UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ANALISIS DEL VALOR EN RIESGO DE LOS BONOS DE DESARROLLO DEL GOBIERNO FEDERAL".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

SANDRA CRISTINA RAMOS GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. AGUSTIN ROMAN AGUILAR

2005

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Sandra C. Ramos García
FECHA: Marzo 10, 2005
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Análisis del valor en riesgo de los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal

realizado por Sandra Cristina Ramos García

con número de cuenta 09531782 - 9, quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Agustín Román Aguilar	
Propietario	Mat. Adrián Girard Islas	Adrián Girard I
Propietario	Act. Mauricio Aguilar González	Mauricio Aguilar
Suplente	Dr. Arturo Lorenzo Valdés	
Suplente	Act. Martha Martínez Juárez	

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Agradezco a Dios, a mi familia y amigos,
su apoyo;
a Agustín Román, mi maestro y amigo,
todas sus enseñanzas;
y a Carlos, su enorme ayuda y su compañía.

Introduccion

Se sabe que la toma de riesgos forma parte integral de la actividad financiera, ya que existe una relación directa entre la exposición y toma de riesgos dentro del mercado financiero y las ganancias obtenidas en el mismo. Sin embargo, esto no significa que los participantes en esta actividad gusten de exponerse al riesgo. Durante los últimos años, dada la globalización de los mercados y la creciente volatilidad en las variables financieras que han incrementado el riesgo ya existente. Se ha desarrollado la llamada ingeniería financiera, que proporciona herramientas tanto de protección contra los riesgos financieros como de especulación con los mismos, con el fin de lograr mayores rendimientos. Así, desde la década de los 70 cada vez aparecen mas de estas herramientas, haciendo cada vez más sofisticado y necesario, el análisis de riesgos financieros.

Pero, ¿qué es el riesgo financiero? Algunos autores consideran el riesgo financiero como la posibilidad de pérdida en los rendimientos futuros de un activo, pero esto no es necesariamente cierto: las ganancias grandes, al igual que las pérdidas, representan fuentes de riesgo e ignorar esto puede ocasionar desastres. El desarrollo de los conocimientos y el análisis ha arrojado definiciones y conclusiones generalmente aceptadas como ésta, y es por ello que los participantes en la actividad, en busca de tener un riesgo moderado, sacrifican exhorbitantes ganancias a cambio de pequeñas y razonables pérdidas o bien, obtienen ventaja de una exposición precavida y bien analizada de dichos riesgos.

Es entonces que surge la llamada *administración de riesgos financieros.* Dada la imposibilidad para eliminar o controlar el riesgo, no existe más que la opción de lidiar con él y administrarlo, así se han desarrollado innumerables herramientas de administración de riesgos y una de las más empleadas, debido mayormente a su fácil interpretación, es el Valor en Riesgo (VaR por sus siglas en inglés).

Por otro lado, nuestro país ha entrado en una etapa de estabilidad financiera no vista desde hace más de 25 años. El grado de inversión otorgado a la Bolsa Mexicana de Valores en el año 2002 de parte de Standard & Poors le ha abierto un nuevo panorama al mercado financiero mexicano, y la posibilidad de crear una nueva cultura financiera. La mayor participación en el mercado hará necesaria la creación de nuevos productos y una mayor capacidad en el manejo de éstos de parte de los participantes en la actividad. En consecuencia, se ha vuelto necesario un mayor estudio y conocimiento de las herramientas que permitan la eficiencia en el manejo de los portafolios financieros, entre ellas la administración de riesgos.

Es el propósito del presente trabajo hacer un análisis del valor en riesgo (VaR) de instrumentos de tasa variable, usando para este fin el ejemplo de los BONDEST y BONDES 182(Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con cupones pagaderos trimestralmente y semestralmente, respectivamente), instrumentos de deuda con tasa revisable periódicamente. El cálculo del VaR en esta clase de instrumentos es un tema aun en desarrollo en nuestro país. Para este fin se tienen las series de precios y sobretasas diarias de los BONDEST y BONDES 182 del 2002 al 2004, asi como la de los Cetes91 y 182.

Esta tesis consta de tres partes: en la primera se presentará un marco teórico, con un primer capítulo dedicado a la historia y descripcion de los BONDES y otro dedicado al VaR y a algunas de las metodologías que se emplean para su cálculo. La segunda parte se refiere a la hipótesis, el entendimiento del problema y la motivación para analizarlo, así como el planteamiento del problema en términos matemáticos. En esta parte se valida la hipótesis planteada utilizando en el análisis dos metodologías para el cálculo de VaR y por último, en la tercera parte se darán las conclusiones y se hará una propuesta metodológica para el cálculo del VaR que es sensible a las diferencias entre los rendimientos de los Bondes con relación a los Cetes, las cuales deben existir de acuerdo a sus características propias.

Capítulo 1

Características de los BONDES

1.1. Historia

El decreto mediante el cual la Secretaría de Hacienda y Crédito Público fue autorizada a emitir Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES), apareció publicado en el Diario Oficial de la Federación del 22 de septiembre de 1987, mientras que la primera emisión se llevó a cabo el 13 de octubre del mismo año. Su emisor es el Gobierno Federal a través del Banco de México como agente exclusivo para colocación primaria.

Las primeras emisiones operaban BONDES con cupones revisables cada 28 y 91 días, lo cual cambió el 13 de marzo de 1998, cuando el Banco de México fue instruido por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para permutar los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal cuya tasa de interés estaba referida a la de los Certificados de la Tesorería de la Federación a plazo de 28 días (BONDES DE CORTO PLAZO) por Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago trimestral de intereses, protección contra la inflación y tasa de interés referida a la de los Certificados de la Tesorería de la Federación a plazo de 91 días (BONDES DE LARGO PLAZO). Desde entonces se operaron los BONDES con cupones revisables cada 91 (BONDEST) y 182 días (BONDES 182)[1]. Debido a las medidas adoptadas por el Gobierno Federal en el programa económico del ejercicio fiscal 2002, para julio de ese año desaparecieron las emisiones de BondesT, los cuales tenían un plazo de 3 años.[2] En la actualidad, los últimos BondesT se siguen operando y lo harán hasta su vencimiento.

Al final de junio de 2004 el monto total en circulación de los Bondes182 era de $287,059 millones de pesos y de BondesT de $20,461 millones de pesos.[3] A

[1] Con fundamento en los artículos 3°, fracción III, 8, 10 y 14 de la Ley del Banco de México, y en relación con el Oficio No. 305.-025/98 enviado por la SHCP.

[2] FUENTE: Banco de México. Anexos del Informe Anual 2002. Banxico. México, 2002

[3] FUENTE: Banco de México, Anexos Informe Anual 2002. Banxico. México, 2002

partir de este momento se hará referencia indistintamente como Bondes a ambos instrumentos, especificando su tipo sólo cuando sea necesario.

1.2. Características generales

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES) son títulos de crédito nominativos de largo plazo (se emiten a un plazo no inferior a un año), negociables y a cargo del Gobierno Federal, quien los mantiene en posición propia[4]. Los montos, rendimientos, plazos, las condiciones de colocación y amortización, así como las demás características específicas de las diversas emisiones, son determinadas por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, oyendo previamente la opinión del Banco de México. Hasta ahora se han usado los plazos de vencimiento de 364, 546 y 728 días.

Se colocan mediante subasta en la que participan bancos, casas de bolsa, sociedades de inversión (incluyendo SIEFORES) e instituciones de seguros y fianzas. Las operaciones entre casa de bolsa y bancos pueden contratarse dentro y fuera de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) a través de los sistemas electrónicos de negociación y las operaciones con clientela se deben informar a la Bolsa[5]. Los BONDES se sujetan a las disposiciones legales establecidas en la Circular 10-99 y anexos de la CNBV y al Reglamento General Interior de la Bolsa artículo148-Bis 1 a Bis 4.

Estos títulos pueden o no devengar intereses, quedando facultada la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para colocarlos a descuento, a la par o sobre par.

Existe un mercado secundario amplio para estos títulos. En la actualidad se pueden realizar operaciones de compra-venta en directo y en reporto. En adición, pueden ser utilizados como activo subyacente en los mercados de derivados (futuros y opciones) aunque a la fecha nunca han sido utilizados para estos efectos. Las operaciones de compra-venta en directo de estos títulos se pueden realizar ya sea cotizando su precio o su sobretasa. De hecho, la convención actual del mercado es cotizarlos a través de su sobretasa, y gozan de liquidez inmediata a través de las operaciones "valor mismo día", 24, 72, y 96 horas.

Su tratamiento fiscal es como sigue, para:

- Personas físicas: exento de impuesto,
- Personas morales: es acumulable de acuerdo a los ingresos al ISR.
- Residentes en el extranjero: ISR al 21 %.

A continuación se presenta una descripción detallada de los dos tipos de Bondes aún vigentes.

[4] Es decir, jamás dejan de ser propiedad del Gobierno Federal, los tenedores reciben certificados por su inversión pero no pueden comerciar con el instrumento como propio.

[5] Fuente: Banco de México. Reglas para la colocación primaria. Información disponible en pagina web www.banxico.gob.mx. México, 2001

1.2.1. BONDES 182

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BONDES182) pertenecen a la familia de los valores gubernamentales a tasa flotante. Son títulos que pagan intereses en períodos predeterminados y revisan su tasa de interés en cada uno de éstos. En adición, los BONDES182 ofrecen en cada uno de los períodos de interés una protección contra cambios inesperados en la inflación, lo cual garantiza que el instrumento nunca pueda pagar una tasa real negativa. En seguida se describen las características de éstos títulos.

Características

- Nombre: Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BONDES182).
- Valor nominal: 100 pesos.
- Plazo: Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 182 días. No obstante lo anterior, hasta la fecha estos títulos se han emitido a plazo de 1820 días (5 años).
- Intereses: Devengan intereses en pesos cada seis meses. Esto es, cada 182 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.
- Tasa de interés: Compuesta de dos elementos, una tasa de referencia de mercado que se determina al inicio de cada período de interés y una opción que protege al tenedor de la posibilidad de obtener una tasa de interés real negativa.

