera similar al método utilizado.

Eliminación de restricción 3: La derivada di/dt no es medible.

Para simplificar la presentación se supuso que se disponía de la medición de di/dt , la derivada temporal de la corriente de estator, lo que resulta muy problemático en una aplicación práctica. Para encontrar una representación del MI que no requiera de tal derivada, se puede hacer lo siguiente.

Si la ecuación de salida del modelo (3.18), dada por

$$\gamma_1(t) = \Gamma_1(t) \Upsilon(\xi) ,$$

se hace pasar por un filtro LTI estable, como por ejemplo

$$G(s) = \left[\frac{1}{s+p} \right] , \quad p > 0 .$$

La nueva ecuación de salida del modelo se convierte en

$$\bar{\gamma}_1(t) = \bar{\Gamma}_1(t) \Upsilon(\xi) .$$

donde

$$\tilde{\gamma}_1(t) = G(s) [\gamma_1(t)] \quad \tilde{\Gamma}_1(t) = G(s) [\Gamma_1(t)] .$$

Aquí se ha utilizado la siguiente notación mezclada: $G(s) [f(t)]$ representa la salida del filtro lineal $G(s)$ con la señal del tiempo $f(t)$ como entrada. Se ha usado el hecho de que, como los parámetros $\Upsilon(\xi)$ son constantes, no son afectados por el filtro y, por tanto, quedan fuera de él.

La observación principal aquí es que, dado que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1(t) &= G(s) [\gamma_1(t)] = G(s) \left[\frac{di}{dt} - (a\mathbb{I} - n_p g_3 \mathbb{J})(g_1 - i) + \beta(Ma + b)i - \beta cu \right] \\ &= G(s) \left[\frac{di}{dt} \right] + G(s) [-(a\mathbb{I} - n_p g_3 \mathbb{J})(g_1 - i) + \beta(Ma + b)i - \beta cu] \\ &= sG(s) [i] + G(s) [-(a\mathbb{I} - n_p g_3 \mathbb{J})(g_1 - i) + \beta(Ma + b)i - \beta cu] . \end{aligned}$$

la función $\tilde{\gamma}_1(t)$ puede ser realizada *sin* el uso de la derivada de i . Nótese que la ecuación de salida del modelo, $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\Gamma}_1(t) \Upsilon(\xi)$, requiere solo de señales medibles y parámetros conocidos. El diseño del OECl se realiza de la misma manera, utilizando esta nueva salida del modelo para construir la regresión.

3.3.7. Síntesis de la sección

El diseño, recién presentado, de observador para el MI en condiciones de operación SSM se realizó utilizando el concepto básico de observabilidad, esto es, considerando que el MI es observable se pueden estimar las condiciones iniciales de los estados del MI. con éstos y el modelo del MI se pueden obtener los estados actuales. Se utilizó con éxito el filtro de Kalman como método de estimación de condiciones iniciales (constantes). Para este filtro no fue necesaria una búsqueda exhaustiva de los parámetros de sintonización del mismo. Como características importantes del observador se pueden mencionar su sencillez de implantación y la eliminación de la restricción de considerar a la velocidad como constante (que se hace en muchos trabajos de la literatura) establecida en el diseño de la sección anterior. Se presenta el análisis de convergencia y la relación de éste con la DJ. Finalmente se describen algunas maneras de eliminar las restricciones no esenciales planteadas al inicio del diseño.

3.4. Diseño de un Observador de estados basado en un Modelo Extendido (OME)

En esta sección se propone el diseño de un observador, basado en un modelo del MI, que posee un espacio de estados de dimensión mayor a la del sistema original. Este modelo tiene la ventaja de que es afín en los estados no medibles, razón por la cual se puede utilizar el Filtro de Kalman como método de estimación, éste converge globalmente, siempre que se satisfaga la condición de observabilidad completa y uniforme. Para realizar esta inmersión se asume que el torque de carga es constante y desconocido, así que no se requiere la medición de tal variable. Este diseño está emparentado con el trabajo presentado en (Besançon and Alexandru., 2003).

3.4.1. Motivación

Una de las dificultades enfrentadas en el diseño de observadores para el MI en operación sin sensores mecánicos se debe a que el modelo matemático original no es afín en los estados no medibles. Una ventaja de este tipo de modelos para el diseño de observadores es que el filtro de Kalman constituye un observador global para ellos, cuando las condiciones de observabilidad uniforme son satisfechas. En esta sección se propone precisamente un modelo con tales características para el MI y se realiza el diseño del observador utilizando un filtro de Kalman, que estima simultáneamente el par de carga T_L del MI, que se asume constante y desconocido.

3.4.2. Construcción del observador

Para el diseño del observador se hacen las mismas hipótesis que en la Sección 3.1, excepto por el hecho de que el par de carga T_L se asume constante y desconocido. Por claridad, el desarrollo del observador de ésta sección se puede dividir en dos etapas: la obtención del modelo afín del MI y la propuesta del filtro de Kalman para este modelo.

Desarrollo de un modelo afín para el MI

Es afortunado que, si se asume que el torque de carga es constante, es posible encontrar una representación del MI que es afín en los estados. Adicionalmente esta representación se puede hallar de una forma muy simple, como se muestra en la prueba del siguiente Lema.

Lema 3.5 *Considere que el MI se representa por (3.1) y que el torque de carga T_L es constante y desconocido. Entonces se puede hacer la siguiente representación afín en los estados del MI*

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\omega} \\ \frac{d\phi_1}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ \frac{d\phi_3}{dt} \\ \frac{d(T_L/J)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\beta}i^T\mathbb{J} & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha\mathbb{I} & -n_p\mathbb{J}i & -(a + \beta Ma)\mathbb{I} & n_p\mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\mathbb{J}(-bi + cu) & 0 & -f\mathbb{I} & -\mathbb{I} & -\frac{\alpha}{\beta}\Upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\mathbb{J}(-bi + cu) \\ \beta(-b\mathbb{I} + c\mathcal{U}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \omega \\ i \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ T_L/J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta(-bi + cu) \\ 0 \\ \beta(-bi + cu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \omega \\ i \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ T_L/J \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

con

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 2i_1 & 0 \\ i_2 & i_1 \\ 0 & 2i_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 2u_1 & 0 \\ u_2 & u_1 \\ 0 & 2u_2 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & -i_2 & i_1 \\ i_2 & i_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

y donde $\varepsilon = \beta\psi + i$, los estados adicionales ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 tienen las siguientes relaciones con los estados originales del MI: $\phi_1 = \omega\mathbb{J}z$, $\phi_2 = \frac{T_L}{J}\mathbb{J}z$ y $\phi_3 = [z_1^2, z_1z_2, z_2^2]$, z_i son los elementos del vector z .

Prueba. Considere el modelo del MI (3.1) y el siguiente cambio de variable $z = \beta\psi - i$ con lo que el modelo del MI queda

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \beta(-bi + cu) \\ \dot{\omega} &= -f\omega - \frac{\alpha}{\beta}i^T\mathbb{J}z - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d}{dt} &= az + n_p\omega\mathbb{J}z - n_p\mathbb{J}i\omega - (a + \beta(Ma + b))i + \beta cu. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Con T_L constante y desconocido (3.27) se puede escribir como (incluyendo T_L/J como una variable de estado)

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \\ \dot{T}_L/J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\beta} i^T \mathbb{J} & -f & 0 & -1 \\ a \mathbb{I} & -n_p \mathbb{J} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \omega \\ i \\ T_L/J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta(-bi + cu) \\ 0 \\ -[a + \beta(Ma + b)]i + \beta cu \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_p \omega \mathbb{J} z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \omega \\ i \\ T_L/J \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior es afín en los estados no medidos, excepto por el último término. Se introduce la siguiente expresión como nueva variable de estado, esto es

$$\phi_1 \triangleq \omega \mathbb{J} z.$$

Calculando su derivada con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\omega} \mathbb{J} z + \omega \mathbb{J} \dot{z} = -f \omega \mathbb{J} z - \frac{\alpha}{\beta} (i^T \mathbb{J} z) \mathbb{J} z - \frac{T_L}{J} \mathbb{J} z + \beta \omega \mathbb{J} (-bi + cu). \quad (3.29)$$

Se observa que (3.29) depende de forma no lineal de los estados no medidos debido a los términos $\frac{T_L}{J} \mathbb{J} z$ y $(i^T \mathbb{J} z) \mathbb{J} z$, que se introducirán como nuevas variables de estado. Nótese que

$$(i^T \mathbb{J} z) \mathbb{J} z = \Upsilon \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_2^2 \end{bmatrix}, \quad \text{dónde } \Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & -i_2 & i_1 \\ z_2 & i_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Defínase como nuevas variables de estado a

$$\phi_2 \triangleq \frac{T_L}{J} \mathbb{J} z, \quad \phi_3 \triangleq \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_2^2 \end{bmatrix}.$$

Sus derivadas con respecto al tiempo son

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\dot{T}_L}{J} \mathbb{J} z + \frac{T_L}{J} \mathbb{J} \dot{z} = \beta \mathbb{J} (-bi + cu) \frac{T_L}{J}. \quad (3.30)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_3 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \\ 0 & 2z_2 \end{bmatrix} \dot{z} = \beta \begin{bmatrix} 2z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \\ 0 & 2z_2 \end{bmatrix} (-bi + cu) \\ &= \beta (-b\mathcal{I} + c\mathcal{U}) z, \end{aligned} \quad (3.31)$$

dónde \mathcal{I} y \mathcal{U} están definidos en (3.26). Nótese que ϕ_2 y ϕ_3 tienen derivadas afines en los estados lo que permite escribir las ecuaciones (3.28), (3.29), (3.30) y (3.31) como un solo modelo aumentado del MI por las ecuaciones dadas por (3.24-3.25). ■

El modelo obtenido tiene un espacio de estados de dimensión mucho mayor que el original: El sistema (3.28) posee 6 estados, mientras que el sistema aumentado (3.24) tiene 13 estados. Debido a esta diferencia de espacios de estado, los sistemas no son equivalentes. Esto se refleja en el hecho de que el sistema aumentado (3.24) tiene una dinámica más rica que (3.28), es decir, contiene un número mayor de trayectorias. Sin embargo, todas las trayectorias de estado del sistema original (3.28) están contenidas en el sistema extendido (3.24). Estas corresponden a las trayectorias restringidas a una subvariedad del espacio de estado de (3.24) definida por las ecuaciones $\phi_1 = \omega \mathbb{J} z$, $\phi_2 = \frac{T_L}{J} \mathbb{J} z$, y $\phi_3 = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 z_2 & z_2^2 \end{bmatrix}$. Este hecho permite asegurar que todo observador para (3.24) es también un observador para (3.28).

Propuesta del observador

El sistema formado por (3.24-3.25) es un sistema LVT que se puede representar como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(y, u)x + b(y, u) \\ y &= C(y, u)x\end{aligned}\quad (3.32)$$

donde las matrices A , b , C dependen de la entrada y la salida del MI. Para este sistema se propone un filtro de Kalman ¹, con su respectiva ecuación de Riccati.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A(y, u)\hat{x} + b(y, u) + P(t)C^T(y, u)[y - C(y, u)\hat{x}] \\ \dot{P} &= A(y, u)P(t) + P(t)A^T(y, u) - P(t)C^T(y, u)C(y, u)P(t) + Q, \quad P(0) > 0.\end{aligned}\quad (3.33)$$

donde \hat{x} es el estado estimado. Q es una matriz de sintonización del filtro que debe elegirse como simétrica, positiva definida y acotada, y $P(t)$ es la matriz de covarianza del filtro que resulta de la solución de la ecuación tipo Riccati.

Es necesario mencionar que una condición para la convergencia del filtro es la existencia de solución de la ecuación de Riccati, que a su vez requiere la propiedad de observabilidad completa y uniforme del sistema. Esto se revisa con detalle en la siguiente sección.

