

01173



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELACION Y SIMULACION DE UNA
TRAYECTORIA PARABOLICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA

P R E S E N T A :
ING. JAIME ISRAEL GONZALEZ ESTEVES

ASESOR: M.I. EUSEBIO JIMENEZ LOPEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA,

FEBRERO DEL 2005



m 342600



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

- **A Dios mi padre;** a ti padre que me has dado todo te dedico este logro, en adelante solo te pido dos cosas, la primera es que me des sabiduría y entusiasmo para lograr que con mis actos te sientas un padre orgulloso y la segunda es que me des humildad para que no importando que tan alto llegue o que tan grande sea nunca sea suficiente para dejar de voltear hacia ti.
- **A mi Madre;** Dios a puesto para cuidarme en la tierra al ángel mas delicado, gentil, honesto, ejemplar y cariñoso que pudiera existir y lo puso en ti mamá, tu valor , entusiasmo y lucha han sido inmejorables ejemplos de la forma en que debo enfrentar mi vida, gracias mamá, este logro también es para ti.
- **A mi Padre;** Verte junto a mi mamá caminando a su lado y trabajando con el entusiasmo de un chaval de 20 años me impulsa a seguir siempre adelante, toda mi vida has sido mi ejemplo, mi maestro, mi héroe, mi padre y mi amigo, gracias papá, este logro también es para ti.
- **A mis hermanos Juan y Miguel;** ambos son un ejemplo para mi y la forma valerosa en que enfrenta cada uno sus problemas es también un ejemplo de vida, trabajemos duro para que nuestros padres se sientan orgullosos de nosotros.
- **A mis amigos;** El destino nos puso en familias diferentes, pero Dios y nosotros supimos superar al destino por que nos hicimos hermanos, gracias a Jacobo mi hermano mayor, a Víctor el que mejor me conoce, a Renato mi seisenero, a Froilán, a Adrián, a Uriel, a Arturo, a Juan José y a Juan Carlos.
- **A la UNAM y a la DEPFI;** Les Prometo ejercer con pasión y orgullo mi profesión sin olvidar que soy un egresado de esta gran escuela y que por ello tengo una gran responsabilidad. “Por mi raza hablara el espíritu”
- **A mis profesores de la DEPFI;** Siempre agradeceré que hayan sido parte de mi vida y mi formación, su ejemplo de superación y búsqueda del conocimiento constituye el motor para que me siga superando y buscando la ciencia, gracias en especial al Dr, Luis A. Ferer, al M.I. Leopoldo González, al M.I. Francisco Cuenca y al M.I. Oscar Rendón.
- **A mi tutor Eusebio Jiménez López;** Gracias por apoyarme cuando por cuestiones personales iba a abandonar mis estudios, gracias por tu guía generosa, por tu palabra de apoyo y por tu consejo certero y a tiempo, gracias por ser duro cuando fue necesario y gracias por ayudarme a conseguir esta meta.

Asignado a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a utilizarse en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: José Isaac González

Estados

FECHA: 14/03/05

FIRMA: P. A. [Firma]

- **A mi princesa hermosa;** Tu eres la respuesta a mis mas grandes sueños y oraciones, gracias por ser la mujer maravillosa que eres, gracias por tu sonrisa, gracias por tu palabra de aliento, gracias por tu belleza, gracias por que toda vez que me he sentido solo ha bastado con traer la imagen de tu rostro a mi mente para sentirme seguro y acompañado.

Toda ves que me has dicho “por favor no me olvides” habrás de saber que mi corazón te *espera*, por lo tanto, no *esperes* que te olvide.

Índice

PRÓLOGO	I
RESUMEN	III
INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y premisas básicas	
1.1 Definición del problema	9
1.2 Hipótesis y premisas básicas	9
1.3 Algunas consideraciones sobre el problema de esta tesis	10
CAPITULO 2 Modelación cinemática de un robot cartesiano tipo PPP	
2.1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y premisas básicas	11
2.2 Algunas consideraciones importantes	12
2.3 Caracterización de robot cartesiano	12
2.4 Análisis de la configuración no deformada	14
2.5 Análisis en la configuración deformada	17
2.6 El modelo de velocidad	20
2.7 El modelo de aceleración	23
CAPITULO 3 Teoría de curvas	
3.1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y sistema de axiomas	25
3.2 Algunas consideraciones sobre el problema de caracterización de curvas	27
3.3 Curvas, cambio de parámetros y longitud de arco	27
3.3.1 Curvas	28
3.3.2 Cambio de parámetro	29
3.3.3 Longitud de curva	32
3.4 Tangencia y curvatura	37
3.5 Triedro móvil y torsión (doble curvatura)	42
3.6 Ecuaciones de Frenet	46
CAPITULO 4 Análisis de trayectoria de una curva parabólica	
4.1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y sistemas de axiomas	48
4.2 Las ecuaciones de movimiento	49
4.2.1 Las ecuaciones de posición	50
4.2.2 Ecuaciones de velocidad y aceleración	52
4.2.3 Las ecuaciones de movimiento en τ_1	

4.2.4	Las ecuaciones de movimiento en τ_2	54
4.2.4.1	Parametrización de la curva parabólica	61
4.2.4.2	Curva condicionada	62
4.2.4.3	Ecuaciones de posición en τ_2	63
4.2.4.4	Modelos de posición para $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$	64
4.2.4.5	La longitud de arco	65
4.2.4.6	Otra parametrización de la longitud de arco	68
4.2.4.7	Acoplamiento de las trayectorias $\tau_1 \cup \tau_2$	75
CONCLUSIONES		83
APÉNDICE		84
REFERENCIAS		102

Prólogo

Este trabajo de tesis tiene el propósito de generar conocimiento escrito para las futuras generaciones de la Maestría en Ingeniería Mecánica interesados en el análisis, modelación y simulación de trayectorias curvas.

Gran parte de las operaciones de manufactura que se realizan en la industria son ejecutadas por herramientas que se desplazan por rutas de trabajo rectilíneas. Sin embargo, algunas de dichas operaciones son complejas y se requiere del diseño y la planificación de trayectorias no rectilíneas. Así, operaciones de ensamble en la industria automotriz u operaciones espaciales y médicas requieren del análisis, modelación y simulación de trayectorias curvas.

En la literatura tradicional las trayectorias son analizadas en términos de sus expresiones paramétricas; es decir, basta con conocer el lugar geométrico de la trayectoria y asociar una curva. Posteriormente, se determinan sus ecuaciones paramétricas y se construye el modelo.

Sin embargo, el análisis formal de trayectoria debe ser realizado de manera rigurosa y sistemática, puesto que en realidad la teoría de curvas es relativamente compleja.

En trabajos recientes se han sistematizado los modelos de trayectorias tipo rectilíneas. De dicha sistematización se generó una metodología paso a paso la cual puede utilizarse para analizar, modelar y programar trayectorias compuestas por “n” lugares geométricos rectilíneos y “m” perfiles de trayectoria trapezoidales.

En este trabajo de tesis se sistematizan los modelos de una trayectoria de lugar geométrico tipo parabólico. Dichos modelos son acoplados con el movimiento de un robot cartesiano tipo PPP. Se discuten y analizan los conceptos fundamentales de la teoría de curvas en términos de las ecuaciones de Frenet.

A lo largo de todo el trabajo los problemas son planteados y solucionados usando los pasos

generales del Método Científico; pues, a dicho método, se le considera el más apropiado para resolver problemas en las ciencias y la tecnología y, puesto que la Ingeniería es ciencia y a la vez tecnología, es necesario usar el Método Científico.

Cabe señalar que los modelos de trayectoria serán programados y simulados en la plataforma de cálculo formal Mathematica. Se trata de mostrar como la sistematización de un modelo de trayectoria debe ser la misma en los procedimientos de la programación.

Finalmente, se agradece a todas aquellas personas que con sus valiosos criterios contribuyeron a la mejora del trabajo de tesis. Asimismo, la tesis forma parte de la línea de investigación “Simulación de sistemas de manufactura”, desarrollado en la Sección Mecánica de la DEPMI, UNAM e integra el archivo científico – tecnológico del laboratorio de Mecatrónica localizado en dicha sección.

Resumen

En esta tesis se analiza, modela, programa y simula una trayectoria continua del tipo parabólico. Son construidos los modelos cinemáticos de un robot cartesiano tipo PPP el cual se mueve en el espacio. Los modelos de la trayectoria y del robot son acoplados y, posteriormente programados en el lenguaje de cálculo formal Mathematica V4. Fue utilizado un polinomio de grado 5 para eliminar las discontinuidades de los perfiles teóricos trapezoidales relacionales con la trayectoria. Se presenta un estudio sistemático para determinar las ecuaciones de Frenet. El método utilizado para construir los modelos fue el Método Científico. Finalmente, los resultados obtenidos podrán ser utilizados para modelar trayectorias más complicadas.

Palabras clave: Trayectorias curvas, ecuaciones de Frenet, cinemática, robótica.

Introducción

En este trabajo de tesis se tratará de cumplir con los siguientes objetivos:

- Analizar, modelar, programar y simular una trayectoria continua parabólica.
- Construir los modelos cinemáticos de un robot cartesiano tipo PPP.
- Realizar un estudio sistemático de las ecuaciones de Frenet.
- Aplicar el Método Científico para formular y solucionar los problemas de trayectoria y del robot.
- Acoplar los modelos de la trayectoria y del robot y, posteriormente, programarlos y simular los movimientos en el paquete de cálculo formal Mathematica V4.

I.1 El motivo de la investigación

Lo que motiva a la investigación de este trabajo de tesis se resume de la manera siguiente:

“ El problema de la trayectoria es muy importante en la planificación y desarrollo de sistemas productivos [1], puesto que en todo aquello que tenga un movimiento específico se requiere del diseño de trayectorias. Máquinas, dispositivos mecánicos, líneas de producción, almacenes, etc., son los elementos de trabajo que componen un sistema de manufactura. Para que dicho sistema opere de forma correcta, es necesario de una buena y funcional planeación de las trayectorias de operación.

Por otro lado, muchos de los estudios orientados al estudio de las trayectorias no presentan un análisis sistemático el cual permite desarrollar con todo rigor los modelos de trayectorias continuas no rectilíneas. Quizás es porque dichos estudios son presentados en forma sintética o porque las aplicaciones no requieren del rigor teórico.

Cualesquiera que sea la causa, es necesario construir metodologías paso a paso que muestren los procedimientos analíticos y sintéticos realizados para modelar trayectorias. Todo esto con el fin de solucionar problemas relacionados con trayectorias de una manera contundente y precisa.

Recientemente se ha propuesto un método paso a paso para analizar y modelar trayectorias continuas rectilíneas [2]. Las aplicaciones de tal metodología han sido sistemáticas. Por ejemplo en [3 ,4], se modeló una trayectoria continua compuesta por 42 segmentos rectilíneos asociados con los lugares geométricos y 42 segmentos rectilíneos relacionados con el perfil de trayectoria. Dicha trayectoria está asociada con una operación de soldadura para un componente electrónico. En [5] se analizaron trayectorias rectilíneas para un problema de intersección de trayectorias. Sin embargo, tal metodología no puede utilizarse para analizar trayectorias no rectilíneas. Por tanto, el objetivo de este trabajo es estudiar una trayectoria parabólica; es decir, no rectilínea y, con dicho estudio, completar la metodología desarrollada por [2], con el propósito que pueda generalizarse para su aplicación en el análisis, modelación, programación y simulación de trayectorias no rectilíneas. ”

I.2 El Método Científico

Para plantear y solucionar problemas, generalmente en las ciencias, se utiliza el Método Científico. De acuerdo con [6] dicho método se define de la manera siguiente:

“ Es la aplicación general y sistemática de la Lógica. ”

Es un hecho, pues, que tal definición del Método Científico permite su uso generalizado no solo en las ciencias exactas sino también en otras disciplinas que se consideran no exactas como las derivadas del pensamiento social y artístico. De hecho, la tecnología al basar en la ciencia sus avances, usa la lógica en los problemas que se plantean y solucionan en el desarrollo tecnológico

La ingeniería Mecánica vista en este contexto es, por tanto, una ciencia aplicada. Así será posible aplicar el Método Científico para plantear y solucionar problemas no solo en la Ingeniería Mecánica sino también en sus campos afines.

Los pasos generales del Método Científico se resumen de la manera siguiente:

- 1) Definir, en forma sintética, el problema por solucionar.
- 2) Definir las restricciones del problema.
- 3) Formular una hipótesis o un conjunto de hipótesis.
- 4) Definir las premisas o axiomas de referencia.
- 5) Llegar a la solución del problema partiendo de las premisas.
- 6) Probar que la solución del problema satisface las premisas, los axiomas y las restricciones con la cual dicha solución se considerará válida.

Es importante señalar que, puesto que el Método Científico es la aplicación general y sistemática de la Lógica, sus pasos deben estar escritos en términos de proposiciones. Asimismo, para llegar a la solución del problema se pueden utilizar una sistematización lógica inductiva o deductiva y, al mismo tiempo, las operaciones de análisis y síntesis deben ser efectuadas con precisión.

En este trabajo de tesis se utilizarán los pasos del Método Científico descritos anteriormente para plantear y solucionar los problemas de la trayectoria y del robot cartesiano.

I.3 Algunas consideraciones importantes relacionadas con las trayectorias

De acuerdo con [7], una trayectoria es el lugar geométrico que describe un punto en el espacio. Por otro lado, en [2] define la trayectoria en términos de los elementos que la componen:

“ Una trayectoria está compuesta por:

- 1) Un sistema de lugares geométricos.
- 2) Un sistema de perfiles teóricos de la trayectoria.”

Los lugares geométricos son, en general descritos por curvas ya que una recta es, por definición, una curva en la cual la curvatura y la torsión son nulas.

Los perfiles teóricos de trayectoria son gráficas construidas en el sistema $\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}$; es decir, se generan por medio de funciones que tienen dominio en el tiempo (\mathcal{R}^+) e imagen en los números reales.

De acuerdo con [2], el acoplamiento entre lugares geométricos y las funciones de los perfiles de trayectoria constituyen en forma general una “trayectoria de operación”.

En [8] se clasifican las trayectorias en:

- 1) Continuas.
- 2) Punto a punto.

Una trayectoria es continua si el desplazamiento de una partícula es continuo a lo largo del lugar geométrico. Las trayectorias punto a punto se caracterizan por definir un punto inicial y uno final por los cuales pasará una partícula o herramienta. En este tipo de trayectorias no se analiza las formas en que son alcanzados los puntos.

El diseño y planificación de sistemas productivos exige que las trayectorias de operación sean analizadas con cuidado y con detalle. Así, se requiere, en principio diseñar las rutas de trabajo de las herramientas [9]. Una vez definidas las rutas según se describe en [2], se procede a construir las ecuaciones de posición de las herramientas en el espacio – tiempo.

Cabe señalar que, en general, el perfil (gráfico) teórico de velocidades es conocido o se construye. De dicha gráfica, se procede en forma analítica, a generar su función de

velocidades asociada y, posteriormente, a partir de la función de velocidades, se generan las funciones de desplazamiento y aceleración, así como sus respectivas gráficas (perfiles) asociadas.

Al relacionar las ecuaciones de movimiento con las funciones de los perfiles de trayectoria se generan, finalmente los modelos cinemáticos, es decir;

- 1) Modelo de desplazamiento.
- 2) Modelo de velocidad.
- 3) Modelo de aceleración.

Es importante señalar que, en general, los perfiles de trayectoria teóricos presentan, en ciertos puntos de las gráficas, discontinuidades las cuales se deben evitar o eliminar. De acuerdo con [8], se pueden utilizar polinomios de grado 5 y 8, con sus respectivas primeras y segundas derivadas, para eliminar las discontinuidades.

Los polinomios se construyen a partir de los datos cinemáticos descritos en los perfiles teóricos de la trayectoria. Una vez generados dichos polinomios, estas sustituyen las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración. Por tanto, el modelo de trayectoria debe considerar el uso de polinomios para eliminar discontinuidades [2,3,4].

Es importante señalar que, el polinomio de grado 8 es, generalmente, inestable y su uso debe ser cuidadoso. En este trabajo de tesis se utilizarán polinomios de grado 5 para eliminar las discontinuidades.

Por otro lado, en las trayectorias tipo rectilíneas, la orientación del movimiento de la herramienta es siempre constante a lo largo del lugar geométrico. Esto no ocurre en las trayectorias no rectilíneas. Además, la incorporación o, más bien dicho, las relaciones entre las funciones reales de los perfiles de trayectoria y las ecuaciones de movimiento, para el caso de trayectorias rectilíneas son de alguna manera directas.

En cambio, en las trayectorias no rectilíneas, dichas relaciones no son directas. Se tiene que encontrar una relación en función de la longitud de curva la cual puede relacionarse con las funciones del movimiento de la herramienta. En un segmento rectilíneo, la curvatura y la torsión (propiedades intrínsecas de toda curva que dependen de la longitud de arco) son cero. Para el caso de lugares geométricos no rectilíneos dichos parámetros no son nulos [10].

Toda curva en el espacio queda determinada al conocer su curvatura y su torsión (doble curvatura). Para el caso de curvas planas, la torsión es nula y la curvatura no es nula; es decir, depende de ciertas relaciones geométricas [10]

Las ecuaciones de Frenet [10], son utilizadas para caracterizar y modelar curvas tanto en el espacio como en el plano. Dichas ecuaciones relacionan la tangencia, curvatura y torsión en función de la longitud de arco visto como parámetro natural.

Con las ecuaciones de Frenet es posible determinar toda clase de curvas. En general, las curvas espaciales son difíciles de modelar con las Ecuaciones de Frenet, en cambio las curvas planas no presentan gran complejidad.

En este trabajo de tesis se discuten los conceptos y relaciones que permiten comprender las ecuaciones de Frenet. Esto con el propósito de que, en investigaciones futuras, se tenga una referencia teórica general, para deducir toda clase de curvas y poder aplicar la teoría de curvas con todo rigor para el análisis de trayectoria.

La curva que será analizada en este trabajo de tesis, es una parábola y el algoritmo desarrollado, producto del modelo teórico de la trayectoria, permitirá generar una parábola en el espacio – tiempo conociendo tres puntos de dicha curva.

Es importante señalar que, en esta tesis, no se presenta una deducción sistemática de la parábola a partir de las Ecuaciones de Frenet, pues el objetivo principal es caracterizar el modelo de la trayectoria sobre la base de una metodología de aplicación.

I.5 Investigaciones en trayectoria

Diversas investigaciones han sido orientadas al estudio y la planificación de trayectorias. Por ejemplo, en [12] se estudia una trayectoria para el pulimento de piezas metálicas usando un robot e información basada en sistemas CAM (Computer Aided Manufacturing). Aquí, no se presenta un procedimiento explícito del análisis de trayectoria. Otros estudios se han orientado al estudio y planificación de trayectorias para la evasión de obstáculos. En un trabajo presentado en [13], se propone un método para la planeación óptima de trayectoria para robots manipuladores que evaden obstáculos móviles. Utiliza funciones B-spline y un polinomio cúbico para la planeación de trayectorias. En el trabajo propuesto en [14] se estudia un modelo dinámico basado en la generación de trayectoria de un manipulador móvil. Aquí, se utilizan algoritmos genéticos para el modelado y un polinomio de grado 5 para suavizar los perfiles de trayectoria relacionadas con las juntas articulares del robot. En el trabajo presentado en [15] se utiliza un método para determinar las características no lineales dinámicas de un robot manipulador usando franjas de trayectoria. Aquí, se modela una trayectoria punto a punto y un perfil de trayectoria senoidal.

I.6 La tesis y resumen del capitulado

En este trabajo de tesis se analizará una trayectoria curva plana del tipo parabólica con el objetivo de construir su modelo, el cual pueda ser simulado en una computadora. En forma paralela, se construirán los modelos cinemáticos de un robot cartesiano tipo PPP. Los modelos del robot y de la trayectoria se acoplan y son programados y simulados en la plataforma de cálculo formal Mathematica V4 [11].

Con los resultados del modelo de la trayectoria curva, se completaron los pasos de la metodología desarrollada en [2] con el propósito de generalizarla.

Cada modelo analizado es obtenido usando el Método Científico[6]. Se pretende mostrar que la utilización de dicho método simplifica y clarifica el planteamiento y solución de problemas

en el campo de la Ingeniería Mecánica.

Este trabajo de tesis está compuesto de 4 capítulos y un apéndice los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo 1 se define, con el Método Científico, el problema general de esta tesis, sus restricciones, así como una hipótesis y un sistema de premisas básicas. Se discuten algunas consideraciones relacionadas con el alcance de la investigación.

En el capítulo 2 se construyen, de manera sistemática, los modelos cinemáticos del robot cartesiano. Son formulados los problemas directos e inversos cinemáticos. Se analizan dos configuraciones del robot: la no deformada y la deformada.

En el capítulo 3 se discuten las relaciones geométricas y conceptos de la teoría general de curvas. Se definen los términos curva, longitud de curva, tangencia, curvatura, y torsión, además, se discuten las ecuaciones de Frenet.

En el capítulo 4 se caracteriza la trayectoria parabólica. Se construyen sus modelos, en forma sistemática y se proporcionan los pasos generales para analizar otros tipos de trayectorias curvas no rectilíneas planas.

Finalmente, se dan las conclusiones de esta tesis, así como un apéndice en el cual, se presenta el código de programación de la trayectoria descrito en el lenguaje de programación Mathematica V4.

Capítulo 1

Definición del problema, restricciones, hipótesis y premisas básicas

Introducción. En este capítulo se define el problema por solucionar en este trabajo de tesis y sus restricciones, así como una hipótesis y un sistema de premisas básicas. El objeto es usar el método [6] para plantear el problema en forma conceptual y, posteriormente, sistematizar dicho problema usando un proceso lógico-inductivo.

1.1 Definición del problema

“Se requiere modelar, programar y simular el comportamiento cinemático de un robot”.

Las restricciones del problema son:

- 1) El robot consta de tres eslabones rígidos articulados conectados por juntas del tipo prismático y su movimiento es en el espacio y es del tipo cartesiano.
- 2) El desplazamiento del robot es en el espacio (X, Y, Z)
- 3) El lugar geométrico de la trayectoria es parabólico.
- 4) Los perfiles de trayectoria son trapezoidales.
- 5) Las funciones de análisis son de la clase C^3 *[10].

1.2 Hipótesis y premisas básicas

En esta sección se propone una hipótesis la cual conducirá a solucionar el problema definido en la sección anterior, así como un conjunto de premisas básicas; esto es:

* Las funciones de la clase C^3 se definen como el conjunto de todas las funciones al menos tres veces continuamente diferenciables.

- Hipótesis:

“Es posible modelar el comportamiento cinemático de un robot a partir de la geometría”

- Reglas de inferencia

- 1) La solución del problema depende de todas las reglas de inferencia de la geometría

1.3 Algunas consideraciones sobre el problema de esta tesis

En esta sección se discuten algunas consideraciones de interés relacionadas con el problema, sus restricciones, así como la hipótesis y el sistema de premisas básicas. De acuerdo con la definición del problema dada en la sección 1.1 de este capítulo, el comportamiento mecánico del robot es puramente cinemático y por tanto, las fuerzas que producen el movimiento no son consideradas para el análisis.

Por otro lado, es claro que el concepto de cinemática implica la geometría; es decir, la cinemática es la geometría del movimiento, de ello se sigue que el problema formulado en esta tesis se solucionará mediante la aplicación de las reglas de inferencia de la lógica y la geometría, de allí la razón de la hipótesis. Además, el modelo de la trayectoria se analiza usando la geometría diferencial, en particular las leyes de Frenet [10]. En este sentido las funciones de análisis son del tipo continuas.

Capítulo 2

Modelación cinemática de un robot cartesiano tipo PPP

Introducción. En este capítulo se construyen los modelos cinemáticos relacionados con un robot cartesiano tipo PPP de 3GDL. Son formulados los problemas directos e inversos de posición, velocidad y aceleración relacionados con dicho robot. Se usará la operación binaria $\oplus: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ [16] para modelar las traslaciones de los eslabones que componen el robot cartesiano.

