



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUADRADOS MAGICOS Y ESPACIOS  
VECTORIALES

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**A C T U A R I O**

**P R E S E N T A :**

**LUIS CARLOS VELAZQUEZ GUERRERO**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. PABLO BARRERA SANCHEZ

2005



m.341528



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Cuadrados mágicos y espacios vectoriales"

realizado por Luis Carlos Velázquez Guerrero

con número de cuenta 9850699-4 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Pablo Barrera Sánchez

Propietario Dr. Humberto Madrid de la Vega

*Humberto Madrid*

Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

*Hugo A. Rincón M.*

Suplente Dra. Bertha María Tomé Arreola

*Bertha Tomé*

Suplente Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez

*Ana Margarita Guzmán*

Consejo Departamental de Matemáticas

*[Firma]*

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dedico mi tesis  
A Dios.  
A mis papás  
Carlos Velázquez  
Elizabeth Guerrero  
y a mis hermanos  
Rosa Estrella  
Rolbin  
y Rolando

*"Sólo dos cosas contribuyen a avanzar;  
ir más aprisa que los demás,  
y seguir el buen camino".*

**René Descartes**

## Agradecimientos

A mi profesor Pablo Barrera por ayudarme a contar una historia y hablar un lenguaje común.

Ana Guzmán, Guilmer González, Olimpia Rivas, Hugo Rincón, Humberto Madrid, por lo que cada uno hizo para la realización de este trabajo.

A Varinia.

A los *tontos*: Emiliano, Raúl, Pablo, Francisco, Lissette, Mauricio, Onnis, Jorge, Isaac, Luciano, Patricio, Miguel, Mirena, Avryl, Gilda, Citlali e Iyazú por la vida que llevamos juntos, las parrandas y los alucines.

Al Escuadrón Incahuasi Rainier Ilimani Aconcagua, por la formación integral. Mi escuadra Vikingos especialmente a Gabriel, Pavel, Ricardo y Ulises. Al SUFRIR y el JEI.

A Manuel por abrirme las puertas de su casa y compartirme su visión de vida.

A mis amigos Miguel y Juan Pablo por compartir la diferencia.

A Emilia por los viajes y la amistad.

A Kristín, Julio e Itza, mis amigos de mi segunda etapa en Decroly, a Ixim.

A mis amigos de Universum especialmente a Fernando, Ale, Paola, Naye, Kari, Moni y Adriana, por esos 2 años en que aprendimos a enseñar jugando.

A Leobardo, Alejandra, Paulo, Selene, Cheko y Daniel por acompañarme a envejecer en Ciencias.

Al Movimiento Universitario 99-2000 que me permitió cuestionar los valores personales y académicos, a mis amigos de Consejo de Huelga de Prepa 1 y del Comité Estudiantil Metropolitano; especialmente a Violeta, Argelia, Ariadna, Aidé, Arlén e Higinio.

A mis amigos del Laboratorio de Computo Científico: Adriana, Marisol, Javier y Benjamín por el ambiente de camaradería alcanzado en estos meses.

A Yesenia, Memo, Patricio, Yuri, Álvaro, Toño y Ariet, compañeros del café y los pasillos de Ciencias.

A Cesar, Ana, Lety, Claudia, Marifi, Maru, Rodrigo, Sonia, Lizet, Gerardo, Mike, Lucina, Silvia, David, Sara, Vero, Gaby, Vale, Lena, Marcela, Minerva, Edith, Nahuatl, Miguel, Grecia, Ana, Maria, Chepita, Pedro, Wattie, Mauricio y Abel. A todos ustedes les doy gracias por formar parte de mi vida, por su amistad y compañía.

A las mágicas tierras de Ticumán, Morelos.

Este trabajo representa para mi la revelación de un lugar que imaginé posible en momentos de gran inestabilidad, momentos en que mis contradicciones me hicieron encaminarme hacia una verdad cósmica.

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>1 Cuadrados mágicos</b>	<b>1</b>
1.1 Un poco de historia . . . . .	1
1.2 Construcción de algunos cuadrados mágicos . . . . .	3
1.2.1 Cuadrados mágicos de orden impar . . . . .	3
1.2.1.1 Algoritmo del método Siamés . . . . .	4
1.2.2 Cuadrados mágicos de orden múltiplo de 4 . . . . .	5
1.2.2.1 Un algoritmo para los cuadrados mágicos de orden múltiplos de 4 . . . . .	6
1.3 Una forma de obtener cuadrados mágicos a partir de cuadrados mágicos	7
<b>2 El Espacio Mágico <math>V(s)_n</math></b>	<b>9</b>
2.1 Dimensión del espacio mágico de suma cero . . . . .	10
2.2 Cuadrados mágicos con suma distinta de cero $V(s)_n$ . . . . .	18
2.2.1 Soluciones particulares con $2n+1$ entradas distintas de cero . .	25
2.3 Bases para el espacio mágico de suma cero $\mathcal{Z}_n$ . . . . .	34
2.3.1 Caso Impar, $n = 2\mathcal{K} + 3$ . . . . .	38
2.3.1.1 Base $\beta_3$ para $\mathcal{K} = 0$ . . . . .	38
2.3.1.2 Base $\beta_5$ para $\mathcal{K} = 1$ . . . . .	40
2.3.1.3 Base $\beta_7$ para $\mathcal{K} = 2$ . . . . .	42
2.3.1.4 Base $\beta_{n+2}$ para $\mathcal{K} + 1$ . . . . .	46
2.3.1.5 Algoritmo de $\beta_n$ en Matlab . . . . .	53
2.3.2 Caso Par, $n = 2\mathcal{K} + 4$ . . . . .	53
2.3.2.1 Base $\beta_4$ para $\mathcal{K} = 0$ . . . . .	54
2.3.2.2 Base $\beta_6$ para $\mathcal{K} = 1$ . . . . .	55
2.3.2.3 Base $\beta_{n+2}$ para $\mathcal{K} + 1$ . . . . .	58
2.3.2.4 Algoritmo de $\beta_n$ en Matlab . . . . .	67
2.3.3 Otras Bases . . . . .	67
2.3.3.1 Base "lexicográfica" . . . . .	68
2.3.3.2 Base del "barco" . . . . .	68
2.3.3.2 Base "Recursiva sin carga al centro" . . . . .	68

<b>3 Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>A m-files de Matlab</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

# Prefacio

El estudio de los cuadrados mágicos, desde sus inicios, ha resultado ser muy atractivo, proponiendo grandes retos para caracterizar este conjunto.

En un inicio, el problema se centró en construir cuadrados mágicos con entradas enteras consecutivas, por lo que se manejó a través de la Teoría de Números adecuando un marco teórico que le dió sustento, consistente esencialmente en dos teoremas con los cuales es posible fabricar cualquier cuadrado mágico de enteros consecutivos.

El problema presenta características que conjugan elementos del Álgebra y la Geometría. Buscando dar sustento a algunos patrones geométricos observables, se puede inscribir dentro del Álgebra Lineal como un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de orden  $n$ .

Con el concepto básico de dependencia lineal, es posible describir cualquier cuadrado mágico de suma  $s$ , como una variedad lineal del espacio vectorial de cuadrados mágicos de suma cero. El objetivo de este trabajo se centra en la caracterización de este espacio vectorial.

## Contenido de los capítulos

El contenido de los capítulos del presente trabajo, se resume de la siguiente manera:

### • Capítulo 1

Se presenta una revisión a lo largo de la historia del uso y estudio de los cuadrados mágicos. Se presentan métodos de construcción regulares para el caso impar y múltiplos de 4. Se observa una estructura vectorial del conjunto de cuadrados mágicos de orden  $n$ .

### • Capítulo 2

El objetivo de este capítulo es caracterizar el espacio vectorial mágico a través de una variedad lineal del subespacio vectorial mágico de suma cero. Para lograrlo se estudia en primera instancia su dimensión. Se proponen algunas soluciones particulares de patrones regulares, y que siguen una estructura *sparse*. Se propone una forma novedosa para construir bases para el espacio mágico de suma cero, se muestra una base para orden par y una para orden impar obtenidas a partir de este marco teórico y con propiedades atractivas.

- **Capítulo 3**

En este capítulo, se hace un recuento de los logros obtenidos durante el desarrollo del trabajo.

- **Apéndice A**

Se presentan los *m-files* programados en MATLAB con los cuales se obtienen las bases particulares de cuadrados mágicos de suma cero descritas en el capítulo 2.

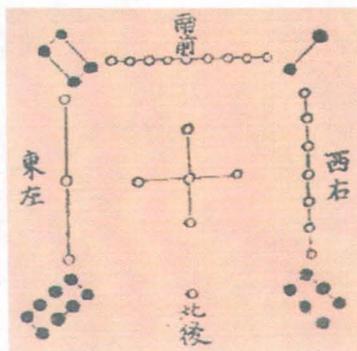
# Capítulo 1

## Cuadrados mágicos

La construcción de cuadrados mágicos es un problema matemático milenario, dado un arreglo matricial cuadrado de orden  $n$  colocar los números naturales del 1 al  $n^2$ , de tal forma que la suma de las entradas de cualquier columna, renglón y sus dos diagonales es constante, cantidad que nombramos *constante mágica*.

En este capítulo mostraremos algunos algoritmos atractivos que se han construido con base en la *Teoría de Números*; la teoría que sustenta a estos algoritmos no representa la finalidad de este capítulo, el interés está en conocer como los cuadrados mágicos se han desarrollado a través de la historia y conocer al menos una forma de construirlos para cualquier orden.

### 1.1 Un poco de historia



Lo Shu

En la antigua China ya se conocían los cuadrados mágicos desde el III milenio a. C., como atestigua el Lo Shu. Según la leyenda, un cierto día se produjo el

desbordamiento de un río; la gente, temerosa, intentó hacer una ofrenda al Dios del río Lo para calmar su ira. Sin embargo, cada vez que lo hacían, aparecía una tortuga que rondaba la ofrenda sin aceptarla, hasta que un chico se dió cuenta de las peculiares marcas del caparazón de la tortuga, de este modo pudieron incluir en su ofrenda la cantidad pedida (15), quedando el Dios satisfecho y volviendo las aguas a su cauce.

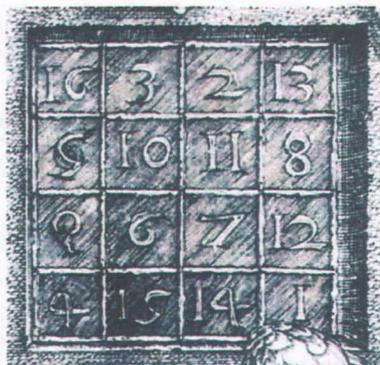
Igualmente conocieron combinaciones de esta clase los hindues, egipcios, árabes y griegos. A tales cuadrados, las diferentes culturas les han atribuido propiedades astrológicas y divinotorias portentosas grabándose con frecuencia en talismanes. Así, como recoge Cornelius Agrippa en *De occulta philosophia libri tres* (1533), el cuadrado de orden 3 (suma 15) estaba consagrado a Saturno, el de 4 (suma 34) a Júpiter, el de 5 (suma 65) a Marte, el del 6 (suma 111) al Sol, el del 7 (suma 175) a Venus, el del 8 (suma 260) a Mercurio y el de 9 (suma 369) a la Luna; idéntica atribución puede encontrarse en la astrología hindú.

La introducción de los cuadrados mágicos en occidente se atribuye a Emanuel Moschopoulos en torno al siglo XIV, autor de un manuscrito en el que por vez primera se explican algunos métodos para construirlos. Con posterioridad, el estudio de sus propiedades, ya con carácter científico, atrajo la atención de grandes matemáticos que dedicaron al asunto obras diversas a pesar del desconocimiento práctico de los cuadrados mágicos. Entre ellos cabe citar a Stifel, Fermat, Pascal, Leibnitz, Frenicle, Bachet, La Hire, Saurin, Euler, ... podemos decir que ningún matemático ilustre ha podido escapar a su hechizo.

El cuadrado mágico de Alberto Dureró, tallado en su obra *Melancolía* está considerado el primero de las artes europeas. En el cuadrado de orden cuatro se obtiene la constante mágica (34) en filas, columnas, diagonales principales, y en las cuatro submatrices de orden 2 en las que puede dividirse el cuadrado, sumando los números de las esquinas, los cuatro números centrales, los dos números centrales de las filas (o columnas) primera y última, etc. y siendo las dos cifras centrales de la última fila 1514 el año de ejecución de la obra.



Melancolía de Alberto Durero



Detalle "cuadrado mágico" en la esquina superior derecha de Melancolía

## 1.2 Construcción de algunos cuadrados mágicos

En la literatura, podemos encontrar una cantidad extensa de cuadrados mágicos, así como algoritmos para construirlos. En este trabajo nos centramos en aquellos que muestran patrones regulares para su construcción, siendo estos los más conocidos por limitarse a las características de un cuadrado mágico y a su sencilla construcción.

De manera adicional, pueden imponerse condiciones adicionales al cuadrado, obteniéndose cuadrados bi-mágicos, tri-mágicos, etc. Análogamente pueden construirse círculos, polígonos y cubos mágicos.

No existe un método general para construir cuadrados mágicos de cualquier orden, siendo necesario distinguir entre los de orden impar, los de orden múltiplo de 4 y el resto de orden par ( $4n + 2$ ).

### 1.2.1 Cuadrados mágicos de orden impar

La forma más conocida para construir cuadrados mágicos de orden impar es usando el método publicado en 1691 por *Simon de la Loubere*, llamado a veces método Siamés, país en el que *de la Loubere* desempeñó el cargo de embajador de Luis XIV, método bien conocido por los astrólogos orientales de aquella época.



El entorno de programación **Matlab** cuenta con el comando

```
magic(n)
```

que genera los cuadrados mágicos de cualquier orden, que para el caso impar muestra específicamente el obtenido por el método Siamés.

### 1.2.2 Cuadrados mágicos de orden múltiplo de 4

Hemos mencionado que no es conocido un algoritmo para generar cuadrados mágicos de cualquier orden y principalmente es necesario separarlo en 3 casos, orden impar, orden múltiplo de 4 y orden resto de los pares. El método Siamés no es factible para otro orden que no sea impar dado que los de orden par no cuentan con una columna ni renglón central, que resulta indispensable para iniciar con dicho método.

Un método simple para construir cuadrados mágicos de orden múltiplo de cuatro se describe de la siguiente forma: Fijemos un cuadrado con los números dispuestos consecutivamente de manera lexicográfica, disposición en la que como sabemos, las sumas de las diagonales son la constante mágica  $s$ . Una vez hecho esto, y conservando la submatriz central de orden  $n/2$  y las cuatro submatrices de esquina de orden  $n/4$  los números restantes se giran  $180^\circ$  respecto del centro del cuadrado, o si se prefiere se reacomodan en orden decreciente (en ambos casos el resultado es el mismo).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

⇒

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Una variante es el siguiente procedimiento: rotar  $180^\circ$  los valores seleccionados por la siguiente partición.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

⇒

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

### 1.2.2.1 Un algoritmo para los cuadrados mágicos de orden múltiplos de 4

Los cuadrados mágicos de orden múltiplos de 4, siguen patrones muy sencillos, sin embargo, un algoritmo con patrones regulares con mayor riqueza que los anteriores se muestra en Matlab dando valores múltiplos de 4 al comando `mágic(n)` que en los primeros casos muestra.

$$\text{magic}(4) = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{magic}(8) = \begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$

El patrón que sigue se describe en el siguiente algoritmo:

```

para j=1:n,
  para i=1:n,
    Si  $(i \equiv 1 \pmod{4})$  o  $i \equiv 0 \pmod{4}$ ) y  $(j \equiv 1 \pmod{4})$  o  $j \equiv 0 \pmod{4}$ )
      Hacer  $A(j,i) = n*(j-1) + i$ 
    Si  $j \equiv 1 \pmod{4}$  o  $j \equiv 0 \pmod{4}$ 
      Hacer  $A(n+1-j, n+1-i) = n*(j-1) + i$ 
    Si  $i \equiv 1 \pmod{4}$  o  $i \equiv 0 \pmod{4}$ 
      Hacer  $A(n+1-j, n+1-i) = n*(j-1) + i$ 
    en otro caso hacer  $A(j,i) = n*(j-1) + i$ 
  
```

A parte de estos algoritmos, Matlab es capaz de generar cuadrados mágicos de orden  $4n + 2$ , el cual no contempla este trabajo.

### 1.3 Una forma de obtener cuadrados mágicos a partir de cuadrados mágicos

No debemos olvidar que las construcciones anteriores no representan la totalidad de los cuadrados mágicos, de hecho representan una mínima cantidad. Observemos algunos ejemplos de orden 4 sin aparente patrón regular.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 & 16 \\ 12 & 14 & 3 & 5 \\ 13 & 7 & 10 & 4 \\ 8 & 11 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 16 & 14 \\ 8 & 15 & 2 & 9 \\ 13 & 6 & 11 & 4 \\ 12 & 10 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 & 16 \\ 12 & 15 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 14 & 9 \\ 13 & 10 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Estos ejemplos no presentan ningún patrón de construcción y sin embargo son cuadrados mágicos. Si además nos permitimos la libertad de colocar cualquier valor real en cada entrada, hallaremos con facilidad un cuadrado mágico. Como observamos en el caso  $n = 3$ . Ocuparemos un subíndice para indicar cual es el valor de la constante mágica.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{15} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_3$$

Ahora nuestro concepto de cuadrado mágico es más amplio, por que ya no nos interesa si las entradas son consecutivas, de hecho pueden ser cualquiera. Este concepto amplía nuestro panorama y permite la posibilidad de generar nuevos cuadrados mágicos a través de algunos ya conocidos.

Observemos que es posible generar nuevos cuadrados mágicos a partir de dos operaciones elementales, suma de cuadrados mágicos y producto por escalares. Consideremos los cuadrados mágicos  $X$  y  $Y$  cuyas constantes mágicas son 15 y 3 respectivamente.

$$X = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{15} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3$$

Con la operación vectorial de suma de matrices, es posible observar al cuadrado mágico  $X + Y$  cuya constante mágica es 18

$$X + Y = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{18}$$

Veamos otros dos ejemplos.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_3 \\ \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{15} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 &= \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}_{18} \end{aligned}$$

En todos estos ejemplos se observa que la constante mágica de la matriz resultante es la suma de las constantes mágicas de los sumandos.

Utilizando la operación vectorial producto por escalar como se dispone en el espacio de matrices podemos considerar el siguiente ejemplo.

Sea el cuadrado mágico  $X$  cuya constante mágica es 3

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_3$$

y el escalar  $\lambda = \frac{1}{3}$ , es posible considerar a  $\lambda X$  como un cuadrado mágico.

$$\lambda X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}_1$$

Y un ejemplo más.

$$\pi \left( \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{15} \right) = \begin{bmatrix} 2\pi & 7\pi & 6\pi \\ 9\pi & 5\pi & \pi \\ 4\pi & 3\pi & 8\pi \end{bmatrix}_{15\pi}$$

En estos casos se observa que el escalar afecta tanto a las entradas del cuadrado mágico como a la constante mágica.

