

00384



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS DE COBERTURA  
CIRCULAR

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**DOCTORA EN CIENCIAS**  
**(MATEMATICAS)**

**P R E S E N T A :**  
**MARIA DEL PILAR VALENCIA SARAVIA**



DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA

2005

341734



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recopilacional.

NOMBRE: Pilar Valencia Saravia

FECHA: 7 de Marzo de 2003

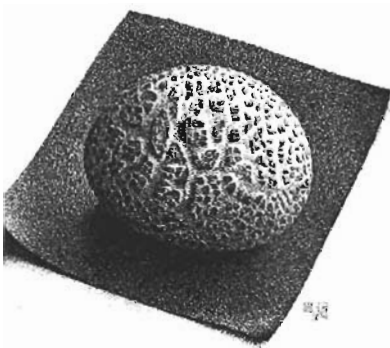
FIRMA: Pilar Valencia S.

*A mis hermanos,*

*Daniel, Susana y Lulú.*

*...y a toda la bola de sobrinos que trajeron  
a mi vida (para hacerla más bonita):*

*Adriana, Ale, Arturo, Dany, David, Micky y  
Lalito.*



*Al principio de todo sólo existía la Noche.  
Esta Noche infinita puso un huevo, y de él salió el  
Amor; y de las dos mitades rotas de la cáscara se  
crearon el Cielo y la Tierra.*

# Agradecimientos

Deseo agradecer a mi asesor y a mi jurado por su atención y las aportaciones realizadas al presente trabajo. A ellos: Jorge, Hortensia, Lalo, Roli, Juancho, Criel, Sergio, muchas gracias.

Agradezco muy especialmente a Bernardo Llano la minuciosa revisión que hizo de la primera versión de esta tesis. Sus aportaciones y sugerencias fueron invaluable para mí.

Gracias a DGEP por la beca que me acompañó durante buena parte del doctorado y al IMATE por las facilidades para vivir y trabajar en sus instalaciones. A Jose Antonio de la Peña y Angel Carrillo porque hacen que las cosas en el Instituto sean bonitas y uno pueda trabajar a gusto. Deveras muchas, muchas gracias.

Quiero agradecer también a Toño y a mis hijas, Adriana y Alicia, (ellas han sido, son la parte más bonita de mi vida). Gracias por estar ahí y apoyar y acompañar y por hacerse desentendidos en los momentos en que he estado poco. Deveras que sin ustedes no hubiera hecho nada. Muchas gracias Toño también por ser un gran padre para ellas. Gracias.

A mi madre, Amparo, tus enseñanzas me hicieron un adulto responsable puedo ser suficientemente disciplinada (y necia) para llegar (aunque sea despacito). Mis logros son tuyos, más y más y más gracias.

A Héctor un agradecimiento super especial, su amistad me ha dado mucho en todos los sentidos pero además sus observaciones como matemático y maestro han sido grandiosas para mí. Gracias por estar ahí siempre.

*...las dificultades comienzan desde el principio.*  
(del libro "Pasiones" de Rosa Montero).

# Índice de figuras

1.1. De la demostración del Teorema 1.2.4: . . . . .	6
1.2. Una colección convexa que realiza la cota mínima de cobertura circular. . . . .	9
1.3. El círculo $C_{a,b}$ , cubre a lo más un tercio de los puntos. . . . .	10
1.4. Una colección en posición general de cobertura circular a lo más un cuarto. . . . .	11
1.5. $A = v_1v_2v_3v_4$ , $B = v_1xv_3y$ . . . . .	13
1.6. Diagrama de Voronoi de una colección de once puntos en posición general. . . . .	21
1.7. Diagramas de Voronoi de segundo y tercer orden para la misma colección de puntos dada en la Figura 1.6. . . . .	22
1.8. Etiquetación de la mediatriz de $p, q$ . . . . .	23
2.1. Las regiones definidas por un círculo $C_{ab}$ . . . . .	28
2.2. Cota inferior para $cc(a, b)$ . Aquí $ C(ab) \cap P_{2n}  \geq \lambda$ y $ C(ba) \cap P_{2n}  \geq \lambda$ . . . . .	29
2.3. De la demostración del Teorema 2.2.2. . . . .	31
2.4. De la demostración del Teorema 2.2.7. . . . .	34
2.5. Una colección bicolor sin parejas bicolores bisectoras . . . . .	34
2.6. De la demostración del Teorema 2.2.10. . . . .	36
2.7. Una coloración alternada y una separada de cobertura mínima. . . . .	37

2.8. Las únicas bicoloraciones balanceadas para 4 y 6 puntos . . . . .	38
2.9. Una recta bisectora en $P_{2n}$ para $n$ par. . . . .	39
2.10. La recta bisectora entre tres puntos del mismo color. . . . .	40
2.11. La recta bisectora entre dos puntos del mismo color. . . . .	40
2.12. La recta bisectora entre cuatro puntos del mismo color. . . . .	41
2.13. Recta bisectora para $P_{2n}$ con $n$ impar. . . . .	42
2.14. No hay parejas bicolors de cobertura circular mayor que $\frac{1}{4}$ . . . . .	45
3.1. Una colección uniforme de puntos en un conjunto plano. . . . .	53
3.2. Los conjuntos definidos por $ab$ en $S$ y $C_{ab}$ . . . . .	56
3.3. Cualquier círculo por $ab$ contiene a $C'(ab)$ ó a $C'(ba)$ . . . . .	56
3.4. Todo diámetro pasa por el centro de simetría. . . . .	59
3.5. Un conjunto centralmente simétrico y una cuerda de cobertura circular pequeña. . . . .	61
3.6. Una mediana del triángulo $T$ incidente en el ángulo mínimo. . . . .	62
3.7. De la demostración del Teorema 3.4.1. . . . .	63
3.8. $\mathcal{T}_\alpha(A)$ , cada terna $(\bar{o}, a, b)$ , define un triángulo de ángulo $\alpha$ y área $A$ . . . . .	64
3.9. De la demostración del Teorema 3.4.4 . . . . .	67
3.10. Los dos círculos cruzan ambas rectas . . . . .	69
3.11. La región sombreada es el cuadrilátero $K$ . . . . .	69
3.12. La recta $\rho_u$ es tangente al círculo $C_2$ . . . . .	70
3.13. Uno de los trapecios degenera en triángulo. . . . .	70
3.14. Los círculos extremos de $\mathcal{F}_{uv}$ . . . . .	71
3.15. La mediana incidente a un ángulo agudo. . . . .	72
3.16. Una mediana de longitud al menos la mitad del diámetro de $T$ . . . . .	73
3.17. Un círculo que cubre a $l$ pero no a $m$ ni a $b$ . . . . .	74
3.18. Los dos pares de rectas que cruzan a los elementos de $\mathcal{F}_{kc}$ . . . . .	75
3.19. $\Delta knc \supseteq \Delta klc$ . . . . .	76

3.20. De la demostración del Teorema 3.4.9. . . . .	77
3.21. $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ cubren la misma longitud de los rayos $r_1$ y $r_2$ . . . . .	78
3.22. De la demostración del Teorema 3.4.11. . . . .	80
3.23. El círculo $\mathcal{C}_{ak}$ cubre más de la mitad del perímetro de $T$ . . . . .	81
3.24. Una pareja que maximiza simultáneamente cobertura circular res- pecto de área y perímetro en un triángulo isósceles. . . . .	82
4.1. El conjunto centralmente simétrico de área máxima con ancho $w$ y diámetro $d$ . . . . .	90





# Prefacio

## Los orígenes

Resulta muy natural imaginar en los orígenes de la humanidad al hombre que mira a su alrededor, distingue entre la diversidad del entorno las formas y las cantidades y se pregunta respecto de ellas. Observar e interpretar son rasgos esenciales de la naturaleza humana y de estas incipientes observaciones y preguntas surgieron, más adelante, lo que hoy conocemos como geometría y aritmética.

Distinguir qué atrapó primeramente su atención, si la cantidad o la forma, nos llevaría a la formulación de una pregunta que por supuesto carece de sentido en este contexto, no sólo no tenemos -y me atrevo a afirmar que no tendremos nunca - una respuesta certera sino, además, su búsqueda nos llevaría lejos del terreno de las ciencias exactas para adentrarnos más en el de la filosofía y otras disciplinas que estudian la mente humana y la formación del pensamiento y las ideas. Desde el punto de vista del historiador científico un hecho que resulta mucho más interesante consiste en estudiar y analizar cómo estos dos principios fundamentales de la matemática, forma y cantidad, que surgieron de modo tan natural, se apartan y desconocen en algunos momentos a lo largo de la historia y se entrelazan y complementan en tantos otros. ¿Cómo fue la transición de la curiosidad y la fascinación, a la negación -incluso repudio en muchos casos- o a la simple utilización mecánica de estas ramas esenciales del conocimiento?.

Conforme la humanidad iba encontrando respuestas a sus preguntas, hallaba

también maneras de facilitar el desarrollo de su vida cotidiana. Poco a poco se fue dando el proceso al que llamamos *civilización*. Sin embargo deben haber pasado varios siglos antes de que el ser humano pasara de simples problemas particulares a observar interconexiones entre ellos y advertir relaciones generales. Cuando la inteligencia humana fue capaz de extraer de un problema concreto, una propiedad genérica que contuviese al problema dado como un caso particular, empezó la ciencia como tal.

La descripción histórica ha establecido que la enumeración o acto de contar objetos resultó ser un gran paso en la formación del hombre civilizado. La abstracción requerida para llegar al concepto de número y a su representación gráfica suponen un avance neurológico importante. En nuestros días esto pareciese un proceso obvio que se identifica con la enseñanza elemental y al que después se presta muy poca atención. Así, la enumeración, como parte fundamental de la aritmética, ha sido muchas veces relegada y tratada como rama de poca importancia de las matemáticas. No obstante no se puede ignorar la inmensidad de aplicaciones que esta área ha tenido en tantos campos del conocimiento humano. La *Combinatoria*, como se denomina a la rama de la aritmética que se ocupa -principalmente- de contar objetos había sido considerada hasta hace muy poco como simple recreación matemática. La actitud generalizada indicaba que sólo contar objetos era un asunto además de ocioso muy poco formal como para ser tomado en serio.

De manera similar la geometría elemental fue “olvidada” en otros tiempos pero con ella pasa algo muy peculiar: ha surgido y decaído varias veces en la historia. En la antigüedad la geometría clásica ocupaba un lugar preponderante dentro del saber científico. Con su magnífica obra “Los Elementos”, Euclides, construyó los cimientos de la *Geometría Clásica*. Asombra todavía que, sin menoscabo de la profundidad del trabajo, no se deje de lado la sencillez y claridad de exposición. Pero Euclides no sólo inició la geometría como tal. El definió en su obra lo que habría de ser la manera de “hacer matemáticas”. Esta fue la aportación máxima

de su trabajo, y su influencia marcó todas las áreas de la matemática.

Muchas razones, difíciles de analizar en esta tesis, llevaron a la geometría clásica a una suerte de decaimiento dentro del quehacer matemático posterior a los griegos. Durante los siglos XVII y XVIII la revolución encabezada por Newton y Leibnitz de la cual surge el cálculo infinitesimal, provoca una actitud generalizada de rechazo hacia las matemáticas discretas de los antiguos (aritmética y geometría) y su reemplazo por las nuevas matemáticas del continuo. Así, la geometría es opacada por el cálculo y sustituida por la geometría analítica: estudiar curvas definidas mediante ecuaciones algebraicas se volvió más común que estudiar curvas construidas geoméricamente.

Durante la segunda mitad del siglo XIX la geometría clásica revive energicamente con el trabajo de matemáticos no muy contentos con el rol dominante que habían tomado los cálculos algebraicos y analíticos en la geometría. Es en ese momento en el que se construye y da forma al edificio magnífico de lo que conocemos como *Geometría Moderna*. Paradójicamente, mientras su desarrollo motivó la aparición de nuevas formas de hacer geometría (la topología, las geometrías no euclidianas, etc.) llevó también -una vez más- al decaimiento de la investigación en geometría clásica o elemental durante la primera parte del siglo XX.

## La época reciente

En los inicios del siglo XX, los teoremas de Gödel -tema candente en el ámbito científico de la época- desataron la crisis de los fundamentos matemáticos acarreado, al mismo tiempo, espectaculares descubrimientos que alimentaron vastas áreas de la ciencia. En esta vorágine la geometría elemental fue uno de los perdedores. Prácticamente fue ignorada mientras áreas "más abstractas" como la topología o la geometría diferencial florecieron aceleradamente dejando un gran impacto sobre nuestra interpretación del universo físico. Daba la impresión de que

los problemas geométricos en dos y tres dimensiones estaban agotados.

Sin embargo, si algo caracterizó a ese siglo fue el cambio y los cambios se sucedieron precipitadamente. Pronto se reparó en un hecho importante: el entorno que nos rodea es más bien de naturaleza discreta, esto es, la gran mayoría de los objetos que nos rodean se pueden contar. Se estableció entonces otra manera de interpretar y analizar problemas. El enfoque combinatorio, brindó alternativas distintas a preguntas clásicas estudiadas por Newton, Gauss y Hilbert entre otros. Si bien la cantidad de cálculos requeridos al intentar solucionar un problema puede ser inmensa, es finita y aunque una vida humana no sea suficiente para realizarlos sí lo es para crear herramientas capaces de hacerlos eficientemente. Con la llegada de las computadoras las ramas discretas de las matemáticas se reconsideran seriamente y se retoman, al mismo tiempo, las conveniencias del conocimiento geométrico elemental.

En ese momento la palabra clave es *optimización*. Hay que optimizar en conjuntos discretos, incluso finitos, la mayoría de las veces. Se estudian colecciones de puntos, rectas, círculos, polígonos, esferas, poliedros, es decir, se examinan los objetos más fundamentales de la geometría euclidiana. Surgen un sinnúmero de problemas en el plano y el espacio de tres dimensiones que le dan nueva vida al estudio de propiedades que parecían totalmente dominadas. También la combinatoria toma importancia como eficaz instrumento para solucionar estos problemas. Se dispone, entonces, de dos herramientas poderosas y una apoya a la otra: se estudian objetos geométricos pero distinguiendo también sus propiedades combinatorias para encontrar configuraciones óptimas en algún sentido. Surge así la *Geometría Combinatoria* sostenida esencialmente del renacimiento de las matemáticas discretas y de la conmoción causada por el acelerado avance de la tecnología computacional.

Los problemas en esta área son inquietantes, a veces incluso engañosos. Con frecuencia tienen una apariencia fuertemente intuitiva y pueden ser explicados al común de las personas de manera sencilla. No obstante, también pueden ser

increíblemente difíciles de resolver. Un ejemplo característico es el siguiente:

*Si en un conjunto finito de puntos en el plano, se cumple que en la recta determinada por cualquier par de ellos, siempre existe un tercero del conjunto, entonces todos los puntos son colineales.*

Este resultado se conoce como *el Teorema de Sylvester*. Originalmente propuesto por J.J. Sylvester en 1893, [20], no se encontró una demostración satisfactoria hasta 1944 (una reseña detallada de este resultado y otros afines a él se encuentra en [6]).

En la última parte del siglo anterior se llevó a cabo otro advenimiento no menos importante. Se trata de la *Geometría Computacional*, cuyo origen se asocia con la publicación de la tesis que, con este nombre, escribiera M.I. Shamos en 1978. Podemos definirla inicialmente como la conjunción de la Geometría Combinatoria y el Análisis de Algoritmos. En principio se desarrolló alrededor de problemas de búsqueda y clasificación. Al encontrar una solución a un problema dado se procedía a la elaboración de un algoritmo con objeto de ser llevado a cabo por una computadora. Problemas clásicos en esta área son por ejemplo, la localización de puntos bajo algún criterio dado -el más cercano, el más distante-, encontrar la cerradura convexa de una colección de puntos, la obtención del diagrama de Voronoi, triangular polígonos, etc. Todos estos se obtienen fácilmente como casos particulares, en dos dimensiones, de búsquedas y clasificaciones.

Poco a poco, el campo de acción de la Geometría Computacional se ha ido extendiendo para incluir problemas cuya solución requiere cada vez más de la aplicación de poderosos resultados de otras áreas de las matemáticas (Topología, Teoría de Números, Grupos, etc.) En nuestros días la diferencia entre Geometría Computacional y Combinatoria se ha vuelto muy sutil. En muchos problemas las preguntas combinatorias y algorítmicas se encuentran tan entrelazadas que es prácticamente imposible separar una de la otra; el progreso de una de ellas lleva a obtener soluciones satisfactorias en la otra.

El trabajo elaborado en esta tesis cae dentro del objeto de estudio de esta área. Una de sus más grandes fuentes de inspiración radica en el estudio de objetos geométricos “simples” en el plano se buscan características que determinen a estos objetos y relaciones entre familias de objetos distintos.

Este tipo de problemas han sido abordados desde varios puntos de vista. Por ejemplo las relaciones de incidencia entre colecciones de puntos, rectas y círculos. Estudiadas desde los griegos y retomadas por Hilbert cuando estableció los *Axiomas de Incidencia*:

- ( $A_1$ ) Por dos puntos pasa exactamente una recta que los contiene a ambos, y toda recta contiene al menos dos puntos.
- ( $A_2$ ) No todos los puntos están en una sola recta.
- ( $A_3$ ) Para toda recta  $l$  y cualquier punto  $p$ , fuera de ella, hay exactamente una recta que pasa por  $p$  y no tiene puntos en común con  $l$ .

En términos conjuntistas las relaciones de incidencia representan relaciones de contención entre conjuntos. El asunto central de esta tesis es justamente encontrar relaciones de contención en ciertas familias de círculos. El Teorema de Sylvester, mencionado anteriormente, tiene la siguiente versión para círculos:

*Si en un conjunto finito de puntos no colineales en el plano, se tiene que en el círculo determinado por cualquier terna de ellos hay otro punto del conjunto, entonces, todos los elementos del conjunto están en un círculo.*

Aquí analizaremos relaciones de contención entre círculos y puntos en el plano. Empezaremos estudiando colecciones de puntos aunque después revisaremos otros conjuntos.

## Nuestra contribución

Dada una colección de puntos en el plano siempre es posible encontrar dos de modo que cualquier círculo que pase por ellos contenga “muchos puntos” de la colección, es decir, una fracción grande del total. Este problema ha sido estudiado antes por lo que comenzamos el primer capítulo con la historia de lo que se ha hecho hasta ahora. Incluimos también la reseña de los resultados relevantes en la literatura, así como su relación con otros problemas.

En el segundo capítulo inicia propiamente nuestra investigación presentando una variante del problema original. Consideramos ahí colecciones de puntos bicolores balanceadas, es decir, colecciones en las que los puntos han sido coloreados con dos colores de manera que las clases cromáticas tengan la misma cardinalidad. Ahí demostraremos que para puntos en posición circular es posible encontrar una pareja bicolor de puntos tales que cualquier círculo que pase por ellos contiene al menos a la mitad de los puntos de la colección.

Pasamos enseguida a estudiar colecciones bicolores balanceadas en posición convexa no circular. A diferencia del caso anterior cuya solución es muy sencilla, el problema ahora se complica sustancialmente. Para este caso demostramos la existencia de alguna pareja bicolor de puntos por la que cualquier círculo que los contenga, cubre un octavo del total de puntos. Usando técnicas de otros autores es posible incrementar un poco este valor (aproximadamente a un séptimo), aunque conjeturamos que la cota exacta para este caso es un cuarto. Demostramos que en ciertas coloraciones esta fracción es precisamente un cuarto y presentamos un ejemplo de una colección bicolor balanceada en posición convexa en la que no hay alguna pareja bicolor por la que cualquier círculo cubra más de la cuarta parte de la colección.

Posteriormente analizamos el caso en posición general en el que damos una cota inferior de  $\frac{1}{72}$  del total, para alguna pareja bicolor, y usando las técnicas de otros autores la incrementamos hasta aproximadamente un onceavo.

Motivados por estos problemas introduciremos el concepto de *Cobertura Circular* de conjuntos en el plano. Veremos que el planteamiento en colecciones de puntos es un caso particular de este concepto que se extiende de manera natural a otras clases de conjuntos y medidas.

En el capítulo 3 continuamos la investigación en conjuntos convexos. Aquí usaremos dos medidas en particular, el área y el perímetro del conjunto, para poder *medir* que tanto cubre un círculo dado. Iniciamos demostrando que en los conjuntos centralmente simétricos es posible encontrar una pareja de puntos en él, tales que cualquier círculo por ellos cubra al menos la mitad del área y el perímetro. Después confirmamos que un medio es precisamente el mejor valor que podemos esperar, usando estas medidas, en cualquier conjunto plano.

En el extremo opuesto de la simetría estudiamos a los triángulos. Primeramente el caso en que la medida es el área. Ahí demostraremos que siempre es posible encontrar un par de puntos tales que todo círculo por ellos contenga un subconjunto de área mayor o igual que la mitad del área del triángulo. Relacionamos este resultado con las propiedades de otras cuerdas del triángulo para encontrar más parejas que realizan el máximo de cobertura por área. Finalmente cambiamos la medida por el perímetro y demostramos que es posible encontrar dos puntos tales que todo círculo por ellos cubra al menos la mitad del perímetro del triángulo. Observaremos que las parejas que “cubren mucha área” no necesariamente son las mismas que sirven para el perímetro, pero mostramos una familia de triángulos en las que sí es posible encontrar una pareja que sirva simultáneamente para ambas medidas. En este caso también se cumple que un medio es el mejor valor que podemos esperar. Demostramos que las parejas que maximizan la cobertura circular para estas medidas en un polígono convexo tienen un extremo en alguno de sus vértices.

Hemos establecido la conjetura de que en cualquier conjunto convexo siempre es posible encontrar una pareja de puntos tales que cualquier círculo por ellos, contenga al menos la mitad del área o del perímetro del polígono.



En el último capítulo explicamos nuestras conclusiones así como las posibles líneas de interés para futuras investigaciones.

Pilar Valencia  
México D.F., Marzo de 2005



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>VII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Cobertura Circular . . . . .	3
1.3. Cobertura Circular en colecciones de puntos . . . . .	12
1.4. Algunos resultados relacionados . . . . .	17
<b>2. Colecciones de puntos bicoloreados</b>	<b>27</b>
2.1. Introducción . . . . .	27
2.2. Puntos en posición convexa . . . . .	29
2.3. Puntos en posición general . . . . .	47
<b>3. Cobertura circular en conjuntos convexos</b>	<b>51</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. Notación y resultados preliminares . . . . .	52
3.3. Cobertura circular en conjuntos centralmente simétricos . . . . .	58
3.4. Cobertura circular en triángulos . . . . .	61
3.4.1. Respecto al área . . . . .	61
3.4.2. Respecto al perímetro . . . . .	77

<b>4. Conclusiones</b>	<b>87</b>
4.1. El camino recorrido . . . . .	87
4.2. Nuestro objetivo alcanzado.... . . . .	92

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Introducción

Dado un conjunto parcialmente ordenado,  $\langle X, \leq \rangle$ , decimos que una familia,  $\mathcal{F}$ , de conjuntos en el plano es *una representación geométrica* asociada a  $\langle X, \leq \rangle$  si a cada elemento de  $X$  se asocia uno de la familia  $\mathcal{F}$  y la relación de contención preserva el orden definido por  $\leq$ . La representación de órdenes parciales mediante conjuntos en el plano y sus relaciones de contención es un problema que ha resultado de gran interés, ha sido revisado y estudiado desde muy diversos enfoques [14], [15], [21]. Cada orden parcial tiene una representación geométrica por lo que resulta natural considerar ciertas restricciones a los conjuntos y preguntarse si un orden dado sigue siendo representable. Determinar, por ejemplo, qué tipos de órdenes parciales tienen una representación usando segmentos, regiones angulares, polígonos convexos, círculos o alguna familia de conjuntos dada [16], [22].

Por supuesto tales representaciones no sólo se consideran en el plano sino en general en  $\mathbb{R}^d$  el espacio euclidiano  $d$ -dimensional. Así por ejemplo, las representaciones que asignan a cada elemento de  $X$  una esfera en  $\mathbb{R}^d$  son llamados *órdenes esféricos*.

Si  $d = 1$  una esfera es solo un intervalo en  $\mathbb{R}$  y la clase de órdenes parciales

fnitos que tienen una representación usando intervalos consiste de aquellos  $n$ -ya dimensión (es decir, el tamaño del menor conjunto de objetos que representa geométricamente al conjunto dado) es a lo más dos. En [14] los autores demuestran que existe un conjunto parcialmente ordenado finito 3-dimensional que no es esférico, es decir, no es representable mediante círculos en el plano (esferas en  $\mathbb{R}^2$ ). Mostrando así que no todo conjunto parcialmente ordenado finito es un orden esférico.

Los *ordenes circulares*, aquellos que tienen una representación geométrica con círculos, han captado la atención de muchos por sus singulares características. Una reseña muy amplia sobre los principales resultados concernientes a ellos se incluye en [23].

Ya que dar una caracterización completa de los órdenes circulares en el plano resultó ha resultado ser un problema bastante complicado, se ha planteado una versión más simple que pareciera tener una solución más cercana: ¿que órdenes parciales son órdenes circulares representables mediante círculos de únicamente dos tamaños distintos? En el caso particular de que uno de los radios sea igual a cero se tiene un problema de contención entre puntos y círculos.

Aparece entonces un atractivo problema desde el punto de vista de la Geometría Combinatoria: el estudio de las relaciones de contención entre colecciones de puntos y círculos con ciertas propiedades. Este planteamiento ha generado un cúmulo de resultados importantes en el área.

Uno de los más conocidos es el teorema principal de [18] que establece

*En cualquier colección de  $n$  puntos en posición general en el plano, existen dos tales que todo círculo que pase por ellos cubre una fracción lineal del total de puntos.*

En otras palabras, siempre es posible encontrar un par de puntos de la colección de modo que si consideramos el segmento que los une y luego la familia de círculos coaxiales cuyo eje radical es este segmento, existe una constante  $\frac{1}{2} > 0$

tal que cualquier elemento de la familia contiene, en el interior o en la frontera, al menos  $\frac{1}{k}n$  puntos de la colección (por supuesto  $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < 1$ ).

Con este trabajo se inició el estudio de lo que hemos denominado, *la Cobertura Circular en colecciones de puntos*.

La intención de esta tesis es estudiar la cobertura circular en objetos geométricos planos. Dados un conjunto en el plano y un par de puntos en él, observamos la familia de todos los círculos determinados por la pareja de puntos para estimar cuánto cubre cada uno de estos círculos en el conjunto original. Para esto, consideramos la colección de todos los subconjuntos que se obtienen de la intersección de los círculos con el conjunto dado. Luego, medimos el tamaño mínimo de cualquiera de estos subconjuntos usando alguna medida establecida previamente. A este mínimo, es al que llamaremos cobertura circular de la pareja de puntos tomada. Queremos encontrar una pareja de puntos con cobertura circular máxima y estimar este valor.

