

01170



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO
EN INGENIERIA

OBSERVACION E IDENTIFICACION DE SISTEMAS
VIA MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
(ELECTRICA)

PRESENTA:
JORGE ANGEL DAVILA MONTOYA

DIRIGIDA POR:
DR. LEONID FRIDMAN

CIUDAD UNIVERSITARIA

MARZO 2005

m342315



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres que siempre me brindan su apoyo, gracias a ustedes yo puedo seguir preparándome.

A mi hermana por ser simplemente mi hermana.

A Michelle por su paciencia y por el apoyo que me dio durante toda la maestría y el que me brinda diariamente.

A mis amigos, con los cuáles sé que cuento siempre.

A todas las personas de DGSCA que me respaldaron para realizar mi maestría

A mi director de tesis por su respaldo en el trabajo, por su paciencia, por darme la gran oportunidad de crecer en mi formación y por aportar un gran enriquecimiento en mi vida.

A todos mis profesores de la maestría.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, que me ha brindado todo lo que tengo y me ha hecho todo lo que soy.

Jorge Angel Dávila Montoya
18-Marzo-2005

Observación e Identificación de Sistemas Via Modos Deslizantes de Segundo Orden

Jorge Angel Dávila Montoya
Director de Tesis: Dr. Leonid Fridman

Tesis de Maestría, Ingeniería Eléctrica

18 de marzo de 2005

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Maestría en Ingeniería Eléctrica (Control), Universidad Nacional Autónoma de México, U.N.A.M.

ÍNDICE GENERAL

1.. Introducción	3
2.. Fundamentos	7
2.1. Ecuaciones Diferenciales Discontinuas	7
2.2. Modos deslizantes	8
2.3. Modos deslizantes de alto orden	10
2.3.1. Modos deslizantes en variedades (manifolds)	10
2.3.2. Modos deslizantes con respecto a funciones restrictivas	11
2.3.3. Algoritmo Super-Twisting	13
2.4. Identificación paramétrica	16
3.. Observador	20
3.1. Planteamiento del problema	20
3.2. Diseño del Observador en Tiempo Continuo	22
3.3. Diseño del Observador en Tiempo Discreto	26
3.4. Caso vectorial	28
4.. Identificación de parámetros y perturbaciones	30
4.1. Identificación de Perturbaciones	31
4.2. Identificación de Parámetros	32
5.. Simulaciones	36
5.1. Observación de estados	36
5.2. Identificación de parámetros	38
6.. Conclusiones	45

1. INTRODUCCIÓN

Gran parte de los sistemas de control de la actualidad se encuentran basados en el llamado principio de retroalimentación (feedback), en el cual la variable a ser controlada es comparada con una señal de referencia y su discrepancia es usada para calcular la acción correctiva, llamada señal de control.

Para calcular la señal de control de un sistema retroalimentado, tomando como base el modelo de variables de estado, es necesario, en la mayoría de las ocasiones, conocer todas las variables de estado. Sin embargo, en la práctica esto no siempre es posible, entonces es necesario estimar las variables de estado no disponibles a través de las variables conocidas.

En sistemas mecánicos es común que limitaciones de costo impidan contar con todas las variables físicas de los sistemas. En muchos casos las variables de desplazamiento se encuentran disponibles, mientras que las variables de velocidad no lo están. En estos casos con la finalidad de reconstruir el estado completo, es factible aplicar un diferenciador o bien un observador de estados para reconstruir la variable faltante.

Efectos como saturación, zonas muertas, fricción seca, etc. complican el trabajo de observación introduciendo comportamientos no lineales del sistema y acarreando incluso discontinuidades en la dinámica de los estados.

La naturaleza no lineal de los sistemas mecánicos y en particular las discontinuidades provocadas por fenómenos como el de fricción seca dificultan la observación de los estados. Los observadores lineales no presentan un desempeño adecuado en estos casos, los observadores basados en el modelo dinámico se encuentran restringidos a una variedad de sistemas en los cuales el modelo matemático es totalmente conocido, es decir, son aplicables a los casos en

los que no existe incertidumbre en el modelo o dinámicas no modeladas. Los observadores de alta ganancia [2] son imprecisos cuando se utiliza cualquier ganancia finita y en caso de que la ganancia tienda a infinito, presentan el llamado peaking effect (el valor máximo de salida durante el transitorio crece infinitamente conforme la ganancia tiende a infinito).

La diferenciación en tiempo real es un viejo y bien conocido problema. Su principal dificultad al ser implementado se encuentra en su sensibilidad a la presencia de ruidos de entrada. Si el modelo matemático del sistema es conocido, es razonable diseñar un observador de estados, la aplicación del observador de estados será afectada por la incertidumbre en los parámetros del sistema y las perturbaciones externas, las cuales deberán ser rechazadas por el observador.

Los modos deslizantes son una técnica de control moderna que es ampliamente utilizada para trabajar con sistemas con dinámicas no modeladas e incertidumbres paramétricas. Esta técnica se basa en el cumplimiento de ciertas restricciones apropiadamente dispuestas mediante la conmutación en alta frecuencia de una señal de control. Las principales ventajas de dicha técnica de control son su insensibilidad a perturbaciones externas o internas, su precisión final y su tiempo finito de convergencia.

Sin embargo, los modos deslizantes estándar se encuentran afectados por ciertas limitaciones. Los modos deslizantes convencionales pueden ser implementados sólo en sistemas de grado relativo uno, esto es que, para regular una variable estos deben ser aplicados sobre la dinámica de la primer derivada. Además, al ser imposible en la práctica obtener frecuencias de conmutación infinitas, las altas frecuencias de conmutación posibles de generar, producen el fenómeno llamado chattering, el cual se manifiesta por una vibración a alta frecuencia que puede ser peligrosa en la práctica.

Una solución al problema del chattering, es el diseño de modos deslizantes de alto orden (HOSM, por sus siglas en inglés), los cuales generalizan la idea de los modos deslizantes convencionales actuando en las derivadas de las variables del sistema. Esta técnica conserva las principales características deseables de los modos deslizantes como tiempo finito de convergencia y su robustez, disminuye el efecto del chattering y provee también una gran exactitud.

Los observadores basados en los modos deslizantes son ampliamente usados debido a su tiempo finito de convergencia, la robustez con respecto a las incertidumbres y la posibilidad de estimar las perturbaciones (como ejemplos se pueden ver en los tutoriales [5], [13]).

Actualmente se desarrollan una nueva generación de diferenciadores y observadores basados en los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden.

En [20] se presenta un observador de convergencia asintótica para sistemas mecánicos no lineales que requiere que las aceleraciones y la entrada de control del sistema sean diferenciables por lo que no es posible aplicarlo a sistemas controlados por modos deslizantes.

En [14] se presenta un observador de convergencia asintótica basado en un algoritmo de modos deslizantes de segundo orden continuo.

Un observador por modos deslizantes para un sistema mecánico de segundo orden se presenta en [1]. En el se prueba, mediante la extensión del principio de invarianza, la convergencia asintótica del error a cero.

Un diferenciador robusto exacto, con tiempo finito de convergencia, es diseñado como una aplicación del algoritmo super-twisting en [10].

En este trabajo se presenta el diseño de un observador basado en el algoritmo de modos deslizantes de segundo orden super-twisting [11] para sistemas de segundo orden, que reconstruye la velocidad del sistema a partir de la medición de la posición del mismo.

El observador diseñado, posee las características básicas del algoritmo super-twisting como su robustez y tiempo finito de convergencia. La robustez del algoritmo permitirá la aplicación del observador a sistemas con incertidumbres paramétricas, incertidumbres en el modelo que se encuentren acotadas, perturbaciones acotadas e incluso para el caso en el que la dinámica de los estados sea discontinua, el tiempo finito de convergencia del observador permitirá obtener información del sistema que hará posible identificar los parámetros reales del mismo o bien las perturbaciones que actúan sobre el utilizando el concepto de control equivalente.

La convergencia en tiempo finito del observador permitirá asegurar que después de un corto tiempo la dinámica del observador se desvanecerá permitiendo actuar al control sobre la dinámica real del sistema.

Un gran problema al realizar identificación de parámetros es el de obtener la forma de regresión lineal para sistemas dinámicos. Haciendo uso de los modos deslizantes se han hecho esfuerzos de obtener características del sistema mediante el uso del control equivalente [16]. Aplicando los conceptos aquí mostrados, será posible generar la estructura de regresión lineal a sistemas dinámicos por medio de la aplicación del observador propuesto, permitiendo con esto la aplicación de cualquier técnica de regresión lineal a la estructura obtenida.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma: En el capítulo 2 se presentan las definiciones de modos deslizantes de orden superior, de los cuales se deriva el concepto de modos deslizantes de segundo orden y en particular del algoritmo de super-twisting. En este mismo capítulo se presentan los fundamentos de identificación paramétrica. En el capítulo 3 se presenta el diseño del observador en tiempo continuo así como su prueba de convergencia. También se presenta una versión en tiempo discreto del observador para la cual se calcula la región de convergencia del error de estimación. Finalmente se presenta una versión vectorial del observador generalizando los resultados obtenidos. Como consecuencia de la convergencia en tiempo finito y haciendo uso del concepto de control equivalente se propone un método para la identificación de perturbaciones y un algoritmo para realizar identificación paramétrica en el capítulo 4. En el capítulo 5 se presentan ejemplos de la aplicación del observador y los algoritmos de identificación paramétrica y de perturbaciones en simulaciones. Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones derivadas del trabajo.

2. FUNDAMENTOS

2.1. Ecuaciones Diferenciales Discontinuas

En esta sección se hará un breve recuento de los conceptos principales utilizados de la teoría de análisis de ecuaciones diferenciales discontinuas, para una descripción más detallada se podrá consultar [6].

Considere una ecuación o un sistema en notación vectorial

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.1}$$

con una función f continua a tramos en un dominio G ; $x \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = dx/dt$; M es un conjunto (de medida cero) conformado por los puntos de discontinuidad de f .

Para cada punto (x, t) del dominio G , se define un conjunto n -dimensional $F(t, x)$. Si en el punto (t, x) la función f es continua, entonces el conjunto $F(t, x)$ consistente en un punto, coincidente con la solución de f en ese punto. Si (t, x) es un punto de discontinuidad de f , entonces el conjunto $F(t, x)$ se deberá definir de otra forma. En éstos puntos de discontinuidad, una solución al sistema (2.1) es llamada una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{2.2}$$

esta solución $x(t)$ es una función vectorial absolutamente continua definida en un intervalo o un segmento I para el que $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ se cumple.

Una forma de definir dicho conjunto $F(t, x)$ es la siguiente. Considere, para cada punto $(t, x) \in G$, al conjunto $F(t, x)$ como el menor conjunto convexo compacto que contiene todos los valores límite de la función vectorial $f(t, x^*)$ para $f(t, x^*) \notin M$, $x^* \rightarrow x$, $t = \text{const}$.

Considere el caso en el que la función $f(t, x)$ es discontinua en una superficie suave $S(x)$ dada por la ecuación $\varphi(x) = 0$. La superficie S separa su

vecindad en dos dominios G^- y G^+ . Para un valor $t = \text{const}$ y $x^* \rightarrow x \in S$ se podrán definir los límites de la función $f(t, x)$ para los dominios G^- y G^+ como

$$\lim_{x^* \in G^-, x^* \rightarrow x} f(t, x) = f^-(t, x), \quad \lim_{x^* \in G^+, x^* \rightarrow x} f(t, x) = f^+(t, x)$$

El conjunto $F(t, x)$ se puede definir como el segmento lineal que une los puntos finales de los vectores $f^-(t, x^*)$ y $f^+(t, x^*)$.

Para la inclusión diferencial (2.2), una trayectoria se define como un punto o una línea (en el espacio de x) determinada por la función vectorial $\dot{x} = \varphi(t)$, la cuál es una solución de la inclusión (2.2).