Estas dos operaciones inducen la estructura de un espacio vectorial, y demostrarlo para el caso general resulta simple, por lo cual omitimos la demostración. Basta plantear dos cuadrados mágicos  $X, Y$  del mismo orden  $n$  y un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y demostrar que  $X + \lambda Y$  es también un cuadrado mágico de orden  $n$ .

De hecho se están ocupando las mismas operaciones que definen al espacio vectorial de matrices, por lo que podemos observar que el espacio de cuadrados mágicos es un subespacio del espacio vectorial de matrices cuadradas. En el siguiente capítulo describiremos algunos elementos de los espacios vectoriales con la finalidad de describir el subespacio de los cuadrados mágicos.

## Capítulo 2

### El Espacio Mágico $V(s)_n$

Con los ejemplos del capítulo anterior ya tenemos un panorama general de la forma del espacio vectorial de cuadrados mágicos. Nuestro interés en este capítulo se centra en el estudio de cuadrados mágicos cuya constante mágica sea cero. Así que definimos una transformación lineal, cuyo espacio nulo es precisamente el *espacio mágico*.

**Definición 2.1** Sea  $M_n$  el espacio de matrices cuadradas de orden  $n$ , y  $\bar{1}$  el vector columna de 1's en  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos "magia" a la transformación  $T_n : M_n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  de la siguiente forma: para la matriz  $X = [x_{ij}] \in M_n$

$$T_n(X) = \begin{pmatrix} X\bar{1} \\ X^t\bar{1} \\ tr_p(X) \\ tr_s(X) \end{pmatrix}$$

donde

$$tr_p(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}$$
$$tr_s(X) = \sum_{i=1}^n x_{i,n+1-i}$$

Matemáticamente estamos acostumbrados a la notación de traza de una matriz, sin embargo, en esta tesis utilizamos el término traza principal ( $tr_p X$ ) cuando nos referimos a la traza usual, y traza secundaria ( $tr_s X$ ).

Así, el espacio nulo de  $T_n$  consta de cualquier matriz cuya suma de columnas, renglones y dos diagonales es cero.

Consideremos

$$V(s)_n = \{X \in M_n \mid T_n(X) = s\bar{1}\}$$

donde  $\bar{1}$ , es el vector de 1's de orden  $2n+2$  y  $s$  es un real, que representa a la constante mágica.

Si observamos que para la matriz cuadrada  $\overline{1_{n \times n}}$  con todas sus entradas 1,  $T_n(\overline{1_{n \times n}}) = n \overline{1_{(2n+2) \times 1}}$ , resulta sencillo representar a  $V(s)$  como

$$V(s)_n = \frac{s}{n} \overline{1_{n \times n}} + z, \quad \text{con } z \in \ker(T)$$

Donde  $\frac{s}{n} \overline{1_{n \times n}}$  es un cuadrado mágico de suma  $s$ , y  $z$  es cualquier cuadrado mágico de suma 0. Por lo que  $V(0)_n = \ker(T_n)$  que llamamos espacio mágico de orden  $n$ . Bajo esta idea, cualquier cuadrado mágico de orden  $n$  con constante mágica  $s \neq 0$ , se puede obtener a partir de una traslación del espacio de cuadrados mágicos de orden  $n$ , de suma cero. Por lo que nuestra atención se centra en el estudio del espacio vectorial mágico de suma cero.

## 2.1 Dimensión del espacio mágico de suma cero

Lo primero que necesitamos conocer es la dimensión de este espacio mágico. Basados en el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal, tenemos que

$$\dim(V(0)_n) = \dim(\ker(T_n)) = \dim(\text{dom}(T_n)) - \dim(\text{rang}(T_n)).$$

Hasta el momento lo único que sabemos es que la dimensión del rango está acotada

$$\dim(\text{rang}(T_n)) \leq 2n + 2$$

por consiguiente si calculamos la dimensión del rango de  $T_n$ , obtenemos con una resta la dimensión del espacio mágico.

**Teorema 2.2** *La dimensión del rango de  $T_n$  es  $2n + 1$ . ( $\dim(\text{rang}(T_n)) = 2n + 1$ )*

**Prueba.** Sea  $X \in M_n$ , la cual podemos escribir por columnas  $c_i$  o filas  $r_i^t$

$$X = [c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n] = \begin{bmatrix} r_1^t \\ r_2^t \\ \vdots \\ r_n^t \end{bmatrix}$$

considerense los vectores asociados a la diagonal principal y secundaria

$$d_p(X) = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d_s(X) = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n-1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}$$

Con esto la transformación "magia" para  $X$  se escribe como:

$$T_n(X) = \begin{pmatrix} \bar{1}^t c_1 \\ \vdots \\ \bar{1}^t c_n \\ r_1^t \bar{1} \\ \vdots \\ r_n^t \bar{1} \\ \bar{1}^t d_p \\ \bar{1}^t d_s \end{pmatrix}$$

Toda matriz  $X$  puede ordenarse como un vector dentro de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , sin pérdida de generalidad consideremos  $S_I$  un sistema coordenado de ordenamiento para  $M_n$  y sea  $X^V$ , el vector asociado a  $X$  bajo ese sistema. Con esto observamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{T_n} & \mathbb{R}^{2n+2} \\ S_I \downarrow & & \downarrow I \\ \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{A_T} & \mathbb{R}^{2n+2} \end{array}$$

por lo que la matriz asociada a  $T_n$  (que denotamos  $A_T$ ) es de orden  $(2n+2) \times n^2$ .

Todos los renglones de  $A_T$  tienen coeficientes 1 y 0 solamente, para distinguir donde van los 1's en cada renglón denotamos a los vectores de coeficientes como  $\{\bar{1}(c_1), \dots, \bar{1}(c_n), \bar{1}(r_1), \dots, \bar{1}(r_n), \bar{1}(d_p), \bar{1}(d_s)\}$ , con esto

$$A_T = \begin{bmatrix} \bar{1}(c_1)^t \\ \vdots \\ \bar{1}(c_n)^t \\ \bar{1}(r_1)^t \\ \vdots \\ \bar{1}(r_n)^t \\ \bar{1}(d_p)^t \\ \bar{1}(d_s)^t \end{bmatrix} = [\bar{1}(c_1) \mid \dots \mid \bar{1}(c_n) \mid \bar{1}(r_1) \mid \dots \mid \bar{1}(r_n) \mid \bar{1}(d_p) \mid \bar{1}(d_s)]^t$$

Por lo que la transformación "magia" para  $X$ , la podemos escribir como

$$T_n(X) = A_T X^V$$

Observemos que la suma de todos los vectores renglón asociados a las columnas nos da el vector  $\bar{1}$  y lo mismo es cierto para vectores asociados a los renglones, es decir

$$\bar{1}(c_1) + \dots + \bar{1}(c_n) = \bar{1} = \bar{1}(r_1) + \dots + \bar{1}(r_n)$$

por consiguiente debemos observar que si eliminamos uno de los renglones de  $A_7$ , los restantes son linealmente independientes.

Eliminando el vector  $\bar{1}(r_1)$ , observemos que los restantes son linealmente independientes.

Consideremos

$$\alpha_1 \bar{1}(d_p) + \alpha_2 \bar{1}(d_s) + \sum_{i=2}^n \alpha_{i+1} \bar{1}(r_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_{n+i+1} \bar{1}(c_i) = \bar{0}$$

esto plantea un sistema de  $n^2$  ecuaciones en  $\bar{\alpha}^t = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1})$  variables, que escribimos en la forma

$$M_{n \times n}(\bar{\alpha}) = [\mu_{l,m}(\bar{\alpha})] = \bar{0}$$

utilizando el orden asignado a los vectores de coeficientes, por ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_{11}(\bar{\alpha}) = \alpha_1 + \alpha_{n+2} & \mu_{12}(\bar{\alpha}) = \alpha_{n+3} & \cdots & \mu_{1n}(\bar{\alpha}) = \alpha_2 + \alpha_{2n+1} \\ \mu_{21}(\bar{\alpha}) = \alpha_3 + \alpha_{n+2} & \mu_{22}(\bar{\alpha}) = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_{n+2} & \cdots & \mu_{2n}(\bar{\alpha}) = \alpha_3 + \alpha_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1}(\bar{\alpha}) = \alpha_2 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} & \mu_{n2}(\bar{\alpha}) = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+3} & \cdots & \mu_{nn}(\bar{\alpha}) = \alpha_1 + \alpha_{n+1} + \alpha_{2n+1} \end{array}$$

Para poder escribir este sistema en forma compacta, sólo contaremos el número de términos que aparecen en  $\mu_{l,m}$  y escribimos ese valor como el elemento  $z_{l,m}$  de la matriz  $Z_n$  de orden  $n$ .

Se observa que las entradas de  $Z_n$  sólo pueden tomar los valores  $\{1, 2, 3, 4\}$  en el caso impar y  $\{1, 2, 3\}$  en el caso par.

Para los casos  $n = 7, 8$  tenemos las matrices  $Z_7$  y  $Z_8$ .

$$Z_7 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad Z_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

así que en general  $z_{1,2} = \dots = z_{1,n-1} = 1$ ,  $z_{i,i} = z_{i,n+1-i} = 3$  para  $i = 2, \dots, n$ . En el caso impar  $z_{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}} = 4$  y el resto de  $z_{l,m} = 2$ .

que escribimos de la siguiente forma:

$$Z_{2k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \dots & & 1 & 2 \\ 2 & 3 & & & \mathbf{2} & & 3 & 2 \\ & & \ddots & & & & & \\ \vdots & \mathbf{2} & & 3 & 2 & 3 & & \mathbf{2} & \vdots \\ & & & 2 & 4 & 2 & & & \\ & & & 3 & 2 & 3 & & & \\ & & & & & & & & \\ 2 & 3 & & & \mathbf{2} & & & 3 & 2 \\ 3 & 2 & & \dots & & & & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z_{2k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \dots & & 1 & 2 \\ 2 & 3 & & & \mathbf{2} & & 3 & 2 \\ & & \ddots & & & & & \\ \vdots & \mathbf{2} & & 3 & 3 & & \mathbf{2} & \vdots \\ & & & 3 & 3 & & & \\ & & & & & & & \\ 2 & 3 & & & \mathbf{2} & & & 3 & 2 \\ 3 & 2 & & \dots & & & & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora lo que nos resta es observar que la única solución posible de  $M(\bar{\alpha}) = \bar{0}$  es  $\bar{\alpha} = \bar{0}$

Como la matriz  $Z_n$  aporta la información de cuantos términos tiene cada ecuación, observamos que donde  $\mu_{i,m}(\bar{\alpha})$  tenga un sólo término implica que la  $\alpha_i$  correspondiente debe ser cero.

Como  $z_{i,1} = 1$  para  $i = 2, \dots, n-1$  entonces  $\alpha_{n+i+1} = 0$  para  $i = 2, \dots, n-1$ .

Así que ahora  $\mu_{i,m}$  consta de menos términos lo que plantea un sistema reducido donde ya no aparecen ciertos  $\alpha_i$ , por lo que nuevamente tenemos una matriz  $Z_n$  para el sistema reducido

$$Z_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad Z_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

en general  $z_{1,2} = \dots = z_{1,n-1} = 0$ ,  $z_{i,1} = z_{i,n} = z_{i,i} = z_{i,n+1-i} = 2$  para  $i =$

$2, \dots, n-1, z_{1,1} = z_{1,n} = 2, z_{n,1} = z_{n,n} = 3$ . en el caso impar  $z_{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}} = 3$ , y el resto de  $z_{i,m} = 1$ .

$$Z_{2k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & 2 & & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & \mathbf{1} & & 2 & 1 & 2 & \diagup & \mathbf{1} & \vdots \\ & & & 1 & 3 & 1 & & & \\ & & & 2 & 1 & 2 & & & \\ & & \diagup & & & & \ddots & & \\ 2 & 2 & & \mathbf{1} & & 2 & 2 \\ 3 & 1 & \dots & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z_{2k} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & 2 & & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & \mathbf{1} & & 2 & 2 & \diagup & \mathbf{1} & \vdots \\ & & & 2 & 2 & & & \\ & & & 2 & 2 & & & \\ & & \diagup & & & \ddots & & \\ 2 & 2 & & \mathbf{1} & & 2 & 2 \\ 3 & 1 & \dots & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

cada ecuación que tiene un solo término implica que la correspondiente  $\alpha_i$  es cero.

Como  $z_{2,3} = z_{i,2} = z_{j,3} = 1$  con  $i = 3, \dots, n-2$  y  $j = n-1, n$  por lo tanto  $\alpha_{i+1} = 0$  para  $i = 2, \dots, n$ .

Lo que nos muestra una nueva matriz de índices  $Z_n$  reducida

$$Z_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad Z_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

en general  $z_{i,1} = z_{i,n} = z_{i,i} = z_{i,n+1-i} = 1$  para  $i = 2, \dots, n-1, z_{1,1} = z_{1,n} = z_{n,1} =$

$z_{n,n} = 2$ . En el caso impar  $z_{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}} = 2$ , y el resto de  $z_{l,m} = 0$ .

$$Z_{2k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ & & \ddots & & & / \\ \vdots & \mathbf{0} & & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \vdots \\ & & & 0 & 2 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & / & & & & \ddots & \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \dots & & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{2k} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ & & \ddots & & & / \\ \vdots & \mathbf{0} & & 1 & 1 & & \mathbf{0} & \vdots \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & / & & & & \ddots & \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \dots & & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

como  $z_{2,1} = z_{2,2} = z_{2,n-1} = z_{2,n} = 1$  con  $i = 3, \dots, n - 2$  y  $j = n - 1, n$  finalmente  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{n+2} = \alpha_{2n+1} = 0$ .

Así, sabemos que la única forma de expresar el vector cero es con  $\alpha$ 's igual a cero. Por lo tanto los vectores

$$\{\bar{1}(c_1), \dots, \bar{1}(c_n), \bar{1}(r_2), \dots, \bar{1}(r_n), \bar{1}(d_p), \bar{1}(d_s)\}$$

son linealmente independientes. Lo que demuestra que  $\dim(\text{rank}(T)) = 2n + 1$ .

La estructura de esta demostración es valida para  $n \geq 5$ . Veamos como es la demostración para  $n = 3, n = 4$

**Caso  $n = 3$**

Apliquemos el procedimiento anterior hasta donde sea posible

$$\alpha_1 \bar{1}(d_p) + \alpha_2 \bar{1}(d_n) + \sum_{i=2}^3 \alpha_{i+1} \bar{1}(r_i) + \sum_{i=1}^3 \alpha_{i+4} \bar{1}(c_i) = \bar{0}$$

usando

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos  $\alpha_6 = 0$ .

Lo que reduce el sistema

$$\alpha_1 \bar{l}(d_p) + \alpha_2 \bar{l}(d_n) + \sum_{i=2}^3 \alpha_{i+1} \bar{l}(r_i) + \alpha_5 \bar{l}(c_1) + \alpha_7 \bar{l}(c_3) = \bar{0}$$

que tiene asociada la matriz de índices

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

obteniendo  $\alpha_4 = 0$ .

Lo que reduciendo el sistema

$$\alpha_1 \bar{l}(d_p) + \alpha_2 \bar{l}(d_n) + \alpha_3 \bar{l}(r_2) + \alpha_5 \bar{l}(c_1) + \alpha_7 \bar{l}(c_3) = \bar{0}$$

con la matriz de índices asociada

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ahora nos hemos quedado sin entradas con valor 1 en  $Z_3$ , lo que nos limita a continuar ese procedimiento, sin embargo tenemos  $\mu_{2,1} = \alpha_3 + \alpha_5$  y  $\mu_{2,3} = \alpha_3 + \alpha_7$  obteniendo  $\alpha_5 = \alpha_7$ , y como  $\mu_{1,1} = \alpha_1 + \alpha_5$  y  $\mu_{1,3} = \alpha_2 + \alpha_7$  obtenemos  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Por otra parte,  $\mu_{2,2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  entonces  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ . Por lo tanto  $\alpha_i = 0$  para todo  $i$ .

En conclusión, el rango es 7

**Caso  $n = 4$**

Apliquemos el procedimiento hasta donde sea posible

$$\alpha_1 \bar{l}(d_p) + \alpha_2 \bar{l}(d_n) + \sum_{i=2}^4 \alpha_{i+1} \bar{l}(r_i) + \sum_{i=1}^4 \alpha_{i+4} \bar{l}(c_i) = \bar{0}$$

que tiene la matriz de índices asociada

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos  $\alpha_7 = \alpha_8 = 0$

Lo que reduce el sistema

$$\alpha_1 \bar{l}(d_p) + \alpha_2 \bar{l}(d_n) + \sum_{i=2}^4 \alpha_{i+1} \bar{l}(r_i) + \alpha_6 \bar{l}(c_1) + \alpha_9 \bar{l}(c_4) = \bar{0}$$

que tiene la matriz de índices asociada

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos  $\alpha_5 = 0$

Lo que reduce el sistema

$$\alpha_1 \bar{1}(d_p) + \alpha_2 \bar{1}(d_n) + \alpha_3 \bar{1}(r_2) + \alpha_4 \bar{1}(r_3) + \alpha_6 \bar{1}(c_1) + \alpha_9 \bar{1}(c_4) = \bar{0},$$

que tiene la matriz de índices asociada

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ahora nos hemos quedado sin entradas con valor 1 en  $Z_4$ , lo que nos limita a continuar ese procedimiento, sin embargo apreciamos  $\mu_{2,2} = \alpha_1 + \alpha_3$  y  $\mu_{1,1} = \alpha_1 + \alpha_6$  obteniendo  $\alpha_3 = \alpha_6$ , y como  $\mu_{2,1} = \alpha_3 + \alpha_6$  obtenemos  $\alpha_3 = \alpha_6 = 0$

Que muestra nuevamente un sistema reducido de la siguiente forma

$$\alpha_1 \bar{1}(d_p) + \alpha_2 \bar{1}(d_n) + \alpha_4 \bar{1}(r_3) + \alpha_9 \bar{1}(c_4) = \bar{0}$$

que tiene asociada la matriz  $Z_4$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y como  $z_{3,1} = z_{2,2} = z_{2,3} = z_{2,4} = 1$  finalmente muestra  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_9 = 0$ .

Por lo tanto  $\alpha_i = 0$  para todo  $i$ , entonces el rango de la transformación "magia" de orden 4 es 9.

Con lo que hemos demostrado que el rango de la transformación "magia" es  $2n+1$  para cualquier orden. ■

Ya que conocemos el rango de  $T_n$ , la dimensión de  $V(0)_n$  es consecuencia por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal, la dimensión del espacio mágico de suma cero es

$$\dim(V(0)_n) = n^2 - 2n - 1.$$

Recordemos además que tenemos una solución no homogénea que es de nuestro interés, esta es cuando  $T_n(X) = s\bar{1}$ , que representa pensar en  $A_T X^V = s\bar{1}$  sistema nohomogeneo que sin duda es consistente.