**Definición 1.1.1** *Un círculo  $C$  cubre al punto  $u$ , si  $u$  pertenece al interior o la frontera del círculo.*

En [18] el conjunto estudiado es una colección finita de puntos en el plano y la medida utilizada es la cardinalidad. El objetivo ahí era encontrar un par de puntos para los que todo círculo por ellos cubriera “muchos” puntos de la colección. En ese artículo se demostró que siempre es posible encontrar un par de puntos en la colección de modo que todo círculo por ellos cubra una fracción lineal del total y probaron que tal fracción es al menos  $\frac{1}{60}$ .

En este trabajo, estudiaremos la cobertura circular en colecciones de puntos con colores y en otros conjuntos en el plano con otras medidas asociadas a ellos.

## 1.2. Cobertura Circular

Enunciamos aquí la definición formal de este concepto.

**Definición 1.2.1** Sea  $\mu$  una medida definida en los conjuntos de  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto medible respecto de  $\mu$  tal que  $0 < \mu(S) < \infty$  y  $p, q \in \mathbb{R}^2$  dos puntos distintos.

La cobertura circular de  $p, q$  en  $S$  respecto a  $\mu$ , es el número

$$cc(p, q) = \min\{\mu(C_{pq} \cap S) | C_{pq} \text{ círculo por } p \text{ y } q\}.$$

Cuando indicamos como  $C_{pq}$  a un círculo por  $p$  y  $q$  nos referimos a cualquiera de los círculos coaxiales cuyo eje radical es el segmento  $pq$ .

Si  $\mu$  es la cardinalidad definida en los conjuntos finitos de  $\mathbb{R}^2$ , la fracción lineal a que se refieren en [18] queda determinada por el cociente

$$\frac{cc(p, q)}{|S|},$$

donde  $p, q$  es un par de puntos que maximiza la cobertura circular.

Nos referiremos a este cociente como *la fracción de cobertura*. El artículo citado demuestra que para colecciones finitas de puntos en el plano esta fracción es  $\geq \frac{1}{60}$ .

Posterior a la publicación de este resultado, aparecieron varios más mejorando esta fracción. Así, en [5] se incrementó a  $\frac{1}{30}$ ; después a  $\frac{1}{27}$  en [10]; a  $\frac{5}{84}$  en [9] y finalmente a  $\frac{1}{4.7}$  en [12]. Este último, es el mejor valor que se conoce hasta el momento. Las observaciones han llevado a conjeturar que el valor exacto es  $\frac{1}{4}$ .

**Definición 1.2.2** Una colección de puntos en el plano está en posición general si no hay tres de ellos en una recta ni cuatro en un círculo.

Llamamos a una colección colineal si todos los puntos se encuentran sobre una recta y circular si todos ellos están sobre un círculo.

Con esta terminología, la conjetura sería:

**Conjetura 1** Si  $P_n$  es una colección de  $n$  puntos en posición general en el plano existen  $p, q \in P_n$  tales que  $cc(p, q) \geq \frac{n}{4}$ .



En la introducción mencionamos como un problema clásico de la Geometría Combinatoria el Teorema de Sylvester, que en su versión para círculos establece:

*Si en una colección finita no colineal se tiene que en el círculo determinado por cualquier terna de puntos hay otro punto de la colección entonces la colección es circular.*

Observemos que si  $P_n$  no es colineal cualquier pareja de puntos hace terna con otros  $n - 2$  puntos y define con cada uno de ellos un círculo que cubrirá al menos a estos tres puntos. A la luz del concepto de cobertura circular, el Teorema de Sylvester diría:

*Si para todo par de puntos  $p, q \in P_n$  se tiene que  $cc(p, q) \geq 4$ , entonces, la colección  $P_n$  es circular.* (\*)

La forma contrapuesta de este enunciado afirmarí que en colecciones de puntos finitas no colineales y no circulares hay pares de puntos cuya cobertura circular es a lo más tres. Es decir en tales colecciones siempre podemos encontrar una terna de puntos por la que pase un *círculo vacío* (que no contiene algún otro punto de la colección).

Resulta interesante, entonces, analizar las colecciones para las que sí es posible encontrar pares de puntos con cobertura "grande".

El problema para colecciones en posición circular es muy sencillo. Consideremos una pareja  $p, q \in P_n$  que defina una *recta bisectora* es decir, una recta que divida a  $P_n$  en dos subconjuntos con la misma cantidad de puntos. Sabemos que siempre es posible encontrar tal pareja. Entonces en el círculo que contiene a la colección, el segmento  $pq$  determina dos subconjuntos, uno de los cuales tiene al menos  $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil + 2 \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  puntos (ambos conjuntos contienen a la pareja). Como cualquier otro círculo por  $p$  y  $q$  contiene alguno de estos conjuntos, tenemos entonces el resultado siguiente:

**Teorema 1.2.3** *Si  $P_n$  es una colección circular de puntos, existen  $p, q \in P_n$  tales que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .*

En orden de dificultad el siguiente caso a estudiar es, naturalmente, el de colecciones en *posición convexa* no circular. Es decir cuando los elementos de  $P_n$  son los vértices de un polígono convexo. En [10], se demuestra que para este caso la fracción de cobertura es  $\frac{1}{3}$  y es exacta. Este resultado fue obtenido también, de manera independiente, en [3]. Daremos aquí la demostración de [10].

**Teorema 1.2.4** *Sea  $P_n$  una colección de  $n$  puntos en posición convexa sin que haya tres colineales, entonces existen  $p, q \in P_n$  tales que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ .*

**Demostración.** Consideremos todas las ternas  $p, q, r \in P_n$  que definen un círculo *abarcante*, es decir, un círculo  $\mathcal{C}$  tal que  $P_n \subset \mathcal{C}$ . Cada uno de los lados del triángulo formado por la terna determina un subconjunto de  $P_n$ , el formado por todos los puntos en el interior del arco que tal lado determina en  $\mathcal{C}$ . En la Figura 1.1 (a), estos conjuntos se denotan como  $C_{pr}$ ,  $C_{rq}$  y  $C_{qp}$ . Notemos que los vértices del triángulo pertenecen cada uno a dos de estos conjuntos (por ejemplo  $C_{qp} \cap C_{pr} = \{p\}$ ).

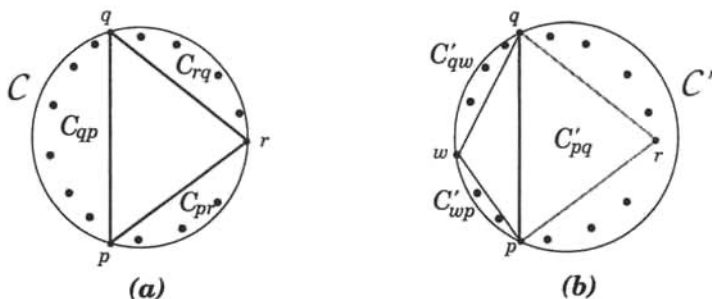


Figura 1.1: De la demostración del Teorema 1.2.4.

Definimos la función  $f$  sobre estas ternas, asociándoles el máximo de las cardinalidades de los subconjuntos que generan en  $P_n$ . Esto es,

$$f(qpr) = \max\{|C_{qp}|, |C_{pr}|, |C_{rq}|\}.$$

Sea  $q, p, r$  una terna en la que  $f$  es mínima. Es claro que el subconjunto que realiza  $f(qpr)$  tiene al menos  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$  puntos. Supongamos que tal subconjunto es  $C_{qp}$ .

Demostremos que en  $C_{pr} \cup C_{rq}$  también hay al menos  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$  puntos. Procedamos por contradicción y supongamos entonces que  $|C_{pr} \cup C_{rq}| \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

Elegimos un punto  $w \in C_{qp} \setminus \{p, q\}$  que minimice el ángulo formado con  $pq$ . La terna  $q, w, p$  define un nuevo círculo cubriente  $C'$  y los subconjuntos  $C'_{qw}, C'_{wp}$  y  $C'_{pq}$ . Como  $C_{pr} \cup C_{rq} = C'_{pq}$ , entonces  $|C'_{pq}| = |C_{pr} \cup C_{rq}| - |C_{pr} \cap C_{rq}|$  y por tanto  $|C'_{pq}| \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$ . De aquí obtenemos que  $f(qwp) \neq |C'_{pq}|$ .

O sea que  $f(qwp)$  es realizada por la cardinalidad de cualquiera de los otros dos conjuntos inducidos en  $C'$  pero ambos,  $C'_{qw}$  y  $C'_{wp}$ , son subconjuntos propios de  $C_{qp}$  así que cada uno contiene una cantidad menor de puntos que él y por lo tanto  $f(qwp) < f(qpr)$ , contradiciendo la minimalidad de  $qpr$ . La situación se muestra en la Figura 1.1 (b).

Así,  $C$  es un círculo por  $p$  y  $q$  que contiene al menos  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$  puntos en cada una de las regiones determinadas por  $pq$ . Claramente, cualquier otro círculo por ellos, contiene alguna de estas regiones y por tanto  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ . ■

Otra prueba del mismo resultado puede obtenerse utilizando el siguiente resultado, conocido como el *Teorema del 1/3 2/3*:

**Teorema 1.2.5** *Si  $T$  es un árbol binario de orden  $n$  entonces existe una arista  $e$  de  $T$  tal que cada una de las componentes de  $T - e$  tiene orden al menos  $\frac{n}{3}$ .*

Aquí la idea será obtener un árbol binario a partir de  $P_n$ . Para ello, construimos primeramente la gráfica  $G_P$  en la que los puntos de la colección son sus vértices y dos son adyacentes si existe un círculo que pasa por ellos y contiene a todos los elementos de  $P_n$ . Por ejemplo todos los pares de puntos consecutivos en el cierre convexo, tienen esta propiedad.

Es un hecho conocido que las aristas de  $G_P$  forman una triangulación del cierre convexo de  $P_n$  y como la colección está en posición convexa esta triangulación

tiene exactamente  $n - 2$  triángulos. Al considerar la gráfica dual de  $G_P$  lo que se obtiene es precisamente un árbol binario de orden  $n - 2$ . Llamamos  $T$  a este árbol. Por el Teorema del 1/3 2/3, se sabe que  $T$  contiene una arista  $e$  tal que cada una de las componentes de  $T - e$  tienen al menos  $\frac{n-2}{3}$  vértices. Estos vértices representan  $\frac{n-2}{3}$  triángulos en  $G_P$  y, ya que la colección es convexa, representan también el mismo número de puntos en  $P_n$ .

Supongamos que los extremos de  $e$  corresponden a los triángulos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , adyacentes en la triangulación, y sea  $pq$  la arista que tienen en común. Por la construcción de  $G_P$  sabemos que  $p, q$  es una pareja por la que pasa un círculo  $\mathcal{C}$  y contiene a toda la colección  $P_n$ . Entonces en cada una de las regiones que el segmento  $pq$  determina en  $\mathcal{C}$ , hay al menos  $\frac{n-2}{3}$  puntos de  $P_n$  y por lo tanto cualquier otro círculo que pase por  $p$  y  $q$  cubre al menos  $\frac{n}{3}$  elementos de  $P_n$ .

Esta cota es justa. Es posible construir una colección en posición convexa para la cual este valor no pueda ser mejorado, o sea, en la que por cualquier pareja de puntos haya un círculo por ellos con a lo más  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$  puntos.

Tomemos como base un triángulo equilátero de vértices  $a, b, c$  y lados de longitud 1. Consideremos tres conjuntos con  $k$  puntos cada uno:  $\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $\bar{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  y  $\bar{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ . Colocamos los puntos de  $\bar{a}$  en el lado  $ab$ , de modo que estén *cercanos* al vértice  $a$  (distancia menor que  $\frac{1}{4}$  es suficiente). Los colocamos en el orden de los subíndices. De la misma manera colocamos los puntos de  $\bar{b}$  en el lado  $bc$ , cercanos al vértice  $b$  y los puntos de  $\bar{c}$  en el lado  $ca$ , cercanos a  $c$ . Los vértices del triángulo no necesariamente forman parte de la colección. Tenemos entonces  $n = 3k$  puntos en posición convexa.

Mostraremos que cualquier par de puntos de esta colección tiene cobertura circular a lo más  $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 = k + 1$ . Mediante una leve perturbación de los puntos podemos obtener una colección en posición estrictamente convexa (no tres colineales) en la que se cumple el mismo resultado. La situación se presenta en la Figura 1.2.

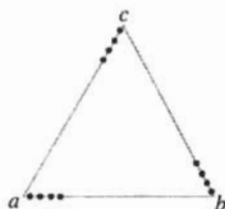


Figura 1.2: Una colección convexa que realiza la cota mínima de cobertura circular.

Es evidente que hay parejas para las cuales la cobertura circular es muy pequeña, por ejemplo todas las consecutivas en el cierre convexo o las que están sobre el mismo lado del triángulo. Basta entonces analizar pares de puntos en lados distintos del triángulo.

Consideremos los puntos  $a_i, b_j$ . Por la simetría de la configuración, para puntos en otro par de lados el análisis es el mismo. Sea  $\mathcal{C}_{a_i, b_j}$  el círculo que pasa por  $a_i$  y  $b_j$  y es tangente al lado  $bc$ . Este círculo únicamente interseca al conjunto  $\bar{b}$  en el punto  $b_j$ .

Notemos además, que  $\mathcal{C}_{a_i, b_j}$  no cubre al punto  $q$  que está a distancia  $\frac{1}{4}$  de  $c$  sobre el lado  $ca$  (Figura 1.3), pues este punto está en la intersección de  $ca$  con el círculo  $\mathcal{D}_a$  -el diametral por la mediana incidente en  $a$ -, y el centro de  $\mathcal{C}_{a_i, b_j}$  está en *el otro semiplano* que la mediana determina (el que contiene a  $b$ ). Entonces el círculo deja fuera a todos los elementos de  $\bar{c}$  cubriendo a lo más a los  $k$  puntos de  $\bar{a}$  y a  $b_j$ , por lo que  $cc(a_i, b_j) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ .

Como mencionamos, el resultado permanece válido si los puntos se encuentran en posición estrictamente convexa. De hecho, siempre es posible construir una curva muy cercana al segmento dado y colocar sobre ella los puntos de modo que por cada uno pase un círculo tangente.

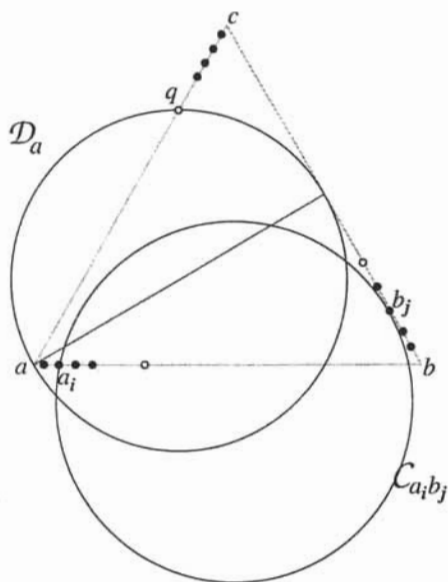


Figura 1.3: El círculo  $C_{a_i b_j}$  cubre a lo más un tercio de los puntos.

También en [10] se presenta un ejemplo de una colección finita de puntos en posición general en el que por toda pareja de puntos pasa un círculo que cubre a lo más la cuarta parte del total. Describiremos aquí este ejemplo.

Partiendo de la construcción para el caso convexo tomamos como base un triángulo equilátero con lados de longitud uno, vértices  $a, b, c$ , y  $m$  el punto medio del lado  $ac$ .

Consideramos el círculo de centro  $c$  y radio uno, observemos que la mediatriz de  $ab$  lo cruza en dos puntos, uno en cada uno de los semiplanos que la recta por  $ab$  determina. De estos puntos, sea  $f$  el punto en el mismo semiplano que contiene a  $c$ . Ahora, sea  $e$  el punto en que la recta a por  $fm$ , cruza al lado  $ab$ .

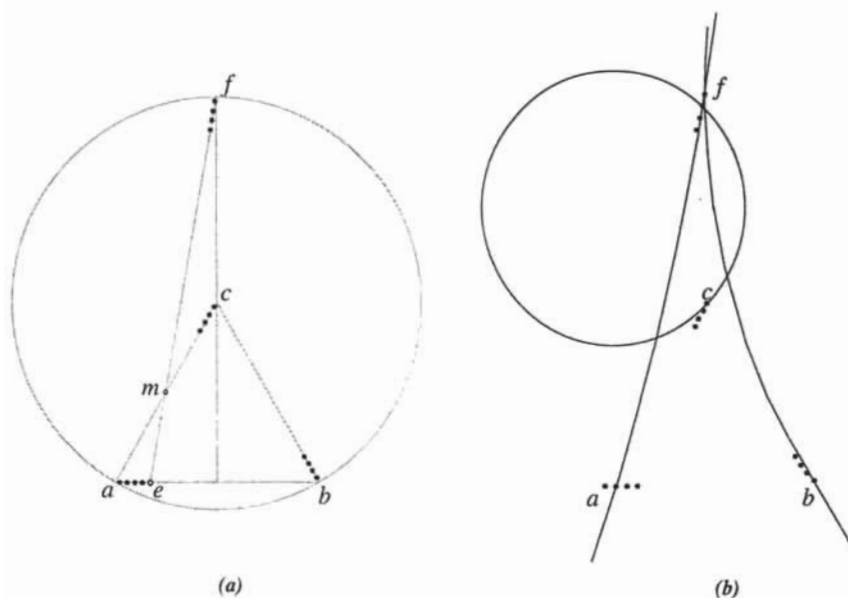


Figura 1.4: Una colección en posición general de cobertura circular a lo más un cuarto.

Como antes, consideramos los conjuntos  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  y sea  $\bar{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ . Colocamos los  $3k$  puntos de los tres primeros de la misma manera que en la construcción anterior, sólo que ahora estarán a distancia menor que  $\delta = d(a, e)$  del vértice que les corresponda. Los últimos  $k$  puntos los ponemos sobre el segmento  $fe$  cercanos a  $f$  (a distancia menor que  $\delta$ ). En esta colección los puntos están sobre los segmentos indicados aunque, sabemos, es posible realizar una leve perturbación para evitar que haya tres puntos colineales y el resultado se seguirá cumpliendo.

Tenemos así, una colección de  $n = 4k$  puntos que podemos suponer en posición general. La situación se muestra en la Figura 1.4 (a).

Siguiendo la estrategia anterior, el objetivo es mostrar que para cualquier pareja de puntos es posible encontrar un círculo que pase por ellos y cubra a lo más  $k + 1$  puntos. Para parejas de puntos en el triángulo sabemos que esto siempre es posible. Para las parejas formadas por algún punto en  $\bar{f}$  tenemos tres casos, sean  $f_i \in \bar{f}$  y :

1.  $b_j \in \bar{b}$ . En este caso consideramos el círculo  $C_{f_i b_j}$  por  $f_i$  y  $b_j$ , tangente a la recta que pasa por  $bc$ , o sea que sólo la toca en el punto  $b_j$ . De los dos semiplanos que esta recta determina,  $C_{f_i b_j}$  está en el que contiene a  $f$  por lo que no interseca a ninguno de los conjuntos  $\bar{a}$  y  $\bar{c}$  (Figura 1.4 (a)). Así, a lo más cubrirá al conjunto  $\bar{f} \cup \{b_j\}$ .
2.  $c_j \in \bar{c}$ . Ahora consideramos el círculo  $C_{f_i c_j}$  que pasa por la pareja dada y es tangente a la recta por  $ca$ , o sea que únicamente toca al conjunto  $\bar{c}$  en el punto  $c_j$ . De los dos semiplanos que la recta determina,  $C_{f_i c_j}$  está en el que contiene al punto  $f$  por lo que no cruza a los conjuntos  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  (Figura 1.4 (a)). Entonces, a lo más cubrirá a  $\bar{f} \cup \{c_j\}$ .
3.  $a_j \in \bar{a}$ . Como en los casos anteriores tomamos el círculo  $C_{f_i a_j}$  que pasa por el par de puntos y es tangente a la recta que pasa por  $f$  y  $e$ . Como todos los puntos de  $\bar{a}$  están a distancia menor que  $\delta$  de  $a$ , sí es posible tomar este círculo. Notemos que únicamente toca al conjunto  $\bar{f}$  en el punto  $f_i$  y no cruza a los conjuntos  $\bar{c}$  y  $\bar{b}$ , por lo que a lo más cubrirá a  $\bar{a} \cup \{f_i\}$  (Figura 1.4 (a)).

La Figura 1.4 (b) muestra algunos ejemplos de círculos con este tipo de parejas.

### 1.3. Cobertura Circular en colecciones de puntos

Presentamos aquí el resultado principal de [18]. Este fue el primer resultado que se obtuvo sobre cobertura circular. La medida utilizada en este caso es la



cardinalidad y se trabaja en colecciones finitas de puntos en el plano. Iniciaremos con un poco de notación y algunas observaciones de utilidad.

Si  $a$  es vértice de un polígono,  $\sphericalangle a$  denota el ángulo incidente en él y también su magnitud. Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,  $xy$  denota el segmento que los une y, mientras no haya confusión, denotará también la longitud de tal segmento. Para la terminología y resultados concernientes a la Teoría de Gráficas usaremos como referencia [8].

El siguiente es un resultado geométrico simple pero muy útil, como veremos a lo largo de este trabajo.

**Lema 1.3.1** Sean  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  cuatro puntos en el plano que forman un cuadrilátero convexo. Si  $v_1$  y  $v_3$  son vértices opuestos en él y la suma de sus ángulos incidentes es a lo más  $\pi$ , entonces todo círculo que pasa por ellos cubre alguno de los otros dos puntos.

**Demostración.** Sean  $A = v_1v_2v_3v_4$  el cuadrilátero convexo formado por los puntos dados y  $C$  un círculo que pase por  $v_1$  y  $v_3$ . Notemos que  $v_2$  y  $v_4$  se encuentran en lados opuestos del segmento  $v_1v_3$ .

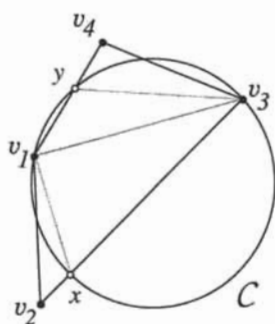


Figura 1.5:  $A = v_1v_2v_3v_4$ ,  $B = v_1xv_3y$

Si  $C$  no los cubriera entonces  $v_2v_3$  y  $v_4v_1$  cruzarían a  $C$ , en los puntos  $x, y$ , que formarían con  $v_1$  y  $v_3$  un cuadrilátero circular  $B = v_1xv_3y$ . Claramente  $B \subset A$  y por tanto los ángulos incidentes a  $v_1$  y  $v_3$  en  $A$  son ambos mayores a los ángulos que forman en  $B$ . De igual manera  $\sphericalangle x$  y  $\sphericalangle y$  son ambos mayores que  $\sphericalangle v_2$  y  $\sphericalangle v_4$  respectivamente y por tanto  $\sphericalangle x + \sphericalangle y > \sphericalangle v_2 + \sphericalangle v_4$ . Por hipótesis tenemos que  $\sphericalangle v_1 + \sphericalangle v_3 \leq \pi$  por lo que  $\sphericalangle v_2 + \sphericalangle v_4 \geq \pi$ , pues la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es  $2\pi$ . Sin embargo,  $B$  es un cuadrilátero circular por lo que  $\sphericalangle x + \sphericalangle y = \pi$  lo cual nos lleva a una contradicción. ■

Una consecuencia inmediata de este lema en el contexto de la cobertura circular es el siguiente

**Corolario 1.3.2** *Si cuatro puntos en  $P_n$  forman un cuadrilátero convexo entonces alguno de los pares de vértices opuestos en él tiene cobertura circular, respecto de la cardinalidad, al menos 3.*

Observemos también que si en un cuadrilátero convexo  $A = v_1v_2v_3v_4$ , se cumple que  $\sphericalangle v_1 + \sphericalangle v_3 < \pi$  entonces hay una infinidad de círculos que pasan por  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  y cubren a los cuatro puntos dados.

Recordemos que el Teorema de Sylvester para círculos afirma que si en  $P_n$  todo par de puntos tuviese cobertura circular al menos cuatro, entonces la colección sería circular. Desde luego este es un caso peculiar pero, podemos preguntarnos por las condiciones que garanticen la existencia de *alguna* pareja de cobertura circular cuatro (o más). El corolario anterior y la observación posterior, nos aseguran que puede haber muchas parejas por las que pasen infinidad de círculos que cubran al menos cuatro puntos en colecciones arbitrarias. Queremos, entonces, asegurar la existencia de una pareja que cubra “muchos” puntos de la colección. Para esto, según afirma el Lema 1.3.1, resulta muy útil saber cuántos cuadriláteros convexos puede haber.

Dada una colección  $P_n$  de  $n$  puntos en el plano, consideramos la gráfica,  $G(P_n)$ , inducida por la colección, es decir, la gráfica cuyos vértices son los puntos

de  $P_n$  y cuyas aristas son todos los segmentos entre pares de puntos. Observemos que contar los cuadriláteros convexos en  $P_n$ , es equivalente a contar los pares de aristas que se cruzan en  $G(P_n)$ .

Sea  $I(P_n)$  el número de pares de aristas que se cruzan en  $G(P_n)$ . La *gráfica completa de orden  $t$* ,  $K_t$ , es aquella con  $t$  vértices y todas las adyacencias posibles entre ellos ([8]). El Teorema de Kuratowskii asegura que en cualquier dibujo en el plano de  $K_5$  -la gráfica completa de orden cinco- hay al menos un par de aristas que se cruzan. Esto nos proporciona de manera inmediata una estimación para  $I(P_n)$ .

**Lema 1.3.3**  $I(P_n) \geq \frac{\binom{n}{5}}{n-4}$

**Demostración.** Por cada conjunto de cinco puntos tenemos al menos un par de aristas que se cruzan. Hay  $\binom{n}{5}$  de ellos, pero cada cruce pertenece exactamente a  $n - 4$  subconjuntos de cinco elementos de  $P_n$ . Dividiendo por este número eliminamos las repeticiones y obtenemos el resultado. ■

**Definición 1.3.4** Una pareja de puntos  $a, b$  domina a la pareja  $c, d$ , y denotamos  $ab \rightarrow cd$ , si los segmentos  $ab$  y  $cd$  se cruzan y cada círculo que pasa por  $ab$  cubre alguno de los puntos  $c$  ó  $d$ .