2.1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y premisas básicas

En esta sección se define el problema por solucionar en este capítulo, sus restricciones, una hipótesis y un conjunto de premisas básicas; esto es:

Problema:

“Modelar el comportamiento cinemático de un robot cartesiano”

Restricciones:

- 1) El robot está compuesto por tres eslabones conectados por juntas prismáticas del tipo P.
- 2) El movimiento del robot es en el espacio euclidiano de puntos.
- 3) No se incluye el análisis de la trayectoria.
- 4) Las funciones son continuas y al menos 3 veces diferenciables[10].

Hipótesis:

“El modelo cinemática del robot se construye usando la geometría “

2.2 Algunas consideraciones importantes

En esta sección se discuten algunas consideraciones importantes relacionadas con el problema definido anteriormente y con el proceso de sistematización.

El estudio es centrado solo en el comportamiento cinemático que implica el análisis del desplazamiento, velocidad, aceleración y trayectoria. Sin embargo, el modelo de trayectoria será analizado en el capítulo 4 de esta tesis. Por otro lado, el hecho de prescindir del estudio de trayectoria, permitirá modelar el comportamiento cinemático del robot en dos configuraciones [17,18]:

- 1) La no deformada.
- 2) La deformada.

Nótese que el término “deformada” no está asociado con los cambios de geometría de los eslabones sino más bien con los desplazamientos, puesto que una rotación y/o un desplazamiento se consideran deformaciones rígidas [7].

Por otro lado, el proceso de sistematización que se utilizará en este capítulo, es el lógico inductivo; es decir, primero se construirán los modelos de posicionamiento y, posteriormente, los modelos de velocidad y, finalmente los modelos de aceleración.

2.3 Caracterización de robot cartesiano

En esta sección se presenta la arquitectura del robot cartesiano motivo de estudio en este trabajo de tesis. Dicho robot está compuesto por tres eslabones rígidos llamados E_1 , E_2 y E_3 conectados por pares prismáticos (P). El movimiento del robot esta restringido al espacio

euclidiano de puntos en tres dimensiones ϵ . La figura 2.1 muestra la arquitectura del robot cartesiano.

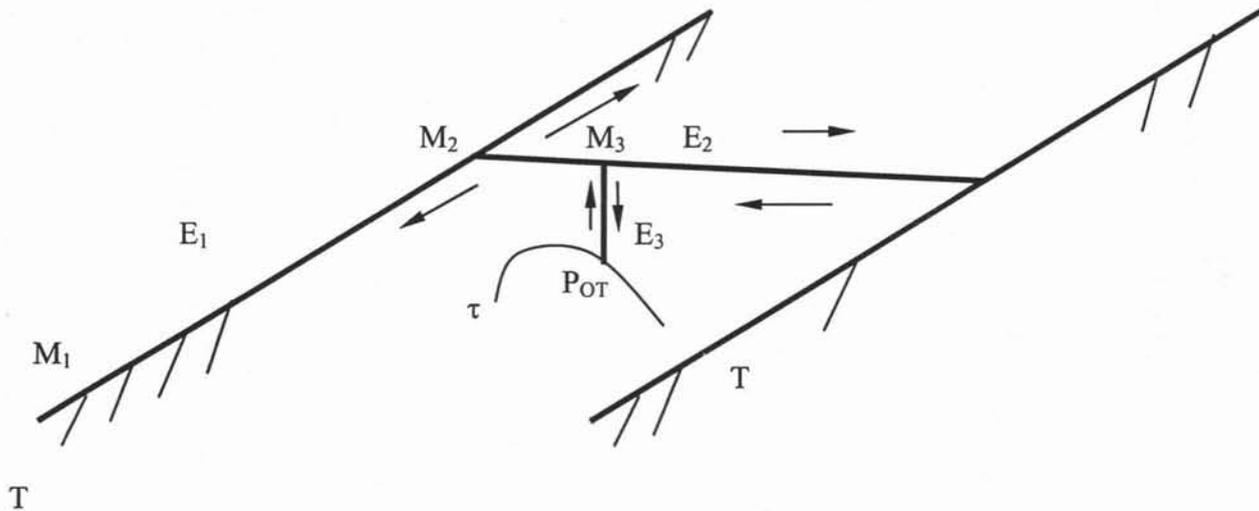


Figura 2.1 Arquitectura del robot cartesiano

El eslabón E_1 es activado por el actuador M_1 , en tanto los eslabones E_2 y E_3 se mueven por medio de los actuadores M_2 y M_3 como se muestra en la figura 2.1. El punto $pot \in E_3$ llamado “punto terminal” está obligado, en este caso, a describir una trayectoria “ τ ” en “ ϵ ”. Por otro lado, al fijar en el tiempo al robot, es posible representarlo de la manera siguiente:

$$RC = T \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Donde “T” es el eslabón tierra. Las juntas prismáticas se representan por medio de las intersecciones siguientes:

- 1) $P_1 = T \cap E_1$
- 2) $P_2 = E_1 \cap E_2$
- 3) $P_3 = E_2 \cap E_3$

2.4 Análisis de la configuración no deformada

En esta sección se construirán las ecuaciones de posición asociadas con el robot cartesiano motivo de estudio mostrado en la figura 2.1. La posición que guarda el robot en dicha figura es llamada “no deformada” o “configuración de referencia” [17,18,19,20].

Para poder analizar la configuración no deformada del robot, es necesario asociar vectores de posición sobre los eslabones que lo componen y vectores que permiten localizar desde el origen “o” los puntos “1, 2, 3” y $pot \in E_3$. Dichos vectores se muestran en la figura 2.2

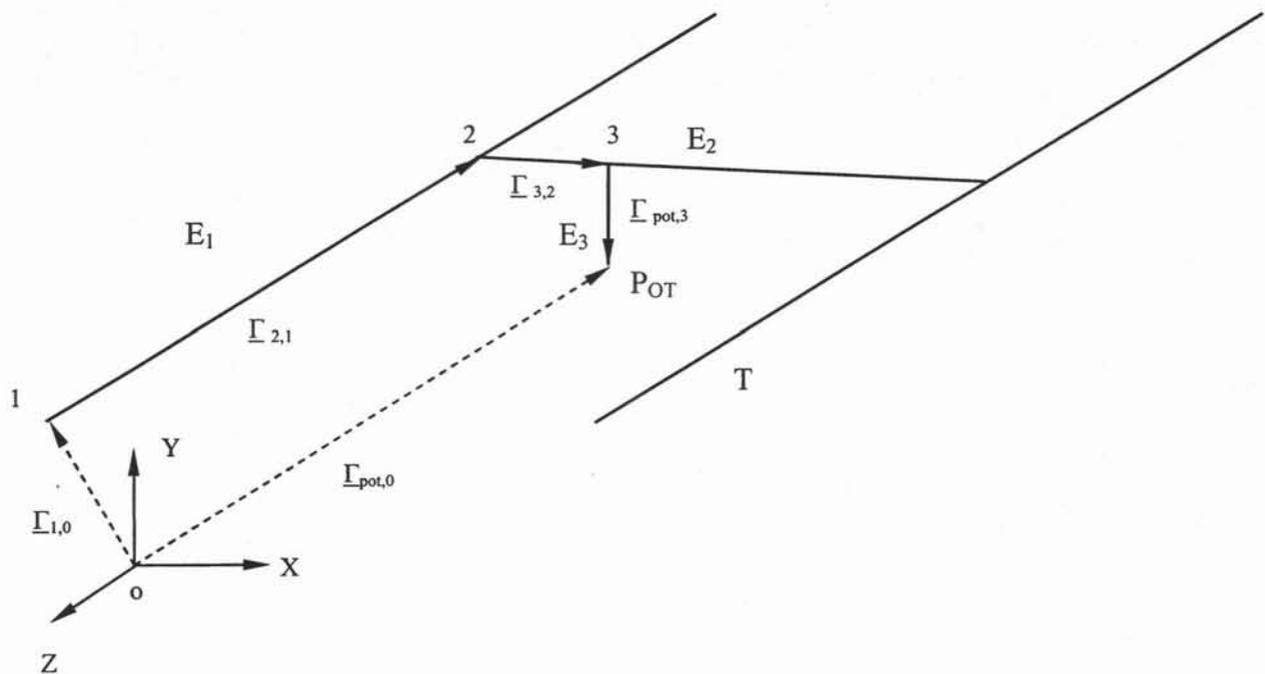


Figura 2.2 Vectores de posición en la configuración no deformada

Los vectores de posición mostrados en la figura anterior se pueden representar de la manera siguiente:

- 1) $\underline{\Gamma}_{pot,0} = pot - (0)$
- 2) $\underline{\Gamma}_{1,0} = (1) - (0)$

- 3) $\underline{\Gamma}_{2,1} = (2) - (1)$
- 4) $\underline{\Gamma}_{3,2} = (3) - (2)$
- 5) $\underline{\Gamma}_{\text{pot},3} = (\text{pot}) - (3)$

Por tanto, las coordenadas del punto $\text{pot} \in E_3$ se determinan desde el origen "o" de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_{\text{pot},0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{2,1} \oplus \underline{L}_{3,2} \oplus \underline{L}_{\text{pot},3} \quad (2.1)$$

Considere ahora que sobre los eslabones que componen el robot RC se definen sistemas locales como se muestra en la figura 2.2.

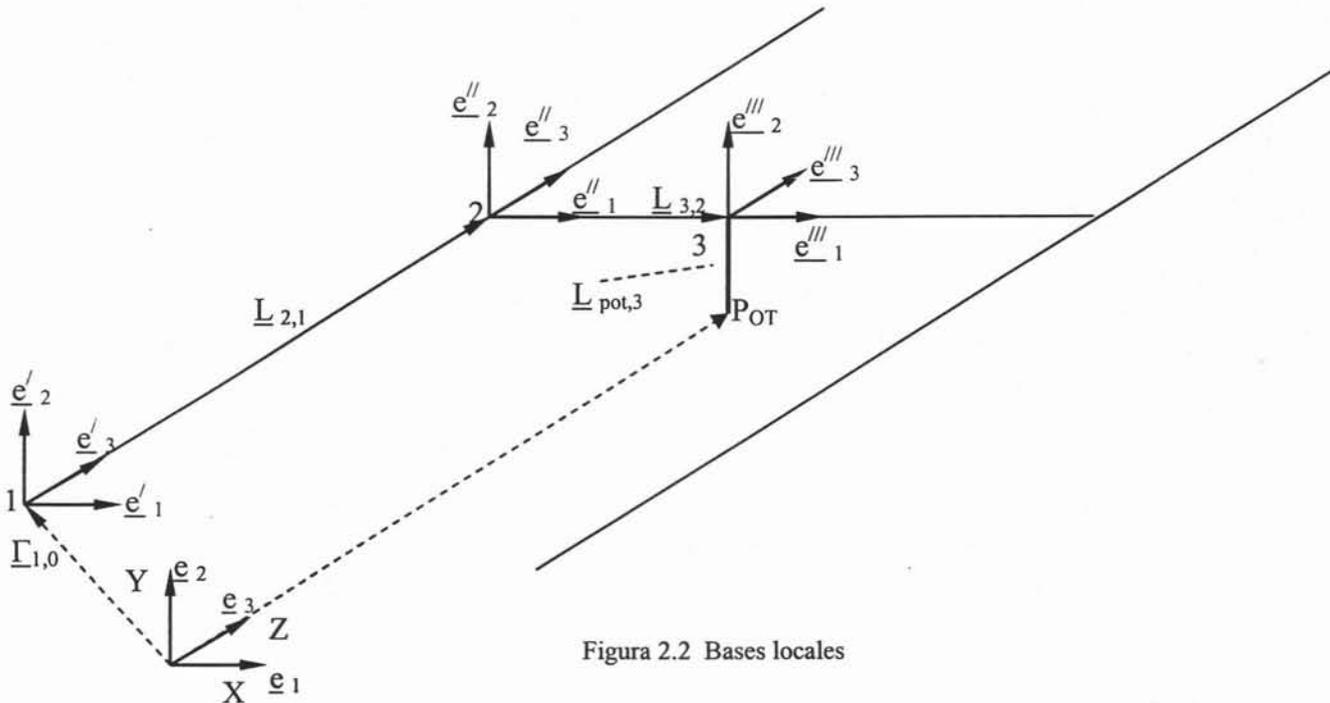


Figura 2.2 Bases locales

De acuerdo con la figura anterior, los vectores de posición $\underline{L}_{2,1}, \underline{L}_{3,2}, \underline{L}_{\text{pot},3} \in \mathbb{R}^3$ se escriben en términos de los sistemas locales de la manera siguiente:

$$1) \underline{L}_{2,1} = l_{2,1} \bullet \underline{e}_3' \quad (2.2)$$

$$2) \underline{L}_{3,2} = l_{3,2} \bullet \underline{e}_1''$$

$$3) \underline{L}_{pot,3} = l_{pot,3} \bullet \underline{e}_2'''$$

Aquí, $l_{2,1}$, $l_{3,2}$, $l_{pot,3} \in R$ son las longitudes de los vectores. Por tanto, la expresión (2.1) se puede escribir en términos de las bases locales; esto es:

$$\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \bullet \underline{e}_3' \oplus l_{3,2} \bullet \underline{e}_1'' \oplus l_{pot,3} \bullet \underline{e}_2'''^* \quad (2.3)$$

Por otro lado, las bases locales \underline{e}_j' , \underline{e}_j'' , $\underline{e}_j''' \in R^3$ son traslaciones rígidas de la base inercial $\underline{e}_j \in R^3$ localizada en origen "o" según se muestra en la figura 2.2. Por tanto,

$$1) \underline{e}_3' = \underline{e}_3 \quad (2.4)$$

$$2) \underline{e}_2'' = \underline{e}_2$$

$$3) \underline{e}_1''' = \underline{e}_1$$

La expresión (2.3) se escribe en términos de la base inercial fija de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus l_{2,1} \bullet \underline{e}_3 \oplus l_{3,2} \bullet \underline{e}_1 \oplus l_{pot,3} \bullet \underline{e}_2 \quad (2.5)$$

- **Formulación del problema cinemático directo en la configuración no deformada**

"Dados, $\underline{\Gamma}_{1,0} \in R^4$, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{pot,3} \in R$, encuentre, $\underline{\Gamma}_{pot,0} \in R^4$ tal que la expresión (2.5) sea satisfecha".

- **Formulación del problema cinemático inverso en la configuración no deformada**

* Considere el signo negativo para el tercer termino del vector que define el elemento final $\underline{\Gamma}_{pot,0} \in R^4$ ya que $l_{pot,3} \bullet \underline{e}_2'''$ esta en la dirección negativa de la base local

“Dados, $\Gamma_{1,0} \in \mathbb{R}^4$ y $\Gamma_{pot,0} \in \mathbb{R}^4$ encuentre, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{pot,3} \in \mathbb{R}$ tal que la expresión (2.5) sea satisfecha”.

2.5 Análisis en la configuración deformada

En esta sección se construirán las ecuaciones de posición asociadas con el punto $pot \in \mathbb{R}^3$ una vez realizado el movimiento del multicuerpo a través de traslaciones rígidas sucesivas realizadas por los actuadores M_1 , M_2 y M_3 . La configuración así obtenida, es llamada deformada [17,18,19,20]. La figura siguiente muestra el robot RC en la configuración deformada:

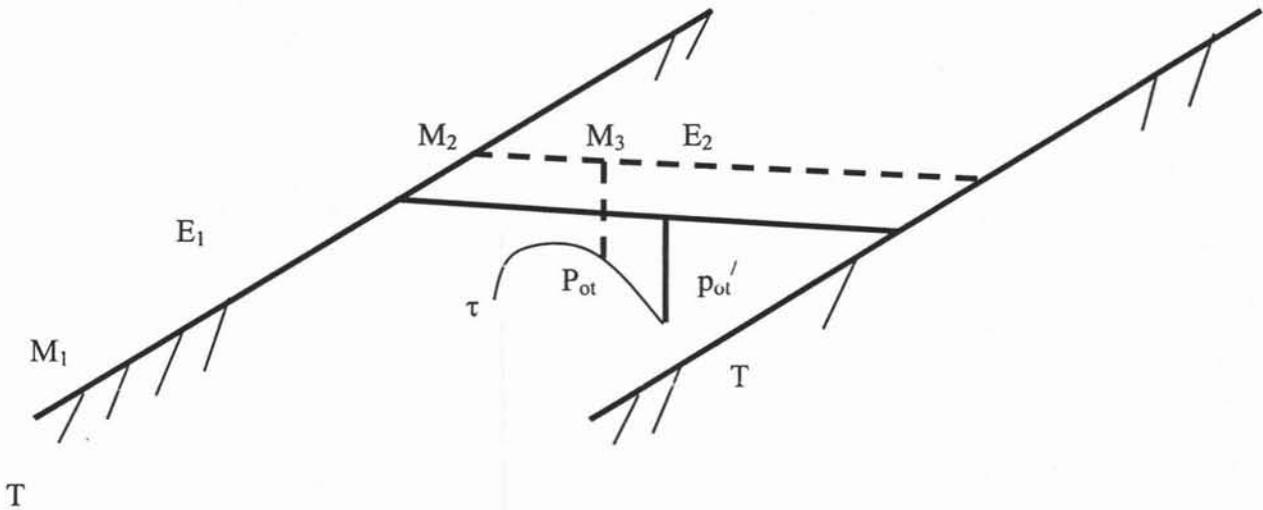


Figura 2.3. Configuración deformada del robot cartesiano

Para modelar la posición del robot en la configuración deformada se procederá, al igual que en la sección anterior, definiendo vectores de posición sobre dicha configuración. Tales vectores se muestran en la figura 2.4. De acuerdo con la figura 2.4, las nuevas coordenadas del punto $pot \in \mathbb{R}^3$ medidas desde el punto “o” se encuentran por medio de la siguiente expresión:

$$\Gamma'_{pot,0} = \Gamma'_{1,0} \oplus \underline{L}'_{2,1} \oplus \underline{L}'_{3,2} \oplus \underline{L}'_{pot,3} \quad (2.6)$$

Nótese que $\Gamma'_{1,0} = \Gamma_{1,0}$. Por otro lado, al igual que en la sección anterior, se definen sistemas locales sobre los eslabones que componen el robot cartesiano motivo de estudio. Dichos sistemas son llamados “deformados” y se muestran en la figura 2.5.

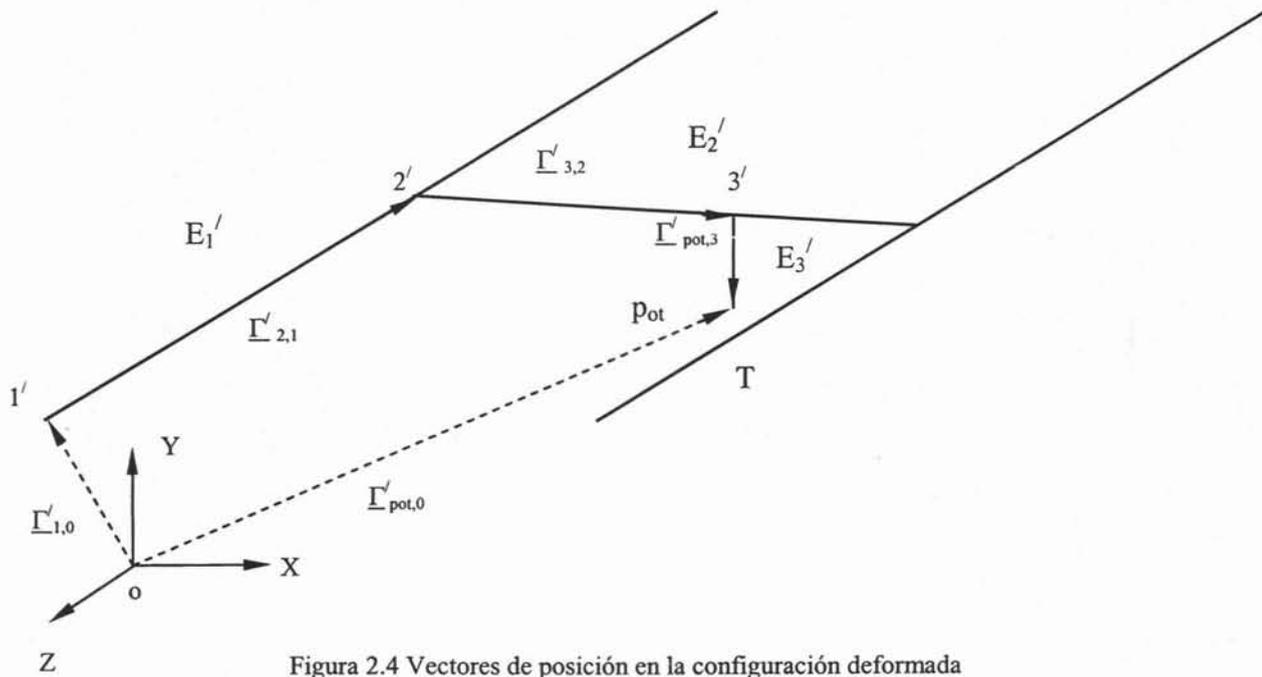


Figura 2.4 Vectores de posición en la configuración deformada

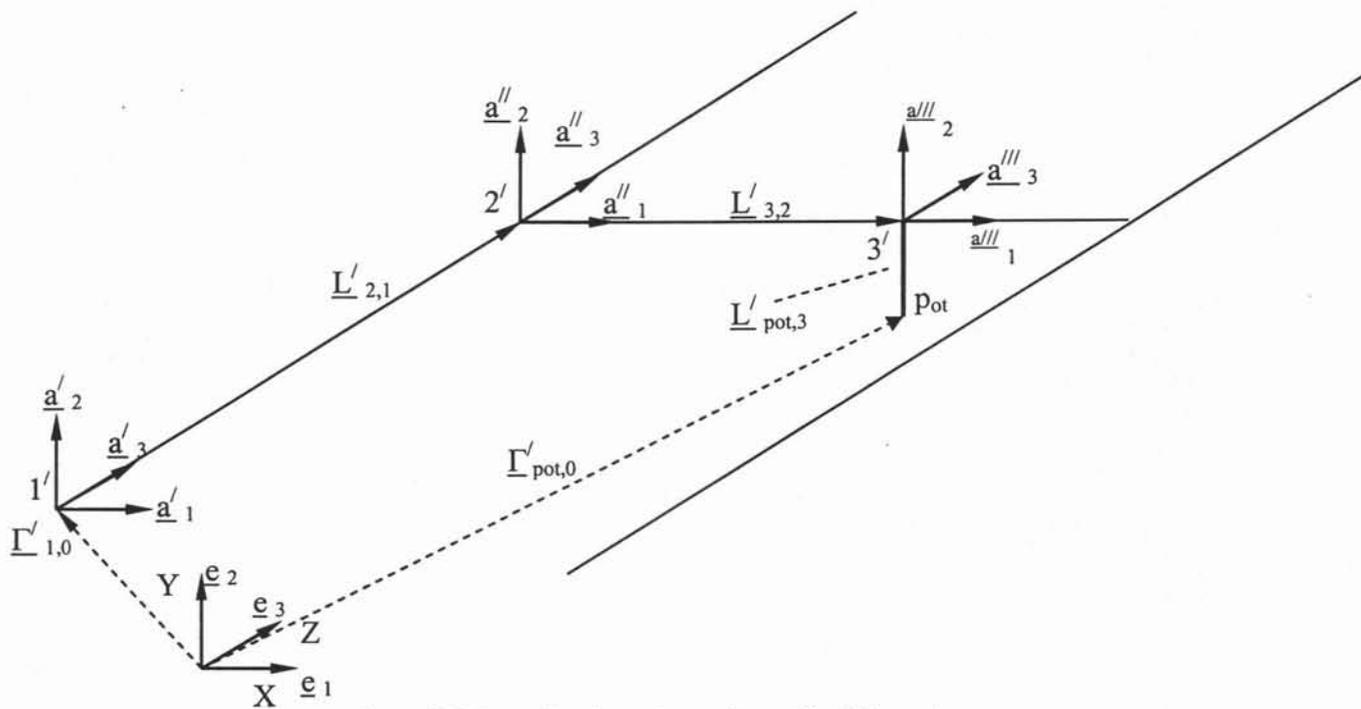


Figura 2.5. Bases locales en la configuración deformada

De acuerdo con la figura 2.5, los vectores $\underline{L}'_{2,1}$, $\underline{L}'_{3,2}$, $\underline{L}'_{pot,3} \in \mathbb{R}^3$ se pueden escribir en términos de los sistemas locales deformados; esto es:

- 1) $\underline{L}'_{2,1} = l'_{2,1} \bullet \underline{a}_3'$ (2.7)
- 2) $\underline{L}'_{3,2} = l'_{3,2} \bullet \underline{a}_1''$
- 3) $\underline{L}'_{pot,3} = l'_{pot,3} \bullet \underline{a}_2'''$

Por tanto, la expresión 2.6 se escribe en términos de los sistemas locales deformados de la manera siguiente

$$\underline{\Gamma}'_{pot,0} = \underline{\Gamma}'_{1,0} \oplus l'_{2,1} \bullet \underline{a}_3' \oplus l'_{3,2} \bullet \underline{a}_1'' \oplus l'_{pot,3} \bullet \underline{a}_2''' \quad (2.8)$$

Por otro lado, las bases locales deformadas son traslaciones rígidas de las bases no deformadas y éstas, a su vez, son traslaciones rígidas de la base inercial fija. Por tanto,

- 1) $\underline{a}_3' = \underline{e}_3' = \underline{e}_3$ (2.9)
- 2) $\underline{a}_1'' = \underline{e}_1'' = \underline{e}_1$
- 3) $\underline{a}_2''' = \underline{e}_2''' = \underline{e}_2$

La expresión 2.8 se escribe entonces en términos de la base inercial fija según las expresiones (2.9), de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}'_{pot,0} = \underline{\Gamma}'_{1,0} \oplus l'_{2,1} \bullet \underline{e}_3 \oplus l'_{3,2} \bullet \underline{e}_1 \oplus l'_{pot,3} \bullet \underline{e}_2 \quad (2.10)$$

- **Formulación del problema cinemático directo de posición en la configuración deformada**

“Dados, $\underline{\Gamma}'_{1,0} \in \mathbb{R}^4$, $l'_{2,1}, l'_{3,2}, l'_{pot,3} \in \mathbb{R}$, encuentre, $\underline{\Gamma}'_{pot,0} \in \mathbb{R}^4$ tal que la expresión (2.10) sea satisfecha”.