2.2. Modos deslizantes

Las ideas originales acerca del concepto de modos deslizantes pueden encontrarse en publicaciones que se remontan a la década de los cincuentas [19]. El diseño de herramientas matemáticas apropiadas que describieran los modos deslizantes fueron requeridas para el campo de los llamados sistemas de estructura variable. Esta necesidad surge del hecho de que los modos deslizantes son el principal modo de operación de los sistemas de estructura variable. La posibilidad de ocurrencia de dichos modos radica en el principio de diseño de estos sistemas: un sistema de estructura variable es construído alrededor de un conjunto de subsistemas continuos llamados estructuras entre los cuales se puede conmutar en el curso del control haciendo el control discontinuo. En el caso de sistemas multivariables con estructuras variables los modos deslizantes se originan en la intersección de las superficies del vector de control.

Considere el sistema dado por

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.3}$$

en donde $x, f \in \mathbb{R}^n, u(x) \in \mathbb{R}^m$. Suponga que el control que actúa sobre el sistema es de la forma

$$u(x) = \begin{cases} u^+ & \text{para } s(x) > 0 \\ u^- & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}$$

en donde $s(x)$ es un vector de funciones suaves. Se puede definir como modo deslizante al movimiento que se da en el punto de intersección de las dos superficies $s(x) > 0$, $s(x) < 0$. Note que en ese punto el operador no se encuentra definido, sin embargo el conjunto formado por la discontinuidad en la cuál el operador no está definido es de dimensión cero [6], entonces existe la solución en el sentido de Filippov [6]. Al movimiento originado sobre el punto de discontinuidad se le conoce como modo deslizante.

Suponga que el movimiento deslizante existe en la variedad $s(x) = 0$. Entonces todas las trayectorias quedarán confinadas en esta variedad para todo $t > 0$, por lo tanto es posible asumir que $\dot{s}(x) = 0$ para $t > 0$. Entonces es posible definir el movimiento sobre el modo deslizante a partir de las igualdades $s(x) = 0$, $\dot{s}(x) = 0$. Si el modo deslizante existe sobre la variedad $s(x) = 0$, entonces es posible encontrar un control continuo tal que la derivada del vector $s(x)$ a través de las trayectorias del sistema $(f(x, u))$ sea igual a cero

$$\dot{s}(x) = Gf(x, u) = 0 \quad (2.4)$$

en donde $G = ds/dx$ es el gradiente de $s(x)$. Al control que hace posible que la igualdad (2.4) se cumpla se le llamará control equivalente [17], [8] y se le denota como $u_{eq}(x)$. Las trayectorias del sistema en el modo deslizante estarán dadas por

$$\dot{x} = f(x, u_{eq})$$

El movimiento sobre la superficie deslizante puede ser visto como una idealización. Se asume que el control cambia a una gran frecuencia, teóricamente infinita, de tal forma que el vector de velocidades de los estados, se orienta a lo largo de la intersección de las superficies. Sin embargo, debido a incertidumbres en los actuadores, retardos e incluso debido a la discretización, el control real (el que es posible obtener en la realidad) se encontrarán conmutando a gran velocidad entre los valores del control u^+ y u^- , por lo que el vector de estados oscilará a gran velocidad alrededor de la variedad $s(x) = 0$, formando una capa límite a lo largo de la intersección discontinua de las superficies $f(x, u^-)$ y $f(x, u^+)$

Las oscilaciones en la capa límite tienen componentes de alta y baja frecuencia. En la aplicación del control, las componentes de alta frecuencia son filtradas por la planta a controlar y el movimiento sobre el modo deslizante es determinado por la componente lenta [17]. Como antes se mencionó, el

movimiento sobre la superficie deslizante puede ser obtenido al sustituir el control equivalente u_{eq} en el sistema (2.3). Entonces, es razonable asumir que el control equivalente puede ser considerado como la componente lenta del control, cuando el sistema se encuentra en el modo deslizante, por lo que puede ser obtenido filtrando la señal de control con un filtro paso bajas [16], [17], [8].

2.3. Modos deslizantes de alto orden

Los modos deslizantes estándar poseen ciertas propiedades especiales. Son alcanzados en tiempo finito, esto quiere decir que las trayectorias cruzan por algún punto de deslizamiento. El movimiento sobre la superficie es llevado a cabo en una superficie discontinua y puede ser entendido como el límite del movimiento cuando las imperfecciones desaparecen y la frecuencia de conmutación tiende a infinito. Cualquier generalización de la noción de modos deslizantes deberá heredar estas propiedades.

Recordemos la definición de la solución de una ecuación diferencial en el sentido de Filippov [6]. Considere la siguiente ecuación diferencial discontinua

$$\dot{x} = v(x),$$

en donde $x \in R^n$, v es una función vectorial localmente acotada y medible (Lebesgue). En este caso, la ecuación es reemplazada por una inclusión diferencial equivalente

$$\dot{x} \in V(x)$$

En el caso particular en el que el campo vectorial v es continuo casi en todo lugar, el conjunto de funciones $V(x)$ es la cerradura convexa del conjunto de todos los posibles límites de $v(y)$ cuando $y \rightarrow x$, en donde $\{y\}$ son los puntos de continuidad de v . Cualquier solución de la ecuación es definida como una función absolutamente continua $x(t)$, que satisface la inclusión diferencial casi en cualquier punto.

2.3.1. Modos deslizantes en variedades (manifolds)

Sea S una variedad suave. El conjunto S en sí mismo es llamado conjunto 1-deslizante con respecto a S . El conjunto 2-deslizante es definido como el conjunto de puntos $x \in S$, en donde $V(x)$ se encuentra totalmente en un

espacio tangencial T_x a la variedad S en el punto x .

Definición 1. Se dice que existe un modo deslizante de primer (segundo) orden en una variedad S en una vecindad de un punto deslizante de primer (segundo) orden x , si en esta vecindad del punto x el conjunto deslizante de primer (segundo) orden es un conjunto integral, i.e. está compuesto de trayectorias en el sentido de Filippov [6].

Sea $S_1 = S$. Denote con S_2 al conjunto de puntos 2-deslizantes con respecto a la variedad S . Asuma que el conjunto S_2 , en sí mismo, puede considerarse como una variedad lo suficientemente suave. Entonces la misma construcción puede hacerse respecto a S_2 . Denote con S_3 al correspondiente conjunto 2-deslizante con respecto a S_2 . S_3 es llamado el conjunto 3-deslizante con respecto a la variedad S . Continuando con este proceso se pueden obtener conjuntos deslizantes de cualquier orden.

Definición 2. Se dice que existe un modo r -deslizante en una variedad S en una vecindad de un punto r -deslizante $x \in S_r$, si en esta vecindad del punto x el conjunto r -deslizante S_r es un conjunto integral, i.e. esta compuesto de trayectorias en el sentido de Filippov [6].

2.3.2. Modos deslizantes con respecto a funciones restrictivas

Sea una restricción de (2.3) dada por una ecuación $\sigma(x) = 0$, en donde $\sigma : R^n \rightarrow R$ es una restricción suficientemente suave. Esto equivale a suponer que las derivadas totales en el tiempo a lo largo de las trayectorias $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ existen y son funciones univaluadas de x , lo cual no es trivial para sistemas dinámicos discontinuos. En otras palabras, esto quiere decir que la discontinuidad no aparece en las primeras $r - 1$ derivadas totales en el tiempo de la función restrictiva σ . Entonces el conjunto deslizante de orden r , se encuentra determinado por las igualdades

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (2.5)$$

Aquí (2.5) es una condición r -dimensional en el estado del sistema dinámico (2.3).

Definición 3. Sea el conjunto r -deslizante (2.5) un conjunto no vacío y asuma que localmente es un conjunto integral en el sentido de Filippov (i.e. está compuesto por trayectorias en el sentido de Filippov del sistema dinámico discontinuo). Entonces el movimiento correspondiente que satisface (2.5) es llamado un modo r -deslizante con respecto a la función restrictiva σ .

Para mostrar la relación de esta con las anteriores definiciones, considere una variedad S dada por la ecuación $\sigma(x) = 0$. Suponga que $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-2)}$ son funciones diferenciables de x y que satisfacen localmente

$$\text{rank}\{\nabla\sigma, \nabla\dot{\sigma}, \dots, \nabla\sigma^{(r-2)}\} = r - 1 \quad (2.6)$$

(aquí el $\text{rank } V$ es una notación para el rango del conjunto vectorial V y ∇ es el gradiente). Aquí S_r está determinado por (2.5) y todas S_i , $i = 1, \dots, r-1$ son variedades suaves. En el caso en que sea necesario que S_r sea una variedad diferenciable, la anterior condición deberá extenderse como

$$\text{rank}\{\nabla\sigma, \nabla\dot{\sigma}, \dots, \nabla\sigma^{(r-1)}\} = r \quad (2.7)$$

La igualdad (2.7) junto con el requerimiento para las correspondientes derivadas de σ de ser funciones diferenciables de x será llamada condición de regularidad de deslizamiento. En el caso en que la condición (2.7) sea sustituida por (2.6), (2.7) será llamada la condición débil de deslizamiento.

Con la condición débil de deslizamiento satisfecha y S dada por la ecuación $\sigma = 0$ la definición 3 es equivalente a la definición 2. Si la condición de regularidad (2.7) se satisface, entonces se pueden tener nuevas coordenadas locales. En éstas nuevas coordenadas el sistema (2.3) tendrá la forma

$$\begin{aligned} y_1 = \sigma, \dot{y}_1 = y_2, \dots, \dot{y}_{r-1} = y_r; \\ \sigma^{(r)} = \dot{y}_r = \Phi(y, \xi); \\ \dot{\xi} = \Psi(y, \xi), \xi \in R^{n-r} \end{aligned}$$

Proposición 1. Considere que la condición (2.7) se satisface y que la variedad r -deslizante (2.5) es no vacía. Entonces existe un modo deslizante de orden r con respecto a la función restrictiva σ si y solo si la intersección del conjunto del campo vectorial de Filippov con el espacio tangencial a la variedad (2.5) es no vacía para ningún punto r -deslizante [12].

Sea, ahora, σ una función vectorial suave, $\sigma : R^n \rightarrow R^m$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ y también $r = (r_1, \dots, r_m)$ en donde r_i son números naturales.

Definición 4. Asuma que las primeras r_i sucesivas derivadas totales en tiempo de σ_i son funciones suaves, y el conjunto dado por las igualdades

$$\sigma_i = \dot{\sigma}_i = \ddot{\sigma}_i = \dots = \sigma_i^{(r_i-1)} = 0, i = 1, \dots, m$$

es localmente un conjunto integral en el sentido de Filippov. Entonces el movimiento existente en éste es llamado un modo deslizante con un vector deslizante de orden r con respecto a la función restrictiva σ .

Su correspondiente condición de regularidad tiene la forma

$$\text{rank}\{\nabla\sigma_i, \dots, \nabla\sigma_i^{(r_i-1)} | i = 1, \dots, m\} = r_1 + \dots + r_m$$

La definición 4 corresponde a la definición 2 en el caso cuando $r_1 = r_2 = \dots = r_m$ y es satisfecha la condición débil de deslizamiento. El modo deslizante es llamado estable si el correspondiente conjunto deslizante es estable.

2.3.3. Algoritmo Super-Twisting

Actualmente se han desarrollado algoritmos con modos deslizantes de segundo orden, muchos de los cuales utilizan la derivada del estado como una señal para generar el control (ver i.e. algoritmos *twisting*, *prescribed control* en [7], [12]). Estos controles utilizan entonces tanto al estado como su derivada para garantizar que $x = \dot{x} = 0$ en tiempo finito.