Partiendo de  $P_n$  construimos la *digráfica de dominación*,  $\vec{G}_I$ , de la colección de puntos, como aquella en la que cada vértice representa una pareja cualquiera de puntos y dos vértices son adyacentes si los segmentos correspondientes a tales parejas se cruzan. Después la orientamos de acuerdo a la relación de dominación entre parejas: pondremos la flecha del vértice que representa al par  $a, b$  hacia el vértice que representa al par  $c, d$  si y sólo si  $ab \rightarrow cd$ . En caso de que los puntos  $a, b, c, d$  formen un cuadrilátero circular elegimos arbitrariamente una dirección.

En los términos del Lema 1.3.1, si cuatro puntos en el plano  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  forman un cuadrilátero convexo en el que  $v_1$  y  $v_3$  son vértices opuestos y la suma de sus ángulos incidentes es a lo más  $\pi$  entonces  $v_1v_3 \rightarrow v_2v_4$ .

Evidentemente en cualquier colección de cuatro puntos en posición convexa hay dos parejas de vértices opuestos y alguna de ellas domina a la otra. Únicamente si los puntos se encuentran en posición circular la relación de dominación es simétrica.

Notemos que  $\vec{G}_I$  tiene exactamente  $I(P_n)$  aristas y  $\binom{n}{2}$  vértices, entonces existe un vértice con exgrado al menos  $I(P_n)/\binom{n}{2} = \frac{2I(P_n)}{n(n-1)}$ .

Por el lema anterior,

$$\begin{aligned} \frac{2I(P_n)}{n(n-1)} &\geq \frac{2\binom{n}{5}}{n(n-1)(n-4)} \\ &= \frac{2(n-2)(n-3)}{5!} = \frac{(n-2)(n-3)}{60} \end{aligned}$$

La existencia de tal vértice en  $\vec{G}_I$  representa en  $P_n$  a dos puntos  $p, q$  que dominan al menos otros  $\left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{60} \right\rceil$  pares de puntos de la colección. Esto es,  $p$  y  $q$  forman cuadriláteros convexos con tales pares y cada círculo por ellos cubre al menos a un punto de cada uno de estos pares. Tenemos entonces el resultado siguiente:

**Teorema 1.3.5** *Hay un par de puntos  $p, q \in P_n$  tal que  $cc(p, q) \geq \left\lceil \frac{n-2}{60} \right\rceil + 2$ .*

**Demostración.** Sabemos que existen dos puntos  $p, q \in P_n$  tales que todo círculo por ellos cubre al menos  $\left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{60} \right\rceil$  de los puntos restantes de la colección. Cada uno de los puntos cubiertos es miembro de a lo más  $n-3$  parejas, por lo que, todo círculo por  $p, q$  cubre al menos  $\left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{60} / (n-3) \right\rceil = \left\lceil \frac{n-2}{60} \right\rceil$  puntos de la colección. Contando también a  $p$  y  $q$  obtenemos el resultado. ■

En este mismo orden de ideas, es posible mejorar levemente la cota mediante la utilización del resultado principal de [2], que establece que el número de cruce de una gráfica geométrica completa de orden  $n$ , está acotado inferiormente por  $\frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ .

Aplicando este resultado a la gráfica que construimos a partir de  $P_n$ , que también es una gráfica completa, tenemos una mejor aproximación para  $I(P_n)$

que la que obtuvimos en el Lema 1.3.3:

$$I(P_n) \geq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

Procediendo de la misma manera que antes, garantizamos en  $\vec{G}_I$  la existencia de un vértice cuyo exgrado es al menos,

$$\begin{aligned} \frac{2I(P_n)}{n(n-1)} &\geq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor}{2n(n-1)} \\ &> \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{32n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{32n} \end{aligned}$$

con el mismo razonamiento usado para demostrar el teorema anterior, afirmamos que:

$$\text{Hay un par de puntos } p, q \in P_n \text{ tal que } cc(p, q) \geq \left\lfloor \frac{(n-2)(n-4)}{32n} \right\rfloor + 2 \approx \frac{n}{32}.$$

## 1.4. Algunos resultados relacionados

El estudio de las relaciones de contención entre colecciones de puntos y círculos que generó el surgimiento del concepto de cobertura circular, ha dado pie a la realización de interesantes investigaciones. A partir de la publicación de [18], en donde se estableció la Conjetura 1, se publicaron varios artículos mejorando la cota que ahí se dió pero también ha habido otros acercamientos distintos. Así por ejemplo en [5] y [4], se dan dos generalizaciones para colecciones de puntos en espacios euclidianos de dimensión mayor que dos. Nuevamente la medida utilizada es la cardinalidad.

El siguiente es el resultado principal de [5]:

**Teorema 1.4.1** *Para cada entero  $n \geq 1$ , existe  $c_n > 0$  tal que si  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , es un conjunto finito de puntos entonces existe  $A \subseteq X$ ,  $|A| \leq \frac{1}{2}n + 3$ , con la propiedad de que,*

$$\text{si } B \text{ es una } n\text{-bola tal que } B \supseteq A, \text{ entonces } |B \cap X| \geq c_n |X|.$$

En este caso,  $c_n$  sería la *fracción de cobertura* y  $A$  el subconjunto de  $X$  que la maximiza. Se usa como medida la cardinalidad, pero ahora sobre los conjuntos obtenidos de la intersección de  $X$  con todas las bolas  $n$ -dimensionales que contienen al conjunto  $A$ . Notemos que en el caso  $n = 2$ , estamos en el problema de cobertura circular en colecciones de puntos respecto de la cardinalidad. El teorema estima también el tamaño máximo que  $A$  puede alcanzar. Por ejemplo, para el caso  $n = 2$ , diría que cualquier colección finita de puntos -el conjunto  $X$ -, contiene un subconjunto  $A$ , de tamaño a lo más 4, y que existe una constante  $c_2 > 0$ , (claramente también  $c_2 \leq 1$ ) tal que todo círculo que contenga a  $A$ , contiene al menos  $c_2 |X|$  elementos de  $X$ . En este contexto,  $c_2$  representa la fracción de cobertura que nosotros buscamos y aunque en el artículo no se brinda una estimación de su valor, su existencia queda definida para toda dimensión. Para la cobertura circular en colecciones finitas de puntos en  $\mathbb{R}^2$  sabemos que el conjunto  $A$  podría constar únicamente de dos puntos.

Posteriormente, en [4], el resultado anterior se generaliza para elipsoides.

**Teorema 1.4.2** *Para cada entero  $n \geq 1$ , existe  $c_n > 0$  tal que si  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , es un conjunto finito de puntos entonces existe  $A \subseteq X$ ,  $|A| \leq \lfloor \frac{1}{4}n(n+3) \rfloor + 1$ , con la propiedad de que,*

$$\text{si } E \text{ es un elipsoide tal que } E \supseteq A, \text{ entonces } |E \cap X| \geq c_n |X|.$$

Aquí tampoco se da una estimación de la fracción de cobertura, aunque se reduce el tamaño de  $A$  (en el caso de dos dimensiones,  $|A| \leq 3$ ).

En [10] se establece una mejor cota inferior de la fracción de cobertura dada en [18]. La cota dada ahí es  $\frac{1}{27}$ . El artículo incluye también la demostración de  $\frac{1}{3}$  como cota exacta para el caso convexo (Teorema 1.2.4 de esta tesis).

Casi simultáneamente a la publicación de este resultado, en [9] se publicó una nota proponiendo una leve mejoría de la cota. Si bien este incremento no fue muy grande, la demostración utilizada presenta un argumento bastante original e ingenioso. Se trata de identificar en la gráfica de intersección asociada a la colección

de puntos, una subgráfica inducida por los pares de puntos que *no son buenos candidatos* para maximizar la cobertura. Esto es, al considerar todas aquellas parejas de puntos por las que pasa un círculo vacío y luego observar la gráfica que ellos inducen, se encuentra que se trata de una gráfica plana y por tanto se puede estimar fácilmente su tamaño. Tras eliminar esta subgráfica se obtiene la reducción deseada subiendo de  $\frac{1}{27}$  a  $\frac{5}{84}$ .

En [1], se presenta un resultado también en el plano que generaliza para colecciones de conjuntos. Definamos primero algunos conceptos esenciales para la presentación del resultado.

**Definición 1.4.3** *Dos conjuntos convexos compactos  $S$  y  $T$ , se cruzan entre sí, si los conjuntos  $S \setminus T$  y  $T \setminus S$  no son conexos.*

**Definición 1.4.4** *Un conjunto se llama estrictamente convexo, si es convexo y no tiene segmentos rectilíneos en la frontera.*

En este artículo se demuestra que,

**Teorema 1.4.5** *Si  $\Phi$  es una familia de  $n$  conjuntos convexos compactos que no se cruzan entre sí dos a dos y  $S$  es un conjunto compacto estrictamente convexo entonces hay dos elementos  $S_i, S_j \in \Phi$  tales que cualquier conjunto  $S'$  homotético a  $S$ , que contenga a  $S_i$  y  $S_j$ , contiene al menos  $\lceil \frac{n-2}{30} \rceil$  elementos de  $\Phi$ .*

Contrariamente a los resultados anteriores (Teoremas 1.4.1 y 1.4.2), aquí se demuestra que no es posible generalizar este resultado para dimensiones mayores que 2, presentan una familia de  $n$  conjuntos convexos ajenos en  $\mathbb{R}^3$  con la propiedad de que para cualquier subcolección de ellos, existe una esfera que los contiene y no contiene algún elemento más de la familia.

Regresemos a la cobertura circular en colecciones de puntos. Como habíamos mencionado en la Sección 1.2 hasta ahora, el mejor valor para la fracción de cobertura en colecciones de puntos es de  $\frac{1}{4.7}$ . Este resultado está publicado en [12] y lo incluimos a continuación.

**Teorema 1.4.6** *En cualquier colección  $P_n$ , existe un par de puntos para los que todo círculo por ellos cubre al menos  $\lceil \frac{n}{4.7} \rceil$  puntos de la colección.*

La demostración se realiza usando un poderoso argumento de conteo y la construcción, a partir de la colección de puntos, de los *diagramas de Voronoi de orden  $k$* . En el artículo se obtiene también la cota de un tercio para el caso convexo como consecuencia de este resultado.

Presentaremos aquí un resumen de la demostración, para lo cual necesitaremos algunas definiciones.

El *diagrama de Voronoi de primer orden* es el más conocido y estudiado en Geometría Computacional. Se define con respecto a cierto conjunto finito de objetos en algún espacio euclidiano (en nuestro caso,  $\mathbb{R}^2$ ). El objetivo es obtener una descomposición del plano en regiones maximales ajenas, de modo tal que dos puntos pertenecen a la misma región, si están más cercanos a un cierto objeto del conjunto que a cualquier otro.

Por ejemplo, si  $P$  es un conjunto finito de puntos en el plano, y  $p \in P$ , este punto determina una región  $R_p$ , formada con los puntos más cercanos a él, es decir,  $R_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) \leq d(x, q), \forall q \in P\}$ .

Estas regiones se encuentran delimitadas por segmentos de recta: algún intervalo de las mediatrices entre los pares de puntos a menor distancia. Se tiene entonces una descomposición poligonal del plano, en la que existen también algunas regiones no acotadas. Cada región del diagrama, corresponde a un objeto del conjunto y contiene a todos los puntos para los cuales este objeto es el más cercano (Figura 1.6).

El diagrama de Voronoi presenta en una forma explícita y manejable la información respecto de la proximidad del conjunto de objetos. La idea de cercanía queda claramente determinada pues, como apuntábamos, se trabaja en colecciones finitas de objetos en espacios euclidianos. Es posible también, definirlo en términos del más alejado (o el dominante mediante algún tipo de relación previamente establecida).



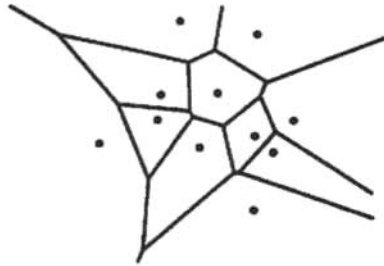


Figura 1.6: Diagrama de Voronoi de una colección de once puntos en posición general.

Ahora bien, una generalización de este concepto, la proporcionan los *diagramas de Voronoi de órdenes mayores*. La definición que presentamos aquí es para colecciones finitas de puntos en el plano en posición general.

**Definición 1.4.7** Si  $P$  es un conjunto finito de puntos en el plano, el diagrama de Voronoi de orden  $k$ , es la descomposición del plano en regiones maximales tales que para cualquier par de puntos  $x, y$  en una región, los  $k$  puntos de  $P$ , más cercanos a  $x$ , son los  $k$  puntos de  $P$ , más cercanos a  $y$ .

Hay que aclarar que  $x$  y  $y$  son puntos en la región pero no necesariamente en  $P$ . Por supuesto, esta definición sólo tiene sentido si  $k$  toma valores enteros entre 1 y  $|P| - 1$ . Intuitivamente, dado el parámetro  $k$ , se asocia a cada  $S_k \subset P$  -subconjunto de  $P$  de cardinalidad  $k$ - con la región de todos los puntos  $x \in \mathbb{R}^2$ , tales que los  $k$  puntos de  $P$  más cercanos a  $x$ , son precisamente los  $k$  elementos de  $S_k$  (Figura 1.7).

Una presentación más completa acerca de este concepto y sus aplicaciones, se encuentra en [11]. Ahí, se muestra que los diagramas de Voronoi de órdenes mayores generan una descomposición del plano en regiones poligonales ajenas cuyas aristas son algunos intervalos de las mediatrices de las parejas de puntos de

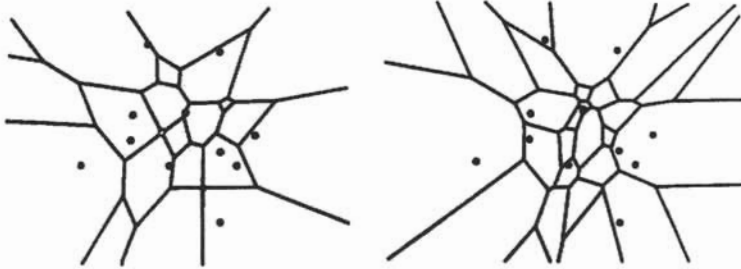


Figura 1.7: Diagramas de Voronoi de segundo y tercer orden para la misma colección de puntos dada en la Figura 1.6.

$P$ . Este es precisamente el hecho que se usa en la construcción de [12] y que a continuación exponemos.

Sea  $P_n$  una colección de  $n$  puntos en el plano en posición general. Por cada pareja de puntos  $p, q \in P_n$ , consideremos su mediatriz  $l_{pq}$  y la familia de círculos coaxiales cuyo eje radical es el segmento  $pq$ . Todo círculo de esta familia tiene su centro precisamente sobre  $l_{pq}$ .

Como estamos suponiendo que los puntos están en posición general entonces hay exactamente  $n - 2$  círculos de la familia que pasan por un tercer punto de  $P_n$ . Marcamos el centro de cada uno de ellos en  $l_{pq}$ . Estos centros definen una colección de  $n - 1$  intervalos abiertos en la recta, dos de los cuales no son acotados. Ahora etiquetamos cada intervalo  $I \in l_{pq}$  con un valor entero positivo que indique el número de puntos de  $P_n$  que cubre todo círculo que pasa por  $pq$  y tiene su centro en  $I$ . Observemos (Figura 1.8):

- todas las etiquetas tienen un valor mayor o igual que dos,
- en intervalos adyacentes, la diferencia entre las etiquetas es exactamente uno,

- la etiquetación incrementa sus valores conforme se aleja del círculo de diámetro  $pq$ .

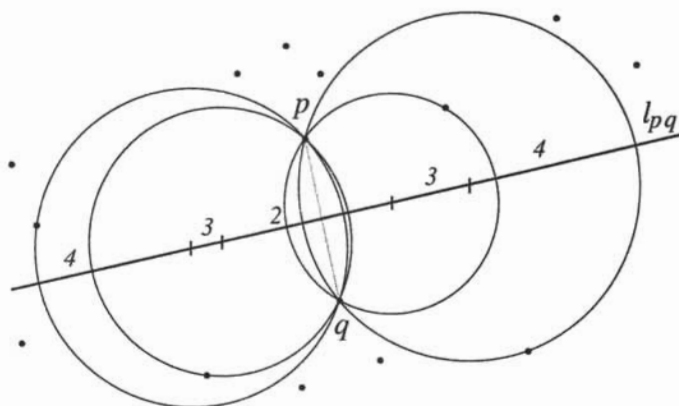


Figura 1.8: Etiquetación de la mediatriz de  $p, q$ .

En [19] y [11] se demuestra que uno de estos intervalos es una arista del diagrama de Voronoi de orden  $k$  si y sólo si su etiqueta es  $k + 1$ . Así por ejemplo si en una mediatriz sucede que todas sus etiquetas son mayores que 2 ninguno de sus intervalos es arista del diagrama de Voronoi de primer orden. Análogamente, para una mediatriz en la que todas sus etiquetas son mayores que algún cierto valor  $t \in \mathbb{N}$  sus intervalos únicamente podrán ser aristas de los diagramas de Voronoi de órdenes mayores que  $t - 1$ .

Lo que se pretende es obtener el máximo valor de  $k$  para el cual haya alguna mediatriz que no contenga aristas de ninguno de los diagramas de Voronoi de órdenes 1 a  $k$ . Para esto, en [12], los autores utilizan el resultado de [17] (también en [11]) que enunciamos aquí sin demostración.

**Definición 1.4.8**  $P' \subseteq P_n$ , es un  $i$ -conjunto de  $P_n$ , si se obtiene de la intersección

de  $P_n$  con algún semiplano y tiene cardinalidad  $i$ . El número de  $i$ -conjuntos de  $P_n$  se denota por  $e_i(P_n)$ .

**Teorema 1.4.9** Si  $P_n$  es un conjunto de  $n$  puntos en el plano, en posición general, el número de aristas del diagrama de Voronoi de orden  $k$  es

$$(6k - 3)n - 3k^2 - e_k(P_n) - 3 \sum_{i=1}^{k-1} e_i(P_n)$$

para  $1 \leq k \leq n - 1$ .

Así, para maximizar el número de aristas del diagrama de Voronoi de orden  $k$  habrá que minimizar el número de  $i$ -conjuntos de la colección para  $1 \leq i \leq k$ .

En la última sección de [12] obtienen el resultado más fuerte del artículo que brinda una cota inferior para este número, ellos demuestran ahí que

$$\sum_{i=1}^k e_i(P_n) \geq 3 \binom{k+1}{2}$$

y, tras hacer las cuentas, concluyen que el número de aristas de la unión de todos los diagramas de órdenes 1 a  $k$ , asociados a una colección de  $n$  puntos en posición general es a lo más

$$3kn - 3k^2 - 3k \tag{1.1}$$

Ahora, en  $P_n$  hay  $\binom{n}{2}$  mediatrices por lo que habrá que obtener el valor de  $k$  para el cual

$$3kn - 3k^2 - 3k < \binom{n}{2}.$$

Es decir se busca el intervalo de valores de  $k \in [1, n]$  en los cuáles la función  $\phi_1(k) = 3kn - 3k^2 - 3k - \binom{n}{2}$  es menor que cero. Los autores obtienen en [12] que esto sucede siempre que

$$k < \frac{n-1}{2} - \left( \frac{(n-2)^2}{12} - \frac{1}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{n}{4.7}.$$

Así, mientras  $k$  sea menor que  $\lceil \frac{n}{4.7} \rceil$  las aristas de los primeros  $k$  diagramas de Voronoi no alcanzarán para tener representante en cada una de las mediatrices de la colección  $P_n$ , existiendo, entonces, al menos una pareja de puntos cuya mediatriz no tenga ningún intervalo que sea arista de los diagramas de Voronoi de órdenes 1 a  $k$ , o, dicho de otra manera, todas sus etiquetas tendrán valores mayores o iguales que  $k$ .

En términos de cobertura circular, esto indica que cualquier círculo que pase por la pareja descrita, cubrirá al menos  $k$  puntos de la colección.

Si la colección está en posición convexa, pero sin tres colineales, entonces

$$\sum_{i=1}^k e_i(P_n) = kn$$

y por tanto la cota superior para el número de aristas de la unión de los diagramas de Voronoi está dada por

$$2kn - \frac{3}{2}(k^2 + k), \quad (1.2)$$

y entonces, para este caso, se busca  $k$  tal que

$$2kn - \frac{3}{2}(k^2 + k) < \binom{n}{2}.$$

Es decir, se busca el intervalo de valores de  $k \in [1, n]$  en los cuáles la función  $\phi_2(k) = 2kn - \frac{3}{2}(k^2 + k) - \binom{n}{2}$  es menor que cero. Esto es cierto siempre que  $k < \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .



## Capítulo 2

# Colecciones de puntos bicolorados

### 2.1. Introducción

En este capítulo estudiamos una versión modificada del problema original de cobertura circular en colecciones de puntos en el plano. Consideraremos ahora colecciones de puntos a los que se ha asignado una 2-coloración balanceada, esto es, los puntos son coloreados con dos colores de modo que las clases cromáticas tengan el mismo número de puntos. Nuevamente la medida a utilizar será la cardinalidad y nos preguntamos por la existencia de una pareja de puntos que realice la cobertura circular máxima pero ahora con la restricción de que esta pareja sea bicolor.

Demostraremos que para puntos en posición circular es posible encontrar una pareja bicolor de cobertura circular mayor o igual que un medio. Después estudiaremos las colecciones bicolores en posición convexa no circular y demostraremos la existencia de alguna pareja bicolor de puntos de cobertura circular al menos un octavo. Mediante la utilización de las técnicas de [12] es posible incrementar un poco este valor, aproximadamente a un séptimo. Conjeturamos que la cota exacta para este caso es un cuarto. Demostraremos que en ciertas coloraciones esta fracción es exactamente un cuarto y presentaremos un ejemplo de una colección

bicolor balanceada en posición convexa en la que no hay alguna pareja bicolor de cobertura circular mayor a un cuarto.

Por último analizaremos el caso en posición general en el que daremos una cota inferior de  $\frac{1}{72}$  del total, para alguna pareja bicolor y, mediante el procedimiento usado en [12], la incrementamos hasta aproximadamente un onceavo.

Dados dos puntos  $a, b$ , denotamos por  $C_{ab}$  a un círculo que pasa por ellos y  $\widehat{C}_{ab}$  para referirnos al círculo y su interior. En el caso particular de que se trate del círculo de diámetro  $ab$ , lo denotamos como  $D_{ab}$ .

La recta  $\rho_{ab}$ , definida por dos puntos  $a$  y  $b$ , divide al plano en dos semiplanos:  $\Sigma(ab)$  y  $\Sigma(ba)$  (ninguno contiene a  $\rho_{ab}$ ). En un círculo  $C_{ab}$ , el segmento  $ab$

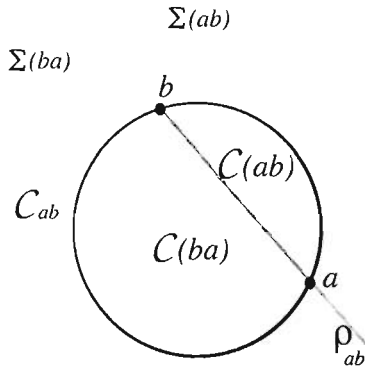


Figura 2.1: Las regiones definidas por un círculo  $C_{ab}$ .

determina dos regiones (Figura 2.1) que denotaremos como sigue:

$$C(ab) = (\widehat{C}_{ab} \cap \Sigma(ab)) \cup \{a, b\} \text{ y } C(ba) = (\widehat{C}_{ab} \cap \Sigma(ba)) \cup \{a, b\}$$

Como definimos en la sección 1.3, un círculo cubre a un punto, si éste pertenece al círculo o a su interior. De la definición de  $C(ab)$  y  $C(ba)$  es claro que ambas regiones cubren a los puntos  $a$  y  $b$ .



## 2.2. Puntos en posición convexa

Sea  $P_{2n}$  una colección de  $2n$  puntos en el plano,  $n$  rojos,  $n$  azules, en *posición estrictamente convexa*, esto es, los puntos están en posición convexa y sin que haya tres colineales.

Etiquetaremos los puntos de la siguiente manera: tomamos un punto cualquiera en la colección y lo llamamos  $a_0$ . Recorriendo el cierre convexo en sentido positivo, el siguiente punto encontrado será  $a_1$ . Seguimos avanzando en esta dirección y etiquetamos los puntos encontrados incrementando el subíndice hasta llegar al  $a_{n-1}$ . Al punto siguiente lo llamamos  $b_0$  y seguimos etiquetando hasta  $b_{n-1}$ .

La siguiente observación es evidente, como puede comprobarse al examinar la Figura 2.2.

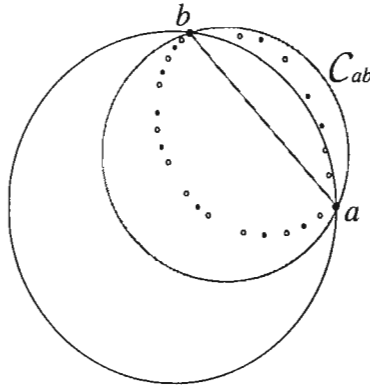


Figura 2.2: Cota inferior para  $cc(a, b)$ . Aquí  $|\mathcal{C}(ab) \cap P_{2n}| \geq \lambda$  y  $|\mathcal{C}(ba) \cap P_{2n}| \geq \lambda$ .

**Observación 2.2.1** Sean  $a, b \in P_{2n}$ , si existe un círculo  $C_{ab}$  tal que cada una de las regiones  $\mathcal{C}(ab)$  y  $\mathcal{C}(ba)$  cubre al menos  $\lambda$  puntos de  $P_{2n}$ , entonces  $cc(a, b) \geq \lambda$ .

Es evidente que cualquier otro círculo que pase por  $a$  y  $b$  contiene alguna de las regiones definidas por  $C_{ab}$ .

Si  $a, b \in P_{2n}$ , definimos los conjuntos siguientes:

$$P(ab) = (P_{2n} \cap \Sigma(ab)) \cup \{a, b\} \text{ y } P(ba) = (P_{2n} \cap \Sigma(ba)) \cup \{a, b\}.$$

**Nota 1** Con frecuencia abusaremos de la notación, usando simplemente  $C(ab)$  al referirnos al conjunto  $C(ab) \cap P(ab)$ , para algún círculo  $C_{ab}$ .

Iniciamos calculando la cobertura circular en el caso más sencillo, cuando todos los puntos se encuentran sobre un círculo.

**Teorema 2.2.1** Si  $P_{2n}$  es una colección circular existen  $p, q \in P_{2n}$ , un par bicolor de puntos tales que  $cc(p, q) \geq n$ .