3.4.3. Análisis de convergencia del observador OME

Para la verificación de convergencia del observador se utiliza el método de Lyapunov de verificación de estabilidad de puntos de equilibrio, por lo que dicho análisis se realizará sobre la ecuación dinámica de error, esto es,

Con (3.32 y 3.33) se puede obtener la dinámica de la ecuación del error de observación como $e = x - \hat{x}$, esto es

$$\dot{e} = [A(y, u) - P(t)C^T(y, u)C(y, u)]e \quad (3.34)$$

Para la verificación de convergencia de (3.34) se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V = e^T P^{-1}(t)e.$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.34) es

$$\dot{V} = -e^T [C^T(y, u)C(y, u) + P^{-1}(t)QP^{-1}(t)]e. \quad (3.35)$$

Como la matriz C es constante, la ecuación (3.35) se puede escribir de la siguiente manera, donde Q es una matriz (propuesta) constante y positiva definida

$$\dot{V} = -e^T [C^T C + P^{-1}(t)QP^{-1}(t)]e \quad (3.36)$$

De (3.36) se puede decir lo siguiente: si la matriz $[C^T C + P^{-1}(t)QP^{-1}(t)]$ es positiva definida, entonces la ecuación de error (3.34) converge a cero de manera uniforme y asintótica, lo que a su vez implica convergencia de los estados estimados a los estados verdaderos. Esto se satisface si la pareja $(C, A(y, u))$ de (3.32) es uniforme y completamente observable (UCO) (Ver (Kalman and Bucy, 1961) y Apéndice A).

Se tiene entonces el siguiente Lema.

Lema 3.6 *Considerar el observador OME dado por (3.33). Si una trayectoria del MI es tal que satisface que la pareja $(C, A(y, u))$ de (3.32) sea uniforme y completamente observable (UCO), entonces el error de observación converge a cero uniforme y asintóticamente.*

¹Para un tratamiento más detallado sobre el tema ver el Apéndice A

3.4.4. Relación entre las propiedades de convergencia del OME y la Dinámica Indistinguible.

Igual que en el caso del OECl, para el OME las condiciones de convergencia dadas en el Lema anterior aseguran además que las trayectorias del MI que satisfacen tales condiciones no pueden pertenecer a la dinámica indistinguible (DI) por un tiempo indefinido, y son por lo tanto detectables.

Lema 3.7 *Considere el observador OME dado por (3.33). Si una trayectoria del MI satisface las condiciones suficientes para asegurar la convergencia del observador, es decir, se satisfacen las condiciones del Lema 3.6, entonces tal trayectoria no pertenece a la dinámica indistinguible del MI para todo tiempo.*

Prueba. Nótese primero que si dos trayectorias del MI son indistinguibles para el modelo (3.28) lo serán también para el modelo extendido (3.24). De esta representación del sistema y del concepto de dinámica indistinguible definido en el Capítulo 2 se sigue que para dos trayectorias del MI que sean indistinguibles, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A(y, u)x_1 + b(y, u) & \dot{x}_2 &= A(y, u)x_2 + b(y, u) \\ y &= C(y, u)x_1 & y &= C(y, u)x_2 \end{aligned}$$

se debe satisfacer para el error $\bar{x} = x_1 - x_2$ que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A(y, u)\bar{x} \\ 0 &= C(y, u)\bar{x} \end{aligned}$$

Sin embargo, la condición UCO implica que la última igualdad solo puede ser satisfecha para $\bar{x} = 0$. ■

3.4.5. Síntesis de la sección

En la sección recién finalizada se realizó el diseño de un observador basado en un modelo afín en los estados no medibles del MI (OME), dicho modelo se obtuvo extendiendo el estado del modelo original del MI. Aunque la dimensión del estado del observador es más del doble de estado original, dicha extensión se puede justificar por la ventaja de estimar el par de carga (considerado constante). Al igual que para los observadores anteriores, en esta sección se presenta un análisis de convergencia del observador y se muestra la relación de dicho análisis con la DI. La sintonización del filtro de Kalman usado en OME se realizó de manera simple.

3.5. Un análisis de robustez de los observadores

Para el diseño de los observadores, recién presentados, se fijó a los parámetros como constantes, consideración que en general no es verdadera, sobre todo sabiendo que el MI tiene parámetros que cambian con las condiciones de operación, como es el caso de las resistencias de rotor y estator. Adicionalmente, se puede considerar al par de carga como otro parámetro que puede variar y el cual no se conoce con precisión. En razón de lo anterior, es posible que el desempeño de los observadores se deteriore en el caso de la implantación a un sistema real, es decir, los observadores tienen parámetros constantes del MI, mientras los parámetros reales del MI cambian, lo cual puede provocar una disminución en el desempeño de los mismos.

Con el fin de revisar el posible deterioro en el desempeño de los observadores presentados, a continuación se realiza un análisis, "simple", basado en la teoría de perturbaciones regulares. El siguiente análisis se aplica a los tres observadores, debido a que estos tienen la misma estructura lineal y variante en el tiempo (lo mismo que sus ecuaciones de error).

En el análisis de convergencia de los observadores se mostró que, bajo ciertas condiciones de operación del MI (donde hay detectabilidad) la ecuación dinámica de error es uniforme y asintóticamente estable. Adicionalmente, se puede decir que como son sistemas lineales la estabilidad uniforme y asintótica es equivalente a la estabilidad exponencial.

Con el fin de hacer más clara la exposición se presentan las ecuaciones de error, encontradas, para cada uno de los observadores, esto es:

Para el observador OVC se tienen las siguientes ecuaciones de error, donde todos los términos se presentan en la sección 3.2.4.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{OVC}(t) &= [A(y, u) - K(t)C_0] e_{OVC}(t) - g_1(y, u, p)z \\ e_x &= Q(\omega + e_\omega)(z + e_z) - Q(x)z \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para el observador OECI se tiene la siguiente ecuación dinámica de error, donde todos los términos se presentan en la sección 3.3.3.

$$\dot{e}_{OECI}(t) = -gP_1(t)\Gamma_1^T(t)\Gamma_1(t)e_{OECI}(t) \quad (3.38)$$

Para el observador OEM se tiene la siguiente ecuación dinámica de error, donde todos los términos se presentan en la sección 3.4.3.

$$\dot{e}_{OME} = [A(y, u) - P_2(t)C^T(y, u)C(y, u)] e_{OME} \quad (3.39)$$

La idea básica para el análisis de robustez es aplicar la teoría de perturbaciones regulares, para lo cual se considera un sistema nominal (no forzado) en el que, el término de perturbación es igual a cero

$$\dot{e} = A(y, u, p, P)e \quad (3.40)$$

y el sistema nominal con un término, aditivo, de perturbación, esto es

$$\dot{e}_p = A(y, u, p, P)e + g(y, u, p_1) \quad (3.41)$$

donde el término de perturbación se origina por la variación de parámetros (para nuestro caso), expresada por p_1 en (3.41). Es necesario mencionar que la variación de parámetros no cambia el orden del sistema por lo que, se puede considerar a la variación de los parámetros en el MI como un término aditivo en (3.40), tal como se presenta en (3.41).

Por lo tanto, es necesario expresar a las ecuaciones de error de los observadores como (3.40) - (3.41) con el fin de aplicar los resultados de la teoría de perturbaciones regulares.

Con respecto a la primera ecuación de (3.37) se puede decir que el primer término del lado derecho corresponde a la parte nominal (no forzada) y el segundo, se puede considerar como un término de perturbación (entrada) del sistema. La segunda ecuación de (3.37) corresponde al error que se comete al realizar la transformación a coordenadas originales. En relación con lo anterior, se puede justificar la presentación de (3.37) sólo con la parte nominal de la primera ecuación, debido a que el término de perturbación se puede incluir en el término de perturbación generado por el cambio en los parámetros. Por otro lado, la segunda ecuación de (3.37) se puede eliminar si consideramos el análisis de robustez para la velocidad (ω). Es necesario mencionar que la matriz $K(t)$ en (3.37) es función de la matriz de Riccati $P(t)$.

Por otro lado, las ecuaciones (3.38) y (3.39) tienen la estructura de (3.40) que con la variación de los parámetros se pueden representar como (3.41). Se puede observar que (3.38) y (3.39) son funciones de $P_1(t)$ y $P_2(t)$ (matrices de Riccati) respectivamente.

En relación con lo anterior, se puede considerar que las ecuaciones dinámicas de error de los tres observadores tienen una estructura como la definida por (3.40) - (3.41) con $A(y, u, p, P)$ una matriz que depende de la salida y , la entrada u , los parámetros del MI p y las matrices de Riccati P , donde e es el vector de error de observación.

Con el propósito de establecer las propiedades de estabilidad de (3.41) se puede aplicar el concepto de estabilidad entrada-estado (Khalil, 1996), ya que $g(y, u, p_1)$ es una perturbación que (en general) no se desvanece en el origen

En relación con lo anterior se puede utilizar el siguiente Teorema ² de (Khalil, 1996)

²Teorema 5.2, p.p.218

Teorema 3.1 Sea $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$, $D_u = \{u \in R^m \mid \|u\| < r_u\}$ y $f : [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow R^n$ sea continua a trazos en t y localmente Lipschitz en x y u . Sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq \alpha_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0, \quad \forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$$

donde α_1 , α_2 , α_3 y ρ son funciones clase \mathcal{K} . Entonces el sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ es localmente estable entrada-estado con $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$, $k_1 = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, y $k_2 = \rho^{-1}(\min\{k_1, \rho(r_u)\})$. Adicionalmente, si $D = R^n$, $D_u = R^m$ y α_1 es una función clase \mathcal{K}_∞ , entonces $\dot{x} = f(t, x, u)$ es estable entrada-estado con $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$.

En las secciones correspondientes de los observadores se presentó un análisis de convergencia de las ecuaciones de error, donde se muestra, por medio de una función de Lyapunov, que para los tres observadores las ecuaciones de error son uniforme y asintóticamente estables, lo cual garantiza el cumplimiento de las condiciones de la función V en el Teorema 3.1. Las otras condiciones a cumplir según el Teorema 3.1, son las de acotamiento de la función de entrada (la perturbación para nuestro análisis) y el acotamiento del vector de error e .

Con base en lo anterior y aplicando el Teorema 3.1. Si $\|g(y, u, p_1)\| < r_g = r_u$, $\|e\| < r$, es posible mostrar que la ecuación dinámica de error (3.41) es localmente estable entrada-estado para toda perturbación y error acotados, con r_g y r constantes.

Comentario 3.4 Es necesario comentar que la matriz de Riccati (para cada caso) de la cual dependen los tres observadores, también depende de los parámetros del MI. Por lo que, es necesario asumir que la variación de dichos parámetros no afecta la existencia ni la solución de la misma para cada uno de los casos.

Comentario 3.5 Para la justificación del acotamiento de la perturbación se consideró que: sólo la resistencia de rotor R_r y el par de carga T_L cambian a otro valor constante (por lo que siguen siendo constantes), que éstos cambian en un rango limitado debido a restricciones físicas. Por lo tanto, se puede asumir que la magnitud de la perturbación será acotada y el resultado anterior se justifica. La restricción de localidad se da en relación a que tanto la magnitud del error como la magnitud de la perturbación son acotadas en una vecindad del origen correspondiente dentro de su dominio.

Comentario 3.6 En razón del análisis anterior se puede afirmar que los tres observadores presentados en este trabajo convergerán a cero (bajo las condiciones establecidas en los análisis de convergencia) si el término de perturbación se hace cero o convergerán a una vecindad acotada de las trayectorias reales si los términos de perturbación y error son acotados.

3.6. Resultados de simulación

Con el fin de verificar el desempeño de los observadores diseñados en este capítulo, se presentan resultados de simulación³ en varias condiciones de operación, poniendo énfasis en las reportadas en la literatura como de bajo desempeño para diferentes clases de observadores.

Una de las condiciones de operación del MI más utilizadas en la práctica es la de condiciones nominales de voltaje de excitación y par de carga constante, por lo que será necesario revisar el desempeño de los observadores en la condición antes mencionada. Otra condición de operación del MI que se ha mencionado en la literatura como de bajo desempeño para los observadores es la de excitación con voltaje nominal y par de carga variante, pues en (Harnfors, 2000) se muestra bajo desempeño de los observadores tipo Kalman cuando se presentan cambios tipo escalón en el par de carga.