Lo anterior es razonable, sin embargo no es inevitable. Considere el sistema dinámico dado por

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u \quad (2.8)$$

y suponga que para algunas constantes positivas C, K_M, K_m, U_M, q

$$|a| + U_M |b| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq b(x, t) \leq K_M, \quad |a/b| < q U_M, \quad 0 < q < 1. \quad (2.9)$$

El siguiente algoritmo no requiere la medición de \dot{x} para garantizar la convergencia de $x = \dot{x} = 0$ [12].

$$u = -\lambda|x|^{1/2} \text{sign } x + u_1, \quad \dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M \\ -\alpha \text{sign } x, & |u| \leq U_M. \end{cases} \quad (2.10)$$

Con $K_m\alpha > C$ y λ suficientemente grandes, el controlador (2.10) formará un modo deslizante de segundo orden atrayendo todas las trayectorias hacia $x = \dot{x} = 0$ en tiempo finito [12]. El control entrará en tiempo finito en el segmento $[-U_M, U_M]$ y se mantendrá dentro. Si el valor inicial se encuentra dentro del segmento, éste nunca lo abandonará.

Una condición suficiente para la convergencia está dada por la elección de λ como

$$\lambda > \sqrt{\frac{2}{(K_m\alpha - C)} \frac{(K_m\alpha + C)K_M(1+q)}{K_m^2(1-q)}}$$

Calculando \dot{u} con $|u| > U_M$ obtenemos $\dot{u} = -\frac{1}{2}\lambda\dot{x}|x|^{-1/2} - u$. De la ecuación (2.8) y las restricciones (2.9) se tiene que $\dot{x}u > 0$ con $|u| > U_M$, entonces, $\dot{u}u < 0$, $|\dot{u}| > U_M$ cuando $|u| > U_M$ y por lo tanto $|u| \leq U_M$ se satisface en tiempo finito.

Por el contrario, cuando $|u| < U_M$, con $x \neq 0$:

$$\ddot{x} = \dot{a} + b\dot{u} - b\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} - b\alpha \text{sign}(x) \quad (2.11)$$

en donde se usa la identidad $\frac{d}{dt}|x| = \dot{x} \text{sign } x$. Nótese que los valores pertenecientes al conjunto de medida cero no son tomados en cuenta para la diferenciación, entonces la diferencial es realizada cuando $\text{sign } x = \text{const}$. Rescribiendo la ecuación (2.11) en forma de inclusión diferencial se tiene

$$\ddot{x} \in [-C, C] - [K_m, K_M]\left(\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} + \alpha \text{sign } x\right) \quad (2.12)$$

Las trayectorias del sistema se encontrarán confinadas dentro de la curva mas amplia descrita por la inclusión (2.12) llamada curva mayorante, por lo que el cálculo de dicha curva es necesaria para probar la convergencia. Con $x > 0, \dot{x} > 0$ la trayectoria quedará confinada entre los ejes $x = 0, \dot{x} = 0$ y la trayectoria descrita por la curva mayorante $\ddot{x} = -(K_m\alpha - C)$ (vea Figura 2.1). Sea x_M la intersección de ésta curva con el eje $\dot{x} = 0$. Obviamente $2(K_m\alpha - C)x_M = \dot{x}_0^2$. Es fácil ver que

$$x > 0, \dot{x} = 0, \quad \frac{1}{2}\lambda\frac{|\dot{x}|}{|x|^{1/2}} > \frac{C}{K_m} + \alpha \rightarrow \ddot{x} > 0$$

Entonces la curva mayorante para $x > 0$ puede considerarse como

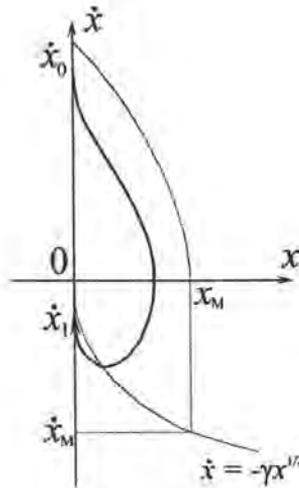


Fig. 2.1: Curva mayorante del algoritmo *supertwisting*.

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= 2(K_m\alpha - C)(x_M - x); \dot{x} > 0, \\ x &= x_M; 0 \geq \dot{x} \geq -\frac{2}{\lambda}\left(\frac{C}{K_m} + \alpha\right)x^{1/2}, \\ \dot{x} &= \dot{x}_M = -\frac{2}{\lambda}\left(\frac{C}{K_m} + \alpha\right)x_M^{1/2}; \dot{x} > -\frac{2}{\lambda}\left(\frac{C}{K_m} + \alpha\right)x^{1/2} \end{aligned}$$

por lo que la curva mayorante tendrá la forma mostrada en la Figura 2.1.

Es suficiente satisfacer $|\frac{\dot{x}_M}{\dot{x}_0}| < 1$ para probar la convergencia cuando $|u| < U_M$, esto es

$$\frac{2(K_m\alpha + C)^2}{\lambda^2 K_m^2 (K_m\alpha - C)} < 1$$

eligiendo adecuadamente λ de acuerdo a la forma propuesta en (2.9) es fácil ver de la anterior igualdad que el algoritmo converge.

Para probar el tiempo finito de convergencia es suficiente considerar una pequeña vecindad del origen cuando $|u| < U_M$. Considere la variable auxiliar $\xi = a(t) + b(t)u_1$. Es fácil ver que $\xi = \dot{x}$ en el momento que $x = 0$, y $u_1 \rightarrow -a/b$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\xi = b(a/b + u_1)$ tiende a cero. A partir del momento en que $|u_1| < U_M$, la derivada $\dot{\xi} = \dot{a} + bu_1 - b\alpha \text{sign } x$ satisface

las desigualdades

$$0 < K_m \alpha - C \leq -\dot{\xi} \operatorname{sign} x \leq K_M \alpha + C$$

Entonces la variación total de ξ estará dada por $\sum |x_i|$, la cual es regida por una serie geométrica con índice menor a uno y por lo tanto converge. Entonces el tiempo de convergencia puede estimarse como

$$T \leq \sum |x_i| / (K_m \alpha - C).$$

La anterior prueba permite garantizar que el conjunto $\dot{x} = x = 0$ será un conjunto no vacío compuesto por trayectorias en el sentido de Filippov [6]. Por lo que el uso del algoritmo de control (2.10) sobre el sistema (2.8) producirá un modo deslizante de segundo orden atrayendo todas las trayectorias del sistema en tiempo finito.

Analizando el controlador super-twisting, es posible destacar ciertas características que posibilitarían su aplicación a una dinámica de segundo orden. De la condición $|\dot{a}| + U_M |\dot{b}| \leq C$ es posible deducir que el algoritmo es aplicable a un sistema que posea una segunda derivada acotada, aún cuando la aplicación del algoritmo de control se lleva a cabo en un sistema de primer orden. El algoritmo (2.10) se encuentra dividido en una parte lineal, que permite la convergencia fuera de la región U_M , y una parte no lineal, compuesta por el algoritmo de modos deslizantes, que permite la convergencia en la región U_M del origen y que asegura el tiempo finito de convergencia. La aplicación del algoritmo supertwisting de control posee cierta robustez respecto a perturbaciones acotadas actuando sobre el sistema.

2.4. Identificación paramétrica

Existen gran variedad de métodos de identificación [15]. El concepto de regresión lineal es común en el campo de la estadística, su origen se remonta a la época en la que Gauss lo usa como una técnica para calcular las órbitas de los planetas (aproximadamente el año de 1809).

El modelo de regresión lineal es el modelo paramétrico más simple, su estructura está dada por

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta \quad (2.13)$$

en donde $y(t)$ es una cantidad medible, $\varphi(t)$ es un n -vector de cantidades conocidas y θ es un n -vector de parámetros. Los elementos del vector $\varphi(t)$ son normalmente llamados variables de regresión o regresor, mientras que $y(t)$ es llamada la variable regresada. El vector θ será llamado vector de parámetros.

El modelo de regresión lineal (2.13) puede ser extendido al caso multivariable

$$y(t) = \Phi^T(t)\theta \quad (2.14)$$

en el que $y(t)$ es un p -vector, $\Phi(t)$ es una matriz de $n \times p$ y θ es un n -vector.

El problema es encontrar un estimado $\hat{\theta}$ del vector de parámetros θ a partir de las medidas del vector $y(1), \varphi(1), \dots, y(N), \varphi(N)$, llevando así el sistema a la forma de regresión lineal. El sistema de ecuaciones obtenido puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(1) &= \varphi^T(1)\theta \\ y(2) &= \varphi^T(2)\theta \\ &\vdots \\ y(N) &= \varphi^T(N)\theta \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede ser re escrito en su forma matricial como

$$Y = \Phi\theta$$

en donde Y es un vector de $N \times 1$, es claro que si $N = n$, Φ se convierte en una matriz cuadrada de $n \times n$ y θ es un vector de $n \times 1$.

En muchos casos el vector $\varphi(t)$ es función del tiempo, en éste caso es posible construir una forma de encontrar θ a partir de la ecuación (2.14) y las mediciones de φ . Sea la relación.

$$y = \varphi^T\theta$$

Pre-multiplicando la relación por φ y obteniendo el promedio

$$\frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\tau)y(\tau)d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\tau)\varphi(\tau)^T\theta d\tau$$

despejando θ se tiene

$$\hat{\theta} = \left[\int_0^t \varphi(\tau)\varphi(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \left[\int_0^t \varphi(\tau)y(\tau) d\tau \right] \quad (2.15)$$

En éste caso la matriz $\left[\int_0^t \varphi(\tau)\varphi(\tau)^T d\tau \right]$ es no negativa por construcción. Sin embargo, para que exista solución será necesario que dicha matriz sea no singular, esto nos lleva al concepto de excitación persistente que se explicará mas adelante.

La anterior relación (2.15), coincide con la solución por el método de mínimos cuadrados [15], en el cuál se intenta minimizar una función de costo dada por

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t (y(\tau) - \varphi(\tau)^T \theta(t))^2 d\tau$$

con respecto a θ en todo tiempo t . Dado que $J(\theta)$ es una función convexa sobre \mathfrak{R}^1 en todo tiempo t , satisface

$$\nabla J(\theta) = - \int_0^t \varphi(\tau)y(\tau)d\tau + \theta(t) \int_0^t \varphi(\tau)\varphi(\tau)^T d\tau = 0$$

Por lo que al despejar el valor de θ que hace posible minimizar ésta función de costo, obtenemos (2.15). Revisemos ahora, el concepto de excitación persistente.

Una señal $u(t)$ es llamada señal de excitación persistente de orden n si [15]

1. El siguiente límite existe:

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t+\tau)u^T(t)$$

2. La matriz

$$R_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & r_u(2-n) & \dots & r_u(0) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

es positiva definida.

Una forma alternativa para definir la excitación persistente de orden n es que si para todo tiempo t existe un entero m tal que

$$\varrho_1 I > \sum_{k=t}^{t+m} \varphi(k)\varphi^T(k) > \varrho_2 I \quad (2.17)$$

en donde $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ y el vector $\varphi(t)$ está dado por

$$\varphi(t) = (u^T(t-1) \dots u^T(t-n))^T$$

Note que la matriz (2.16) puede ser escrita como

$$R_u(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t)$$

La ecuación (2.17) puede ser re escrita para un proceso del tipo de la ecuación (2.14) como

$$\varrho_1 I > \int_0^t \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau > \varrho_2 I \quad (2.18)$$

3. OBSERVADOR

La robustez y tiempo finito de convergencia del algoritmo *supertwisting* son características que pueden ser aprovechadas para realizar un observador.

En este capítulo, modificando la estructura del algoritmo de control *supertwisting*, es desarrollado un observador de estados para sistemas mecánicos de segundo orden, el cual garantiza tiempo finito de convergencia del error de estimación a cero, y por lo tanto una convergencia en tiempo finito de los valores de los estados estimados a los valores reales de los estados.

Partiendo del modelo matemático de un sistema mecánico de segundo orden, se establecerán las características que deberá cumplir el sistema considerado para la aplicación del observador. Una vez establecido el sistema, se aplicará la parte no lineal del algoritmo *supertwisting* para garantizar la convergencia del error de estimación a cero.