**Demostración.** Sea  $C$  el círculo que cubre a  $P_{2n}$ . Si  $a_0$  y  $a_{n-1}$  tienen distinto color, terminamos. Esta sería una pareja bicolor y cada una de las regiones  $C(a_0 a_{n-1})$  y  $C(a_{n-1} a_0)$ , cubre al menos  $n$  puntos. Por la Observación 2.2.1,  $cc(a_0, a_{n-1}) \geq n$ .

Supongamos entonces que estos puntos son del mismo color y consideremos ahora la pareja  $a_0, b_0$ . Usando el mismo razonamiento observamos que si es bicolor, hemos terminado. Si no, consideramos ahora la pareja  $a_1, b_0$  y si fuese bicolor terminamos. Continuamos con este proceso verificando las parejas  $a_i, b_{i-1}$  y  $a_i, b_i$ . Eventualmente llegaremos a una bicolor y por la Observación 2.2.1 concluimos.

■

Como en la sección 1.2, llamamos *fracción de cobertura* al cociente  $\frac{cc(p,q)}{|P_{2n}|}$ , cuando  $p, q$  es un par de puntos que realiza la cobertura circular máxima.

Analicemos ahora el caso en que la colección está en posición convexa pero no es circular. Para el caso sin colores, presentamos en el capítulo anterior el resultado de [10] que demuestra que la fracción de cobertura es  $\frac{1}{3}$  y es exacta. Vimos un ejemplo en el que no es posible encontrar una pareja de cobertura mayor a un tercio (Figura 1.2). Por supuesto esta fracción no puede ser mayor al agregar

colores. Como consecuencia del Teorema 1.2.4, podemos dar fácilmente una cota inferior de  $\frac{1}{8}$  para este caso.

**Teorema 2.2.2** *Hay una pareja bicolor  $p, q \in P_{2n}$ , tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ .*

**Demostración.** De la demostración del Teorema 1.2.4 sabemos que existen una

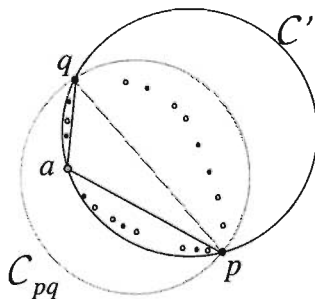


Figura 2.3: De la demostración del Teorema 2.2.2.

pareja  $p, q \in P_{2n}$  y un círculo  $C_{pq}$  que cubre a la colección y tal que  $|C(pq)| \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$  y  $|C(qp)| \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1$ . Evidentemente si  $p, q$  es bicolor, hemos terminado.

Supongamos entonces que ambos puntos son rojos. Como  $C_{pq}$  cubre a  $P_{2n}$ , alguna de las regiones,  $C(pq)$  ó  $C(qp)$  cubre al menos  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$  puntos azules, digamos que tal región es  $C(qp)$  y tomemos ahí el punto azul  $a$  que minimice el ángulo formado con  $pq$  (Figura 2.3).

Sea  $C'$ , el círculo que pasa por  $p, q$  y  $a$ . Alguno de los segmentos  $qa$  ó  $ap$ , determina en  $C'$  una región en la que hay al menos  $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$  puntos azules. La otra región contiene a  $C(pq)$ . Por la Observación 2.2.1 concluimos que alguna de las parejas  $q, a$  ó  $a, p$  cumple el resultado. ■

Hay algunas coloraciones para las que es posible mejorar este valor hasta un

cuarto y conjeturamos que este sea el valor exacto para toda bicoloración balanceada en una colección convexa.

Es claro que si hubiese muy pocos puntos encontrar una pareja de cobertura al menos un cuarto resulta trivial pues  $\lceil \frac{2n}{4} \rceil > 2 \Leftrightarrow n \geq 5$ , es decir, las colecciones interesantes tienen al menos cinco puntos en cada clase cromática. En lo sucesivo supondremos que este es el caso y también que no hay cuatro puntos en posición circular.

En la Sección 1.3 definimos la digráfica de dominación,  $\vec{G}_I$ , de una colección de puntos en el plano. Denotamos por  $G_I$ , a la gráfica subyacente a esta digráfica (la gráfica no orientada con los mismos vértices y adyacencias de  $\vec{G}_I$ ).

El siguiente lema nos proporciona una cota inferior para la cobertura circular. Es válido también para colecciones no coloreadas.

**Lema 2.2.3** Sean  $P$  una colección de puntos en el plano y  $\vec{G}_I$  su digráfica de dominación. Si  $G_I \supset K_t$ ,  $t \geq 3$ , entonces existe en  $P$  una pareja  $p, q$  tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{t-1}{2} \rceil + 2$ .

**Demostración.** La gráfica  $K_t$  representa en  $G_I$  un conjunto de  $t$  parejas independientes tales que los segmentos que definen se cruzan dos a dos. Es fácil verificar que son independientes ya que si hubiera dos de ellas compartiendo un punto sus segmentos correspondientes no se cruzarían entre sí.

En  $K_t$  se tiene la orientación inducida por la digráfica de dominación. No es difícil constatar que existe en  $K_t$  un vértice cuyo exgrado es al menos  $\lceil \frac{t-1}{2} \rceil$ . Este vértice representa una pareja  $p, q \in P$  tal que  $pq$  cruza al menos a otros  $\lceil \frac{t-1}{2} \rceil$  segmentos y domina a las parejas formadas por sus extremos.

Esto quiere decir que todo círculo  $C_{pq}$ , cubre al menos uno de los puntos de cada una de las  $\lceil \frac{t-1}{2} \rceil$  parejas y como estas son independientes no hay puntos contados doblemente.

Contando a  $p$  y  $q$  se tiene el resultado. ■

Para la demostración de los siguientes resultados consideraremos  $\vec{B}_I$ , la sub-

digráfica de  $\vec{G}_I$ , inducida por los segmentos bicolores de  $P_{2n}$ . Es decir, aquella digráfica en la que cada vértice representa un segmento bicolor de  $P_{2n}$ , dos vértices son adyacentes si provienen de dos segmentos que se cruzan y tiene la orientación inducida por la relación de dominación entre parejas: si  $pq \rightarrow p'q'$ , entonces en  $\vec{B}_I$  estará la flecha del vértice que representa a  $pq$  hacia el correspondiente a  $p'q'$  (indicando con esto que todo círculo por  $pq$  cubre alguno de los extremos de  $p'q'$ ).

Como supusimos que en  $P_{2n}$  no hay cuatro puntos en un círculo entonces no hay flechas simétricas en esta orientación. El siguiente es un corolario inmediato del lema anterior.

**Corolario 2.2.4** *Si  $B_I \supset K_t$ ,  $t \geq 3$ , entonces hay en  $P_{2n}$  una pareja  $p, q$  bicolor tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{t-1}{2} \rceil + 2$ .*

Revisaremos la cobertura circular en una clase particular de coloraciones. Demostraremos que en ellas la fracción de cobertura es al menos un cuarto.

**Definición 2.2.5** *Una coloración de  $P_{2n}$  es separada si es posible encontrar una recta tal que en cada uno de los semiplanos que define hay puntos de un sólo color.*

**Definición 2.2.6** *Una pareja  $a, b \in P_{2n}$  es bisectora si los conjuntos que define contienen la misma cantidad de puntos, es decir, si  $|P(ab)| - |P(ba)| = 0$ .*

**Teorema 2.2.7** *Si en  $P_{2n}$ ,  $n \geq 5$ , la coloración es separada entonces existe una pareja bicolor  $p, q \in P_{2n}$  tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .*

**Demostración.** Como las clases cromáticas están separadas, hay exactamente dos parejas bicolores de puntos consecutivos en el cierre convexo. Supongamos que una de estas parejas es  $b_0a_{n-1}$ . Entonces, todas las parejas  $a_i b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  son bicolores. Notemos que estas parejas son independientes y además bisectoras por

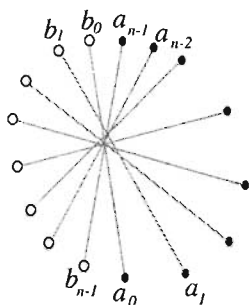


Figura 2.4: De la demostración del Teorema 2.2.7.

lo que, de la convexidad de la colección, los segmentos que definen se cruzan 2 a 2 y son independientes (Figura 2.4).

Hay exactamente  $n$  de estas parejas entonces ellas inducen una gráfica completa de orden  $n$  en  $B_I$ . Por el corolario anterior (2.2.4) se tiene que existe una pareja  $p, q \in P_{2n}$  tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2 \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ . ■

En este tipo de coloraciones existen “muchas” parejas bicolors bisectoras que se cruzan entre sí. Esto induce una subgráfica completa grande en la gráfica de dominación y de ahí se sigue el resultado. Sin embargo, no siempre podemos asegurar la existencia de tales parejas (Figura 2.5).

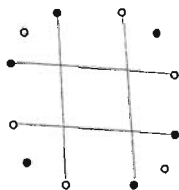


Figura 2.5: Una colección bicolor sin parejas bicolors bisectoras

Trabajaremos entonces con el concepto de pareja bicolor *casi-bisectora*.

**Definición 2.2.8** Una pareja de puntos  $a, b \in P_{2n}$  es *casi-bisectora*, si la diferencia entre las cardinalidades de los conjuntos que define en  $P_{2n}$  es a lo más dos, es decir  $||P(ab)| - |P(ba)|| \leq 2$ .

Evidentemente cualquier pareja bisectora es *casi-bisectora*.

Enseguida presentamos otro tipo de coloración para la que también es posible demostrar que la fracción de cobertura es al menos un cuarto.

**Definición 2.2.9** Una *bicoloración* de  $P_{2n}$  es *alternada* si todas las parejas consecutivas en el cierre convexo son *bicolores*.

**Teorema 2.2.10** Si en  $P_{2n}$ ,  $n \geq 5$ , la coloración es *alternada*, entonces existe una pareja bicolor,  $p, q \in P_{2n}$  tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .

**Demostración.** Supongamos que  $a_0$  es azul. Tenemos dos casos posibles:

- $n$  par,  $n = 2k$ ,  $k \geq 3$ .

Como  $a_0$  es azul, entonces  $a_0, a_2, a_{2(2)}, \dots, a_{2(k-1)}, b_{2(0)}, b_{2(1)}, \dots, b_{2(k-1)}$  son todos los puntos azules de  $P_{2n}$ , y por lo tanto el conjunto de todos los puntos rojos es  $\{a_{2i+1}, b_{2i+1} \mid i = 0, \dots, k-1\}$ .

Entonces todas las parejas de la forma  $a_{2i}b_{2i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  son *bicolores* y también lo son las parejas  $a_{2i+1}b_{2i+2}$ ,  $i = 0, \dots, k-2$ .

Es fácil verificar que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{a_{2i}b_{2i+1} \mid i = 0, \dots, k-1\} \cup \{a_{2i+1}b_{2i+2} \mid i = 0, \dots, k-2\}$$

forma una colección de aristas independientes en  $B_I$ . Los únicos puntos que no pertenecen a alguna de estas parejas son  $b_0$  y  $a_{2k-1}$  (Figura 2.6 (A)). O sea que  $\mathcal{A} \cup \{b_0a_{2k-1}\}$  es un emparejamiento perfecto en  $P_{2n}$ .

Notemos además que todas estas parejas son *casi-bisectoras*:

cada pareja  $a_{2i}b_{2i+1}$  define los conjuntos  $P(a_{2i}b_{2i+1})$  y  $P(b_{2i+1}a_{2i})$ . El primero tiene  $2k = n$  puntos y el segundo  $2k + 2 = n + 2$ ,  $\forall i = 0, \dots, k - 1$ . Para las parejas  $a_{2i+1}b_{2i+2}$  tenemos que

$$|P(a_{2i+1}b_{2i+2})| = n \text{ y } |P(b_{2i+2}a_{2i+1})| = n + 2, i = 0, \dots, k - 2.$$

Por la convexidad de la colección se tiene que los elementos de  $\mathcal{A}$  definen

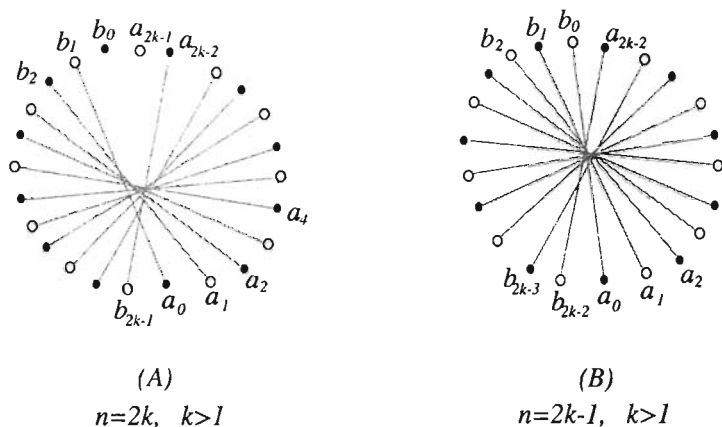


Figura 2.6: De la demostración del Teorema 2.2.10.

segmentos que se cruzan dos a dos. Tenemos entonces  $2k - 1$  parejas bicolors independientes casi-bisectoras y cuyos segmentos se cruzan dos a dos. Entonces en la gráfica  $B_I$ , estas parejas generan una gráfica completa de orden  $2k - 1$  y por el Corolario 2.2.4 se tiene que existe una pareja bicolor de cobertura circular al menos  $\lceil \frac{2k-2}{2} \rceil + 2 = k + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .

- $n$  impar,  $n = 2k - 1, k \geq 3$ .



En este caso, tenemos una colección con  $2k-1$  puntos de cada color. El conjunto de puntos azules es  $\{a_0, a_2, \dots, a_{2k-2}, b_1, b_3, \dots, b_{2k-3}\}$  y el de puntos rojos  $\{a_1, a_3, \dots, a_{2k-3}, b_0, b_2, \dots, b_{2k-2}\}$ .

Ahora sucede que todas las parejas de la forma  $a_i b_i$ ,  $i = 0, \dots, 2k-1$  son bicolores y forman una colección de aristas independientes en  $B_I$ , de hecho forman un emparejamiento perfecto de los puntos de  $P_{2n}$  (Figura 2.6 (B)).

Se cumple además que todas estas parejas son bisectoras:

cada pareja  $a_i b_i$ , define los conjuntos  $P(a_i b_i)$  y  $P(b_i a_i)$ . Ambos tienen  $2k = n + 1$  puntos,  $\forall i = 0, \dots, k-1$ .

Nuevamente, la convexidad de la colección garantiza que los segmentos inducidos por estas parejas se cruzan entre sí. Tenemos ahora  $2k$  parejas bicolores independientes bisectoras que se cruzan dos a dos y que en la gráfica  $B_I$ , generan una gráfica completa de orden  $2k$ .

Por el Corolario 2.2.4 se tiene que existe una pareja bicolor de cobertura circular al menos  $\lceil \frac{2k-1}{2} \rceil + 2 = k + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .

■

Conjeturamos que para coloraciones separadas y alternadas el valor exacto para la fracción de cobertura es, como en el caso convexo sin color, un tercio (Figura 2.7).

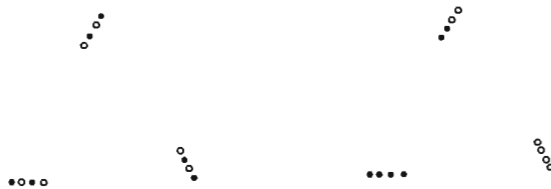


Figura 2.7: Una coloración alternada y una separada de cobertura mínima.

Como vimos, en estas coloraciones el hecho importante fue el de encontrar muchas parejas casi-bisectoras ajenas entre sí. Demostraremos enseguida que en cualquier coloración balanceada de  $P_{2n}$ , siempre es posible encontrar al menos dos parejas bicolors casi-bisectoras. De hecho, como consecuencia del *Teorema del Ham-sandwich* ([11]), podemos asegurar la existencia de una de estas parejas de modo que sea casi-bisectora para ambas clases cromáticas; es decir, una pareja tal que los subconjuntos que determina en la colección tengan *casi* la misma cantidad de puntos de cada color, donde *casi* significa una diferencia menor o igual a dos.

Este resultado es válido para colecciones con al menos cuatro puntos (dos en cada clase cromática). Los casos más pequeños se deducen fácilmente como se observa en la Figura 2.8 para  $n = 2$  y  $n = 3$ .

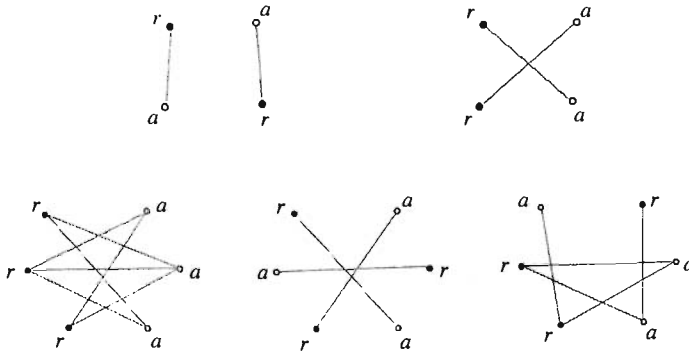


Figura 2.8: Las únicas bicoloraciones balanceadas para 4 y 6 puntos

Se indica con una arista cada pareja bicolor casi-bisectora en la colección. Cada una de las parejas mostradas es casi-bisectora en cada clase cromática. Demostraremos entonces el resultado para coloraciones con al menos ocho puntos.

**Teorema 2.2.11** *En  $P_{2n}$ ,  $n \geq 4$ , existen al menos dos parejas bicolors que son casi-bisectoras en ambas clases cromáticas.*

**Demostración.** Por el *Teorema del Ham-sandwich* sabemos que existe una recta  $l$  que biseca la colección. Si  $n$  es par entonces es posible garantizar además que  $l$  biseque simultáneamente ambas clases cromáticas, es decir, que  $l$  defina en  $P_{2n}$  dos subconjuntos cada uno de ellos con la misma cantidad de puntos rojos y azules (Figura 2.9). Analicemos primero este caso y después el impar.

Entonces,  $n = 2k, k \geq 2$ . La recta  $l$  está localizada entre cuatro puntos de  $P_{2n}$  colocados en posición convexa y que forman dos parejas consecutivas en la etiquetación definida sobre la colección. Supongamos que tales puntos son  $b_{n-1}, a_0, a_{n-1}$ , y  $b_0$ .

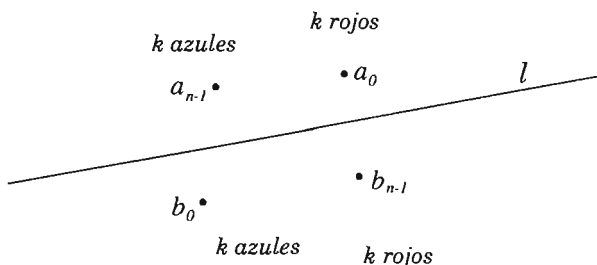


Figura 2.9: Una recta bisectora en  $P_{2n}$  para  $n$  par.

Existen, salvo simetrías, tres maneras en las que estos puntos podrían estar coloreados:

1. Hay exactamente tres puntos del mismo color.

Todas las coloraciones de este tipo son análogas a la que se observa en la Figura 2.10. Digamos que  $b_0, b_{n-1}$  y  $a_0$  son azules y  $a_{n-1}$  es rojo. En este caso, hay dos parejas bicolors casi-bisectoras (en la figura se indican

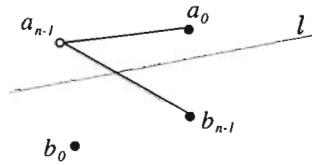


Figura 2.10: La recta bisectora entre tres puntos del mismo color.

mediante aristas). La pareja  $a_{n-1}, a_0$  separa a la colección en los conjuntos  $P(a_{n-1}a_0)$  y  $P(a_0a_{n-1})$ . El primero tiene  $2k$  puntos:  $k$  azules y  $k$  rojos; en el segundo hay  $2k + 2$  puntos:  $k + 1$  azules y  $k + 1$  rojos.

La otra pareja es la formada por los puntos  $a_{n-1}, b_{n-1}$  que determinan los conjuntos  $P(b_{n-1}a_{n-1})$  y  $P(a_{n-1}b_{n-1})$ . Ambos tienen  $2k + 1$  puntos: en el primero hay  $k + 1$  azules y  $k$  rojos, en el otro hay  $k$  azules y  $k + 1$  rojos.

2. Hay dos puntos de cada color.

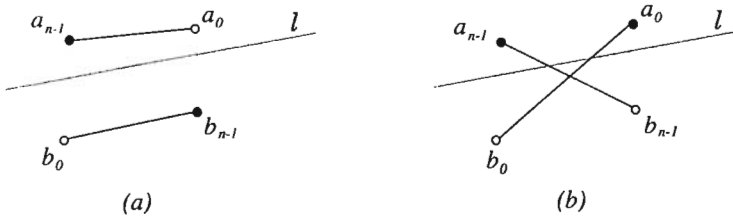


Figura 2.11: La recta bisectora entre dos puntos del mismo color.

La Figura 2.11, muestra las únicas dos opciones distintas, salvo simetría, para una coloración de este tipo. También se indican con aristas las parejas bicoloradas casi-bisectoras.

No es difícil comprobar que cualquiera de estas parejas se comporta como alguna de las descritas en el caso anterior. Así, en ambos casos hay al menos dos parejas bicolors casi-bisectoras.

3. Los cuatro puntos son del mismo color (azules).

Digamos que  $a_0b_0$  biseca simultáneamente ambas clases cromáticas, entonces  $|P(a_0b_0)| = |P(b_0a_0)| = 2k + 1$  puntos,  $k$  rojos y  $k + 1$  azules. Aquí la intención será ir revisando una a una las parejas casi-bisectoras hasta encontrar alguna bicolor.

Los sucesores de los puntos  $a_0, b_0$ , en el orden dado por la etiquetación, son

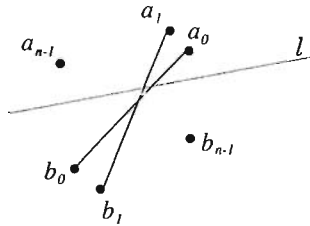


Figura 2.12: La recta bisectora entre cuatro puntos del mismo color.

los puntos  $a_1, b_1$ . Si alguno de ellos es rojo, terminamos pues estaremos en alguno de los dos casos anteriores, de otra manera, tendremos nuevamente dos parejas monocromáticas -azules- de puntos sucesivos en el orden dado.

La nueva cuarteta está formada por los puntos  $a_1, b_0, b_1, a_0$  (Figura 2.12).

No es muy difícil comprobar que la pareja  $a_1b_1$ , tiene el mismo “comportamiento” que la pareja  $a_0b_0$ . Es decir, es una pareja casi-bisectora: al cambiar de  $a_0b_0$  a  $a_1b_1$  perdemos un punto azul de  $P(a_0b_0)$ , el  $a_1$ , pero agregamos otro punto azul, el  $b_0$ , para obtener  $P(a_1b_1)$  (y lo mismo sucede con

$P(b_1 a_1)$ ). Así, tenemos que  $|P(a_1 b_0)| = |P(b_0 a_1)| = 2k + 1$ . En cada subconjunto hay  $k$  puntos rojos y  $k + 1$  azules.

A lo más existen  $k$  parejas azules de este tipo:  $\{a_0 b_0, a_1 b_1, \dots, a_{k-1} b_{k-1}\}$ , eventualmente llegaremos a un cambio de color y por tanto a alguno de los casos precedentes.

Ahora veamos el caso en que  $n$  es impar. Supongamos que  $n = 2k + 1$ ,  $k \geq 2$ . Nuevamente por el *Teorema del Ham-sandwich* sabemos que hay una recta  $l$  que biseca  $P_{2n}$  dejando en cada uno de los subconjuntos casi la misma cantidad de puntos de cada color. Esencialmente se usa el mismo razonamiento que en el caso impar, analizando las coloraciones posibles de los puntos entre los que se encuentra  $l$ .

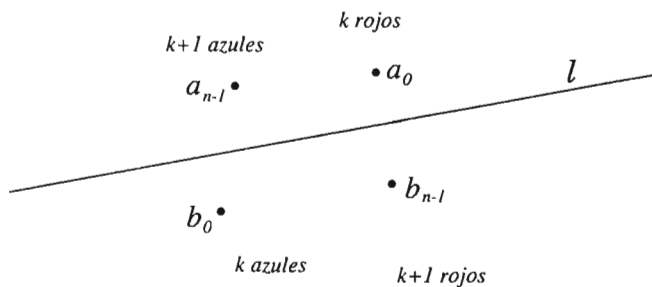


Figura 2.13: Recta bisectora para  $P_{2n}$  con  $n$  impar.

1. Si hay exactamente tres puntos del mismo color (Figura 2.10).

Como antes,  $b_0, b_{n-1}$  y  $a_0$  son azules y  $a_{n-1}$  es rojo. Hay dos parejas bicolors casi-bisectoras. La pareja  $a_{n-1}, a_0$  define  $P(a_{n-1} a_0)$  con  $2k + 1$  puntos:  $k + 1$  azules y  $k$  rojos; y  $P(a_0 a_{n-1})$  con  $2k + 3$  puntos:  $k + 1$  azules y  $k + 2$  rojos.

La otra pareja es  $a_{n-1}, b_{n-1}$  que determina los conjuntos  $P(b_{n-1}a_{n-1})$  y  $P(a_{n-1}b_{n-1})$ . Ambos tienen  $2k + 2$  puntos: en el primero hay  $k + 2$  azules y  $k$  rojos, en el otro hay  $k$  azules y  $k + 2$  rojos.

2. Hay dos puntos de cada color (Figura 2.11).

En este caso, como habíamos observado, hay dos parejas bicolors casi-bisectoras y cualquiera de ellas se comporta como alguna de las descritas en el caso anterior.

3. Los cuatro puntos son del mismo color (azules) (Figura 2.12).

Digamos que  $a_0b_0$  biseca simultáneamente ambas clases cromáticas, entonces  $|P(a_0b_0)| = |P(b_0a_0)| = 2k + 2$  puntos,  $k$  rojos y  $k + 2$  azules en el primer conjunto y  $k + 1$  de cada color en el segundo. Otra vez la idea es ir revisando una a una las parejas casi-bisectoras hasta llegar a un cambio de color y por tanto a alguno de los casos precedentes.

En cada caso se exhiben al menos dos parejas bicolors que separa la colección en dos subconjuntos con al menos  $n$  puntos cada uno. ■

**Definición 2.2.12** Si  $P$  es una colección de puntos en el plano, una pareja de puntos  $a, b \in P$  es  $\frac{1}{4}$ -divisora si  $\frac{1}{|P|} |P(ab)| \geq \frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{|P|} |P(ba)| \geq \frac{1}{4}$ .