- **Formulación del problema cinemático inverso de posición en la configuración deformada**

“Dados, $\underline{\Gamma}'_{1,0} \in \mathbb{R}^4$ y $\underline{\Gamma}'_{pot,0} \in \mathbb{R}^4$ encuentre, $l'_{2,1}, l'_{3,2}, l'_{pot,3} \in \mathbb{R}$ tal que la expresión (2.10) sea satisfecha”.

2.6 El modelo de velocidad

En esta sección se construyen los modelos de velocidad asociados con el robot cartesiano motivo de estudio. Para ello, se usarán funciones del tipo $l: J \rightarrow \mathbb{R}$ y $\underline{\Gamma}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $J \in [0, +\infty)$ es un intervalo de tiempo.

Las coordenadas del punto $pot' \in \mathbb{R}^3$ medidas desde el origen “o” y en el tiempo $t \in J$ se encuentran al expresar la ecuación (2.6) en términos del tiempo $t \in J$ de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}'_{pot,0}(t) = \underline{\Gamma}'_{1,0}(t) \oplus \underline{L}'_{2,1}(t) \oplus \underline{L}'_{3,2}(t) \oplus \underline{L}'_{pot,3}(t) \quad (2.11)$$

Por tanto, la velocidad del punto $pot' \in \mathbb{R}^3$ se encuentra al derivar con respecto al tiempo $t \in J$, la expresión (2.11). Esto es:

$$\dot{\underline{\Gamma}}'_{pot,0}(t) = \dot{\underline{\Gamma}}'_{1,0}(t) \oplus \dot{\underline{L}}'_{2,1}(t) \oplus \dot{\underline{L}}'_{3,2}(t) \oplus \dot{\underline{L}}'_{pot,3}(t) \quad (2.12)$$

Por otro lado, las expresiones (2.7) se escriben en términos del tiempo $t \in J$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{L}'_{2,1}(t) &= (l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a}_3'(t)) & (2.13) \\
 2) \quad \underline{L}'_{3,2}(t) &= (l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a}_1''(t)) \\
 3) \quad \underline{L}'_{pot,3}(t) &= (l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a}_2'''(t))
 \end{aligned}$$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las expresiones (2.13) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{\Gamma}'_{1,0}(t) &= 0 & (2.14) \\
 2) \quad \underline{L}'_{2,1}(t) &= (l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a}_3'(t)) \dot{=} l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a}_3'(t) \oplus l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a}_3'(t) \\
 3) \quad \underline{L}'_{3,2}(t) &= (l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a}_1''(t)) \dot{=} l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a}_1''(t) \oplus l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a}_1''(t) \\
 4) \quad \underline{L}'_{pot,3}(t) &= (l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a}_2'''(t)) \dot{=} l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a}_2'''(t) \oplus l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a}_2'''(t)
 \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión (2.12) se escribe en términos de las ecuaciones (2.14) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \Gamma'_{pot,0}(t) &= l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a}_3'(t) \oplus l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a}_3'(t) \oplus l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a}_1''(t) \oplus l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a}_1''(t) \oplus l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a}_2'''(t) \oplus \\
 & l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a}_2'''(t) & (2.15)
 \end{aligned}$$

Cabe señalar que,

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{a}_3'(t) &= \underline{e}_3'(t) = \underline{e}_3(t) = \underline{0} & (2.16) \\
 2) \quad \underline{a}_2''(t) &= \underline{e}_2''(t) = \underline{e}_2(t) = \underline{0} \\
 3) \quad \underline{a}_1'''(t) &= \underline{e}_1'''(t) = \underline{e}_1(t) = \underline{0}
 \end{aligned}$$

Las relaciones (2.16) reducen la expresión (2.15), esto es:

$$\Gamma'_{pot,0} \dot{(t)} = l'_{2,1} \dot{(t)} \bullet \underline{a_3}'(t) \oplus l'_{3,2} \dot{(t)} \bullet \underline{a_1}''(t) \oplus l'_{pot,3} \dot{(t)} \bullet \underline{a_2}'''(t) \quad (2.17)$$

Por otro lado,

$$1) \underline{a_3}'(t) = \underline{e_3}'(t) = \underline{e_3}(t) = \underline{e_3}(to) = \underline{e_3} \quad (2.18)$$

$$2) \underline{a_2}''(t) = \underline{e_2}''(t) = \underline{e_2}(t) = \underline{e_2}(to) = \underline{e_2}$$

$$3) \underline{a_1}'''(t) = \underline{e_1}'''(t) = \underline{e_1}(t) = \underline{e_1}(to) = \underline{e_1}$$

Por consiguiente la expresión (2.17) se escribe de la manera siguiente:

$$\Gamma'_{pot,0} \dot{(t)} = l'_{2,1} \dot{(t)} \underline{e_3} \oplus l'_{3,2} \dot{(t)} \underline{e_1} \oplus l'_{pot,3} \dot{(t)} \underline{e_2} \quad (2.19)$$

- **Formulación del problema cinemático directo de velocidad en la configuración deformada**

“Dados, $l'_{2,1} \dot{(t)}, l'_{3,2} \dot{(t)}, l'_{pot,3} \dot{(t)} \in R$, encuentre: $\Gamma'_{pot,0} \dot{(t)} \in R^4$ tal que la expresión (2.19) sea satisfecha”.

- **Formulación del problema cinemático inverso de velocidad en la configuración deformada**

“Dado, $\Gamma'_{pot,0} \dot{(t)} \in R^4$ encuentre $l'_{2,1} \dot{(t)}, l'_{3,2} \dot{(t)}, l'_{pot,3} \dot{(t)} \in R$, tal que la expresión (2.19) sea satisfecha”.

2.7 El modelo de aceleración

En esta sección se construyen las ecuaciones del modelo de aceleración relacionado con el robot cartesiano motivo de estudio. La aceleración del punto $pot' \in R^3$ medida desde el origen "o" se encuentra al derivar con respecto al tiempo $t \in J$, la expresión (2.12), esto es:

$$\Gamma'_{pot,0}{}''(t) = L'_{2,1}{}''(t) \oplus L'_{3,2}{}''(t) \oplus L'_{pot,3}{}''(t) \quad (2.20)$$

Por otro lado las derivadas de los vectores localizados en el lado derecho de la expresión (2.19) son las siguientes:

$$1) L'_{2,1}{}''(t) = (l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a_3}'(t))'' = l'_{2,1}{}''(t) \bullet \underline{a_3}'(t) \oplus 2l'_{2,1}{}'(t) \bullet \underline{a_3}{}''(t) \oplus l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a_3}{}'''(t) \quad (2.21)$$

$$2) L'_{3,2}{}''(t) = (l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a_1}''(t))'' = l'_{3,2}{}''(t) \bullet \underline{a_1}''(t) \oplus 2l'_{3,2}{}'(t) \bullet \underline{a_1}{}'''(t) \oplus l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a_1}{}''''(t)$$

$$3) L'_{pot,3}{}''(t) = (l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a_2}'''(t))'' = l'_{pot,3}{}''(t) \bullet \underline{a_2}'''(t) \oplus 2l'_{pot,3}{}'(t) \bullet \underline{a_2}{}''''(t) \oplus l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a_2}{}'''''(t)$$

Por tanto, la expresión (2.20) se escribe en términos de la expresiones (2.21), de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma'_{pot,0}{}''(t) = & l'_{2,1}{}''(t) \bullet \underline{a_3}'(t) \oplus 2l'_{2,1}{}'(t) \bullet \underline{a_3}{}''(t) \oplus l'_{2,1}(t) \bullet \underline{a_3}{}'''(t) \oplus l'_{3,2}{}''(t) \bullet \underline{a_1}''(t) \oplus \\ & 2l'_{3,2}{}'(t) \bullet \underline{a_1}{}'''(t) \oplus l'_{3,2}(t) \bullet \underline{a_1}{}''''(t) \oplus l'_{pot,3}{}''(t) \bullet \underline{a_2}'''(t) \oplus 2l'_{pot,3}{}'(t) \bullet \underline{a_2}{}''''(t) \oplus l'_{pot,3}(t) \bullet \underline{a_2}{}'''''(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cabe señalar que,

$$1) \underline{a_3}{}''(t) = \underline{e_3}{}''(t) = \underline{e_3}{}'(t) = 0 \quad (2.23)$$

$$2) \underline{a_2}{}''(t) = \underline{e_2}{}''(t) = \underline{e_2}{}'(t) = 0$$

$$3) \underline{a_1}'''(t) = \underline{e_1}'''(t) = \underline{e_1}''(t) = 0$$

Sin embargo, de acuerdo con las expresiones (2.16) y (2.23), la ecuación (2.22) adquiere la forma reducida siguiente:

$$\Gamma'_{pot,0}''(t) = l'_{2,1}''(t) \bullet \underline{a_3}''(t) \oplus l'_{3,2}''(t) \bullet \underline{a_1}''(t) \oplus l'_{pot,3}''(t) \bullet \underline{a_2}''(t) \quad (2.24)$$

Por otro lado, al usar las expresiones (2.18) la ecuación de aceleración (2.22) es:

$$\Gamma'_{pot,0}''(t) = l'_{2,1}''(t) \bullet \underline{e_3} \oplus l'_{3,2}''(t) \bullet \underline{e_1} \oplus l'_{pot,3}''(t) \bullet \underline{e_2} \quad (2.25)$$

- **Formulación del problema cinemático directo de aceleración en la configuración deformada**

“Dados, $l'_{2,1}''(t), l'_{3,2}''(t), l'_{pot,3}''(t) \in R$, encuentre, $\Gamma'_{pot,0}''(t) \in R^4$ tal que la expresión (2.25) sea satisfecha”.

- **Formulación del problema cinemático inverso de aceleración en la configuración deformada**

“Dado, $\Gamma'_{pot,0}''(t) \in R^4$ encuentre $l'_{2,1}''(t), l'_{3,2}''(t), l'_{pot,3}''(t) \in R$, tal que la expresión (2.25) sea satisfecha”.

Capítulo 3

Teoría de curvas

Introducción

En este capítulo se estudian los conceptos fundamentales de la teoría de curvas con el propósito de modelar, en el capítulo 4, trayectorias rectilíneas y parabólicas; es decir, algunas de las curvas cónicas elementales. Se introducirán los conceptos de tangencia, curvatura y torsión con el objetivo de usar las ecuaciones de Frenet para caracterizar las curvas canónicas mencionadas anteriormente [10].

3.1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y sistema de axiomas

En esta sección se define el problema para solucionar en este capítulo, así como sus restricciones fundamentales, una hipótesis y un sistema de axiomas básicos. El problema es el siguiente:

“Se requiere analizar y modelar curvas”

La restricción fundamental es la siguiente:

Las funciones de análisis deben ser cuando menos tres veces continuamente diferenciales en el tiempo (R_1). El problema y sus restricciones definido anteriormente, se pueden sintetizar de la manera siguiente:

“Dada $C: I \rightarrow R^3$

encuéntrese:

- 1) $M_R = M_R(C)$
- 2) $M_P = M_P(C)$

tal que

$$R_1 = \hat{R}_1$$

sea satisfecha”.

Aquí,

C: es una curva genérica.

I: es un intervalo en \mathbb{R} .

E : Es el espacio euclidiano de puntos tridimensional.

M_R : es el modelo de la trayectoria rectilínea.

M_p : es el modelo de la trayectoria parabólica.

Y por ultimo la expresión $R_1 = \hat{R}_1$ significa que “una representación paramétrica regular $R_1 = R(t), t \in I_1$ es equivalente a otra representación paramétrica regular $\hat{R}_1 = R^*(\theta), \theta \in I_\theta$ si existe un cambio admisible de parámetro $t = t(\theta)$ tal que:

$$(i) \quad t = (I_\theta) = I_t$$

$$(ii) \quad R(t(\theta)) = R^*(\theta)$$

Por otro lado, la hipótesis que será utilizada para concluir la solución del problema descrito anteriormente es la siguiente:

“Toda curva en el espacio queda caracterizada por la curvatura y la torsión. Dicha caracterización depende de las ecuaciones de Frenet”.

Finalmente las premisas o axiomas básicos con las cuales se sistematizarán las trayectorias cónicas son[10]:

$$1) \underline{\dot{t}}(s) = K(s) \cdot \underline{n}(s) ; \quad s \in I$$

$$2) \underline{\dot{n}}(s) = -K(s) \cdot \underline{\tau}(s) + \tau(s) \cdot \underline{b}(s) ; \quad s \in I$$

$$3) \underline{\dot{b}}(s) = -\tau(s) \cdot \underline{n}(s) ; \quad s \in I$$

Aquí, $k(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión que son funciones de la longitud y $\underline{t}(s)$, $\underline{n}(s)$, $\underline{b}(s) \in \mathcal{R}^3$ son vectores.

3.2 Algunas consideraciones sobre el problema de caracterización de curvas

En esta sección se discuten algunos aspectos importantes relacionados con el procedimiento de la sistematización con el cual será solucionado el problema definido en la sección anterior. Se usará un procedimiento lógico inductivo para caracterizar, sistemáticamente, las ecuaciones de Frenet [10] partiendo de los conceptos elementales de tangencia, curvatura y torsión.

Cabe señalar que, no serán demostrados los teoremas durante los procedimientos de sistematización, salvo que se requieran en algunos casos. En realidad, el objetivo de este trabajo de tesis es el de relacionar, sistemáticamente, cada uno de los conceptos asociados con la teoría de curvas.

3.3 Curvas, cambio de parámetros y longitud de arco

En esta sección se definen los conceptos de curva, cambio de parámetro y longitud de arco con los cuales en la sección 3.5 se procederá a analizar los conceptos de tangencia y curvatura [10].

3.3.1 Curvas

Sea “E” el espacio tridimensional de puntos euclidiano y \mathbb{R}^3 un espacio vectorial. La función:

$$\Psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

definida por

$$\Psi(a, b) = \underline{R}_{b,a}, \quad \forall (a, b) \in E \times E \text{ y } \underline{R}_{b,a} \in \mathbb{R}^3$$

es una función afín. Considere ahora un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, la función,

$$C : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

definida por:

$$C(t) = \underline{R}_{b,a}(t), \quad \forall t \in I \text{ y } \underline{R}_{b,a}(t) \in \mathbb{R}^3$$

es llamada “curva simple” [10]. Nótese que, dada la base canónica $\underline{e} \in \mathbb{R}^3$ en \mathbb{R}^3 , el vector $\underline{R}_{b,a}(t) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir de la manera siguiente:

$$\underline{R}_{b,a}(t) = x(t) \cdot \underline{e}_1 + y(t) \cdot \underline{e}_2 + z(t) \cdot \underline{e}_3 \quad (3.3)$$

Por tanto, las funciones $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ son tres funciones escalares y representan las ecuaciones paramétricas de la curva $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Por otro lado, una curva $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular o analítica si [10]:

- 1) $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $C \in C^1$ en I

$$2) \frac{d}{dt}(C(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Es decir, la curva $C:I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es al menos una vez continuamente diferenciable en I y, además, la derivada de $C(t) \in \mathbb{R}^3$ con respecto al parámetro $t \in I$ sea diferente de cero.

3.3.2 Cambio de parámetro

Sean $J \subseteq \mathbb{R}$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ dos intervalos de \mathbb{R} . La función,

$$\Gamma: J \rightarrow I \tag{3.4}$$

definida por

$$\Gamma(\theta) = t \quad \forall \theta \in J \text{ y } t \in I$$

es llamada “función numérica” [10]. Dicha función es denominada “cambio de admisible de parámetro” si:

$$1) \Gamma: J \rightarrow I \text{ es de la clase } C^1 \text{ en } J. \tag{3.5}$$

$$2) \frac{d}{d\theta}(\Gamma(\theta)) \neq 0 ; \quad \forall \theta \in J$$

El siguiente resultado es importante en este trabajo de tesis [10]:

Teorema 1.1. Si $\Gamma: J \rightarrow I$ es un cambio admisible de parámetro en J , entonces las proposiciones siguientes son verdaderas:

$$1) \Gamma: J \rightarrow I \text{ es uno a uno.}$$

$$2) \Gamma^{-1}: I \rightarrow J \text{ es un cambio admisible de parámetro en } I.$$

Observe que si $\Gamma: J \rightarrow I$ es uno a uno, entonces existe $\Gamma^{-1}: I \rightarrow J$ misma que se define de la manera siguiente:

$$\Gamma^{-1}(t) = \theta \Leftrightarrow \Gamma(\theta) = t$$

Luego, las siguientes relaciones se satisfacen:

- 1) $\Gamma \circ \Gamma^{-1} = I_N$ en I
- 2) $\Gamma^{-1} \circ \Gamma = I_N$ en J

Donde I_N es la función identidad. En efecto,

- 1) $\Gamma \circ \Gamma^{-1}(t) = \Gamma(\Gamma^{-1}(t)) = \Gamma(\theta) = t = I_N(t) = t$ con $t \in I$
- 2) $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(\theta) = \Gamma^{-1}(\Gamma(\theta)) = \Gamma^{-1}(t) = \theta = I_N(\theta) = \theta$ con $\theta \in J$

Considere el siguiente ejemplo [22]:

“Verificar si la función $\Gamma: J \rightarrow I$ definida por $\Gamma(\theta) = (b-a)\theta + a$ en $0 \leq \theta \leq 1$ con $a < b$ es un cambio admisible de parámetro que transforma el intervalo $0 \leq \theta \leq 1$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ ”.

Para solucionar el problema definido anteriormente, primero se debe verificar si la función $\Gamma: J \rightarrow I$ satisface los requerimientos (3.5).

En efecto,

- 1) $\frac{d}{d\theta}(\Gamma(\theta)) = b-a$ y $\Gamma: J \rightarrow I$ es clase C^1 .
- 2) Puesto que $a < b$, entonces $b-a \neq 0$.

Por otro lado, la función $\gamma: I \rightarrow J$ se caracteriza por:

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(\theta) - a}{b - a} = \frac{t - a}{b - a}$$

Nótese que si $t = a$, entonces $\Gamma(\theta) = 0$ y si $t = b$ entonces $\Gamma(\theta) = 1$. Por tanto, si $0 \leq \theta \leq 1$, entonces $a \leq t \leq b$ por lo que queda verificado el ejemplo. Por otro lado, una curva regular es una clase de equivalencia de las representaciones paramétricas regulares [10]. Por tanto:

“La curva $C: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es independiente del parámetro”.

Considere ahora que dada la curva $C: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se requiere reparametrizarla en el intervalo J . Para ello sea $\Gamma: J \rightarrow I$ un cambio admisible de parámetro, entonces la función:

$$\alpha = J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

reparametriza la curva $C: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si:

$$\alpha = \Gamma \circ C$$

La idea de reparametrización se muestra en la figura 3.1.

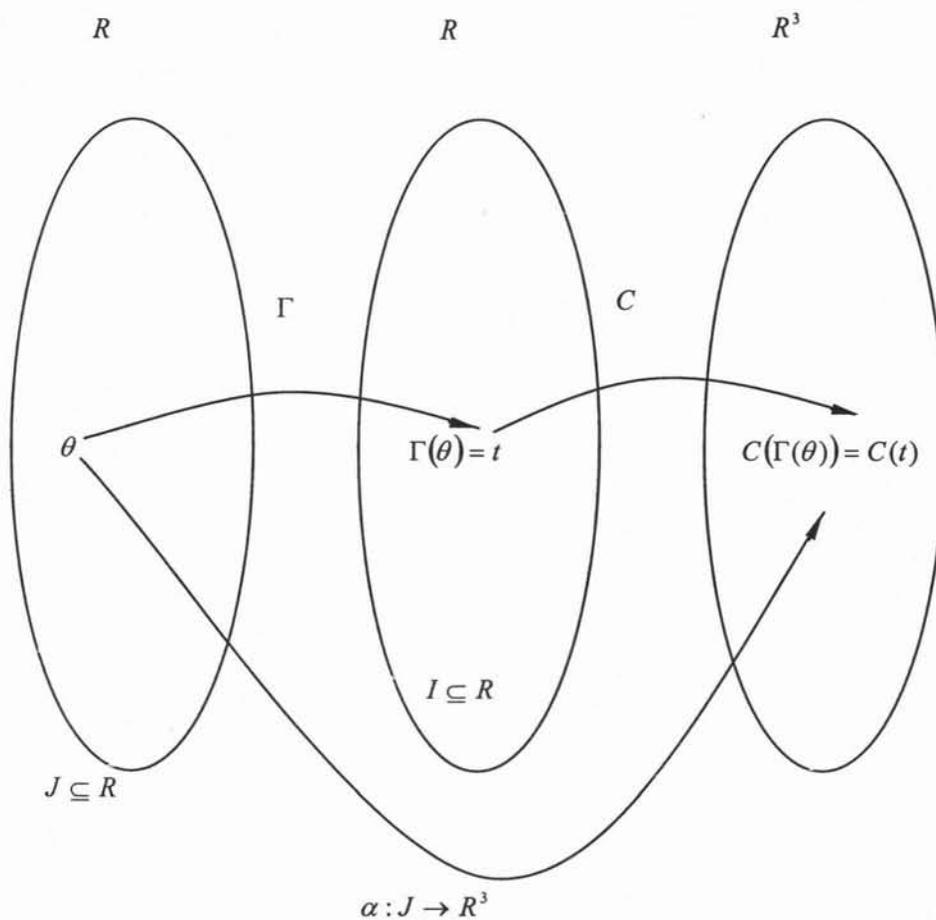


Figura 3.1. Reparametrización de una curva”

3.3.3 Longitud de curva

Sea $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva y supóngase que $C_1 : I_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un arco de C , donde I_C es un intervalo cerrado tal que $a \leq t \leq b$. Dicho arco se define por [10]:

$$C_1(t) = \underline{C}(t) \quad ; \quad \forall t \in I_C \text{ y } \underline{C} \in \mathbb{R}^3$$

Considere ahora que el intervalo I_C se subdivide de la manera siguiente:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

Por tanto, en cada $t_i \in I_C$ se tiene que:

$$\underline{\Gamma}_0 = \Gamma(t_0), \underline{\Gamma}_1 = \Gamma(t_1), \dots, \underline{\Gamma}_n = \Gamma(t_n)$$

lo cual denota una sucesión de puntos en "E".