## 2.2 Cuadrados mágicos con suma distinta de cero

$$V(s)_n$$

Como mencionamos al principio de este capítulo, existe una diferencia conceptual entre las matrices mágicas que suman cero y las matrices mágicas que suman distinto de cero, que hemos llamado  $V(s)$  las cuales satisfacen,

$$T_n(X) = s\bar{1}$$

ya conocemos algunas de ellas, entre las que se encuentran aquellas con entradas consecutivas a partir de 1, de los cuales sabemos que

$$s = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

en contraste con este tipo de vectores podemos pensar en aquellos cuyas entradas pueden repetirse y valer cero. Resulta interesante pensar cuantos elementos distintos de cero podemos mínimamente tener para formar un cuadrado mágico de suma  $s \in \mathbb{N}$ , y si es posible generalizarlo para cualquier orden  $n$ . Un ejemplo sencillo sería el siguiente.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Este cuadrado mágico tiene 4 entradas distintas de cero, una por cada renglón o columna, y es conocida como una matriz de permutación. No es cualquier matriz de permutación, porque en este caso observamos que también hay un sólo 1 en cada una de las dos diagonales, hecho que la convierte en un cuadrado mágico.

Así, nos preguntamos si existe para cualquier orden una matriz de permutación de la matriz identidad que sea a su vez un cuadrado mágico. El primer caso que vemos que no se satisface es  $n = 3$ , es fácil verlo, porque el número de matrices de permutación de orden 3 es 6, así que basta observar que las permutaciones de orden tres saturan una diagonal o la vacían, pero a partir  $n \geq 4$  se puede demostrar que existe por lo menos una matriz de permutación  $P_n^*$  mágica, tal que

$$T_n(P_n^*) = \bar{1}$$

así que, en términos del orden  $n$ , formulamos una  $P_n^*$ , separándolo en los casos par e impar.

**Caso par  $n = 2k$ .**

Consideremos  $P_n^* = [\rho_{i,j}]$  tal que

$$\begin{aligned}\rho_{1,1} &= 1, \\ \rho_{i,i+1} &= 1 \text{ para } 2 \leq i \leq k, \\ \rho_{i,i+2} &= 1 \text{ para } k+1 \leq i \leq 2k-2, \\ \rho_{2k-1,2} &= 1, \\ \rho_{2k,k+1} &= 1\end{aligned}$$

Siendo un ejemplo  $P_8^*$

$$P_8^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Caso impar  $n = 2k + 1$ .**

Consideremos  $P_n^* = [\rho_{i,j}]$  tal que

$$\begin{aligned}\rho_{1,1} &= 1, \\ \rho_{i,n+2-i} &= 1 \text{ para } 2 \leq i \leq 2k-1, \\ \rho_{2k,2} &= 1, \\ \rho_{2k+1,3} &= 1\end{aligned}$$

Siendo un ejemplo  $P_7^*$

$$P_7^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se afirma que no existe un cuadrado mágico con menos entradas distintas de cero, porque de tener un cuadrado mágico con menos de  $n$  elementos por lo menos alguna columna sería completamente de ceros, por lo que no sería un cuadrado mágico con  $s \neq 0$ .

¿Existen cuadrados mágicos de orden  $n$  de suma distinta de cero con exactamente  $n+1$  elementos distintos de cero?. La respuesta a esta pregunta la formulamos como teorema

**Teorema 2.3** Si  $T_n(X) = \bar{1}$  y  $n \geq 4$  entonces  $X$  no puede tener exactamente  $n + 1$  elementos distintos de cero.

**Prueba.** Supongamos que la matriz  $X$  es tal que  $T_n(X) = s\bar{1}$ , y que  $X$  tiene exactamente  $n + 1$  entradas distintas de cero, entonces, sin pérdida de generalidad, decimos que el renglón  $r_i^t$  es el único renglón con dos entradas distintas de cero y la columna  $x_j$  es la única columna con dos entradas distintas de cero, esto implica que  $X(i, j) = a \neq 0$ , pero existe  $i^*$  tal que  $X(i^*, j) = s - a$ , entrada que es la única distinta de cero en el renglón  $r_{i^*}^t$ , por lo que dicho renglón suma  $s - a$ . Por lo tanto  $X$  no es tal que  $T_n(X) = s\bar{1}$ . ■

¿Que ocurre con los cuadrados mágicos de suma distinta de cero con  $n+2$  entradas distintas de cero?

Resulta muy sencillo explicar los motivos por los que no existe ningún cuadrado mágico de orden 4 con 6 entradas distintas de cero, es por pequeño, así que mejor mostremos órdenes mayores.

Para  $n = 5$  un cuadrado mágico con 7 entradas distintas de cero se obtiene de la siguiente manera.

Considere la permutación mágica  $P_5$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz  $Z \in V(0)_5$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así que el cuadrado mágico  $P_5 + Z$  tiene 7 entradas distintas de cero.

$$2P_5 + Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos un caso más para  $n = 6$  tomando la permutación mágica  $P_6^*$  formulada en esta sección.

$$P_6^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos escoger por ejemplo la matriz  $Z_6$  con valor  $-1$  en sus entradas  $(2,3)$  y  $(6,4)$ .

$$Z_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así que la matriz  $2P_6^* + Z_6$  es mágica y tiene únicamente 8 entradas distintas de cero.

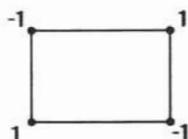
$$2P_6^* + Z_6 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La descomposición en sumandos de este cuadrado sugiere que la suma de un múltiplo de una permutación mágica con un cuadrado mágico de suma cero de cuatro entradas distintas de cero forman un cuadrado mágico con  $n+2$  entradas distintas de cero, si esto se hace de manera adecuada. Para poder construirlo se puede usar el siguiente procedimiento:

1. Se ocupa una permutación mágica  $P_n$  que posea dos entradas  $(i_1, j_1)$  y  $(i_2, j_2)$  distintas de cero con  $i \neq j$  y  $i + j \neq n + 1$ .
2. Además tiene que ser tal que  $i_1 \neq j_2$  y  $i_2 \neq j_1$
3. Sea la matriz  $Z_n$  con  $a(i_1, j_1) = -1$ ,  $a(i_2, j_2) = -1$ ,  $a(i_1, j_2) = 1$ ,  $a(i_2, j_1) = 1$  y cero en otro caso.
4. Entonces la matriz  $2P_n + Z_n$  es un cuadrado mágico con  $n+2$  elementos distintos de cero.

Lo interesante de esto, resulta ser que el cuadrado mágico  $Z_n$  de suma cero, nos ayuda a aumentar la cantidad de entradas distintas de cero en una permutación mágica. El siguiente diagrama muestra la estructura de la matriz  $Z_n$ , mostrando sólo

sus elementos distintos de cero, entradas que no pueden encontrarse sobre ninguna de las dos diagonales.



¿Que ocurre con los cuadrados mágicos de suma distinta de cero con  $n+3$  entradas distintas de cero?

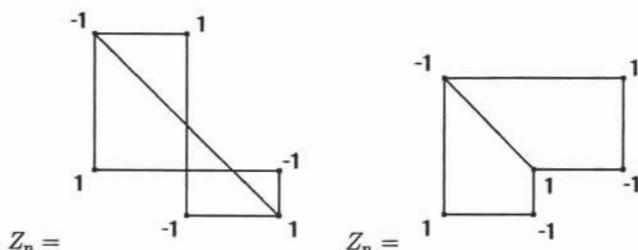
En este caso sí es posible encontrar un ejemplo para  $n = 4$  que será útil para explicar un procedimiento para cualquier orden, ahora que ya conocemos la importancia de los cuadrados mágicos de suma cero. Un ejemplo es la combinación lineal de el doble de una permutación mágica con un cuadrado mágico de suma cero con 6 entradas distintas de cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De lo que podemos concluir que para  $n \geq 4$  existen cuadrados mágicos con sólo  $n + 3$  elementos distintos de cero, y algunos son de la forma

$$2P_n + Z_n \quad \text{con} \quad Z_n \in V(0)_n$$

donde  $Z_n$  puede ser de alguna de las siguientes formas, la primera a partir de 4 y la segunda a partir de 5.



Lo importante es que en el cuadrado mágico de suma cero  $Z_n$  sólo cuenta con 6 entradas distintas de cero en el que intervienen 3 columnas, 3 renglones y una diagonal, así que debemos procurar no colocar ningún valor sobre la diagonal no utilizada.

Otra forma de generar cuadrados mágicos con sólo  $n + 3$  elementos distintos de cero, útil únicamente para el caso impar, se presenta por medio de 2 ejemplos para

los casos  $n = 5$  y  $n = 7$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y el algoritmo con patrón regular en las posiciones con valor 2, entradas que no necesariamente son fijas, útil para impares a partir de 9, de la forma  $n = 2k + 7$ .

Sea la matriz  $A_{2k+7}$  con únicos valores distintos de cero en

$$\begin{aligned} a(k+4, k+4) &= 1 & a(k+4, k+3) &= 1 & a(k+5, k+3) &= 1 \\ a(k+2, k+4) &= 1 & a(k+5, k+2) &= 1 & a(k+2, k+2) &= 1 \\ a(k+6, k+7) &= 2 & a(2k+7, k+5) &= 2 & a(k+3, 1) &= 2 \\ a(k+1, k+6) &= 2 \\ a(i, i+1) &= 2 \text{ para } i = 1, \dots, k, k+7, \dots, 2k+6 \end{aligned}$$

es un cuadrado mágico con  $n+3$  entradas distintas de cero. El ejemplo más pequeño es para  $k = 1$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

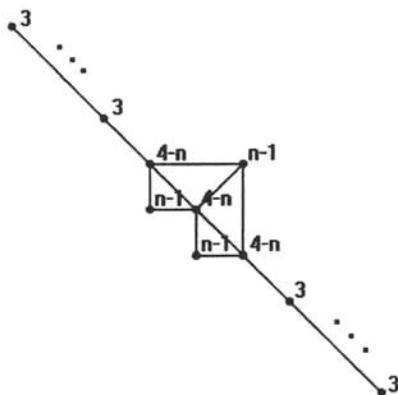
Observemos que  $A_{2k+7}$  no puede ser expresado como  $2P_n + Z_n$ .

Además de estos dos procedimientos, se ha formulado una estructura de  $n+3$  entradas distintas de cero para el caso impar saturando una de las dos diagonales, como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para construirlo en términos del orden  $n = 2k + 3$ , hay que seguir la siguiente

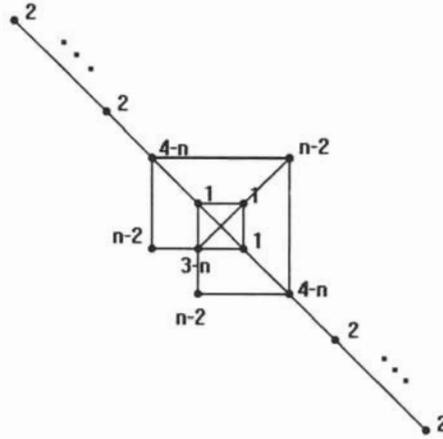
estructura:



Que es posible entender como una matriz cuadrada de orden  $n$  donde los únicos valores distintos de cero son las entradas etiquetadas, y las líneas identifican renglones, columnas o la diagonal principal o secundaria. Las líneas con puntos suspensivos indican que toda entrada sobre esa línea vale lo mismo que los extremos etiquetados.

Análogamente a la solución particular de caso impar en que se satura una diagonal, el caso par  $n = 2k + 4$  presenta por lo menos  $n + 5$  elementos distintos de cero, como se observa en la siguiente construcción:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

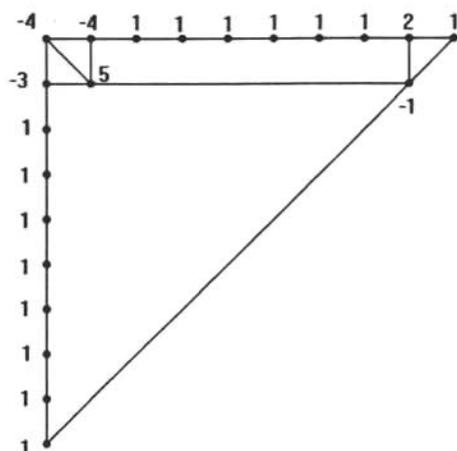


### 2.2.1 Soluciones particulares con $2n+1$ entradas distintas de cero

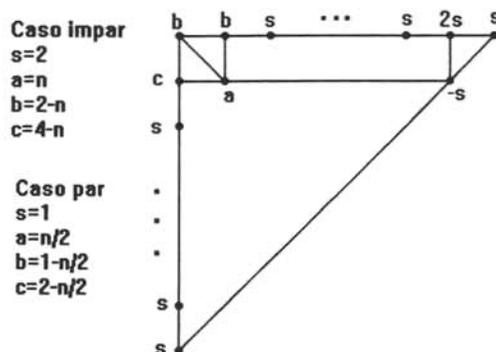
La estructura que los cuadrados mágicos tienen como espacio vectorial la hemos estudiado a partir del espacio nulo de la transformación "magia"  $T_n$ , y las soluciones particulares como  $X$  tal que  $T_n(X) = s\bar{1}$ , por lo general vamos a considerar a  $s \in \mathbb{N}$ .

Un caso muy interesante es encontrar cuadrados mágicos de suma no cero con  $2n + 1$  elementos distintos de cero, ya que la  $\dim(\text{Im}(T_n)) = 2n + 1$ . Este es de fundamental importancia, ya que lo que queremos es generar una base del espacio mágico  $V(0)_n$ , en general y en forma económica, es decir que tenga el mayor número posible de ceros que van a ser  $n^2 - 2n - 1$  elementos.

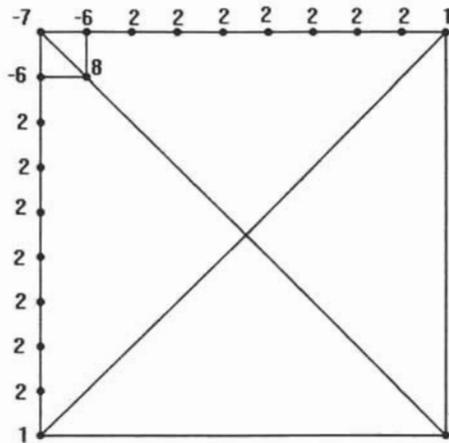
En esta sección presentaremos distintas soluciones tratando de describir las características que presentan, el orden de los ejemplos en ninguno de estos casos es exclusivo de la construcción, es decir, para cada orden  $n$  existe una solución particular con las propiedades que se describan de cada uno. Para poder entender dichos ejemplos es necesario entender que se está trabajando sobre una matriz cuadrada donde los únicos valores escritos son los distintos de cero, y que las rectas unen los puntos inicial y final de cada renglón, columna y las dos diagonales, así que en caso de existir un solo valor en cualquiera de estos, la recta será omitida, además de que dicho valor resulta ser la suma constante. La elección de los nombres a primera vista no cuenta con motivo aparente, es producto de mi experiencia e imaginación.

1. Solución "lexicográfica". ( $n = k + 3$ )

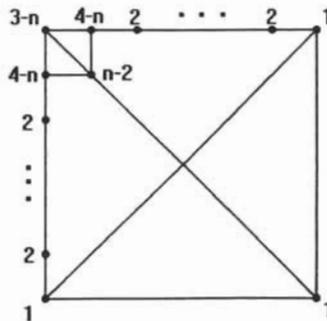
Esta idea funciona para cualquier orden, la estructura de esta solución plantea la existencia de un único elemento por cada renglón a partir del tercero, los cuales están alineados al borde izquierdo, motivo por el cual observamos solamente dos rectas horizontales; observamos 3 rectas verticales así que  $n - 3$  columnas involucran solamente un valor, estas son de la columna 3 a la  $n - 2$  y la columna  $n$ , los valores distintos de cero se clasifican en 4,  $a$  en la entrada  $(2, 2)$ ,  $b$  en  $(1, 1)$  y  $(1, 2)$ ,  $c$  en  $(2, 1)$  y  $s$  en las restantes entradas; la diferencia entre los casos par e impar recae únicamente sobre los valores de la suma, 2 en el caso impar y 1 en el caso par.