  Tasa de interés = Tasa de Referencia $\pm$ Protección contra la Inflación

  - Tasa de referencia: Para el caso de los BONDES182, la tasa que se utiliza como referencia es la tasa de rendimiento de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), en colocación primaria, emitidos al plazo de 182 días o al que sustituya a éste en caso de días inhábiles, correspondiente a la semana en que empiezan a devengarse los intereses. En aquellos casos en los que no se colocaran CETES a dicho plazo, esta tasa se sustituye por la tasa de los CETES en colocación primaria al plazo más cercano llevada en curva a 182 días.
  - Protección contra la inflación: Como se mencionó con anterioridad, el título ofrece al tenedor una opción que lo protege contra cambios no esperados en la inflación, lo cual elimina la posibilidad de que el título pague tasas de interés reales negativas. Así, en aquellos casos en donde el aumento porcentual en el valor de la Unidad de Inversión (UDI) durante el período de intereses es mayor a la tasa de los CETES a 182 días, el título paga al tenedor, además de la tasa de referencia, una prima adicional que se determina como la diferencia entre el aumento porcentual en el valor de la UDI y la tasa de rendimiento de los CETES a 182 días. Dicha prima se calcula de la siguiente forma:

$$Protección\ contra\ la\ inflación\ = \left[\left(\frac{UDI_{J_{NJ}}}{UDI_{J_1}} - 1\right) - (CET182_J) * \left(\frac{N_J}{360}\right)\right] + \frac{360}{N_J}$$

donde:$\sum$
$UDI_{J_{NJ}} =$ *Valor de la UDI correspondiente al día de pago del cupón J*
$UDI_{J_1} =$ *Valor de la UDI correspondiente al primer día del cupón J*
$N_J =$ *Plazo en días del cupón J*
$CET182 =$ *Tasa de interés de los Cetes182 de la subasta primaria al inicio del cupón J*

- Pago de intereses: Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días. Estos se liquidan al finalizar cada uno de los períodos de interés conforme a la siguiente fórmula:

$$I_J = VN * \frac{N_J * TC_J}{360}$$

donde:
$I_J =$ *Intereses por pagar al final del período J*
$TC_J =$ *Tasa de interés anual del cupón J*
$VN =$ *Valor nominal del título en pesos*

- Colocación primaria: Los títulos se colocan mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar. Las reglas para participar en dichas subastas se encuentran descritas en el Anexo 6 de la Circular 2019/95 emitida por el Banco de México y dirigida a las instituciones de crédito.

Cabe destacar que en muchas ocasiones el Gobierno Federal ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación resultante en la subasta los intereses devengados del cupón vigente de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$I_{devJ} = VN * \frac{d * TC_J}{360}$$

donde:
$I_{devJ} =$ *Intereses devengados (redondeados a 12 decimales) durante el período J*
$d =$ *Días transcurridos entre la fecha de emisión o último pago de intereses $(J-1)$ según corresponda y la fecha de valuación*

1.2.2. BONDEST

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno federal con pago trimestral de interés (BONDEST) se ubican, al igual que los Bondes 182, dentro de la familia de valores gubernamentales de tasa flotante, pagan intereses en períodos predeterminados de 91 días y revisan su tasa de interés en cada uno de esos períodos. Sus principales características son:

Características

- Nombre: Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago trimestral de interés (BONDEST).
- Valor nominal: 100 pesos.
- Plazo: Cualquier plazo siempre y cuando fuese múltiplo de 91 días. No obstante lo anterior, estos títulos se emitieron a plazo de 1092 días (3 años).
- Período de interés: Los títulos devengan intereses en pesos cada tres meses. Esto es, cada 91 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.
- Tasa de interés: Para el caso de los BONDEST, la tasa de interés es la tasa de rendimiento de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), en colocación primaria, emitidos al plazo de 91 días o al que sustituya a éste en caso de días inhábiles, correspondiente a la semana en que empiezan a devengarse los intereses. En aquellos casos en los que no se coloquen CETES a dicho plazo, esta tasa se sustituye por la tasa de los CETES colocados en el mercado primario al plazo más cercano a tres meses, llevada en curva a 91 días.

  - Pago de intereses: Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días, y se liquidan al finalizar cada uno de los períodos de interés. La fórmula aplicable es:

$$I_J = VN * \frac{N_J * TC_J}{360}$$

donde:
I_J = *Intereses por pagar al final del período J*
TC_J = *Tasa de interés anual del cupón J*
VN = *Valor nominal del título en pesos*
N_J = *Plazo en días del cupón J*

- Colocación primaria: Estos títulos se colocaban mediante subasta, en la cual los participantes presentaban posturas por el monto que deseaban adquirir y el precio que estaban dispuestos a pagar. Las reglas de participación en dichas subastas se encuentran descritas en el Anexo 6 de la

Circular 2019/95 emitida por el Banco de México y dirigida a las instituciones de crédito.

Cabe destacar que, como en el caso de los Bondes 182, el Gobierno Federal ofrece ocasionalmente en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. Al igual que con sus contrapartes de 182 días, las subastas se realizan a precio limpio, por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación resultante en la subasta los intereses devengados del cupón vigente de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$I_{devJ} = VN * \frac{d * TC_J}{360}$$

donde:
I_{devJ} = *Intereses devengados (redondeados a 12 decimales) durante el período J*
d = *Días transcurridos entre la fecha de amisión o último pago de intereses $(J-1)$ según corresponda y la fecha de valuación*

1.3. Cálculo del precio de los Bondes

Para realizar la valuación a precios de mercado de los BONDES, el Banco de México (Banxico) ha elaborado su propia metodología, la cual es usada convencionalmente por los participantes del mercado. Para implementarla recibe diariamente información de fuentes adicionales al propio Banco, por un lado, la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR), quien provee información de las operaciones en directo realizadas por las SIEFORES. Por otro lado, las casas de corretaje Central de Enlaces Prebon, Eurobrokers, Remate Electrónico y SIF-Garban Intercapital, reportan las operaciones en directo realizadas a través de ellas. La información que estas fuentes envían al Banco de México, referente a cada una de las operaciones en directo con títulos gubernamentales realizadas a través de ellas, es:

(a) Fecha de concertación,

(b) Fecha de liquidación,

(c) Fecha de vencimiento o rango,

(d) Volumen, y

(e) Sobretasa y/o precio.

Cabe señalar que en el cálculo se consideran las operaciones en directo cuya fecha de liquidación sea mismo día, 24, 48, 72 y 96 horas hábiles.

Existen en el mercado diversas formas de cotizar estos títulos y, por consiguiente, de valuar los mismos. Banxico presenta una metodología que permite valuar el precio de los BONDEST y de los BONDES182 de forma general.

Las metodologías para los cálculos de precios son básicamente las mismas, con excepción de la tasa de referencia de CETES que cada tipo de Bonde emplea. A continuación se describen dichas metodologías.

1.3.1. Valuación de los BONDES182

Con la metodología publicada por Banxico, la fórmula general para valuar los BONDES182 es la siguiente:

$$P = \sum_{j=1}^{K} (C_j * F_j) + (F_K * VN) - \left(C_1 \frac{d}{N_1}\right) \tag{1.1}$$

donde:

P = Precio limpio del BONDE (redondeado a 5 decimales)

VN = Valor nominal del título

K = Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente

d = Número de días transcurridos del cupón vigente

N_j = Plazo en días del cupón j

C_j = Cupón j, el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$C_j = VN * \frac{N_j * TC_j}{360}$$

TC_j = Tasa de interés anual que paga el cupón j cuya expresión es:

$$TC_j = \text{máx}\left\{CET182_j, \left(\frac{UDI_{j_{N_j}}}{UDI_{J1}} - 1\right) * \frac{360}{N_j}\right\} \tag{1.2}$$

donde:

$UDI_{j_{N_j}}$ = Valor de la UDI corresponiente al día de pago del cupón j

UDI_{j_1} = Valor de la UDI correspondiente al primer día del cupón j

$CET182_j$ = Tasa de interés de los $CETES182$ de la subasta primaria al inicio del cupón j

F_j = Factor de descuento para el flujo de efectivo j. Se obtiene con la fórmula:

$$F_j = \frac{1}{(1 + R_j)^{j - \frac{d}{N_1}}} \tag{1.3}$$

donde:

R_j = Tasa interna de retorno esperada para el cupón j

$$R_j = (r_j + s_j) * \frac{N_j}{360}$$

r_j = Tasa de interés relevante para descontar el cupón j

s_j = Sobretasa asociada al cupón j

Reescribiendo 1.2 se tiene que

$$TC_j = CET182_j + (UDI182_j - CET182_j)\, I_j \tag{1.4}$$

donde:

$$UDI182_j = \left(\frac{UDI_{j_{N_j}}}{UDI_{j_1}} - 1 \right) * \frac{360}{N_j}$$

$$I_j = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } UDI182_j \geq CET182_j \\ 0 \text{ si } UDI182_j > CET182_j \end{array} \right\}$$

Al sustituir 1.4 en 1.1

$$\text{P}=\sum_{j=1}^{K} \left[CET182_j * \frac{N_j}{360} * VN * F_j * (1 - I_j) \right] + \sum_{j=1}^{K} \left[UDI182_j * \frac{N_j}{360} * VN * F_j * I_j \right] + \text{F}_K * \text{VN-} \frac{C_1 d}{N_1} \tag{1.5}$$

En la expresión anterior se debe notar que cuando $j = 1$, los valores N_1,TC_1,r_1 y s_1, son conocidos (son los valores correspondientes al primer cupón), esto implica que para poder valuar 1.5 es necesario estimar los valores de N_j, TC_j, s_j y r_j, para $j = 2, 3 \ldots K$. Una estimación sencilla es asignar valores "fijos" N, TC, r y s, si además suponemos que la tasa de los cupones futuros y la tasa que descuenta los flujos son iguales ($TC = r$), la ecuación 1.5 se simplifica y se puede reescribir como:

$$P = \left(\frac{C_1 + C * \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R*(1+R)^{K-1}} \right] + \frac{VN}{(1+R)^{K-1}}}{[1+R]^{\left(1 - \frac{d}{182}\right)}} \right) - \frac{C_1 * d}{182}$$

donde :

$$C_1 = VN * \frac{182 * TC_1}{360},$$

$$C = VN * \frac{182 * TC}{360}$$

y

$$R = (TC + s) * \frac{182}{360}$$

1.3.2. Valuación de los BONDEST

Al igual que en el caso anterior, Banxico ha desarrollado una metodología para el calculo de precio de los Bondes T. La fórmula general para valuar los BONDEST es la siguiente:

$$P = \sum_{j=1}^{K} (C_j * F_j) + (F_K * VN) - \left(C_1 \frac{d}{N_1}\right) \tag{1.6}$$

donde:

P = Precio limpio del BONDE (redondeado a 5 decimales)

VN = Valor nominal del título

K = Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente

d = Número de días transcurridos del cupón vigente

N_j = Plazo en días de cupón j

C_j = Cupón j, el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$C_j = VN * \frac{N_j * TC_j}{360}$$