3.1. Planteamiento del problema

Considere el modelo escalar general de un sistema mecánico de segundo orden, de la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + P(\dot{q}) + G(q) + \Delta(t, q, \dot{q}) = \tau \quad (3.1)$$

En donde el término $M(q)$ corresponde a la inercia del sistema, $C(q, \dot{q})$ corresponde al término de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $P(\dot{q})$ es el término de fricción de Coulomb dado por $P(\dot{q}) = P_0 \text{sign}(\dot{q})$, $G(q)$ es el término de fuerza gravitacional, $\Delta(t, q, \dot{q})$ es un término que conjunta incertidumbres y perturbaciones, y τ es el torque producido por los actuadores. Note que el término $M(q)$, en un sistema mecánico, siempre existe y es positivo, por lo que su inversa $M(q)^{-1}$ existe.

Introduciendo las variables $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $u = \tau$, el modelo (3.1) puede ser escrito en el espacio de estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(t, x_1, x_2, u) + \xi(t, x_1, x_2), \quad u = U(t, x_1, x_2), \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

en donde $f(t, x_1, x_2, u) = -M^{-1}(x_1)[C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) - u]$ y $\xi(t, x_1, x_2) = -M^{-1}(x_1)(P(x_2) + \Delta(t, x_1, x_2))$.

Considere que

1. Los estados x_1 , x_2 , las perturbaciones ξ y las entradas del sistema u están acotados.
2. Las aceleraciones (\dot{x}_2) del sistema mecánico están acotadas.
3. Que (3.2) es BIBS (por sus siglas en inglés Boundary Input Boundary State, es decir, acotado entrada estado) estable [9], es decir, ante cualquier valor de entrada acotada u , el sistema mantendrá sus estados x_1 y x_2 acotados.
4. Que el sistema (3.2) tiene una solución única en el lado derecho de la ecuación en el sentido de Filippov [6].

La tarea será estimar la velocidad ($\frac{dq}{dt} = \dot{q}$) del sistema original, la cuál, en el modelo (3.2), está dada por el estado x_2 , con la medición únicamente de la posición (q), en el ejemplo, el estado x_1 . Aunque un observador clásico o un diferenciador podrían ser utilizados aquí, la discontinuidad del efecto de fricción de Coulomb y la posibilidad del uso de algún algoritmo de control discontinuo para controlar el comportamiento del sistema podría provocar un mal funcionamiento de los métodos clásicos. El diferenciador estándar basado en modos deslizantes de segundo orden [10] puede ser aplicado al problema de estimar el estado x_2 . El reto es construir un observador de estados que reduzca la magnitud de las ganancias del mismo, basado en el conocimiento parcial o total del modelo matemático del sistema.

3.2. Diseño del Observador en Tiempo Continuo

Se propone el siguiente observador basados en el algoritmo super-twisting [3], [4]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + z_2\end{aligned}\quad (3.3)$$

En donde \hat{x}_1 y \hat{x}_2 son las estimaciones de los estados, z_1 y z_2 son los factores de corrección tomados del algoritmo super-twisting y dados por las formulas

$$\begin{cases} z_1 = \lambda |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ z_2 = \alpha \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1). \end{cases}\quad (3.4)$$

Asuma que los estados del sistema se encuentran acotados, entonces es posible garantizar la existencia de una constante f^+ tal que

$$|f(t, x_1, x_2, U(t, x_1, x_2)) - f(t, x_1, \hat{x}_2, U(t, x_1, x_2)) + \xi(t, x_1, x_2)| \leq f^+ \quad (3.5)$$

para cualquier valor posible de t, x_1, x_2 y $|\hat{x}_2| \leq 2 \sup x_2$. La anterior suposición puede cumplirse, por ejemplo, si el sistema es entrada-estado acotado y tanto la señal de control u como las perturbaciones son acotadas. En algunos casos, la constante f^+ puede conocerse a partir de alguna razón física, como por ejemplo, si es conocida a priori la máxima aceleración posible del sistema.

Sean α y λ tales que satisfagan las ecuaciones:

$$\lambda > \sqrt{\frac{\alpha > f^+}{\alpha - f^+} \frac{(\alpha + f^+)(1+q)}{(1-q)}} \quad (3.6)$$

en donde q es alguna constante tal que $0 < q < 1$.

Haciendo $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ se pueden escribir las ecuaciones de los errores de estimación:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \lambda |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= g(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1)\end{aligned}\quad (3.7)$$

En donde $g(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) = f(t, x_1, x_2, u) - f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \xi(t, x_1, x_2)$.

A partir del planteamiento anterior se puede proponer un teorema:

Teorema 1: *El observador (3.3), (3.4) para el sistema (3.2) asegura la convergencia en tiempo finito de las estimaciones de los estados a los valores reales de éstos, i.e. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \rightarrow (x_1, x_2)$.*

Prueba Probar la convergencia de los estados estimados a los reales, equivale a probar primero la convergencia de \tilde{x}_1 y $\dot{\tilde{x}}_1$ a cero. Obviamente \tilde{x}_1 y \tilde{x}_2 satisfacen la inclusión diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \lambda |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &\in [-f^+, +f^+] - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

De aquí en adelante todas las inclusiones diferenciales serán consideradas en el sentido de Filippov, es decir que el lado derecho es aumentado en algunos puntos para satisfacer la propiedad de semicontinuidad [6], en particular la inclusión (3.8) se convierte en $\dot{\tilde{x}}_2 \in [-\alpha - f^+, \alpha + f^+]$ con $\tilde{x}_1 = 0$. Calculando la derivada de $\dot{\tilde{x}}_1$ se tiene

$$\ddot{\tilde{x}}_1 = g(t, x_1, x_2, \tilde{x}_2, u) - \frac{\lambda}{2} \dot{\tilde{x}}_1 |\tilde{x}_1|^{-1/2} - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1). \quad (3.9)$$

La identidad trivial $\frac{d}{dt}|x| = \dot{x} \text{sign} x$ es usada aquí. La última ecuación puede ser re escrita como

$$\ddot{\tilde{x}}_1 \in [-f^+, f^+] - \left(\frac{1}{2} \lambda \frac{\dot{\tilde{x}}_1}{|\tilde{x}_1|^{1/2}} + \alpha \text{sign} \tilde{x}_1 \right) \quad (3.10)$$

La inclusión (3.10) no “recuerda” nada del sistema original, pero puede ser usada para describir la curva mayorante, dibujada en la Figura 3.1. En el caso en el cual $\tilde{x}_1 > 0$ y $\dot{\tilde{x}}_1 > 0$ la trayectoria está confinada entre el eje $\tilde{x}_1 = 0$, $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ y la trayectoria descrita por la ecuación $\ddot{\tilde{x}}_1 = -(\alpha - f^+)$, vea Figura 3.1 línea (a). Nombremos \tilde{x}_{1M} la intersección de esta curva con el eje $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$. Obviamente, $2(\alpha - f^+) \tilde{x}_{1M} = \dot{\tilde{x}}_{10}^2$, en donde $\dot{\tilde{x}}_{10}$ representa el cruce de la trayectoria por el eje $\tilde{x}_1 = 0$. Es fácil de ver que para $\tilde{x}_1 > 0$, $\dot{\tilde{x}}_1 > 0$

$$\ddot{\tilde{x}}_1 \leq f^+ - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1) - \frac{1}{2} \lambda \frac{\dot{\tilde{x}}_1}{|\tilde{x}_1|^{1/2}} < 0.$$

Entonces la trayectoria se aproxima al eje $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$.

La curva mayorante en el caso cuando $\tilde{x}_1 > 0$, $\dot{\tilde{x}}_1 \geq 0$ es descrita por la ecuación (see Fig. 3.1)

$$\dot{\tilde{x}}_1^2 = 2(\alpha - f^+)(\tilde{x}_{1M} - \tilde{x}_1) \quad \text{para} \quad \dot{\tilde{x}}_1 > 0$$

La curva mayorante para $\tilde{x}_1 > 0, \dot{\tilde{x}}_1 \leq 0$ está compuesta de dos partes. En la primera parte la trayectoria cae instantáneamente desde el punto $(\tilde{x}_{1M}, 0)$ hasta el punto $(\tilde{x}_{1M}, -\frac{2}{\lambda}(f^+ + \alpha)\tilde{x}_{1M}^{1/2})$, en donde el lado derecho de la inclusión diferencial (3.10) en 'el peor caso' es igual a cero, vea Figura 3.1 línea (b). La segunda parte de la curva mayorante es el segmento horizontal entre los puntos $(\tilde{x}_{1M}, -\frac{2}{\lambda}(f^+ + \alpha)\tilde{x}_{1M}^{1/2}) = (\tilde{x}_{1M}, \dot{\tilde{x}}_{1M})$ y $(0, \dot{\tilde{x}}_{1M})$, vea Figura 3.1 línea (c).

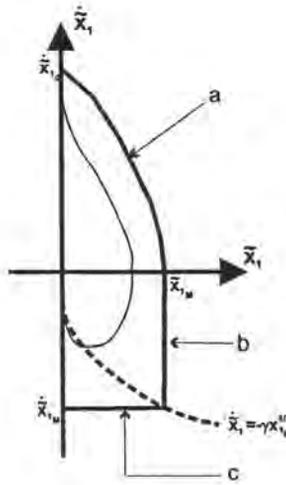


Fig. 3.1: Curva mayorante para el observador de tiempo finito de convergencia

Al comparar los arcos de curva obtenidos para $\dot{\tilde{x}}_1 > 0$ y $\dot{\tilde{x}}_1 < 0$, es posible determinar si la trayectoria descrita por el error de observación se aproxima al origen, por lo que

$$\frac{|\dot{\tilde{x}}_{1M}|}{|\dot{\tilde{x}}_{10}|} = \frac{|2(f^+ + \alpha)x_{1M}^{1/2}|}{|\lambda\sqrt{2(\alpha - f^+)x_{1M}^{1/2}}|} \quad (3.11)$$

Note que primer y tercer cuadrantes son simétricos, así como segundo y cuarto cuadrantes, por lo que para cada cruce de la trayectoria con el eje $\tilde{x}_1 = 0$ en el primer y tercer cuadrante $\dot{\tilde{x}}_{10i}$ y los sucesivos cruces de la trayectoria en el segundo y cuarto cuadrante $\dot{\tilde{x}}_{1Mi}$, al ocupar el valor propuesto para λ

dado en (3.6) las trayectorias decrecerán de forma que

$$\frac{|\dot{\tilde{x}}_{1M_i}|}{|\dot{\tilde{x}}_{10_i}|} < \frac{1-q}{1+q} < 1.$$

para cada cruce de las trayectorias por el eje $\tilde{x}_1 = 0$. Al realizar la sumatoria para todas las $\dot{\tilde{x}}_{1M_i}$, en donde $\dot{\tilde{x}}_{1M_i}$ es el arco descrito entre cada i -ésimo cruce por el eje $\tilde{x}_1 = 0$, se tiene que la sumatoria $\sum_0^\infty |\dot{\tilde{x}}_{1i}|$ estará regida por una serie geométrica de índice menor a uno, por lo que se podrá asegurar su convergencia a cero. Esto último nos permite asegurar la convergencia del error de estimación del estado $(\tilde{x}_1, \dot{\tilde{x}}_1)$ a $\tilde{x}_1 = \dot{\tilde{x}}_1 = 0$.