Supóngase ahora que dichos puntos se conectan en forma sucesiva por medio de rectas formando un arco poligonal al cual se llamará P. La longitud del segmento definido entre $\Gamma(t_1)$ y $\Gamma(t_2)$ se define por:

$$S_{2-1} = |\Gamma(t_2) - \Gamma(t_1)|$$

O, en términos generales se tiene que:

$$S_{i-(i-1)} = |\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|$$

Por lo tanto, la longitud de arco poligonal P se define por:

$$S(P) = \sum_{i=1} |\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|$$

Sea P' un nuevo arco poligonal con la propiedad

$$S(P) = S(P')$$

Es decir, P' es un arco poligonal más próximo a C_1 que P. Por tanto, la longitud del arco C_1 dada por $S(C_1)$ es la mayor de las longitudes de todos los arcos poligonales aproximados a P, es decir,

$$S(C_1) \leq S(P') \quad \text{y} \quad S(P') \leq S(P)$$

Por otro lado, sea T el conjunto de todas las longitudes de arcos poligonales $S(P)$. El arco $C_1 : I_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice que es rectificable si T está acotado superiormente [10].

Obsérvese además que, siendo $S(P') \leq S(P)$, entonces $S(P)$ es también una cota superior del conjunto T . Por otro lado, todo conjunto acotado superiormente tiene una cota superior mínima llamada superior o también el supremo, pues según [21], el supremo es la menor de las cotas superiores. Por tanto,

$$S(C_1) = \text{Sup}(T)$$

Es decir, la longitud de arco $C_1 : I_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el supremo del conjunto T de las longitudes de arco poligonales.

Cabe señalar que la longitud de arco es independiente del parámetro que se utilice, puesto que un cambio de parámetro implica que la función $\Gamma : J \rightarrow I$ sea uno a uno. Así, si la curva $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es independiente del parámetro, también su longitud de arco lo será.

Por otro lado, sea $C(t) = \underline{\Gamma}_t$ una curva regular en I' y considérese la función:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\underline{\Gamma}_t}{dt} \right| dt \quad ; \quad t_0, t \in I \quad (3.7)$$

La derivada de la expresión (3.7) con respecto a $t \in I$ es la siguiente:

$$\frac{d[S(t)]}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left| \frac{d(\Gamma(t))}{dt} \right| dt$$

O, equivalentemente:

$$\frac{d[S(t)]}{dt} = \left| \frac{d\Gamma(t)}{dt} \right|$$

Y, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dt}[S(t)] \neq 0$$

se deduce que la función $S : I \rightarrow \mathfrak{R}$ es un cambio admisible de parámetro. Por tanto, la longitud de arco $S(t)$ se puede introducir como un parámetro a lo largo de la curva $C(t) = \Gamma_{(t)}$. Cabe señalar que una representación de la longitud de arco como parámetro no es única [10], pues,

$$1) S(t) = \int_t^{t_0} \left| \frac{d(\Gamma t)}{dt} \right| dt,$$

O,

$$2) S(t) = - \int_t^{t_0} \left| \frac{d\Gamma(t)}{dt} \right| dt = -S(t)$$

Dichas referencias dependen del punto inicial $\Gamma(t_0)$ que se elija (y, por tanto, $S=0$) y de la orientación.

Sea $h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que: $h = S \circ C$ con $S : J \rightarrow I$ y $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se dirá que $h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una representación en función de la longitud de arco [10] o también una representación natural si :

$$\left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{ds} \right| = 1$$

Nótese que la expresión (3.7) es una representación natural de la longitud de arco, pues,

$$\left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{ds} \right| = \left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{ds} \cdot \frac{dt}{dt} \right| = \left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{dt} \right|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{\left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{dt} \right|}{\left| \frac{d\Gamma_{(s)}}{dt} \right|} = 1$$

Siempre que $\Gamma_{(s)} = C(t(s))$.

El siguiente resultado, es fundamental en este trabajo de tesis [10]:

Teorema. Si $\Gamma_o = C(s)$ es una representación natural de la curva $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces son verdaderas las proposiciones siguientes:

- 1) $|S(t_1) - S(t_2)|$ es la longitud del segmento de arco C_1 de C comprendido entre $C(S(t_2))$ y $C(S(t_1))$.
- 2) Si $\Gamma_{(s)} = C'(S')$ es otra representación natural de la curva $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces:

$$S(t) = \pm S'(t) + k, \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$
- 3) Si $\Gamma_{(s)} = C'(S')$ es otra representación natural de la curva $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la misma orientación que $\Gamma_{(s)} = C(S)$, entonces:

$$\frac{ds_{(t)}}{dt} = \left| \frac{d\Gamma_s}{dt} \right|$$

Por otro lado, si la orientación es diferente, entonces:

$$\frac{ds_{(t)}}{dt} = - \left| \frac{d\Gamma_s}{dt} \right|$$

3.4 Tangencia y curvatura

En esta sección se definirán los conceptos de vector tangente y curvatura relacionados con una curva [10]. Para este propósito, se usará una representación natural de la curva $\underline{\Gamma}_{(s)} = C(s) = \underline{\Gamma}(s)$.

Sea $\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}(s)$ una representación natural de la curva $C : I \rightarrow \Gamma$. La derivada de $\underline{\Gamma}(s)$ con respecto a $s \in I$ se denota por:

$$\frac{d}{ds} \underline{\Gamma}(s) = \dot{\underline{\Gamma}}(s)$$

Obsérvese que $\left| \dot{\underline{\Gamma}}(s) \right| = 1$, pues, $\underline{\Gamma}(s)$ es una representación natural. Además, siendo $\underline{\Gamma}(s^*)$ otra representación natural de C , entonces:

$$\frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds^*} = \frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = \pm \frac{d\underline{\Gamma}(s^*)}{ds}$$

Aquí, se ha usado el hecho de que: $S = \pm S + k$; siendo k una constante y $\frac{ds}{ds^*} = 1$.

Por tanto, $\frac{d\underline{\Gamma}(s^*)}{ds^*}$ tiene ya sea el mismo sentido o sentido opuesto que $\frac{d\underline{\Gamma}(s^*)}{ds}$ con lo cual

se puede concluir que $\dot{\underline{\Gamma}}(s) \in \mathfrak{R}^3$ es el vector tangente unitario de la curva $\underline{\Gamma}(s)$ en $s \in I$.

Luego,

$$\dot{\underline{\Gamma}}(s) = \underline{t}(s) = \underline{t}$$

Por otro lado, sea l_A una recta que pasa por el punto "x" de una curva C tal que l_A tiene la misma orientación que el vector $\dot{\underline{\Gamma}}(s) = \underline{t}$. Dicha recta es llamada recta tangente. De hecho, tal recta se representa por:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + k(\underline{t}_0) \quad ; \quad -\infty < k < \infty$$

siendo $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$ un punto inicial.

Considere ahora un plano A que corta a C en el punto x. Supóngase ahora que a es perpendicular a $\underline{\Gamma}$ en \underline{x}_0 , entonces:

$$(\underline{x} - \underline{x}_0) \bullet \underline{\Gamma}_0 = 0$$

dicho plano es llamado "normal" a C en el punto x_0 [10]. Considere ahora que " \underline{y} " es función de $\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}(t)$. Entonces,

$$\underline{y} = \underline{x} + k \underline{t}$$

es el plano normal a C en cualesquier punto x de C.

Supóngase ahora que $\underline{\Gamma}(s) = \underline{\Gamma}$ es una curva regular que satisface $\underline{\Gamma}(s) \in C^2$. Por tanto, es claro que $\dot{\underline{\Gamma}}(s) = \underline{t} \in C^1$. Luego,

$$\frac{d\dot{\underline{\Gamma}}(s)}{ds} = \ddot{\underline{\Gamma}}(s) = \dot{\underline{t}}(s) = \underline{\dot{t}}$$

Es importante señalar que el vector $\underline{\dot{t}} \in \mathcal{R}^3$ es independiente de la orientación de C. El vector:

$$\underline{\dot{t}} = \underline{\dot{t}}(s)$$

es llamado el vector “curvatura” de C en el plano (x, y) [10]. Tal vector se representa de la manera siguiente:

$$\underline{\dot{t}}(s) = \underline{k}(s) = \underline{k}$$

Por otro lado, siendo $\underline{t} = \underline{t}(s)$ con $|\underline{t}| = 1$, entonces es claro que el vector \underline{k} es ortogonal a \underline{t} , pues [10]:

“ Si \underline{u} es una función vectorial unitaria, entonces el vector resultante de $\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\dot{u}}$ es ortogonal a \underline{u} , siendo “t” cualesquier parámetro. ”

Nótese que siendo $\underline{k} \bullet \underline{t} = 0$, entonces k es paralelo al plano normal A. Asimismo, la longitud del vector $k = \underline{k}(s)$ se define

$$C_U = |k| = |\underline{k}(s)|$$

siendo C_U la curvatura de la curva C en el punto $\underline{\Gamma}(s)$.

Observe que:

$$\rho = \frac{1}{|\underline{k}|} = \left| \frac{1}{\underline{k}(s)} \right|$$

es llamada el radio de la curvatura en S [10].

La figura siguiente muestra el vector tangente $\underline{t} = \underline{t}(s) = \dot{\underline{\Gamma}}(s)$ y al vector curvatura $\underline{k} = \underline{k}(s) = \dot{\underline{t}}(s)$ ambos asociados con el punto $\underline{\Gamma}(s)$ de la curva C.

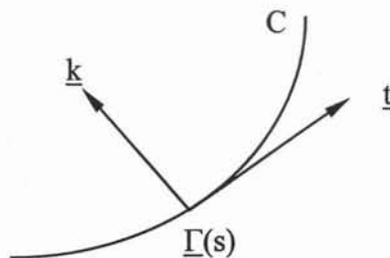


Figura 3.2 Vectores tangente y curvatura

Considere ahora que un vector unitario \underline{U}_k en la dirección \underline{k} ; esto es:

$$\underline{U}_k = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

Nótese que si $\underline{k} = \underline{0}$, entonces el vector unitario \underline{U}_k no está definido, por ello sea $\underline{n} = \underline{n}(s)$ un vector unitario tal que $\underline{n}(s)$ sea paralelo a $\underline{k}(s)$ con $\underline{n}(s)$ de sentido arbitrario.

Considere ahora que C no tiene puntos de inflexión; es decir, que $\underline{k}(s) \neq \underline{0}$ para todo "s".

Luego,

$$\underline{n}(s) = \underline{n} = \frac{\underline{k}(s)}{|\underline{k}(s)|} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

Dicho vector será considerado como el vector unitario en la dirección \underline{k} . A tal vector se le llama "vector unitario normal a C " en el punto $\underline{\Gamma}(s)$ [10].

Nótese que si $\underline{k} = 0$, entonces $\underline{n}(s)$ está indeterminado. Supóngase que $k \neq 0$, luego

$$\dot{\underline{t}}(s) = \underline{k}(s) = \underline{n}(s) \bullet \underline{k}(s)$$

pues,

$$|\underline{k}| = |\underline{k}| = k$$

aquí, $k(s)$ es también llamado la curvatura de C en el punto $\underline{\Gamma}(s)$ [10]. Cabe señalar que:

- 1) Si \underline{n} tiene la misma dirección de \underline{k} , entonces $k = |\underline{k}|$.
- 2) Si \underline{n} tiene dirección opuesta que \underline{k} , entonces $k = -|\underline{k}|$.
- 3) Si C tiene puntos de inflexión, entonces:

$$\underline{k} = 0 \quad \text{y} \quad k = 0$$

Obsérvese, finalmente que:

$$k(s) = \underline{k}(s) \bullet \underline{n}(s) = 1$$

pues,

$$\underline{n}(s) \bullet \underline{n}(s) = 1$$

y

$$\underline{k}(s) \bullet \underline{n}(s) = \underline{n}(s) \bullet \underline{n}(s) = k(s)$$

3.5 Triedro móvil y torsión (doble curvatura)

En esta sección se definirá el concepto de torsión el cual es también denominado “la doble curvatura”. Para ello, es necesario caracterizar el llamado triedro móvil [10]. Considere ahora una recta l_{NP} que pasa por el punto $\underline{\Gamma}(s)$ de la curva C y $l_{NP} \bullet \underline{n}(s) = 0$; es decir, dicha recta es paralela al vector unitario normal. Tal recta es llamada “normal principal de C en $\underline{\Gamma}(s)$ ” [10]. La ecuación relacionada con l_{NP} es:

$$\underline{y} = \underline{\Gamma} + k\underline{n} \quad ; \quad -\infty < k < \infty$$

Por otro lado, el plano paralelo a la tangente unitaria \underline{t} y a la normal unitaria \underline{n} es denominado “plano osculador” [10]. Dicho plano se muestra en la figura siguiente:

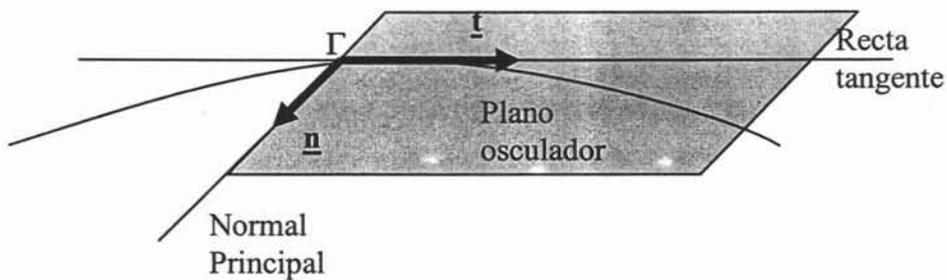


Figura 3.3 Plano osculador

Obsérvese que la expresión que gobierna el plano osculador es:

$$\left[(y - \Gamma) \begin{pmatrix} \dot{t} \cdot \dot{t} \\ - \\ - \end{pmatrix} \right] = \underline{0}$$

Sea $\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}(s)$ una curva C de la clase C^2 y supóngase que “ \underline{n} ” es continua en toda C o a lo largo de ella. El vector:

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s)$$

es llamado “vector unitario binormal” a C en el punto $\underline{\Gamma}(s)$ [10]. Nótese que el vector $\underline{b}(s)$ es unitario, pues $\underline{t}(s)$ y $\underline{n}(s)$ son unitarios. Además, la terna $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ forman una base ortonormal dextrógena. Tal base se llama “triedro móvil”. Por otro lado, la recta l_{BN} descrita por la expresión:

$$y = \underline{\Gamma} + k \underline{b} \quad ; \quad -\infty < k < \infty$$

es llamada “recta binormal” a C en el punto $\underline{\Gamma}(s)$ [10]. Por tanto, el plano paralelo a los vectores $\underline{t}(s)$ y $\underline{b}(s)$ es llamado plano rectificante en $\underline{\Gamma}(s)$. Dicho plano se muestra en la figura siguiente:

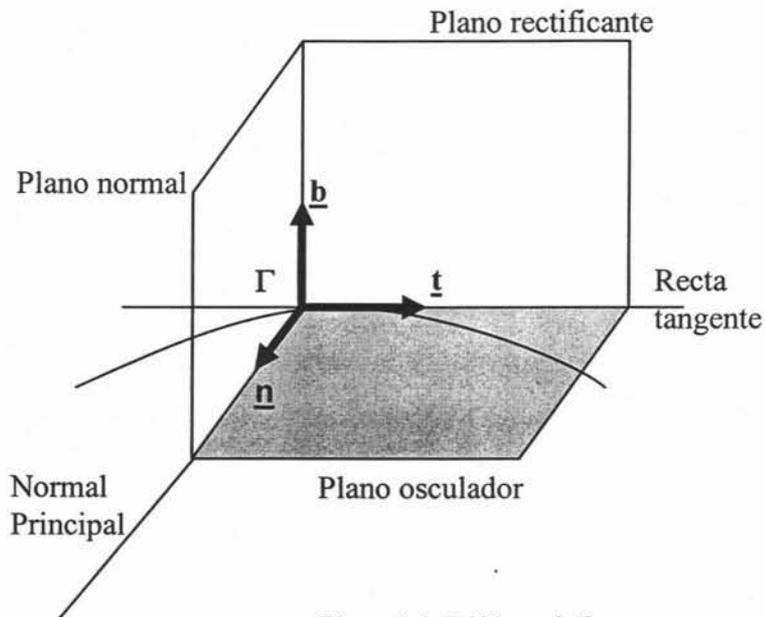


Figura 3.4 Triédro móvil

La caracterización descrita en la figura anterior es:

• Rectas

- 1) Recta tangente : $\underline{y} = \underline{\Gamma} + k\underline{t}$
- 2) Recta normal principal : $\underline{y} = \underline{\Gamma} + k\underline{n}$
- 3) Recta binormal : $\underline{y} = \underline{\Gamma} + k\underline{b}$

• Planos

- 1) Plano normal : $(\underline{y} - \underline{\Gamma}) \bullet \underline{t} = 0$
- 2) Plano rectificante : $(\underline{y} - \underline{\Gamma}) \bullet \underline{n} = 0$
- 3) Plano osculador : $(\underline{y} - \underline{\Gamma}) \bullet \underline{b} = 0$

Considérese ahora que “c” es una curva regular de la clase C^3 y a lo largo de dicha curva $\underline{n}(s) \in C^1$. Entonces:

$$\dot{\underline{b}}(s) = \frac{d}{ds}(\underline{t}(s) \times \underline{n}(s)) = \dot{\underline{t}}(s) \bullet \underline{n}(s) + \underline{t}(s) \bullet \dot{\underline{n}}(s)$$

O, equivalentemente:

$$\dot{\underline{b}}(s) = \underline{t}(s) \times \dot{\underline{n}}(s)$$

pues,

$$\dot{\underline{t}}(s) \times \underline{n}(s) = \underline{0}$$

ya que:

$$\dot{\underline{t}}(s) = \underline{n}(s) \bullet \underline{k}(s)$$

y, luego,

$$[\underline{k}(s) \bullet \underline{n}(s)] \times [\underline{n}(s)] = \underline{k}(s)[\underline{n}(s) \times \underline{n}(s)] = \underline{k}(s) \bullet \underline{0} = \underline{0}$$

Es posible representar al vector $\dot{\underline{n}}(s)$ como una combinación lineal de los vectores $\underline{t}(s)$ y $\underline{b}(s)$; esto es:

$$\dot{\underline{n}}(s) = \pi(s) \bullet \underline{t}(s) + \tau(s) \bullet \underline{b}(s)$$

Luego,

$$\dot{\underline{b}}(s) = \underline{t}(s) \times [\pi(s) \bullet \underline{t}(s) + \tau(s) \bullet \underline{b}(s)]$$

O, equivalentemente:

$$\dot{\underline{b}}(s) = \tau(s) [\underline{t}(s) \times \underline{b}(s)]$$

pues,

$$\underline{t}(s) \times (\pi(s) \bullet \underline{t}(s)) = \underline{0}$$

Además,

$$\underline{n}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{b}(s)$$

Por ello,

$$\dot{\underline{b}}(s) = -\tau(s) \bullet \underline{n}(s)$$

La función $\tau : J \rightarrow I$ es llamada la torsión de la curva C en el punto $\underline{\Gamma}(s)$. Dicha función es también conocida como la doble curvatura[10]. La torsión puede escribirse de la manera siguiente:

$$\tau(s) = -\dot{\underline{b}}(s) \bullet \underline{n}(s)$$

pues,

$$\underline{n}(s) \bullet \dot{\underline{b}}(s) = -\tau(s) \bullet \underline{n}(s) \bullet \underline{n}(s)$$

y

$$\underline{n}(s) \bullet \underline{n}(s) = 1.$$

Cabe mencionar, finalmente, que el signo de la función $\tau(s)$ es independiente del sentido del vector $\underline{n}(s)$ y de la orientación de la curva C .

3.6 Ecuaciones de Frenet

El siguiente sistema de ecuaciones son llamadas fórmulas de Frenet [10]:

$$1) \dot{\underline{t}}(s) = k(s) \bullet \underline{n}(s)$$

$$2) \dot{\underline{n}}(s) = -k(s) \bullet \underline{t}(s) + \tau(s) \bullet \underline{b}(s)$$

$$3) \dot{\underline{b}}(s) = -\tau(s) \bullet \underline{n}(s)$$

Nótese que al considerar la expresión:

$$\underline{n}(s) = \underline{b}(s) \times \underline{t}(s)$$

entonces:

$$\dot{\underline{n}}(s) = \dot{\underline{b}}(s) \bullet \underline{t}(s) + \underline{b}(s) \bullet \dot{\underline{t}}(s)$$

Además, al utilizar las expresiones primera y tercera de las ecuaciones de Frenet (ya caracterizadas en secciones anteriores), se obtiene:

$$\dot{\underline{n}}(s) = -k(s) \bullet \underline{t}(s) + \tau(s) \bullet \underline{b}(s)$$

Toda curva C se determina mediante la curvatura y la torsión, consideradas como funciones de parámetro natural [10]. De hecho se demuestra en [10] que si dos curvas C y C^* son tales que:

- 1) $k(s) = k^*(s)$ y
- 2) $\tau(s) = \tau^*(s)$

entonces $C = C^*$ excepto e su posición en el espacio*. Para finalizar este capítulo considérese el siguiente resultado [10]:

“ Toda curva queda definida inequívocamente por su curvatura y su torsión expresadas en términos del parámetro natural. ”

* expresión que satisface nuestra restricción inicial $R_1 = \hat{R}_1$

Capítulo 4

Análisis de trayectoria de una curva parabólica

Introducción. En este capítulo se presenta la sistematización de una trayectoria de tipo parabólica definida en el espacio – tiempo. Es utilizado el Método Científico para formular y solucionar el problema [6]. El análisis de la trayectoria se realiza en dos partes: 1) generación de las ecuaciones de movimiento y 2) análisis de los perfiles de trayectoria [2]. Ambas partes se relacionan para generar el modelo completo. Se utilizarán polinomios de grado 5 para eliminar discontinuidades presentadas en los perfiles de trayectoria [8]. Finalmente, el modelo del robot será acoplado con el modelo final de la trayectoria y se formularán los problemas inversos.

4.1 Definición del problema, restricciones, hipótesis y sistemas de axiomas

Considere el siguiente problema:

“Conocidos tres puntos en el espacio, el perfil teórico de velocidades y el modelo del robot cartesiano, determine:

- 1) El modelo de la trayectoria.
- 2) Los modelos acoplados del robot y la trayectoria.

tal que las siguientes restricciones sean satisfechas:

- 1) La curva que pasa por los tres puntos es una parábola.
- 2) La orientación del plano que contiene a los puntos es arbitrario.
- 3) Los puntos sobre los cuales pasa la herramienta del robot son los mismos que describen el lugar geométrico parabólico.

- 4) La trayectoria que describirá el robot está compuesta por un segmento rectilíneo y un parabólico.

Por otro lado, la hipótesis que será utilizada para solucionar el problema definido anteriormente es la siguiente:

“ Todo lugar geométrico descrito por una curva en el espacio – tiempo sobre el cual se mueve un punto o una herramienta se puede modelar en términos cinemáticos. La modelación de la trayectoria depende de la leyes de Frenet. ”

Las premisas básicas son:

Las leyes de Frenet.