³Simulink de Matlab V.6.5, MathWorks Inc.

Una condición de operación que resulta de gran exigencia para los observadores es la de baja frecuencia del voltaje de excitación. En (Holtz and Quan, 2002) se realizan pruebas experimentales hasta una frecuencia de $1[Hz]$ con buenos resultados, por lo que en el presente trabajo se verifica la operación de los tres observadores a una frecuencia del voltaje de excitación, menor de $1[Hz]$.

De acuerdo con el análisis de observabilidad del MI, se sabe que una de las condiciones que provocan inobservabilidad e indetectabilidad para el modelo del MI es la excitación del estator con voltaje y par de carga constantes. En (Canudas De Wit *et al.*, 2000) se presenta un resultado local que previene del bajo desempeño de observadores SSN para el MI bajo esta condición de operación. Utilizando el resultado del análisis de observabilidad, de este trabajo, se propone aplicar al estator un voltaje de naturaleza constante para lo cual se espera un desempeño muy bajo o la divergencia de la trayectoria estimada de la real.

Con el fin de verificar el desempeño de los observadores diseñados en este capítulo, se realizarán simulaciones en las siguientes condiciones de operación, poniendo énfasis en las reportadas en la literatura como de bajo desempeño en diferentes clases de observadores.

3.6.1. Condiciones de operación

- Condiciones nominales de operación, donde se aplican condiciones nominales, es decir, un voltaje sinusoidal fijo en amplitud y frecuencia: $u^T(t) = [220\sqrt{3}\sin(120\pi), 220\sqrt{3}\sin(120\pi - \frac{\pi}{2})]$ [V], con $T_L = 5[Nm]$ y $T_L = \pm 5[Nm]$
- Condición de baja frecuencia del voltaje de excitación, donde se aplican un voltaje sinusoidal fijo en amplitud y baja frecuencia: $u^T(t) = [220\sqrt{3}\sin(1.2\pi), 220\sqrt{3}\sin(1.2\pi - \frac{\pi}{2})]$ [V], con $T_L = 5[Nm]$ y $T_L = \pm 5[Nm]$.
- Condiciones de frecuencia cero, donde se aplica un voltaje constante en amplitud y frecuencia cero: $u^T(t) = [15\sin(0), 15\sin(0 - \frac{\pi}{2})]$ [V], con $T_L = 5[Nm]$ y $T_L = \pm 5[Nm]$.

3.6.2. Parámetros utilizados para simulación

Para la realización de las pruebas de simulación se utilizaron los siguientes parámetros del MI, de los observadores y las condiciones iniciales de ambos para los tres observadores diseñados.

Parámetros del MI

| L_r [H] | L_s [H] | M [H] | R_r [Ω] | R_s [Ω] | n_p | J [$Kg\ m^2$] | f [s^{-1}] | T_L [Nm] |
|-----------|-----------|---------|--------------------|--------------------|-------|-------------------|------------------|------------|
| 0,076 | 0,142 | 0,099 | 0,93 | 1,633 | 2 | 0,029 | 0,13 | 5 |

(3.42)

Parámetros de los observadores

| Observador | Q | R | g |
|------------|--------------------------------|-----------------------------|-----|
| OVC | $10000\mathbb{I}_{5 \times 5}$ | $20\mathbb{I}_{2 \times 2}$ | 1 |
| OECI | $\mathbb{I}_{8 \times 8}$ | $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ | 15 |
| OME | $100\mathbb{I}_{13 \times 13}$ | $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ | 1 |

(3.43)

Condiciones iniciales de los observadores y del MI

| Observador | $P(0)$ | $X^T(0)$ | $\varpi(0)$ $\frac{rad}{seg}$ | $\psi(0)$ [Wb] | $i(0)$ [A] |
|------------|-------------------------------|-----------------|-------------------------------|----------------|------------|
| OVC | $0.01\mathbb{I}_{5 \times 5}$ | [00000] | 0 | 1 1 | 0 0 |
| OECI | $0.1\mathbb{I}_{8 \times 8}$ | [00000000] | 50 | 1 1 | 0 0 |
| OME | $\mathbb{I}_{13 \times 13}$ | [1111111111111] | 50 | 0 0 | 0 0 |

(3.44)

3.6.3. Resultados de simulación para condiciones nominales

Los resultados presentados muestran a la velocidad de rotor ω como variable observada. Las otras señales mostradas corresponden (subíndices) con las señales estimadas por los observadores.

Condiciones nominales con par de carga constante

En las Figuras 3.2 y 3.3 se presentan los resultados de simulación para los tres observadores en las condiciones nominales y con par de carga constante.

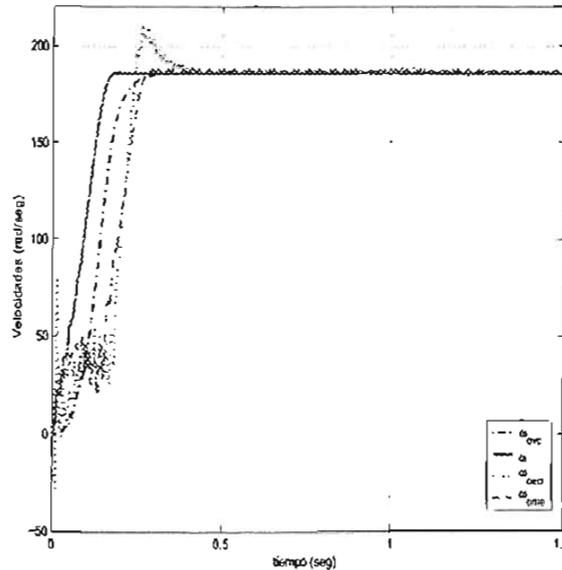


Figura 3.2: Condiciones nominales, T_L constante

En relación con los resultados presentados en las Figuras 3.2 y 3.3 se puede decir que los tres observadores presentan un desempeño aceptable. Se puede decir que, el observador que presenta mejor desempeño, para esta condición de operación, es el OVC, pues converge de manera más rápida y suave.

Condiciones nominales con par de carga variante

En las Figuras 3.4 y 3.5 se presentan los resultados de simulación para los tres observadores en las condiciones nominales y con par de carga variante. La variación impuesta para T_L consiste en una señal cuadrada de magnitud igual al par de carga nominal y frecuencia 1 [Hz].

En relación con los resultados presentados en las Figuras 3.2 y 3.3 se puede decir que el observador OEM presenta el más bajo desempeño de los tres debido a la presencia de cambios en la velocidad de rotor ocasionados por los cambios en T_L . Por otro lado, los observadores OECl y OVC presentan un desempeño aceptable, pues el error presentado por el OVC al momento de los cambios de velocidad es pequeño, mientras que el OECl presenta mejor convergencia que los otros. Por lo que, para esta condición de operación el que mejor desempeño muestra es el OECl.

3.6.4. Resultados de simulación para condiciones de baja frecuencia del voltaje de estator

La operación del MI para velocidades cercanas a cero, que según (Canudas De Wit *et al.*, 2000) corresponde a un voltaje de excitación constante, se puede considerar como una condición de bajo desempeño en los sistemas controlador observador para el MI en operación SSM. Los siguientes resultados muestran a la velocidad de rotor como variable observada. Para este caso de operación del MI se presentan las siguientes dos condiciones:

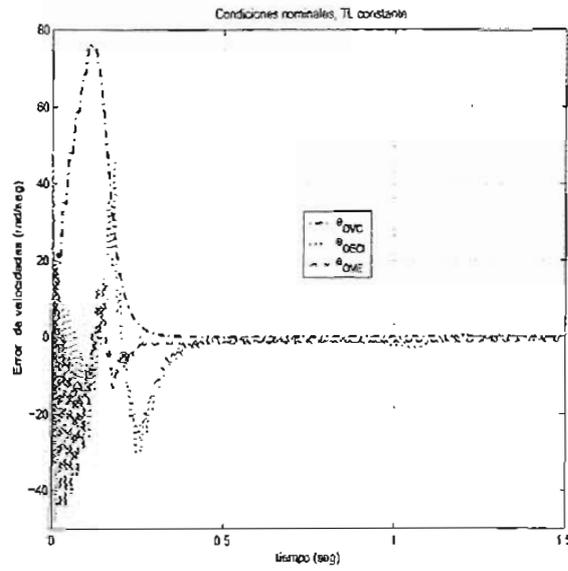


Figura 3.3: Erro para condições nominais com T_L constante

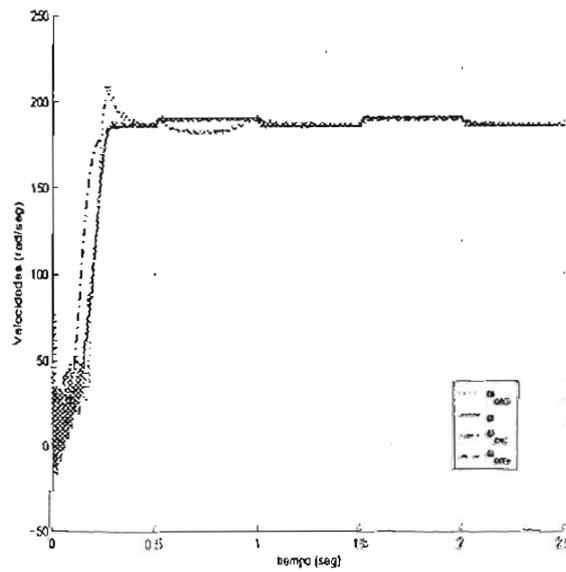


Figura 3.4: Condições nominais, T_L variante

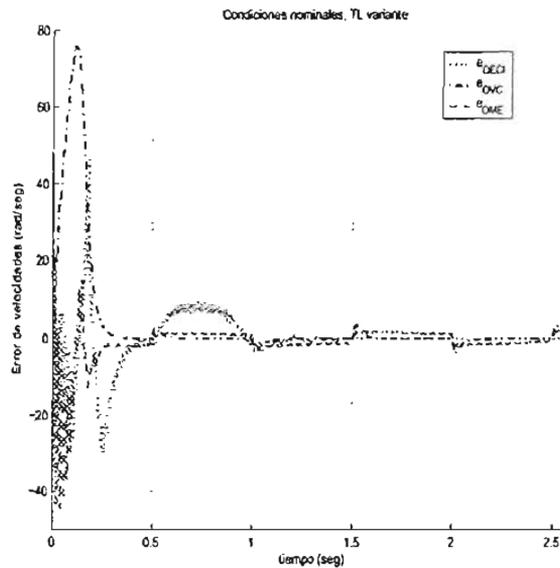


Figura 3.5: Error para condiciones nominales con T_L variante

Condiciones de baja frecuencia con par de carga constante

En las Figuras 3.6 y 3.7 se muestra la comparación del desempeño de los tres observadores para la condición de operación de baja frecuencia del voltaje de excitación y con par de carga constante.

En relación con los resultados presentados en las Figuras 3.6 y 3.7 se observa que el OME presenta un desempeño inaceptable, debido que presenta variaciones considerables de la velocidad estimada y no converge a la velocidad real. Por otro lado el OECI y el OVC presentan un desempeño aceptable pues ambos convergen a la velocidad real. Sin embargo, es necesario mencionar que el OVC presenta una convergencia más rápida que el OECI. Por lo tanto, para esta condición de operación el OVC resulta ser el mejor de los tres.

Condiciones de baja frecuencia con par de carga variante

En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestra la comparación del desempeño de los tres observadores para la condición de operación de baja frecuencia del voltaje de excitación y con par de carga variante. La variación impuesta para T_L consiste en una señal cuadrada de magnitud igual al par de carga nominal y frecuencia 1 [Hz].

En relación con los resultados presentados en las Figuras 3.8 y 3.9 se puede mencionar el bajo desempeño del OME, pues presenta grandes variaciones de la velocidad estimada y no converge a la velocidad real. Por otro lado, el OECI y el OVC presentan buen desempeño, pues ambos convergen a la velocidad real en un lapso de tiempo aceptable. Para definir el mejor se puede mostrar, con un mayor acercamiento en la gráfica, que el OVC tiene una convergencia más rápida y por lo tanto se puede considerar al OVC para esta condición de operación como la mejor opción.