TC_j = Tasa de interés anual que paga el cupón j

F_j = Factor de descuento para el flujo de efectivo j. Se obtiene con la formula:

$$F_j = \frac{1}{(1 + R_j)^{j - \frac{d}{N_1}}}$$

donde:

R_j = Tasa interna de retorno esperada para el cupón j

$$R_j = (r_j + s_j) * \frac{N_j}{360}$$

r_j = Tasa de interés relevante para descontar el cupón j

s_j = Sobretasa asociada al cupón j

En la expresión anterior se debe notar que cuando $j = 1$, los valores N_1,TC_1,r_1 y s_1, son conocidos (son los valores correspondientes al primer cupón), esto implica que para poder valuar 1.6 es necesario estimar los valores de N_j, TC_j, s_j y r_j, para $j = 2, 3 \ldots K$. Una estimación sencilla es asignar valores "fijos" N, TC, r y s , si además suponemos que la tasa de los cupones futuros y la tasa que descuenta los flujos son iguales ($TC = r$), la ecuación 1.6 se simplifica y se puede reescribir como:

$$P = \left(\frac{C_1 + C * \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R*(1+R)^{K-1}}\right] + \frac{VN}{(1+R)^{K-1}}}{[1+R]^{(1-\frac{d}{91})}} \right) - \frac{C_1 * d}{91} \tag{1.7}$$

donde:

$$C_1 = VN * \frac{91 * TC_1}{360}$$

$$C = VN * \frac{91 * TC}{360}$$

$$R = (TC + s) * \frac{91}{360}$$

Capítulo 2

Valor en Riesgo (VaR)

Muchos bancos, casas de bolsa y operadoras de fondos de inversión utilizan medidas estandarizadas de riesgo para estimar su exposición al mercado. Una de las más frecuentes es el VaR. El Valor en Riesgo, o VaR por sus siglas en inglés, ha llegado a tener gran popularidad, en gran parte debido a que es un indicador de interpretación sencilla, ya que ofrece una estimación de la cantidad en riesgo dentro de un portafolio de instrumentos.

A partir de este momento aparecerá en todo momento la palabra riesgo, pero ¿que es el riesgo? Existen muchos tipos de riesgo y por lo tanto varias definiciones de éste. En el contexto que aqui se ocupa, con la palabra riesgo se hace referencia al *riesgo financiero.*

Existen varios tipos de riesgo financiero, pero en general para todos es aplicable y aceptada la siguiente

Definición 1 *El riesgo es la dispersión o volatilidad de los flujos esperados de una variable financiera*[1]

Por lo tanto es posible medir el riesgo como la desviación estándar (medida de dispersión) de los flujos esperados. Como se verá más adelante, la desviación estándar es la base para el cálculo del VaR.

En esta parte se dará la definición de VaR y se describirán algunos de los distintos métodos usados en el cálculo del mismo.

2.1. Definición del VaR

Englobando algunas de las concepciones generalizadas de qué es el VaR, se puede dar la siguiente

Definición 2 *El VaR es un indicador de la pérdida máxima esperada a lo largo de un horizonte de tiempo con un nivel de confianza previamente definido.*

[1]Jorion, Philippe. Valor en Riesgo. Primera reimpresión. Limusa, Año 2002

El VaR responde a una pregunta que cada participante de la actividad financiera debe formularse: "¿que es lo peor que puede pasar?", y puede interpretarse por la frase: *"estamos x por ciento seguros que no perderemos más de V pesos en los próximos N días"*. La variable V es el VaR del portafolio, una función de dos parámetros: N, que es el horizonte de tiempo y x, el nivel de confianza.

El enfoque del modelo interno del Comité de Basilea define un intervalo de confianza del 99 por ciento sobre 10 días. Con esto se están considerando pérdidas sobre un período $N = 10$ días, que se espera ocurran sólo el $1\,\%$ $(100 - x\,\%)$ de las veces.

Usualmente, en los cálculos del VaR se mide el tiempo en días y la volatilidad de un instrumento es denotada como "volatilidad por día".

Definición 3 *La volatilidad diaria del precio de un instrumento es igual a la desviación estándar del retorno diario del mismo.*

Para llevar a cabo el cálculo del VaR se necesita tener disponibles:

a) Una estimación de la volatilidad diaria del instrumento en cuestión, y

b) Una estimación de las correlaciones entre los retornos de dicho instrumento

2.2. VaR Paramétrico

Considere un portafolio consistente de $\$K_Z$ millones en acciones de una empresa Z, sea $N = 10$ y $x = 99\,\%$, lo que implica que existe interés en un nivel de confianza de $99\,\%$ para posibles pérdidas a lo largo de 10 días. Suponga que la volatilidad diaria del instrumento es σ_Z.También es convención asumir que el cambio en el mercado es normalmente distribuido; la notación N(-2.33)=0.01 significa que hay un $1\,\%$ de probabilidad de que una variable normalmente distribuida decrecerá en valor por más de 2.33 desviaciones estándar, lo que es equivalente a afirmar que *"estamos 99 % seguros que una variable normalmente distribuida no decrecerá en valor por más de 2,33 desviaciones estándar"*. El VaR paramétrico $99\,\%$ a N días para un portafolio es:

$$V = 2{,}33 * K * \sigma * \sqrt{N}$$

donde $K * \sigma * \sqrt{N}$ es la desviación estandar del cambio en el valor del portafolio. Suponga que los cambios en días sucesivos son independientes, por lo que esperamos que la desviación estándar del cambio sobre un período de N días sea precisamente $\sqrt{N}$ veces el cambio sobre un período de un día. Entonces, con los datos dados anteriormente, el VaR para el portafolio de acciones de Z está dado por:

$$V_Z = 2{,}33 * K_Z * \sigma_Z * \sqrt{10}$$

2.2.1. VaR Paramétrico de una cartera

Considerese un portafolio consistente de $\$K_X$ millones en acciones de una empresa X y $\$K_Y$ millones en acciones de una empresa Y. Suponga que los retornos de las acciones tienen una distribución normal bivariada con coeficiente de correlación ρ. Un resultado estándar de la estadística dice que si dos variables X y Y tienen desviaciones estándar iguales a σ_X y σ_Y, con coeficiente de correlación entre ellos igual a ρ, la desviación estándar de $X+Y$ está dada por

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y}$$

Basados en esto último y asumiendo los supuestos de normalización, se puede dar la consecuente

2.2.2. Generalización: Modelo Lineal

Suponga un portafolio P consistente de n activos, con un monto α_i invertido en el activo $i(1 \leqslant i \leqslant n)$. Se define Δx_i como el retorno sobre un activo i en un día. Se sigue que el cambio en el valor de la inversión en el activo i en un día es $\alpha_i \Delta x_i$ y entonces

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$$

las Δx_i siguen distribuciones normales multivariadas, ΔP se distribuye entonces como una normal multivariada. Para calcular el VaR sólo es necesario calcular la media y la desviación estándar de ΔP. Asuma que el valor esperado de cada Δx_i es cero, entonces ΔP tiene media cero.

Para calcular la desviación estándar de ΔP, se define σ_i como la volatilidad diaria del i-ésimo activo y ρ_{ij} como el coeficiente de correlación entre Δx_i y Δx_j. La desviación estándar de ΔP, σ_P, está dada por

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j$$

La desviación estándar del cambio sobre N días es $\sigma_P\sqrt{N}$ y el VaR 99 % para un horizonte de N días es $2{,}33\sigma_P\sqrt{N}$.

Uso del Modelo Lineal

Hasta ahora se han considerado portafolios consistentes de posiciones en un número de diferentes activos y los Δx_i's han sido los retornos sobre los activos. El modelo lineal puede ser usado en un mayor número de situaciones. Es apropiado para cualquier cartera cuyo valor sea una razonable aproximación linealmente independiente sobre un número de variables de mercado. Estas variables pueden ser precios de activos, pero no tienen que serlo. Algunas de las variables podrían ser las volatilidades implícitas o las tasas de interés; y se asume que las variables tienen una distribución normal multivariada. Definimos Δx_i como el cambio proporcional en la variable i en un día (si la i-ésima variable de mercado es el precio de un activo, éste es el rendimiento de un activo en un día).

Del supuesto de linealidad se tiene entonces que α_i es igual a la sensibilidad del valor de portafolio a los cambios proporcionales de la i-ésima variable de mercado.

Una de las limitaciones del VaR paramétrico es que asume que la distribución de probabilidad de los cambios en el valor de un portafolio es normalmente distribuida, con media cero[2]. Esto no es necesariamente cierto por varios motivos:

I. Las gráficas de los rendimientos históricos de los instrumentos financieros tienen çolas más gordas"que las colas de una distribución normal, pues los rendimientos no decrecen tan rápidamente,

II. Son curvas con picos más pronunciados que las curvas de variables normales, dado que se llegan a presentar rendimientos más altos que los descritos por una distribución totalmente normal, y

III. Están sesgadas hacia la derecha, pues la media de los rendimientos es habitualmente mayor a cero.

2.3. Otras metodologías para el cálculo del VaR

Existen diferentes formas para calcular el VAR cuando se trata de carteras con instrumentos de deuda, de acuerdo con la forma en que se toman las tasas de interes usadas en los cálculos. Dado que es imposible definir una variable de mercado separada para cada precio de bono o tasa de interés a la cual está expuesta una compañía, son necesarias las simplificaciones.

2.3.1. Aproximación usando la Duración

Para los efectos de esta sección se supondrá conocido el concepto de duración (ver Apéndice A).

[2] Se puede asumir que la distribución de los rendimientos tiene una media de cero dentro de periodos cortos de tiempo.

Supóngase el uso del modelo lineal. Si se asume que todos los cambios en una curva de rendimientos[3] cupón cero son pequeños cambios paralelos, se puede usar la aproximación de la duración (para detalles ver Apendice A):

$$\Delta P = -DP\Delta y \tag{2.1}$$

en donde la variable P es el valor de un portafolio dependiente de las tasas de interés, D es la duración modificada del portafolio, Δy es el tamaño del cambio paralelo en la curva de rendimientos en un día, y ΔP es el cambio resultante en el valor del portafolio.

Se denotará la volatilidad del rendimiento por día como σ_y. Una forma de definir σ_y es como la desviación estándar de Δy / y, donde y es el rendimiento cupón cero para el vencimiento D. De la ecuación 2.1 se sigue que

$$\Delta P = -DPy\frac{\Delta y}{y}$$

y la relación entre σ_P y σ_y es entonces

$$\sigma_P = DPy\sigma_y$$

2.3.2. Modelo Cuadrático

Si el valor de un portafolio P es una función del precio del instrumento S y del tiempo t, considérese la expansión en series de Taylor del cambio en el valor de un portafolio en un período de tiempo corto, dada por:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial P}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial S \partial t}\Delta S \Delta t + ... \tag{2.2}$$

donde ΔP y ΔS son los cambios en P y en S en un pequeño intervalo de tiempo Δt. De esta ecuación se derivan las llamadas "letras griegas", de las cuales las más importantes se definen como:

$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$(delta), y $\gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$(gamma), las cuales brindan medidas de sensibilidad del valor del portafolio. La delta aproxima los cambios en el valor del portafolio con respecto al cambio en el instrumento subyacente.