Además, las premisas secundarias que forman todo el cuerpo de axiomas son:

- 1) Teoría del medio continuo.
- 2) Espacios vectoriales.
- 3) Geometría analítica plana.

Cabe mencionar que, las premisas básicas solo serán usadas como marcos referenciales y no se usarán de forma explícita. Para el caso de las leyes de Frenet se supone que la curva parabólica puede ser deducida de tales leyes [10]. Sin embargo, en este capítulo, dicha parábola se construirá conociendo tres puntos de un plano y se caracterizarán usando la geometría analítica plana.

4.2 Las ecuaciones de movimiento

En esta sección se modela la trayectoria parabólica en el espacio – tiempo. Son construidas las ecuaciones de movimiento relacionadas con la herramienta del robot cartesiano la cual se desplaza por un lugar geométrico compuesto por un segmento rectilíneo y un segmento

parabólico. El método general para modelar la trayectoria es el caracterizado en el trabajo propuesto en [2].

4.2.1 Las ecuaciones de posición

Considere que la herramienta “H” mostrada en la figura 4.1 se mueve en el espacio – tiempo y sobre la trayectoria “ τ ”. Dicha trayectoria está compuesta por dos segmentos; uno rectilíneo y otro parabólico como se muestra en la figura 4.1.

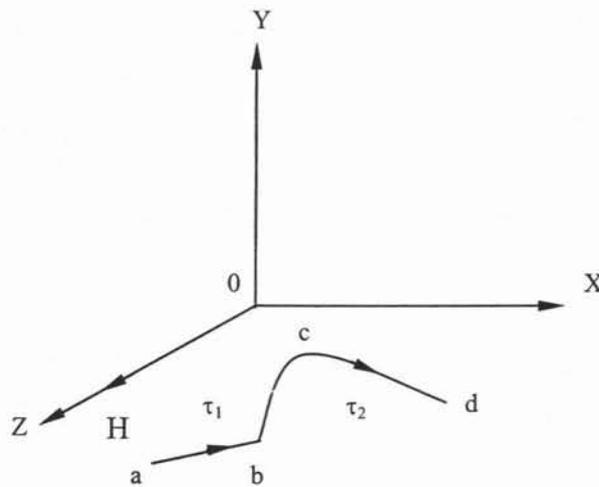


Figura 4.1 Lugar geométrico de la trayectoria descrita en el espacio – tiempo

Observe en la figura anterior que “ τ ” está compuesta de “ τ_1 ” y “ τ_2 ”, siendo τ_1 un lugar geométrico rectilíneo y τ_2 un lugar geométrico parabólico. La trayectoria “ τ ” se escribe de la manera siguiente:

$$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \tag{4.1}$$

Los puntos “b”, “c” y “d” mostrados en la figura 4.1 están definidos en un plano y sus coordenadas son conocidas y referidas al punto “o” localizado en el origen de coordenadas. El movimiento de la herramienta H va del punto “a” al punto “d”, pasando por “b” y “c”.

Considere ahora que se desea determinar las coordenadas del punto “c” medidas desde “o” relacionando los puntos “a” y “b”. Para ello, se construyen vectores de posición como se muestra en la figura 4.2.

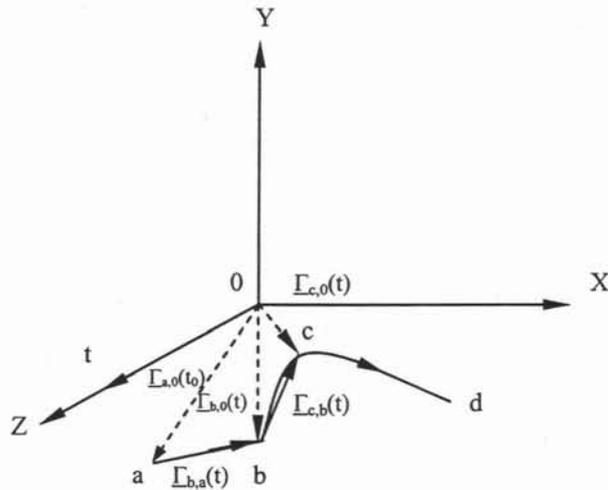


Figura 4.2 Vectores de posición

De acuerdo con la figura anterior, las coordenadas del punto “c” medidas desde “o” se determinan por medio de la expresión siguiente [2]:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t) = \underline{\Gamma}_{b,o}(t) \oplus \underline{\Gamma}_{c,b}(t) \quad (4.2)$$

O, equivalentemente:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t) = \underline{\Gamma}_{a,o}(t_0) \oplus \underline{\Gamma}_{b,a}(t) \oplus \underline{\Gamma}_{c,b}(t) \quad (4.3)$$

pues,

$$\underline{\Gamma}_{b,o}(t) = \underline{\Gamma}_{a,o}(t_0) \oplus \underline{\Gamma}_{b,a}(t)$$

La expresión (4.3) representa la ecuación de posición de la herramienta H que se desplaza por la trayectoria “ τ ”.

4.2.2 Ecuaciones de velocidad y aceleración

Para determinar la velocidad del punto “c”, es necesario derivar, con respecto al tiempo $t \in J$, donde $J \in [0, +\infty)$ es un intervalo de tiempo, la expresión (4.2); esto es [2]:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}^{\dot{}}(t) = \underline{\Gamma}_{b,a}^{\dot{}}(t) \oplus \underline{\Gamma}_{b,c}^{\dot{}}(t) \quad (4.4)$$

Aquí, $\underline{\Gamma}_{a,o}^{\dot{}}(t_o) \equiv \underline{0}$

Por otro lado, la aceleración del punto “c” se determina al derivar con respecto al tiempo $t \in J$ la expresión (4.4) de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}^{\ddot{}}(t) = \underline{\Gamma}_{b,a}^{\ddot{}}(t) \oplus \underline{\Gamma}_{b,c}^{\ddot{}}(t) \quad (4.5)$$

Las expresiones (4.3), (4.4) y (4.5) son las ecuaciones de movimiento de la herramienta que se desplaza por el espacio – tiempo.

4.2.3 Las ecuaciones de movimiento en τ_1

En esta sección se analizarán las ecuaciones de movimiento, en términos de la dirección del movimiento, relacionadas con el lugar geométrico τ_1 y en la sección 4.2.4 se analizará el segmento parabólico τ_2 .

Considere ahora que sobre el punto “a” mostrado en la figura 4.3 se define un sistema local $\underline{k}_i \in \mathfrak{R}$ y que además, se desea determinar la posición del punto “b”

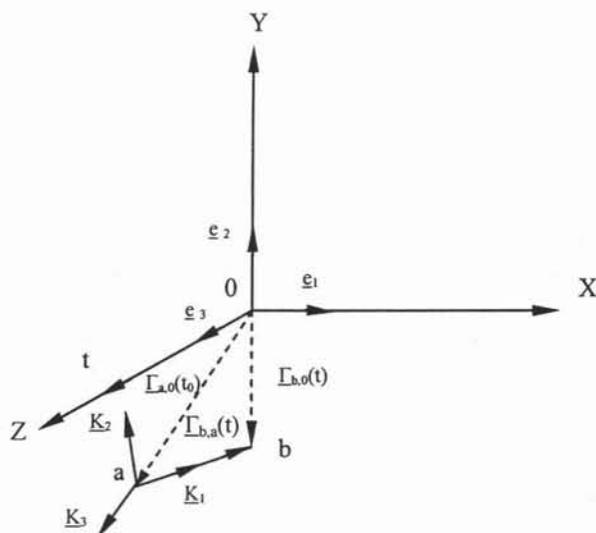


Figura 4.3 Sistema local

De acuerdo con la figura anterior, el vector $\underline{l}_{b,a}(t) \in \mathfrak{R}^3$ se escribe en términos de la base local de la manera siguiente:

$$\underline{l}_{b,a}(t) = l_{b,a}(t) \cdot \underline{k}_1 \quad (4.6)$$

Aquí, $l_{b,a}(t) \in \mathfrak{R}$ es la longitud en función del tiempo del vector $\underline{l}_{b,a}(t) \in \mathfrak{R}^3$ y $\underline{k}_1 \in \mathfrak{R}^3$ es la dirección del movimiento. Por tanto, las coordenadas del punto “b” medidas desde “o” se determinan de la manera siguiente:

$$\underline{l}_{b,o}(t) = \underline{l}_{a,o}(t_0) \oplus l_{b,a}(t) \cdot \underline{k}_1 \quad (4.7)$$

Además, las derivadas primera y segunda de la expresión (4.7) con respecto al tiempo $t \in J$ son:

$$1) \underline{\dot{\Gamma}}_{b,o}(t) = \underline{\dot{l}}_{b,a}(t) \cdot \underline{k}_1 \quad (4.8)$$

$$2) \underline{\ddot{\Gamma}}_{b,o}(t) = \underline{\ddot{l}}_{b,a}(t) \cdot \underline{k}_1$$

Aquí, $\underline{\dot{k}}_1 = \underline{0}$

Las expresiones (4.7) y (4.8) representan las ecuaciones de movimiento de H que se desplaza sobre τ_1 descritas en términos de la dirección del movimiento [2].

4.2.4 Las ecuaciones de movimiento en τ_2

En esta sección se construyen las ecuaciones de movimiento relacionadas con el lugar geométrico τ_2 para lo cual se formula, sistemáticamente, el siguiente problema:

“ Dadas las coordenadas de los puntos $b, c, d \in \tau_2$ siendo $\tau_2 \subseteq PL$, determine las ecuaciones de una curva parabólica asociada con τ_2 tal que:

$$(x - h)^2 - 4p(y - k) = 0 \quad (4.9)$$

sea satisfecha. ”

Aquí, (h, k) son las coordenadas del vértice, “4p” es la longitud del lado recto y PL es un plano en el espacio – tiempo. Es importante señalar que, las coordenadas de los puntos $b, c, d \in \tau_2$ están medidas con respecto al punto “o” y que τ_2 está contenido en el plano PL como se muestra en la figura 4.4.

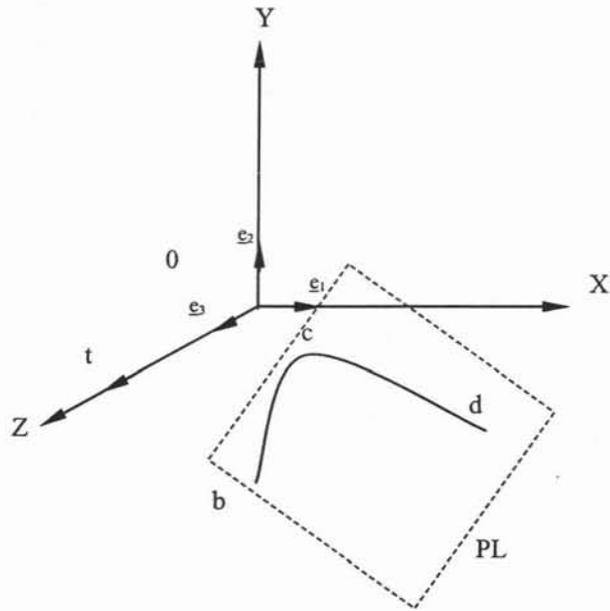


Figura 4.4 Caracterización de los puntos de PL

Observe en la figura anterior que, el plano PL tiene una orientación con respecto al sistema global $\underline{e}_j \in \mathfrak{R}$; $j = 1, 2, 3$ localizado en el origen de coordenadas. Por consiguiente, resulta necesario caracterizar un sistema local sobre un punto de $\tau_2 \in PL$. Dicho sistema debe ser ortonormalizado con el objetivo que se pueda relacionar con el sistema global. Considere ahora que sobre el plano PL se definen los vectores (ver figura 4.5):

$$1) \underline{\Gamma}_{b,c} = (b) - (c) \tag{4.10}$$

$$2) \underline{\Gamma}_{d,c} = (d) - (c)$$

Observe en la figura anterior que el vector $\underline{\Gamma}_{N,N} \in \mathfrak{R}^3$ ha sido generado por la expresión:

$$\underline{\Gamma}_{N,N} = \underline{\Gamma}_{b,c} \times \underline{\Gamma}_{d,c} \tag{4.11}$$

siendo $\times : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ el producto vectorial. Dicho vector es perpendicular al plano PL, pues,

$$1) \left\langle \underline{\Gamma}_{N,N}, \underline{\Gamma}_{b,c} \right\rangle = 0$$

$$2) \left\langle \underline{\Gamma}_{N,N}, \underline{\Gamma}_{d,c} \right\rangle = 0$$

Aquí, $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ es el producto interno en \mathfrak{R}^3 .

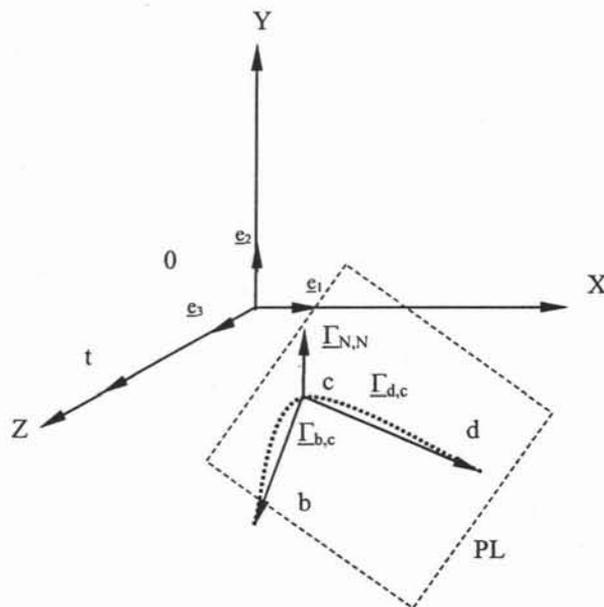


Figura 4.5 Definición de vectores en PL

El objetivo ahora, es determinar el sistema local ortonormal $\underline{k}'_j \in \mathfrak{R}^3$ sobre algún punto de $\tau_2 \subseteq PL$. Para ello, se tomará en cuenta el vector $\underline{\Gamma}_{b,c} \in \mathfrak{R}^3$ y el vector $\underline{\Gamma}_{N,N} \in \mathfrak{R}^3$ siguiendo los pasos siguientes:

- 1) Ortonormalizar $\underline{\Gamma}_{b,c} \in \mathfrak{R}^3$ y generar $\underline{k}'_2 \in \mathfrak{R}^3$.
- 2) Ortonormalizar $\underline{\Gamma}_{N,N} \in \mathfrak{R}^3$ y generar $\underline{k}'_3 \in \mathfrak{R}^3$.

- 3) Usar el producto vectorial para determinar el componente faltante de $\underline{k}_j' \in \mathfrak{R}^3$.

El sistema local se determina según los pasos descritos anteriormente; esto es:

$$1) \underline{k}_2' = \frac{\Gamma_{b,c}}{\|\Gamma_{b,c}\|} \quad (4.12)$$

$$2) \underline{k}_3' = \frac{\Gamma_{N,N}}{\|\Gamma_{N,N}\|}$$

$$3) \underline{k}_1' = \underline{k}_3' \times \underline{k}_2'$$

Aquí, $\|\bullet\|: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ es la norma euclidiana en \mathfrak{R}^3 . El sistema $\underline{k}_j' \in \mathfrak{R}^3$ ha sido construido sobre el punto $c \in \tau_2$ según se muestra en la figura 4.6.

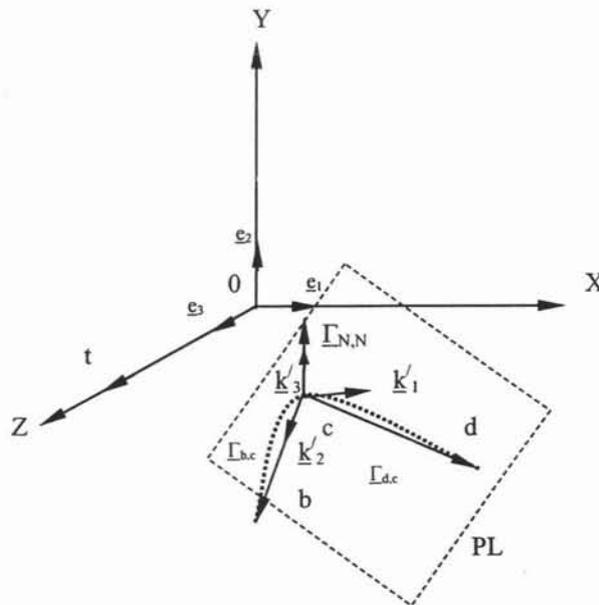


Figura 4.6 Localización de la base local.

Considere ahora que se desea representar los vectores $\underline{\Gamma}_{b,o}$, $\underline{\Gamma}_{c,o}$, $\underline{\Gamma}_{d,o} \in \mathbb{R}^3$ mostrados en la figura 4.2 en el sistema local $\underline{k}_j' \in \mathbb{R}^3$. Sea $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que caracteriza una rotación y M su matriz asociada tal que:

$$M = [\underline{k}_1', \underline{k}_2', \underline{k}_3'] \quad (4.13)$$

O, equivalentemente:

$$M = \begin{pmatrix} P_{1x} & P_{2x} & P_{3x} \\ P_{1y} & P_{2y} & P_{3y} \\ P_{1z} & P_{2z} & P_{3z} \end{pmatrix}$$

siendo:

$$\begin{aligned} 1) \underline{k}_1' &= (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) \\ 2) \underline{k}_2' &= (P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) \\ 3) \underline{k}_3' &= (P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

La matriz M es tal que:

$$M \circ M^{-1} = I$$

O, equivalentemente:

$$M \circ M^T = I$$

pues, $M^{-1} \equiv M^T$

Es decir, dicha matriz es ortogonal. Considere ahora que $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3 \in \mathfrak{R}^3$ son las representaciones de los vectores $\underline{\Gamma}_{b,o}, \underline{\Gamma}_{c,o}, \underline{\Gamma}_{d,o} \in \mathfrak{R}^3$ en la base $\underline{k}'_j \in \mathfrak{R}^3$; esto es:

$$1) \underline{F}_1 = M^{-1} [\underline{\Gamma}_{b,o}] \quad (4.15)$$

$$2) \underline{F}_2 = M^{-1} [\underline{\Gamma}_{c,o}]$$

$$3) \underline{F}_3 = M^{-1} [\underline{\Gamma}_{d,o}]$$

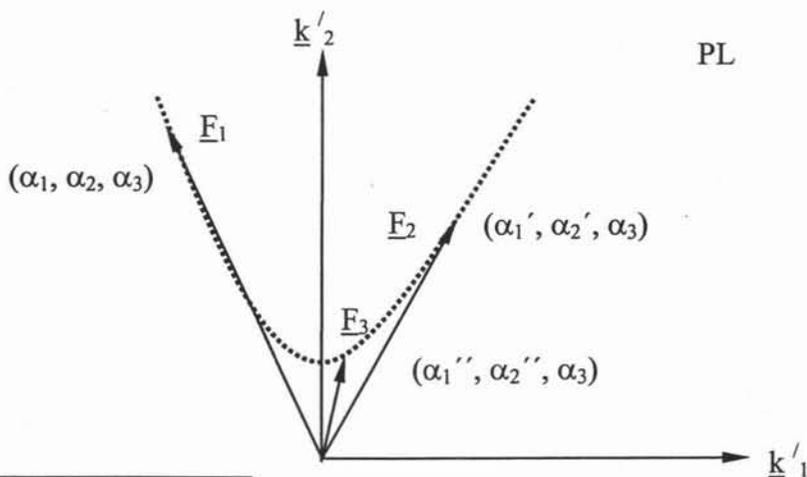
Note que:

$$1) \underline{\Gamma}_{b,o} = M [\underline{F}_1] \quad (4.16)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{c,o} = M [\underline{F}_2]$$

$$3) \underline{\Gamma}_{d,o} = M [\underline{F}_3]$$

Es importante hacer notar que los vectores $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3 \in \mathfrak{R}^3$ están definidos en PL y que, la coordenada en el eje "z" es la misma para ambos vectores*. Este hecho reduce el problema de la trayectoria "τ₂" a un problema plano; esto es, a PL. Considere ahora la figura 4.2.



* Esta afirmación se verifica del hecho de que la matriz de transformación fue creada pensando en que los vectores de posición de los tres puntos F1, F2 y F3 se encuentran en un mismo plano.

Figura 4.7 Puntos de la parábola en el plano PL

Note en la figura anterior que:

$$1) \underline{F}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (4.17)$$

$$2) \underline{F}_2 = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3)$$

$$3) \underline{F}_3 = (\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'') = (\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3)$$

pues:

$$\alpha_3 = \alpha_3' = \alpha_3''$$

La siguiente proposición es fundamental en este trabajo de tesis:

“Si se conocen tres puntos en el plano entonces la ecuación de la parábola queda determinada.”

Así, con la expresión:

$$(x - h)^2 - 4p(y - k) = 0$$

y conocidos \underline{F}_1 , \underline{F}_2 y \underline{F}_3 , entonces:

$$1) (\alpha_1 - h)^2 - 4p(\alpha_2 - k) = 0 \quad (4.18)$$

$$2) (\alpha_1' - h)^2 - 4p(\alpha_2' - k) = 0$$

$$3) (\alpha_1'' - h)^2 - 4p(\alpha_2'' - k) = 0$$

Nótese que el sistema (4.18) es cuadrado; es decir, es de tres ecuaciones algebraicas y tres incógnitas (h, p, k). Por otro lado, una vez determinadas (h, k) y “p” del sistema (4.18), el vértice de la parábola se define por:

$$\underline{V} = (h, k, \alpha_3) \quad (4.19)$$

4.2.4.1 Parametrización de la curva parabólica

Considere ahora que la expresión (4.9) se puede representar de la manera siguiente:

$$y = \frac{(x - h)^2}{4p} + k \quad (4.20)$$

Es decir, $y = f(x)$. Sea,

$$x = t \quad (4.21)$$

Por lo tanto, $y = f(t)$; es decir,

$$y(t) = \frac{(t - h)^2}{4p} + k \quad (4.22)$$

Además,

$$z(t) = \alpha_3(t)$$

Por tanto, el vector:

$$\underline{\Gamma}_K(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (4.23)$$

siendo, $z(t) = t$; $z(t) = \alpha_3(t)$ localiza cada punto de τ_2 en $t \in I$.

Aquí, t es un parámetro e $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado. En otras palabras, la función:

$$c(t) = \underline{\Gamma}_K(t)$$

es una curva [10].

La expresión (4.22) se puede escribir en términos de la base $\underline{k}_j' \in \mathfrak{R}^3$; esto es:

$$\tau_2 = \underline{\Gamma}_K(t) = (x(t) \bullet \underline{k}_1' \oplus y(t) \bullet \underline{k}_2' \oplus z(t) \bullet \underline{k}_3')$$
 (4.24)

4.2.4.2 Curva condicionada

El objetivo ahora es condicionar a la curva (4.23) para que inicie en el punto $b \in \tau_2$. Esto se logra solucionando el siguiente modelo:

$$\Gamma_K(t)_{bx} = \alpha_1(t)$$
 (4.25)

Aquí, $\Gamma_K(t)_{bx} \in \mathfrak{R}$ es la coordenada “x” del punto $b \in \tau_2$. Es decir, dada $\Gamma_K(t)_{bx} \in \mathfrak{R}$ encuéntrese $\wp = t^*$ tal que la expresión (4.25) sea satisfecha. Aquí $t^* \in \mathfrak{R}$ es el parámetro obtenido al solucionar la ecuación (4.25). Considérese determinada $\wp \in \mathfrak{R}$ y $t^* = t - \wp$, entonces:

$$\begin{aligned} 1) \quad x(t^*) &= t^* & (4.26) \\ 2) \quad y(t^*) &= \frac{(t^* - h)^2}{4p} + k \end{aligned}$$

Las expresiones (4.26) son las ecuaciones (4.21) y (4.22) condicionadas en $t^* \in \mathfrak{R}$; es decir, tales expresiones junto con:

$$z(t^*) = \alpha_3(t^*)$$
 (4.27)

determinan el punto inicial de τ_2 ; es decir, en $b \in \tau_2$.