3.6.5. Resultados de simulación para condiciones de frecuencia cero

Como se vió en el Capítulo 2 cuando el torque de carga es constante, se tienen condiciones de inobservabilidad para el MI. El propósito de presentar los siguientes resultados de simulación es mostrar que, bajo éstas condiciones de operación, ningún observador converge a la velocidad real e incluso el error de estimación es creciente. Es necesario mencionar que la magnitud y naturaleza del voltaje de estator y las condiciones iniciales del MI deben ser tales que provoquen la inobservabilidad del MI. Para el presente caso se eligió una magnitud del voltaje de excitación que provoca la indetectabilidad de las trayectorias a observar.

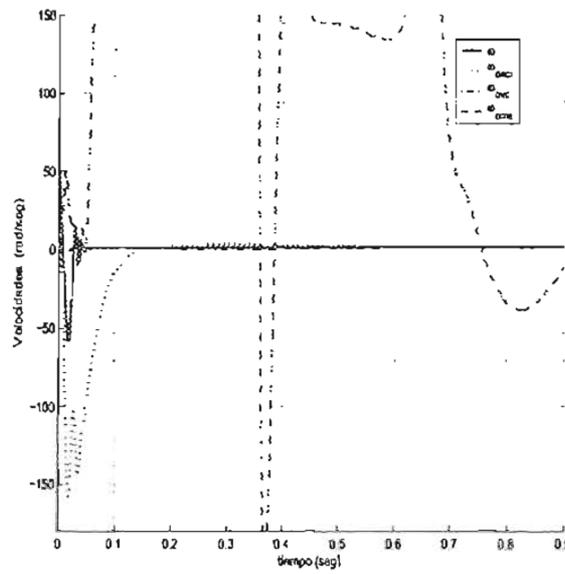


Figura 3.6: Condiciones de baja frecuencia, T_L constante.

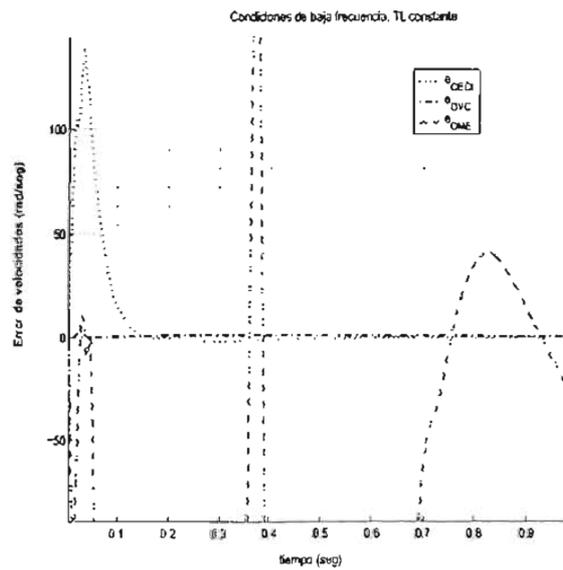


Figura 3.7: Error para condiciones de baja frecuencia con T_L constante.

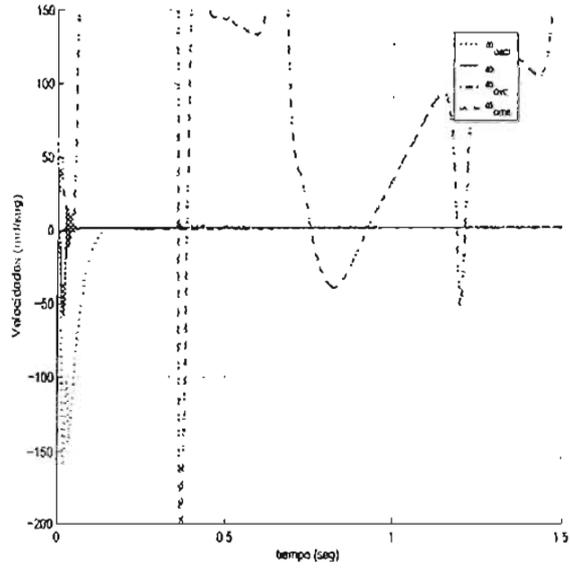


Figura 3.8: Condiciones de baja frecuencia, T_L variante.

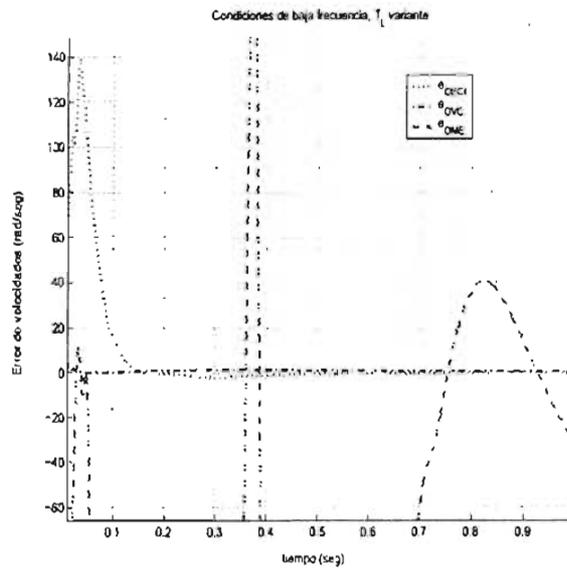


Figura 3.9: Error para condiciones de baja frecuencia con T_L variante.

Condiciones de inobservabilidad con par de carga constante

En la Figura 3.10 se muestra la comparación del desempeño de los tres observadores para la condición de operación de frecuencia cero y par de carga constante, que corresponde a una condición de indetectabilidad.

En relación con los resultados presentados en la Figura 3.10 es claro que el desempeño de los tres observadores es inaceptable, pues se observa que las trayectorias estimadas por los tres divergen de la trayectoria real de velocidad. El resultado anterior verifica la afirmación que se hace en el Capítulo de análisis de observabilidad en el sentido que, para las condiciones de operación de la prueba (de inobservabilidad) el MI es inobservable e indetectable y por lo tanto ningún observador basado en el modelo converge.

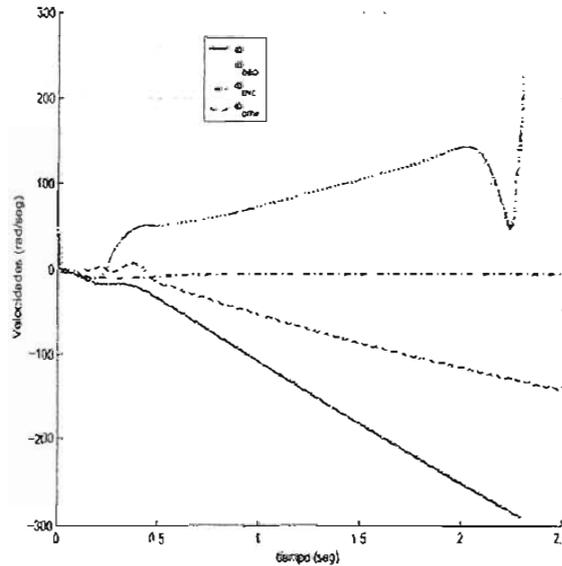


Figura 3.10: Condiciones de frecuencia cero con T_L constante (condición de indetectabilidad).

Condiciones de frecuencia cero con par de carga variante

En la Figura 3.11 se muestra la comparación del desempeño de los tres observadores para la condición de operación de frecuencia cero y con par de carga variante, el cual no corresponde a una condición de indetectabilidad, como se verá. La variación impuesta para T_L consiste en una señal cuadrada de magnitud igual al par de carga nominal y frecuencia 1 [Hz].

En relación con los resultados presentados en la Figura 3.11 se muestra un mejor desempeño de los tres observadores en comparación con el resultado anterior, debido a que, para este caso las trayectorias estimadas no divergen de la real, aunque la estimación es mala para OVC y OME. Para este caso se muestra que la trayectoria estimada por el OECI converge a la trayectoria real, por lo que el OECI es la mejor alternativa para esta condición de operación.

3.6.6. Resultados de simulación para una revisión de robustez

Con el fin de verificar la robustez de los observadores (de una forma simple), a continuación se presentan algunos resultados de simulación que muestran el desempeño de los mismos cuando se presentan cambios en los parámetros (R_e y T_L) del MI.

Las condiciones de esta prueba son las mismas que para las pruebas de condiciones nominales del MI, para par de carga constante y variante, con excepción de lo siguiente $R_{rp} = R_r(1,2)\Omega$ y $T_{Lp} = T_L(1,2)Nm$, donde R_r y T_L son valores nominales. Para esta prueba se propone un 20% de variación.

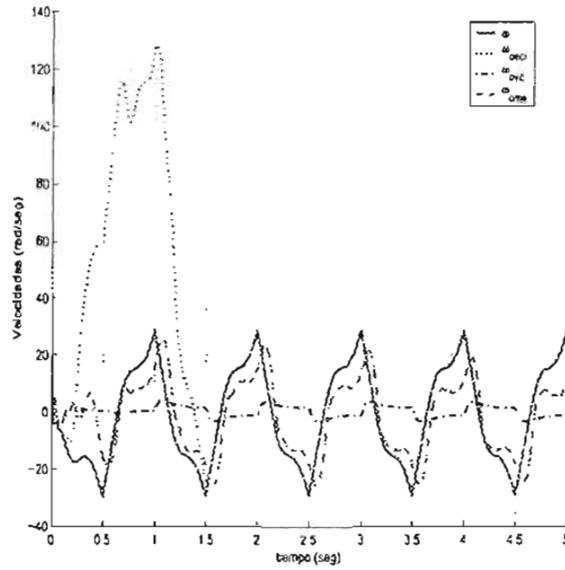


Figura 3.11: Condiciones de frecuencia cero con T_L variante.

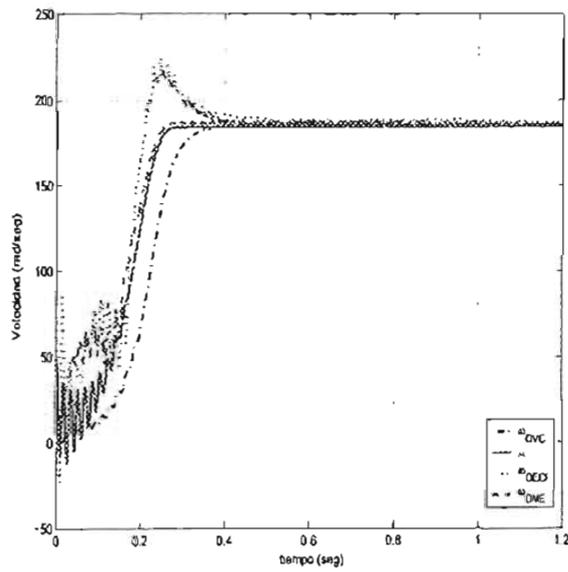


Figura 3.12: Revisión de robustez, condiciones nominales con T_L constante

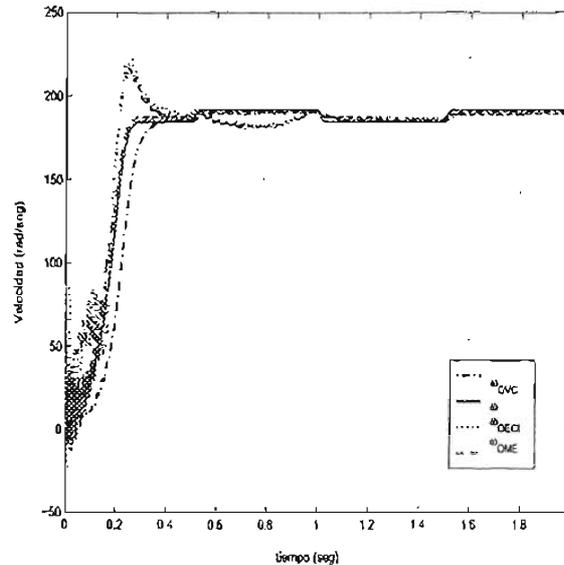


Figura 3.13: Revisión de robustez, condiciones nominales con T_L variante

En relación con las Figuras 3.12 y 3.13 se puede mencionar que el desempeño de los observadores es aceptable (para condiciones nominales de operación del MI) debido a que se muestra convergencia asintótica de las trayectorias estimadas a la real, a pesar de la variación de R_r y T_L . Hecho que corresponde con los resultados del análisis de robustez. Con base en los resultados anteriores, se puede afirmar que es factible la implantación de los observadores presentados y se espera obtener un buen desempeño en un sistema real.