El modelo lineal no toma en cuenta la gamma[4] del portafolio. Gamma mide la curvatura de la relación entre el valor del portafolio y la variable de mercado subyacente.

---

[3] Por curva de rendimientos entendemos la función continua descrita por los rendimientos en función del tiempo. Generalmente se construyen graficando los rendimientos de varios bonos disponibles de una misma clase o cualidad.

[4] La delta es la tasa de cambio en el valor del portafolio con respecto a la variable de mercado subayacente y la gamma se define como la tasa de cambio de la delta con respecto a la variable de mercado.

Una gamma no cero impactará la distribución de probabilidad de ΔP; una distribución de ΔP con gamma positiva tiende a ser negativamente sesgada, cuando es negativa, la distribución tiende a ser positivamente sesgada.

El VaR para un portafolio es criticamente dependiente de la cola izquierda de la distribución de probabilidad de ΔP. Cuando el nivel de confianza usado es 99 %, el VaR es el valor en la cola izquierda bajo el cual solo se acumula el 1 % de la distribución. Un portafolio con gamma negativa tendrá una cola izquierda más angosta que la distribución normal. Si se supone una distribución normal se estará estimando un VaR demasiado alto; similarmente, si el portafolio tiene gamma positiva y se supone una distribución normal, el VaR estimado será muy bajo.

Para una mejor estimación del VaR es posible usar las medidas delta y gamma relativas a las Δx_i's. Considere un portafolio dependiente de un activo simple cuyo precio es S. Suponga que la delta de un portafolio es δ y que su gamma es γ. Es aproximadamente cierto que:

$$\Delta P = \delta \Delta S$$

de la expansión en serie de Taylor podemos obtener una mejor aproximación a esta ecuación:

$$\Delta P = \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma(\Delta S)^2 \tag{2.3}$$

si se define

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

entonces

$$\Delta P = S\delta \Delta x + \frac{1}{2}S^2\gamma(\Delta x)^2$$

Para un portafolio con n variables de mercado subyacentes, con cada instrumento en el portafolio siendo dependiente de solo una de las variables de mercado, la ecuación 2.3 se transforma en

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}S_i^2\gamma_i(\Delta x_i)^2$$

[5]

[5] Hull, John C. Options, Futures & Other Derivatives. Joseph L. Rotman School of Management, Universidad de Toronto. Cuarta Edición. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc. Pag. 354

que, cuando los instrumentos de la cartera dependen de más de una variable de mercado, toma la forma más general

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$$

donde

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i S_j}$$

la ecuación puede escribirse como:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \qquad (2.4)$$

donde $\alpha_i = S_i \delta_i$ y $\beta_i = 2 S_i S_j \gamma_{ij}$.

La ecuación 2.4 puede ser usada para calcular los momentos de ΔP y estimar los percentiles de su distribución de probabilidad necesarios para el cálculo del VAR.

2.3.3. Simulación Monte Carlo

Es posible usar la simulación Monte Carlo para generar la distribución de probabilidad de ΔP. Suponga deseamos calcular el VaR de un portafolio a un día. El procedimiento será:

1. Valuar el portafolio de manera habitual, usando los valores actuales de las variables de mercado
2. Muestrear cada una de las $\Delta x_i' s$ de la distribucion normal multivariada
3. Usar los valores de las $\Delta x_i' s$ que fueron muestreadas para determinar el valor de cada variable de mercado al final de un día
4. Reevaluar el portafolio al final del día en la manera usual
5. Sustraer el valor calculado en el paso uno del valor obtenido en el paso cuatro para determinar una muestra ΔP
6. Repetir los pasos dos a cinco muchas veces para construir una distribución de probabilidad para ΔP

El VaR es calculado como el percentil apropiado de la distribución de probabilidad de ΔP.

La desventaja de la simuación Monte Carlo es que tiende a ser un proceso lento para un portafolio con muchos instrumentos. Una manera de acelerar este es suponer que la ecuación 2.4 describe la relación entre ΔP y las Δx_i's, entonces podemos saltarnos los pasos dos a cinco en la simulación Monte Carlo y evitar la necesidad de reevaluar completamente el portafolio. Éste proceso es llamado: *aproximación de simulación parcial.*

2.3.4. Simulación Histórica

Una desventaja de las aproximaciones sugeridas es que las variables de mercado se suponen normalmente distribuidas. En la práctica, las distribuciones de los cambios diarios de muchas variables de mercado tienen colas más pesadas que la distribución normal. Esto ha originado en muchas compañías la necesidad de basar cálculos del VaR en simulaciones históricas. El primer paso es crear una base de datos consistente de los movimientos diarios en todas las variables de mercado sobre unos pocos años. El primer proceso de la simulación asume que los cambios porcentuales en cada variable son los mismos a aquellos registrados en la base de datos el primer día, el segundo proceso de simulación asume que los cambios porcentuales son los mismos a aquellos en el segundo día y así sucesivamente. El cambio en el valor del portafolio, ΔP, es calculado para cada proceso de simulación y el VaR es igual al apropiado percentil de la distribución de probabilidad de ΔP. El cambio en el valor del portafolio puede obtenerse reevaluando el portafolio o usando la ecuación 2.4.

Bootstrap

El Método de Bootstrapping o seccionamiento (Efron, 1979) es una forma de usar las muestras de rendimientos obtenidas de una manera más amplia que en el VaR Histórico. Con éste método se estima la distribución usando la distribución empírica de los rendimientos.

El método fue propuesto inicialmente como una técnica de aleatorización no paramétrica para modelar la distribución de un estadístico, la cual se infiere de a partir de la distribución de los datos observados.

Llamese $\{R\}$ al conjunto de N muestras de rendimientos históricos. Suponga que se desea generar M rendimientos en el futuro, pero no imponer supuesto alguno sobre la distribucion de estos rendimientos, el procedimiento de seccionamiento se realiza de la siguiente forma:

1. *Se realizan submuestras de $\{R\}$, con reemplazo, con tantas observaciones como sea necesario.* Por ejemplo, es posible proyectar los rendimientos diarios eligiendo aleatoriamente un rendimiento por periodo de la muestra tomada los pasados $N = 500$ días, con reemplazo.

2. Se *usa el rendimiento seleccionado para simular el rendimiento en el día $t+m$, $m = 1, 2, ...M$.* Sea $R_{n(1)}$ donde $n(1)$ es el índice del rendimiento

seleccionado en la muestra. El rendimiento simulado para el siguiente día será $S_{t+1} = S_t(1 + R_{n(1)})$

3. *La repetición se realiza para el total de M inferencias necesarias para generar la distribución.* Es decir, $S_{t+m} = S_{t+m-1}(1+R_{n(2)})$ para $m = 2, 3, ..., M$, para un total de $M = 100$ inferencias futuras, se genera un total de 100 seudovalores del rendimiento.

Para mayor precisión es necesario generar un mayor número de seudovalores, usualmente 10,000.

El método puede adaptarse para simular rendimientos basandose en la serie de rendimientos geométricos obtenida, con ello generamos una nueva distribución empírica.

Capítulo 3

Planteando la hipótesis

A pesar de haber llevado a cabo un análisis de riesgo en varios instrumentos gubernamentales, particularmente en CETES, Banco de México (Banxico) aún no ha elaborado estudios del mismo tipo en los Bondes.

Dentro del mercado de dinero mexicano, hasta ahora y por convención, se han aceptado simplificaciones sobre el análisis de riesgo de los Bondes, basadas en su dependencia de los CETES, un ejemplo de estas simplificaciones es la duración[1]. Se considera que la duración de un instrumento que paga cupones y tiene tasa revisable (p.e. un Bonde), es igual la duración cupón, es decir el período que le falta para el pago del próximo cupón.

Estrictamente hablando, esto no es cierto, de hecho es de esperarse que la Duración de un instrumento financiero se incremente si tiene un plazo a vencimiento mayor, aún en el caso de que revise tasa de manera periódica.

Debido a que Banxico aún no ha publicado una metodología sobre el cálculo del VaR en Bondes, no hay un referente oficial del empleo de esta herramienta en el análisis de riesgo de estos instrumentos, sin embargo, por la forma en que se ha considerado los Bondes hasta ahora, es pertinente un análisis del VaR de BONDES y hacer observaciones de sus diferencias con respecto al de los CETES.

Siempre han existido dificultades al analizar los bonos de tasa variable. El problema empieza desde el momento de calcular el precio de colocación del instrumento: el único cupón conocido es el actual; los valores exactos de pagos de cupones futuros son inciertos hasta un período de t meses antes de que hayan vencido (t meses es el plazo especificado para pago de cupón). En general, suele aceptarse el siguiente resultado

Teorema 4 *El valor de un bono de tasa flotante es igual a la par en cualquier punto de revisión de tasa*

Pueba. Observese primero el último punto de revisión del bono, t meses antes del vencimiento: el pago final dentro de seis meses será el valor nominal más la tasa de interés a t meses sobre este monto. El valor presente en el último punto

[1] Ver definición de "Duración"en Glosario

de revisión es obtenido descontando el pago final a la tasa de interés vigente para ese tipo de instrumento, que es precisamente la tasa del cupón, a t meses. Esto es igual al valor nominal, por lo que, en este punto, el valor presente es igual a la par. Si se traslada a t meses atrás, al anterior punto de revisión, el valor presente se calcula descontando la suma del siguiente valor presente y el siguiente pago de cupón, dejando nuevamente un valor a la par. Se puede continuar este argumento de valor presente hacia atrás, hasta llegar al tiempo cero[2]. ■

De acuerdo a esto, es posible aproximar la curva de tasas del bono de tasa variable con la curva descrita por las tasas actuales, al menos en cada punto de revisión de tasa.