Para probar el tiempo finito de convergencia considere la dinámica de \tilde{x}_2 . Obviamente, $\tilde{x}_2 = \dot{\tilde{x}}_1$ en el momento en que $\tilde{x}_1 = 0$ y tomando en cuenta que

$$\dot{\tilde{x}}_2 = g(x_1, x_2, \hat{x}_2, u) - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1)$$

obtenemos que

$$0 < \alpha - f^+ \leq |\dot{\tilde{x}}_2| \leq \alpha + f^+$$

se cumple en una pequeña vecindad del origen. Entonces

$$|\dot{\tilde{x}}_{1i}| \geq (\alpha - f^+)t_i,$$

en donde t_i es el intervalo de tiempo entre las intersecciones sucesivas de la trayectoria con el eje $\tilde{x}_1 = 0$ y \tilde{x}_{1i} es la trayectoria descrita por el sistema en dicho intervalo. Así

$$t_i \leq \frac{|\dot{\tilde{x}}_{1i}|}{(\alpha - f^+)}$$

será el tiempo transcurrido entre cruces con el eje $\tilde{x}_1 = 0$ y el tiempo total de convergencia está dado por la sumatoria

$$T \leq \sum \frac{|\dot{\tilde{x}}_{1i}|}{(\alpha - f^+)}$$

Dado que se ha probado con anterioridad que $\sum |\dot{\tilde{x}}_{1i}|$ es convergente, entonces T es finito y por ello el error de estimación convergerá en tiempo finito a cero, por lo tanto los valores estimados de los estados convergerán a los valores reales de los estados en tiempo finito.

La prueba se encuentra basada en la desigualdad (3.5). Como consecuencia de ésta consideración, la elección de f^+ suficientemente grande deberá realizarse considerando a $|\hat{x}_2| \leq |x_2(t_0)|$, en donde t_0 es el tiempo inicial. Esto implica que $|\hat{x}_2| \leq |\hat{x}_2(t_0)| + |x_2| \leq 2 \sup |x_2|$. En consecuencia, la forma sugerida de escoger f^+ es válida.

Observación 1. Otra forma de elegir los parámetros α y λ del observador es hacer $\alpha = a_1 f^+$ y $\lambda = a_2 (f^+)^{1/2}$, con $a_1 > 1$ y haciendo a_2 tal que satisface

$$a_2 > \frac{2(1 + a_1)}{\sqrt{2(a_1 - 1)}}$$

La elección de $\alpha = a_1 f^+$ cumple la condición $\alpha > f^+$, por lo que la prueba de convergencia seguirá siendo válida, por otro lado si sustituimos el valor propuesto $\lambda = a_2 (f^+)^{1/2}$ en la ecuación (3.11), se tiene que

$$\frac{|\dot{\hat{x}}_{1M}|}{|\dot{\hat{x}}_{10}|} = \frac{|2(1 + a_1)|}{|a_2 \sqrt{2(a_1 - 1)}|}$$

y con la elección propuesta de a_1 y a_2 se cumple

$$\frac{|\dot{\hat{x}}_{1M}|}{|\dot{\hat{x}}_{10}|} < 1$$

por lo que se garantiza la convergencia del error de estimación a cero.

La convergencia en tiempo finito del observador nos permite diseñar separadamente el observador, del sistema de control de la planta. El observador podrá ser diseñado de tal forma que en tiempo finito no agregará una dinámica a la ya existente de la planta. El único requerimiento para la implementación del observador será que la función $g(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u)$ sea acotada.

3.3. Diseño del Observador en Tiempo Discreto

El análisis anterior es válido como una versión ideal del observador. En la realidad la implementación del observador se realiza normalmente mediante dispositivos digitales, los cuáles requieren de un muestreo de las señales, dando lugar a una versión del observador en medidas discretas.

Considere que las señales f , x , z_1 , z_2 son medidas en intervalos de tiempo discretos, siendo el intervalo de muestreo δ , y sean t_i, t_{i+1} sucesivas medidas de tiempo y sea el tiempo actual $t \in [t_i, t_{i+1})$. Como resultado de lo anterior, considere el algoritmo del observador modificado:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2(t_i) + z_1(t_i) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t_i, x_1(t_i), \hat{x}_2(t_i), u(t_i)) + z_2(t_i)\end{aligned}\quad (3.12)$$

en donde $\hat{x}_1(t_i)$, $\hat{x}_2(t_i)$ son los estados estimados, $\dot{\hat{x}}_1, \dot{\hat{x}}_2$ son aproximaciones discretas en tiempos sucesivos t_i dadas por $\dot{\hat{x}}_1 = (\hat{x}_{1t_{i+1}} - \hat{x}_{1t_i})/\delta$, $\dot{\hat{x}}_2 = (\hat{x}_{2t_{i+1}} - \hat{x}_{2t_i})/\delta$ y $z_1(t_i)$, $z_2(t_i)$ son los factores de corrección del error de estimación dados por:

$$\begin{cases} z_1(t_i) = \lambda |x_1(t_i) - \hat{x}_1(t_i)|^{1/2} \text{sign}(x_1(t_i) - \hat{x}_1(t_i)) \\ z_2(t_i) = \alpha \text{sign}(x_1(t_i) - \hat{x}_1(t_i)). \end{cases}\quad (3.13)$$

Sean $\tilde{x}_1(t_i) = x_1(t_i) - \hat{x}_1(t_i)$, $\tilde{x}_2(t_i) = x_2(t_i) - \hat{x}_2(t_i)$ los errores de estimación de x_1 y x_2 en el tiempo t_i . Las ecuaciones que representan la dinámica del error de estimación están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2(t_i) - \lambda |\tilde{x}_1(t_i)|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1(t_i)) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= g(t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), \hat{x}_2(t_i), u(t_i)) - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1(t_i))\end{aligned}\quad (3.14)$$

Teorema 2: *El algoritmo de observación (3.12), (3.13) asegura la convergencia de los errores de estimación (3.14) a las regiones acotadas $|\tilde{x}_1| \leq \gamma_1 \delta^2$, $|\tilde{x}_2| \leq \gamma_2 \delta$ con algunas constantes γ_1, γ_2 dependientes de los parámetros del observador.*

Prueba Considere al sistema medido en intervalos de tiempo discreto con intervalos de tiempo δ y $t \in [t_i, t_{i+1})$ en donde t_i, t_{i+1} son sucesivas medidas de tiempo y t es el tiempo actual.

Con δ igual a cero, la dinámica del error (3.14) coincide con (3.7), cuya trayectoria converge en tiempo finito en el origen. Es fácil de ver, que lo anterior implica la existencia de un conjunto invariante acotado que atrae todas las trayectorias del sistema (3.14) en tiempo finito con una δ pequeña.

Aplicando el cambio de coordenadas $\Phi = \tilde{x}_1/\lambda^2$ and $\Psi = \tilde{x}_2/\lambda^2$, el conjunto de atracción de

$$\dot{\Phi} = \Psi - |\Phi|^{1/2} \text{sign}(\Phi)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{1}{\lambda^2}[\alpha - f^+, \alpha + f^+] \text{sign}(\Phi)$$

está dado por $|\Phi| \leq k_1$, $|\Psi| \leq k_2$.

Aplicando ahora, el operador G_η formado por una combinación de un cambio de coordenadas homogéneo $G_\eta : (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \rightarrow (\eta^2 \bar{x}_1, \eta \bar{x}_2)$ y la transformación del tiempo $t \rightarrow \eta t$ con $\eta = \delta$ se tiene

$$\dot{\Phi} = \delta \Psi - |\delta^2 \Phi|^{1/2} \text{sign}(\delta^2 \Phi),$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{1}{\lambda^2}[\alpha - f^+, \alpha + f^+] \text{sign}(\delta^2 \Phi).$$

En consecuencia los conjuntos de atracción serán tales que $|\Phi| \leq k_1 \delta^2$, $|\Psi| \leq k_2 \delta$ y después de la transformación de coordenadas se obtiene $|\bar{x}_1| \leq \lambda^2 k_1 \delta^2$ y $|\bar{x}_2| \leq \lambda^2 k_2 \delta$.

3.4. Caso vectorial

El análisis llevado en las secciones anteriores es válido para el caso escalar, sin embargo es posible extenderlo fácilmente para el caso vectorial.

Considere el modelo general (3.1) en su forma vectorial

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + P(\dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) + \Delta(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.15)$$

en donde $\mathbf{q} \in R^n$ es un vector de coordenadas generalizadas, $M(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $P(\dot{\mathbf{q}})$ es el término de fricción de Coulomb que puede contener términos relevados dependientes de $\dot{\mathbf{q}}$, $G(\mathbf{q})$ es el término de fuerzas gravitacionales, $\Delta(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es un término desconocido y $\boldsymbol{\tau}$ es el torque producido por los actuadores. Note que $M(\mathbf{q})$ es una matriz invertible siempre, debido a que $M(\mathbf{q}) = M^T(\mathbf{q})$ es estrictamente positiva definida.

Introduciendo las variables $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, $u = \boldsymbol{\tau}$, el modelo (3.15) puede ser escrito en la forma de espacio de estados como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u) + \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ y &= \mathbf{x}_1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

en donde $f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u) = -M^{-1}(\mathbf{x}_1)[C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + G(\mathbf{x}_1) - u]$ y $\xi(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -M^{-1}(\mathbf{x}_1)(P(\mathbf{x}_2) + \Delta(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$. Suponga que ξ y u son acotadas y que el sistema (3.16) tiene una única solución en el sentido de Filippov [6].

El modelo en variables de estado (3.16) puede ser agrupado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1_1} &= x_{2_1}, \\ \dot{x}_{1_i} &= f_i(x_{1_1}, \dots, x_{1_n}, x_{2_1}, \dots, x_{2_n}, u) + \xi_i(x_{1_1}, \dots, x_{1_n}, x_{2_1}, \dots, x_{2_n}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{1_n} &= x_{2_n}, \\ \dot{x}_{1_n} &= f_n(x_{1_1}, \dots, x_{1_n}, x_{2_1}, \dots, x_{2_n}, u) + \xi_n(x_{1_1}, \dots, x_{1_n}, x_{2_1}, \dots, x_{2_n}) \end{aligned}$$

en donde todas las funciones f_1, \dots, f_n y ξ_1, \dots, ξ_n son acotadas, con cotas $f_1(\cdot) + \xi_1(\cdot) < f_1^+, \dots, f_n(\cdot) + \xi_n(\cdot) < f_n^+$ por lo que es posible construir un observador para los estados x_{2_i} ,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{1_i} &= \hat{x}_{2_i} + \lambda_i |\tilde{x}_{1_i}|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_{1_i}), \\ \dot{\hat{x}}_{2_i} &= f_i(t, x_{1_1}, \dots, x_{1_n}, \hat{x}_{2_1}, \dots, \hat{x}_{2_n}, u) + \alpha_i \text{sign}(\tilde{x}_{1_i}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

en donde $i = 1, \dots, n$, los parámetros α_i y λ_i pueden ser ajustados con base en las cotas f_i^+ como

$$\lambda_i > \sqrt{\frac{\alpha_i > f_i^+}{\frac{2}{\alpha - f_i^+} \frac{(\alpha + f_i^+)(1 + q_i)}{(1 - q_i)}}} \quad (3.18)$$

en donde $0 < q_i < 1$, de tal forma que para cada par de coordenadas x_{1_i}, x_{2_i} pueden ser ajustados los parámetros del observador de tal forma que se garantiza la convergencia del error de estimación de cada pareja de estados a cero en tiempo finito, como es demostrado anteriormente.

4. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y PERTURBACIONES

La convergencia de x_2 en tiempo finito garantiza que la igualdad

$$\dot{\hat{x}}_2 = g(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) - z_2 = 0$$

se satisface después de un lapso de tiempo. Entonces

$$z_2 = f(t, x_1, x_2, u) - f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \xi(t, x_1, x_2) \quad (4.1)$$

Se asume aquí, que el término z_2 tiene componentes de alta frecuencia, teóricamente infinita. Sin embargo, en la realidad, distintos tipos de incertidumbres hacen que las oscilaciones se lleven a cabo en una vecindad de las intersecciones de las superficies de conmutación, y las componentes de z_2 son conmutadas a una frecuencia finita, no obstante, éstas oscilaciones están integradas por componentes de alta y baja frecuencia.

El término de alta frecuencia de z_2 es eliminado mediante filtrado, y el movimiento en el modo deslizante es determinado por la componente de baja frecuencia [18]. Es razonable asumir que el control equivalente es cercano a la componente de baja frecuencia, la cuál puede ser obtenida de filtrar la alta frecuencia mediante un filtro paso bajas.