3.6.7. Síntesis de la sección

En la sección recién terminada se mostró, por medio de resultados de simulación, el desempeño de los observadores diseñados en este Capítulo. Inicialmente se presentan los parámetros y condiciones iniciales tanto del MI como de los observadores. Las condiciones de prueba se definen en relación con algunas condiciones de operación del MI para las que se sabe que el desempeño de observadores se deteriora. Finalmente se muestra los resultados de simulación.

Con el fin de mostrar algunas características notables de los observadores, a continuación se muestra una tabla comparativa de las mismas, la cual se puede utilizar para justificar la aplicabilidad de alguno de los observadores.

| Obs. | O | Parámetros del Filtro de Kalman | t_c [seg] | ECn $\frac{rad}{seg}$ | $ECbf$ $\frac{rad}{seg}$ | $ECfc$ $\frac{rad}{seg}$ |
|------|-----|--|-------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| OME | 13 | $Q = 10000\mathbb{I}_{13 \times 13}, R = 20\mathbb{I}_{2 \times 2}, g = 1$ | 0,7 | 1,2 | ∞ | ∞ |
| OECl | 8 | $Q = \mathbb{I}_{8 \times 8}, R = \mathbb{I}_{2 \times 2}, g = 15$ | 0,5 | 0 | 0,3 | ∞ |
| OVC | 5 | $Q = 100\mathbb{I}_{5 \times 5}, R = \mathbb{I}_{2 \times 2}, g = 1$ | 0,3 | 0 | 0,3 | ∞ |

(3.45)

Donde O indica la dimensión del estado del sistema, t_c es el tiempo de convergencia para la primera prueba mostrada, ECn , $ECbf$ y $ECfc$ son los errores de convergencia en estado estacionario para condiciones nominales, condiciones de baja frecuencia del voltaje de excitación y condiciones de frecuencia cero, respectivamente. Cabe mencionar que los datos de la tabla anterior se tomaron de los resultados de simulación de par de carga constante.

Con respecto a los resultados de simulación se puede mencionar que: para las condiciones de operación nominal y par de carga constante los tres observadores presentan un desempeño aceptable y el mejor es el OVC. Para las condiciones de operación nominal y par de carga variante el OECl presenta el mejor desempeño seguido por el OVC y para este caso se observa que el OME presenta un desempeño inaceptable. En el caso de condiciones de inobservabilidad se muestra que ninguno de los tres observadores muestra convergencia, verificando el resultado del análisis de observabilidad que anticipa dicho comportamiento.

Es digno de mencionar que la mayoría de observadores diseñados utilizando el filtro de Kalman consideran a la velocidad de rotor constante, tal como se hace para el diseño del OVC. Por lo que se puede esperar que tengan un comportamiento parecido al OVC, esto es, que si la velocidad cambia con respecto al tiempo su desempeño se deteriora, por lo que, el observador OECl presenta un mejor desempeño en condiciones de operación con par de carga variante y puede resultar una alternativa aceptable.

3.7. Síntesis

En este capítulo se diseñaron tres observadores utilizando el filtro de Kalman como método de estimación. Cada uno de los diseños presentados tiene características propias, debido a la idea que se explota para su construcción. Para todos los observadores se presentó un análisis de convergencia que justifica su desempeño en las condiciones en que el MI es observable. Se justifica el bajo desempeño de los observadores en las condición de inobservabilidad utilizando la dinámica indistinguible, relacionando de este modo el resultado principal de este trabajo. La revisión del desempeño de los observadores se realiza por medio de simulaciones en diferentes condiciones de operación. Se muestran resultados de simulación que justifican la robustez de los observadores a la variación de la resistencia de rotor y el par de carga.

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajo Futuro

4.1. Conclusiones

En éste trabajo, se presentó una metodología general, aplicada al motor de inducción, que permite realizar el análisis de observabilidad de sistemas no lineales. Dicha metodología se basa fundamentalmente en el concepto de trayectorias indistinguibles (Hermann and Krener, 1977) y consiste en determinar un modelo dinámico que presenta las trayectorias indistinguibles, llamado la dinámica indistinguible del motor de inducción. La dinámica indistinguible permite establecer, de manera global, las propiedades de observabilidad del motor de inducción en operación sin sensores mecánicos. Utilizando la dinámica indistinguible se verifica la existencia de trayectorias indistinguibles y en consecuencia se muestra que el motor de inducción en operación sin sensores mecánicos es inobservable tanto global como localmente. En relación con las propiedades de observabilidad se establece, además, que no es posible construir un observador para el motor de inducción que funcione adecuadamente para todas las condiciones de operación, es decir, que habrá funciones de voltaje de estator y condiciones iniciales tales que el motor de inducción, en operación sin sensores mecánicos, genere trayectorias indistinguibles e indetectables para las cuales ningún observador converge.

El resultado de las propiedades de observabilidad del motor de inducción, en operación sin sensores mecánicos, es de gran importancia debido a que es de naturaleza global y permite imponer restricciones de operación al diseño de observadores. Por lo que, se puede considerar a la dinámica indistinguible como una buena herramienta para imponer restricciones y verificar el desempeño de observadores actualmente en operación.

A pesar de que no se presenta una solución cerrada de la dinámica indistinguible, debido a que se trata de un sistema de ecuaciones álgebra-diferenciales altamente no lineal, se presentan varios casos de estudio entre los que se pueden destacar, por ejemplo, el caso de operación en estado estacionario con par de carga constante y voltaje de excitación sinusoidal, donde resulta claro (en razón de la dinámica indistinguible) que no existen trayectorias indistinguibles y por lo tanto el motor de inducción es observable, lo que implica que se puede construir un observador que converja (para estas condiciones). Por lo tanto, con el resultado anterior, se puede justificar el buen desempeño de sistemas de control basado en observador cuando el motor de inducción trabaja en estado estacionario. Otro ejemplo de análisis de operación del motor de inducción, utilizando la dinámica indistinguible, es aquel donde se considera par de carga constante y velocidad de rotor cero. Se muestra que el voltaje de excitación necesario para mantener la velocidad en cero es un voltaje constante, hecho que provoca la existencia de trayectorias indistinguibles y en consecuencia que no exista un observador que funcione adecuadamente para estas condiciones de operación del MI.

Con respecto al propósito de diseño de un observador, se justifica el mismo para trayectorias detectables del MI. Se diseñaron tres observadores utilizando el filtro de Kalman como método de estimación. Para los tres casos se presenta un análisis de convergencia y resultados de simulación que ilustran su desempeño. Se muestra que los resultados de simulación coinciden con los resultados del análisis de observabilidad (realizado en la primera parte de este trabajo). Para el primer observador (OVC) presentado se asumió a la velocidad de rotor constante, en consecuencia se obtiene un modelo del motor de inducción afin en las variables a observar, hecho que invita a la utilización del filtro de Kalman como método de estimación. Para este caso se puede observar un buen desempeño cuando la velocidad se mantiene constante, un desempeño aceptable cuando la velocidad varía lentamente y un mal desempeño

cuando la velocidad cambia rápidamente. Para las condiciones de inobservabilidad (voltaje de excitación y par de carga constantes) se puede observar que la trayectoria de la variable observada diverge de la variable real, hecho que fue anticipado del resultado del análisis de observabilidad.

En relación con el observador basado en un estimador de condiciones iniciales (OECI) se muestra un mejor desempeño para las mismas condiciones de operación que el anterior. En el caso de la condición de inobservabilidad se muestra, también, la divergencia de trayectorias. Un resultado importante a destacar en relación con este observador es que fue posible establecer una relación directa entre las propiedades de convergencia del estimador de condiciones iniciales y la dinámica indistinguible, donde resulta que esta **relación es la condición de excitación persistente (EP) para sistemas lineales**, es decir, si el regresor utilizado para la estimación de las condiciones iniciales es EP, entonces el observador converge, lo anterior se podría interpretar físicamente en relación con la naturaleza del voltaje de excitación, es decir, si el voltaje es constante entonces el regresor no es EP y el observador no converge. Cabe mencionar que para la construcción del OECI se utilizó el filtro de Kalman como método de estimación de las condiciones iniciales.

El tercer observador (OME) se muestra según los resultados de simulación como la peor opción de los tres presentados. Aunque cabe mencionar que éste tercer observador presenta menos restricciones que el primero, debido a que no se considera ω constante ni T_L medible y se pueden incluir otros parámetros para la estimación. Una desventaja que presenta este diseño (en relación con los otros dos) es el orden del sistema aumentado (el orden de P es de 13×13). En condiciones de inobservabilidad el observador muestra divergencia de las trayectorias estimada y verdadera, hecho que coincide con los resultados de las propiedades de observabilidad y con los otros diseños.

Para los tres observadores se presentó un análisis de robustez, basado en la teoría de perturbaciones singulares. Dicho análisis muestra que si la variación de los parámetros es acotada y la condición inicial del observador es acotada, entonces los observadores convergerán al menos a una vecindad de la trayectoria real.

4.2. Trabajo futuro

Considerando los resultados obtenidos y los objetivos planteados al inicio de este trabajo de tesis, se consideran los objetivos cubiertos y resuelto el problema principal, no obstante surgen varias tareas que complementan este trabajo, a saber:

Un trabajo cuya solución aportaría en gran medida al problema de control del motor de inducción sin sensores mecánicos sería obtener todas las funciones de voltaje que provocan indistinguibilidad en las trayectorias del motor. Una de las alternativas de solución podría ser relacionar la ecuación de corriente de la DI con la ecuación de la derivada de corriente del MI y tratar de obtener la función de voltaje, la obtención de esta función de voltaje permitiría evitar excitar al motor con dicha función con el fin de evitar que genere trayectorias indistinguibles e indetectables.

Otro trabajo futuro que podría mejorar el diseño del observador basado en estimador de condiciones iniciales sería utilizar algún otro método para estimar las condiciones iniciales. Dicho método deberá presentar varias características deseables, a saber, tendría que ser más eficiente (en relación con la dificultad de cálculo) que el filtro de Kalman, más rápido de tal manera que el tiempo de muestreo sea pequeño (y se pueda implantar fácilmente) y ser estable desde el punto de vista del cálculo numérico. El hecho de encontrar tal método significaría reducir la dimensión del estimador y poder implantarlo con mayor facilidad en una aplicación real.

Finalmente, como un complemento adicional de este trabajo se podrían realizar pruebas experimentales para verificar los resultados del análisis de observabilidad y el desempeño de los observadores presentados.

Apéndice A

Filtro de Kalman-Bucy

A.1. Filtro de Kalman

Rudolph Emil Kalman nació el 19 de mayo de 1930, en Budapest (Hungria), hijo de Ursula y Otto Kalman. La familia emigró a los Estados Unidos en el año de 1943. Kalman obtuvo su grado de bachiller y maestría en ingeniería eléctrica en el MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts) en 1953 y 1954 respectivamente. En 1954 Kalman estudia la condición de controlabilidad de los sistemas lineales tratando de relacionar una condición algebraica con la teoría de sistemas ¹. A fines de noviembre de 1958 se le ocurrió la idea de aplicar la noción de variables de estado al problema de filtrado de Wiener, idea que desarrollaría posteriormente y con lo cual nace el filtro de Kalman, cuyo desarrollo matemático probó ser mucho más simple que el filtro de Wiener.