En el caso de los Bondes, se usa la tasa Cete como tasa de referencia para realizar la colocación a descuento. Sin embargo, los Bondes al ser de mayor plazo, son menos líquidos que los Cetes. Esta situación genera a la sobretasa. Es decir, en la realidad se observa que la curva de rendimientos de Bondes va por arriba de la de Cetes. De lo anterior se deduce que:

Proposición 5 *Los Bondes tienen menor liquidez que los Cetes en los cuales se basan para la revisión de tasa.*

Pueba. La prueba es directa de la existencia de sobretasas. Observense las gráficas de rendimientos en las figuras 3.1 y 3.2

■

Observación 6 *El valor de los Bondes en los puntos de revisión no es a la par, sino bajo par.*

Esta característica particular de los Bondes es porque el inversionista exige una mayor tasa en tanto más lejano esté el plazo a vencimiento del instrumento, por ejemplo, un Bonde al que le faltan 5 períodos de 182 días por vencer, pagará una mayor sobretasa que uno con dos períodos por vencer. Por lo tanto, la curva de rendimientos de los Bondes tiene en realidad un nivel superior a la de los Cetes debido a la necesidad de ofrecer un incentivo a los inversionistas por el mayor plazo de vencimiento y menor liquidez. Esto implica que las volatilidades de ambos instrumentos deben ser diferentes.

En pocas palabras, las distribuciones de probabilidad de los rendimientos de Bondes y Cetes son distintas, por lo que el VaR de ambos instrumentos es diferente.

3.1. Descripción del problema

Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) son instrumentos de deuda de corto plazo y los valores más líquidos del mercado, se venden a descuento y no pagan cupones, por lo que su tasa de retorno o rendimiento es

[2]Luenberg, David G. "Floating Rate Bonds". En Investment Science. Nueva York, N.Y.: Oxford University Press, Inc., 1998. Pagina 91

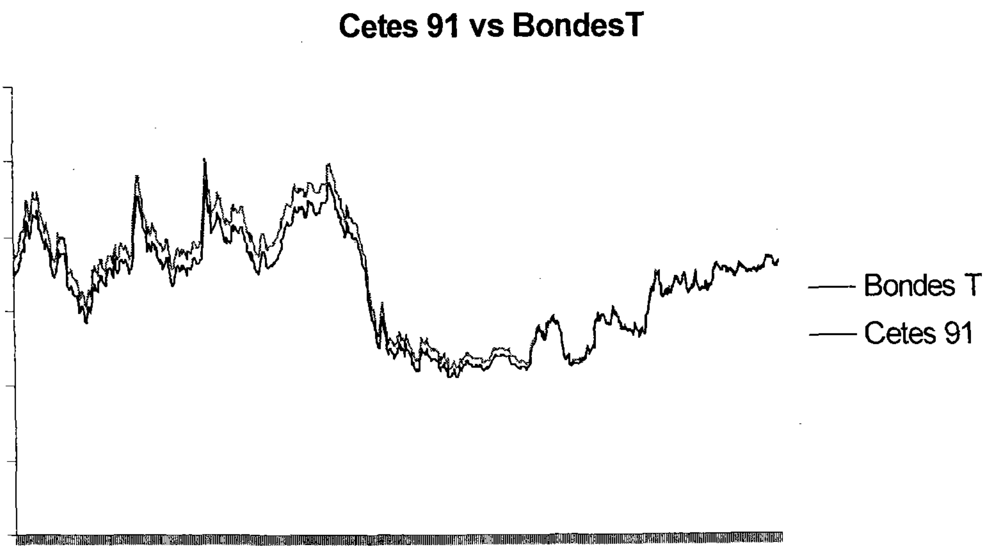

Figura 3.1:

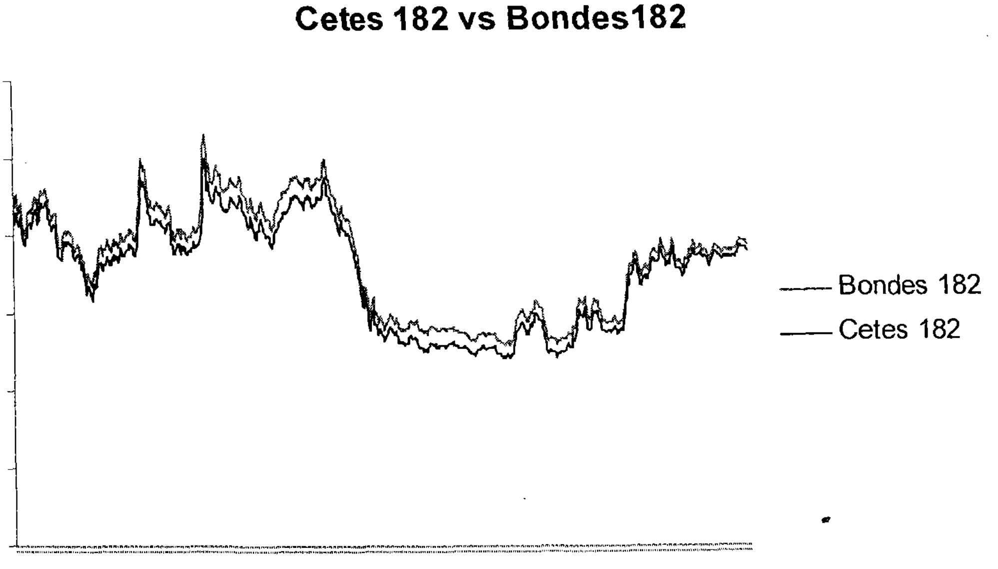

Figura 3.2:

conocida. Comúnmente se refiere a la Tasa CETE como la *tasa libre de riesgo* y a su curva de rendimientos como la *curva libre de riesgo.*

Los BONDES (BondesT y Bondes 182), en cambio, son instrumentos de largo plazo y menos líquidos, lo cual se prueba por la existencia de sobretasas. Al considerar la forma en que sus características los diferencían de los Cetes, se plantea la siguiente

Conjetura 7 *El riesgo de los Bondes es distinto al riesgo de los Cetes.*

Esto es, la volatilidad de los rendimientos de los Bondes es distinta la de los Cetes. No es posible tomar la volatilidad de los rendimientos de los CETES como igual a la volatilidad de los rendimientos de los Bondes, debido a que los patrones que sus rendimientos describen son distintos. Lo que implica que es impreciso considerar al VaR de los Bondes como igual al VaR de los Cetes.

3.2. Planteamiento de la hipótesis

En la primera parte se vio que el modelo lineal supone que los rendimientos tienen una distribución Normal y las desventajas de ésto, ya que las distribuciones reales de los rendimientos, tienen en general, características de sesgo y curtosis que, en ciertos casos, no hacen de la distribución normal una buena aproximación. Pero si los retornos de un activo han tenido un comportamiento estable a través del tiempo, el supuesto de normalidad resulta una aproximación aceptable y el VaR de dicho activo es calculado con el modelo lineal con un grado de exactitud relativamente alto.

En esos casos, el cálculo del VaR se reduce al cálculo de un cuantil que acumule el $X\,\%$ de probabilidad (usualmente se emplea el $1\,\%$ al $10\,\%$). Si la distribución de los rendimientos de los Cetes fuera igual a la de los Bondes, bastaría con analizar a los primeros y calcular el VaR de los Bondes, lo que simplificaría mucho el problema, ya que es más sencillo trabajar con bonos cupón cero y de corto plazo.

En las figuras 3.3 y 3.4 se pueden observar histogramas de los rendimientos de Cetes91 (o trimestrales) y BondesT con datos correspondientes al período Enero 2002-Octubre 2004[3]; las líneas sobre los histogramas corresponden a su respectiva aproximación de distribución normal, es decir, con los parámetros de media y varianza calculados de los datos históricos.

A pesar de ser los instrumentos en que se basan para la revisión de tasa en cada período, se pueden notar diferencias entre la distribución histórica de los BondesT con respecto a la de Cetes'91: la de los BondesT es ligeramente más sesgada y tiene una mayor dispersión.

Si las distribuciones de los rendimientos de Bondes y Cetes son distintas, es claro que se encuentran diferencias no sólo en la volatilidad, sino también en el calculo de los cuantiles necesarios para el análisis de VaR.

[3]Todos los rendimientos, tanto de los Cetes como de los Bondes disponibles y usados, son anualizados.

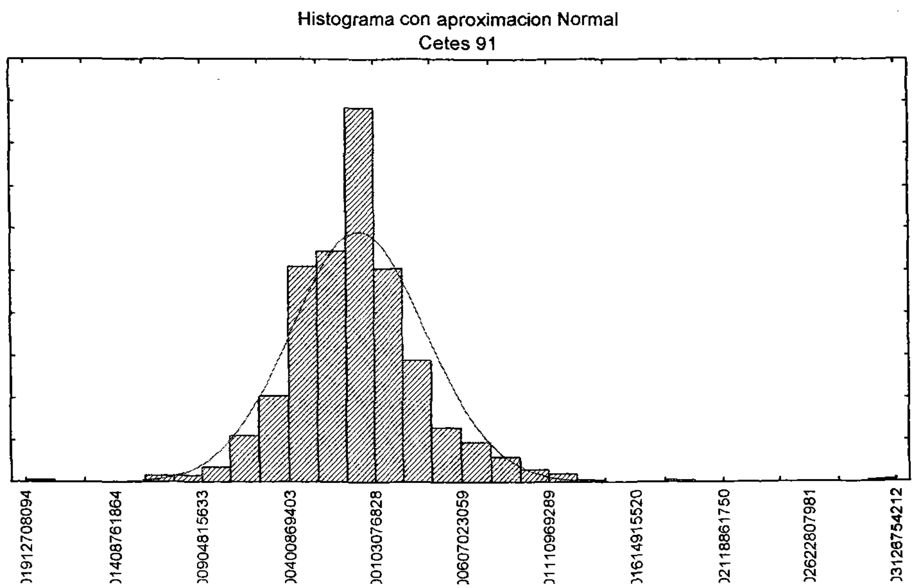

Figura 3.3:

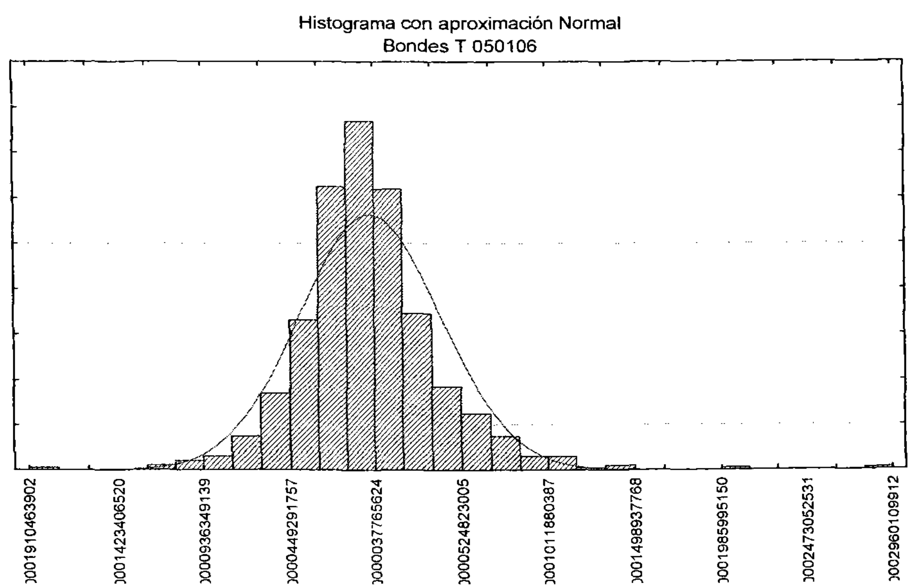

Figura 3.4:

Sea ΔB el cambio en el valor (rendimiento) de un portafolio consistente de $\$K_1$ millones en Bondes y sea ΔC el cambio en el valor de un portafolio consistente de $\$K_2$ millones en Cetes; sean además σ_B y σ_C las volatilidades diarias de las distribuciones de probabilidad de ΔB y ΔC, respectivamente. Sean V_B y V_C el VaR paramétrico de los portafolios de Bondes y Cetes respectivamente, el VaR 99 % a N días esta dado por:

$$V_B = q_{B(,01)} * \sigma_B * K_1 * \sqrt{N}$$

donde:

$$q_{1(,01)} = \textit{Cuantil que acumula 1 \% de probabilidad en la distribución de } \Delta B$$

$$V_C = q_{C(,01)} * \sigma_C * K_2 * \sqrt{N}$$

donde:

$$q_{C(,01)} = \textit{Cuantil que acumula 1 \% de probabilidad en la distribución de } \Delta C$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que $K_1 = K_2 = 1$ millones de unidades monetarias[4]. Se formula la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \textit{El VaR del portafolio de Bondes es distinto al VaR del portafolio de Cetes}$$

es decir:

$$H_0 : V_B \neq V_C$$

Obsérvese que el problema se reduce a probar que las distribuciones de ΔB y ΔC son diferentes, debido a que las $q's$ son cuantiles y las $\sigma's$ son las raíces cuadradas de la varianza de las respectivas distribuciones. Recuerdese asimismo, que dos distribuciones de probabilidad son distintas si tienen parámetros distintos, por tanto bastaría con probar que:

$$H_0 : \sigma_B^2 \neq \sigma_C^2$$

Lo que, debido al mayor riesgo implícito en los Bondes con relación a los Cetes, se traduce a:

$$H_0 : \sigma_B^2 > \sigma_C^2$$

[4]El monto del portafolio es arbitrario, pueden ser iguales

Capítulo 4

Validando la hipótesis

A continuación se emplerán datos de Bondes y Cetes para comprobar la hipótesis. Se usarán las metodologías de VaR histórico y una aproximación al VaR paramétrico con el supuesto de normalidad usando los parámetros obtenidos de los datos históricos (media y desviación estándar)

4.1. Comparando el VaR de BONDES y CETES

Se usará un nivel de confianza de 99 % para un plazo de 10 días para Bondes 182 y para BondesT (de los que actualmente se opera sólo una serie que vence el 6 de enero de 2005), sobre las carteras existentes hasta junio de 2004: \$20,461 y \$287,059[1] millones de pesos para Bondes T y para Bondes 182, respectivamente. Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera se analizarán únicamente los BondesT y Cetes91, posteriormente los Bondes y Cetes 182.

Para realizar este ejemplo se usaran series de datos obtenidos entre 2002 y 2004 de rendimientos diarios de Bondes y Cetes, las cuales fueron proporcionadas anualizadas, por lo que se ha aplicado la fórmula $(1 + \frac{i(m)}{m})^{\frac{1}{m}} - 1$ para obtener la tasa efectiva diaria.

4.1.1. Comparación BondesT- Cetes91

Considérense dos portafolios que constan de \$20,461 millones cada uno, invertido el primero en Cetes91 y el segundo en BondesT serie 050106. Se tienen series de 694 tasas diarias obtenidas entre 2002 y 2004 de los Cetes91 y de BondesT. Los histogramas correspondientes a cada serie puedén observarse en las figuras 4.1 y 4.2.

Para calcular el VaR histórico al 99 % de probabilidad, es necesario calcular el cuantil que acumula el 1 % de probabilidad en ambas distribuciones históricas. Del análisis de las tasas se obtiene la siguiente tabla de estadísticas:

[1] Fuente: Banco de México. Información disponible en la página web www.banxico.gob.mx. Banxico. México, 2004

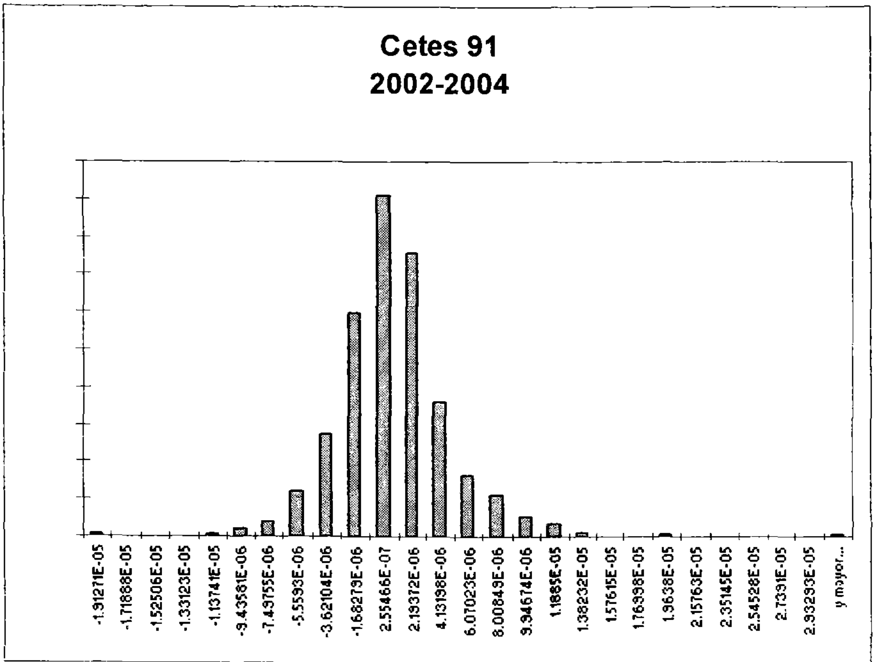

Figura 4.1:

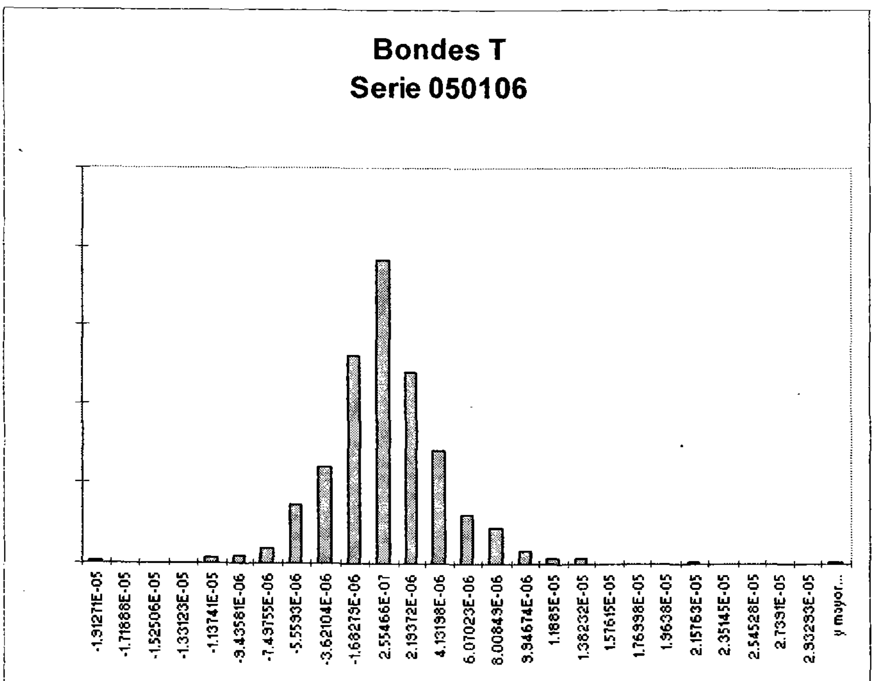

Figura 4.2:

	$q_{(,01)}$	s
Cetes 91	-0.001031	0.000353
BondesT 050106	-0.001033	0.000359

Se denota como V_{BT} al Var Histórico de los BondesT y como V_{C91} al de los Cetes91, para los portafolios antes descritos los valores en riesgo a diez días estan dados por:

$V_{C91} = 10^6 \times 20461 \times 0{,}001031 \times \sqrt{10} = 2.1095 \times 10^7\sqrt{10}$

$V_{BT} = 10^6 \times 20461 \times 0{,}001033 \times \sqrt{10} = 2.1136 \times 10^7\sqrt{10}$

Sean ahora V'_{BT} y V'_{C91} los Var calculados con aproximaciones suponiendo una distribución paramétrica Normal(μ, σ^2). Las distribuciones de éstas, con la media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = s^2$ respectiva para cada instrumento, servirán para calcular los cuantiles $q'_{(,01)}$. El Var entonces esta dado por:

$V'_{C91} = 10^6 \times 20461 \times 0{,}000821 \times 2{,}33 \times \sqrt{10} = 3.914 \times 10^7\sqrt{10}$

$V'_{BT} = 10^6 \times 20461 \times 0{,}000835 \times 2{,}33 \times \sqrt{10} = 3.9808 \times 10^7\sqrt{10}$

Nótense las diferencias en los Valores en Riesgo a diez días calculados con anterioridad. En ambos casos el cálculo con las distribuciones paramétricas suponiendo normalidad da por resultado un VaR mayor al obtenido por las distribuciones empíricas. Era de esperarse que existieran este tipo de diferencias entre ambos métodos, debido a que los supuestos de normalidad subestiman o sobreestiman las colas de las distribuciones de los rendimientos.

Con el primer método se obtienen medidas de VaR para BondesT y Cetes91 en las cuales el VaR de los Cetes91 es menor al de BondesT. Además de que se encuentran diferencias con respecto al empleo del método paramétrico.

Nótese que, sin embargo, siempre existen diferencias entre las volatilidades implicadas a cada instrumento. Las desviaciones estándar, que son parte esencial del cálculo del VaR y que aparentan ser pequeñas, representan diferencias importantes de acuerdo con el monto de la cartera sobre el instrumento. La mayor volatilidad de los BondesT representa un riesgo mayor al de los Cetes91, lo que traducido en pesos puede representar una subestimación de la pérdida potencial del orden de 10^6millones de pesos.