La constante de tiempo del filtro debe ser lo suficientemente pequeña para preservar la componente "lenta" sin ser filtrada, pero lo suficientemente grande como para poder eliminar la componente de alta frecuencia de la señal.

Entonces las condiciones $\tau \rightarrow 0$ en donde τ es la constante de tiempo del filtro, y $\delta/\tau \rightarrow 0$, en donde δ es el intervalo de muestreo, deben ser satisfechas

para poder extraer la componente de baja frecuencia, que será igual al control equivalente, y filtrar la componente de alta frecuencia.

4.1. Identificación de Perturbaciones

En orden de resolver el problema de identificación de parámetros y perturbaciones, el sistema (3.2) puede ser re escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a\varphi(t, x_1, x_2, u) + \xi\end{aligned}$$

en donde a es un vector de parámetros, $\varphi(t, x_1, x_2, u)$ es un vector de funciones conocidas de (x_1, x_2, t, u) i.e. todas las funciones de los estados en el sistema mecánico, y ξ es un término correspondiente a las perturbaciones. Introduciendo la nueva notación, el observador basado en el algoritmo de super-twisting se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda|\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \bar{a}\varphi(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1)\end{aligned}$$

en donde \bar{a} es un vector compuesto por los valores nominales del vector a .

La convergencia en tiempo finito de x_1 y x_2 permite escribir la ecuación (4.1) en la forma:

$$\bar{z}_2 = \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1) = \Delta a\varphi(t, x_1, x_2, u) + \xi$$

en donde $\Delta a = a - \bar{a}$, $\varphi(t, x_1, x_2, u)$ es un vector no lineal que contiene todas las funciones de los estados y \bar{z}_2 es la versión filtrada de z_2 .

Cuando las incertidumbres y las perturbaciones se encuentran presentes simultáneamente en el sistema, \bar{z}_2 nos da una estimación de la suma de ambas.

Es posible identificar las perturbaciones externas o las incertidumbres, si solo alguna de ellas está presente en el sistema.

Cuando los parámetros del sistema son totalmente conocidos, el término $\Delta a = 0$, y por lo tanto

$$\bar{z}_2 = \xi \tag{4.2}$$

la perturbación del sistema es identificada como la componente de baja frecuencia ("lenta") del control equivalente z_2 .

4.2. Identificación de Parámetros

Para el caso cuando $\xi = 0$ y solamente valores nominales de los parámetros son conocidos, el valor de \bar{z}_2 está dado por

$$\bar{z}_2 = \Delta a \varphi(t, x_1, x_2, u) \quad (4.3)$$

note que el valor de \bar{z}_2 es un escalar, y en muchos casos la incertidumbre paramétrica está dada por un vector, si éste es el caso, es posible recurrir a un algoritmo de identificación paramétrica.

La estructura del modelo de regresión lineal [15] puede ser escrita como

$$h(t) = \theta \varphi(t) \quad (4.4)$$

en donde $h(t)$ es una cantidad medible, $\varphi(t)$ es un n -vector de cantidades también medibles y θ es un n -vector de parámetros desconocidos.

La aplicación de métodos lineales de regresión como el método de los mínimos cuadrados para identificar sistemas dinámicos, se encuentra condicionado a la posibilidad de poder medir las derivadas de los estados (el vector $h(t)$ para el modelo general de regresión lineal), condición que no se satisface en muchos casos.

El uso de la ecuación (4.3) permite obtener la estructura del modelo general de regresión, dado en (4.4), necesario para aplicar algún algoritmo de regresión lineal, que puede ser empleado por ejemplo para reconstruir las incertidumbres en los parámetros Δa , y mediante éste conocimiento determinar el valor real de los parámetros del sistema.

Considerando el caso en el que Δa es un vector de valores constantes, e introduciendo la variable auxiliar σ para llevar a cabo la integración en tiempo, los valores promedio de la ecuación 4.3 están dados por

$$\frac{1}{t} \int_0^t \bar{z}_2(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma = \Delta a \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \quad (4.5)$$

por lo tanto, los parámetros pueden ser estimados como

$$\widehat{\Delta a} = \left[\int_0^t \bar{z}_2(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \right] \left[\int_0^t \varphi(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \right]^{-1} \quad (4.6)$$

en donde $\widehat{\Delta a}$ es la estimación de Δa .

Definiendo a $\Gamma_t = \left[\int_0^t \varphi(\sigma)\varphi(\sigma)^T d\sigma \right]^{-1}$ y utilizando las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\Gamma_t^{-1}\dot{\Gamma}_t &= I \\ \Gamma_t^{-1}\dot{\Gamma}_t + \dot{\Gamma}_t^{-1}\Gamma_t &= 0\end{aligned}$$

Un algoritmo para la identificación de parámetros, a partir del control equivalente del algoritmo del observador puede ser escrito, de la ecuación (4.6) se tiene

$$\dot{\widehat{\Delta a}} = \left[\int_0^t \bar{z}_2(\sigma)\varphi(\sigma)^T d\sigma \right] \dot{\Gamma}_t + \bar{z}_2\varphi^T\Gamma_t$$

utilizando la ecuación (4.5) se puede escribir

$$\dot{\widehat{\Delta a}} = \widehat{\Delta a}\Gamma_t^{-1}\dot{\Gamma}_t + \bar{z}_2\varphi^T\Gamma_t$$

usando las igualdades dadas anteriormente para Γ_t , la expresión dinámica para estimar Δa está dada por

$$\dot{\widehat{\Delta a}} = \left[-\widehat{\Delta a}\varphi + \bar{z}_2 \right] \varphi^T\Gamma_t \quad (4.7)$$

Una forma de encontrar Γ_t mediante una ecuación dinámica es

$$\dot{\Gamma}_t = -\Gamma_t\varphi\varphi^T\Gamma_t \quad (4.8)$$

El uso de las ecuaciones (4.7) y (4.8) asegura la convergencia asintótica de $\widehat{\Delta a}$ a Δa .

Con el objetivo de obtener la prueba de convergencia del método antes mencionado se puede describir a z_2 en la siguiente forma

$$z_2 = \bar{z}_2 + \varepsilon \quad (4.9)$$

en donde ε es la diferencia causada por la filtración y \bar{z}_2 es la versión filtrada de z_2 .

Los valores promedio de la z_2 real satisfacen

$$\int_0^t z_2(\sigma)\varphi(\sigma)^T d\sigma = \Delta a \int_0^t \varphi(\sigma)\varphi(\sigma)^T d\sigma$$

entonces

$$\Delta a = \left[\int_0^t z_2(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \right] \Gamma_t$$

substituyendo la ecuación (4.9), el valor real de Δa está dado por

$$\Delta a = \left[\int_0^t \bar{z}_2(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \right] \Gamma_t \quad (4.10)$$

Tomando en cuenta que $\bar{z}_2 = \widehat{\Delta} a \varphi$, la ecuación (4.10) es escrita como

$$\Delta a = \left[\widehat{\Delta} a \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \right] \Gamma_t$$

Que nos da la siguiente igualdad

$$\Delta a = \widehat{\Delta} a + \left[\int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \Gamma_t \quad (4.11)$$

Las condiciones de convergencia que se pueden deducir de la ecuación (4.11) son

- $\sup \|\Gamma_t\| < \infty$.
- $\frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

La primera condición requiere la no singularidad de la matriz $\Gamma_t^{-1} = \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma$, con el propósito de garantizar esta condición se introduce el término $0 < \rho \ll 1$, el cuál es una pequeña constante positiva, por lo que la integral se puede escribir como

$$\Gamma_t^{-1} = \int_0^t (\varphi(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma) + \rho I$$

en donde I es una matriz unitaria, en este caso el valor de Γ_t^{-1} será siempre no singular.

En la ecuación (4.8), el valor de ρ estará reflejado en el valor inicial de Γ , en éste caso

$$\Gamma_0 = \rho^{-1} I$$

Note que, la introducción de ρ asegura que la condición $\sup \|\Gamma_t\| < \infty$ se cumpla siempre, sin embargo, no asegura la convergencia de los parámetros

estimados a los parámetros reales. La convergencia de los valores estimados a los valores reales de Δa es asegurada mediante la condición de excitación persistente [15].

La segunda condición asegura que el proceso de filtrado de z_2 no repercute directamente en el valor de los parámetros estimados mediante el proceso de identificación.

El método propuesto permite estimar el valor real de Δa , de tal forma que, el valor real de los parámetros puede ser encontrado mediante $a = \bar{a} + \Delta a$.

5. SIMULACIONES

5.1. Observación de estados

Considere el siguiente sistema dinámico, correspondiente a un péndulo con fricción de Coulomb dado por la ecuación

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J}\tau - \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{V_s}{J}\dot{\theta} - \frac{P_s}{J}\text{sign}(\dot{\theta}) + v, \quad (5.1)$$

En donde los parámetros están dados por $M = 1.1[\text{Kg}]$, $g = 9.815[\text{m}/\text{s}^2]$, $L = 0.9[\text{m}]$, $J = ML^2 = 0.891[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$, $V_s = 0.18[(\text{Kg}\cdot\text{m}^2)/\text{s}^2]$, $P_s = 0.45[(\text{Kg}\cdot\text{m}^2)/\text{s}^2]$, sea v una perturbación externa, desconocida para el diseño del observador, de tal forma que $|v| \leq 1$. Para este ejemplo se consideró $v = 0.5 \sin 2t + 0.5 \cos 5t$. Considere que el péndulo es controlado por el controlador twisting

$$\tau = -30 \text{sign}(\theta - \theta_d) - 15 \text{sign}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d), \quad (5.2)$$

en donde $\theta_d = \sin t$ y $\dot{\theta}_d = \cos t$ son las señales de referencia. Introduciendo las variables $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ y re escribiendo la ecuación en la forma de espacio de estados se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}\tau - \frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{V_s}{J}x_2 - \frac{P_s}{J}\text{sign}(x_2) + v. \end{aligned}$$

Entonces, el observador propuesto en base a la (Observación 1), con $a_1 = 1.1$ y $a_2 = 9.5$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + 9.5(f^+)^{1/2}|\tilde{x}_1|^{1/2}\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J_n}\tau - \frac{g}{L_n}\sin x_1 - \frac{V_{sn}}{J_n}\hat{x}_2 + 1.1f^+\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1). \end{aligned}$$

en donde $M_n = 1[\text{Kg}]$, $L_n = 1[\text{m}]$, $J_n = M_n L_n^2 = 1[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$, $V_{sn} = 0.2[(\text{Kg}\cdot\text{m}^2)/\text{s}^2]$, $P_{sn} = 0.5[(\text{Kg}\cdot\text{m}^2)/\text{s}^2]$ son los valores nominales "conocidos" de los parámetros, y f^+ deberá ser propuesta.

Asuma que los parámetros reales difieren de los valores conocidos en no más de un 15%. Considere los valores iniciales del observador están dados por $\theta = x_1 = \hat{x}_1 = 0$ y $\dot{\theta} = x_2 = 1$, $\hat{x}_2 = 0$ cuando $t = 0$. Dado que θ se encuentra contenido en el conjunto de valores contenido entre 0 y 2π , se puede inferir que θ pertenece a un conjunto compacto (un anillo). En consecuencia el sistema dinámico (5.1) es entrada acotada - estado acotado estable (BIBS estable). Haciendo cálculos, es posible demostrar que el controlador propuesto garantiza $|\tau| \leq 45$, y que la desigualdad $|\dot{\theta}| \leq 70$ se cumple cuando los valores de los parámetros y sus máximas desviaciones son tomados en cuenta. Considere entonces, que una restricción física del sistema es $|x_2| \leq 70$, por lo que $|\hat{x}_2| \leq 140$ de donde es posible obtener $|F| = |\frac{1}{J}\tau - \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{V_2}{J}x_2 - \frac{P_2}{J} \text{sign}(x_2) + v - \frac{1}{J_n}\tau + \frac{g}{L_n} \sin x_1 + \frac{V_{2n}}{J_n}\hat{x}_2| < 26.1771 = f^+$, por lo que, con base en (3.6), son elegidos los valores de los parámetros $\alpha = 30$ y $\lambda = 11.7$. El desempeño del observador con los parámetros mencionados y un tiempo de muestreo $\delta = 0.00001$ se puede ver en la estimación de x_1 , dada en la figura 5.1, o lo que es mas importante, en la estimación de x_2 en la figura 5.2. Dadas las grandes cantidades consideradas para el diseño de las ganancias, el error de estimación es muy grande. Sin embargo, es posible mejorar el desempeño del observador utilizando los datos obtenidos en el experimento.