Recordemos que  $P(ab)$  y  $P(ba)$  contienen, ambos, a los puntos  $a$  y  $b$ . Notemos que las parejas bisectoras y casi-bisectoras son también  $\frac{1}{4}$ -divisoras.

En estos términos, una consecuencia inmediata del teorema anterior, es el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.13** En  $P_{2n}$ ,  $n \geq 4$ , existen al menos cuatro parejas bicolors  $\frac{1}{4}$ -divisoras.

**Demostración.** Separamos  $P_{2n}$  en dos subcolecciones,  $P_1, P_2$ , bicolores balanceadas con  $n$  puntos cada una. Evidentemente ambas colecciones están en posición convexa. Si  $n$  es par, entonces cada una de estas colecciones tendrá  $\frac{n}{2}$  puntos de cada color y como  $n \geq 4$ , entonces  $\frac{n}{2} \geq 2$ . Así, por el Teorema 2.2.11, se tiene que en cada una de las colecciones  $P_1, P_2$ , hay dos parejas bicolores cada una de las cuales separa a la colección a que pertenece en dos subconjuntos con al menos  $\frac{n}{2}$  puntos. Estas parejas son  $\frac{1}{4}$ -divisoras en la colección total.

Si por el contrario,  $n$  es impar, aunque nuevamente  $|P_1| = |P_2| = n$ , en cada colección habrá  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos de un color y  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  del otro. Aquí completaremos ambas colecciones de manera conveniente: si en  $P_1$  hay  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  puntos rojos, tomamos en  $P_2$  el punto rojo “más cercano” a  $P_1$  (en el cierre convexo) y lo agregamos a  $P_1$ . Análogamente a  $P_2$  hemos de agregar de  $P_1$  el punto azul más cercano a  $P_2$ . Ahora ambas colecciones cumplen con el teorema y por tanto en cada una hay al menos dos parejas bicolores, cada una de las cuales separa a la colección que pertenece en dos subconjuntos con al menos  $\frac{n}{2}$  puntos, por lo que son  $\frac{1}{4}$ -divisoras en la colección total. ■

Hemos conjeturado que siempre es posible encontrar una pareja bicolor de cobertura circular al menos un cuarto dada cualquier coloración balanceada de una colección convexa. Observemos que tal pareja debe ser  $\frac{1}{4}$ -divisora y de ahí la importancia de este último resultado.

Nuestras observaciones nos llevan a pensar, además, que esta cota es justa. El siguiente ejemplo muestra una colección bicolor convexa balanceada en la que no hay parejas bicolores de cobertura circular mayor que  $\frac{1}{4}$ .

Consideremos un cuadrado de vértices  $a, b, c, d$  y lados de longitud uno y sea  $k$  un entero positivo. Sean  $\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $\bar{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ ,  $\bar{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  y  $\bar{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ , cuatro conjuntos de  $k$  puntos cada uno. Los puntos de  $\bar{a}$  y  $\bar{c}$  son rojos y los de  $\bar{b}$  y  $\bar{d}$  azules. Colocamos los puntos de  $\bar{a}$  en el segmento  $ab$ , de modo que estén más cercanos al vértice  $a$ , distancia menor que  $\frac{1}{4}$  es suficiente. De la misma manera colocamos los puntos de  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$  en los seg-



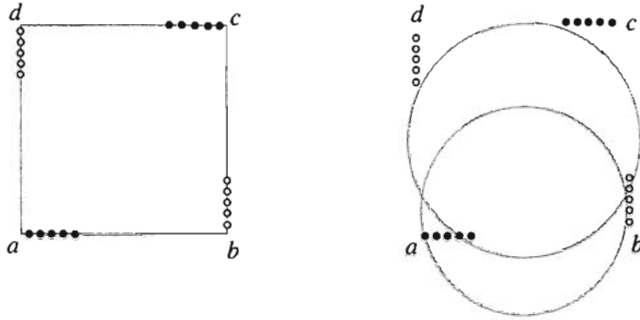


Figura 2.14: No hay parejas bicolors de cobertura circular mayor que  $\frac{1}{4}$ .

mentos  $bc$ ,  $cd$  y  $da$  respectivamente y de modo que estén más cercanos al vértice que corresponde con el nombre del conjunto. Notemos que los vértices del cuadrado no necesariamente forman parte de la colección. Tenemos entonces  $n = 4k$  puntos en posición convexa. La situación descrita se muestra en la Figura 2.14.

Veremos que por cada pareja bicolor siempre es posible encontrar un círculo que pase por ella y cubra a lo más  $k + 1$  puntos. Notemos que las únicas parejas bicolors son aquellas formadas por pares de puntos en lados consecutivos.

Desde luego hay parejas para las cuales la cobertura circular es muy pequeña, por ejemplo las cuatro formadas por puntos consecutivos en el cierre convexo. Tomemos entonces la pareja bicolor  $a_i, b_j$ ,  $1 \leq i, j \leq k$  -por la simetría de la configuración, los otros casos posibles son totalmente análogos- y consideremos el círculo  $\mathcal{C}_{a_i, b_j}$  que pasa por  $a_i$  y  $b_j$  y es tangente al lado  $bc$ . Este círculo únicamente interseca al conjunto  $\bar{b}$  en el punto  $b_j$  y por la distancia a la que colocamos los puntos de los vértices del cuadrado, no interseca a los conjuntos  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$  por lo que a lo más cubrirá al conjunto  $\bar{a} \cup \{b_j\}$ .

Mediante una leve perturbación colocamos los puntos en posición estrictamente convexa (no tres colineales) y el resultado se sigue cumpliendo.

En el capítulo anterior mencionamos que hasta ahora el mejor valor para la fracción de cobertura en colecciones de puntos en posición general es de  $\frac{1}{4.7}$ , y en la Sección 1.4, describimos el procedimiento usado en [12] para obtener este valor. Usando una versión modificada de este procedimiento es posible mejorar un poco la cota del Teorema 2.2.2.

Se trata de construir ciertos diagramas de Voronoi asociados a la colección de puntos. A diferencia del caso sin colores, en que considerábamos las mediatrices de todas las parejas de puntos de la colección, en este caso tomaremos únicamente las mediatrices de parejas bicolores.

Descomponemos cada una de estas rectas en una colección de intervalos ajenos. Recordemos que los puntos están en posición estrictamente convexa y suponemos que no hay cuatro de ellos en un círculo. Entonces para cada par bicolor  $p, q \in P_{2n}$ , hay exactamente  $2n - 2$  círculos de la familia de círculos coaxiales de eje radical  $pq$  que pasan por un tercer punto de la colección. Marcamos el centro de cada uno de ellos en la mediatriz de  $p, q$  obteniendo una colección de  $2n - 1$  intervalos abiertos, dos de los cuales no son acotados. Después se etiqueta cada intervalo  $I$  con un valor entero positivo que indique el número de puntos de  $P_{2n}$  que cubre todo círculo con centro en  $I$ .

Como vimos en el primer capítulo el diagrama de Voronoi de orden  $k$  genera una descomposición del plano en regiones poligonales ajenas cuyas aristas son precisamente aquellos intervalos a los que les corresponde la etiqueta  $k + 1$ .

La intención es dar una estimación del número máximo de aristas que puede tener la unión de los primeros  $k$  diagramas de Voronoi, es decir, los de órdenes 1 a  $k$ . Según el conteo dado en [12], y que presentamos en la expresión 1.2 de la Sección 1.4, se tiene que para una colección de  $2n$  puntos en posición convexa una cota superior para el total de estas aristas es:

$$4kn - \frac{3}{2}(k^2 + k).$$

Hay exactamente  $n^2$  parejas bicolores en  $P_{2n}$ . Entonces hay que encontrar la

máxima  $k$  tal que  $4kn - \frac{3}{2}(k^2 + k) < n^2$ . Es decir, se busca el intervalo de valores de  $k \in [1, n]$  en los cuáles la función  $\phi(k) = 4kn - \frac{3}{2}(k^2 + k) - n^2$  es menor que cero. Resolviendo numéricamente obtenemos que esto es cierto siempre que

$$k < \frac{4}{3}n - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{(8n-8)(5n-1)+1} = \varepsilon_n.$$

Observemos que

$$\frac{\varepsilon_n}{2n} \longrightarrow \frac{4}{6} - \frac{\sqrt{40}}{12} \approx \frac{7}{50}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que tenemos entonces que la relación requerida se tendrá siempre que

$$k < \left\lceil \frac{7n}{25} \right\rceil.$$

Esto quiere decir que, para estos valores de  $k$ , las aristas de la unión de los primeros  $k$  diagramas de Voronoi no alcanzan para cubrir todas las mediatrices entre pares bicolors de la colección. Entonces existe una pareja bicolor de puntos en  $P_{2n}$  para la cual los intervalos de su mediatriz no son aristas de ninguno de los primeros  $k-1$  diagramas de Voronoi pues todas sus etiquetas tienen valores mayores o iguales que  $k$ . O sea que todo círculo por esta pareja cubrirá al menos  $k$  puntos de  $P_{2n}$ , es decir al menos  $\left\lceil \frac{7n}{25} \right\rceil$  (aproximadamente un séptimo del total de los puntos).

### 2.3. Puntos en posición general

Analicemos ahora el caso en que los puntos están en posición general, siguiendo un análisis similar al caso sin colores. Nuevamente consideramos  $\overrightarrow{B}_I$ , la subdigráfica de la digráfica de dominación inducida por los segmentos bicolors de  $P_{2n}$ .

Como antes, queremos contar los cruces de estos segmentos e indicaremos con  $I(P_{2n})$  el número de pares de segmentos que se cruzan. La diferencia esencial para este caso, es que la gráfica que estudiamos es bipartita.

**Lema 2.3.1**  $I(P_{2n}) \geq \left(\frac{\binom{n}{3}}{n-2}\right)^2 = \left(\frac{n(n-1)}{6}\right)^2$

**Demostración.** Por el Teorema de Kuratowski, sabemos que en cualquier dibujo de  $K_{3,3}$  hay al menos un cruce de aristas. Por cada tres puntos rojos y tres puntos azules de  $P_{2n}$ , tenemos una de estas gráficas. En total hay  $\binom{n}{3}^2$ . Cada cruce pertenece exactamente a  $(n-2)^2$  subgráficas  $K_{3,3}$ , una por cada segmento restante. Dividiendo por este número eliminamos las repeticiones y obtenemos el resultado. ■

**Teorema 2.3.2** *Hay un par bicolor de puntos  $p, q \in P_{2n}$  tal que  $cc(p, q) \geq \lceil \frac{n-1}{36} \rceil + 2$ .*

**Demostración.** Notemos que  $\vec{B}_I$  tiene  $I(P_{2n})$  aristas y  $n^2$  vértices por lo que existe un vértice con exgrado al menos  $\frac{I(P_{2n})}{n^2}$ . Aplicando el lema anterior, tenemos

$$\frac{I(P_{2n})}{n^2} \geq \left(\frac{n-1}{6}\right)^2$$

Es decir, hay dos puntos  $p, q$  en la colección, uno de cada color, tales que el segmento que los une, cruza al menos otros  $\lceil \left(\frac{n-1}{6}\right)^2 \rceil$  segmentos. Como cada punto es extremo de a lo más  $n-1$  segmentos, entonces todo círculo por este par de puntos cubre al menos  $\lceil \left(\frac{n-1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{n-1}\right) \rceil = \lceil \frac{n-1}{36} \rceil$ , de los puntos restantes de la colección. Contando también a  $p$  y  $q$  y tenemos el resultado. ■

O sea que la fracción de cobertura para este caso, es de aproximadamente  $\frac{1}{72}$  del total de los puntos.

Usemos nuevamente el procedimiento presentado en [12], ahora tomamos la expresión 1.1 de la Sección 1.4, que establece que para una colección de  $2n$  puntos en posición general una cota superior para el total de estas aristas es:

$$6kn - 3k^2 - 3k.$$

Como hay  $n^2$  parejas bicolores en  $P_{2n}$ , entonces hay que encontrar la máxima  $k$  tal que  $6kn - 3k^2 - 3k < n^2$ . Es decir, se busca el intervalo de valores de  $k \in [1, n]$  en los cuáles la función  $\phi(k) = 6kn - 3k^2 - 3k - n^2$  es menor que cero. Resolviendo numéricamente obtenemos que esto es cierto siempre que

$$k < n - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{(6n-6)(4n-2)} = \varepsilon_n$$

Observemos que

$$\frac{\varepsilon_n}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} \approx \frac{23}{250}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que tenemos entonces que la relación requerida se tendrá siempre que

$$k < \left\lfloor \frac{23n}{125} \right\rfloor.$$

Que es aproximadamente un onceavo del total de los puntos.



## Capítulo 3

# Cobertura circular en conjuntos convexos

### 3.1. Introducción

En este capítulo damos una generalización de la cobertura circular para otros conjuntos en el plano. En adelante, siempre que nos refiramos a un *conjunto plano*, estaremos suponiendo que es un conjunto en  $\mathbb{R}^2$ , compacto, conexo y de interior no vacío.

Un conjunto plano es *convexo* si para cualquier par de puntos en él se tiene que el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, lo llamaremos simplemente *conjunto convexo*.

En los conjuntos planos las medidas que usaremos para cuantificar la cobertura circular, serán el área y el perímetro. Esencialmente seguiremos utilizando la misma notación de los capítulos anteriores.

Como antes, dados un conjunto y una medida, nos interesa encontrar un par de puntos que maximice la cobertura circular y estimar este valor en términos de la medida del conjunto. Es decir, si  $S$  es un conjunto plano y  $\mu$  una medida definida

en él, queremos localizar dos puntos  $a, b \in S$ , en los que el cociente

$$\frac{cc(a, b)}{\mu(S)}$$

sea máximo. Si  $a, b$  realizan tal máximo este cociente es la fracción de cobertura.

Iniciaremos exponiendo los resultados que se pueden inferir fácilmente de los que presentamos para colecciones de puntos. Veremos después que en algunos conjuntos planos la fracción de cobertura es un medio y además éste es el mejor valor que se puede esperar al usar como medida el área o perímetro.

### 3.2. Notación y resultados preliminares

En el primer capítulo hemos presentado los resultados concernientes a colecciones finitas de puntos cuando  $\mu$  es la cardinalidad de la colección. Observemos que estos resultados proporcionan, de forma inmediata, cotas inferiores a la cobertura circular para el caso en que  $\mu$  sea el área o el perímetro de un conjunto plano.

Si  $S$  es un conjunto plano, es fácil observar que una partición de  $S$  induce una colección de puntos en el conjunto al tomar un punto en cada elemento de la partición. Podemos elegir una partición que induzca una colección uniformemente distribuida en  $S$ .

Consideremos, por ejemplo, el rectángulo ortogonal que encierra a  $S$  y en cada uno de los intervalos que lo generan, una partición uniforme. Obtenemos así una cuadrícula que cubre totalmente a  $S$  y lo particiona. Eligiendo un punto en cada cuadrado obtenemos la colección deseada. Mostramos este proceso en la Figura 3.1.

Para cada cuadrícula así definida y cada  $S' \subseteq S$ , denotamos por  $\Pi(S')$  a la colección de puntos que induce en  $S'$ . Ahora bien, una vez que obtuvimos de esta manera una colección de puntos  $\Pi(S)$ , podemos obtener una nueva colección



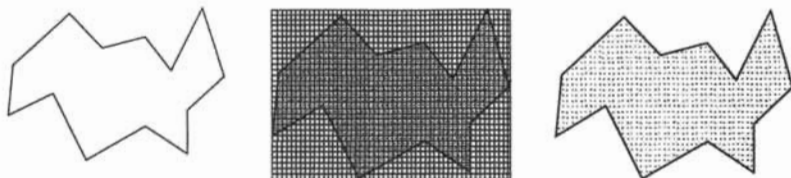


Figura 3.1: Una colección uniforme de puntos en un conjunto plano.

uniformemente distribuida en  $S$  y que contenga a  $\Pi(S)$  mediante un refinamiento uniforme de la partición original.

La siguiente observación es evidente.

**Observación 3.2.1** Sean  $\mu$  el área o el perímetro,  $S' \subset S$  y  $\Pi(S)$  la colección de puntos en  $S$  inducida por una cuadrícula como la descrita antes. Haciendo tender a cero la norma de la partición en cada intervalo del rectángulo que circunscribe a  $S$  se tiene que  $|\Pi(S)| \rightarrow \infty$  y

$$\frac{|\Pi(S')|}{|\Pi(S)|} \rightarrow \frac{\mu(S')}{\mu(S)}.$$

Como vimos anteriormente, el mejor valor que se ha obtenido para la fracción de cobertura en colecciones de puntos -usando como medida la cardinalidad- es  $\frac{1}{4.7}$ . Este es el resultado principal de [12] (Teorema 1.4.6 de esta tesis), que en términos de cobertura circular afirmaríamos que en cualquier colección  $P_n$  - $n$  puntos en posición general en el plano- existen dos puntos  $a, b \in P_n$  cuya cobertura circular respecto a la cardinalidad es al menos  $\lceil \frac{n}{4.7} \rceil$ . O sea que si  $a, b$  es una pareja que maximiza la cobertura circular en  $P_n$ , entonces

$$\frac{cc(a, b)}{|P_n|} = \frac{\lceil \frac{n}{4.7} \rceil}{n} \geq \frac{1}{4.7}.$$

Tenemos entonces, una cota inferior para la fracción de cobertura respecto al área y perímetro en un conjunto plano.

Denotaremos con  $\mathcal{A}(S)$  al área del conjunto  $S$  y con  $\mathcal{P}(S)$  a su perímetro. Recordemos que  $ab$  indica el segmento que une a los puntos  $a$  y  $b$ , en ocasiones, lo designamos con una sola letra, por ejemplo  $l = ab$ ,  $\mathcal{C}_{ab}$  es un círculo que pasa por los puntos  $a$  y  $b$  y nos referimos a él simplemente como *un círculo por  $ab$* . Al círculo de diámetro  $ab$ , lo designamos como  $\mathcal{D}_{ab}$  (ó  $\mathcal{D}_l$  si  $l = ab$ ).

**Corolario 3.2.1** (del Teorema 1.4.6) *En cualquier conjunto plano la fracción de cobertura respecto al área es al menos  $\frac{1}{4.7}$ .*

**Demostración.** Sean  $S$  un conjunto plano,  $\Pi_1(S) = \Pi(S)$  una colección uniformemente distribuida de puntos en  $S$  inducida por una cuadrícula como la descrita antes y  $n_1 = |\Pi_1(S)|$ .

Por el Teorema 1.4.6 sabemos que existen dos puntos  $a_1, b_1 \in \Pi_1(S)$  tales que  $\forall \mathcal{C}_{a_1 b_1}$ , círculo por ellos, se tiene que  $|\Pi_1(\mathcal{C}_{a_1 b_1} \cap S)| \geq \frac{n_1}{4.7} = \frac{|\Pi_1(S)|}{4.7}$ , o dicho de otra manera,  $\frac{|\Pi_1(\mathcal{C}_{a_1 b_1} \cap S)|}{|\Pi_1(S)|} \geq \frac{1}{4.7}$ .

Refinando la partición inicial se obtiene una nueva colección de puntos a la que denotamos como  $\Pi_2(S)$  que cumple que  $\Pi_2(S) \supset \Pi_1(S)$  y, obviamente,  $n_2 > n_1$ . Nuevamente, del Teorema 1.4.6, sabemos de la existencia de  $a_2, b_2 \in \Pi_2(S)$  que cumplen que  $\frac{|\Pi_2(\mathcal{C}_{a_2 b_2} \cap S)|}{|\Pi_2(S)|} \geq \frac{1}{4.7}, \forall \mathcal{C}_{a_2 b_2}$ .

Considerando una sucesión de refinamientos uniformes -por ejemplo dividiendo en cada paso a la mitad los intervalos de la partición- obtenemos una familia  $\{\Pi_i(S)\}$  de colecciones de puntos en  $S$ , cada una de ellas uniformemente distribuida y tales que  $\Pi_{i+1}(S) \supset \Pi_i(S)$ .

Sabemos que para cada colección de estas existe una pareja  $a_i, b_i$  que realiza el teorema, por lo que se obtienen dos sucesiones de puntos en  $S$ . Como es compacto cada una de las sucesiones contiene una subsucesión que converge a un cierto límite al hacer tender a cero la norma de la partición. Digamos que tales subsucesiones son  $\{a_j\}$  y  $\{b_j\}$  y sus límites respectivos son los puntos  $a$  y  $b$ . La compacidad de  $S$  garantiza además que ambos límites sean puntos en el conjunto.

Consideremos ahora,  $\mathcal{C}_{ab}$ , un círculo por estos puntos. Como  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$  y

$\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = b$ , entonces existen algún  $k \in \mathbb{N}$  y  $C_{a_k b_k}$  un círculo por el par  $a_k, b_k$  tales que  $\Pi_j(C_{ab} \cap S) \supseteq \Pi_j(C_{a_k b_k} \cap S) \forall j \geq k$ . Y como

$$\frac{|\Pi_j(C_{a_k b_k} \cap S)|}{|\Pi_j(S)|} \geq \frac{1}{4.7}, \forall j \geq k,$$

entonces también

$$\frac{|\Pi_j(C_{ab} \cap S)|}{|\Pi_j(S)|} \geq \frac{1}{4.7}, \text{ si } j \geq k.$$

De la Observación 3.2.1:

$$\frac{1}{4.7} \leq \frac{|\Pi_j(C_{ab} \cap S)|}{|\Pi_j(S)|} \rightarrow \frac{\mathcal{A}(C_{ab} \cap S)}{\mathcal{A}(S)} \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

de donde  $\frac{\mathcal{A}(C_{ab} \cap S)}{\mathcal{A}(S)} \geq \frac{1}{4.7}$  para cualquier círculo por  $a$  y  $b$ . ■

Cuando la medida utilizada es el perímetro del conjunto es posible obtener la misma fracción usando un razonamiento semejante: colocamos ahora los puntos uniformemente en la frontera del conjunto. Sin embargo, en este caso es posible obtener una mejor aproximación si el conjunto es convexo. Usando el resultado principal de [10] para puntos en posición convexa (Teorema 1.2.4 de esta tesis) y obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.2** (del Teorema 1.2.4) *En cualquier conjunto convexo la fracción de cobertura respecto del perímetro es al menos  $\frac{1}{3}$ .*

En este trabajo demostraremos que la cota inferior para la fracción de cobertura respecto de ambas medidas es un medio y exhibiremos conjuntos que la realizan. La terminología utilizada se resume en la Figura 3.2. Los dos semiplanos abiertos definidos por la recta  $\rho_{ab}$  son  $\Sigma(ab)$  y  $\Sigma(ba)$ .

En  $C_{ab}$ , el segmento  $ab$  determina las regiones:

$$\mathcal{C}(ab) = \widehat{C}_{ab} \cap \Sigma(ab) \text{ y } \mathcal{C}(ba) = \widehat{C}_{ab} \cap \Sigma(ba),$$

donde  $\widehat{C}_{ab}$  indica el círculo  $C_{ab}$  y su interior. Definimos también:

$$S(ab) = S \cap \Sigma(ab) \text{ y } S(ba) = S \cap \Sigma(ba).$$

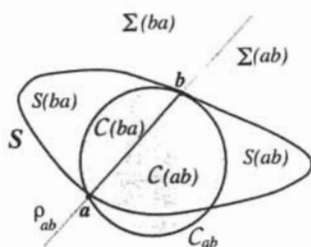


Figura 3.2: Los conjuntos definidos por  $ab$  en  $S$  y  $C_{ab}$ .

Enunciamos aquí un lema muy útil que se usa con frecuencia en este capítulo. Se deduce inmediatamente de la observación de la Figura 3.3.

**Lema 3.2.3** *Dado un círculo  $C'_{ab}$  se cumple la siguiente condición:*

$$\forall C_{ab}, \text{ se tiene que } C(ab) \supset C'(ab) \text{ ó } C(ba) \supset C'(ba).$$

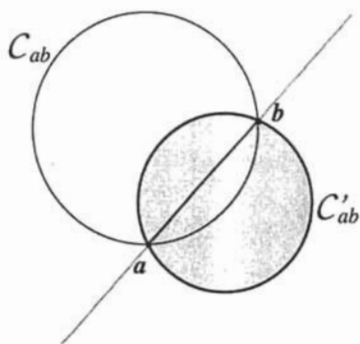


Figura 3.3: Cualquier círculo por  $ab$  contiene a  $C'(ab)$  ó a  $C'(ba)$

Así, al estimar la cobertura circular de  $a, b$  en  $S$  respecto a  $\mu$ , dado algún

círculo  $C_{ab}$ , tendremos una cota inferior:

$$cc(a, b) \geq \min\{\mu(S(ab) \cap C_{ab}), \mu(S(ba) \cap C_{ab})\},$$

pues cualquier otro círculo contendrá a  $S(ab) \cap C_{ab}$  ó a  $S(ba) \cap C_{ab}$ .

También es posible dar una cota superior, según se establece en el lema siguiente. Este es consecuencia inmediata de la definición de cobertura circular.

**Lema 3.2.4** *Si existe un círculo  $C_{ab}$  que cubra una cierta cantidad  $\mu_0$  de  $S$ , es decir  $\mu_0 = \mu(C_{ab} \cap S)$ , entonces  $cc(a, b) \leq \mu_0$ .*

Recordemos que una *cuerda* de un conjunto plano es un segmento cuyos extremos son, ambos, puntos en la frontera del conjunto.

**Definición 3.2.5** *Sea  $S$  un conjunto plano. Una cuerda  $\mu$ -bisectora es una cuerda que divide a  $S$  en dos conjuntos  $S_1, S_2$  tales que  $\mu(S_1) = \mu(S_2)$ .*

Las parejas de puntos que buscamos para maximizar la cobertura circular en un conjunto plano  $S$  son justamente las que determinan cuerdas  $\mu$ -bisectoras en  $S$ . La razón se hace evidente en el siguiente resultado que es consecuencia inmediata del lema anterior.

**Teorema 3.2.6** *Si  $S$  es un conjunto plano y  $\mu$  el área o perímetro entonces para todo par de puntos  $a, b \in S$  se tiene que  $cc(a, b) \leq \frac{1}{2}\mu(S)$ .*

**Demostración.** Al considerar todos los círculos que pasan por una cuerda  $ab$  de  $S$  estamos estudiando la familia de círculos coaxiales con eje radical  $ab$ . En el límite de ésta familia -cuando el radio tiende a infinito- estos círculos son los semiplanos  $\Sigma(ab)$  y  $\Sigma(ba)$  que, evidentemente, cubren la mitad (del área o perímetro) del conjunto  $S$ .