Teóricamente el filtro de Kalman (FK) es un estimador para el llamado *problema lineal cuadrático*, el cual es el problema de estimar el estado instantáneo de un sistema dinámico lineal perturbado por ruido blanco utilizando mediciones linealmente relacionadas con el estado pero contaminadas con ruido blanco. El estimador resultante es estadísticamente óptimo con respecto a cualquier función cuadrática de estimación de error (Grewal and Andrews, 2002).

Las aplicaciones del FK cubren muchos campos, pero su uso es casi exclusivo para dos propósitos: *estimación y análisis de desempeño* de estimadores

Estimador de estados de sistemas dinámicos

El FK nos permite estimar el estado de sistemas dinámicos con ciertos tipos de comportamiento aleatorio utilizando información estadística.

Análisis de sistemas de estimación

El FK usa una descripción completa de la distribución de probabilidad de sus errores de estimación para determinar las ganancias óptimas del filtro y ésta distribución de probabilidad se puede utilizar para valorar su desempeño como una función de los parámetros de diseño de un sistema de estimación.

Una de las primeras aplicaciones del FK fue la estimación de trayectorias y problemas de control en el proyecto Apolo en el año de 1960. Aunque este método de estimación se aplicó en un principio a sistemas lineales, pronto se desarrolló la versión de filtro extendido de Kalman para sistemas no lineales. El FK se puede considerar el más grande logro en la teoría de estimación del siglo XX. El principal uso del FK se ha dado en la navegación y seguimiento de vehículos y en el diseño de sistemas de estimación predictiva.

A.2. Ventajas del FK

- El FK es implementable en la forma de un algoritmo para una computadora digital. esta implementación puede

¹Ésta condición se determinó como el rango de una matriz

ser lenta, pero es capaz de lograr mayor exactitud que la que se obtiene por filtros analógicos.

- El FK no requiere que la dinámica determinística o el proceso aleatorio tengan propiedades estacionarias y muchas aplicaciones de importancia incluyen procesos estocásticos no estacionarios.
- El FK es compatible con la formulación del espacio de estados de controladores óptimos para sistemas dinámicos y Kalman fue capaz de probar propiedades duales de estimación y control para estos sistemas.
- El FK proporciona la información necesaria para explorar matemáticamente métodos de decisión basados en la estadística para detectar y rechazar mediciones anómalas.

A.3. Filtro de Kalman-Bucy

El FK se utiliza, en general, para la estimación en sistemas discretos en el tiempo. El modelo utilizado para el diseño de los observadores propuestos, en este trabajo, es un modelo en términos de tiempo continuo. Por tanto, el presente resumen muestra los resultados obtenidos por R. E. Kalman y R. S. Bucy (Kalman and Bucy, 1961) en la aplicación de esta metodología para sistemas de tiempo continuo.

Se consideran las siguientes restricciones

A₁. El tipo de sistemas para los cuales se aplica el filtro de Kalman-Bucy (KB) está definido por el siguiente modelo

$$dx/dt = F(t)x + G(t)u(t) \quad (\text{A.1})$$

$$z(t) = y(t) + v(t) \quad (\text{A.2})$$

Donde $x(t)$ es el vector de estado, $y(t)$ es la salida y $z(t)$ es la señal de salida observada, con $u(t)$ y $v(t)$ procesos aleatorios independientes con media cero y matrices de covarianza

$$\begin{aligned} \text{cov}[u(t), u(\tau)] &= Q(t) \cdot \delta(t - \tau) \\ \text{cov}[v(t), v(\tau)] &= R(t) \cdot \delta(t - \tau) \text{ para todo } t, \tau \\ \text{cov}[u(t), v(\tau)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Donde δ es la función delta de Dirac, $Q(t)$ y $R(t)$ son matrices continuamente diferenciables en t y no-negativas definidas.

A₂. El vector de señal de salida no se mide de manera exacta, lo que implica que la matriz $R(t)$ es positiva definida para todo t .

A₃. La medición de $z(t)$ se inicia en algún instante fijo de tiempo t_0 , en el cual la covarianza del estado inicial $\text{cov}[x(t_0), x(t_0)]$ es conocida.

A.3.1. Problema de estimación óptima

Con las restricciones anteriores, el problema que resuelve el filtro de Kalman-Bucy se puede formular de la siguiente manera

Dados valores conocidos de $z(\tau)$ en el intervalo de tiempo $t_0 \leq \tau \leq t$, encuentre un estimado de $\hat{x}(t_1 | t)$ de $x(t_1)$ de la forma

$$\hat{x}(t_1 | t) = \int_{t_0}^t A(t_1, \tau) z(\tau) d\tau \quad (A.4)$$

donde A es una matriz de $n \times p$ cuyos elementos son continuamente diferenciables en ambos argumentos y (A.4) tiene la propiedad que el error cuadrático esperado al estimar cualquier función lineal es minimizado

$$\mathcal{E}[x^*, x(t_1) - \hat{x}(t_1 | t)]^2 = \min \quad \forall x^* \quad (A.5)$$

con x^* el co-vector² de x

A.3.2. Solución al problema de estimación óptima

A continuación se presenta la solución propuesta en (Kalman and Bucy, 1961) para el problema de estimación óptima³

Forma canónica del filtro óptimo

El estimado $\hat{x}(t_1 | t)$ es generado por el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t | t)/dt &= F(t)\hat{x}(t | t) + K(t)\tilde{z}(t | t) \\ \tilde{z}(t | t) &= z(t) - H(t)\hat{x}(t | t) \end{aligned} \quad (A.6)$$

El estado inicial $\hat{x}(t_0 | t_0)$ de (A.6) es cero. Con (A.6) el problema del filtro óptimo se reduce al cálculo de ganancia óptima $K(t)$. Este resultado es general y no depende de que el modelo sea constante.

Forma canónica del sistema dinámico de error óptimo

Considere

$$\tilde{x}(t | t) = x(t) - \hat{x}(t | t)$$

por lo que la ecuación dinámica de error se puede expresar como

$$d\tilde{x}(t | t)/dt = F(t)\tilde{x}(t | t) + G(t)u(t) + K(t)[v(t) + H(t)\tilde{x}(t | t)] \quad (A.7)$$

Ganancia óptima

Introduciendo la siguiente abreviación:

$$P(t) = \text{cov}[\tilde{x}(t | t), \tilde{x}(t | t)]$$

Se puede mostrar que la matriz de ganancia óptima queda

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t) \quad (A.8)$$

Ecuación de varianza

Se puede mostrar que $P(t)$ debe ser solución de la ecuación diferencial matricial tipo Riccati

$$dP/dt = F(t)P + PF^T(t) - PH^T(t)R^{-1}(t)H(t)P + G(t)Q(t)G^T(t) \quad (A.9)$$

Esta es la ecuación de varianza; es un sistema de $\frac{n(n+1)}{2}$ (Este es el número de elementos diferentes en la matriz simétrica $P(t)$) ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y es del tipo de Riccati.

²Un elemento del espacio vectorial dual

³Para una revisión de la prueba consulte (Kalman and Bucy, 1961)

Existencia de soluciones de la ecuación de varianza

La existencia de soluciones para la ecuación de varianza se justifica utilizando el siguiente teorema

Teorema A.1 *Bajo las consideraciones (A₁), (A₂), (A₃) la solución del problema de estimación óptima con $t_0 > -\infty$ se da por las relaciones (A.6-A.9). La solución de (A.9) se determina de manera única para todo $t \geq t_0$ por la especificación del conocimiento de*

$$P_0 = \text{cov} [x(t_0), x(t_0)]; \quad (\text{A.10})$$

el conocimiento de $P(t)$ implica la determinación de $K(t)$. El estado inicial del filtro óptimo es cero.

Existencia de soluciones de la ecuación de varianza en estado estacionario

El siguiente teorema muestra dos condiciones suficientes que permiten concluir la existencia de soluciones para la ecuación de varianza

Teorema A.2 *Denotando las soluciones para (A.9) como*

$$P(t) = \Pi(t; P_0, t_0)$$

Entonces el límite

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Pi(t; 0, t_0) = \bar{P}(t) \quad (\text{A.11})$$

existe para todo t y es una solución de (A.9) si se cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones

(A4) el modelo (A.1) es uniforme y asintóticamente estable; o

(A5) el modelo (A.1) es "completamente observable", esto es, para todo t existe algún $t_0 < t$ tal que la matriz

$$M(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (\text{A.12})$$

es positiva definida.

Estabilidad del filtro óptimo

Se debe notar que la optimalidad del filtro no garantiza la estabilidad del mismo. Con el fin de verificar la condición de estabilidad considere las siguientes definiciones

Definición A.1 *Se dice que (A.1) es uniforme y completamente observable (UCO) si existen constantes positivas α_1, α_2 y σ tales que*

$$\alpha_1 \leq M(t, t + \sigma) \leq \alpha_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Se puede ahora establecer el teorema central del filtro KB

Teorema A.3 *Asuma que el modelo de sistema es*

(A₅) uniforme y completamente observable;

(A₆) uniforme y completamente controlable;

(A₇) $\alpha_3 \leq \|Q(t)\| \leq \alpha_4, \alpha_5 \leq \|R(t)\| \leq \alpha_6$ para todo t ;

(A₈) $\|F(t)\| \leq \alpha_7$.

Entonces se cumple lo siguiente

(i) El filtro óptimo es uniforme y asintóticamente estable;

(ii) Toda solución $\bar{P}(t)$ de la ecuación de varianza (A.9) iniciando en una matriz simétrica no-negativa P_0 converge a $\bar{P}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Comentario A.1 *La propiedad (ii) del teorema anterior es de gran importancia, debido a que éste muestra que la ecuación de varianza es un método computacionalmente estable, que se puede esperar, prácticamente, insensible a errores de redondeo.*

Comentario A.2 *Kalman y Bucy muestran que es posible obtener los resultados obtenidos por Wiener con los resultados anteriores.*

Síntesis

En el apéndice recién finalizado se presentó un resumen de los resultados obtenidos por Kalman y Bucy ⁴ para la solución del estimador óptimo, se presentan las condiciones que debe cumplir el sistema a estimar para que el estimador converja a los estados verdaderos, así mismo se presentan los principales teoremas de artículo. Por tanto, éste puede ser utilizado como referencia en relación con la utilización que se hace del filtro en el diseño de los observadores propuestos en éste trabajo.

⁴Al lector interesado en las pruebas de los resultados se le remite al artículo (Kalman and Bucy, 1961)

Apéndice B

Dinámica Indistinguible II

En el presente apéndice se obtiene otro modelo de la DI. Este desarrollo de la DI se realiza con el fin de mostrar la relación entre las propiedades de convergencia de observador (OECI) con la DI. Es necesario mencionar que el presente resultado representa el mismo comportamiento del MI para las condiciones de indistinguibilidad que la DI presentada en el capítulo de análisis de las propiedades de observabilidad.

B.1. Dinámica Indistinguible con cambio de coordenadas

Para el desarrollo de la DI se aplica la misma metodología a la utilizada en el capítulo de análisis de las propiedades de observabilidad.