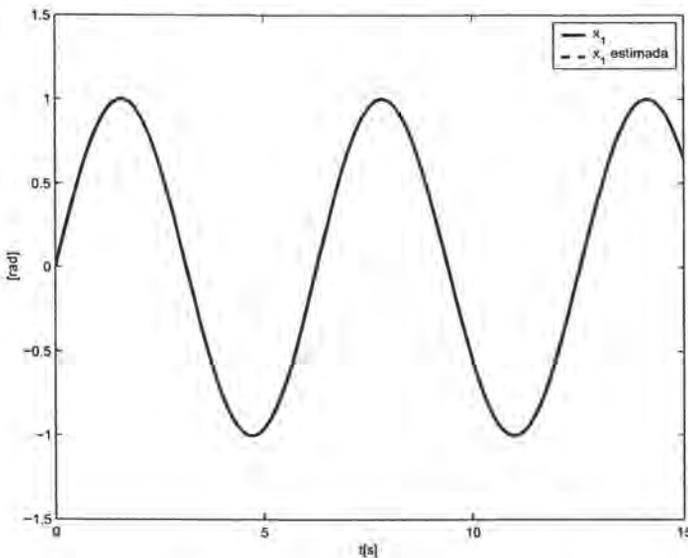
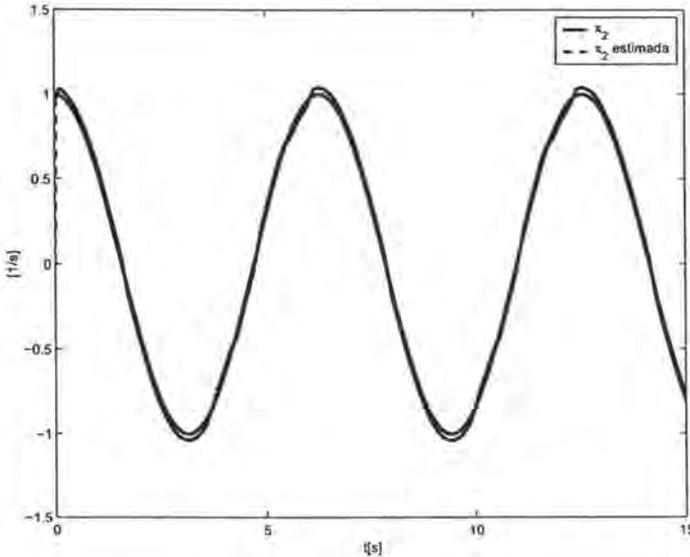


Fig. 5.1: x_1 y su estimada.

Fig. 5.2: x_2 y su estimada.

Es posible considerar ahora $|x_1| < 1.2$ y $|x_2| < 1.2$, re-calculando el valor de f^+ es posible fijarlo en el valor de $f^+ = 11.61$, por lo que los parámetros del observador, haciendo uso de la Observación 1, es posible proponerlos como $\alpha = 19.737$ y $\lambda = 15.7209$ con los valores de $a_1 = 1.7$ y $a_2 = 4.6138$ correspondientes. El desempeño del observador se muestra en las figuras 5.3 y 5.4. El tiempo finito de convergencia se muestra en las figuras 5.5 y 5.6. El detalle del error de estimación de la variable x_2 , debido al muestreo, puede apreciarse en la figura 5.7.

5.2. Identificación de parámetros

Para ilustrar la identificación paramétrica considere el caso en el que solo el parámetro de fricción seca es desconocido. Para este caso, también considere que no existen perturbaciones externas actuando sobre el sistema $v(t) = 0$. El observador puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + 4.5638(f^+)^{1/2}|\hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J}\tau - \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{V_2}{J}\hat{x}_2 - \frac{P_{3n}}{J} \text{sign}(\hat{x}_2) + 1.7f^+ \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

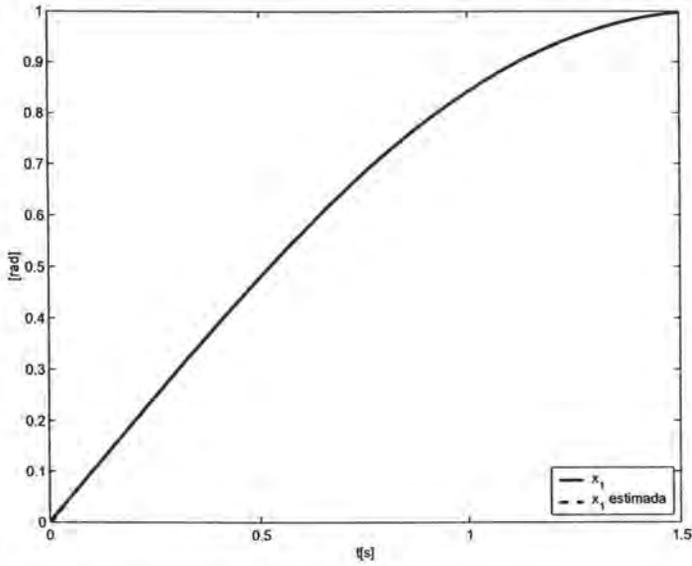


Fig. 5.3: x_1 y su estimada con el ajuste de parámetros del observador.

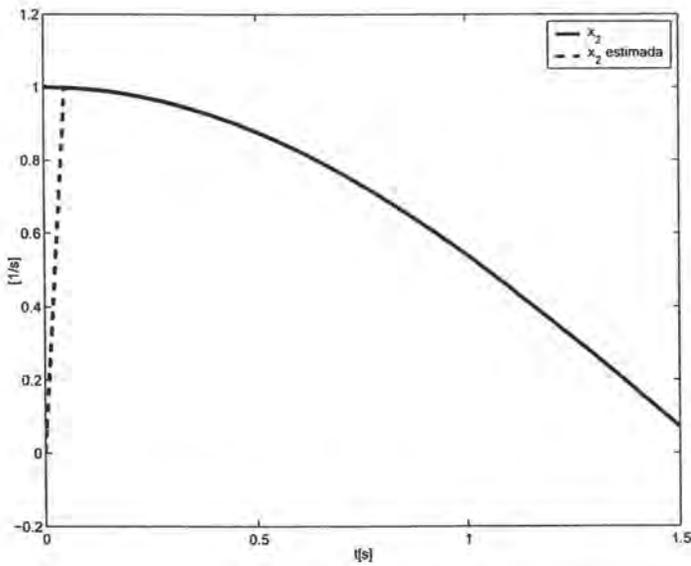


Fig. 5.4: x_2 y su estimada con el ajuste de parámetros del observador.

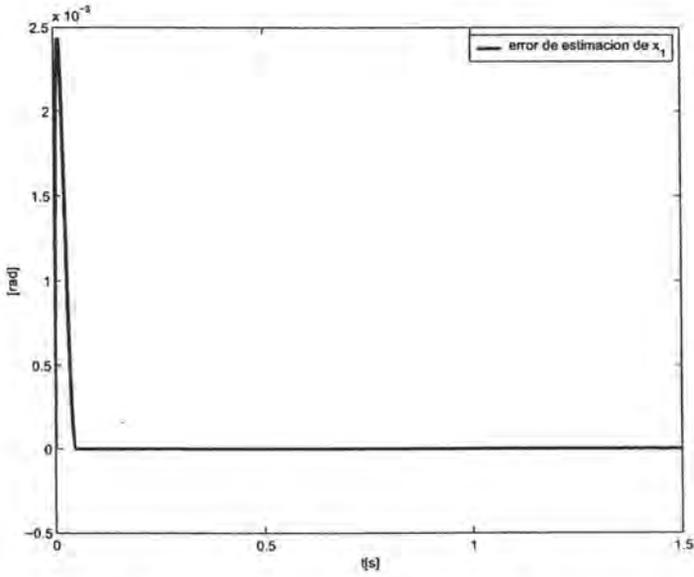


Fig. 5.5: Error de estimación de x_1 con el ajuste de parámetros del observador.

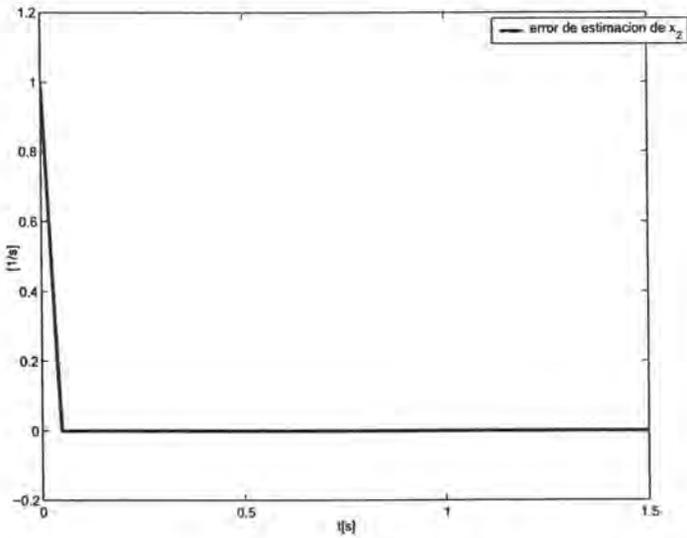


Fig. 5.6: Error de estimación de x_2 con el ajuste de parámetros del observador.

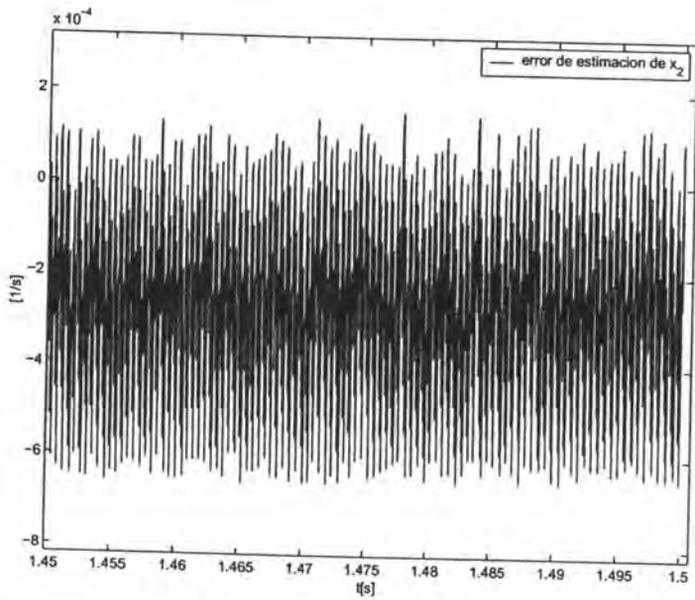


Fig. 5.7: Detalle del error de estimación de x_2 con el ajuste de parámetros del observador.

Note que los términos que dependen de τ y x_1 son totalmente conocidos, por lo que dichos términos no serán tomados en cuenta para encontrar la cota f^+ . Por lo que $f^+ = 0.3103$, utilizando los mismos valores del diseño del observador $\alpha = 19.737$ y $\lambda = 15.7209$ es posible determinar el tiempo de convergencia con estos parámetros en aproximadamente 0.1 segundos, por lo que aplicando el algoritmo de identificación dado por (4.7) y (4.8) a partir de dicho tiempo, la convergencia del algoritmo puede ser observada en la figura 5.8, y la correlación se muestra en la figura 5.9, la convergencia asintótica de $\Delta a \rightarrow 0.0561$ nos permite encontrar el verdadero valor de $\frac{P_s}{J}$ como $\frac{P_s}{J} = \frac{\bar{P}_s}{J} + \Delta a = 0.5051$.