2. Solución del "barco" ( $n = k + 2$ )



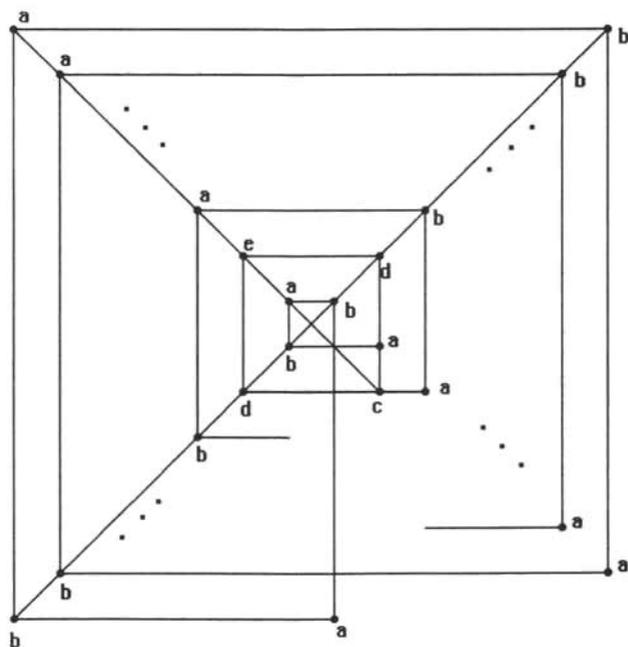
Un sutil cambio representa la diferencia entre el caso "lexicográfico" y la solución del "barco", prácticamente los valores distintos de cero se encuentran en las mismas entradas a excepción de uno, intercambiamos la entrada  $(2, n - 1)$  del "lexicográfico" por la entrada  $(n, n)$  en el "barco", este pequeñísimo cambio provoca tres rectas horizontales, tres verticales, así como tres elementos sobre la diagonal principal y dos sobre la secundaria. No existe diferencia alguna entre los casos par e impar; tres de las cuatro esquinas de la matriz valen 1, la suma constante es 2. Los valores dependientes del orden son 4,  $n - 2$  en la entrada  $(2, 2)$ ,  $4 - n$  en las entradas  $(1, 2)$  y  $(2, 1)$ , y  $3 - n$  en la entrada  $(1, 1)$ . Cuenta con la propiedad de ser simétrica con respecto a la diagonal principal.





solución que aquí proponemos cuenta con dichas propiedades, por eso observamos rectas que unen todos estos renglones y columnas, para esto es necesario tomar valores sobre toda una diagonal y la mitad mas uno en la otra diagonal, y completar con valores de manera adecuada. Aunque las soluciones sean muy parecidas, tenemos planteada una solución para el caso par a partir del orden 6 y otra para el caso impar a partir del orden 7.

$$n = 2k + 4$$



$$s = 2k + 4$$

$$a = 4k + 4$$

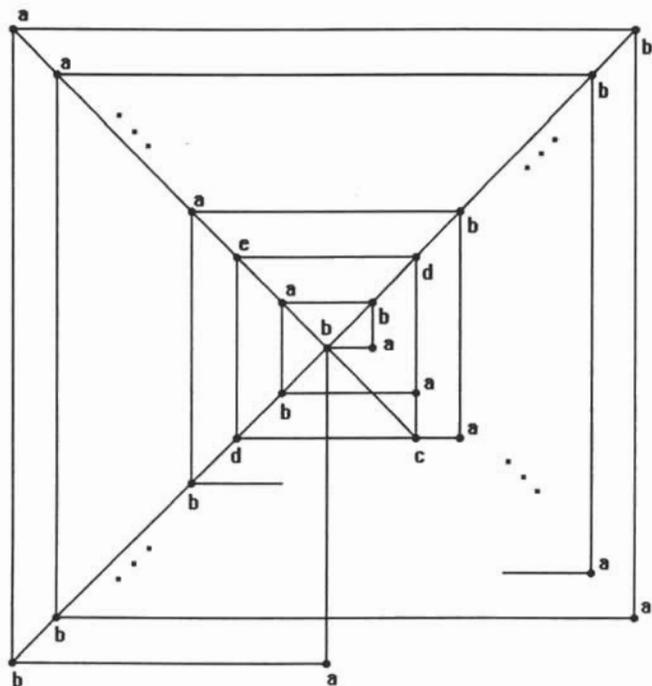
$$b = -2k$$

$$c = -2k^2 - 5k - 2$$

$$d = 2k^2 + 3k + 2$$

$$e = -2k^2 - k + 2$$

$$n = 2k + 5$$



$$s = k + 4$$

$$a = 2k + 4$$

$$b = -k$$

$$c = -k^2 - 3k - 2$$

$$d = k^2 + 2k + 2$$

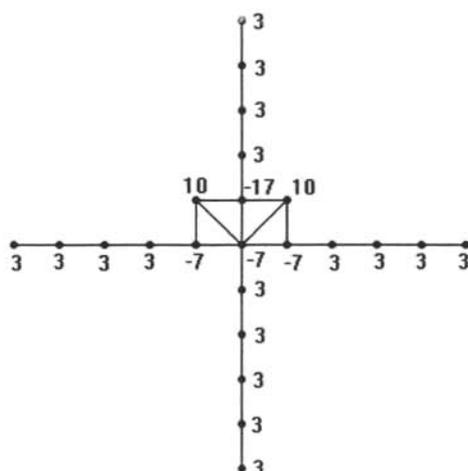
$$e = -k^2 - k + 2$$

#### 4. Soluciones "centrales"

Las soluciones centrales son aquellas que se pueden usar para generar soluciones para el orden siguiente, cuyos parámetros dependen del orden al centro de la matriz, que naturalmente no es igual para el caso par e impar. A continuación, se presentan dos soluciones para el caso impar y una para el par.

(a) Solucion "central impar con carga al centro" ( $n = 2k + 3$ )

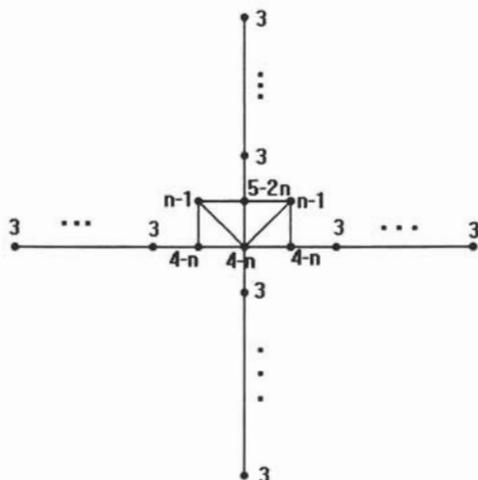
para  $n = 11$  tenemos



Esta solución presenta los valores distintos de cero en el renglón y la columna  $k + 2$  y en las entradas  $(k + 1, k + 1)$  y  $(k + 1, k + 3)$  donde el orden  $n = 2k + 3$ , la mayor propiedad que presenta es su simetría vertical, propiedad nueva y fuerte para el entendimiento de los cuadrados mágicos.

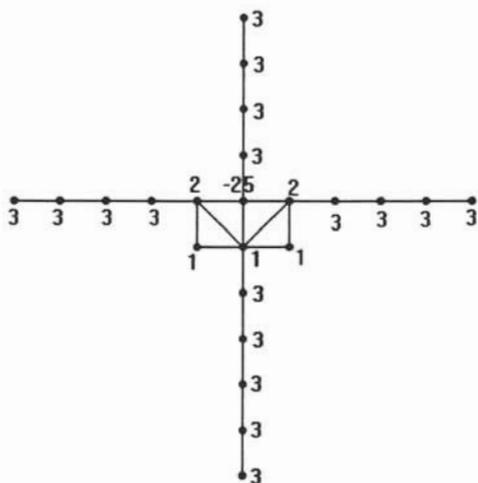
Además presenta solamente 3 parámetros dependientes del orden  $n$ .

para  $n = 2k + 3$



(b) Solución "central impar sin carga en el centro" ( $n = 2k + 3$ )

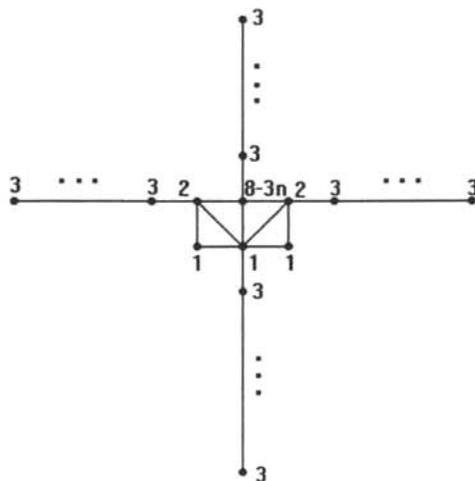
para  $n = 11$  tenemos



Una ligera diferencia con la recursiva con carga al centro al colocar las entradas distintas de cero en el renglón  $k + 1$ , la columna  $k + 2$  y las

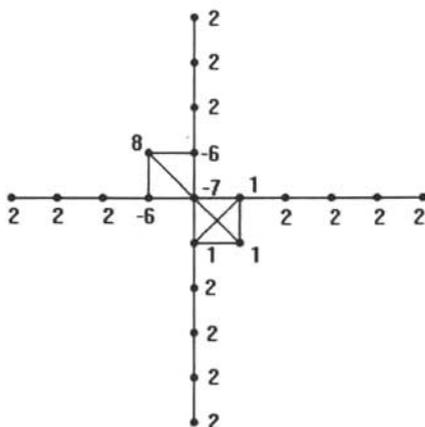
entradas  $(k+2, k+1)$  y  $(k+2, k+3)$ , sin embargo, aparte de la "simetría  $y$ " que también conserva, existe únicamente un parámetro dependiente del orden, ubicado en la entrada  $(k, k+1)$ .

para  $n = 2k + 3$



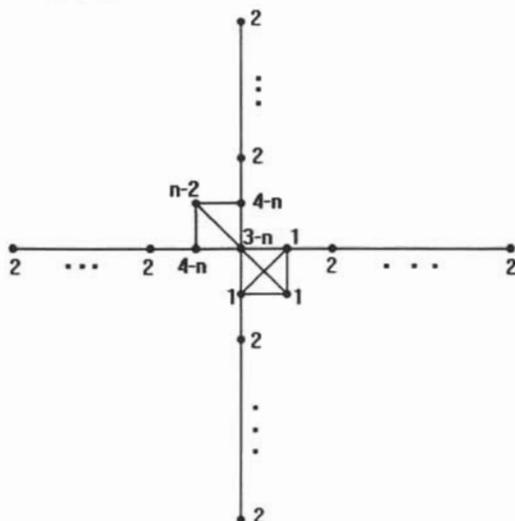
(c) Solución "central par" ( $n = 2k + 4$ )

para  $n = 10$  tenemos



Las entradas distintas de cero se encuentran en el renglón y columna  $k+2$ , así como en las entradas  $(k+1, k+1)$  y  $(k+3, k+3)$ , cuenta con tres parámetros dependientes del orden, y cuenta con la simetría traspuesta.

$$n = 2k + 4$$



## 2.3 Bases para el espacio mágico de suma cero $\mathcal{Z}_n$

En esta sección argumentamos como construir bases en el espacio mágico  $V(0)_n$ , un espacio lineal de dimensión  $n^2 - 2n - 1$ . Como en esta sección únicamente hablaremos de dicho espacio, utilizaremos una nueva notación.

$$\mathcal{Z}_n \triangleq V(0)_n$$

La idea va dirigida en dos aspectos, el primero de ellos consiste en estudiar patrones regulares que permitan representar las bases del espacio mágico en términos del orden  $n$ , y la segunda consiste en generar algoritmos que construyan bases de forma ordenada. Para empezar con esta sección necesitamos construir un marco teórico que justifique el procedimiento.

Lo primero que necesitamos es considerar una notación adecuada, así decimos que la matriz cuadrada  $X = [x_{ij}]$  es posible escribirla como

$$X = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} E_{ij}$$

es decir, una cierta combinación lineal de la base  $\{E_{ij}\}$  canónica para  $M_n$ .

Así, las soluciones particulares  $F$ , que calculamos anteriormente, con a lo más  $2n + 1$  elementos diferentes de cero se pueden expresar de la forma

$$F = \sum_{k=1}^{2n+1} \alpha_k E_{i_k j_k}$$

para algún orden de los elementos no cero.

Denotemos por  $G_n$  al espacio generado por el conjunto  $\mathcal{E}_n = \{E_{i_k j_k}\}_{k=1}^{2n+1}$

**Definición 2.4** Decimos que el conjunto  $\mathcal{E} = \{E_{i_k j_k}\}_{k=1}^{2n+1}$  es admisible si

$$G_n \cap \mathcal{Z}_n = \{\bar{0}\}$$

El interés sobre los conjuntos admisibles es debido a que nos permite obtener el siguiente resultado, que es el soporte de nuestras construcciones.

**Teorema 2.5** Si  $G_n$  es el subespacio generado por un conjunto admisible, entonces

$$\dim[(G_n \oplus [E_{ij}]) \cap \mathcal{Z}_n] = 1, \quad \text{si } E_{ij} \notin \{E_{i_k j_k}\}_{k=1}^{2n+1}$$

**Prueba.** En general:

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

Así que en este caso tenemos

$$\begin{aligned} V &= (G_n \oplus [E_{ij}]) \\ W &= \mathcal{Z}_n \end{aligned}$$

por lo que:

$$n^2 = \dim(G_n \oplus [E_{ij}]) + \dim(\mathcal{Z}_n) - \dim[(G_n \oplus [E_{ij}]) \cap \mathcal{Z}_n]$$

que implica

$$n^2 = (2n + 2) + (n^2 - 2n - 1) - \dim[(G_n \oplus [E_{ij}]) \cap \mathcal{Z}_n]$$

por lo tanto

$$\dim((G_n \oplus [E_{ij}]) \cap \mathcal{Z}_n) = 1$$

■

Ahora con el conocimiento de que la dimensión de  $(G_n \oplus [E_{ij}]) \cap \mathcal{Z}_n$  es 1, podemos nombrar como

$$\begin{aligned} Z_{ij} &\triangleq (G_n \oplus [E_{ij}]) \cap \mathcal{Z}_n \\ Z_{ij} &= \{\alpha A_{ij} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

escogiendo un cuadrado mágico  $A_{ij}$  de manera que todas las entradas distintas de cero sean los enteros más pequeños.

Veremos que es sumamente fácil calcular  $\{A_{ij}\}$  para cualquier orden  $n$ , que es una base de  $\mathcal{Z}_n$  y daremos un algoritmo para calcularlo.

Para poder presentar la solución general necesitamos numerar la base canónica de matrices  $\{E_{ij}\}$  de manera adecuada para facilitar los cálculos.

**Definición 2.6** Un ordenamiento  $\varphi_n : [1, \dots, n^2] \rightarrow [1, \dots, n] \times [1, \dots, n]$  de la forma

$$\varphi_n(k) = (i_k, j_k)$$

es admisible, si el conjunto  $\mathcal{E} = \{E_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{2n+1}$  es un conjunto admisible.

Esta teoría es suficiente para poder calcular una base de  $\mathcal{Z}_n$ , básicamente es necesario tener un ordenamiento admisible y ocupar el teorema de este capítulo, así que a continuación nos damos a la tarea de presentar un ejemplo de ordenamiento admisible para el caso impar y otro para el par.

#### 1. Caso impar.

Utilizamos la matriz  $F$  "central con carga al centro" de orden 7

$$F_7 = \begin{bmatrix} & & & & & & 3 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 3 \\ & & & & 6 & -9 & 6 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ & & & & 3 & & \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & & 3 & & \\ & & & & 3 & & \end{bmatrix}$$

así que ocuparemos las entradas con valores distintos de cero de  $F_7$  con cualquier ordenamiento para obtener un conjunto admisible. El conjunto

$$\mathcal{E}_7 = \left\{ \begin{array}{l} E_{4,3}, E_{4,5}, E_{3,5}, E_{4,4}, E_{3,3}, \\ E_{3,4}, E_{5,4}, E_{6,4}, E_{4,2}, E_{2,4}, \\ E_{4,6}, E_{7,4}, E_{4,1}, E_{1,4}, E_{4,7} \end{array} \right\}$$

es admisible.

Ahora para tener un ordenamiento admisible sólo resta numerar las entradas restantes; lo haremos de tal forma que se numeren las capas del centro hacia afuera. Para ahorrar espacio en la numeración colocamos en el arreglo  $\Phi_7$  el valor  $k$  de forma tal que

$$\varphi_7(15+k) = (i_k, j_k)$$

$$\Phi_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 22 & 23 & 24 & * & 25 & 26 & 27 \\ \hline 21 & 7 & 8 & * & 9 & 10 & 28 \\ \hline 20 & 6 & * & * & * & 11 & 29 \\ \hline * & * & * & * & * & * & * \\ \hline 19 & 5 & 1 & * & 2 & 12 & 30 \\ \hline 18 & 4 & 3 & * & 14 & 13 & 31 \\ \hline 17 & 16 & 15 & * & 34 & 33 & 32 \\ \hline \end{array}$$

## 2. Caso par

Utilizamos la matriz  $F$  "central par" de orden 8

$$F_8 = \begin{bmatrix} & & & 2 & & & & \\ & 0 & & 2 & & 0 & & \\ & & 6 & -4 & & & & \\ 2 & 2 & -4 & -5 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & & \\ 0 & & & 2 & & 0 & & \\ & & & 2 & & & & \end{bmatrix}$$

así que ocuparemos las entradas con valores distintos de cero de  $F_7$  con cualquier ordenamiento para obtener un conjunto admisible, es decir, el conjunto

$$\mathcal{E}_8 = \left\{ \begin{array}{l} E_{1,4}, E_{2,4}, E_{3,3}, E_{3,4}, E_{4,1}, E_{4,2}, \\ E_{4,3}, E_{4,4}, E_{4,5}, E_{4,6}, E_{4,7}, E_{4,8}, \\ E_{5,4}, E_{5,5}, E_{6,4}, E_{7,4}, E_{8,4} \end{array} \right\}$$

es admisible.

Y de la misma forma que en el caso impar ocupamos el arreglo  $\Phi_8$

$$\Phi_8 = \begin{array}{cccccccc} 35 & 36 & 37 & * & 38 & 39 & 40 & 41 \\ 34 & 15 & 16 & * & 17 & 18 & 19 & 42 \\ 33 & 14 & * & * & 4 & 5 & 20 & 43 \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ 32 & 13 & 3 & * & * & 6 & 21 & 44 \\ 31 & 12 & 2 & * & 1 & 7 & 22 & 45 \\ 30 & 11 & 10 & * & 9 & 8 & 23 & 46 \\ 29 & 28 & 27 & * & 26 & 25 & 24 & 47 \end{array}$$

Ahora resulta sencillo conocer una base de  $\mathcal{Z}_n$  que separamos en 2 casos, el caso par e impar. En todo momento presentaremos el ordenamiento  $\varphi_n$  por medio del arreglo  $\Phi_n$  que plantea

$$\varphi(2n + 1 + k) = (i_k, j_k)$$

Como hemos observado en estos ejemplos el ordenamiento

### 2.3.1 Caso Impar, $n = 2\mathcal{K} + 3$

Vamos a construir una base para  $\mathcal{Z}_n$ , para  $n$  impar a partir de 3. Considerando la idea que se expone en el arreglo  $\Phi_n$  en la sección anterior, se propone una numeración por capas, considerando el ordenamiento  $\Phi_3$  como el centro, así que vamos a escribir el orden  $n$  en función del número de capas que cubren  $\mathcal{Z}_3$ , denotando por  $\mathcal{K}$  al número de capas, tenemos

$$n = 2\mathcal{K} + 3$$

Estudiaremos los casos  $\mathcal{K} = 0$ ,  $\mathcal{K} = 1$ ,  $\mathcal{K} = 2$  para después generalizarlo de forma inductiva construyendo el caso  $\mathcal{K} + 1$ .

#### 2.3.1.1 Base $\beta_3$ para $\mathcal{K} = 0$

El espacio más pequeño es cuando  $n = 3$

1. Utilizamos la solución  $F_3$  "central con carga al centro"

$$F_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathcal{E}_3 = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}\}$  es el conjunto admisible que define a  $G_3$ , donde cualquier ordenamiento es útil para las primeras 7 entradas, que completamos con

$$\varphi(8) = (3, 1)$$

$$\varphi(9) = (3, 3)$$

Así que usando el teorema 2.5 es posible construir una base de  $\mathcal{Z}_3$ .

El primer elemento de la base que encontramos está en  $G_3 \oplus [E_{3,1}]$ .