Considere los siguientes modelos

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= z_{01} + g_{11}(t) \\
 \omega_1(t) &= e^{-ft} \omega_{01} - g_{21}(t) z_{01} - g_{31}(t) \\
 \gamma_1(t) &= \gamma_{21}(t) \omega_{01} + \gamma_{31}(t) z_{01} + \gamma_{41}(t) \omega_{01} \mathbb{J} z_{01} + \gamma_{51}(t) Z_{01}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 z_2(t) &= z_{02} + g_{12}(t) \\
 \omega_2(t) &= e^{-ft} \omega_{02} - g_{22}(t) z_{02} - g_{32}(t) \\
 \gamma_1'(t) &= \gamma_{22}(t) \omega_{02} + \gamma_{32}(t) z_{02} + \gamma_{42}(t) \omega_{02} \mathbb{J} z_{02} + \gamma_{52}(t) Z_{02}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde las funciones γ_{ij} y g_{ij} son funciones definidas como: (con i correspondiendo a la función y j denota el modelo de motor (1 ó 2))

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) &\triangleq \frac{di_1}{dt} - [a\mathbb{I} - n_p g_{31} \mathbb{J}] (g_{11} - i) + \beta (Ma + b) i_1 - \beta c u_1 \\
 \gamma_1'(t) &\triangleq \frac{di_2}{dt} - [a\mathbb{I} - n_p g_{32} \mathbb{J}] (g_{12} - i_2) + \beta (Ma + b) i_2 - \beta c u_2 \\
 \gamma_2(t) &\triangleq n_p e^{-ft} \mathbb{J} (g_1 - i) \\
 \gamma_3(t) &\triangleq [a\mathbb{I} - n_p g_{33} \mathbb{J} - n_p \mathbb{J} (g_1 - i) g_2] \\
 \gamma_4(t) &\triangleq n_p e^{-ft} \\
 \gamma_5(t) &\triangleq n_p G_2
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 g_1(t) &\triangleq \beta \int_0^t (-bi + cu) d\tau \\
 g_2(t) &\triangleq \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} i^T \mathbb{J} d\tau z_0 \\
 g_3(t) &\triangleq \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{-f(t-\tau)} \left[i^T \mathbb{J} g_1(\tau) + \frac{\beta T_L}{\alpha J} \right] d\tau
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Definiendo las variables de error

$$\begin{aligned}
 \Delta &\triangleq z_1(t) - z_2(t) \\
 \epsilon &\triangleq \omega_1(t) - \omega_2(t) \\
 e &\triangleq i_1(t) - i_2(t)
 \end{aligned}$$

realizando los cálculos para Δ se obtiene

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (z_{01} - z_{02}) + (g_{11}(t) - g_{12}(t)) \\
 \Delta &= \Delta_0 + (g_{11}(t) - g_{12}(t))
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

de la misma manera para ϵ

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= e^{-ft} (\omega_{01} - \omega_{02}) - [g_{21} z_{01} - g_{22} z_{02}] - [g_{31} - g_{32}] \\
 \epsilon &= e^{-ft} \epsilon_0 - [g_{21} z_{01} - g_{22} z_{02}] - [g_{31} - g_{32}]
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Ahora, considerando el lado derecho de las últimas ecuaciones de los sistemas originales ((B.1) y (B.2))

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) - \gamma_1'(t) &= [\gamma_{21}(t)\omega_{01} - \gamma_{22}(t)\omega_{02}] + [\gamma_{31}(t)z_{01} - \gamma_{32}(t)z_{02}] + [\gamma_{41}(t)\omega_{01}\mathbb{J}z_{01} - \gamma_{42}(t)\omega_{02}\mathbb{J}z_{02}] - \\
 &- [\gamma_{51}(t)Z_{01} - \gamma_{52}(t)Z_{02}]
 \end{aligned}$$

con $\omega_{02} = \omega_{01} - \epsilon_0$ y $z_{02} = z_{01} - \Delta$. De la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) - \gamma_1'(t) &= [\gamma_{21}(t)\omega_{01} - \gamma_{22}(t)\omega_{02}] + [\gamma_{31}(t)z_{01} - \gamma_{32}(t)z_{02}] + \gamma_{41}(t)\omega_{01}\mathbb{J}z_{01} - \\
 &- \gamma_{42}(t)[\omega_{01}\mathbb{J}z_{01} - \epsilon_0\mathbb{J}z_{01} - \omega_{01}\mathbb{J}\Delta + \epsilon_0\mathbb{J}\Delta] - [\gamma_{51}(t)Z_{01} - \gamma_{52}(t)Z_{02}]
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Por otro lado realizando operaciones utilizando la definición de $\gamma_1(t)$ y $\gamma_1'(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) - \gamma_1'(t) &= \left[\frac{di_1(t)}{dt} - \frac{di_2(t)}{dt} \right] - [a\mathbb{I} + n_p g_{31}(t)\mathbb{J}]g_{11}(t) + [a\mathbb{I} + n_p g_{32}(t)\mathbb{J}]g_{12}(t) + [a\mathbb{I} + n_p g_{31}(t)\mathbb{J}]i_1(t) - \\
 &- [a\mathbb{I} + n_p g_{32}(t)\mathbb{J}]i_2(t) + \beta(Ma + b)(i_1(t) - i_2(t)) + \beta c(-u_1(t) + u_2(t))
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

asumiendo condiciones para indistinguibilidad, es decir

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= i_2(t) \\
 T_{L,1} &= T_{L,2} \\
 u_1(t) &= u_2(t) \\
 g_{i1}(t) &= g_{i2}(t)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

aplicando las condiciones anteriores a las ecuaciones, donde $g_{i1}(t)$ son funciones de variables medibles, $i(t)$ es el vector de corrientes de estator (salida medible), T_L es el par de carga y $u(t)$ es el vector de voltajes de estator (entrada medible). Con estas condiciones las ecuaciones (B.4 - B.7) quedan como

$$\begin{aligned}
\Delta &= z_{01} - z_{02} \\
c &= e^{-f t} \epsilon_0 - g_2(t) \Delta \\
0 &= \gamma_2(t) \epsilon_0 + \gamma_3(t) \Delta + \gamma_4(t) [\epsilon_0 \mathbb{J} z_0 + \omega_0 \mathbb{J} \Delta - \epsilon_0 \mathbb{J} \Delta] + \gamma_5(t) K
\end{aligned}$$

donde $K = Z_{01} - Z_{02}$

Con lo que la Dinámica Indistinguible en estas coordenadas se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
z(t) &= z_0 + g_1(t) \\
\omega(t) &= e^{-f t} \omega_0 - g_2(t) z_0 - g_3(t) \\
\gamma_1(t) &= \gamma_2(t) \omega_0 + \gamma_3(t) z_0 + \gamma_4(t) \omega_0 \mathbb{J} z_0 + \gamma_5(t) Z_0 \\
\dot{\epsilon} &= -f e^{-f t} \epsilon_0 + [f g_2(t) - \frac{\alpha}{\beta} i^T \mathbb{J}] \Delta \\
\dot{\Delta} &= 0 \\
0 &= \gamma_2(t) \epsilon_0 + \gamma_3(t) \Delta + \gamma_4(t) [\epsilon_0 \mathbb{J} z_0 + \omega_0 \mathbb{J} \Delta - \epsilon_0 \mathbb{J} \Delta] + \gamma_5(t) K
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Reordenando y escribiendo en forma de productos matriciales a (B.9) se tiene

$$\begin{aligned}
z(t) &= z_0 + g_1(t) \\
\omega(t) &= e^{-f t} \omega_0 - g_2(t) z_0 - g_3(t) \\
\dot{\epsilon} &= -f e^{-f t} \epsilon_0 + [f g_2(t) - \frac{\alpha}{\beta} i^T \mathbb{J}] \Delta \\
\dot{\Delta} &= 0 \\
\gamma_1(t) &= [\gamma_2(t) \quad \gamma_3(t) \quad \gamma_4(t) \mathbb{J} \quad \gamma_5(t)] \begin{bmatrix} \omega_0 \\ z_0 \\ \omega_0 \mathbb{J} z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \\
0 &= [\gamma_2(t) \quad \gamma_3(t) \quad \gamma_4(t) \mathbb{J} \quad \gamma_5(t)] \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \Delta \\ \epsilon_0 \mathbb{J} z_0 + \omega_0 \mathbb{J} \Delta - \epsilon_0 \mathbb{J} \Delta \\ K \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Algunas observaciones sobre la DI

- Cuando $\epsilon_0 = 0$ y $\Delta = 0$ la última ecuación del sistema anterior siempre se cumple, esto es el vector de la derecha, formado por las condiciones iniciales de los términos de error será constante e igual a cero, esto implica indistinguibilidad para una misma trayectoria del MI, es decir, el MI no sería indistinguible de acuerdo con la definición de indistinguibilidad.¹
- Otra condición que haría cumplir la última ecuación de (B.10) sería que la matriz $\Gamma_1(t)$ sea cero para algún $t \geq 0$, con $\Gamma_1(t) = [\gamma_2(t) \quad \gamma_3(t) \quad \gamma_4(t) \mathbb{J} \quad \gamma_5(t)]$. Se puede mostrar que $\gamma_3(t)$ nunca será cero, por lo que $\Gamma_1(t)$ nunca es cero y la condición no se cumple.
- La última ecuación se puede interpretar como la combinación lineal de las columnas de la matriz $\Gamma_1(t)$, donde los escalares que multiplican a dichas columnas son los componentes del vector de condiciones iniciales de los términos de error (constante).

¹Se presenta en el segundo capítulo de éste trabajo.

Apéndice C

Dinámica indistinguible para sistemas lineales (DISL)

Con el propósito de completar el trabajo de análisis de observabilidad de los sistemas dinámicos, y en relación con el procedimiento aplicado al motor de inducción para determinar la DI. En esta sección se presenta el desarrollo de la dinámica indistinguible para un sistema lineal variante en el tiempo. Como se verá más adelante el desarrollo de la dinámica indistinguible para sistemas lineales (DISL) queda plenamente justificado y acorde con los resultados conocidos sobre observabilidad de los sistemas lineales.

C.1. Desarrollo de la dinámica indistinguible para sistemas lineales

Considere nuevamente la idea básica para el desarrollo de la DI del MI, es decir, que existen funciones de entrada y condiciones iniciales diferentes, tales que aplicándolas al sistema lineal producen una misma salida. Usando la idea anterior considere dos modelos lineales idénticos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A(t)x_1(t) + B(t)u_1(t) \\ y_1(t) &= C(t)x_1(t) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A(t)x_2(t) + B(t)u_2(t) \\ y_2(t) &= C(t)x_2(t) \end{aligned} \quad (C.2)$$

donde $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ son matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times p$ y $q \times n$, respectivamente cuyas entradas son funciones continuas valuadas reales del tiempo t definidas sobre $(-\infty, \infty)$, $x_i(t)$. Con lo estados de dimensión $n \times 1$, u_i es el vector de entradas e $y(t)$ el vector de salidas, todos de dimensiones adecuadas.

Considerando las condiciones para indistinguibilidad, es decir

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_2(t) \\ y_1(t) &= y_2(t) \\ x_1(t_0) &\neq x_2(t_0) \end{aligned}$$

se puede determinar el modelo de error, definiendo al error como $e(t) \triangleq x_1(t) - x_2(t)$ con lo que se puede obtener

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) \\ &= A(t)x_1(t) + B(t)u_1(t) - A(t)x_2(t) - B(t)u_2(t) \\ &= A(t)[x_1(t) - x_2(t)] \\ &= A(t)e(t) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Ahora, de acuerdo a la condición de indistinguibilidad $y_1(t) = y_2(t)$, se puede obtener

$$\begin{aligned}
y_1(t) - y_2(t) &= 0 \\
C(t)x_1(t) - C(t)x_2(t) &= 0 \\
C(t)[x_1(t) - x_2(t)] &= 0 \\
C(t)e(t) &= 0
\end{aligned} \tag{C.4}$$

con las últimas ecuaciones de (C.3) y (C.4) se obtienen las ecuaciones álgebra-diferenciales que definen a la dinámica indistinguible para sistemas lineales, esto es

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= A(t)e(t) \\
C(t)e(t) &= 0
\end{aligned} \tag{C.5}$$

para $e(t) \neq 0$

Comentario C.1 *La dinámica indistinguible para sistemas lineales (DISL), de acuerdo a (C.5), es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con una restricción algebraica. Las soluciones de DISL (C.5) representan todas las trayectorias indistinguibles para un sistema lineal. La existencia de soluciones para DISL (C.5) implica la pérdida de observabilidad para el sistema lineal, ya que para una trayectoria de estado de la DISL existen dos trayectorias en el sistema lineal, lo que evitaría determinar de manera única al vector de estados.*

Comentario C.2 *Cabe hacer mención que, para el análisis anterior, la determinación de la DISL se define al error $e(t)$ considerando todo el estado $x(t)$, hecho que por supuesto no elimina la posibilidad de realizar el análisis para casos particulares donde el error $e(t)$ sea de menor dimensión al vector de estados $x(t)$.*

C.2. Relación de la DISL con los resultados sobre observabilidad para sistemas lineales

Con el propósito de justificar la validez de la DISL, se procede a relacionar la DISL con los resultados conocidos sobre observabilidad para sistemas lineales.