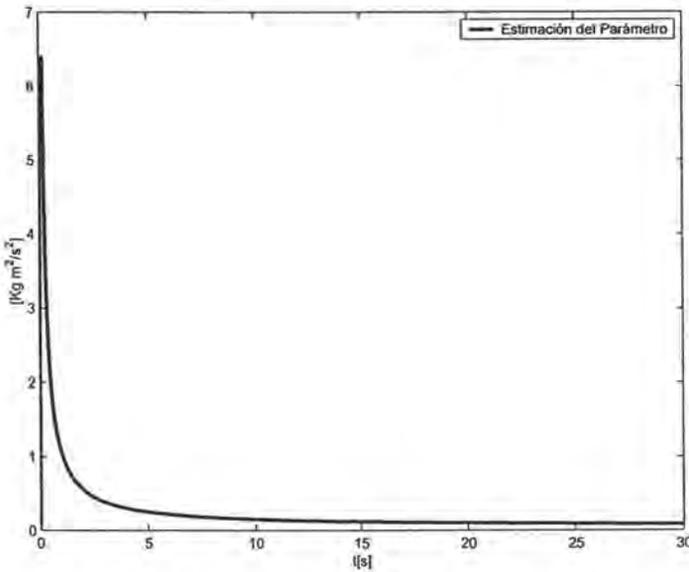


Fig. 5.8: Estimación del parámetro $\Delta \frac{P_s}{J}$

Considere el sistema perturbado (5.1), ahora todos los parámetros del sistema son bien conocidos, y el reto es identificar la perturbación externa que trabaja sobre el sistema. Utilizando los parámetros $\alpha = 19.737$ y $\lambda = 15.7209$, el observador de estados se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J} \tau - \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{V_s}{J} \hat{x}_2 - \frac{P_s}{J} \text{sign}(\hat{x}_2) + \alpha \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1).\end{aligned}$$

Este último observador, como ya se ha visto, garantiza la convergencia a cero

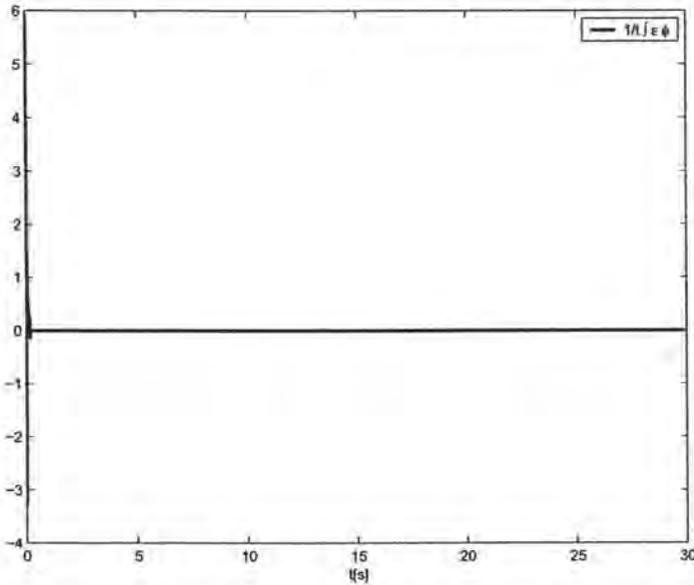


Fig. 5.9: Valor de $\frac{1}{t} \int \varepsilon(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma$.

del error de observación en tiempo finito, por lo que después de tiempo finito será posible identificar haciendo uso de (4.2), las perturbaciones que actúan sobre el sistema. En la figura 5.10 se puede observar la identificación de la perturbación $v = 0.5 \sin 2t + 0.5 \cos 5t$. Modificando la perturbación, considere ahora que $v(t)$ es una señal cuadrada de periodo 1 seg, la identificación de la señal discontinua puede verse en la figura 5.11.

La figura 5.11 muestra la buena estimación de la señal de perturbación, aún cuando ésta es discontinua.

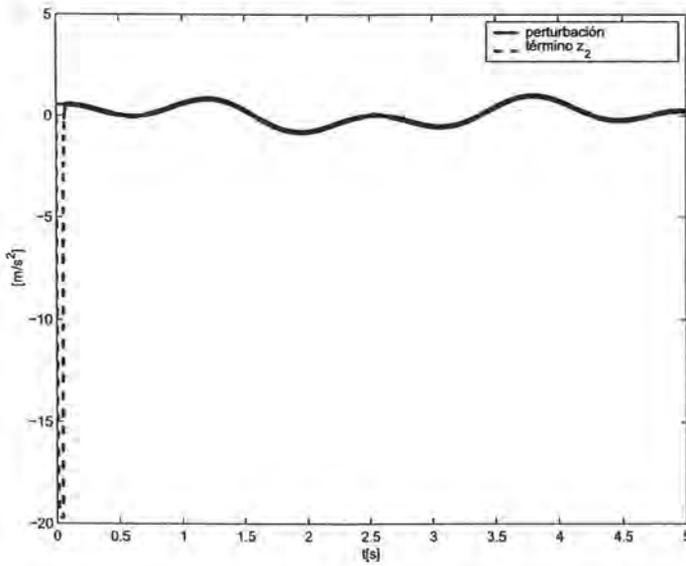


Fig. 5.10: Identificación de la perturbación con $v = 0.5 \sin 2t + 0.5 \cos 5t$.

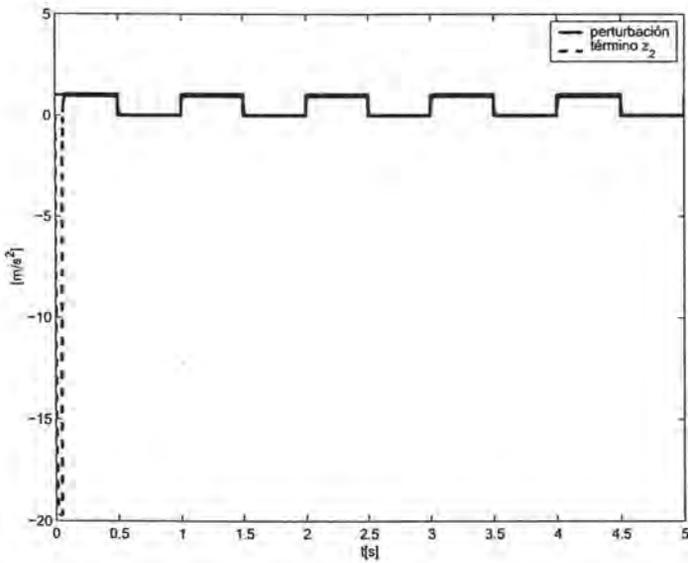


Fig. 5.11: Identificación de la perturbación con $v(t)$ como señal cuadrada.

6. CONCLUSIONES

El problema de observación de sistemas no lineales, y en su caso, de sistemas discontinuos ha sido abordado desde el punto de vista de los modos deslizantes de orden superior. Haciendo uso del algoritmo super-twisting de modos deslizantes de segundo orden, se diseñó un observador robusto ante incertidumbres paramétricas, incertidumbres en el modelo y perturbaciones externas, además de mejorar el desempeño de los diferenciadores por modos deslizantes dadas sus propiedades extras desprendidas de la utilización del modelo dentro de la estructura del algoritmo super-twisting.

Las principales características de los modos deslizantes, como tiempo finito de convergencia, su exactitud al seguimiento de señales e insensibilidad respecto a perturbaciones acotadas son aprovechadas para el diseño del observador, dando como resultado una herramienta robusta que permitirá su aplicación en amplia gama de problemas mecánicos. Su convergencia en tiempo finito permite aplicar el observador en cualquier sistema entrada-estado estable, ante cualquier tipo de control acotado, sin necesidad de probar la estabilidad del conjunto.

El problema de identificación paramétrica es complicado por la necesidad de obtener el modelo de regresión lineal a partir del modelo dinámico del sistema. El uso de la propiedad de control equivalente del observador permite encontrar de forma directa dicho modelo de regresión paramétrica permitiendo la aplicación de algún método de regresión lineal para identificar los parámetros reales incluso para términos discontinuos como el de fricción seca. Se muestra una versión en tiempo continuo del algoritmo de mínimos cuadrados dando las condiciones de convergencia del mismo para su aplicación con el observador.

Haciendo uso de esta misma propiedad de control equivalente es posible

identificar las perturbaciones externas que actúan sobre el sistema, siempre que éstas sean lo suficientemente lentas para no ser filtradas durante el proceso de obtención de control equivalente, sin embargo, aún así es posible identificar perturbaciones discontinuas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Alvarez, Y. Orlov, and L. Acho, An Invariance Principle for Discontinuous Dynamic Systems With Application to a Coulomb Friction Oscillator, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 122, 2000, pp 687-690.
- [2] A.N. Atassi, H.K. Khalil, 'Separation Results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs', *Automatica*, 39, 2000, pp 183-191.
- [3] J. Davila, L. Fridman, A. Levant, 'Observation and Identification of Mechanical Systems via Second Order Sliding Modes' presentado en *8th International Workshop on Variable Structure Systems*, Vilanova i la Geltru, España 6-8 Septiembre 2004.
- [4] J. Davila, L. Fridman, A. Levant, 'Second Order Sliding mode observer for mechanical systems with coulomb friction' presentado en *Congreso Anual de la Asociación de México de control Automático*, D.F., México, 20-22 Octubre 2004.
- [5] C. Edwards, S.K. Spurgeon, and R. G. Hebden 'On development and applications of sliding mode observers', In. J. Xu and Y. Xu. *Variable Structure Systems: Towards XXIst Century*, LNCIS, vol.274, Springer Verlag, 2002, pp.253-282.
- [6] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 1988.
- [7] L. Fridman , A. Levant. *Higher order sliding modes as the natural phenomena of control theory* .In: *Robust Control Variable Structure and Lyapunov Techniques*, F. Garafalo and G. Glielmo (Eds). Lecture Notes in Control and Information Science, 217, Springer Verlag, London, 1996

-
- [8] L. Fridman. 'An averaging approach to chattering', *Transactions on Automatic Control, IEEE*. Vol. 46 (8), 2001, pp 1260-1265.
- [9] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. New Jersey, USA:Prentice Hall, 2001.
- [10] A. Levant, 'Robust exact differentiation via sliding mode technique', *Automatica*, 34(3), 1998, pp 379-384.
- [11] A. Levant, 'Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control', *International Journal of Control*, vol. 58, 1993, pp 1247-1263.
- [12] A. Levant, L.Fridman. *Higher order sliding modes*. In: *Sliding Mode Control in Engineering*, W. Perruquetti, J. P. Barbot. (Eds). Marcel Dekker, New York, 2002.
- [13] A.S. Poznyak 'Stochastic output noise effects in sliding mode estimations'. *International Journal of Control*, vol. 76, 2003,pp. 986-999.
- [14] Y.B. Shtessel, I.A. Shkolnikov, MDJ. Brown , 'An asymptotic second-order smooth sliding mode control', *Asian Journal of Control*, 5(4), 2003, pp 498-504.
- [15] T. Soderstrom, P. Stoica, *System Identification*, Cambridge, Great Britain:Prentice Hall International; 1989.
- [16] V. Utkin, *Sliding Modes and their application in Variable Structure Systems*, Moscow, URSS:MIR; 1978.
- [17] V. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, London, UK:Springer-Verlag; 1992.
- [18] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, London, UK:Taylor & Francis; 1999.
- [19] V. Utkin *First Stage of VSS: People and Events*. In *Variable Structure Systems Toward 21st Century*. Xinghuo Yu, Jian-Xin Xu. World Scientific Publishing Company; 2001.
- [20] B. Xian, M.S. de Queiroz, D.M. Dawson, M.L. McIntyre, 'A discontinuous output feedback controller and velocity observer for nonlinear mechanical systems', *Automatica*, 40, 2004, pp 695-700.