Por tanto, la expresión (4.23) se escribe de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_K(t^*) = (x(t^*), y(t^*), z(t^*)) \quad (4.28)$$

O, equivalentemente:

$$\underline{\Gamma}_K(t^*) = (x(t^*) \bullet \underline{k}_1' \oplus + y(t^*) \bullet \underline{k}_2' \oplus z(t^*) \bullet \underline{k}_3') \quad (4.29)$$

4.2.4.3 Ecuaciones de posición en τ_2

Considere ahora que se desea localizar $c \in \tau_2$ desde el origen “o”. Esto puede hacerse según la expresión (4.2) la cual a continuación se reescribirá:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t) = \underline{\Gamma}_{b,o}(t) \oplus \underline{\Gamma}_{b,c}(t)$$

Considere ahora que dicha expresión se puede escribir en términos del parámetro $t^* \in \mathfrak{R}$; esto es:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t^*) = \underline{\Gamma}_{b,o}(t^*) \oplus \underline{\Gamma}_{b,c}(t^*) \quad (4.30)$$

Y siempre que $t^* = 0$, entonces:

$$\underline{\Gamma}_{b,o}(t^*) = \underline{\Gamma}_{b,c}(t^*) \quad (4.31)$$

Por tanto,

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t^*) = \underline{\Gamma}_K(t^*) \quad (4.32)$$

O, equivalentemente:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t^*) = (x(t^*) \bullet \underline{k}'_1 \oplus y(t^*) \bullet \underline{k}'_2 \oplus z(t^*) \bullet \underline{k}'_3) \quad (4.33)$$

Nótese que siendo $t^* \geq 0$, entonces el vector $\underline{\Gamma}_{c,o}(t^*) \in \mathfrak{R}^3$ localiza en cada $0 \leq t^* \leq T$ cualquier punto de τ_2 desde el origen de coordenadas “o”. Estas ideas se muestran en la figura siguiente:

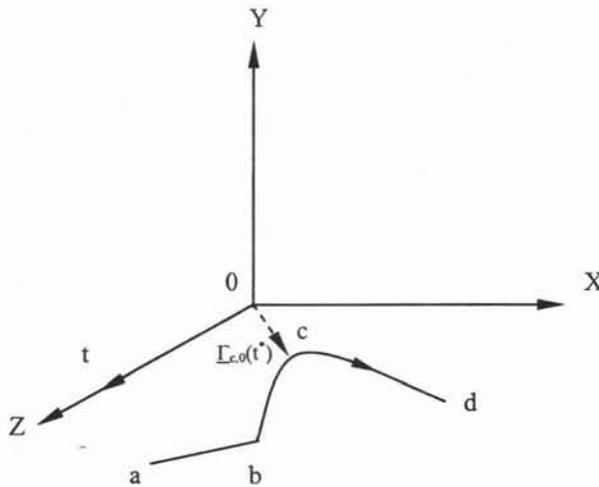


Figura 4.8 Vector de posición

Por tanto, la expresión (4.33) es el modelo de τ_2 .

4.2.4.4 Modelos de posición para $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

De acuerdo con la expresión (4.3), el modelo de la trayectoria “ τ ” es [2]:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t) = \underline{\Gamma}_{a,o}(t_o) \oplus \underline{\Gamma}_{b,a}(t) \Big|_{\tau_1} \oplus \underline{\Gamma}_{c,o}(t^*) \Big|_{\tau_2} \quad (4.34)$$

O, equivalentemente:

$$\Gamma_{c,o}(t) = \Gamma_{a,o}(t_0) \oplus l_{b,a}(t) \bullet \underline{k}_1' \oplus (x(t^*) \bullet \underline{k}_1' \oplus y(t^*) \bullet \underline{k}_2' \oplus z(t^*) \bullet \underline{k}_3') \quad (4.35)$$

$\begin{array}{c} \vdots \\ \tau_1 \\ \vdots \end{array}$
 $\begin{array}{c} \vdots \\ \tau_2 \\ \vdots \end{array}$

También:

$$\Gamma_{c,o}(t) = \Gamma_{a,o}(t_0) \oplus l_{b,a}(t) \bullet \underline{k}_1' \oplus (x(t - \wp) \bullet \underline{k}_1' \oplus y(t - \wp) \bullet \underline{k}_2' \oplus z(t - \wp) \bullet \underline{k}_3') \quad (4.36)$$

$\begin{array}{c} \vdots \\ \tau_1 \\ \vdots \end{array}$
 $\begin{array}{c} \vdots \\ \tau_2 \\ \vdots \end{array}$

pues,

$$t^* = t - \wp$$

4.2.4.5 La longitud de arco

En esta sección se reparametrizará la función (4.33), en términos de la longitud de arco. De acuerdo con la sección 3.2.3 del capítulo anterior, la longitud de arco es una función del parámetro natural; es decir [10]:

$$S : J \rightarrow I$$

definida por:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\Gamma_K(t)}{dt} \right| dt \quad (4.37)$$

Luego,

$$\left\| \frac{d\Gamma_K(t)}{dt} \right\| = \left\| \dot{\Gamma}_K(t) \right\| = (\dot{x}(t-\rho) + \dot{y}(t-\rho) + \dot{z}(t-\rho))$$

Por tanto:

$$1) \dot{x}(t-\rho) = (t-\alpha)^{\bullet} = 1 \quad (4.38)$$

$$2) \dot{y}(t-\rho) = \left[\frac{(t-\alpha-h)^2}{4p} + k \right]^{\bullet} = \frac{[t-\alpha-h]}{2p}$$

$$3) \dot{z}(t-\rho) = [\alpha_3(t)]^{\bullet} = \alpha_3$$

Es decir,

$$\left| \dot{\Gamma}_K(t) \right| = 1 + \frac{[t-\alpha-h]}{2p} + \alpha_3$$

Luego,

$$S(t) = \int_0^t \left[1 + \frac{t-\alpha-h}{2p} + \alpha_3 \right] dt = t + \frac{t^2}{4p} - \frac{t\alpha}{2p} - \frac{th}{2p} + t\alpha_3$$

O, equivalentemente

$$S(t) = t \left[1 + \frac{t}{4p} - \frac{\alpha}{2p} - \frac{h}{2p} + \alpha_3 \right]$$

Note que:

$$\frac{t^2}{4p} + t \left[1 - \frac{\rho}{2p} - \frac{h}{2p} + \alpha_3 \right] - S = 0$$

Obsérvese que siendo:

$$1) A = \frac{1}{4p}$$

$$2) B = 1 + \frac{\rho}{2p} - \frac{h}{2p} + \alpha_3$$

Entonces:

$$At^2 + Bt - S = 0$$

Luego,

$$t_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AS}}{2A}$$

$$t_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AS}}{2A}$$

Considere que $t_1 = t$, entonces:

$$\Gamma_{\mathbf{k}}(S) = \left[\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AS}}{2A} - \rho \bullet \underline{k}_1' \oplus \left[\frac{\left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AS}}{2A} - \alpha - h \right)^2}{4p} \right] + k \bullet \underline{k}_2' \oplus \right]$$

$$\left. \alpha_3 \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AS}}{2A} \right) \bullet k_3 \right] \quad (4.39)$$

4.2.4.5 Otra parametrización de la longitud de arco

De acuerdo con [2] y [10] la curva, en este caso, parabólica, es independiente de las parametrizaciones. Considere ahora la gráfica mostrada en la figura 4.9

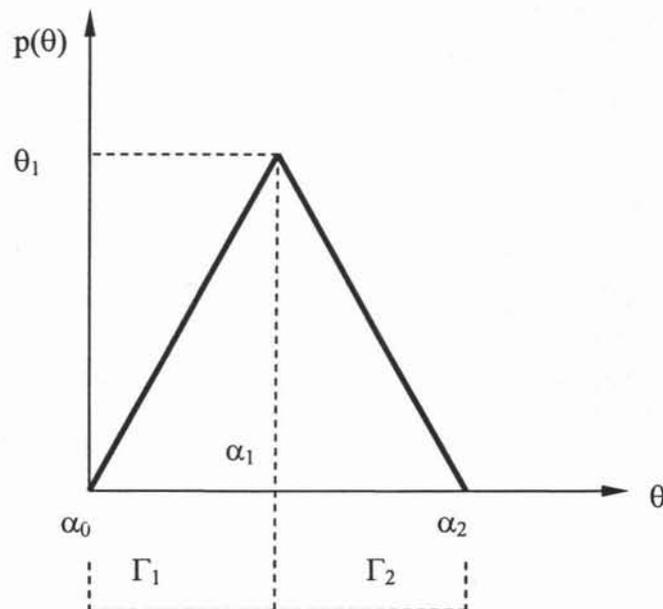


Figura 4.9 Gráfica asociada con la función de cambio de parámetro

La función $p : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por:

$$p(\theta) = f(\theta) \quad (4.40)$$

con : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = [\alpha_0, \alpha_1] \cup [\alpha_1, \alpha_2]$ es una función numérica con las siguientes condiciones:

- 1) $p(\alpha_0) = 0$

$$2) p(\alpha_1) = \theta_1$$

$$3) p(\alpha_2) = 0$$

La función asociada con la gráfica mostrada en la figura 4.9 se caracteriza por:

$$p(\theta) = \varphi_0 + \varphi_1(\theta) \quad ; \quad \theta \in \Gamma_1 \text{ o } \theta \in \Gamma_2 \quad (4.41)$$

Así,

$$1) p(\alpha_0) = 0 = \varphi_0 + \varphi_1(\alpha_0)$$

$$2) p(\alpha_1) = \theta_1 = \varphi_0 + \varphi_1(\alpha_1)$$

Dicho sistema de ecuaciones gobierna la función:

$$p(\theta) = \frac{\theta_1(\theta)}{\alpha_1 - \alpha_0} \quad ; \quad \text{en } \Gamma_1$$

pues,

$$\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_1 = \frac{\theta_1}{\alpha_1 - \alpha_0}$$

También,

$$1) p(\alpha_1) = \theta_1 = \varphi_0 + \varphi_1(\alpha_1)$$

$$2) p(\alpha_2) = 0 = \varphi_0 + \varphi_1(\alpha_2)$$

determina la función:

$$p(\theta) = \frac{\theta_1(\alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_1(\theta)}{\alpha_2 - \alpha_1} ; \quad \Gamma_2 \quad (4.42)$$

pues,

$$\wp_1 = \frac{\theta_1(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$\wp_1 = -\frac{\theta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Por tanto,

$$p(\theta) = \frac{\theta_1(\theta)}{\alpha_1 - \alpha_0} + \left[\frac{\theta_1(\alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_1(\theta)}{\alpha_2 - \alpha_1} \right] \quad (4.43)$$

Supóngase ahora que:

- 1) $\theta = t$; $\theta_1 = v_1$
- 2) $\Gamma_1 = J_1$; $\Gamma_2 = J_2$ con $\alpha_0 = s_0, \alpha_1 = s_1, \alpha_2 = s_2$

Luego la función (3.43) se puede escribir de la manera siguiente [2]:

$$V(t) = \frac{V_1(t)}{s_1 - s_0} \Big|_{J_1} + \left[\frac{V_1(s_2)}{s_2 - s_1} - \frac{V_1(t)}{s_2 - s_1} \right] \Big|_{J_2} \quad (4.44)$$

Aquí, $V : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de velocidad real. Las funciones de aceleración y de desplazamiento relacionadas con la expresión anterior son:

$$1) a(t) = \frac{V_1}{s_1 - s_0} \Big|_{J_1} + \frac{V_1}{s_2 - s_1} \Big|_{J_2} \quad (4.45)$$

$$2) D(t) = \frac{V_1(t^2)}{2(s_1 - s_0)} \Big|_{s_1}^t + \left[\frac{V_1(s_2)t}{s_2 - s_1} - \frac{V_1(t)^2}{2(s_2 - s_1)} \right] \Big|_{s_2}^t$$

Las gráficas asociadas con las expresiones (4.45) se muestran en la figura 4.10:

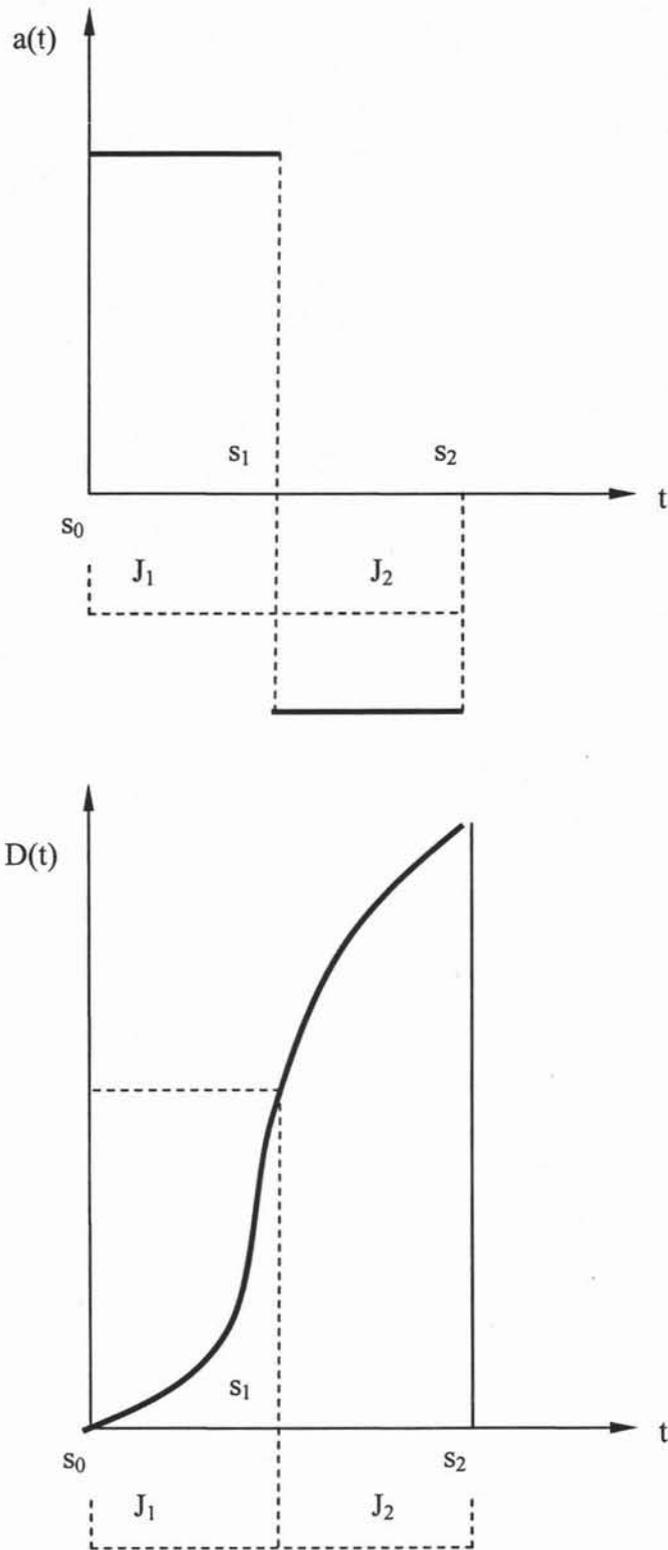


Figura 4.10 Gráficas de aceleración y desplazamiento

Se observa en la figura 4.10 que, existen discontinuidades en las gráficas de aceleración y desplazamiento. Para poder eliminar tales discontinuidades se propone el siguiente polinomio:

$$\pi(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^3 + \alpha_4(t)^4 + \alpha_5(t)^5 \quad (4.46)$$

Tal función cumple con los requerimientos del cambio admisible de parámetro. Considere ahora el siguiente sistema:

$$A \underline{\alpha} = \underline{b} \quad (4.47)$$

siendo:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & s_0^3 & s_0^4 & s_0^5 \\ 1 & s_1 & s_1^2 & s_1^3 & s_1^4 & s_1^5 \\ 0 & 1 & 2s_0 & 3s_0^2 & 4s_0^3 & 5s_0^4 \\ 0 & 1 & 2s_1 & 3s_1^2 & 4s_1^3 & 5s_1^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6s_0 & 12s_0^2 & 20s_0^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6s_1 & 12s_1^2 & 20s_1^3 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ V_1 \\ V_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

La función $\pi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ servirá para dos propósitos [2]:

- 1) Para eliminar las discontinuidades de los perfiles.
- 2) Para realizar un cambio admisible de parámetro, pues:

$$\text{i) } \dot{\pi}(t) = \alpha_1 + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)^2 + \alpha_4(t)^3 + \alpha_5(t)^4 \quad (4.48)$$

$$\text{ii) } \ddot{\pi}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(t) + 12\alpha_4(t)^2 + 20\alpha_5(t)^3$$

es decir,

- 1) $P \in C^2$
- 2) $\frac{d(P)}{dt} \neq \emptyset$

Obsérvese que siendo, $\det A \neq 0$, entonces:

$$\underline{\alpha} = A^{-1} \underline{b} \quad (4.49)$$

Supóngase que:

$$\alpha_0 = \beta_0$$

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = \beta_2$$

$$\alpha_4 = \beta_4$$

$$\alpha_5 = \beta_5$$

Por tanto,

$$1) \pi(t) = \beta_0 + \beta_1(t) + \beta_2(t)^2 + \beta_3(t)^3 + \beta_4(t)^4 + \beta_5(t)^5 \quad (4.50)$$

$$2) \dot{\pi}(t) = \beta_1 + \beta_2(t) + \beta_3(t)^2 + \beta_4(t)^3 + \beta_5(t)^4$$

$$3) \ddot{\pi}(t) = 2\beta_2 + 6\beta_3(t) + 12\beta_4(t)^2 + 20\beta_5(t)^3$$

Las gráficas relacionadas con las expresiones (4.50) se muestran en la figura siguiente:

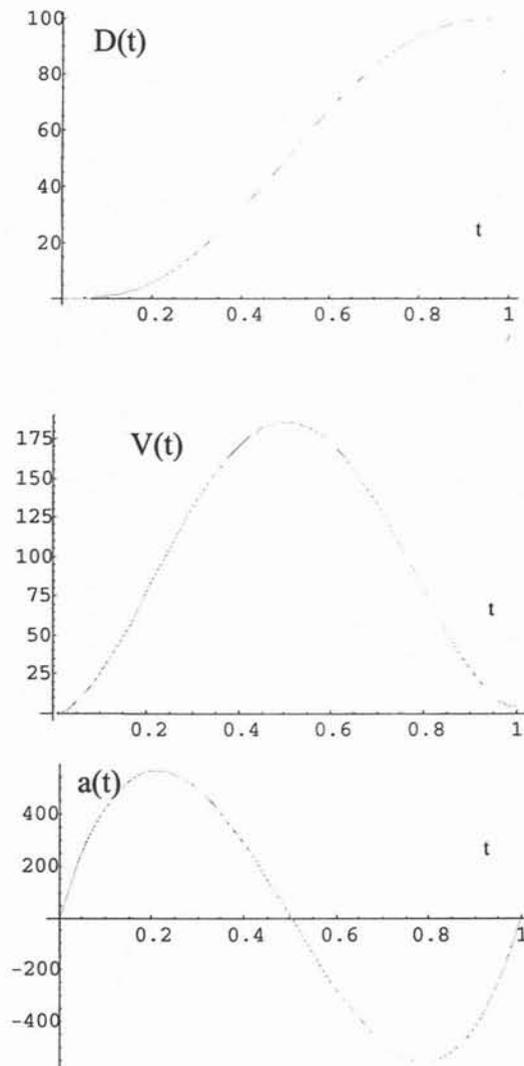


Figura 4.11 Perfiles de posición, velocidad y aceleración sin discontinuidades

Se observa en la figura 4.11 que las discontinuidades han sido eliminadas en los perfiles. Por otro lado, las relaciones:

$$1) S_1^* = S_1^*(t) = \int_{s_0}^t \left| \dot{\pi}(t) \right| dt \quad (4.51)$$

$$2) S_2^* = S_2^*(t) = \int_{s_1}^t \left| \dot{\pi}(t) \right| dt$$

denotan la longitud de arco; es decir,

$$S^* = S_1^* + S_2^* = \pi(t) = \beta_0 + \beta_1(t) + \beta_2(t)^2 + \beta_3(t)^3 + \beta_4(t)^4 + \beta_5(t)^5 \quad (4.52)$$

denota la longitud de arco en términos del parámetro S^* .

Supóngase ahora que $t = S^*$, luego la expresión (4.33) se escribe de la manera siguiente:

$$\Gamma_{c,o}(t^*) = ([S^* - \varphi] \bullet \underline{k}_1' \oplus \left[\frac{(S^* - \varphi - h)^2}{4p} + k \right] \bullet \underline{k}_2' \oplus \alpha_3 (S^* - \varphi) \bullet \underline{k}_3') \quad (4.53)$$

Aquí, $t^* = (S^* - \varphi)$.

La expresión 4.53 está relacionada solamente con la trayectoria parabólica τ_2 .

4.2.4.7 Acoplamiento de las trayectorias $\tau_1 \cup \tau_2$

De acuerdo con la expresión (4.35), la expresión de posición relacionada con la trayectoria $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ es:

$$\Gamma_{c,o}(t) = \Gamma_{a,o}(t_o) \oplus l_{b,a}(t) \bullet \underline{k}_1' \quad \oplus (x(t^*) \bullet \underline{k}_1' \oplus y(t^*) \bullet \underline{k}_2' \oplus z(t^*) \bullet \underline{k}_3') \quad \tau_1$$

Considere ahora la función:

$$l_{b,a}(t) = \pi_1^*(t) + \pi_2^*(t) \quad (4.54)$$

Siendo:

$$1) \pi_1^* : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$2) \pi_2^* : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas por:

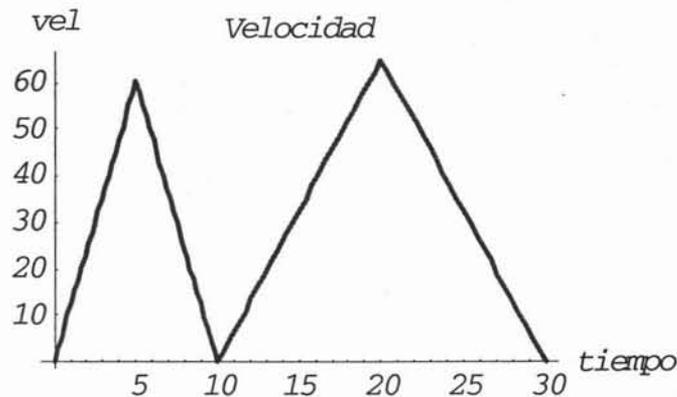
$$1) \pi_1^*(t) = F_0 + F_1(t) + F_2(t)^2 + F_3(t)^3 + F_4(t)^4 + F_5(t)^5$$

$$2) \pi_2^*(t) = E_0 + E_1(t) + E_2(t)^2 + E_3(t)^3 + E_4(t)^4 + E_5(t)^5$$

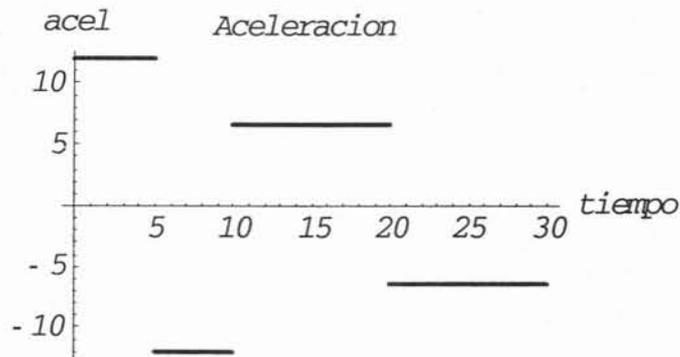
Dichas expresiones son polinomios de grado 5 relacionadas con el perfil de desplazamientos asociados al lugar geométrico rectilíneo τ_1 .