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a-b & 2a-b & -b \\ \hline b-2a & b-a & b \\ \hline a & -a & \\ \hline \end{array} \quad 3a-3b=0 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{si tomamos } a=1 \\ A1= \end{array}$$

**Definición 2.7** Llamaremos "*Simetría y*" a la transformación

$$Sy : M_{2\kappa+1} \longrightarrow M_{2\kappa+1}$$

definida de la siguiente forma, sea  $X = [x_{i,j}] \in M_{2\kappa+1}$

$$Sy(X) = [x_{i,2\kappa+2-j}]$$

Para conocer el segundo elemento de nuestra base basta con utilizar la "Simetría y" como transformación, esto es posible hacerlo ya que  $Sy(\mathcal{E}_{2\kappa+1}) = \mathcal{E}_{2\kappa+1}$

$$Sy(A1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & \\ \hline 1 & & -1 \\ \hline & & \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Así, una base de  $\mathcal{Z}_3$  es el conjunto  $\beta_3 = \{A1, Sy(A1)\}$

### 2.3.1.2 Base $\beta_5$ para $\mathcal{K} = 1$

La solución central  $F_5$  contiene al centro una matriz cuadrada de orden 3 con entradas distintas de cero en las posiciones en que  $F_3$  central tiene sus entradas distintas de cero.

$$F_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilicemos las entradas distintas de cero de  $F_5$  para conseguir un ordenamiento admisible, así completamos el ordenamiento en forma de capas.

$$\Phi_5 = \begin{array}{ccccc} 7 & 8 & * & 9 & 10 \\ 6 & * & * & * & 11 \\ * & * & * & * & * \\ 5 & 1 & * & 2 & 12 \\ 4 & 3 & * & 14 & 13 \end{array}$$

Una propiedad útil de los cuadrados mágicos es la siguiente, si  $X_0$  es mágica de suma cero de orden  $n$ , entonces la matriz  $\widetilde{X}_0$  de orden  $n+2$  que se obtiene al agregar una capa concéntrica de ceros también es mágica de suma cero, diremos que  $\widetilde{X}_0$  es la *inmersión* de  $X_0$  en  $n+2$ .

**Definición 2.8** A la transformación

$$\mathcal{I}_{n+2} : M_n \longrightarrow M_{n+2}$$

definida de la siguiente forma, sea  $A \in M_n$

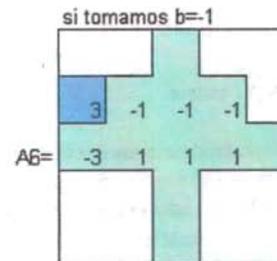
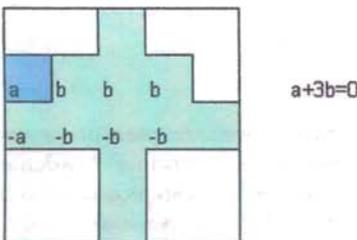
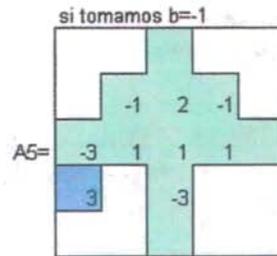
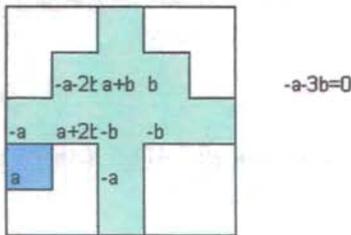
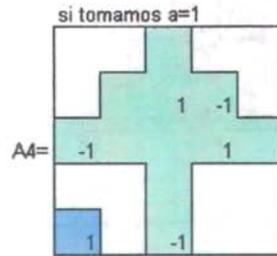
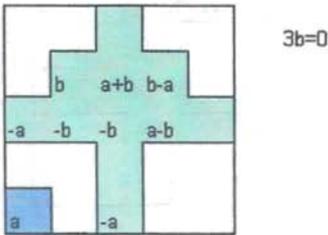
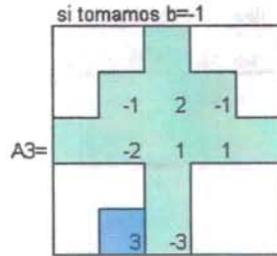
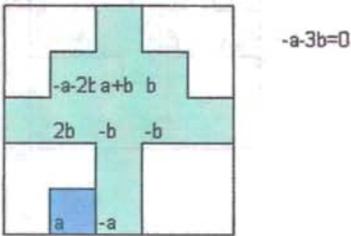
$$\mathcal{I}_{n+2}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0}^t & 0 \\ \vec{0} & A & \vec{0} \\ 0 & \vec{0}^t & 0 \end{bmatrix}$$

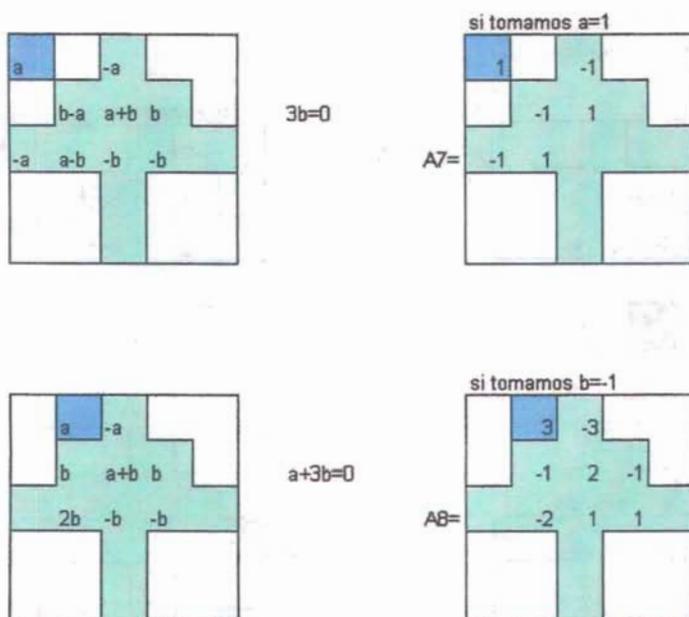
la llamaremos *Inmersión* de  $M_n$  en  $M_{n+2}$ .

Las bondades que trae la inmersión de los vectores de  $\beta_3$ , nos permite conocer de entrada dos elementos de  $\beta_5$ , parecen pocos pero esta acumulación crece con el orden, así que cada vez resultará más sencillo obtener una base de  $\mathcal{Z}_n$ . Para ahorrar espacio usaremos la notación

$$\mathcal{I}_5(\beta_3) \triangleq \{\mathcal{I}_5(A1), \mathcal{I}_5(\text{Sy}(A1))\}$$

Completemos la base colocando la entrada libre en las posiciones que restan usando el ordenamiento admisible  $\varphi$ .





Restan encontrar 6 vectores de la base que podemos obtener sencillamente con la transformación  $Sy$ , entonces usamos notación para los conjuntos

$$R_5 \triangleq \{A3, A4, A5, A6, A7, A8\}$$

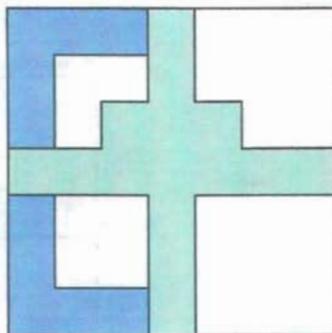
$$Sy(R_5) \triangleq \{Sy(A3), Sy(A4), Sy(A5), Sy(A6), Sy(A7), Sy(A8)\}$$

Así, una base de  $\mathcal{Z}_5$  es el conjunto  $\beta_5 = \{\mathcal{I}_5(\beta_3), R_5, Sy(R_5)\}$

### 2.3.1.3 Base $\beta_7$ para $\mathcal{K} = 2$

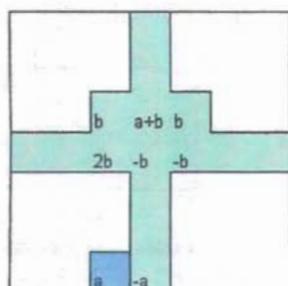
Con esta base introduciremos el último concepto importante para poder construir una base recursiva del espacio mágico  $\mathcal{Z}_n$ , utilicemos en principio el ordenamiento admisible  $\varphi_7$  presentado como ejemplo anteriormente, utilizaremos además  $\mathcal{I}_7(\beta_5)$ , y también  $Sy(R_7)$ , donde  $R_7$  es un conjunto que todavía no conocemos, pero es un conjunto en el cual sus elementos tienen su variable libre en la última capa como se

ilustra abajo, es decir en mitad de la última capa.



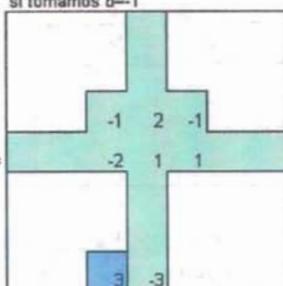
Sin embargo, el conjunto  $R_7$  consta de 10 elementos, es considerablemente grande, así que procedemos a buscar una forma de simplificar los cálculos, veremos que es conveniente separarlos en grupos donde los cálculos sean semejantes.

Observemos los siguientes casos.

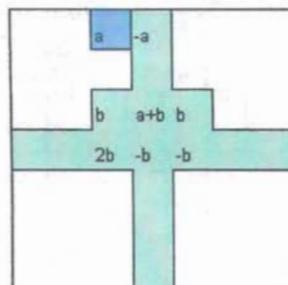


$$a+3b=0$$

si tomamos  $b=-1$

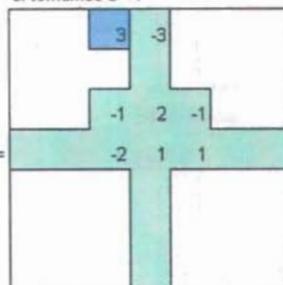


$$A_{15} =$$



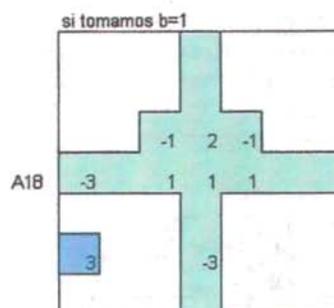
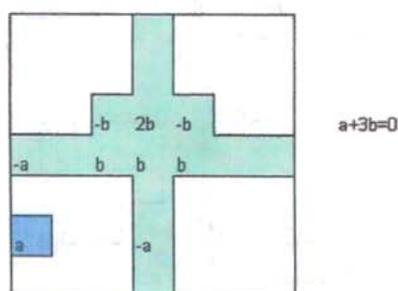
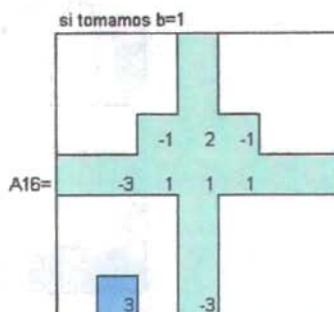
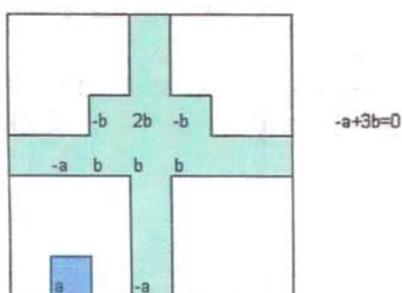
$$a+3b=0$$

si tomamos  $b=-1$



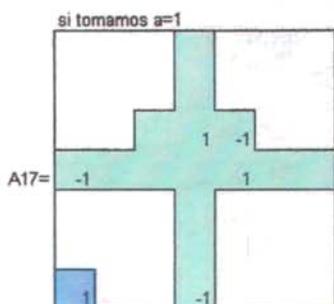
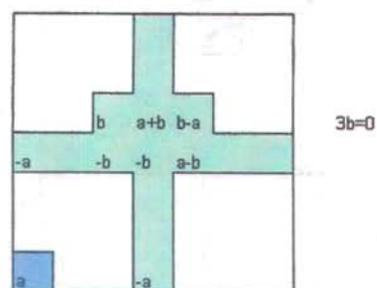
$$A_{24} =$$

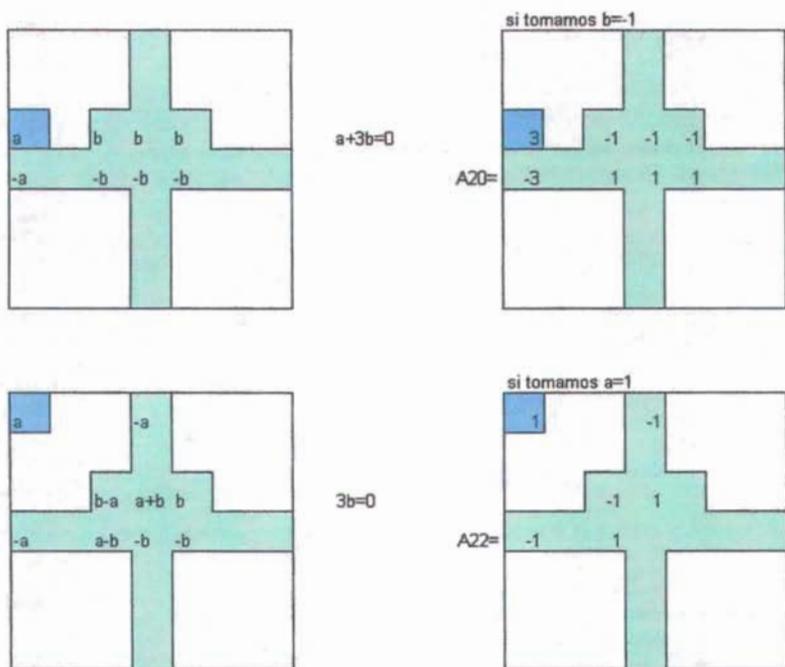
Estos dos elementos de  $\beta_7$  se construyen con el mismo sistema de ecuaciones, con la diferencia de las posiciones. Otro caso se presenta con los dos siguientes elementos de  $\beta_7$ .



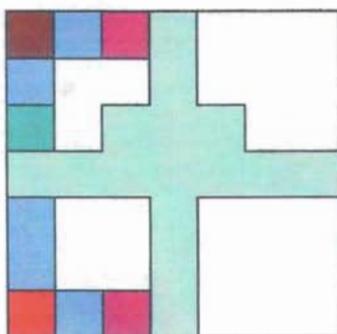
Además de A16 y A18, los cuadrados mágicos A19, A21 y A23 también se obtienen de la misma forma.

Resta calcular los cuadrados mágicos A17, A20, A22.





Distingamos con el siguiente diagrama de colores las clases en que se parte este subconjunto de la base.



Así que  $\beta_7 = \{\mathcal{I}_7(\beta_5), R_7, Sy(R_7)\}$  forma una base para  $\mathcal{Z}_7$ .

### 2.3.1.4 Base $\beta_{n+2}$ para $\mathcal{K} + 1$

Queremos ahora especificar como se obtiene la base  $\beta_{n+2}$  de  $\mathcal{Z}_{n+2}$ , a partir de la base  $\beta_n$  de  $\mathcal{Z}_n$ . La idea es que la formaremos con  $\mathcal{I}_n(\beta_n)$  y las  $\{A_i\}$  asociadas a la última capa, y en esta nos centramos, es decir en la mitad de la última capa.

En primer lugar construimos la base  $\beta_3$  la cual por ser la primer base de nuestra construcción no tiene capas, posteriormente la base  $\beta_5$  contiene a la base  $\beta_3$  y tiene una capa al rededor de  $\beta_3$ , posteriormente la base  $\beta_7$  contiene a la base  $\beta_5$  la cual a su vez contiene a la base  $\beta_3$ , es decir  $\beta_7$  tiene 2 capas al rededor de  $\beta_3$ . Así, para plantear la sucesión del orden  $n$ , es necesario hacerlo por medio de un índice  $\mathcal{K}$  en los naturales, entendiendo que

$$\mathcal{K} = \frac{n-3}{2}$$

así que ahora planteamos nuestra construcción recursiva en términos del número de capas  $\mathcal{K}$  en lugar del orden  $n$ . Manejaremos en ocasiones el orden  $n$ , y en otras el índice de capas  $\mathcal{K}$  a conveniencia.

En primer lugar contamos con el ordenamiento  $\varphi_n$  planteado a través del conjunto  $\mathcal{E}_n$  de cardinalidad  $2n+1$  y completado como plantea el arreglo  $\Phi_n$ , entendiéndose como

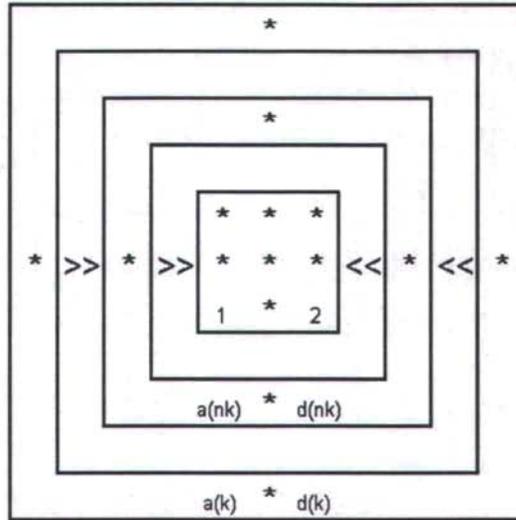
$$\varphi(2n+1+\zeta) = (i_\zeta, j_\zeta) \quad \text{con } \zeta = 1, \dots, n^2 - 2n - 1$$

A través de los ejemplos construidos es posible reconocer el orden  $\varphi_n$ , vamos a presentarlo.

El conjunto

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \begin{array}{l} E_{\mathcal{K}+2,j} \quad \text{para } j = 1, \dots, 2\mathcal{K} + 3, \\ E_{i,\mathcal{K}+2} \quad \text{para } i = 1, \dots, \mathcal{K} + 1, \mathcal{K} + 3, \dots, 2\mathcal{K} + 3, \\ E_{\mathcal{K}+1,\mathcal{K}+1}, \\ E_{\mathcal{K}+1,\mathcal{K}+3} \end{array} \right\}$$

es admisible y completamos el ordenamiento como se presenta en el arreglo  $\Phi_n$



$\Phi_n =$

$$a(n\mathcal{K}) = 4n\mathcal{K}^2 - 1 \quad d(n\mathcal{K}) = 4n\mathcal{K}^2 + 8n\mathcal{K} + 2$$

Hemos introducido un nuevo concepto que ayuda a explicar  $\Phi_n$ , utilizamos la notación  $n\mathcal{K}$  para numerar las capas interiores de nuestro ordenamiento de forma que  $n\mathcal{K} = 1, \dots, \mathcal{K}$  y así  $\Phi_n$  solamente plantea el punto de partida y de término de la numeración de la  $n\mathcal{K}$  capa, no olvidemos que estamos numerando la  $n\mathcal{K}$  capa en el sentido de las manecillas del reloj.

Por consiguiente nuestro ordenamiento  $\varphi_n$  ha quedado planteado, resta observar si es consistente para plantear el ordenamiento  $\varphi_{n+2}$ .