Si  $ab$  es  $\mu$ -bisectora, tendremos que  $\mu(S(ab)) = \mu(S(ba)) = \frac{1}{2}\mu(S)$  y como en el límite la cobertura circular es  $\frac{1}{2}\mu(S)$  entonces, del Lema 3.2.4 se tiene que  $cc(a, b) \leq \frac{1}{2}\mu(S)$ . ■

Así, el mejor valor que podemos esperar para la fracción de cobertura -tanto respecto al área como al perímetro- es precisamente un medio. Demostraremos que este valor es exacto en los conjuntos centralmente simétricos y en los triángulos. Estas familias de convexos representan los extremos bajo cualquier medida de simetría ([24]).

Conjeturamos que este mismo valor acota inferiormente a la fracción de cobertura para estas medidas en cualquier conjunto convexo.

### 3.3. Cobertura circular en conjuntos centralmente simétricos

Iniciamos con el estudio de la cobertura circular en conjuntos planos centralmente simétricos. La notación y terminología de la Teoría de Convexidad ha sido tomada de [24].

**Definición 3.3.1** *Un conjunto plano,  $S$ , es centralmente simétrico si tiene un centro de simetría, esto es, un punto  $O \in S$  que biseca a todas las cuerdas que pasan por él.*

Es inmediato que el centro de simetría es un punto interior de  $S$ . Una recta  $\rho$ , es llamada *recta soporte de  $S$*  si pasa por al menos un punto en la frontera de  $S$  y el conjunto queda totalmente contenido en uno de los dos semiplanos que  $\rho$  determina. Dos puntos en la frontera de  $S$  son *antípodos* si por ellos pasan dos rectas soporte paralelas. Observemos para cada punto en un círculo corresponde otro único punto con el cual se forma una pareja de antípodos. Estos pares son precisamente los extremos de las cuerdas de longitud máxima.

El *diámetro* de un conjunto plano  $S$  es la máxima distancia entre pares de puntos de  $S$ . Es evidente que si un par de puntos realiza el diámetro entonces ambos puntos se encuentran en la frontera del conjunto.

### 3.3. COBERTURA CIRCULAR EN CONJUNTOS CENTRALMENTE SIMÉTRICOS 59

Si  $S$  es un conjunto centralmente simétrico con centro de simetría  $O$ , para cualquier punto  $a \in S$  se define el punto simétrico de  $a$  de la siguiente manera: consideramos el círculo con centro  $O$  y radio  $Oa$ , el punto antípoda de  $a$  en este círculo es el simétrico de  $a$ .

Notemos que un par de puntos simétricos que pertenecen a la frontera de un conjunto centralmente simétrico es también un par de antípodas (pero no al revés).

No es difícil verificar que si  $a, b$  son dos puntos que realizan el diámetro de un conjunto centralmente simétrico entonces  $ab$  es una cuerda que pasa por  $O$  (pues de otro modo habría otro par de puntos a mayor distancia) y por lo tanto  $O$  biseca a  $ab$  (Figura 3.4). Además, en los conjuntos centralmente simétricos todas

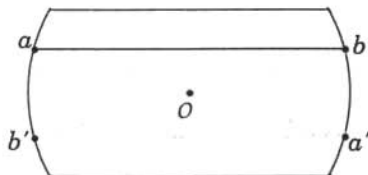


Figura 3.4: Todo diámetro pasa por el centro de simetría.

las cuerdas que pasan por el centro de simetría son área-bisectoras y perímetro-bisectoras ([24]).

Volviendo a nuestro objetivo inicial, recordemos que nos interesa encontrar en  $S$  una pareja de puntos que maximice la cobertura circular cuando  $\mu$  es el área o el perímetro del conjunto. El siguiente resultado es válido para cualquier conjunto plano centralmente simétrico aún si no es convexo. Funciona para ambas medidas.

**Teorema 3.3.2** *Sea  $S$  un conjunto plano centralmente simétrico. La fracción de cobertura en  $S$  respecto del área y el perímetro es al menos  $\frac{1}{2}$ .*

**Demostración.** Sean  $a, b$  dos puntos que realicen el diámetro de  $S$ ,  $ab$  es una cuerda área-bisectora y perímetro-bisectora de  $S$ .

El círculo  $\mathcal{D}_{ab}$  cubre a  $S$  pues, si hubiera un punto fuera, también estaría fuera su respectivo punto simétrico con lo que tendríamos un par de puntos a distancia mayor que  $ab$  contradiciendo que ésta es la máxima distancia posible en  $S$ .

Entonces  $\mathcal{D}(ab) \supset S(ab)$  y  $\mathcal{D}(ba) \supset S(ba)$ , cubriendo así, la mitad del área y la mitad del perímetro de  $S$ . Finalmente, por el Lema 3.2.3, dado cualquier otro círculo  $\mathcal{C}_{ab}$  se tiene que  $\mathcal{D}(ab) \subset \mathcal{C}(ab)$  ó  $\mathcal{D}(ba) \subset \mathcal{C}(ba)$  y por tanto cubre al menos la mitad del área y perímetro de  $S$ . ■

Como consecuencia inmediata de este teorema y el Teorema 3.2.6, tenemos el siguiente resultado que se infiere al observar la cobertura circular de las cuerdas que realizan el diámetro.

**Corolario 3.3.3** *La fracción de cobertura en un conjunto centralmente simétrico respecto al área y el perímetro es un medio.*

No sabemos si habrá más parejas de puntos con esta propiedad en estos conjuntos. Sabemos que tales parejas deben definir cuerdas bisectoras y resulta intuitivamente claro que son más convenientes aquellas que son “suficientemente largas”, como los diámetros, pues si la cuerda es *muy pequeña*, podría haber algún círculo que no cubriese suficiente como mostramos en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 1** *Consideremos el rectángulo  $\mathcal{R}$ , de ancho  $d$  y diámetro  $2d$  (Figura 3.5). Sea  $w$  la cuerda área-bisectora que realiza el ancho (la distancia mínima entre pares de rectas soporte paralelas).*

Consideremos el círculo  $\mathcal{D}_w$ . Es evidente que este círculo no cubre en absoluto al perímetro de  $\mathcal{R}$ . Para revisar la cobertura respecto del área observemos que  $\mathcal{D}_w \subset \mathcal{R}$  por lo que:

$$cc(w) \leq \mathcal{A}(\mathcal{D}_w \cap \mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_w) = \pi \frac{d^2}{4}$$



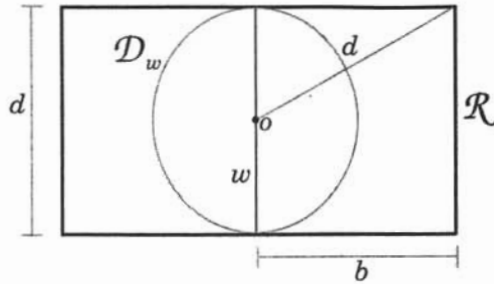


Figura 3.5: Un conjunto centralmente simétrico y una cuerda de cobertura circular pequeña.

entonces, la proporción del área de  $\mathcal{R}$  que es cubierta por  $\mathcal{D}_w$  está dada por el cociente:

$$\frac{A(\mathcal{D}_w)}{A(\mathcal{R})}.$$

La base del rectángulo es  $2b$ , como se indica en la Figura 3.5, donde  $2b = \sqrt{3}d$  por lo que  $A(\mathcal{R}) = \sqrt{3}d^2$ .

Tenemos que,

$$\frac{A(\mathcal{D}_w)}{A(\mathcal{R})} = \frac{\pi \frac{d^2}{4}}{\sqrt{3}d^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} < \frac{1}{2}.$$

Del Lema 3.2.4, se sigue que  $cc(w) < \frac{1}{2}A(\mathcal{R})$ .

## 3.4. Cobertura circular en triángulos

### 3.4.1. Respecto al área

En los triángulos también se tiene que la fracción de cobertura respecto al área es un medio. Nuevamente haremos uso del Lema 1.3.1.

**Teorema 3.4.1** Sea  $T$  un triángulo, la fracción de cobertura respecto del área en  $T$  es al menos  $\frac{1}{2}$ .

**Demostración.** Sean  $a, b, c$  los vértices de  $T$ , supongamos que  $\sphericalangle b$  es el ángulo de menor magnitud y sea  $m$  el punto medio del lado  $ca$  (Figura 3.6). Notemos que

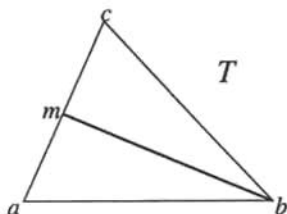


Figura 3.6: Una mediana del triángulo  $T$  incidente en el ángulo mínimo.

$bm$  es una mediana de  $T$  y por tanto lo divide en dos triángulos de la misma área. Demostraremos que los puntos  $b$  y  $m$  cumplen que  $cc(b, m) \geq \frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ . Para ello veremos que todo círculo por ellos cubre al menos  $\mathcal{A}(T)$ .

Sea  $C_{bm}$  un círculo por  $bm$ . Si  $C_{bm}$  contiene alguno de los vértices  $a$  ó  $c$ , terminamos, pues  $\mathcal{A}(\triangle abm) = \mathcal{A}(\triangle bcm) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ . Supongamos entonces que éste no es el caso.

Sean  $k$  y  $l$  los puntos medios de los lados  $ab$  y  $bc$  respectivamente. Sabemos que para cada par de puntos medios, el segmento que los une es paralelo al lado en que se encuentra el tercer punto medio. Entonces, mediante un sencillo argumento de semejanza podemos comprobar que los triángulos definidos por estos segmentos son congruentes y por tanto tienen la misma área (Figura 3.7 (A)),  $\triangle blk, \triangle lcm, \triangle kma$  y  $\triangle lmk$ .

Entonces, el cuadrilátero  $kblm$  es un paralelogramo y tiene área  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ . En él los ángulos incidentes a  $b$  y  $m$  son iguales y como  $\sphericalangle b$  es el mínimo de  $T$  entonces

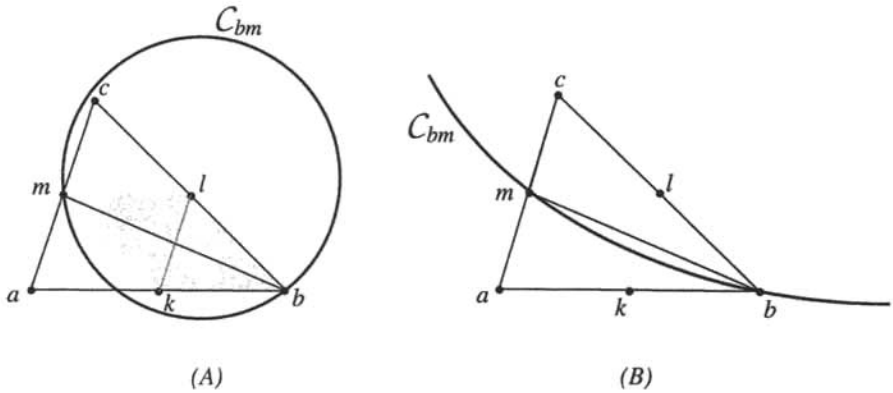


Figura 3.7: De la demostración del Teorema 3.4.1.

$\sphericalangle b + \sphericalangle m < \pi$  por lo que del Lema 1.3.1 sabemos que  $C_{bm}$  cubre a  $k$  ó  $l$ . Si cubriese a ambos contiene al cuadrilátero  $kblm$  y terminamos (Figura 3.7 (A)).

Si sólo cubre a uno de ellos, digamos a  $l$  pero no a  $k$ , consideramos el cuadrilátero  $kbcm$ . Como  $km$  y  $bc$  son paralelos, entonces

$$\sphericalangle b + \sphericalangle m = \sphericalangle b + \pi - \sphericalangle c = 2\sphericalangle b + \sphericalangle a < \pi,$$

por la minimalidad de  $\sphericalangle b$ . Nuevamente el Lema 1.3.1 asegura que  $C_{bm}$  cubre a  $k$  ó  $c$  que son opuestos en este cuadrilátero, sin embargo, supusimos que no cubriría a  $k$  por lo que cubre a  $c$  y por tanto al triángulo  $\triangle bcm$  (Figura 3.7 (B)).

Análogamente, si  $C_{bm}$  cubriese a  $l$  y no a  $k$  se considera el cuadrilátero  $blma$  y mediante un razonamiento similar se concluye que  $C_{bm}$  debe cubrir al vértice  $a$  y por tanto al triángulo  $\triangle abm$ . En ambos casos se obtiene el resultado con los puntos  $b$  y  $m$ . ■

Como consecuencia inmediata de este resultado y del Teorema 3.2.6, tenemos el siguiente.

**Corolario 3.4.2** *La fracción de cobertura en un triángulo respecto al área es un medio.*

En los conjuntos centralmente simétricos, los puntos que maximizan la cobertura determinan cuerdas área-bisectoras y perímetro-bisectoras de longitud máxima. Este hecho no es casual pues para los triángulos los puntos que exhibimos también son extremos de una cuerda área-bisectora y, como veremos, también es de longitud máxima.

Sean  $\alpha \in (0, \pi)$  y  $\mathcal{L}$  el rayo que parte del origen y forma el ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ . Dado un número real positivo,  $A$ , definimos  $\mathcal{T}_\alpha(A)$  como la familia de todos los triángulos de vértices  $\bar{o}, a, b$  y área  $A$ , donde  $\bar{o}$  es el origen,  $a$  un punto en la parte positiva del eje  $x$  y  $b \in \mathcal{L}$  (Figura 3.8).

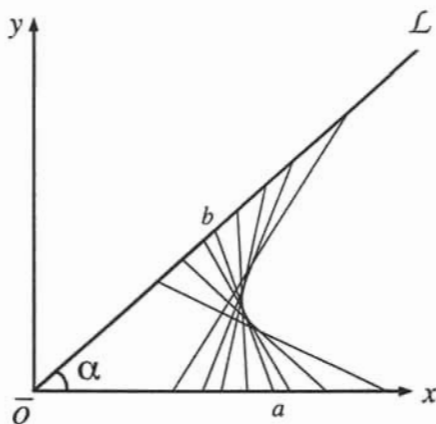


Figura 3.8:  $\mathcal{T}_\alpha(A)$ , cada terna  $(\bar{o}, a, b)$ , define un triángulo de ángulo  $\alpha$  y área  $A$ .

**Lema 3.4.3** Si  $\alpha \in (0, \pi)$ , en  $\mathcal{T}_\alpha(A)$  el triángulo cuyo lado opuesto a  $\alpha$  tiene longitud mínima es el isósceles de lados  $\bar{oa} = \bar{ob}$ .

**Demostración.** Sean  $s = d(\bar{o}, a)$  y  $t = d(\bar{o}, b)$ , entonces las coordenadas de los puntos  $a$  y  $b$  están dadas como  $a = (s, 0)$ ,  $b = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)$ , y en estos términos  $A = \frac{1}{2}st \sin \alpha$ . La longitud del segmento  $ab$  está dada por la expresión

$$d(a, b) = \sqrt{(s - t \cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} d(a, b)^2 &= (s - t \cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha \\ &= s^2 - 2st \cos \alpha + t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha \\ &= s^2 - 2st \cos \alpha + t^2 \end{aligned}$$

Notemos que  $t = \frac{2A}{s \sin \alpha}$ , sustituyendo, tenemos

$$d(a, b)^2 = s^2 - 2 \left( \frac{2A}{\sin \alpha} \cos \alpha \right) + \left( \frac{2A}{s \sin \alpha} \right)^2$$

Consideremos la función  $f(s) = d(a, b)^2$  y observemos que  $\frac{dt}{ds} = \frac{-2A}{s^2 \sin \alpha}$ . De donde  $f'(s) = 2s - 2 \left( \frac{4A^2}{s^3 \sin^2 \alpha} \right)$ .

Igualando a cero,

$$\begin{aligned} f'(s) &= 0 \Leftrightarrow s^4 \sin^2 \alpha - 4A^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow s^4 = \frac{4A^2}{\sin^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow s = \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}} \end{aligned}$$

Como en este contexto,  $s > 0$ , entonces  $f$  tiene un único punto crítico. Luego  $f''(s) = 2 + \frac{24A^2}{s^4 \sin^2 \alpha} > 0$  y por tanto es un mínimo.

Así, si  $s = \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}} \Rightarrow t = \frac{1}{s} \frac{2A}{\sin \alpha} = \frac{s^2}{s} = s$ . Por lo que este mínimo se alcanza cuando  $s = t$  es decir cuando tenemos un triángulo isósceles con lados  $\bar{oa} = \bar{ob}$ . ■

Sabemos que en cualquier paralelogramo hay una diagonal que es una cuerda área-bisectora de longitud máxima. Usamos este hecho en la demostración del resultado siguiente.

**Teorema 3.4.4** *Sea  $P$  un polígono convexo en el plano y  $u, v$ , los extremos de una cuerda área-bisectora de longitud máxima, entonces al menos uno de estos puntos es vértice de  $P$ .*

**Demostración.** Supongamos que el resultado es falso, es decir,  $u$  y  $v$  son extremos de una cuerda área-bisectora de longitud máxima y ambos son puntos interiores de dos aristas de  $P$  a las que llamaremos  $e_u$  y  $e_v$  respectivamente. Hay dos casos posibles.

1. Las aristas son paralelas.

Moviendo continuamente  $uv$  de modo que se preserve la propiedad de bisección del área obtenemos una colección infinita de cuerdas área-bisectoras. Si  $o$  es el punto medio de  $uv$ , podemos entender este movimiento como fijar el punto  $o$  y girar el segmento. Detenemos este proceso al llegar a alguno de los vértices de  $e_u$  ó  $e_v$ . Sean  $u'$  el extremo de esta cuerda en  $e_u$  y  $v'$  el que está en  $e_v$ . No es difícil comprobar que  $\Delta uou' \approx \Delta v'vo$  lo cual comprueba que efectivamente  $u'v'$  es área-bisectora en  $P$  (Figura 3.9 (A)).

Consideremos la recta paralela a  $uv$  que pasa por el punto  $u'$  y se  $v''$  el punto en que cruza a  $e_v$ . Análogamente, sea  $u''$  el punto en que cruza a  $e_u$  una recta paralela a  $uv$  y que pasa por  $v'$ .

Tenemos entonces que el cuadrilátero  $u''v''v'u'$  es un paralelogramo del cual  $uv$  es cuerda área-bisectora y  $u'v'$  es una de sus diagonales. La otra diagonal es  $u''v''$  que evidentemente también biseca al paralelogramo pero, no es muy difícil constatar que esta también es una cuerda área-bisectora de  $P$  pues  $\Delta ov'v'' \approx \Delta ou'u''$ . Como observamos antes del teorema, alguna de las dos diagonales es cuerda área-bisectora de longitud máxima en el paralelogramo

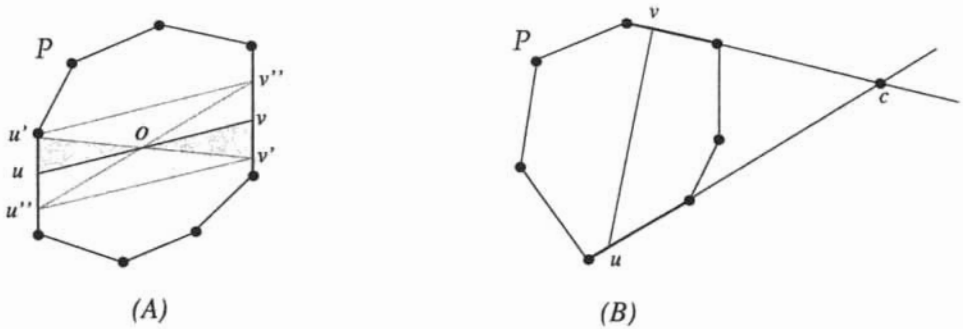


Figura 3.9: De la demostración del Teorema 3.4.4

por lo que tiene longitud mayor que  $uv$  y como ya vimos que también biseca el área de  $P$ , estaríamos exhibiendo una cuerda área-bisectora de mayor longitud contradiciendo la maximalidad de  $uv$ .

2. Si las aristas no son paralelas.

Entonces las rectas que las contienen se cruzan en un punto  $c$  y formando un triángulo con  $uv$ . Moviendo continuamente  $uv$  de modo que se preserve la propiedad de bisección de área, se obtiene una familia infinita de triángulos de la misma área y todos con el mismo ángulo incidente en  $c$  (Figura 3.9 (B)).

Por el Lema 3.4.3 sabemos que hay un único mínimo para la longitud del segmento  $uv$ . Así, existe alguna dirección hacia la cual podemos mover  $uv$  para obtener una cuerda área-bisectora de mayor longitud. En cualquier dirección elegida, eventualmente se llega a un vértice de  $P$  y se obtiene una cuerda área-bisectora más larga, contradiciendo la maximalidad de  $uv$ .



Entonces, en un triángulo únicamente las medianas son las posibles cuerdas área-bisectoras de longitud máxima. El siguiente corolario es evidente.

**Corolario 3.4.5** *Una mediana de longitud máxima en un triángulo, es una cuerda área-bisectora de longitud máxima.*

Por tanto si queremos encontrar otros pares de puntos en el triángulo que realicen la cobertura máxima respecto al área es natural que revisemos las medianas.

En la demostración del Teorema 3.4.1 usamos los extremos de la mediana más larga o sea la cuerda área-bisectora de longitud máxima. En triángulos equiláteros e isósceles hay longitudes repetidas pero, aún si las tres medianas tienen longitudes distintas ¿habrá otra que sirva, además de la más larga? es decir ¿cuándo una mediana es *suficientemente larga*? ¿cuál es la longitud que debe tener para que sus extremos tengan una gran cobertura circular respecto del área?.

Demostraremos que en cualquier triángulo las medianas que miden al menos la mitad del diámetro -esto es, la longitud del lado más grande- son cuerdas cuyos extremos tienen cobertura circular respecto al área, mayor o igual que la mitad. Para esto es de gran utilidad el lema siguiente.

**Lema 3.4.6** *Sean  $u, v$  dos puntos,  $C_1, C_2$  dos círculos por ellos y  $\rho_u, \rho_v$ , un par de rectas paralelas que pasan respectivamente por  $u$  y  $v$  y no son ortogonales a  $uv$ , existen dos trapecios de igual área y con diagonal  $uv$ , inscritos uno en  $C_1$  y otro en  $C_2$ .*

**Demostración.** Supongamos primero que ninguna de las rectas es tangente a alguno de los círculos dados, entonces cada recta cruza a cada círculo en dos puntos. Sean  $u_1, u_2$  los puntos de intersección, distintos de  $u$ , de la recta  $\rho_u$  con  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Análogamente  $v_1, v_2$  son los puntos que corresponden a  $\rho_v$  (Figura 3.10).

En el círculo  $C_1$  hay un cuadrilátero inscrito,  $Q_1 = vv_1uu_1$ , que es un trapecio isósceles: los lados  $uu_1$  y  $vv_1$  son paralelos por lo que los ángulos  $\sphericalangle vv_1u$  y



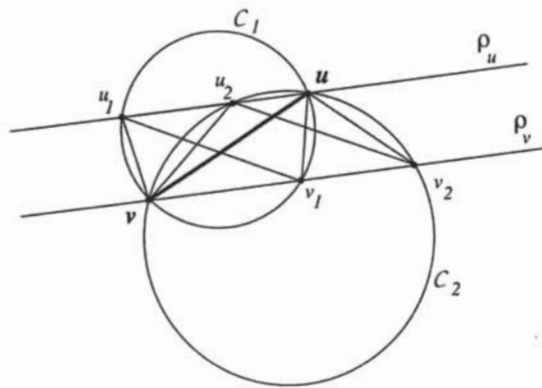


Figura 3.10: Los dos círculos cruzan ambas rectas

$\sphericalangle u_1 v_1$  son iguales. Entonces las diagonales de este trapecio,  $uv$  y  $u_1 v_1$ , tienen la misma longitud.

En  $C_2$  identificamos otro trapecio isósceles,  $Q_2 = vv_2uu_2$ , que también tiene como una de sus diagonales  $uv$ , la otra es el segmento  $u_2v_2$ . Por transitividad  $u_1v_1$  y  $u_2v_2$  tienen la misma longitud además se encuentran entre rectas paralelas por lo que son paralelos también y por tanto  $u_2u_1 = v_1v_2$ . Finalmente notemos que  $u_1v = v_1u$  y  $v_2u = u_2v$  pues son los pares de lados iguales de  $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente. De aquí obtenemos que  $\triangle v_1v_2u \approx \triangle v_2u_2u_1$  y por tanto los dos

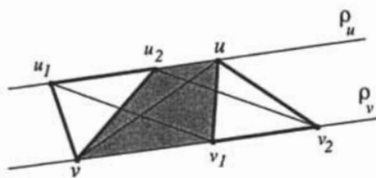


Figura 3.11: La región sombreada es el cuadrilátero  $K$ .

tienen la misma área.

El cuadrilátero  $K = vv_1uu_2$  es la intersección de los dos trapecios mostrados:  $Q_1 = K \cup \Delta vu_2u_1$  y  $Q_2 = K \cup \Delta v_1v_2u$ , y así  $\mathcal{A}(Q_1) = \mathcal{A}(Q_2)$  (Figura 3.11). Ahora veamos el caso en que alguno de los círculos es tangente a alguna de las

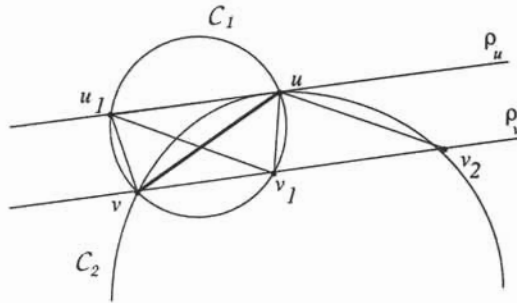


Figura 3.12: La recta  $\rho_u$  es tangente al círculo  $C_2$

rectas dadas. Digamos que  $C_2$  es tangente a  $\rho_u$ , por lo que la cruza sólo en el punto  $u$  (Figura 3.12). Entonces  $C_2$  contiene inscrito el triángulo  $\Delta vv_2u$ , en él, uno de sus lados iguales es precisamente  $uv$ . Basta demostrar que este triángulo tiene la

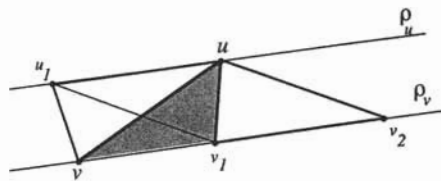


Figura 3.13: Uno de los trapecios degenera en triángulo.

misma área que  $Q_1$ .

Esto es consecuencia del argumento de semejanza que usamos antes haciendo notar que ahora  $u_2 = u$ . De aquí  $u_1v_1 = uv_2$ ,  $uu_1 = v_1v_2$ , y  $u_1v = v_1u$ , por lo tanto  $\Delta vuu_1 \approx \Delta v_1v_2u$  por lo que los dos tienen la misma área.