4.1.2. Comparación Bondes182-Cetes182

Considérense ahora otros dos portafolios que constan de carteras iguales a la vigente a junio de 2004 en Bondes 182, por $287,059 millones, invertida la primera en Cetes182 y la segunda en Bondes182 serie 051013. El cálculo emplea 700 datos obtenidos entre 2002 y 2004 de los Cetes182 y Bondes182 serie 051013. Los histogramas correspondientes a cada serie podemos verlos en las figuras 4.3 y 4.4.

Primero se realizarán los análisis para calcular el VaR histórico. Es necesario entonces calcular el cuantil que acumula el 1 % de probabilidad, así como la volatilidad implicada en las distribuciones históricas. Se obtiene la siguiente tabla de estadísticas:

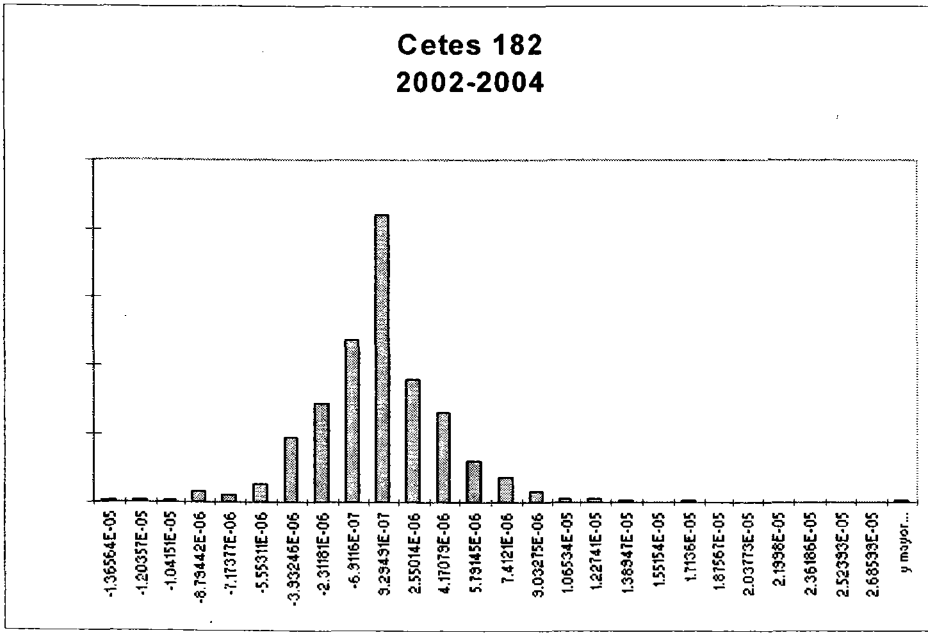

Figura 4.3:

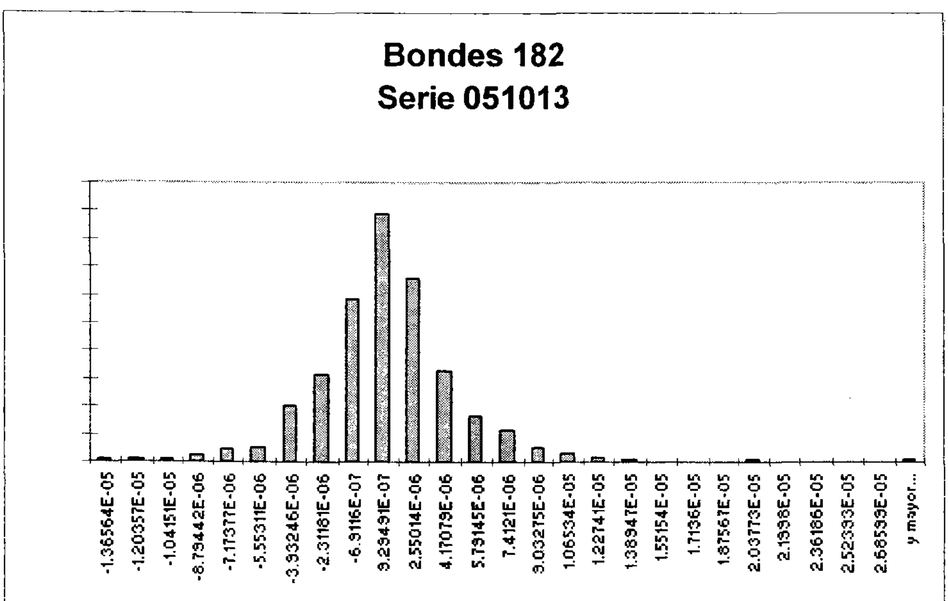

Figura 4.4:

	$q_{(,01)}$	s
Cetes 182	-0.000862	0.000322
Bondes182	-0.000865	0.000330

Se denotará como V_{B182} al Var Histórico de los Bondes182 y como V_{C182} al de los Cetes182, para los portafolios antes descritos. El Var histórico en estos instrumentos esta dado por:

$V_{C182} = 10^6 \times 287059 \times 0{,}000862 \times \sqrt{10} = 2.4744 \times 10^8\sqrt{10}$
$V_{B182} = 10^6 \times 287059 \times 0{,}000865 \times \sqrt{10} = 2.4831 \times 10^8\sqrt{10}$

Sean ahora V'_{B182} y V'_{C182} los Valores en Riesgo calculados con aproximaciones suponiendo una distribución paramétrica Normal(μ, σ^2). Las gráficas de éstas, tendrán nuevamente una media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = s^2$ y servirán para calcular los cuantiles $q'_{(,01)}$. El Var entonces esta dado por:

$V'_{C182} = 10^6 \times 287059 \times 2{,}33 \times 0{,}000749 \times \sqrt{10} = 5.0097 \times 10^8\sqrt{10}$
$V'_{B182} = 10^6 \times 287059 \times 2{,}33 \times 0{,}000768 \times \sqrt{10} = 5.1367 \times 10^8\sqrt{10}$

En este caso el cálculo con las distribuciones normales paramétricas suponiendo normalidad también da por resultado un VaR mayor al obtenido por las distribuciones empíricas, similarmente al caso de BondesT. Esto indica que las distribuciones reales de los rendimientos deben tener colas distintas a las de la normal.

De igual forma existen diferencias entre las volatilidades implicadas a cada instrumento, lo que puede representar una subestimación de la pérdida potencial del orden de 10^7.

4.2. Duración

Recuerdese que la duración modificada puede emplearse para aproximar la volatilidad de los rendimientos, tomándolos como pequeños cambios paralelos, se usa entonces la fórmula:

$$\Delta P = -D_M P \Delta y \tag{4.1}$$

donde, como antes, la variable P es el valor de un portafolio dependiente de las tasas de interes, D_M es la duración modificada del portafolio, Δy es el tamaño del cambio paralelo en la curva de rendimientos en un día, y ΔP es el cambio resultante en el valor del portafolio.

Si se denota la volatilidad del rendimiento por día como σ_y y se le define como la desviación estándar de $\Delta y \ / \ y$, donde y es el rendimiento cupón cero para el vencimiento D, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\Delta P = -D_M P y \frac{\Delta y}{y}$$

En los bonos que revisan tasa, la duración del instrumento es el plazo remanente para que revisen cupón. En el caso de los BondesT la duración máxima es de 91 días y de 182 días para los Bondes 182; las respectivas duraciones modificadas. correspondientes al 11 de octubre de 2004, están dadas por:

$$D_{MC91} = \frac{1}{1+(C_{91})} D_T$$

$$D_{MBT} = \frac{1}{1+(B_T)} D_{91}$$

$$D_{MC182} = \frac{1}{1+(C_{182})} D_T$$

$$D_{MB182} = \frac{1}{1+(B_{182})} D_{182}$$

donde C_{91},B_T,C_{182} y B_{182} son las tasas efectivas correspondientes al período que resta para la revisión del cupón, tomando como referencia el día 11 de Octubre de 2004 de Cetes 91 y Cetes 182, respectivamente. Sustituyendo los valores en las fórmulas tenemos:

$D_{MC91} = \frac{1}{1+(0{,}016714934)} \times 91 = 89.504$
$D_{MBT} = \frac{1}{1+(0{,}016795445)} \times 91 = 89.497$
$D_{MC182} = \frac{1}{1+(0{,}0386630000)} \times 182 = 175.23$
$D_{MB182} = \frac{1}{1+(0{,}0395318889)} \times 182 = 175.08$

4.3. Resultados BondesT vs. Cetes91

Ahora, de la series de tasas se tiene que la desviación estándar del cambio diario en los rendimientos de las carteras de BondesT serie 050106 y los Cetes91 definidas como las desviaciones estándar de los cambios reales en el rendimiento son, respectivamente:

	s
Cetes 91	0.00000393
Bondes T	0.00000399

Para realizar este analisis se hizo una interpolación de tasas entre los períodos de 28 y 91 días y así hallar la tasa del período correspondiente a 83 días, que es el tiempo restante para la revisión cupón del Bonde T; para ello se emplearon las tasas Cete 28, Cete 91 y BondeT. Se obtienen las siguientes aproximaciones al VaR:

$\Delta C_{91} = 89{,}504 \times 10^6 \times 20461 \times 0{,}00000393 = 7.1972 \times 10^6$
$Var_{C91} = 7197200 \times 2{,}33 \times \sqrt{10} = 1.6769 \times 10^7\sqrt{10}$
$\Delta B_T = 89{,}497 \times 10^6 \times 20461 \times 0{,}00000399 = 7.3065 \times 10^6$
$Var_{BT} = 7306500 \times 2{,}33 \times \sqrt{10} = 1.7024 \times 10^7\sqrt{10}$

Nótense las diferencias existentes entre el VaR de los instrumentos son pequeñas al igual que las diferencias entre éste método con el VaR paramétrico y el histórico.