**Ordenamiento  $\varphi_{n+2}$**

Ocupando el conjunto admisible  $\mathcal{E}_n$  es posible completar el conjunto admisible  $\mathcal{E}_{n+2}$  de la siguiente forma:

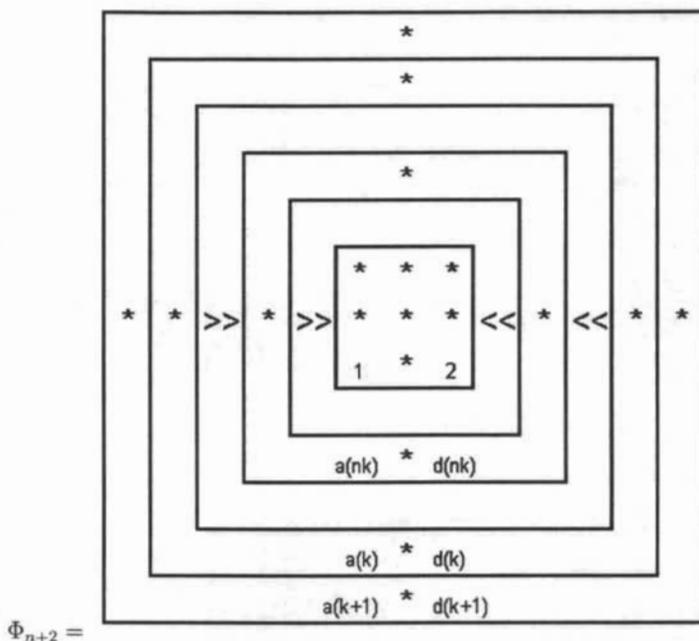
$$\mathcal{E}_{n+2} = \{\mathcal{I}_{n+2}(\mathcal{E}_n), E_{2\mathcal{K}+5, \mathcal{K}+2}, E_{\mathcal{K}+2, 1}, E_{1, \mathcal{K}+2}, E_{\mathcal{K}+2, 2\mathcal{K}+5}\}$$

conjunto que es admisible, cuya cardinalidad es  $2(n+2)+1$ .

Para completar el ordenamiento  $\Phi_{n+2}$  lo completamos añadiendo una capa más a  $\Phi_n$  planteando la posibilidad de que

$$n\mathcal{K} = 1, \dots, \mathcal{K} + 1$$

como se ilustra



De forma recursiva es consistente nuestro ordenamiento para cualquier  $n$ , así podemos ahora completar la base  $\beta_{n+2}$  dada la base  $\beta_n$ . Contamos así con los primeros  $4\mathcal{K}^2 + 8\mathcal{K} + 2$  elementos de la base siendo estos  $\mathcal{I}(\beta_n)$ , por lo que resta conocer únicamente los elementos de la última capa, es decir los elementos cuyo índice de orden se encuentren en el intervalo

$$a(\mathcal{K} + 1) \leq \zeta \leq d(\mathcal{K} + 1)$$

sin embargo, hemos dicho que podemos conocer los elementos de la mitad derecha de la última capa si conocemos la mitad izquierda, por "simetría y", así que es necesario partir en dos el intervalo que estamos estudiando.

#### Clases en la última semi-capa $R_{n+2}$

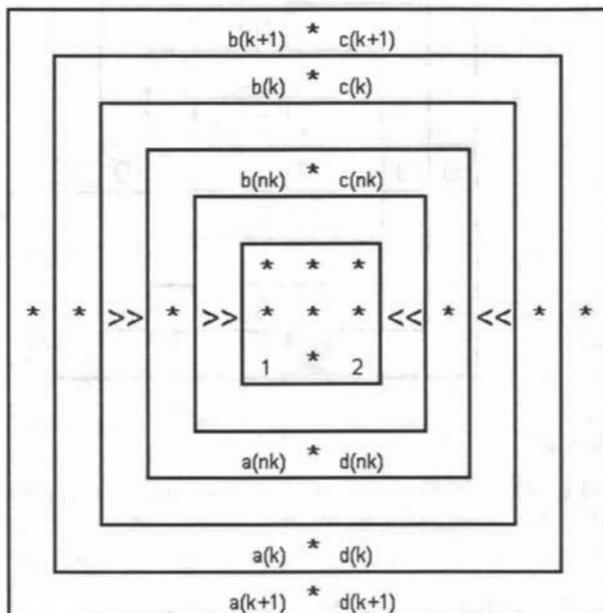
El intervalo en que centramos nuestro estudio es

$$a(\mathcal{K} + 1) \leq \zeta \leq 4(\mathcal{K} + 1)^2 + 4(\mathcal{K} + 1)$$

y el intervalo en que aplicaremos la "simetría y" del intervalo anterior es

$$4(\mathcal{K} + 1)^2 + 4(\mathcal{K} + 1) + 1 \leq \zeta \leq d(\mathcal{K} + 1)$$

Aprovechando la ocasión presentamos los intervalos para las  $n\mathcal{K}$  capas en el siguiente arreglo  $\Phi_{n+2}$



$\Phi_{n+2} =$

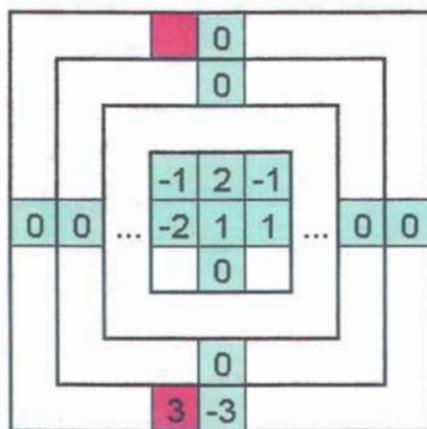
$$\begin{aligned} a(nk) &= 4nk^2 - 1 & b(nk) &= 4nk^2 + 4nk \\ c(nk) &= 4nk^2 + 4nk + 1 & d(nk) &= 4nk^2 + 8nk + 2 \end{aligned}$$

Nos centramos en encontrar ahora los elementos de la base en el intervalo deseado, que es la mitad izquierda de la capa  $\mathcal{K} + 1$ . Afortunadamente, como vimos en el caso  $n = 7$  o  $\mathcal{K} = 2$ , existen clases en que las cuentas son iguales, y como el teorema 2.5 permite ahorrarnos las operaciones, presentamos aquí un sólo elemento de cada clase y distinguiendo todos los elementos de cada clase del resto, donde el conjunto  $\mathcal{E}$  es el único lugar donde pondremos valores distintos de cero. Para poder clasificar cada una de las clases utilizaremos la matriz de orden  $2 \times 3$  localizada en la posición  $((\mathcal{K} + 1) + 1 : (\mathcal{K} + 1) + 2, (\mathcal{K} + 1) + 1 : (\mathcal{K} + 1) + 3)$

### Clase "Principio y fin"

En esta clase se encuentran las matrices  $A_{4(\mathcal{K}+1)^2-1}$  y  $A_{4(\mathcal{K}+1)^2+4(\mathcal{K}+1)}$  y se distingue por la matriz

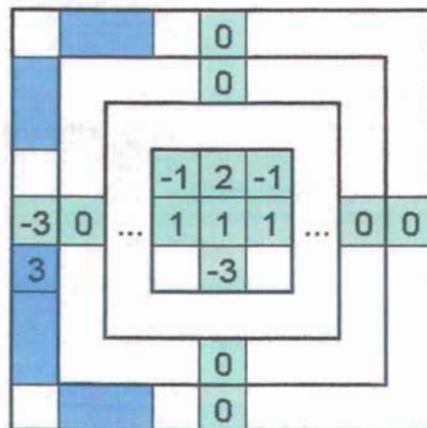
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



### Clase "Gorda"

Esta es la clase a la que pertenecen la mayor cantidad de elementos, siendo su cardinalidad  $4(\mathcal{K} + 1) - 3$ , se distingue por su matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

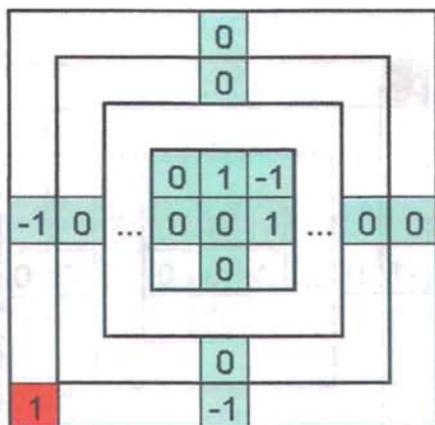


### Clase "Semi-diagonal negativa"

Clase de un sólo elemento cuya entrada libre está en la posición  $(2(\mathcal{K} + 1) + 1, 1)$ . Se

distingue por la matriz

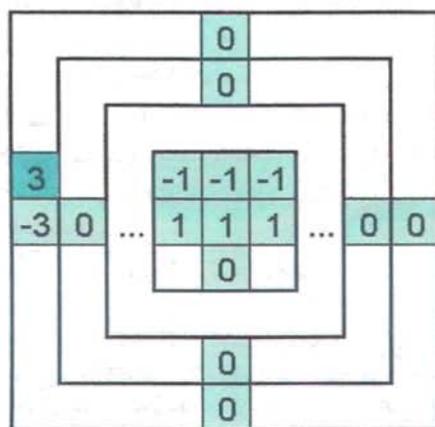
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### Clase "2 renglones"

Esta clase solamente involucra 2 renglones con entradas distintas de cero, cuenta con un elemento cuya entrada libre se localiza en  $((K+1)+1, 1)$ , la matriz distintiva es

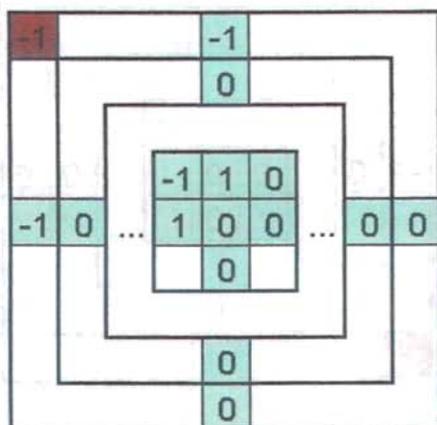
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



### Clase "Semi-diagonal positiva"

Clase de un sólo elemento cuya entrada libre está en la posición  $(1, 1)$ . Se distingue por la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### Obtención de los vectores en la semi-capa derecha $Sy(R_{n+2})$

Una vez descritas las matrices de la mitad de la última capa, es necesario explicar como se construyen los simétricos, así que ahora pensamos en el intervalo

$$c(\mathcal{K} + 1) \leq \zeta \leq d(\mathcal{K} + 1)$$

así, para recorrer todo este intervalo de menor a mayor, escribimos

$$\begin{aligned} \zeta(i) &= b(\mathcal{K} + 1) + i \\ \text{con } i &= 1, \dots, 4(\mathcal{K} + 1) + 2 \end{aligned}$$

y decimos que es posible conocer la matriz  $A_{\zeta(i)}$  transformando un elemento de cuyo índice de orden  $\widetilde{\zeta(i)}$  se encuentre en la última semicapa izquierda.

$$a(\mathcal{K} + 1) \leq \widetilde{\zeta} \leq b(\mathcal{K} + 1)$$

De la forma

$$A_{\zeta(i)} = Sy(A_{\widetilde{\zeta(i)}})$$

donde

$$\widetilde{\zeta(i)} = c(\mathcal{K} + 1) - i$$

Con esto completamos la base  $\beta_{n+2} = \{\mathcal{I}_{n+2}(\beta_n), R_{n+2}, Sy(R_{n+2})\}$

De este modo observamos como son todos los elementos de la base deseada del orden  $n + 2$ .

### 2.3.1.5 Algoritmo de $\beta_n$ en Matlab

Ya que se ha planteado la base para el orden  $n+2$ , dicho ordenamiento puede ser usado para cualquier  $n$  impar, por lo que se ha creado un algoritmo diseñado en Matlab para el que dado  $n$  impar y cualquier índice de ordenamiento  $k$ , en el intervalo

$$1 \leq k \leq n^2 - 2n - 1$$

muestra al elemento  $A_k$  de la base  $\beta_n$  en forma *sparse*. El programa de dicho algoritmo se encuentra en el Apéndice A bajo el nombre `k_nimpar.m`. La forma de correr el programa se ilustra con el siguiente ejemplo:

```
k_nimpar(7,10)
```

indica que estamos buscando el elemento 10 de la base  $\beta_7$ , el cual es una matriz de orden 7 que en forma *sparse* es:

$$(2,4) = -1$$

$$(3,4) = 1$$

$$(3,5) = -1$$

$$(4,5) = 1$$

$$(2,6) = 1$$

$$(4,6) = -1$$

la cual en formato lleno (usando la función `full`) se observa

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Caso Par, $n = 2\mathcal{K} + 4$

Análogamente al caso impar construiremos una base para el espacio vectorial  $\mathcal{Z}_n$  de orden par a partir de 4, utilizando la lógica de construcción planteada en este capítulo. Tomando en consideración que el caso impar ha dejado claro el proceso, construiremos únicamente los casos  $\mathcal{Z}_4$  y  $\mathcal{Z}_6$  que son los casos en que  $\mathcal{K} = 0$  y  $\mathcal{K} = 1$  es decir conoceremos la base del centro y el caso en que el centro tiene una sola capa, para después proceder a la construcción general. Para cada uno de estos casos presentamos el conjunto  $\mathcal{E}_n$ , el arreglo  $\Phi_n$  que se utiliza para completar el ordenamiento  $\varphi_n$ , y utilizando el teorema 2.5 construimos la base  $\beta_n$ .

2.3.2.1 Base  $\beta_4$  para  $\mathcal{K} = 0$ 

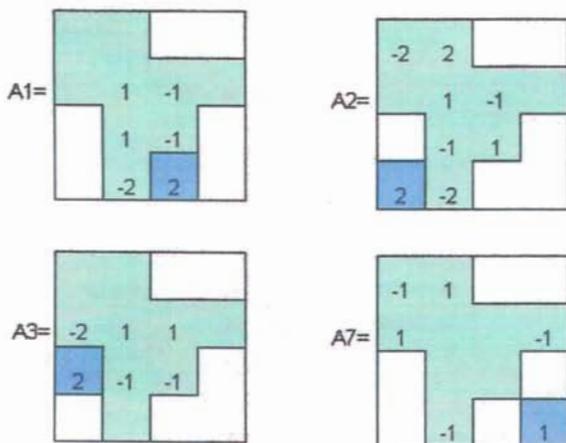
Observemos la solución  $F_4$  "central par"

$$F_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathcal{E}_4 = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{2,4}, E_{3,2}, E_{3,3}, E_{4,2}\}$  es el conjunto admisible que define a  $G_4$ , donde cualquier ordenamiento es útil para las primeras 9 entradas, y para completar al ordenamiento  $\varphi_4$  proponemos el arreglo  $\Phi_4$ .

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} * & * & 4 & 5 \\ * & * & * & * \\ 3 & * & * & 6 \\ 2 & * & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Usando el teorema 2.5 es posible construir una base para  $Z_4$ . Presentamos aquí los cuadrados mágicos  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_7$



La primera diferencia que observamos con el caso impar es que para completar la base no es posible ocupar la "simetría y", ya que

$$Sy(\mathcal{E}_{2k+4}) \neq \mathcal{E}_{2k+4}$$

sin embargo es posible utilizar otra simetría para estos casos, esta es la que denominamos simetría traspuesta.

**Definición 2.9** Llamamos "Simetría traspuesta" a la transformación

$$St : M_{2k+4} \longrightarrow M_{2k+4}$$

de la siguiente forma, sea  $X \in M_{2k+4}$

$$St(X) = X^t$$

Aunque no hemos presentado los cálculos para los elementos de la base  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_7$ , es posible ahorrarse los cálculos de  $A_4, A_5$  y  $A_6$  usando la simetría traspuesta, decimos que

$$A_4 = St(A_3) \quad A_5 = St(A_2) \quad A_6 = St(A_1)$$

Con esto, una base de  $Z_4$  es el conjunto  $\beta_4 = \{A_1, A_2, A_3, St(A_3), St(A_2), St(A_1), A_7\}$

### 2.3.2.2 Base $\beta_6$ para $\mathcal{K} = 1$

Para la elección adecuada de  $\mathcal{E}_6$  utilizamos las entradas distintas de cero de la solución  $F_6$  central par

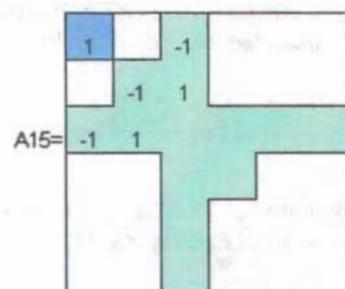
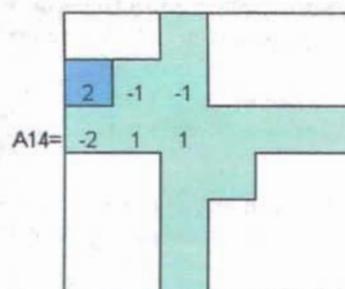
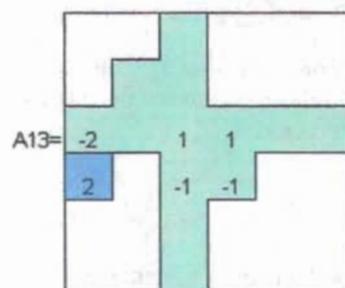
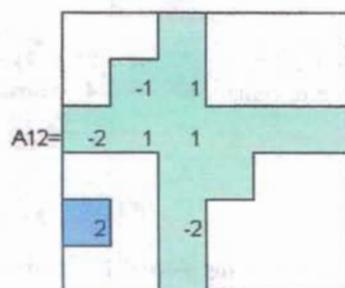
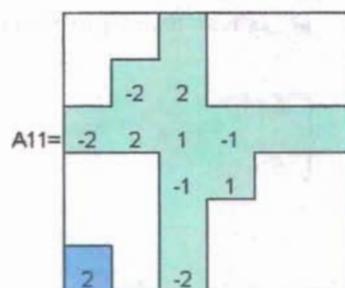
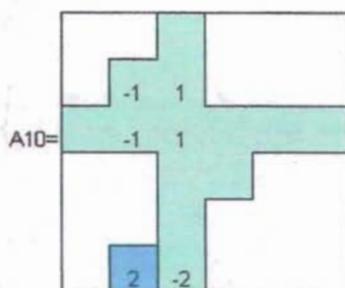
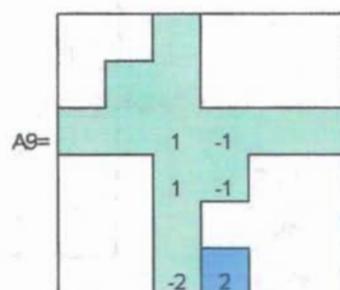
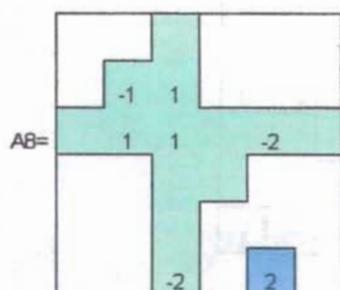
$$F_6 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & 2 & & & & & \\ & & 4 & -2 & & & \\ 2 & -2 & -3 & 1 & 2 & 2 & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ 0 & & & & & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

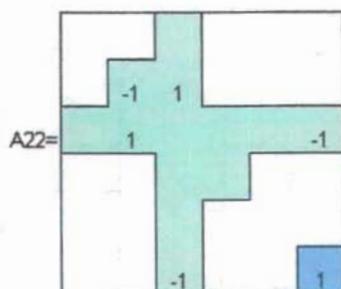
Tenemos  $\mathcal{E}_6 = \{E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}, E_{3,4}, E_{3,5}, E_{3,6}, E_{4,3}, E_{4,4}, E_{5,3}, E_{6,3}\}$  conjunto admisible que define a  $G_6$ , donde cualquier ordenamiento es útil para las primeras 13 entradas, y para completar al ordenamiento  $\varphi_6$  proponemos el ordenamiento que plantea el arreglo  $\Phi_6$ .