Cabe hacer notar que, el perfil de desplazamientos de τ_1 es similar a τ_2 . La figura siguiente (4.12) muestra los perfiles teóricos relacionados con τ :

Gráfica de velocidad teórica



Gráfica de aceleración teórica



Gráfica de posición teórica

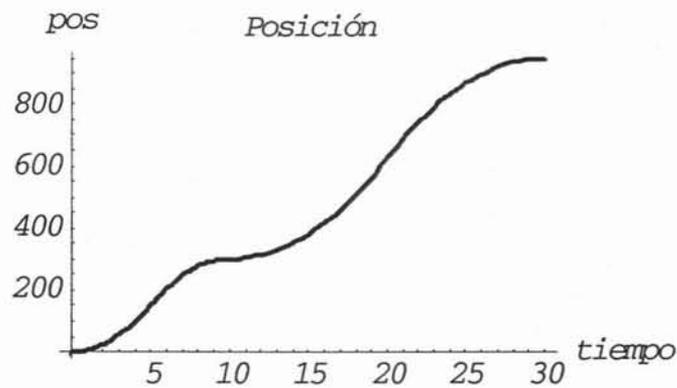
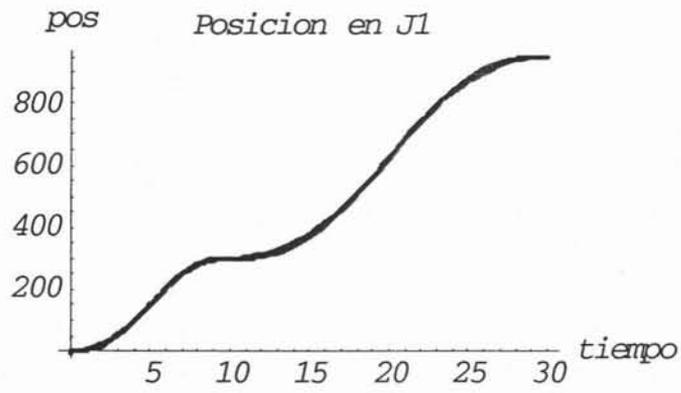


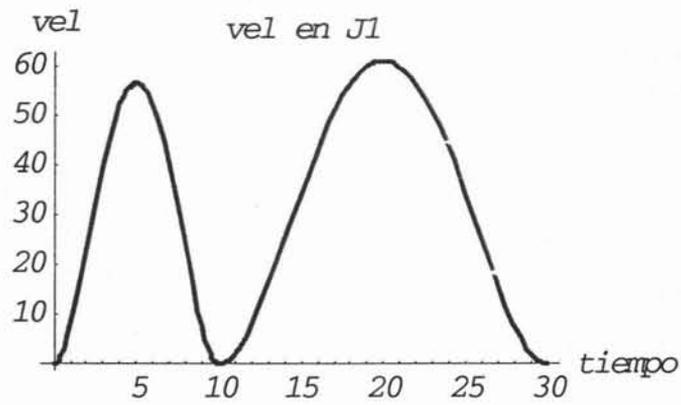
Figura 4.12 Perfiles teóricos asociados con τ

Los perfiles suavizados se muestran en la figura siguiente figura (figura 4.13):

Gráfica de posición suavizada



Gráfica de velocidad suavizada



Gráfica de aceleración suavizada

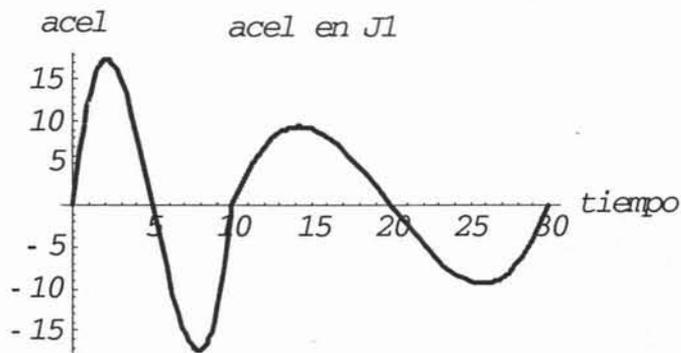
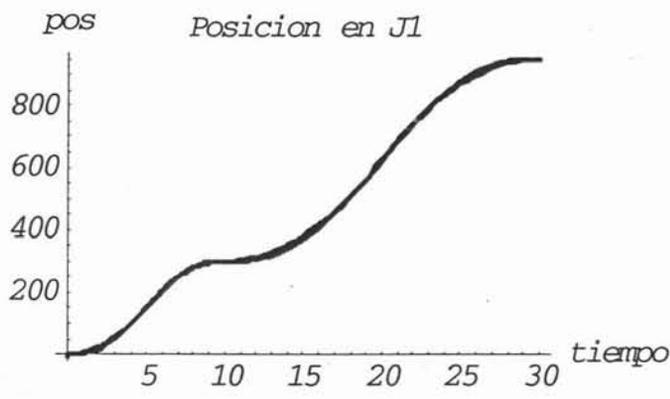


Figura 4.13 Perfiles suavizados

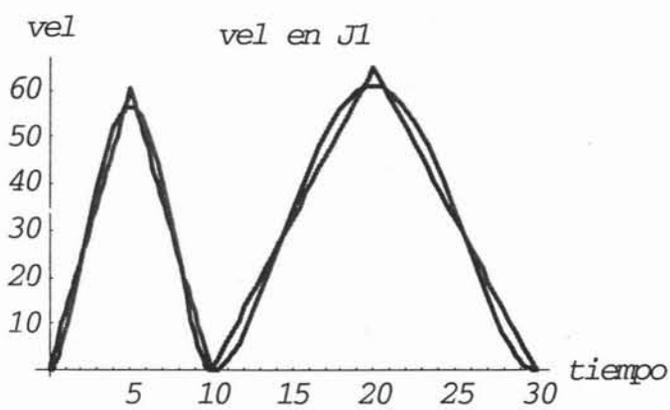
En la siguiente figura (figura 4.14) se muestra una comparación entre los perfiles de posición velocidad y aceleración teóricos y los suavizados:

Gráfica de posición



ESTA TESIS NO SALI
DE LA BIBLIOTECA

Gráfica de velocidad



Gráfica de aceleración

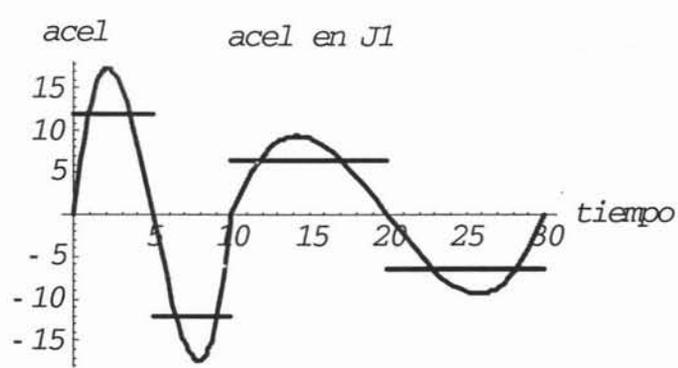


Figura 4.14 Perfiles teóricos vs perfiles suavizados

Por tanto la expresión (4.35) se escribe en términos de las expresiones (4.54) de la manera siguiente:

$$\underline{\Gamma}_{c,o}(t) = \underline{\Gamma}_{a,o}(t_o) \oplus \pi^*(t) \bullet \frac{1}{d_{b,a}} \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix} \Big|_{\tau_1} \oplus ([S^* - \varphi] \bullet \underline{k}'_1 \oplus \left[\frac{((S^* - \varphi) - h)^2}{4p} + k \right] \bullet \underline{k}'_2 \oplus \alpha_3 (S^* - \varphi) \bullet \underline{k}'_3)$$

Aquí,

- 1) $\pi(t^*) = l_{b,a}(t)$
- 2) $d_{b,a} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$

Supóngase ahora que:

- 1) $x(t^*) = [t - \varphi]$
- 2) $y(t^*) = \left[\frac{((t - \varphi) - h)^2}{4p} + k \right]$
- 3) $z(t^*) = \alpha_3 (t - \varphi)$

Luego,

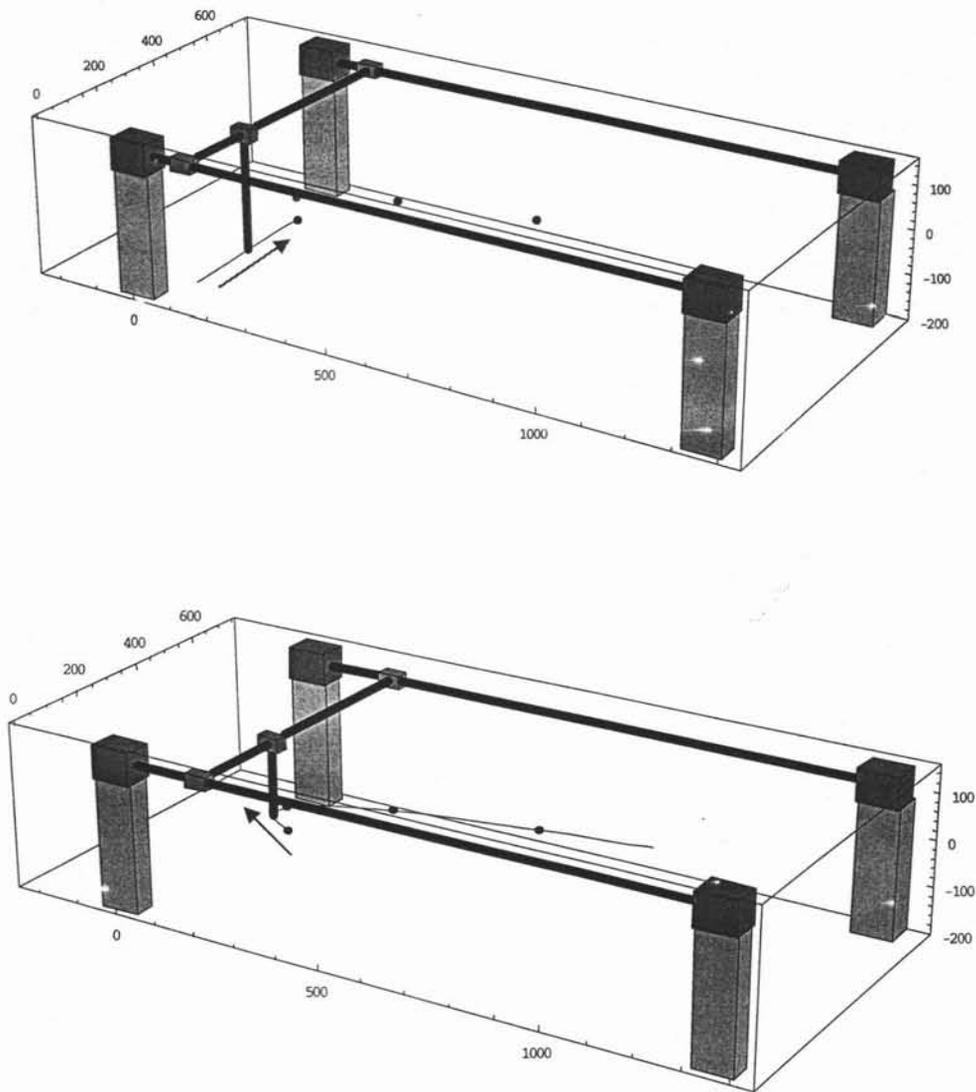
$$\dot{\underline{\Gamma}}_{c,o}(t) = \dot{\pi}^*(t) \bullet \frac{1}{d_{b,a}} \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix} \Big|_{\tau_1} \oplus (\dot{x}(t) \bullet \underline{k}'_1 \oplus \dot{y}(t) \bullet \underline{k}'_2 \oplus \dot{z}(t) \bullet \underline{k}'_3)$$

y

$$\ddot{\underline{\Gamma}}_{c,o}(t) = \ddot{\pi}^*(t) \bullet \frac{1}{d_{b,a}} \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix} \Big|_{\tau_1} \oplus (\ddot{x}(t) \bullet \underline{k}'_1 \oplus \ddot{y}(t) \bullet \underline{k}'_2 \oplus \ddot{z}(t) \bullet \underline{k}'_3)$$

dichas expresiones son la velocidad y la aceleración de un punto que se desplaza por el lugar geométrico τ .

En la figura siguiente (figura 4.15) se muestra un robot cartesiano que sigue una trayectoria parabolica generada a partir de tres puntos y cuyos perfiles de velocidad se suavizaron con la metodología descrita anteriormente.



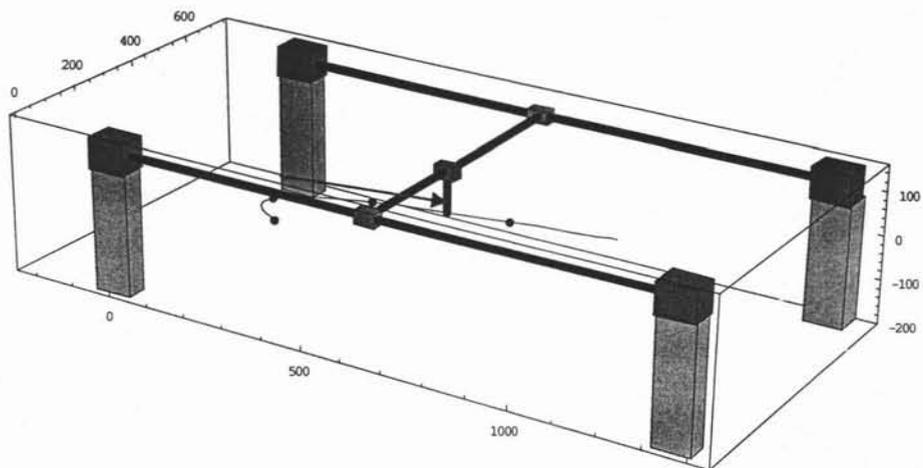


Fig 4.15. Robot cartesiano con trayectoria

Conclusiones

En este trabajo de tesis fueron cumplidos los objetivos siguientes:

- Se analizó, modeló, programó y se simuló una trayectoria continua parabólica.
- Fueron construidos los modelos cinemáticos de un robot cartesiano tipo PPP.
- Se realizó un estudio sistemático de las ecuaciones de Frenet.
- Fue Aplicado el Método Científico para formular y solucionar los problemas de trayectoria y del robot.
- Fueron acoplados los modelos de la trayectoria y del robot y, posteriormente, se programaron y simularon los movimientos en el paquete de cálculo formal Mathematica V4.

Así mismo, en este trabajo de tesis fue desarrollado un modelo de trayectoria curva; esto es, una trayectoria compuesta por lugares geométricos rectilíneos y un segmento parabólico. La trayectoria fue integrada con el modelo de un robot cartesiano de tres grados de libertad

Futuros trabajos por desarrollar relacionados con el tema tratado en esta tesis son:

- Análisis y modelación de trayectorias no rectilíneas.
- Cinemática y dinámica de la maquinaria.
- Modelos de información de componentes complejos.
- Modelación de trayectorias en un sistema completo de manufactura.

Apéndice

Programación

Introducción. En este apéndice se presenta el código de programación usado en el software de calculo formal Matemática V4 para generar una trayectoria parabólica a partir de tres puntos arbitrarios en el espacio de trabajo de un robot cartesiano tipo PPP .Son acoplados también los modelos de trayectoria y del robot, así mismo son simulados los movimientos del robot . Para la generación de la trayectoria fueron usados perfiles de suavización de 5° Grado como se describe a continuación.

A.1 Datos de la trayectoria

En esta parte se dan de alta los datos con los que serán construidos el robot y la trayectoria parabólica. Los datos mencionados son:

- Home del robot = (o_x, o_y, o_z)
- Punto final de la recta de acercamiento a la curva $Pr1=(r_{x1}, r_{y1}, r_{z1})$
- Puntos por los que pasara parábola: $p1=(x1,y1,z1)$, $p2 = (x2,y2, z2)$, $p3 = (x3, y3, z3)$
- Se generan a partir de P1, P2 y P3 los vectores con los que se construirá el plano donde se encuentra la parábola.

(*Puntos en el espacio*)

$ox = 90; oy = 90; oz = -180;$

$Po = \{ox, oy, oz\}$

$x1 = 150; y1 = 380; z1 = -125;$

$x2 = 500; y2 = 250; z2 = 40;$

$x3 = 750; y3 = 400; z3 = 0;$

$P1 = \{x1, y1, z1\}$

$P2 = \{x2, y2, z2\}$

$P3 = \{x3, y3, z3\}$

A.2 Datos del perfil de trayectoria

En esta parte se dan de alta los datos con los que serán construidos los modelos cinemáticos es decir, el tiempo, la velocidad de operación, la velocidad máxima, etc. Además se generan a partir de P1, P2 y P3 los vectores con los que se construirá el plano donde se encuentra la parábola.

$t0 \square 0;$

$t1 \square t0 + 10;$

$t2 \square t1 + 20;$

$dist1 \square$

$dist2 \square 650$

$Unit1 \square \frac{P1 - Po}{dist1};$



A.2.1 Vectores generadores del plano donde se construirá la parábola

Aquí se generan dos vectores a partir de los tres puntos dados en la primera sección. Se establece que un vector queda bien determinado si se construye a partir de dos puntos dados del espacio de puntos euclidiano. Así mismo se crea una función para determinar la norma de un vector como sigue.

```

_Vectores generadores del plano
c1 = P1 P2;
c2 = P3 P2;
Norma c1 :
Norma c2 :
Vmax = 1629 ;
Vmax2 = 65 ;

```

A.3 Funciones

Aquí se construyen la siguientes funciones:

- Función para crear una recta punto pendiente
- Funciones para resolver el sistema de ecuaciones para los polinomios de 5° grado.
- Función para crear una recta en el espacio

```
Clear[t]
```

```
Vela[Vfin_, Vini_, tfin_, tini_] := Vini + ((Vfin - Vini)/(tfin - tini))(tfin - tini)
```

```
vel[Vfin_, Vini_, tfin_, tini_, t_] := Vini + ((Vfin - Vini)/(tfin - tini))(
t - tini)
```

```
Ecuaciones[ti_, tf_, di_, df_, vi_, vf_, ai_, af_] := {1*alfa0 + alfa1*ti + alfa2*ti^2 + alfa3*
ti^3 + alfa4*ti^4 + alfa5*ti^5 == di, 1*alfa0 + alfa1*tf + alfa2*tf^2 + alfa3*tf^3 + alfa4*tf^4 +
alfa5*tf^5 == df, 0*alfa0 + 1*alfa1 + 2*alfa2*ti + 3*alfa3*ti^2 + 4*alfa4*ti^3 + 5*alfa5*
ti^4 == vi, 0*alfa0 + 1*alfa1 + 2*alfa2*tf + 3*alfa3*tf^2 + 4*alfa4*
tf^3 + 5*alfa5*tf^4 == vf, 0*alfa0 + 0*alfa1 + 2*alfa2 + 6*alfa3*ti + 12*alfa4*ti^2 +
20*alfa5*ti^3 == ai, 0*alfa0 + 0*alfa1 + 2*alfa2 + 6*alfa3*tf + 12*alfa4*tf^2 + 20*alfa5*tf^3 ==
af}
```

```
recta[p_, Polj_, Unit_] := p + Polj*Unit
```

A.4 Ecuaciones cinemáticas

En esta sección se construyen los perfiles trapezoidales de velocidad a partir de los datos anteriormente dados de alta, así como las ecuaciones de posición y aceleración y sus respectivas gráficas.

A.4.1 Ecuaciones de velocidad

Funcion en primer tramo;

$$V_{el1a} = V_{ela}[V_{max}, 0, t1/2, t0];$$

$$vel1 = vel[V_{max}, 0, t1/2, t0, t];$$

Funcion en segundo tramo;

$$V_{el2a} = V_{ela}[0, V_{max}, t1, t1/2];$$

$$vel2 = vel[0, V_{max}, t1, t1/2, t];$$

Funcion en tercer tramo;

$$V_{el3a} = V_{ela}[V_{max2}, 0, t1 + ((t2 - t1)/2), t1];$$

$$vel3 = vel[V_{max2}, 0, t1 + ((t2 - t1)/2), t1, t];$$

Funcion en cuarto tramo;

$$V_{el4a} = V_{ela}[0, V_{max2}, t2, t1 + ((t2 - t1)/2)];$$

$$vel4 = vel[0, V_{max2}, t2, t1 + ((t2 - t1)/2), t];$$

```
Grafjvel1 = Plot[vel1, {t, t0, t1/2}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad", TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
Grafjvel11 = Plot[vel2, {t, t1/2, t1}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en segundo tramo", TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
Grafjvel111 = Plot[vel3, {t, t1, t1 + ((t2 - t1)/2)}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en tercer tramo", TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
Grafjvel1111 = Plot[vel4, {t, t1 + ((t2 - t1)/2), t2}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01], RGBColor[0, \
0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en cuarto tramo",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
StyleBox["Gráfica de Velocidad teórica:", "Section", FontColor -> RGBColor[0.968765, 0.460945,
0.121096]] // DisplayForm
Show[Grafjvel1, Grafjvel11, Grafjvel111, Grafjvel1111]
```

A.4.2 Ecuaciones de Aceleración

Función aceleracion asociada a J1;

```
acel1=D[vel1,t];
```

Función aceleracion asociada a J2;

```
acel2=D[vel2,t];
```

Función aceleracion asociada a J3;

```
acel3=D[vel3,t];
```

Función aceleracion asociada a J2;

```
acel4=D[vel4,t];
```

```
Grafjcel1=Plot[acel1,{t,t0,t1/2}, PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0, 0.500008,
0.500008]}},AxesLabel->{"tiempo","acel"},PlotLabel->"Aceleracion ",TextStyle -> {FontSlant\
->"Oblique",FontSize->12}];
```

```
Grafjcel11=Plot[acel2,{t,t1/2,t1},PlotStyle->{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008,
0.500008]}}, AxesLabel->{"tiempo","acel"},PlotLabel->"Aceleracion en segundo tramo",
TextStyle->{FontSlant->"Oblique",FontSize->12}];
```

```
Grafjcel111=Plot[acel3,{t,t1,t1+((t2-t1)/2)}, PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,
0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel -> {"tiempo","acel"},PlotLabel->"Aceleracion en tercer
tramo",TextStyle ->{FontSlant ->"Oblique",FontSize ->12}];
```

```
Grafjcel1111=Plot[acel4,{t,t1+((t2-t1)/2),t2},PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,
0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel ->{"tiempo","acel"},PlotLabel -> "Aceleracion en cuarto
tramo",TextStyle->{FontSlant-> "Oblique",FontSize ->12}];
```

```

StyleBox["Gráfica de Aceleración teórica:", "Section", FontColor->RGBColor[0.968765, 0.460945,
0.121096]]//DisplayForm
Show[Grafjacel1,Grafjacel11,Grafjacel111,Grafjacel1111]

```

A.4.3 Ecuaciones de Posición

Función posición asociada a J1;

```
pos1=Integrate[vel1,{t,t0,t}];
```

```
pos1a=Integrate[vel1,{t,t0,t1/2}];
```

Función posición asociada a J2;

```
pos2=pos1a+Integrate[vel2,{t,t1/2,t}];
```

```
pos2a=pos1a+Integrate[vel2,{t,t1/2,t1}];
```

Función posición asociada a J3;

```
pos3=pos2a+Integrate[vel3,{t,t1,t}];
```

```
pos3a=pos2a+Integrate[vel3,{t,t1,t1+(t2-t1)/2}];
```

Función posición asociada a J2;

```
pos4=pos3a+Integrate[vel4,{t,t1+(t2-t1)/2,t}];
```

```
pos4a=pos3a+Integrate[vel4,{t,t1+(t2-t1)/2,t2}];
```

```

Grafjpos1=Plot[pos1,{t,t0,t1/2},PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,.500008]}},
AxesLabel->{"tiempo","pos"},PlotLabel->"Posición",TextStyle->{FontSlant->"Oblique",
FontSize->12}];