4.4. Resultados Bondes182 vs. Cetes182

Ahora considérense las siguientes estadísticas, obtenidas de las series de rendimientos de Bondes y Cetes 182. El análisis de la serie de cambios en el rendimiento de la cartera, definidos como en la sección anterior, nos dan por resultado la siguiente estadística:

	s
Cetes 182	0.0000036
Bondes182	0.0000037

Para llevar a cabo este análisis se eligió la serie de Bondes 182 que estuviera más cercana en Duración a la fecha en que se llevo a cabo el análisis y así tener tasas comparables en vigencia. Para éstos se obtienen las siguientes aproximaciones al VaR

$\Delta C_{182} = 175{,}23 \times 10^6 \times 287059 \times 0{,}0000036 = 1.8108 \times 10^8$
$Var_{C182} = 181080000 \times 2{,}33 \times \sqrt{10} = 4.2192 \times 10^8\sqrt{10}$
$\Delta B_{182} = 175{,}08 \times 10^6 \times 287059 \times 0{,}0000037 = 1.8596 \times 10^8$
$Var_{B182} = 185960000 \times 2{,}33 \times \sqrt{10} = 4.3329 \times 10^8\sqrt{10}$

Nótense las diferencias existentes entre el VaR de los instrumentos son pequeñas. Sin embargo, las diferencias entre uno y otro método son grandes, sobre todo en ésta última aproximación al VaR: el orden de la pérdida potencial al usar uno u otro método es de 10^8. Obsérvese que el método de VaR paramétrico da por resultado el menor VaR, la diferencia con el VaR histórico indica que con el supuesto de normalidad se subestima el cálculo del VaR. Esto puede deberse a que la serie de Bondes182 tiene colas más pesadas que una normal, también inducida por una mayor volatilidad, la cual es propia de instrumentos con mayor duración y menor liquidez.

4.5. Conclusiones

Se ha visto que las diferencias entre los Var de Bondes y Cetes radican en el hecho de que tienen distribuciones de probabilidad distintas, sobre todo debido a sus características de mercado: las diferencias en la bursatilidad y liquidez inciden directamente en la volatilidad de los instrumentos. La volatilidad implicada a los Cetes es menor que la de los Bondes, lo cual se demuestra con la existencia de una sobretasa para el rendimiento de éstos últimos. Por otra parte se señaló con anterioridad que una aproximación de distribución normal, puede brindarnos una buena aproximación de la distribución de los rendimientos, debido en gran parte a que se esta haciendo referencia a instrumentos de deuda gubernamental. Sin embargo, aunque útil y usada, no es del todo precisa conjuntamente con el modelo lineal y por tanto, puede llevar a subestimaciones en la medición del riesgo a través del VaR.

El Método Monte Carlo puede ayudar en la generación de la función de distribución de los rendimientos. Si es posible generarla se conoceran los parámetros necesarios para el cálculo del VaR y en teoría, será mucho más preciso que los calculados con los métodos anteriormente descritos. Sin embargo, es posible que el método lleve en sí mismo un alto costo de tiempo y recursos computacionales, por lo que las conclusiones sobre el mejor método dependerán de que tan grandes sean las diferencias entre éstos costos.

Una aproximación comúnmente empleada es la Duración. Como se describe en la primera parte, la duración modificada puede usarse para aproximar la volatilidad de los rendimientos. La aproximación usando la Duración contempla el cambio en el valor del portafolio en relación con el cambio en las tasas de rendimiento, lo cual permite tomar en cuenta la dispersión con relación a las tasas de interés. El método también permite tomar en cuenta el riesgo implicado a un mayor plazo a vencimiento.

El método empleado en el cálculo del VaR puede representar diferencias que pueden traducirse como pérdidas potenciales o sobreestimaciones del valor en riesgo.

El VaR de los Cetes es distinto que el VaR de los Bondes. Más aún, el VaR de los Cetes es menor que el VaR de los Bondes debido a la mayor volatilidad implicada en un instrumento que tiene mayor plazo a vencimiento y menor liquidez.

Del análisis de la hipótesis y la validación de ésta realizado en la parte anterior se pueden observar las diferencias entre el VaR de los Cetes y el de los Bondes, concluyendo que es impreciso tomar el VaR de los Bondes como igual al VaR de los Cetes.

A pesar de que las diferencias entre ambos instrumentos pueden parecer no significativas, la realidad es que pueden subestimar las pérdidas máximas proporcionalmente al tamaño de la cartera en consideración, es entonces pertinente buscar una metodología más precisa para el cálculo de VaR en éstos instrumentos.

Apéndice A

Duración

Los bonos con plazos de vencimiento mayores tienen curvas de rendimiento menos continuas que aquellos con vencimientos más cortos, de donde se deduce que los precios de los bonos de largo plazoson más sensibles a los cambios en las tasas de interés que aquellos de corto plazo. Sin embargo el plazo de vencimiento en si mismo no da una medida cuantitativa completa de la sensibilidad de tasas de interes, por lo cual se usa la Duración para medir esta sensibilidad.

La duración de un instrumento de renta fija es un promedio ponderado de los tiempos en que los pagos (flujos) son realizados. Los coeficientes de ponderación son los valores presentes de cada uno de los flujos. Explícitamente, suponga que los flujos sobre un bono son recibidos en los tiempos t_0, t_1, t_2, ..., t_n, entonces la duración de este instrumento esta dada por:

$$D = \frac{VP(t_0)t_0 + VP(t_1)t_1 + VP(t_2)t_2 + ... + VP(t_n)t_n}{VP}$$

En esta fórmula, la expresión $VP(t_k)$ denota el valor presente de el pago efectuado en t_k, mientras el término VP en el denominador es el valor presente total del instrumento, el cual esta dado por

$$VP = \sum_{k=1}^{n} VP(t_k)$$

Dado que D es un promedio ponderado de los tiempos de pago, esta expresado en unidades de tiempo. La duración es un tiempo intermedio entre el primer y el último pago de cupón: $t_0 \leqslant D \leqslant t_n$. Claramente un bono cupón cero, que sólo hace un pago final al vencimiento, tiene duración igual a su fecha de vencimiento. Los bonos que pagan cupones tienen una duración menor que sus fechas de vencimiento.

La fórmula general de la duración se conoce como la Duración Macaulay. Suponga un instrumento financiero que hace pagos m veces al año, siendo el pago c_k el realizado en el período k y restan n periodos, la Duración de Macaulay es definida como

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(k/m)c_k/\left[1+(\lambda/m)\right]^k}{VP}$$

donde λ es el rendimiento a vencimiento y

$$VP = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\left[1+(\lambda/m)\right]^k} \tag{A.1}$$

Nótese que el factor k/m en el numerador de la fórmula para D, es tiempo medido en años. La ecuación es A.1 es el precio del bono. Ahora considérese el valor presente del cupón k

$$VP_k = \frac{c_k}{\left[1+(\lambda/m)\right]^k} \tag{A.2}$$

Y la expresión de A.1 vista como el cálculo del precio de un bono

$$P = \sum_{k=1}^{n} VP_k \tag{A.3}$$

La derivada de A.2 con respecto a λ es

$$\frac{dVP_k}{d\lambda} = \frac{(k/m)c_k}{\left[1+(\lambda/m)\right]^{k+1}} = \frac{k/m}{1+(\lambda/m)} VP_k \tag{A.4}$$

Aplicando A.4 a A.3 encontramos

$$\frac{dP}{d\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dVP_k}{d\lambda} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k/m)VP_k}{1+(\lambda/m)} = -\frac{1}{1+(\lambda/m)} DP \equiv -D_M P \tag{A.5}$$

El valor D_M es llamado la Duración Modificada. Nótese que DMD para valores grandes de m o pequeños valores de λ, de donde tenemos la sguiente relación de sensibilidad:

Definición 8 *La derivada del precio con respecto a λ sobre un activo de rendimiento fijo es:*

$$\frac{dP}{d\lambda} = -D_M P \tag{A.6}$$

donde $DM = D/\left[1+(\lambda/m)\right]$ es la duración modificada.

Esto último es más claro si se escribe A.6 como

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{d\lambda} = -D_M$$

El lado izquierdo es entonces el cambio relativo en el precio. Usando la aproximación $dP/d\lambda \approx \Delta P/\Delta\lambda$, la ecuación A.6 puede ser usada para estimar el cambio en el precio debido a un pequeño cambio en la tasa.

Glosario

A la par. Un instrumento se vende a la par cuando se paga su valor correspondiente a descuento en cualquier punto desde 0 a T, donde T es su fecha de vencimiento.

Bajo Par. Un instrumento se vende bajo par cuando se ofrece una sobretasa a la correspondiente a descuento en cualquier punto desde 0 a T, donde T es su fecha de vencimiento.

Bono Cupón Cero. Instrumento financiero de renta fija que se vende a descuento y hace un sólo pago al vencimiento.

Colocación a descuento. Un instrumento se coloca a descuento cuando su precio se calcula tomando el valor presente sobre un cierto flujo de capital, a una tasa determinada. Por ejemplo un bono cupon cero siempre es colocado a descuento, pues se vende al valor presente del principal a recibir al vencimiento.

Corto Plazo. Se considera convencionalmente que un instrumento es de corto plazo si tiene un vencimiento menor a un año

Curva de Rendimientos. Es una relación entre el tiempo (plazo de vencimiento) y el rendimiento de un instrumento financiero, dentro de un nivel de riesgo dado (volatilidad).

Curva libre de riesgo. Curva de rendimientos correspondiente a un instrumento libre de riesgo

Instrumento de Deuda (o Valor de Renta Fija). Generalmente bonos, instrumento financiero que genera un flujo de pagos predeterminado, debido a que los pagos son fijos, su valor fluctúa con los cambios en las tasas de interés.

Instrumento libre de riesgo. Instrumento financiero cuyo rendimiento no tiene volatilidad o incertidumbre implicada, es decir, no se ve afectado por los cambios es las tasas de interés existentes en el mercado.

Largo Plazo. Un instrumento se considera de largo plazo si su plazo de vencimiento es superior a un año

Llevar en curva. Se dice que una tasa es llevada en curva cuando se proyecta una estimación de ella a un plazo determinado, generalmente se trata de una tasa que corresponde a un instrumento con plazo distinto al que se desea.

Posición Propia. Cuando el Instrumento no deja de ser propiedad de quien lo coloca, en este caso el Gobierno Federal. Los tenedores reciben certificados por su inversión pero no pueden comerciar con el instrumento como propio.

Valor de renta Fija (Vease instrumentos de deuda)

Bibliografía

Banco de México. Nota Técnica Bondes 182. Banxico, México, abril de 2001.

Banco de México. Nota Técnica BondesT. Banxico, México, mayo de 2001.

Monetary & Exchange Affairs and Western Hemisphere Departments. El Sistema Financiero Mexicano. Banxico, México, octubre de 2001.

Hull, John C. Options, Futures & Other Derivatives. Cuarta Edición. Joseph L. Rotman School of Management University of Toronto. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2000.

Jorion, Philippe. Valor en Riesgo. Editorial Limusa- Mexder. Primera reimpresión. 2002.

Luenberger, David G. Investment Science. Stanford University. Nueva York, N.Y.: Oxford University Press, Inc., 1998.