Para la ecuación diferencial de la DISL (C.5) se puede representar la solución en términos de la matriz de transición Φ (Chi-Tsong, 1984). Se sabe de que

$$e(t) = \Phi(t, t_0) e(t_0) \tag{C.6}$$

con $\Phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados, que “gobierna” el movimiento del vector de estado $e(t)$ en el intervalo de tiempo en el cual la entrada es idénticamente cero y el vector $e(t_0)$ se define como $e(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) \neq 0$, donde $x_i(t_0)$ son las condiciones iniciales de los estados.

Usando (C.6) la DISL se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= A(t)\Phi(t, t_0) e(t_0) \\
C(t)\Phi(t, t_0) e(t_0) &= 0
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Comentario C.3 *En relación con (C.7) se puede mencionar que la dificultad para obtener las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales radica en encontrar la matriz de transición. dificultad que en general se puede considerar grande. Sin embargo, para algunos casos de sistemas lineales e invariantes puede ser posible determinarla.*

Revisando ahora la segunda ecuación de (C.7), la restricción algebraica de DISL, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- La restricción se cumplirá si $e(t_0) = 0$, situación descartada al inicio del análisis
- La restricción se cumplirá si el núcleo de la matriz $C(t)\Phi(t, t_0)$ incluye al vector $e(t_0)$, es decir si las columnas de la matriz $C(t)\Phi(t, t_0)$ son linealmente dependientes y los escalares que definen la dependencia son elementos de $e(t_0)$

Ahora considere el siguiente teorema de (Chi-Tsong, 1984), página 194

Teorema C.1 *La ecuación dinámica (C.1) es observable en t_0 si y sólo si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que las n columnas de la matriz $C(t)\Phi(t, t_0)$ son linealmente independientes en el intervalo $[t_0, t_1]$*

Comentario C.4 *Considerando el último teorema y el segundo comentario de la lista anterior se puede mencionar que ambos coinciden, es decir, El teorema establece que si las columnas de la matriz $C(t)\Phi(t, t_0)$ son linealmente independientes, entonces el sistema (C.1) es observable y si es observable no existen trayectorias indistinguible. en caso contrario existen las trayectorias indistinguibles (soluciones de DISL (C.5)) y por tanto el sistema el sistema (C.1) es inobservable.*

Comentario C.5 *Considerando los argumentos anteriores se puede afirmar que la restricción algebraica de (C.5) define la observabilidad del sistema*

C.3. Determinación de la Grammiana de observabilidad de la DISL

Como un argumento adicional para la validación de la DISL, a continuación se presenta la obtención de la matriz Grammiana de observabilidad para sistemas lineales.

Premultiplicando la restricción algebraica $C(t)\Phi(t, t_0)e(t_0) = 0$ por $\Phi(t, t_0)^*C(t)^*$, se obtiene de (C.7)

$$\Phi(t, t_0)^*C(t)^*C(t)\Phi(t, t_0)e(t_0) = 0$$

con (*) indicando la conjugada traspuesta. Ahora, integrando la ecuación anterior en el intervalo $[t_0, t_1]$ se obtiene

$$\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, t_0)^*C(t)^*C(t)\Phi(t, t_0) dt \right] e(t_0) = 0 \quad (C.8)$$

donde la matriz Grammiana queda

$$V(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, t_0)^*C(t)^*C(t)\Phi(t, t_0) dt$$

Comentario C.6 *Del resultado anterior es claro, entonces, que la restricción algebraica de la DISL (C.5) es la misma que la condición de observabilidad ya conocida para sistemas lineales. Nuevamente se verifica que la condición para la existencia de la DISL es que $V(t_0, t_1)$, sea singular y ésto implica pérdida de observabilidad para el sistema (C.1)*

Bibliografía

- Abbondanti, A. and M.B. Brennen (1975). Variable speed induction motor drives use electronic slip calculator based on motor voltages and currents. *IEEE Transactions on Industry Applications* **A-1**(5), 483–488.
- Asher, G.M. (2002). Sensorless induction motor drives. In: *The Institution of Electrical Engineers*. Savoy Place, London. pp. 1–5.
- Besancon, Gildas. and Ticlea Alexandru. (2003). Simultaneous state and parameter estimation in asynchronous motors under sensorless speed control. In: *Proceedings of European Control Conference*. Cambridge, England. pp. 440 – 445.
- Bodson, Mark and J. Chiasson (2002). A comparison of sensorless speed estimation methods for induction motor control. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Anchorage, USA. pp. 123–232.
- Campbell, J. and M. Sumner (2002). Practical sensorless induction motor drive employing an artificial neural network for online parameter adaptation. *IEEE Proceedings Electric Power Applications* **146**(4), 255 – 260.
- Canudas De Wit. C., A. Youssef, J.P. Barbó, P. Martin and F. F. Malrait (2006). Observability conditions of induction motor at low frequency. In: *Proceedings of IEEE conference on decision and control*. Sidney, Australia. pp. 2044–2049.
- Cao-Minh, Ta, T. Uchida and Y. Hori (2001). Mras-based speed sensorless control for induction motor drives using instantaneous reactive power. In: *The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Colorado, USA. pp. 1417 – 1422.
- Chi-Tsong, Chen (1970). *Introduction to Linear System Theory*. Holt Rinehart and Winston, Inc. USA.
- Chi-Tsong, Chen (1984). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc. New York.
- Cuibus, M., V. Bostan, C. Ambrosii, S. Andilas and R. Magureanu (2000). Luemberger, kalman and neural network observers for sensorless induction motor control. In: *Proceedings PIEMC 2000, The third International Power Electronics and Motion Control Conference*. Beijing, China. pp. 1256 – 1261.
- Damiano, A., G. Gatto, I. Marongiu, C. Attaianesi and A. Perfetto (1998). An adaptive speed sensorless observer for induction motor drives. In: *Proceedings of the 24th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 1998. IECON '98*. Aachen-Germany. pp. 1592–1596.
- Elbuluk, M.E. and D. Kankam (1997). Speed sensorless induction motor drives for electrical actuators: Schemes, trends and tradeoffs. In: *Proceedings of the IEEE 1997 National Aerospace and Electronics Conference, 1997. NAECON 1997*. Ohio, USA. pp. 137–144.
- Feemster, M., P. Aquino, D.M. Dawson and A. Behal (2001). Sensorless rotor velocity tracking control for induction motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **9**(4), 645 – 653.
- Gauthier, J.P. and I. Kupka (2001). *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press. Cambridge, UK.
- Gonzalez-Fonseca, N., J. De Leon-MOrales and J. Leyva-Ramos (2004). Observador no lineal para convertidores conmutados de cd-cd. In: *Proceedings of the International Symposium on Industrial electronics*. Ciudad de Mexico, Mexico. pp. 1 – 6.

- Grewal, Mohinder S. and Angus P. Andrews (2002). *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley & Sons. USA.
- Harnefors, L. (2000). Instability phenomena and remedies in sensorless indirect field oriented control. *IEEE Transactions on Power Electronics* **15**(4), 743–773.
- Hermann, R. and A. Krener (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(5), 728 – 740.
- Holtz, J. (1995). State of the art of controlled ac drives without speed sensor. In: *Proceedings of 1995 International Conference on Power Electronics and Drive Systems*. Singapore. pp. 1–6.
- Holtz, J. (2000). Is sensorless position control of standard induction motors a feasible technology. In: *Proceedings. PIEMC 2000. The Third International Power Electronics and Motion Control Conference*. Beijing, China. pp. 21 – 32.
- Holtz, J. (2002). Sensorless control of induction motors drives. *Proceedings of the IEEE* **90**(8), 1359 – 1394.
- Holtz, J. and Juntao Quan (2002). Sensorless vector control of induction motors at very low speed using a nonlinear inverter model and parameter identification. *IEEE Transactions on Industry Applications* **38**(4), 1087 – 1095.
- Ibarra-Rojas, S., J. Moreno and G. Espinosa-Perez (2004). Global observability analysis of sensorless induction motors. *Automatica* **40**(6), 1079 – 1085.
- Idc, K., Ha Jung-Ik, M. Sawamura, H. Iura and Y. Yamamoto (2002). A novel hybrid speed estimator of flux observer for induction motor drives. In: *Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Industrial Electronics ISIE 2002*. L'Aquila, Italy. pp. 822 – 827.
- Ioannou, Petros A. and Jing Sun (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc. USA.
- Kalman, R. E. and R. S. Bucy (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering* **245**(5), 95–108.
- Khalil, Hassan K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Inc. New Jersey 07458.
- Madadi, Kojabadi H. and L. Chang (2002). Model reference adaptive system pseudoreduced-order flux observer for very low speed and zero speed estimation in sensorless induction motor drives. In: *2002 IEEE 33rd Annual Power Electronics Specialist Conference, 2002. pesc 02..* Queensland, Australia. pp. 301–305.
- Meisel, J. (1966). *Principles of Electromechanical Energy Conversion*. Mc Graw-Hill, Inc. USA.
- Moreno, J., G. Espinosa and S. Ibarra (2002). Global observability analysis of induction motor under sensorless conditions. In: *Proceedings of 15th IFAC World Congress*. Barcelona, Spain. p. Paper 2339 on CD.
- Pai, Dinesh., P. R. Mangsuli and N. J. Rao (2000). Non linear observer based sensorless direct torque control of induction motor. In: *Proceedings of the Power Electronic and Motion Control*. Beijing, China. pp. 440 – 445.
- Pavlov, Alexei and Alex Zaremba (2001). Adaptive observers for sensorless control of an induction motor. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Arlington, VA. pp. 1557 – 1562.
- Qiongxuan, Ge and Feng Zhiyue (2000). Speed estimated for vector control of induction motor using reduced-order extended kalman filter. In: *Proceedings. PIEMC 2000 Power Electronics and Motion Control Conference, 2000..* Beijing, China. pp. 138 – 142.
- Rajashekara, K., A. Kawamura and K. Matsuse (1996). *Sensorless Control of AC Motor Drives*. IEEE PRESS. USA.
- Rasmussen, H., P. Vadstrup and H. Børsting (2002). Speed sensorless field oriented control of an induction motor at zero speed with identification of inverter model parameters. In: *Proceedings of the International Symposium on Industrial electronics*. L'Aquila, Italia. pp. 818 – 821.
- Rheinboldt, W. (1984). Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds. *Mathematics of Computation* **43**(168), 473–478.

- Sastry, Shankar and Marc Bodson (1989). *Adaptive Control, Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, Inc. New Jersey.
- Tajima, H., G. Guidi and H. Umida (2002). Consideration about problems and solutions of speed estimation method and parameter tuning for speed-sensorless vector control of induction motor drives. *IEEE Transactions on Industry Applications* **38**(5), 1282 – 1289.
- Takeshita, T., Y. Nagatoshi and N. Matsui (2002). Sensorless vector control of induction motor at zero frequency. In: *Proceedings of the Power Conversion Conference, 2002*. Osaka, Japan. pp. 510–515.
- Wang, Huangang, Xiaoping Zhang, Wenli Xu and Geng Yang (2001). The speed-sensorless control of induction motors at zero frequency. In: *Proceedings of the Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems*. Beijing, China. pp. 1195 – 1198.
- Wolbank, T.M., A. Moucka and J.L. Machl (2002a). A comparative study of field oriented and direct-torque control of induction motors reference to shaft-sensorless control at low and zero-speed. In: *Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2002*. Vancouver, Canada. pp. 391 – 396.
- Wolbank, T.M., R. Woehrschimmel and J.L. Machl (2002b). Zero speed sensorless control signals of induction motor with closed rotor slots. In: *IEEE, Power Electronics Specialist Conference, 2002. PESC 02*. Queensland, Australia. pp. 997 – 1002.
- Zheng, Yuhong and K.A. Loparo (1999). Adaptive flux and speed estimation for induction motors. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. California, USA. pp. 2521 – 2525.

seibt16@yahoo.com.mx