Notemos que  $Q_1 = \Delta vv_1u \cup \Delta vuu_1$  y  $\Delta vv_2u = \Delta vv_1u \cup \Delta v_1v_2u$ , por lo tanto  $\mathcal{A}(Q_1) = \mathcal{A}(\Delta vv_2u)$  (Figura 3.13). ■

Denotaremos por  $\mathcal{F}_{uv}$  a la familia de círculos coaxiales con eje radical  $uv$ . Como consecuencia de este lema, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.4.7** *Dados  $u, v, \rho_u$  y  $\rho_v$  como en el lema anterior,  $\mathcal{F}_{uv}$  induce una colección infinita de trapecios isósceles de área constante. Cada uno de ellos tiene como una de sus diagonales al segmento  $uv$ .*

En la demostración del lema anterior vimos que no todo círculo de  $\mathcal{F}_{uv}$  contie-

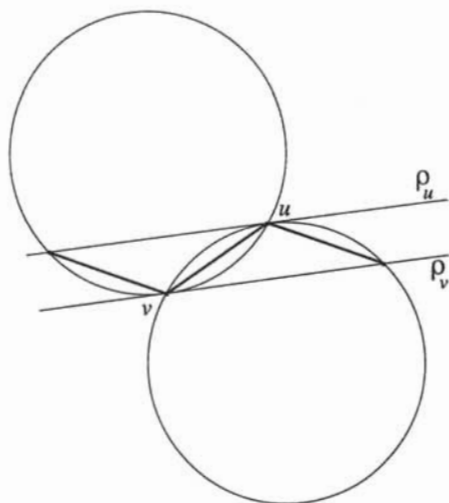


Figura 3.14: Los círculos extremos de  $\mathcal{F}_{uv}$

ne un trapecio como los descritos en el corolario. Hay dos círculos “distinguidos”

en la familia: los tangentes a  $\rho_u$  y  $\rho_v$  respectivamente ambos tienen el mismo radio pues son simétricos respecto a  $uv$  (Figura 3.14).

Estos son los *círculos extremos* de la familia pues, como vimos, cada uno de ellos induce precisamente el caso “extremo” de trapecio: cuando degenera en un triángulo isósceles en que uno de sus lados iguales es el segmento  $uv$ . Estos triángulos también tienen la misma área de los trapecios. Los círculos de radio mayor no tienen más de estos trapecios.

La siguiente es una útil observación que es cierta para cualquier triángulo y se deduce fácilmente al revisar la Figura 3.15.

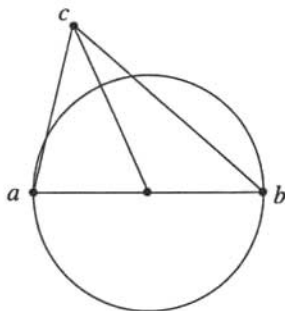


Figura 3.15: La mediana incidente a un ángulo agudo.

En lo sucesivo, denotaremos por  $T$  a un triángulo de vértices  $a, b, c$  y en el que el diámetro,  $d$ , es la longitud del lado  $ab$ .

**Observación 3.4.1** Una mediana incide en un ángulo agudo (es decir, de magnitud a lo más  $\frac{\pi}{2}$ ) sí y sólo si mide al menos la mitad de la longitud del lado opuesto.

Ahora pasemos al resultado acerca de las medianas suficientemente largas en triángulos.

**Teorema 3.4.8** Los extremos de una mediana de longitud al menos  $\frac{1}{2}d$  tienen cobertura circular, respecto del área, mayor o igual que  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ .

**Demostración.** Sean  $k, l, m$  los puntos medios de  $ab, bc$  y  $ca$  respectivamente (Figura 3.16). Supongamos que  $ck \geq \frac{1}{2}d$  -esto se indica en la figura con el semicírculo de diámetro  $ab$ - entonces por la Observación 3.4.1 se tiene que  $\angle c \leq \frac{\pi}{2}$ .

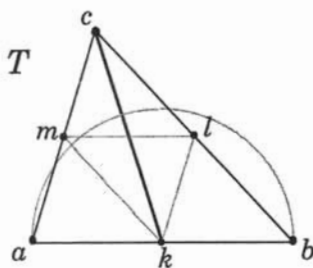


Figura 3.16: Una mediana de longitud al menos la mitad del diámetro de  $T$ .

Queremos demostrar que todo círculo de  $\mathcal{F}_{kc}$ , cubre al menos la mitad del área de  $T$ .

Sea  $C \in \mathcal{F}_{kc}$ , ya que  $\angle c \leq \frac{\pi}{2}$  y en el paralelogramo  $k l c m$   $\angle c = \angle k$ , entonces  $\angle c + \angle k \leq \pi$  y por el Lema 1.3.1 se tiene que  $C$  cubre alguno de los puntos  $m$  ó  $l$ . Hay dos situaciones que se resuelven de inmediato:

- A Si el círculo cubre a ambos puntos,  $m$  y  $l$ , entonces contiene al paralelogramo  $k l c m$  que tiene área  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$  y terminamos.
- B Si sólo cubre a uno de ellos pero cubre alguno de los vértices  $a$  ó  $b$  entonces cubriría alguno de los triángulos  $\triangle akc$  ó  $\triangle kbc$  cuya área es  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$  y también se tendría el resultado.

Si no se cumple ninguna de estas condiciones, entonces solamente quedan dos casos por revisar:

1.  $C$  cubre a  $l$  pero no cubre a  $m$  ni a  $b$  ó
2.  $C$  cubre a  $m$  pero no cubre a  $l$  ni a  $a$ .

Como ambos casos son totalmente análogos haremos la demostración sólo para el primero de ellos. Veremos que, en los círculos que cumplen (1.), hay inscrito un trapecio isósceles de área al menos  $\frac{1}{2}A(T)$  totalmente contenido en  $T$  (Figura 3.17).

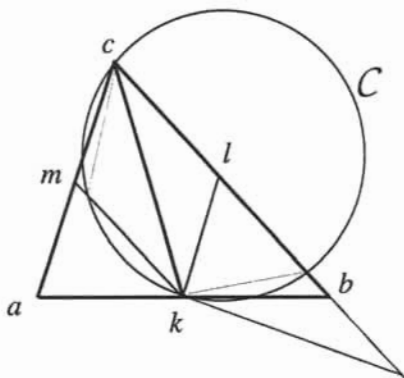


Figura 3.17: Un círculo que cubre a  $l$  pero no a  $m$  ni a  $b$ .

La familia  $\mathcal{F}_{kc}$  es cruzada por dos pares de rectas paralelas:  $\rho_{mk}$  y  $\rho_{bc}$  las que pasan respectivamente por  $m, k$  y por  $b, c$  (Figura 3.18 (A)) y también  $\rho_{kl}$  y  $\rho_{ca}$  que pasan por  $k, l$  y  $c, a$  respectivamente (Figura 3.18 (B)).

Notemos que estas rectas no son ortogonales a  $kc$ , entonces por el Corolario 3.4.7 sabemos que, con cada uno de estos pares,  $\mathcal{F}_{kc}$  determina una colección de trapecios isósceles de área constante. Para el caso que analizamos, los círculos que cumplen (1.) cruzan a las rectas  $\rho_{mk}$  y  $\rho_{bc}$ .

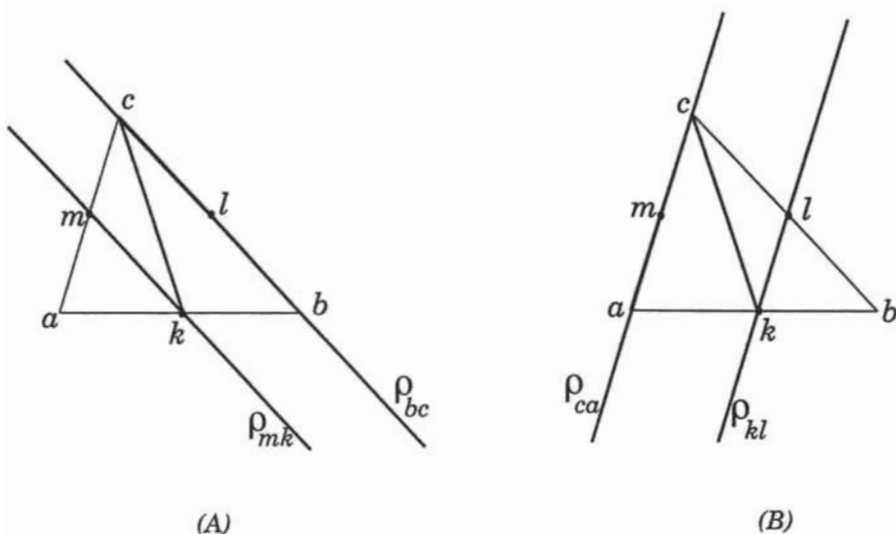


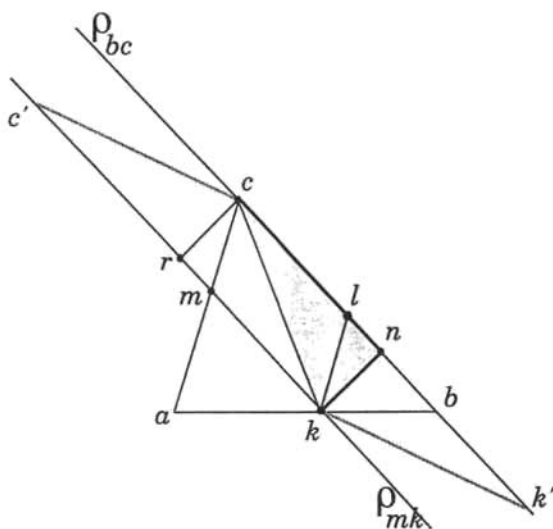
Figura 3.18: Los dos pares de rectas que cruzan a los elementos de  $\mathcal{F}_{kc}$ .

Sea  $\delta$  el área de cada uno de los trapecios inducidos por las rectas  $\rho_{mk}$  y  $\rho_{bc}$  en  $\mathcal{F}_{kc}$ . Como vimos en la demostración del Lema 4.1.2,  $\delta$  es también el área de los triángulos isósceles de los casos extremos. Así, demostrando que el área de alguno de estos triángulos es al menos  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$  habremos terminado.

En la Figura 3.19 los triángulos extremos de esta familia de trapecios son  $\Delta k'ck$  y  $\Delta kcc'$ . El primero es el inscrito en el círculo tangente a  $\rho_{mk}$  y el segundo el inscrito en el tangente a  $\rho_{bc}$ .

Sean  $n$  el punto más cercano a  $k$  en  $\rho_{bc}$  y  $r$  el más cercano a  $c$  en  $\rho_{mk}$ . Notemos que  $\Delta knc$  es precisamente la mitad de uno de estos triángulos por lo que  $\mathcal{A}(\Delta knc) = \frac{1}{2}\delta$ .

Ahora demostraremos que  $\Delta knc \supseteq \Delta klc$ . En efecto, este hecho se sigue de observar que  $klem$  y  $kncr$  son paralelogramos. Como  $\angle c \leq \frac{\pi}{2}$ , entonces  $\angle rcn \geq$

Figura 3.19:  $\triangle knc \supseteq \triangle klc$ .

0. Mediante un argumento de semejanza es posible verificar que  $\triangle knl \approx \triangle crm$ , de donde  $\angle cln \geq \angle cnk$  y por tanto  $\triangle knc \supseteq \triangle klc$  (Figura 3.19).

Es claro que

$$\mathcal{A}(\triangle klc) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(T)$$

pues  $l$  es el punto medio de  $bc$  y como  $\triangle knc \supseteq \triangle klc$  entonces,

$$\frac{1}{2}\delta = \mathcal{A}(\triangle knc) \geq \mathcal{A}(\triangle klc)$$

de donde concluimos que  $\delta \geq \frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ .

Así, tenemos que cualquiera de estos trapecios tiene más de la mitad del área del triángulo. Notemos además que cada trapecio está contenido en  $\mathcal{C} \cap T$  pues el círculo no cubre a los otros vértices del triángulo (Figura 3.17). ■



**Teorema 3.4.9** *Todo triángulo tiene al menos dos medianas de longitud mayor o igual a la mitad de su diámetro.*

**Demostración.** Sean  $T$  como lo definimos anteriormente,  $m$  y  $l$  los puntos medios

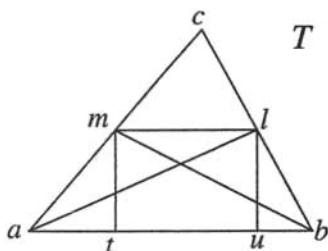


Figura 3.20: De la demostración del Teorema 3.4.9.

de los lados  $bc$  y  $ca$  y  $t$  y  $u$  los puntos en  $ab$  más cercanos a  $m$  y  $l$  respectivamente. Ya que  $ab$  es el lado de mayor longitud del triángulo entonces  $\sphericalangle a$  y  $\sphericalangle b$  son agudos y por tanto  $a \neq t$  y  $b \neq u$ . (Figura 3.20).

El segmento  $ml$  es paralelo a  $ab$  y mide exactamente la mitad de su longitud entonces  $ml = tu = \frac{1}{2}d$ . La mediana  $bm$  es la hipotenusa del triángulo  $\triangle btm$  por lo que  $bm > tb > tu$ . Del mismo modo la mediana  $al$  es hipotenusa de  $\triangle aul$  y por tanto  $al > au > tu$ . ■

Concluimos entonces que en todo triángulo hay al menos dos medianas cuyos extremos tienen cobertura circular por área mayor o igual que la mitad.

### 3.4.2. Respecto al perímetro

Recordemos que denotamos el perímetro de un conjunto  $S$ , por  $\mathcal{P}(S)$  y para referirnos a la longitud de una curva  $\gamma$  en el plano, usaremos  $\ell(\gamma)$ . Iniciaremos con una lema útil.

Sean  $r_1, r_2$  dos rayos que parten del punto  $a$  formando el ángulo  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Sean  $\rho$  la bisectriz de  $\alpha$  y  $q \in \rho$ , un punto distinto de  $a$ . Definimos la familia de círculos  $\Omega_\alpha(aq)$  como la colección de todos los círculos por  $a$  y  $q$  que cruzan a  $r_1$  y  $r_2$ . Hay dos círculos extremos en esta familia: el tangente a  $r_1$  y el tangente a  $r_2$ . El lema siguiente excluye a estos círculos.

**Lema 3.4.10** Sean  $C, D \in \Omega_\alpha(aq)$ , tales que cada uno cruza a  $r_1$  y  $r_2$  en dos puntos distintos entonces  $\ell(C \cap r_1) + \ell(C \cap r_2) = \ell(D \cap r_1) + \ell(D \cap r_2)$

**Demostración.** Sean  $c_1, c_2$  los puntos de intersección de  $C$  con  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, y  $d_1, d_2$  los que corresponden a  $D$ , según se muestra en la Figura 3.21. En estos términos, hay que demostrar que  $ac_1 + ac_2 = ad_1 + ad_2$ . Como  $\rho$  es la

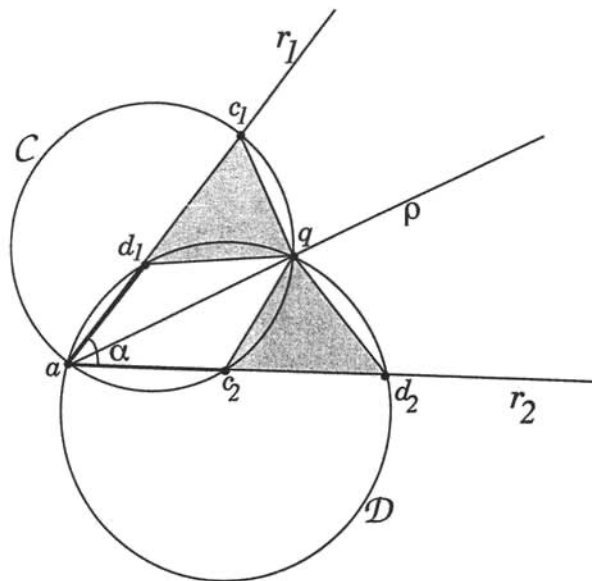


Figura 3.21:  $C$  y  $D$  cubren la misma longitud de los rayos  $r_1$  y  $r_2$ .

3.4. COBERTURA CIRCULAR EN TRIÁNGULOS

79

bisectriz de  $\alpha$ , entonces  $c_1q = qc_2$  pues son dos cuerdas de  $C$  que subtienden el mismo arco. De forma análoga en  $\mathcal{D}$  sucede que  $d_1q = qd_2$ . Se tiene que

$$ac_1 = ad_1 + d_1c_1 \text{ y}$$

$$ad_2 = ac_2 + c_2d_2$$

de donde

$$ac_2 = ad_2 - c_2d_2 \text{ y por tanto}$$

$$ac_1 + ac_2 = ad_1 + d_1c_1 + ad_2 - c_2d_2.$$

Así, lo que queremos demostrar es que  $d_1c_1 - c_2d_2 = 0$ , es decir que  $d_1c_1 = c_2d_2$ . Observemos que se tienen las siguientes relaciones entre ángulos:

$$\sphericalangle qc_1a + \sphericalangle ac_2q = \pi \text{ y}$$

$$\sphericalangle qd_1a + \sphericalangle ad_2q = \pi$$

pues corresponden a parejas de ángulos opuestos en cuadriláteros circulares y también

$$\sphericalangle ac_2q + \sphericalangle d_2c_2q = \pi \text{ y}$$

$$\sphericalangle qd_1a + \sphericalangle qd_1c_1 = \pi$$

por que son ángulos suplementarios.

De aquí  $\sphericalangle qc_1a = \sphericalangle d_2c_2q$  y  $\sphericalangle ad_2q = \sphericalangle qd_1c_1$ . Evidentemente  $\sphericalangle qc_1a = \sphericalangle qc_1d_1$  y  $\sphericalangle ad_2q = \sphericalangle c_2d_2q$ , por lo tanto  $\sphericalangle d_2c_2q = \sphericalangle qc_1d_1$  y  $\sphericalangle qd_1c_1 = \sphericalangle c_2d_2q$ .

Así, concluimos que  $\triangle qc_1d_1$  y  $\triangle qc_2d_2$  son congruentes y entonces  $d_1c_1 = c_2d_2$ .

■

En otras palabras, hemos demostrado que cualquier círculo de  $\Omega_a(aq)$  cubre una longitud constante de los rayos que definen a  $\alpha$ . Este hecho nos será de gran utilidad en el próximo resultado.

**Teorema 3.4.11** Sea  $T$  un triángulo, la fracción de cobertura respecto del perímetro en  $T$  es al menos  $\frac{1}{2}$ .

**Demostración.** Sean  $a, b, c$ , los vértices de  $T$  y supongamos que  $\sphericalangle a$  es el ángulo de menor magnitud, entonces está definido por los lados de mayor longitud de  $T$ . Digamos que el lado de longitud máxima es  $ab$ .

Consideremos la cuerda perímetro-bisectora por  $a$  y llamemos  $k$  a su extremo en el lado  $bc$ . Sea  $f$  el punto en que la bisectriz de  $\sphericalangle a$  cruza a  $bc$ . Finalmente, sea

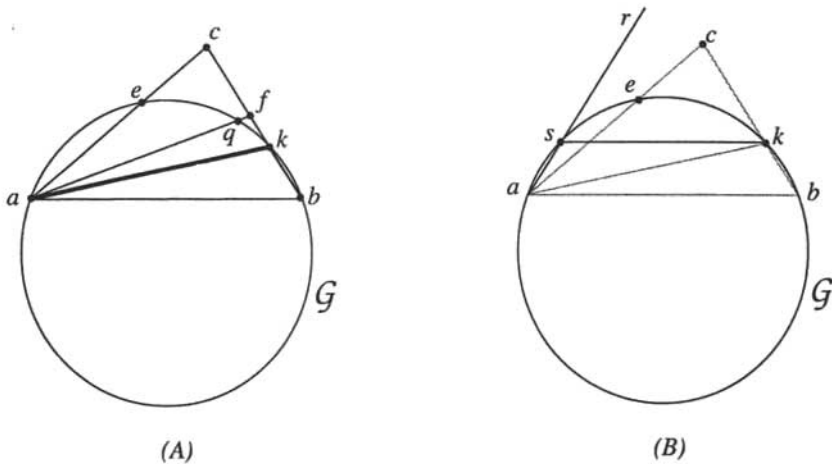


Figura 3.22: De la demostración del Teorema 3.4.11.

$\mathcal{G}$  el círculo definido por los puntos  $a, b$  y  $k$ . Como  $\sphericalangle a \leq \sphericalangle b$  entonces  $\mathcal{G}$  cruza al lado  $ca$ , llamemos  $e$  al punto de intersección y sea  $q = \mathcal{G} \cap af$ . La situación se muestra en la Figura 3.22 (A).

El círculo  $\mathcal{G}$  cubre  $\delta = ea + ab$ , de los lados  $ab$  y  $ca$ . Observemos que si tomamos un rayo  $r$  que parta de  $a$  y forme con  $ab$  un ángulo igual a  $\sphericalangle b$ , entonces el punto  $s$  en que el rayo cruza a  $\mathcal{G}$ , forma un trapecio isósceles con  $a, b$  y  $k$ , y por

tanto  $sa = bk$  (Figura 3.22 (B)). Los puntos  $s$  y  $e$  coincidirán en el caso en que  $T$  sea isósceles. Como  $a \leq b$  se tiene que  $ea \geq bk$ , por lo que  $\delta = ea + ab \geq ab + bk = \frac{1}{2}\mathcal{P}(T)$ .

Por el Lema 3.4.10, sabemos que todo círculo por  $aq$  cubre una cantidad constante de la longitud de los lados  $ab$  y  $ca$ . En el círculo  $\mathcal{G}$  tal cantidad es  $\delta$  que como vimos es al menos la mitad del perímetro de  $T$ . Así, se tiene que todo círculo por  $aq$  cubre al menos  $\frac{1}{2}\mathcal{P}(T)$  en los lados  $ac$  y  $ab$ .

Consideremos ahora,  $\mathcal{C}_{ak}$ , un círculo por  $ak$ . Como  $ak \geq aq$ , siempre es posible encontrar un círculo por  $aq$  contenido en  $\mathcal{C}_{ak}$  (Figura 3.23) y, por lo tanto  $\mathcal{C}_{ak}$  también cubrirá al menos la mitad de  $\mathcal{P}(T)$ . Concluimos entonces que los puntos  $a$  y  $k$  realizan la fracción de cobertura buscada. ■

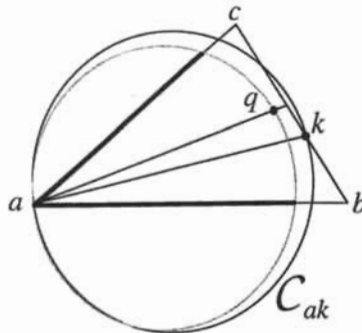


Figura 3.23: El círculo  $\mathcal{C}_{ak}$  cubre más de la mitad del perímetro de  $T$ .

Como consecuencia inmediata de este resultado y del Teorema 3.2.6, tenemos el siguiente.

**Corolario 3.4.12** *La fracción de cobertura en un triángulo respecto al perímetro es un medio.*

Para algunos triángulos isósceles podemos encontrar una pareja de puntos que realice simultáneamente la fracción de cobertura máxima respecto del área y el perímetro.

**Teorema 3.4.13** Si  $T$  es un triángulo isósceles de ángulo desigual a lo más  $\frac{\pi}{3}$ , entonces los extremos de la mediana incidente a tal ángulo realizan la fracción de cobertura respecto de área y perímetro.

**Demostración.** Sean  $a, b, c$  los vértices de  $T$ , supongamos que  $\sphericalangle c$  es el ángulo desigual. Si  $k$  es el punto medio del lado  $ab$ , entonces  $kc$  es la mediana por  $c$ . Claramente  $kc$  biseca área y perímetro de  $T$ . Llamemos  $l$  y  $m$  a los puntos medios de los lados  $bc$  y  $ca$  respectivamente.

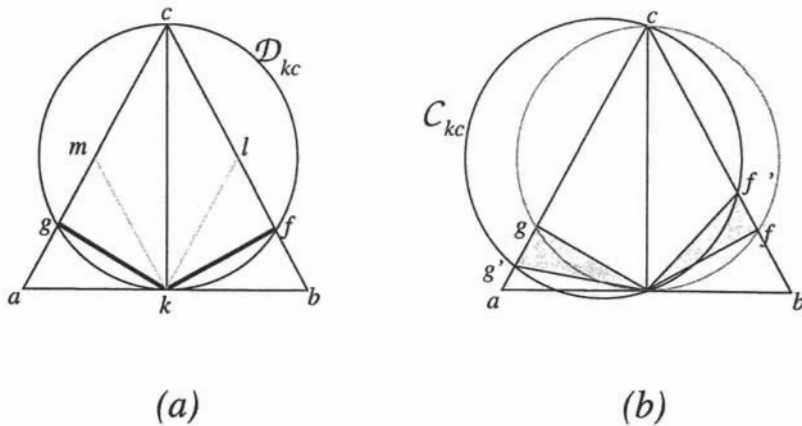


Figura 3.24: Una pareja que maximiza simultáneamente cobertura circular respecto de área y perímetro en un triángulo isósceles.

Analicemos primero el caso en que  $\sphericalangle c = \frac{\pi}{3}$ , que sería el primer triángulo isósceles que cumple la hipótesis. Entonces  $T$  es equilátero y podemos suponer

que la longitud de sus lados es 1 (en tal caso la longitud de  $kc$  es  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  y para cualquier otro isósceles tal que  $\angle c < \frac{\pi}{3}$ , el vértice  $c$  se encuentra en la mediatriz de  $ab$  a distancia mayor que  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  de  $k$ ).

Consideremos el círculo  $\mathcal{D}_{kc}$ , el de diámetro  $kc$ . Este, es tangente a  $ab$  y cruza ortogonalmente a los lados  $bc$  y  $ca$ . Llamemos a los puntos de intersección correspondientes  $f$  y  $g$ . Como  $kl \parallel ca$ , se tiene que  $\triangle kbl \approx T$ . Así, como  $bl = lc$ , entonces  $bf = fl$  y por tanto  $\frac{bf}{bc} = \frac{1}{4}$ . Análogamente  $\triangle kma \approx T$  y por tanto  $\frac{ga}{ca} = \frac{1}{4}$  (Figura 3.24 (a)). Por lo que el círculo  $\mathcal{D}_{kc}$  cubre  $fc + cg = 2(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(T)$  y por el Lema 3.4.10 cualquier otro círculo por  $kc$ , cubrirá esta misma longitud de los lados  $bc$  y  $ca$ .