$$\Phi_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 15 & 16 & * & 17 & 18 & 19 \\ \hline 14 & * & * & 4 & 5 & 20 \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline 13 & 3 & * & * & 6 & 21 \\ \hline 12 & 2 & * & 1 & 7 & 22 \\ \hline 11 & 10 & * & 9 & 8 & 23 \\ \hline \end{array}$$

Afortunadamente es posible ocupar la inmersión para encontrar los primeros 7 cuadrados mágicos de la base deseada. Por lo que ocupando el teorema 2.5 encon-

tramos los cuadrados mágicos





Por lo que una base para  $\mathcal{Z}_6$  es el conjunto

$$\beta_6 = \left\{ \begin{array}{cccccc} I_6(\beta_4), & A_8, & A_9, & A_{10}, & A_{11}, & A_{12}, \\ A_{13}, & A_{14}, & A_{15}, & St(A_{14}), & St(A_{13}), & St(A_{12}), \\ St(A_{11}), & St(A_{10}), & St(A_9), & St(A_8), & A_{23} & \end{array} \right\}$$

### 2.3.2.3 Base $\beta_{n+2}$ para $\mathcal{K} + 1$

Construcción de la base  $\beta_{n+2}$  de  $\mathcal{Z}_{n+2}$ , dada la base  $\beta_n$  de  $\mathcal{Z}_n$ , ( $n = 2\mathcal{K} + 4$ )

Para indicar el número de capas que tiene el centro de orden 4, realizamos el siguiente despeje

$$\mathcal{K} = \frac{n}{2} - 2$$

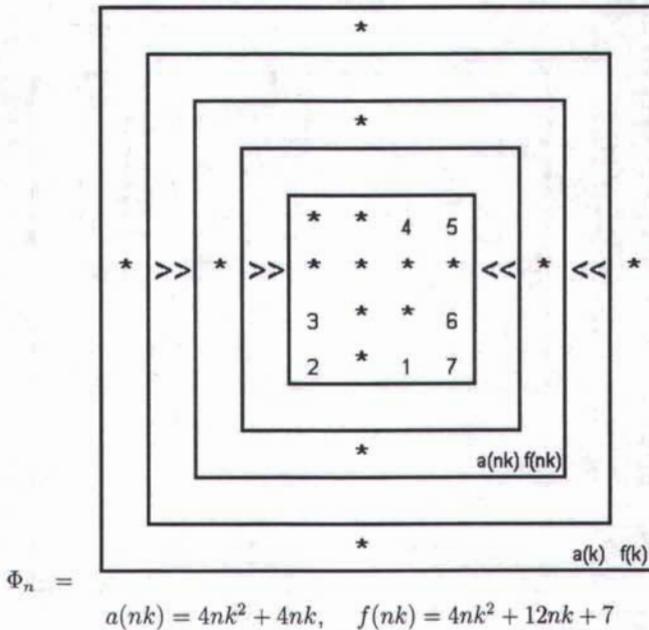
así, ahora planteamos nuestra construcción recursiva en términos del número de capas  $\mathcal{K}$  o el orden  $n$ , a conveniencia.

En primer lugar contamos con el ordenamiento  $\varphi_n$  planteado a través del conjunto  $\mathcal{E}_n$ , de cardinalidad  $2n + 1$  y completado como plantea el arreglo  $\Phi_n$ , entendiéndose como

$$\varphi(2n + 1 + \zeta) = (i_\zeta, j_\zeta) \text{ con } \zeta = 1, \dots, n^2 - 2n - 1$$

El conjunto  $\mathcal{E}_n = \{E_{\mathcal{K}+2,j} \text{ para } j = 1, \dots, 2\mathcal{K} + 4, E_{i,\mathcal{K}+2} \text{ para } i = 1, \dots, \mathcal{K} + 1, \mathcal{K} + 3, \dots, 2\mathcal{K} + 4, E_{\mathcal{K}+1,\mathcal{K}+1}, E_{\mathcal{K}+3,\mathcal{K}+3}\}$  es admisible y completamos el ordenamiento como

se presenta en el arreglo  $\Phi_n$



este arreglo  $\Phi_n$  al igual que el caso impar se extiende por capas, donde el valor  $a(nk)$  es el primer índice de ordenamiento sobre la capa  $nk$  y  $b(nk)$  el último, así que colocamos un índice en cada entrada de la  $nk$  capa aumentando una unidad en cada entrada recorriéndolo en el sentido de las manecillas del reloj.

**Ordenamiento  $\varphi_{n+2}$**

Hasta el momento el ordenamiento  $\varphi_n$  ha quedado definido, resta observar si es consistente para plantear el ordenamiento  $\varphi_{n+2}$ .

Ocupando el conjunto admisible  $\mathcal{E}_n$  es posible completar el conjunto admisible  $\mathcal{E}_{n+2}$  de la siguiente forma

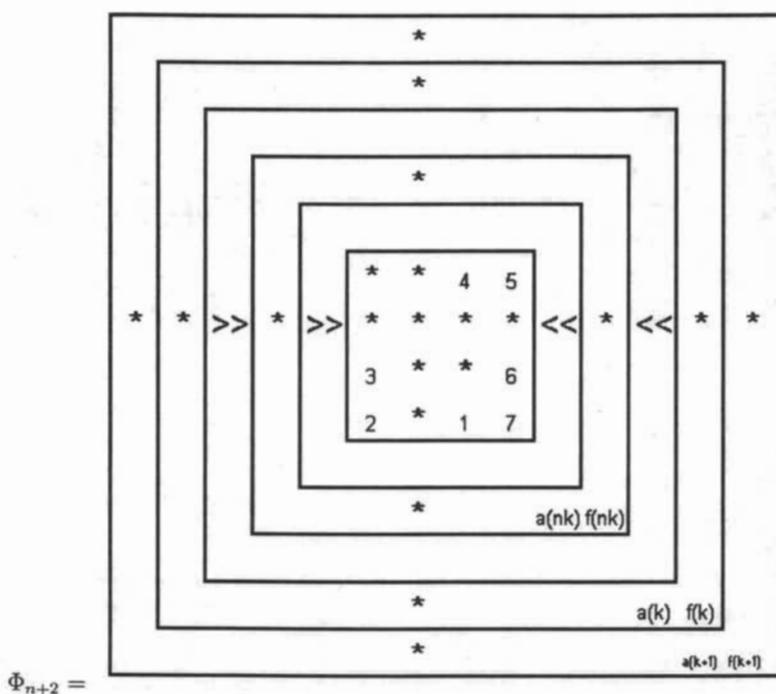
$$\mathcal{E}_{n+2} = \{\mathcal{I}_{n+2}(\mathcal{E}_n), E_{2\mathcal{K}+6, \mathcal{K}+3}, E_{\mathcal{K}+3, 1}, E_{1, \mathcal{K}+3}, E_{\mathcal{K}+3, 2\mathcal{K}+6}\}$$

conjunto que es admisible, cuya cardinalidad es  $2(n+2) + 1$ .

Para completar el ordenamiento  $\Phi_{n+2}$  añadimos una capa más a  $\Phi_n$  planteando la posibilidad de que

$$n\mathcal{K} = 1, \dots, \mathcal{K} + 1$$

como se ilustra



De forma recursiva es consistente nuestro ordenamiento para cualquier  $n$ , así que podemos ahora completar la base  $\beta_{n+2}$  dada la base  $\beta_n$ . Contamos así con los primeros  $4\mathcal{K}^2 + 8\mathcal{K} + 2$  elementos de la base siendo estos  $\mathcal{I}(\beta_n)$ , resta describir únicamente los elementos de la última capa, es decir los vectores cuyo índice de orden esta en el intervalo

$$a(\mathcal{K} + 1) \leq \zeta \leq f(\mathcal{K} + 1)$$

sin embargo, hemos dicho que podemos conocer los elementos de la mitad triangular superior de la última capa si conocemos la mitad inferior, "por simetría y" así que es necesario partir en dos el intervalo que estamos estudiando.

#### Clases en la última semi-capa $R_{n+2}$

El intervalo en que centramos nuestro estudio es

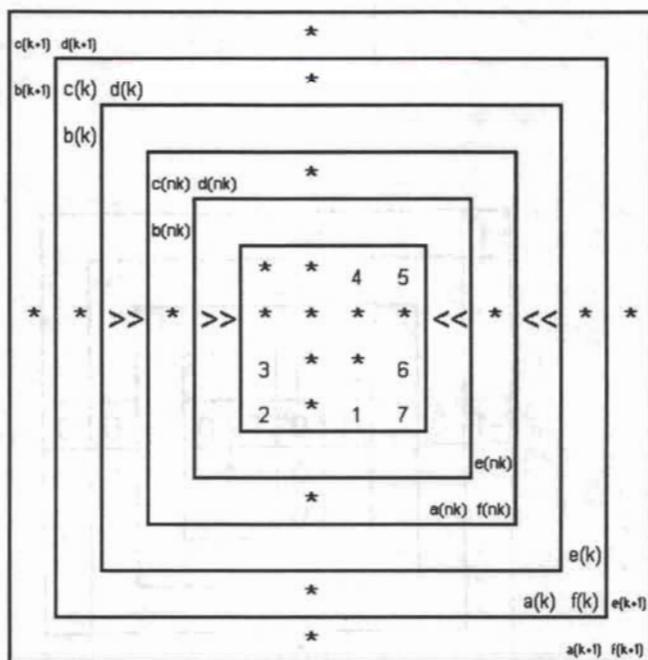
$$a(\mathcal{K} + 1) \leq \zeta \leq b(\mathcal{K} + 1)$$

y el intervalo en que aplicaremos la "simetría traspuesta" del intervalo anterior es

$$d(\mathcal{K} + 1) \leq \zeta \leq e(\mathcal{K} + 1)$$

además, necesitamos estudiar los casos

$$\zeta = c(\mathcal{K} + 1) \quad \text{y} \quad \zeta = f(\mathcal{K} + 1).$$



$\Phi_{n+2} =$

$$\begin{aligned} a(n\mathcal{K}) &= 4n\mathcal{K}^2 + 4n\mathcal{K}, & b(n\mathcal{K}) &= 4n\mathcal{K}^2 + 8n\mathcal{K} + 2 \\ c(n\mathcal{K}) &= 4n\mathcal{K}^2 + 8n\mathcal{K} + 3 & d(n\mathcal{K}) &= 4n\mathcal{K}^2 + 8n\mathcal{K} + 4 \\ e(n\mathcal{K}) &= 4n\mathcal{K}^2 + 12n\mathcal{K} + 6 & f(n\mathcal{K}) &= 4n\mathcal{K}^2 + 12n\mathcal{K} + 7 \end{aligned}$$

No hay que olvidar que en el diagrama de cada clase el conjunto  $\mathcal{E}_n$  es el único lugar donde pondremos valores distintos de cero, y que las posiciones de la clase serán marcadas.

**Clase "Diagonal positiva"**

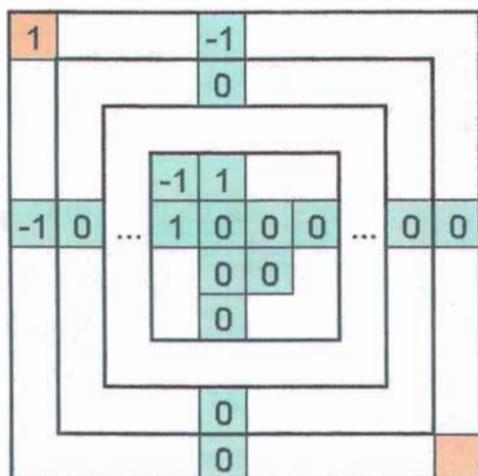
Primero estudiamos los casos  $A_{c(\mathcal{K}+1)}$  y  $A_{f(\mathcal{K}+1)}$ , estos dos casos forman una clase, y son tales que

$$A_{c(\mathcal{K}+1)} = St(A_{c(\mathcal{K}+1)}) \quad \text{y} \quad A_{c(\mathcal{K}+1)} = St(A_{c(\mathcal{K}+1)})$$

Para poder distinguir a las clases utilizaremos dos submatrices que cada elemento de la base tiene en las posiciones  $((\mathcal{K} + 1) + 1 : (\mathcal{K} + 2) + 2, (\mathcal{K} + 1) + 1 : (\mathcal{K} + 1) + 2)$  y

$((\mathcal{K} + 1) + 2 : (\mathcal{K} + 1) + 3, (\mathcal{K} + 1) + 2 : (\mathcal{K} + 1) + 3)$ . Entonces esta clase se distingue por las matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

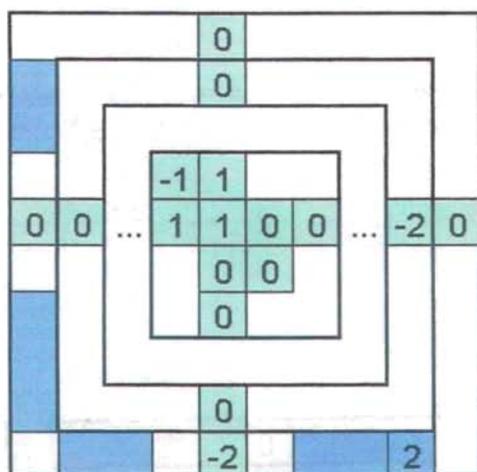


Y ahora sí, observamos los casos en que  $A_i \neq St(A_i)$ .

### Clase "Gorda"

Esta es la clase a la que pertenecen la mayor cantidad de elementos, siendo su cardinalidad  $4(\mathcal{K} + 1) + 1$ , se distingue por las matrices

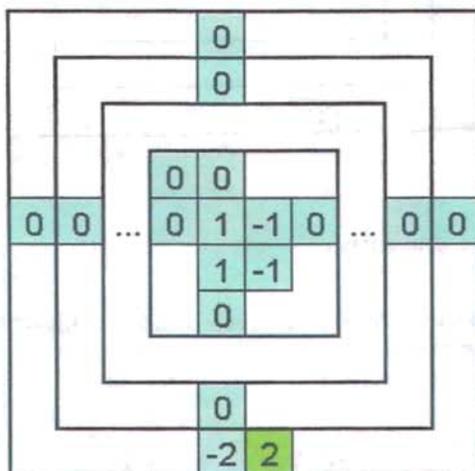
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**Clase " $4n\mathcal{K}^2 + 5n\mathcal{K}$ "**

Clase de un solo elemento de la base, que corresponde al número de orden  $4(k+1)^2 + 5(k+1)$  y cuya entrada libre está en la posición  $(2(\mathcal{K}+1)+4, (\mathcal{K}+1)+3)$ , y se distingue por las matrices

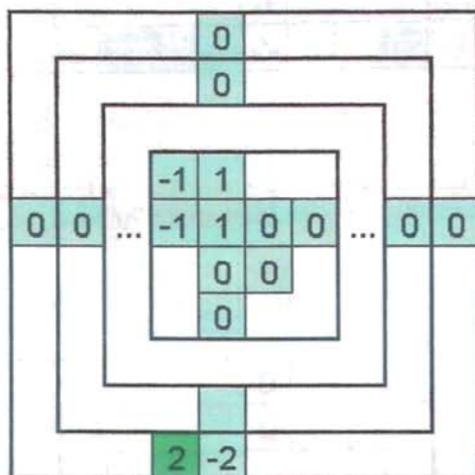
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Clase " $4n\mathcal{K}^2 + 5n\mathcal{K} + 1$ "

Clase de un solo elemento de la base, que corresponde al número de orden  $4(\mathcal{K}+1)^2 + 5(\mathcal{K}+1) + 1$  y cuya entrada libre está en la posición  $(2(\mathcal{K}+1) + 4, 1)$ . Se distingue por las matrices

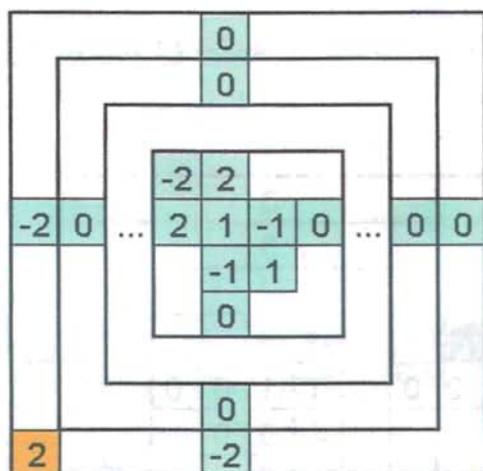
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Clase "Semi-diagonal negativa"

Clase de un solo elemento de la base, que corresponde al número de orden  $4(\mathcal{K}+1)^2 + 6(\mathcal{K}+1) + 1$  y cuya entrada libre está en la posición  $(2(\mathcal{K}+1) + 4, 1)$ . Se distingue por las matrices

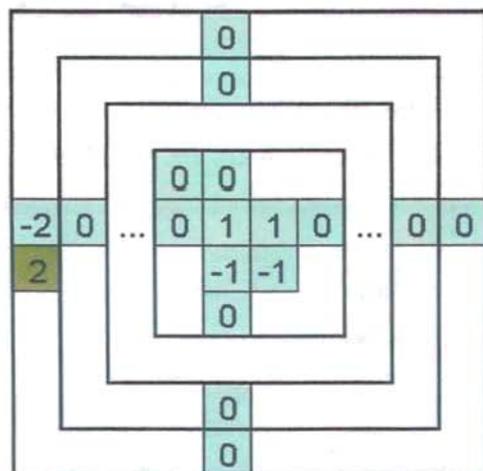
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Clase " $4n\mathcal{K}^2 + 7n\mathcal{K} + 2$ "

La entrada libre de esta clase se encuentra en  $((k+1) + 3, 1)$ . Se distingue por las matrices

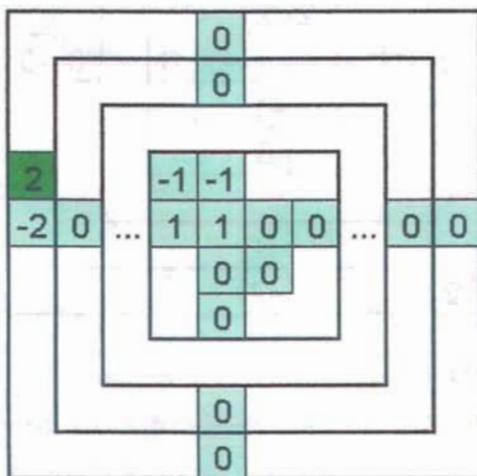
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Clase " $4n\mathcal{K}^2 + 7n\mathcal{K} + 3$ "

La entrada libre de esta clase se encuentra en  $((k+1)+1, 1)$ . Se distingue por las matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Obtención de los elementos de  $\beta_{n+2}$  en la semi-capa triangular superior  $St(R_{n+2})$

Una vez descritas las matrices de la mitad de la última capa, es necesario explicar como se construyen las simétricas, es decir, para

$$d(\mathcal{K}+1) \leq \zeta \leq e(\mathcal{K}+1)$$

para poner a correr todo este intervalo de menor a mayor escribimos

$$\begin{aligned} \zeta(i) &= c(\mathcal{K}+1) + i \\ \text{con } i &= 1, \dots, 4(\mathcal{K}+1) - 2 \end{aligned}$$

y decimos que la matriz que deseamos transformar es

$$A_{\zeta(i)} = St(A_{\widetilde{\zeta(i)}})$$

donde

$$\widetilde{\zeta(i)} = c(\mathcal{K}+1) - i$$

Con esto completamos la base  $\beta_{n+2} = \{\mathcal{I}(\beta_n), R_{n+2}, St(R_{n+2})\}$

De este modo observamos como son todos los elementos de la base deseada.