```

```

Grafjpos11=Plot[pos2,{t,t1/2,t1},PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,
0.500008]}},AxesLabel->{"tiempo","pos"},PlotLabel\["Rule]"Posición en segundo tramo",
TextStyle->{FontSlant->"Oblique",FontSize->12}];

```

```

Grafjpos111=Plot[pos3,{t,t1,t1+((t2-t1)/2)},PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,
0.500008]}},AxesLabel->{"tiempo","pos"},PlotLabel->"Posición en tercer tramo",TextStyle->
{FontSlant\["Rule]"Oblique",FontSize\["Rule]12}];

```

```

Grafjpos1111=Plot[pos4,{t,t1+((t2-t1)/2),t2},PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,
0.500008]}},AxesLabel->{"tiempo","pos"},PlotLabel->"Posición en cuarto tramo",
TextStyle->{FontSlant->"Oblique",FontSize->12}];

```

```
StyleBox["Gráfica de Posición teórica:", "Section", FontColor->RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]]//DisplayForm
```

```
Show[Grafjpos1,Grafjpos11,Grafjpos111,Grafjpos1111]
```

A.5 Polinomios de suavización

En esta sección y con las ecuaciones construidas en el paso anterior se generan los polinomios de 5° grado

Polinomio de suavizacion en J1;

```
Clear[alfa0,alfa1,alfa2,alfa3,alfa4,alfa5];
```

```
Sol1=Solve[
```

```
    Ecuaciones[t0,t1,0,dist1,0,0,0,0],{alfa0,alfa1,alfa2,alfa3,alfa4,
    alfa5}]/Flatten;
```

```
{a0j1,a1j1,a2j1,a3j1,a4j1,a5j1}={alfa0,alfa1,alfa2,alfa3,alfa4,alfa5}/.Sol1;
```

```
Polj1=a0j1+a1j1*(t)+a2j1*(t)^2+a3j1*(t)^3+a4j1*(t)^4+a5j1*(t)^5
```

```
Polj1p=D[Polj1,t]
```

```
Polj1pp=D[Polj1p,t]
```

```
Grafj1=Plot[Polj1,{t,t0,t1},
```

```
    PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,0.500008]}},
    AxesLabel[Rule]{"tiempo","pos"},PlotLabel[Rule]"Posicion en J1",
    TextStyle[Rule]{FontSlant[Rule]"Oblique",FontSize[Rule]12};
```

```
Grafj11=Plot[Polj1p,{t,t0,t1},
```

```
    PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,0.500008]}},
    AxesLabel[Rule]{"tiempo","vel"},PlotLabel[Rule]"vel en J1",
    TextStyle[Rule]{FontSlant[Rule]"Oblique",FontSize[Rule]12};
```

```
Grafj111=Plot[Polj1pp,{t,t0,t1},
```

```
    PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,0.500008]}},
    AxesLabel[Rule]{"tiempo","acel"},PlotLabel[Rule]"acel en J1",
    TextStyle[Rule]{FontSlant[Rule]"Oblique",FontSize[Rule]12};
```

Polinomio de suavizacion en J2;

```
Clear[alfa0,alfa1,alfa2,alfa3,alfa4,alfa5];
```

```
Sol2=Solve[  
  Ecuaciones[t1,t2,300,300+dist2,0,0,0,0],{alfa0,alfa1,alfa2,alfa3,  
  alfa4,alfa5}]/Flatten;  
{a0j2,a1j2,a2j2,a3j2,a4j2,  
  a5j2}={alfa0,alfa1,alfa2,alfa3,alfa4,alfa5}/.Sol2;
```

```
Polj2=a0j2+a1j2*(t)+a2j2*(t)^2+a3j2*(t)^3+a4j2*(t)^4+a5j2*(t)^5  
Polj2p=D[Polj2,t]  
Polj2pp=D[Polj2p,t]
```

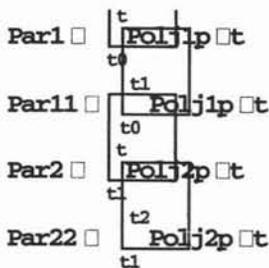
```
Grafj2=Plot[Polj2,{t,t1,t2},  
  PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,0.500008]}},  
  AxesLabel[Rule]{"tiempo","pos"},PlotLabel[Rule]"Posicion en J2",  
  TextStyle[Rule]{FontSlant[Rule]"Oblique",FontSize[Rule]12};  
Grafj21=Plot[Polj2p,{t,t1,t2},  
  PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,0.500008]}},  
  AxesLabel[Rule]{"tiempo","vel"},PlotLabel[Rule]"vel en J2",  
  TextStyle[Rule]{FontSlant[Rule]"Oblique",FontSize[Rule]12};  
Grafj211=Plot[Polj2pp,{t,t1,t2},  
  PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0,0.500008,0.500008]}},  
  AxesLabel[Rule]{"tiempo","acel"},PlotLabel[Rule]"acel en J2",  
  TextStyle[Rule]{FontSlant[Rule]"Oblique",FontSize[Rule]12};
```

```
StyleBox["Gráfica de Posición suavizada :","Section",  
  FontColor->RGBColor[0.968765,0.460945,0.121096]]//DisplayForm  
Show[Grafj1,Grafj2,Grafjpos1,Grafjpos11,Grafjpos111,Grafjpos1111]  
StyleBox["Gráfica de Velocidad suavizada:","Section",  
  FontColor->RGBColor[0.968765,0.460945,0.121096]]//DisplayForm
```

```
Show[Grafj11,Grafj21,Grafjvel1,Grafjvel11,Grafjvel111,Grafjvel1111]
StyleBox["Gráfica de Aceleración suavizada:", "Section",
  FontColor->RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]]//DisplayForm
```

A.6 Cambio de parámetro

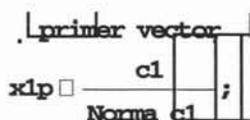
Usando el polinomio de 5° grado para el caso de la posición, se determina un cambio de parámetro a partir del concepto de longitud de arco de la teoría de Frenet como sigue



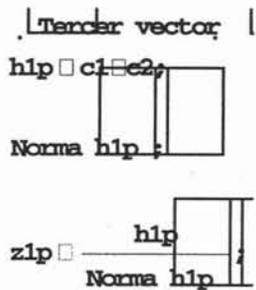
A.7 Determinación de las ecuaciones paramétricas de la curva a partir de los puntos dados

A.7.1 Creación de una base ortonormal en un punto de la parábola

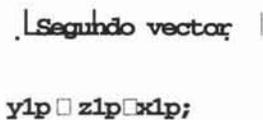
Con el vector C1 generado en 2.1 formaremos el primer vector e1 de la base nueva solamente normalizándolo.



Con el producto cruz de C1 y C2 encontramos un vector perpendicular al plano donde se generara la curva, este vector al ser normalizado nos genera nuestro e3 de la nueva base



Con el producto cruz de e_1 y e_3 de la nueva base tenemos un vector perpendicular a ambos que por ser generado a partir de dos unitarios también es unitario, este mismo vector será e_2 en nuestra nueva base



A.7.2 Determinación de las ecuaciones paramétricas de la parábola a partir de la base nueva

Ahora bien, es necesario expresar dos vectores de posición de los puntos de la parábola medidos en la base canónica como vectores medidos en nuestra nueva base para así poder llevar nuestro problema a un caso conocido, es decir, para el caso de la nueva base, los tres puntos comparten la misma coordenada en Z , ya que la parábola se encuentra en un plano. En efecto, al tratarse de una parábola que se encuentra en un plano, si se consigue llevar el problema al caso plano (misma coordenada en Z) el problema se reduce a el dominio de la geometría analítica (casos conocidos).

En efecto, es necesario entonces escribir las coordenadas de los puntos de la parábola en términos de la nueva base, para ello se usa el concepto de cambio de base. Así mismo, para

este efecto se debe construir una transformación lineal que me permita este cambio, esta transformación lineal se construye como sigue.

(*Matriz de rotacion*)

$$R = \{ \{x1p[[1]], y1p[[1]], z1p[[1]]\}, \{x1p[[2]], y1p[[2]], z1p[[2]]\}, \{x1p[[3]], y1p[[3]], z1p[[3]]\} \}$$

Asi mismo , aplicando la transformación lineal a cada punto de la parábola obtendremos esos mismos puntos medidos en la nueva base.

$$p1 = \text{Inverse}[R].P1 // N$$

$$p2 = \text{Inverse}[R].P2 // N$$

$$p3 = \text{Inverse}[R].P3 // N$$

Obsérvese que las tres coordenadas de los puntos p1, p2 y p3 comparten la misma coordenada en Z, ya que viven en el mismo plano. Esto último es una ventaja para el desarrollo de la curva por que limita nuestro problema al caso plano. Por ello solo tomando las coordenadas de e1 y e2 tenemos que es posible determinar las coordenadas del vértice y del lado recto (p) de una parábola a partir de tres puntos dados del plano, y se calculan como sigue.

Determinación del vertice de la parábola medidos en la nueva base

```
Clear[h, k, p]
Sol1 = Solve[
  {
    p1[[1]] - h == 4 p,
    p2[[1]] - h == 4 p,
    p3[[1]] - h == 4 p,
    p1[[2]] - k == 0,
    p2[[2]] - k == 0,
    p3[[2]] - k == 0
  },
  {h, k, p}
]
Flatten
```

Asignación de valores del vertice de la parábola medidos en la nueva base

```
Ver = {h, k, p} /. Sol1
Vertice = R.Ver
p = p /. Sol1;
h = h /. Sol1;
k = k /. Sol1;
```

A.7.3 Generación de la ecuación paramétrica

A partir del calculo de los valores de h, k y p es posible construir ya la ecuación de una parábola en cualquiera de sus representaciones (casos geométricos), para nuestro ejemplo se ha seleccionado una parábola cuyo eje es paralelo al vector e2. de la forma $(x - h)^2 - 4p(y - k) = 0$.

```
Clear k, y
Sol2 Solve [k h] 4 p [y k] 0 [x, y] Flatten
```

Ahora bien, si de la ecuación anterior, se desea buscar el valor de “y” despejándola de la ecuación podemos obtener una parametrización dejando a la “y” en función de “x” y asignándole a “x” el valor de un parámetro. En el bucle anterior se dejo a la variable y en función de la x y a continuación se realizaron dos pasos importantes:

- 1) Se le asigna a x el parámetro t
- 2) Se crea una ecuación vectorial haciendo que los valores de la ecuación parametrica que describe la parábola se conviertan en coordenadas del vector de posición, esto se logra generando una combinación lineal de la base {e1, e2, e3} usando a cada parámetro como el valor de las constantes de la combinación lineal

```
. Ecuaciones parametricas
Clear t
x t
y y
z p1
Eca [x x1p y y1p z z1p] Flatten;
```

Esta ultima expresión, aunque ya es una descripción exacta de la trayectoria motivo de estudio, aun tiene un inconveniente. No es posible asegurar que el punto que describe la curva iniciara en el lugar exacto en el que se desea que empiece, por ejemplo en P1. Esto se debe a que el parámetro seleccionado anteriormente fue elegido arbitrariamente, por esta razón el punto donde inicie la curva en el tiempo cero no se puede controlar. Por ello se requiere hacer un cambio de parámetro.

En efecto, se debe calcular el valor de “t” para el cual se cumpla la condición de inicio de la curva motivo de estudio, es decir, se construye una ecuación donde se iguale el valor del parámetro con el valor de la coordenada del punto donde se requiere iniciar. De este modo el valor que debe tomar “t” se usa como sigue.

- 1) El valor de desfase de “t” con respecto al punto deseado se debe restar al parámetro conservando su signo.

```

.Calculo del valor inicial del parametro para P1
Clear t
Sol3 = Solve Eca == P1, t
Flatten
po = t - Sol3[2]

```

La ultima expresión encontró el valor que debe restarse al parámetro para que su valor en el tiempo t_0 sea el deseado, a continuación se ejecuta la resta como se indico anteriormente y se construye una combinación lineal con la nueva parametrización como se muestra a continuación.

```

.Ecuaciones reparametrizadas
Clear t
x = Par2 - po;
y = y - Sol3;
z = p1 - z;
Eca1 = x - x1p y - y1p z - z1p Flatten;

```

Esta última ecuación, es la ecuación paramétrica de la trayectoria buscada para el caso de la parábola.

A.8 Construcción de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria

En este punto se generan las ecuaciones del tramo recto y de la parábola que seguirá el robot usando una de las funciones creadas en A.3.

□ Funciones del tramo rectilíneo

```
J1 = recta [Po, Polj1, Unit1]
```

□ Función de la trayectoria curva

```
Clear t
Rpot3 = Eca1
```

A.9 Simulación

Aquí se usa un ciclo para generar las soluciones que servirán para graficar el robot caso de estudio

```
For[i = 0, i ≤ t1, i += .5,
  t = i;
```

```
punto1 = Point[P1];
punto2 = Point[P2];
punto3 = Point[P3];
```

```
Vertice1 = Point[Vertice];
Pot = Point[J1];
```

```
Grafica = Table[{J1[[1]], J1[[2]], J1[[3]]}, {t, 0, t1, 1}];
Rec = Line[Grafica];
```

```

Recta = Graphics3D[Rec];
punto1 = Graphics3D[{PointSize[0.01], punto1}];
punto2 = Graphics3D[{PointSize[0.01], punto2}];
punto3 = Graphics3D[{PointSize[0.01], punto3}];

Vertice11 = Graphics3D[{PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0], Vertice1}];
Tray = Graphics3D[{PointSize[0.003], RGBColor[1, 0, 0], Pot}];

cubo1 = Cuboid[{-50, -10, 80}, {40, 60, 150}];
cubo2 = Cuboid[{1310, -10, 80}, {1400, 60, 150}];
cubo3 = Cuboid[{-50, 680, 80}, {40, 750, 150}];
cubo4 = Cuboid[{1310, 680, 80}, {1400, 750, 150}];
cubo5 = Cuboid[{J1[[1]] - 25, 10, 100}, {J1[[1]] + 25, 40, 130}];
cubo6 = Cuboid[{J1[[1]] - 25, 700, 100}, {J1[[1]] + 25, 730, 130}];
cubo7 = Cuboid[{J1[[1]] + 25, J1[[2]] + 15, 100}, {J1[[1]] - 25,
J1[[2]] - 15, 130}];
cubo8 = Cuboid[{-50, 0, -200}, {40, 50, 80}];
cubo9 = Cuboid[{1310, 0, -200}, {1400, 50, 80}];
cubo10 = Cuboid[{-50, 690, -200}, {40, 740, 80}];
cubo11 = Cuboid[{1310, 690, -200}, {1400, 740, 80}];

LineaEje1 = Line[{{40, 25, 115}, {1310, 25, 115}}];
LineaEje2 = Line[{{40, 715, 115}, {1310, 715, 115}}];

LineaEje3 = Line[{{J1[[1]], 40, 115}, {J1[[1]], 700, 115}}];
LineaEje4 = Line[{{J1[[1]], J1[[2]], 100}, {J1[[1]], J1[[2]], J1[[3]]}}];

base1 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo1}];
base2 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo2}];
base3 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo3}];
base4 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo4}];
base5 = Graphics3D[{RGBColor[0, 0.5, 1], cubo5}];

```

```

base6 = Graphics3D[{RGBColor[0, 0.5, 1], cubo6}];
OrganoTer = Graphics3D[{RGBColor[0, 0.5, 0], cubo7}];
Columna1 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo8}];
Columna2 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo9}];
Columna3 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo10}];
Columna4 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo11}];

eje1 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0, 0], LineaEje1}];
eje2 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6],
  RGBColor[0, 0, 0], LineaEje2}]; eje3 = \
Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0, 0], LineaEje3}];
Trazador = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6],
  RGBColor[0, 0, 0], LineaEje4}];

Show[Tray, puntop1, puntop2, puntop3,
  Vertice11, Recta, eje1, eje2, eje3, Trazador,
  base1, base2, base3, base4, base5, base6, OrganoTer,
  Columna1, Columna2, Columna3, Columna4,
  PlotRange -> {{-255, 1450}, {-20, 760}, {-200, 160}}, Boxed -> True,
  Axes -> True,
  Lighting -> False, ViewPoint -> {1.658, -2.651, 1.294},
  AspectRatio -> Automatic]]

```

Segundo segmento;

```

For[i = t1, i ≤ t2, i += .5,
  t = i;

  punto1 = Point[P1];
  punto2 = Point[P2];
  punto3 = Point[P3];

```

```

Vertice1 = Point[Vertice];
Pot = Point[Rpot3];

Grafica = Table[{Rpot3[[1]], Rpot3[[2]], Rpot3[[3]]}, {t, t1, t2, 1}];
Para = Line[Grafica];

Parabola = Graphics3D[Para];
puntop1 = Graphics3D[{PointSize[0.01], punto1}];
puntop2 = Graphics3D[{PointSize[0.01], punto2}];
puntop3 = Graphics3D[{PointSize[0.01], punto3}];

Vertice11 = Graphics3D[{PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0], Vertice1}];
Tray = Graphics3D[{PointSize[0.003], RGBColor[1, 0, 0], Pot}];

cubo1 = Cuboid[{-50, -10, 80}, {40, 60, 150}];
cubo2 = Cuboid[{1310, -10, 80}, {1400, 60, 150}];
cubo3 = Cuboid[{-50, 680, 80}, {40, 750, 150}];
cubo4 = Cuboid[{1310, 680, 80}, {1400, 750, 150}];
cubo5 = Cuboid[{Rpot3[[1]] - 25, 10, 100}, {Rpot3[[1]] + 25, 40, 130}];
cubo6 = Cuboid[{Rpot3[[1]] - 25, 700, 100}, {Rpot3[[1]] + 25, 730, 130}];
cubo7 = Cuboid[{Rpot3[[1]] + 25, Rpot3[[2]] + 15, 100}, {Rpot3[[1]] -
    25, Rpot3[[2]] - 15, 130}];
cubo8 = Cuboid[{-50, 0, -200}, {40, 50, 80}];
cubo9 = Cuboid[{1310, 0, -200}, {1400, 50, 80}];
cubo10 = Cuboid[{-50, 690, -200}, {40, 740, 80}];
cubo11 = Cuboid[{1310, 690, -200}, {1400, 740, 80}];

LineaEje1 = Line[{{40, 25, 115}, {1310, 25, 115}}];
LineaEje2 = Line[{{40, 715, 115}, {1310, 715, 115}}];
LineaEje3 = Line[{{Rpot3[[1]], 40, 115}, {Rpot3[[1]], 700, 115}}];
LineaEje4 = Line[{{Rpot3[[1]], Rpot3[[2]],
    100}, {Rpot3[[1]], Rpot3[[2]], Rpot3[[3]]}}];

```

```

base1 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo1}];
base2 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo2}];
base3 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo3}];
base4 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], cubo4}];
base5 = Graphics3D[{RGBColor[0, 0.5, 1], cubo5}];
base6 = Graphics3D[{RGBColor[0, 0.5, 1], cubo6}];
OrganoTer = Graphics3D[{RGBColor[0, 0.5, 0], cubo7}];

Columna1 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo8}];
Columna2 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo9}];
Columna3 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo10}];
Columna4 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0.500008, 0], cubo11}];

eje1 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0, 0], LineaEje1}];
eje2 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0,
0], LineaEje2}]; eje3 =
Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0, 0], LineaEje3}];
Trazador = Graphics3D[{AbsoluteThickness[
6], RGBColor[0, 0, 0], LineaEje4}];

Show[Tray, puntop1, puntop2, puntop3,
Vertice11, Recta, Parabola, eje1, eje2, eje3, Trazador,
base1, base2, base3, base4, base5, base6, OrganoTer,
Columna1, Columna2, Columna3, Columna4,
PlotRange -> {{-255, 1450}, {-20, 760}, {-200, 160}}, Boxed -> True,
Axes -> True,
Lighting -> False, ViewPoint -> {1.658, -2.651, 1.294},
AspectRatio -> Automatic]]

```

Una vez que es calculada cada una de las soluciones anteriores por el ciclo For el software desplegara una grafica por cada solución a manera de fotografía y se podrá correr como una película mostrando la salida grafica del robot en movimiento.

Referencias

- [1] Jiménez E., Reyes L., Galindo F., García D., González I., Hito O., Mercado I. Sincronización local y global de sistemas productivos seriales. Informe interno de investigación (2003). Universidad la Salle Noroeste. ISBN 968-5844-00-3
- [2] Jiménez E., Reyes L., Galindo F., Martínez A., Esquer H., Luna J., González I. Sistematización paso a paso de la modelación de trayectorias rectilíneas continuas. Informe interno de investigación (2004). Universidad la Salle Noroeste. ISBN 968-5844-04-6
- [3] Jiménez E., Reyes A., Galindo F., Esquer H., González I., Luna J., Mercado M., Portillo S. Simulación computacional de una trayectoria continua para la aplicación de soldadura por inmersión de estaño de un componente electrónico. Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C. Congreso 2003. Universidad Anáhuac del Sur.
- [4] Galindo G. Análisis, modelación y simulación de una trayectoria continua para la aplicación de soldadura en un transformador eléctrico. 2003. (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [5] Martínez R. Modelación y simulación computacional de trayectorias tridimensionales México.(1997). Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [6] Cohen M., Nagel E. Introducción a la lógica y al método científico: Lógica aplicada y método científico II. (1961). Harcour, Brace World Inc., Argentina.
- [7] Gurtin M. (1981). Introduction of Continuos Mechanics. Academic Press. New York.
- [8] Jorge A. "Fundamentals of Robotic Mechanical System. Theory, Methods and Algorithms". Springer- Verlag. New York (1997).

- [9] Rojas L. Algunas consideraciones sobre la planeación táctica y operacional. México. 2000 (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [10] Pogorelov, Aleksei V. "Geometria diferencial". Mir, Moscu 1977.
- [11] John W. Gray. Mastering Mathematica, Programming Methods and Applications. 1994. Academic Press Inc. New York.
- [12] Lee, C., Go, J., Lee H., Jun C., Kim D., Cha J., Ahn J. "A Robust Trajectory Control of a Polishing Robot System based on Cam". (2001). Robotics and Computer Integrated Manufacturing. 17. pp. 177-183.
- [13] Sezimária, F. P. Saramago, Valder Steffen Junior. "Optimal Trayectory Planning of Robot Manipulator in the presence of Moving Obstacle". (2000). Mechanism and Machine Theory. 35. pp. 1079-1094
- [14] Chen M., Zalzal A. "Dynamic Modelling and Genetic-Based Trajectory Generation for Non-Holonomic Mobile manipulator". (1997). Control Enginnering Practice. Vol 5. No 1. pp. 39-48.
- [15] Tu Q., Rastegar J. "On the characteristics of the Dynamic of Rigid Link Robot Manipulator". (1999). Mechanism and Machine Theory. 35. pp. 171-191.
- [16] Reyes L. Quaternion: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies". Partie I. Le Cadre Thoerique. Rapport de Recherche INRIA no. 1303. 1990. París.
- [17] Jiménez E. Simulación de un proceso de manufactura con obstáculo en la línea de producción. México. (1998). (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [18] Jiménez E., Cuenca F., Reyes L., Pérez A., Delfin J., Ruiz E., Ojeda E. Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo planar tipo rrr usando una números complejos. (2003). Segundo congreso de la Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C. Universidad Anáhuac del Sur. México D.F.

- [19] Jiménez E., Reyes L., Cuenca F. Modelación cinemática de posicionamiento de un mecanismo de cinco barras usando una rotación variante de los números complejos (2003). Segundo congreso de la Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C. Universidad Anáhuac dei Sur. México D.F.
- [20] Martínez R. Modelación y simulación computacional de trayectorias tridimensionales México.(1997). Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [21] Fregoso A. Los elementos del lenguaje de la matemática: Parte II. Funciones. (1979). Editorial Trillas. México.
- [22] Lipschutz M. Geometría diferencial: (1971). Editorial McGraw-Hill. México.