Por otro lado, el cuadrilátero  $kfcg$  obtenido de la intersección de  $\mathcal{D}_{kc}$  con  $T$  contiene al paralelogramo  $klcm$  de área  $\frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ , entonces  $\mathcal{A}(kfcg) > \frac{1}{2}\mathcal{A}(T)$ . Cualquier otro círculo por  $kc$ , contiene un cuadrilátero de la misma área que  $kfcg$ . En efecto, si  $\mathcal{C}_{kc}$  es otro círculo por  $kc$  y  $f'$  y  $g'$  los correspondientes puntos en los que cruza a los lados  $bc$  y  $ca$ , no es difícil comprobar que  $\triangle kf'f = \triangle kg'g$ , usando la misma argumentación de la demostración del Lema 3.4.10 pues  $kc$  es la bisectriz de  $\angle c$  (Figura 3.24 (b)).

Ahora bien, notemos que el triángulo equilátero es el que tiene menor cubrimiento en ambas medidas. En los demás isósceles que cumplen con la hipótesis la cobertura es mucho mayor. El hecho importante usado en esta demostración es que el círculo diametral por la mediana exhibida, cubre a los puntos medios de los otros lados del triángulo. Si  $\angle c < \frac{\pi}{3}$ , y  $\angle c \rightarrow 0$ , los puntos  $f$  y  $g$  tenderán respectivamente hacia  $b$  y  $a$  y por tanto el círculo  $\mathcal{D}_{kc}$  cubrirá a  $k$  y  $l$ , manteniendo esta condición y, por tanto, cumpliendo el resultado. ■

De hecho, como se demostró en el Teorema 3.4.1 para el caso de área se puede reducir la hipótesis a que el ángulo desigual sea agudo (a lo más  $\frac{\pi}{2}$ ) y la cobertura del área es al menos un medio: el caso extremo es el triángulo rectángulo isósceles en el que el círculo diametral por la mediana en el ángulo recto, cruza a los otros lados exactamente en sus puntos medios y por tanto ahí el

cuadrilátero  $kfcg$  coincide con el paralelogramo  $klcm$ . En el caso del cubrimiento del perímetro sí disminuye cuando  $\angle c > \frac{\pi}{3}$ , en el equilátero es cuando se alcanza exactamente la mitad.

Sabemos que las cuerdas área-bisectoras de longitud máxima en un polígono convexo tienen un extremo que es vértice del polígono (Teorema 3.4.4). ¿Y qué sucede con las cuerdas perímetro-bisectoras de longitud máxima?

No es difícil comprobar que no puede suceder que sus dos extremos sean, ambos, puntos interiores de aristas paralelas, pues podríamos encontrar otra de longitud mayor (consideramos un paralelogramo con las aristas y en él alguna diagonal sería una cuerda más larga).

Si hubiese una cuerda perímetro bisectora cuyos ambos extremos fueran puntos interiores de dos aristas no paralelas, entonces las rectas que contienen a tales aristas se cruzan y forman un triángulo con la cuerda dada. Demostraremos que, bajo estas hipótesis, como el caso en que usábamos el área, es posible encontrar una cuerda perímetro-bisectora de longitud mayor que la dada en la que uno de los extremos es vértice del polígono. Siempre es posible mover continuamente la cuerda dada sobre las aristas que contienen a sus extremos de modo que se preserve la condición de bisecar el perímetro. Este movimiento también preserva la condición de mantener constante la suma de las longitudes de los otros dos lados del triángulo que se forma. Esto es porque la distancia que avanzamos sobre una de las aristas, es la misma que retrocedemos sobre la otra.

Así pues, supongamos que la intersección de las rectas definidas por las aristas es el origen y sea  $\alpha \in (0, \pi)$  al ángulo formado por ellas. Sean  $a, b$  los extremos de la cuerda,  $a$  es un punto en la parte positiva del eje  $x$  y  $b$  en la recta que define al ángulo  $\alpha$ , ambos distintos de  $\bar{o}$ . Si  $s = |a|$  y  $t = |b|$ , entonces sea  $p = s + t$  un valor real positivo fijo y las coordenadas de los puntos  $a$  y  $b$  están dadas como  $a = (s, 0)$  y  $b = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)$ . Consideremos entonces la familia  $T_\alpha(p)$  de todos los triángulos de vértices  $\bar{o}, a, b$ , tales que  $\alpha = \angle a\bar{o}b$  y  $p = s + t$  es constante.



**Lema 3.4.14** En  $\mathcal{T}_\alpha(p)$  el triángulo cuyo lado opuesto a  $\alpha$  tiene longitud mínima, es el isósceles de lados  $\bar{a} = \bar{b}$ .

**Demostración.** Sean  $d = d(a, b)$  y, como especificamos antes,  $s = d(\bar{a}, a)$ ,  $t = d(\bar{b}, b)$  y  $p = s + t$ . Entonces,  $d = \sqrt{(s - t \cos \alpha)^2 + t^2 \sin^2 \alpha}$ .

Elevando al cuadrado y simplificando se tiene que  $d^2 = s^2 - 2st \cos \alpha + t^2$ , y como  $t = p - s$ , entonces

$$\begin{aligned} d^2 &= s^2 - 2s(p - s) \cos \alpha + (p - s)^2 \\ &= s^2 - 2sp \cos \alpha + 2s^2 \cos \alpha + p^2 - 2sp + s^2 \\ &= 2s^2 - 2sp(\cos \alpha + 1) + 2s^2 \cos \alpha + p^2 \end{aligned}$$

Consideremos la función  $f(s) = 2s^2 - 2sp(\cos \alpha + 1) + 2s^2 \cos \alpha + p^2$  y obtengamos su derivada:

$$f'(s) = 4s - 2p(\cos \alpha + 1) + 4s \cos \alpha = (4s - 2p)(1 + \cos \alpha).$$

$$\text{Así } f'(s) = 0 \Leftrightarrow (4s - 2p)(1 + \cos \alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos \alpha = 0 \text{ ó } 4s - 2p = 0.$$

Si  $1 + \cos \alpha = 0$  implica que  $\cos \alpha = -1$  pero en el contexto del problema esto es imposible pues  $\alpha \in (0, \pi)$ . Entonces sólo se puede tener la segunda alternativa, por lo que  $f'(s) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{p}{2}$ . Ahora, como  $f''(s) = 4 > 0$  entonces  $s = \frac{p}{2}$  es un mínimo y además es el único. Finalmente, si  $s = \frac{p}{2}$ , entonces  $t = p - s = \frac{p}{2} = s$ , es decir,  $\bar{a} = \bar{b}$ . ■

Así, la distancia mínima del lado opuesto a  $\alpha$  se alcanza cuando el triángulo es isósceles y entonces, como en el caso del área, siempre es posible encontrar una dirección de crecimiento al mover continuamente la cuerda preservando la condición de bisección del perímetro obteniendo en cada instante una cuerda de mayor longitud. Eventualmente se llegará a un vértice del polígono.



# Capítulo 4

## Conclusiones

### 4.1. El camino recorrido

Y finalmente, ¿qué podemos concluir de la realización de este trabajo? El objetivo de este apartado no es dar un resumen de la investigación realizada, eso lo hicimos en el prefacio y al introducir cada capítulo reseñábamos brevemente los resultados contenidos en él. El deseo de esta parte de la tesis es describir someramente cuál fue el itinerario que seguimos y delinear un poco cuáles podrían ser los caminos a seguir en otras direcciones. Al iniciar este trabajo revisamos el problema de cobertura circular en colecciones de puntos cuando la medida es la cardinalidad. En aquél momento no había una senda clara para seguir, las posibilidades eran muchas y de hecho intentamos en varias.

Cuando analizamos el problema de las colecciones bicolores de puntos en el plano estimamos las cotas que podíamos establecer para la fracción de cobertura e hicimos uso de la digráfica de dominación asociada a la colección (Sección 1.3). Esta digráfica tiene propiedades interesantes como apenas se presume al revisar el resultado del Lema 2.2.4. Podríamos buscar relaciones entre la dominación establecida entre pares de puntos y características estructurales de la digráfica, como existencia de ciclos o subgráficas inducidas de algún tipo.

Posteriormente analizamos la cobertura circular en conjuntos planos usando como medidas área y perímetro. Animados por la idea de que para cualquier definición de simetría los casos extremos son los conjuntos centralmente simétricos y los triángulos, (una muy buena reseña sobre algunas de las definiciones más comunes de simetría se encuentra en [24]), después de obtener que la fracción de cobertura en ellos es un medio respecto de ambas medidas, conjeturamos que tal valor debe ser el correcto para cualquier polígono convexo.

En ambos casos advertimos que las parejas de puntos de cobertura circular “grande” respecto de la medida  $\mu$  (en este caso área y perímetro) presentan las siguientes propiedades:

1. la cuerda que el par define en el conjunto es  $\mu$ -bisectora, es decir, divide al conjunto en dos subconjuntos de igual medida en términos de  $\mu$ .
2. la cuerda es “suficientemente larga” (representa una fracción mayor que un medio del diámetro del conjunto).

Las rectas que bisecan figuras planas respecto de alguna medida dada (una medida usual, de esas en las que las rectas miden cero), han sido estudiadas desde varios puntos de vista y se les han encontrado propiedades interesantes (ver por ejemplo [8], [9], [22], [25], [29], [37]). Se ha demostrado que en cada conjunto convexo acotado, existe un punto por el que pasan al menos tres diferentes cuerdas área bisectoras. Se sabe también que un punto es el centro de simetría de un conjunto convexo acotado si y sólo si es el único punto por el cual pasan al menos tres cuerdas área bisectoras distintas. Estos puntos de concurrencia han llamado mucho la atención, así por ejemplo se sabe que es posible encontrar un punto en cada conjunto plano de modo que en él concurren tres cuerdas bisectoras que dividan al conjunto en seis pedazos de la misma medida. Las rectas bisectoras han sido tomadas como base para la clasificación de familias más generalizadas de rectas que han sido estudiadas en otros contextos ([10], [23], [36]). Se podrían ana-

lizar nuevos planteamientos de problemas en torno a estos conceptos y abordados desde el concepto de cobertura circular.

Nosotros, al querer caracterizar los puntos que maximizan la fracción de cobertura, buscamos propiedades que describieran a las cuerdas que ellos inducen así por ejemplo, vimos que las cuerdas  $\mu$ -bisectoras de longitud máxima en un polígono convexo, tienen un extremo en un vértice del polígono por lo que localizarlas sería un problema sencillo. La localización de cuerdas que corten un polígono imponiendo ciertas restricciones al corte, es un problema que ha sido ampliamente estudiado (ver por ejemplo [11], [26]).

También notamos que en los conjuntos estudiados las parejas que alcanzan el máximo de cobertura posible respecto a ambas medidas están alejadas, es decir, inducen cuerdas largas en el conjunto, entonces, buscando otras cuerdas  $\mu$ -bisectoras distintas para revisar su cobertura circular, quisimos descubrir que tan largas deben ser y las comparamos con el diámetro del conjunto. Así fue como encontramos la caracterización de las medianas suficientemente largas en triángulos.

En los conjuntos centralmente simétricos revisamos el caso del conjunto convexo centralmente simétrico de área máxima con diámetro y ancho dados (el problema en general parece complicado). En la Sección 3.3 vimos que hay conjuntos centralmente simétricos con cuerdas de cobertura por área muy pequeña (Figura 3.5). El ejemplo que presentamos en esa sección se trataba de los extremos de la cuerda  $\mu$ -bisectora de longitud mínima de un rectángulo. En general, esta cuerda en un conjunto centralmente simétrico, es la que realiza el ancho (la mínima distancia entre pares de rectas soporte) así que revisamos la longitud que requiere tener el ancho para que sus extremos cubran al menos la mitad del área en el conjunto.

Nuestra intención es determinar una cota inferior para la longitud del ancho. Dados  $w, d \in \mathbb{R}^+$ , se sabe ([35]), que el convexo centralmente simétrico de ancho  $w$  y diámetro  $d$  en que el área es máxima, es el conjunto mostrado en la Figura 4.1 (A). Nos referimos a él como  $M_{w,d}$ . Es una banda de un círculo de radio  $\frac{d}{2}$ ,

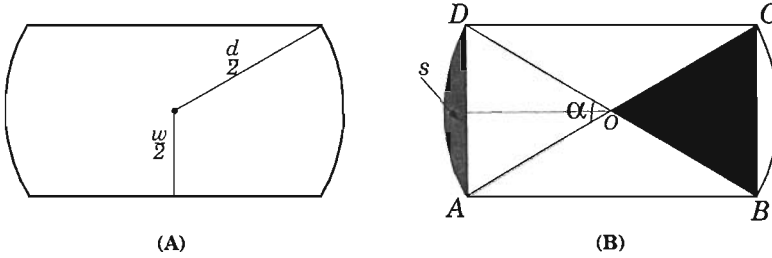


Figura 4.1: El conjunto centralmente simétrico de área máxima con ancho  $w$  y diámetro  $d$ .

acotada por dos rectas equidistantes del centro y separadas a distancia  $w$ . Gracias a la simetría de la figura podemos fácilmente calcular su área mediante la división mostrada en la Figura 4.1 (B). Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{área}(M_{w,d}) &= 4(\text{área}\triangle BCO) + 2s \\
 &= 4\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{4}\text{sen}\alpha\right) + 2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{4}\alpha - \frac{1}{2}\frac{d^2}{4}\text{sen}\alpha\right) \\
 &= \frac{d^2}{4}(\text{sen}\alpha + \alpha)
 \end{aligned}$$

Buscamos la fracción  $\frac{w}{d}$  y, según podemos observar,  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{w/2}{d/2} = \frac{w}{d}$ , por lo que, para este caso, la fracción que estamos buscando está determinada por  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Recordemos que  $\mathcal{D}_w$  denota el círculo de diámetro  $w$  y  $\mathcal{F}_w$  la familia de círculos por el segmento  $w$ .

**Lema.**  $\mathcal{D}_w$  es el círculo de cubrimiento mínimo en  $\mathcal{F}_w$ .

**Demostración.** Observemos que  $\mathcal{D}_w \subset M_{w,d}$ , pues  $w$  es una cuerda área-bisectora de longitud mínima. Sea  $\mathcal{C}_w \in \mathcal{F}_w$ ,  $\mathcal{C}_w \neq \mathcal{D}_w$ , entonces  $\text{radio}(\mathcal{C}_w) > \frac{w}{2}$  y por tanto, existe un círculo de radio  $\frac{w}{2}$  totalmente contenido en  $\mathcal{C}_w \cap M_{w,d}$ , es una copia de  $\mathcal{D}_w$  trasladada sobre la mediatriz de  $w$  y así el área que cubre  $\mathcal{C}_w$  en  $M_{w,d}$  es mayor que la que cubre  $\mathcal{D}_w$ . ■

Queremos ahora encontrar la longitud de  $w$  que garantice que la cobertura de cualquier círculo en  $\mathcal{F}_w$  es mayor o igual que  $\frac{1}{2}\text{área}(M_{w,d})$ . Por la proposición anterior, basta con revisar la cobertura de  $D_w$ :

$$\begin{aligned} \text{área}D_w &\geq \frac{1}{2}\text{área}(M_{w,d}) \\ \Leftrightarrow \frac{w^2}{4}\pi &\geq \frac{d^2}{8}(\text{sen}\alpha + \alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}d^2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &\geq \frac{d^2}{8}(\text{sen}\alpha + \alpha) \\ \Leftrightarrow \pi\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &\geq \frac{\text{sen}\alpha + \alpha}{2} \end{aligned}$$

¿Para qué valores se cumple esta desigualdad? Resolviendo numéricamente, obtenemos que la igualdad se alcanza en  $\alpha_0 = 1.27835 \approx \frac{2\pi}{5}$  (en grados es un poco más de  $73^\circ$ ).

Si  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ , entonces  $\pi\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 1.085 < \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{2\pi}{5} \approx 1.104$ . O sea que  $\alpha_0 > \frac{2\pi}{5}$ . Como notamos anteriormente,  $\frac{w}{d} = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , calculando  $\text{sen}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) = .597 < \frac{3}{5}$ , por lo que se concluye de inmediato que,

**Proposición.** Si  $w > \frac{3}{5}d$ , entonces, los extremos de  $w$  tienen cobertura circular por área mayor o igual que  $\frac{1}{2}\text{área}(M_{w,d})$ .

Seguiría revisar las cuerdas mas grandes que  $w$ , aunque ahí el área cubierta ya no se calcula tan fácilmente. Un camino a recorrer sería precisamente este: caracterizar las cuerdas de cobertura grande respecto de alguna medida, en términos de otros invariantes asociados al conjunto. Cuando estudiamos las medianas de un triángulo encontramos que la de mayor longitud mide al menos  $\frac{3}{4}d$ , ( $d$  el diámetro del triángulo) aunque esto no tiene nada de original pues en [18] Eggleston demuestra que de hecho en cualquier conjunto convexo, una cuerda área bisectora tiene al menos tal longitud (demuestra también que las cuerdas perímetro bisectoras miden al menos  $\frac{3}{2}r$ , donde  $r$  es el circunradio del conjunto). En [6] se revisa el problema de la reducción del diámetro en un conjunto convexo. Podría estudiarse una versión dual: cuerdas que preservan el diámetro de un conjunto. Las cuerdas

$\mu$ -bisectoras de longitud máxima preservan el diámetro del conjunto.

Para los triángulos isósceles encontramos que si el ángulo desigual es a lo más  $\frac{\pi}{3}$ , la mediana incidente en él realiza la fracción de cobertura máxima tanto para el área como para el perímetro. Las cuerdas que inducen diámetros en centralmente simétricos también realizan la fracción simultáneamente, una pregunta interesante sería tratar de encontrar más parejas con esta propiedad.

Otra pregunta natural después de estudiar los conjuntos centralmente simétricos, era preguntarse por las figuras de ancho constante, ahí, ancho y diámetro coinciden y parece evidente que cualquier pareja de antipodas debería servir, sin embargo, no tenemos una manera precisa de calcular el área de la figura, únicamente tenemos cotas (cuadráticas) que dependen del ancho. El caso del perímetro pareciera más tratable. Se sabe que cualquier figura de ancho constante de ancho  $h$ , tiene perímetro  $\pi h$ , por lo que quizá podría decirse más acerca de la cobertura circular respecto de esta medida.

Estuvimos revisando también los polígonos regulares, parecía el paso evidente a seguir dado que nuestra intención era establecer resultados para convexos en general y por tanto había que dirigirse hacia los polígonos convexos (es sabido que un convexo cualquiera puede aproximarse mediante una sucesión de polígonos convexos), aunque ahí el problema se complicó sustancialmente. Desde luego si el polígono tiene un número par de vértices, no hay nada que hacer pues se trata de un centralmente simétrico, pero, el caso impar no resultó tan simple como parecía al inicio.

## 4.2. Nuestro objetivo alcanzado....

¿Conclusiones? ¿qué es investigar? el Diccionario de la Lengua Española en su vigésima segunda edición dice: Investigar. (del latín *investigâre*). 1. Hacer diligencias para descubrir algo (es decir, hacer las actividades necesarias para descubrir algo). 2. Realizar actividades intelectuales y experimentales de modo sistemático



con el propósito de aumentar los conocimientos sobre una determinada materia.

En este sentido, este trabajo ha cumplido entonces con el objetivo de realizar investigación en matemáticas, más específicamente en el área de Geometría Computacional: descubrimos algunas cosas interesantes y aumentamos nuestros conocimientos en la materia. Sin embargo, quizá ninguna de las dos acepciones describía fielmente todo lo que este proceso ha conllevado Investigar es como abrir puertas, como explorar con los pies en la arena de la playa. Buscas algo y finalmente hallas mucho. Investigar es averiguar, indagar, escudriñar, mirar, revisar,...Implica esfuerzos grandes de disciplina, de desapego, de humildad. Es como estar parado sobre la playa, buscando algo con los pies entre la arena ¿Qué buscamos? un tesoro....podemos encontrar muchos y de diversos tipos: conchas o caracoles, algún pequeño cangrejo, lombrices o pulgones de playa, enormes escarabajos entre otros cientos de bichos, (restos de basura...) Hallar no uno, dos, decenas de ellos, discernir, elegir cuáles son más bellos, cuáles más interesantes, cuál más colorido que los otros. Finalmente se disfruta -y a veces se sufre- durante el proceso. Hubo, desde luego también, montones de preguntas que al principio parecían lindas o interesantes pero cuyas respuestas eran triviales o increíblemente complicadas de encontrar (hay que descartar las piedritas feas y no pretender encontrar la estrella azul). Y en esta selección algunos caminos quedaron por recorrer, de algunos sólo anduvimos unos cuantos pasos y regresamos si encontrábamos una pared o señales confusas que nos desviarían del objetivo inicial, aunque en ocasiones advertimos que el camino era bello o interesante pero que andarlo nos tomaría mucho mas tiempo o esfuerzo del que podíamos realizar por ahora, quedó pendiente de ser recorridos en otro momento.

Como esto apenas es el inicio de aquí en adelante ¿que sigue? ¿cómo saberlo? ¿cuál es nuestra conclusión? la única: hay más preguntas que respuestas.

\* \* \* fin \* \* \*





## Bibliografía

- [1] *Abellanas M., Hernández G., Klein R., Neumann-Lara V., Urrutia J.*, “A combinatorial property of convex sets”, *Discrete & Computational Geometry*, **17**, 1997, pp. 307-318.
- [2] *Abrego B.M., Fernández-Merchant S.*, “A lower bound for the rectilinear crossing number”, preprint.
- [3] *Akiyama J., Ishigami Y., Urabe M., Urrutia J.*, “On circles containing the maximum number of points”, *Discrete Mathematics*, **151**, 1-3, 1996, pp. 15- 18.
- [4] *Barany I., Larman D.G.*, “A combinatorial property of points and ellipsoids”, *Discrete & Computational Geometry*, **5** n. 4, 1990, pp. 375-382.
- [5] *Barany I., Schmerl J.H., Sidney S.J., Urrutia J.*, “A combinatorial result about points and balls in Euclidean space”, *Discrete & Computational Geometry*, **4** n. 3, 1989, pp. 259-262.
- [6] *Boltyanski V., Gohberg I.*, Results and problems in combinatorial geometry, Cambridge University Press, 1985.
- [7] *Borwein P., Moser W.O.J.*, “A survey of Sylvester’s problem and its generalizations”, *Aequationes Mathematicae*, **40**, 1990, pp. 111-135.

- [8] **Buck R.C., Buck E.F.**, "Equipartition of convex sets", *Math. Mag.*, **22**, (1948/49), pp. 195-198.
- [9] **Ceder J.**, "Generalized sixpartite problems", *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **9**, (1964), pp. 28-32.
- [10] **Ceder J.**, "On outwardly simple line families", *Canad. J. Math.*, **16**, (1964), pp. 1-11.
- [11] **Contreras F.**, "Cutting polygons and a problem on illumination of stages", Master Thesis, University of Ottawa, 1998.
- [12] **Harary F.**, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [13] **Hayward R.**, "A note on the circle containment problem", *Discrete & Computational Geometry* **4 n. 3**, 1989, pp. 263-264.
- [14] **Hayward R., Rappaport D., Wenger R.**, "Some extremal results on circles containing points", *Discrete & Computational Geometry* **4 n. 3**, 1989, pp. 253-258.
- [15] **Edelsbrunner H.**, "Algorithms in Combinatorial Geometry", Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1987.
- [16] **Edelsbrunner H., Hasan N., Seidel R., Shen X.J.**, "Circles through two points that always enclose many points", *Geometriae Dedicata* **32**, 1989, pp. 1-12.
- [17] **Eggleston H.G.**, *Convexity*, Cambridge University, 1958.
- [18] **Eggleston H.G.**, "The maximal length of the chords bisecting the area or perimeter length of plane convex sets", *J. London Math. Soc.* **36**, 1961, pp. 63-77.

- [19] **Felsner S., Fishburn P., Trotter W.**, "Finite three dimensional partial orders which are not sphere orders", *Discrete Mathematics* **201**, 1988, pp.101-132.
- [20] **Fishburn P.**, *Interval orders and interval graphs: a study of partially ordered sets*, J. Wiley, New York 1985.
- [21] **Fishburn P.**, "Interval orders and circle orders", *Order* **5**, 1989, pp. 225-234.
- [22] **Goldberg M.**, "On area-bisectors of plane convex sets", *American Mth. Monthly* **70**, 1963, pp. 529-531.
- [23] **Grünbaum B.**, "Continuous families of curves" *Canad. J. Math.*, **18**, 1966, pp. 529-537.
- [24] **Grünbaum B.**, "Measures of symmetry for convex sets" in *Convexity*, Proc. Symp. Pure Math **7**, 1963, pp. 233-270.
- [25] **Grünbaum B.**, "Partitions of mass-distributions of convex bodies by hyperplanes", *Pacific J. Math.*, **10**, 1960, pp. 1257-1261.
- [26] **Guardia R., Hurtado F.** "Partición de polígonos convexos por cuerdas", *VIII Encuentros de Geometría Computacional* 1999, pp. 83-92.
- [27] **Lee D.T.**, "On  $k$ -nearest neighbor Voronoi diagrams in the plane", *IEEE Trans. Comput. C* **31**, 1982, pp. 478-487.
- [28] **Neumann-Lara V., Urrutia J.**, "A combinatorial result on points and circles on the plane", *Discrete Mathematics* **69**, 1988, pp.173-178.
- [29] **Scott P.**, "Equipartition of convex bodies", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **42**, 1990, n. 1, pp.141-144.
- [30] **Shamos M.I., Hoey D.**, "Closest point problems", *Proc. 16th Ann. IEEE Symp. Found. Comput. Sci.* 1976, pp. 151-162.

- [31] *Sylvester J.J.*, “Mathematical Question 11851”, *Educational Times* **59** n. 98, 1893.
- [32] *Santoro N., Urrutia J.*, “Angle orders, regular  $n$ -gon orders and the crossing number”, *Order* **4** n. 3, 1987, pp. 209–220.
- [33] *Sidney J.B., Sidney S.J., Urrutia, J.*, “Circle orders,  $n$ -gon orders and the crossing number”, *Order* **5** n. 1, 1988, pp.1-10.
- [34] *Urrutia J.*, “Partial Orders and Euclidean Geometry”, in *Algorithms and Order*, ed. Rival I., Klower, Boston, MA, 1989, pp. 387-434.
- [35] *Yaglom I.M., Boltyanskii V.G.*, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, NY, 1961 (traducción en inglés del original en ruso publicado en 1951).
- [36] *Zamfirescu T.*, “On planar continuous families of curves”, *Canad. J. Math.*, **21**, 1969, pp. 513-530.
- [37] *Zarankiewicz K.*, “Bisection of plane convex sets by lines”, *Wiadom. Mat.*, **2**, 1959, pp. 228-234.