### 2.3.2.4 Algoritmo de $\beta_n$ en Matlab

Ya que se ha planteado la base para el orden  $n + 2$ , dicho ordenamiento puede ser usado para cualquier  $n$  par, por lo que se ha creado un algoritmo diseñado en matlab que dado  $n$  impar y cualquier índice de ordenamiento  $k$ , en el intervalo

$$1 \leq k \leq n^2 - 2n - 1$$

muestra al elemento  $A_k$  de la base  $\beta_n$  en forma *sparse*.

Dicho algoritmo se encuentra en el Apéndice A, bajo el nombre de `k_npar.m`. La forma de correr el programa se ilustra con el siguiente ejemplo:

```
k_npar(8,26)
```

indica que estamos buscando el elemento 26 de la base  $\beta_8$ , el cual es una matriz de orden 8 que en forma *sparse* es:

$$\begin{aligned} (4, 4) &= 1 \\ (5, 4) &= 1 \\ (8, 4) &= -2 \\ (4, 5) &= -1 \\ (5, 5) &= -1 \\ (8, 5) &= 2 \end{aligned}$$

la cual en formato lleno (usando la función `full`) se observa

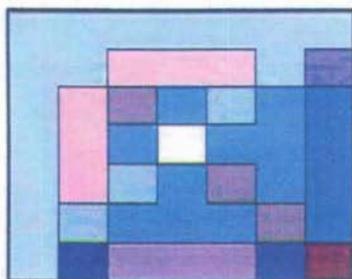
$$A_{26} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.3.3 Otras Bases

Para completar este trabajo, en esta sección se presenta una serie de diagramas de colores que muestra la partición de distintas bases en clases de equivalencia. Recordemos que las variables básicas son lo que determinan la base por lo que una vez seleccionadas, la base queda totalmente determinada. Utilizamos entonces las soluciones particulares con únicamente  $2n + 1$  entradas distintas de cero, en el entendido de que dichas entradas pueden ser tomadas como variables básicas.

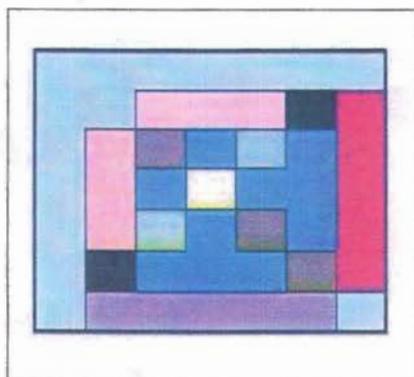
### 2.3.3.1 Base "lexicográfica"

Recordemos que la solución particular "lexicográfica" no distingue el caso par del impar, sin embargo, en la base del espacio nulo existe una diferencia en la cantidad de clases ya que el caso impar posee una clase más, una clase que tiene su entrada libre en la entrada central, por lo demás, el caso par cuenta con 11 clases.



### 2.3.3.2 Base del "barco"

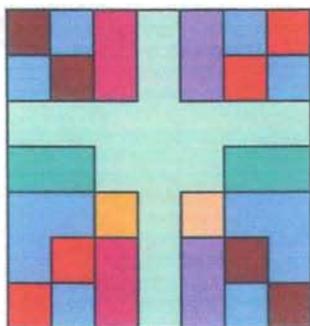
De la misma forma que la base "lexicográfica" esta base cuenta con una clase más, pero cuenta con una menor cantidad de clases, siendo un total de 9 para el caso par. Una propiedad de esta partición es la simetría entre clases, que es producto de la simetría de las variables básicas.



### 2.3.3.3 Base "Recursiva sin carga al centro"

Por ser de la familia de las recursivas cuenta con inmersión así como "simetría  $y$ ", además cuenta con la propiedad de reducir la cantidad de entradas distintas de cero,

siendo la clase con mayor cardinalidad una familia con únicamente 4 elementos distintos de cero.



# Capítulo 3

## Conclusiones

La gran cantidad de material que se puede encontrar sobre los cuadrados mágicos es asombrosa, esencialmente se divide en dos enfoques: los de Teoría de Números y los de Álgebra Lineal. El primero es el mejor conocido y sólo se menciona brevemente en este trabajo.

El espacio mágico  $V(s)_n$  puede ser de gran utilidad en el aprendizaje de la eliminación gaussiana ya que las matrices, a pesar de ser grandes, tienen pocas entradas distintas de cero, y de valor 1. Lo que nos reta a desarrollar algoritmos que sean económicos en memoria y eficientes, hecho que permite estudiar matrices ralas.

Dimensionalmente  $V(s)_n$  crece de manera cuadrática. El estudiar esta colección de espacios, permite apreciar el poder del Álgebra Lineal y como usarlo para modelar situaciones concretas.

Se programó la reducción gaussiana de la base lexicográfica y de la base del "barco". Con estas dos bases se construyó un algoritmo para presentar en forma *sparse* los elementos de la base, por otro lado, para la base del "caracol" se programó un algoritmo que obtiene para cualquier orden los vectores de la base, terminando con la construcción de las bases en forma recursiva para el caso par e impar.

Algo que queda por hacer, es ver si es posible encontrar una base del espacio mágico, donde los coeficientes necesarios para formar un cuadrado mágico de enteros consecutivos sea relativamente simple. Hasta donde queda este trabajo, no se ha logrado.

Por otro lado, también quedaría por estudiar otros espacios como por ejemplo las estrellas mágicas de orden  $n$ , que al igual que  $V(s)_n$  es una sucesión de espacios que puede ser estudiada de forma *sparse*.

# Apéndice A

## m-files de Matlab

El siguiente algoritmo aplica la transformación "*magia*" de cualquier matriz cuadrada.

```
function b=magia(A);
%
% Definicion de la Transformacion "magia"
%
% Entrada:
%     A     Matriz Cuadrada
% Salida:
%
%     b     Vector columna cuyas primeras n entradas son la
%           suma de las entradas de cada renglo de la matriz A,
%           las siguientes n entradas son la suma de las entradas
%           de cada columna de la matriz A, la entrada 2n+1 de b es
%           la traza de A, y la entrada 2n+2 es la traza secundaria
%           A.
%
n=length(A);
b=zeros(2*n+2,1);
b(1:n)=A*ones(n,1);
b(n+1:2*n)=A'*ones(n,1);
b(2*n+1)=trace(A);
for i=1:n
    b(2*n+2)=b(2*n+2)+A(i,n+1-i);
end
```

El siguiente algoritmo programado en matlab, presenta el  $k$ -ésimo elemento de la base  $\beta_n$  en forma *sparse*, para orden impar. Se hace referencia a este programa en la sección 2.3.1.5.

```

function A=k_nimpar(n,k,A)
%
%
% k_nimpar
% A brief description.
%           Funcion que muestra el k-esimo elemento de la
%           base beta de cualquier orden impar.
%
%           La forma de hacerlo es describiendo los vectores
%           cuyo ordenamiento k esta en la ultima semicapa
%           izquierda para el orden n impar, y transformarlos
%           para conocer los de la ultima semicapa derecha,
%           con esta capa es posible describir los elementos
%           de las ncapas, aplicando inmersion.
%
%
%
% Entrada:
%     n           Orden del espacio magico, impar a partir de 3
%     k           ordenamiento de la base beta n, donde  $1 < k < n^2 - 2n - 1$ 
%     A           Argumento util para la inmersion, despreciable
%
% Salida:
%     A           k-esimo Cuadrado magico de la base beta n
%
% Dependencia:
%     simy        Se hace uso de la simetria y, programado
%     k_3         Construye la base beta 3
%
%
% k_nimpar
% =====
% This source code is dated at: Enero, 2005.
% Last Revision: Enero 26, 2005.
% =====
%
%
%
% El argumento de entrada A, es interno
%
if nargin==2

```

```

    A=sparse(n,n);
end
%
%   Se calcula el numero de capas nk.
%
nkapas=(n-3)/2;
%
%   Separamos los casos k=1,2 del resto.
%
if k > 2,
    %
    %   Se calcula a(nk)
    %
    a_nkapas=4*nkapas^2-1;
    %
    %   Se sumerge una capa en el caso en que k < a(nk)
    %
    if k < a_nkapas,
        A(2:n-1,2:n-1)= k_nimpar(n-2,k,A(2:n-1,2:n-1));
    end
    %
    %   Se escriben las matrices de cada clase.
    %
    A1=[-1 2 -1; -2 1 1]; %distingue a la clase Principio y fin
    A2=[-1 2 -1; 1 1 1]; %distingue a la clase Gorda
    A3=[0 1 -1; 0 0 1]; %distingue a la clase Semi-diagonal negativa
    A4=[-1 -1 -1; 1 1 1]; %distingue a la clase 2 renglones
    A5=[-1 1 0; 1 0 0]; %distingue a la clase Semi-diagonal positiva
    %
    %   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento sea
    %   a(nk) que se encuentra en la clase Principio y fin.
    %
    if k==a_nkapas,
        A(n,nkapas+1)=3; A(n,nkapas+2)=-3;
        A(nkapas+1:nkapas+2,nkapas+1:nkapas+3)=A1;
    end
    %
    %   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
    %   el intervalo  $4nk^2-1 < k < 4nk^2+nk-1$  que pertenecen a la
    %   clase Gorda.
    %
    for i=1:nkapas-1,

```

```

    if k==a_nkupas+i,
        A(n,nkupas+1-i)=3; A(nkupas+2,nkupas+1-i)=-3; A(n,nkupas+2)=-3;
        A(nkupas+1:nkupas+2,nkupas+1:nkupas+3)=A2;
    end
end
%
% Se describe el elemento de la base cuyo ordenamiento es
%  $4nk^2+nk-1$  que se encuentra en la clase
% Semi-diagonal negativa.
%
if k==a_nkupas+nkupas,
    A(n,1)=1; A(nkupas+2,1)=-1; A(n,nkupas+2)=-1;
    A(nkupas+1:nkupas+2,nkupas+1:nkupas+3)=A3;
end
%
% Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
% el intervalo  $4nk^2+nk-1 < k < 4nk^2+2nk$  que pertenecen a
% la clase Gorda.
%
for i=1:nkupas,
    if k==a_nkupas+nkupas+i,
        A(n-i,1)=3; A(nkupas+2,1)=-3; A(n-i,nkupas+2)=-3;
        A(nkupas+1:nkupas+2,nkupas+1:nkupas+3)=A2;
    end
end
%
% Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%  $4nk^2+2nk$  que se encuentra en la clase 2 renglones.
%
if k==a_nkupas+2*nkupas+1,
    A(nkupas+1,1)=3; A(nkupas+2,1)=-3;
    A(nkupas+1:nkupas+2,nkupas+1:nkupas+3)=A4;
end
%
% Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
% el intervalo  $4nk^2+2nk < k < 4nk^2+3nk$  que pertenecen a
% la clase Gorda.
%
for i=1:nkupas-1,
    if k==a_nkupas+2*nkupas+1+i,
        A(nkupas+1-i,1)=3; A(nkupas+2,1)=-3; A(nkupas+1-i,nkupas+2)=-3;
        A(nkupas+1:nkupas+2,nkupas+1:nkupas+3)=A2;
    end
end

```

```

    end
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+3nk$  que se encuentra en la clase
%   Semi-diagonal positiva.
%
if k==a_nkpas+3*nkpas+1,
    A(1,1)=1; A(nkpas+2,1)=-1; A(1,nkpas+2)=-1;
    A(nkpas+1:nkpas+2,nkpas+1:nkpas+3)=A5;
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
%   el intervalo  $4nk^2+3nk < k < 4nk^2+4nk$  que pertenecen a
%   la clase Gorda.
%
for i=1:nkpas-1,
    if k==a_nkpas+3*nkpas+1+i,
        A(1,i+1)=3; A(nkpas+2,i+1)=-3; A(1,nkpas+2)=-3;
        A(nkpas+1:nkpas+2,nkpas+1:nkpas+3)=A2;
    end
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+4nk$  que se encuentra en la clase
%   Principio y fin.
%
if k==a_nkpas+4*nkpas+1,
    A(1,nkpas+1)=3; A(1,nkpas+2)=-3;
    A(nkpas+1:nkpas+2,nkpas+1:nkpas+3)=A1;
end
%
%   Se obtienen los elementos de la semi ncapa derecha transformando
%   un elemento de la semi ncapa izquierda, llamando la funcion simy.
%
for i=1:4*nkpas+2,
    if k==a_nkpas+4*nkpas+1+i,
        A=simy(k_nimpar(n,a_nkpas+4*nkpas+2-i));
    end
end
%
%
```

```
% Se colocan los elemento k=1,2 obtenidos con k_3
%
else
    A(nkaps+1:nkaps+3,nkaps+1:nkaps+3)= k_3(k);
end
```

El siguiente algoritmo aplica la transformación *simetría* y de cualquier matriz cuadrada.

```
function Ay=simy(A)
%
% Definicion de la Transformacion Simetria y
%
% Entrada:
%     A           Matriz Cuadrada
% Salida:
%
%     Ay          Sy(A) matriz cuadrada
%
%
%
n=length(A)/2;
Ay=A;
for i=1:n
    tempo=Ay(:,i);
    Ay(:,i)=Ay(:,2*n+1-i);
    Ay(:,2*n+1-i)=tempo;
end
```

El siguiente algoritmo, presenta los elementos  $k = 1, 2$ , únicos de la base  $\beta_3$ .

```
function A=k_3(k)
%
% k_3
% A brief description.
%
%           Funcion que muestra el k-esimo elemento de la
%           base beta 3.
% Entrada:
%     k           1,2
% Salida:
```

```

%
%      A      k-esimo vector de beta tres.
%
%
if k==1,
    A=[0 1 -1; -1 0 1; 1 -1 0];
end
if k==2,
    A=simy(k_3(1));
end

```

ESTA TESIS NO SALI  
DE LA BIBLIOTECA

Este programa revisa que todos los vectores de la base  $\beta_n$  para orden impar sean cuadrados mágicos

```

function betaimpar(n)
%
%   Comprueba que todos los elementos de beta n sean cuadrados magicos
%
% Entrada:
%   n      Orden impar
% Salida:
%
%   k,A    En caso de que algun elemento no sea un cuadrado magico
%           indica cual es su orden y despliga el elemento.
%
%
for k=1:n^2-2*n-1,
    A=k_nimpar(n,k);
    s=magia(A);
    if sum(s)>0,
        display(' algo anda mal ');
        k,A
    end
end
end

```

El siguiente algoritmo programado en matlab, presenta el  $k$ -ésimo elemento de la base  $\beta_n$  en forma *sparse*, para orden par. Se hace referencia a este programa en la sección 2.3.2.4

```

function A=k_npar(n,k,A)
%
%
% k_npar
% A brief description.
%           Funcion que muestra el k-esimo elemento de la base
%           beta de cualquier orden par.
%
%           La forma de hacerlo es describiendo los vectores
%           cuyo ordenamiento k esta en la ultima semicapa
%           tiangular inferior para el orden n par, y
%           transformarlos para conocer los de la ultima
%           semicapa triangular superior, con esta capa es
%           posible describir los elementos de las ncapas
%           aplicando inmersion.
%
%
% Entrada:
%   n           Orden del espacio magico, par a partir de 4
%   k           Ordenamiento de la base beta n, donde  $1 < k < n^2 - 2n - 1$ 
%   A           Argumento util para la inmersion, despreciable
%
% Salida:
%   A           k-esimo Cuadrado magico de la base beta n
%
%
%
% k_npar
% =====
% This source code is dated at: Enero, 2005.
% Last Revision: Enero 26, 2005.
% =====
%
%
%
%           El argumento de entrada A, es interno
%
if nargin==2
    A=sparse(n,n);
end

```

```

%
%   Se calcula el numero de capas nk.
%
nkapa=(n-4)/2;
%
%   Separamos los casos k=1,...,7 del resto.
%
if k > 7,
    %
    %   Se calcula a(nk)
    %
    a_nkapa=4*nkapa^2+4*nkapa;
    %
    %   Se sumerge una capa en el caso en que k < a(nk)
    %
    if k<a_nkapa
        A(2:n-1,2:n-1)= k_npar(n-2,k,A(2:n-1,2:n-1));
    end
    %
    %   Se escriben las matrices de cada clase.
    %
    A1=[-1 1 0; 1 1 0; 0 0 0];    %distingue a la clase Gorda
    A2=[0 0 0; 0 1 -1; 0 1 -1]; %distingue a la clase  $4nk^2+5nk$ 
    A3=[-1 1 0; -1 1 0; 0 0 0]; %distingue a la clase  $4nk^2+5nk+1$ 
    A4=[-2 2 0; 2 1 -1; 0 -1 1]; %distingue a la clase Semi-diagonal neg.
    A5=[0 0 0; 0 1 1; 0 -1 -1]; %distingue a la clase  $4nk^2+7nk+2$ 
    A6=[-1 -1 0; 1 1 0; 0 0 0]; %distingue a la clase  $4nk^2+7nk+2$ 
    A7=[-1 1 0; 1 0 0; 0 0 0];  %distingue a la clase Diagonal pos.
    %
    %   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
    %   el intervalo  $4nk^2+4nk < k < 4nk^2+5nk$  que pertenecen a la
    %   clase Gorda.
    %
    for i=1:nkapa,
        if k==a_nkapa-1+i,
            A(n,n-i)=2; A(nkapa+2,n-i)=-2; A(n,nkapa+2)=-2;
            A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A1;
        end
    end
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+5nk$ 

```

```

%
if k==a_nkapa+nkapa,
    A(n,nkapa+3)=2; A(n,nkapa+2)=-2;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A2;
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+5nk+1$ 
%
if k==a_nkapa+nkapa+1,
    A(n,nkapa+1)=2; A(n,nkapa+2)=-2;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A3;
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
%   el intervalo  $4nk^2+5nk+1 < k < 4nk^2+6nk+1$  que pertenecen a la
%   clase Gorda.
%
for i=1:nkapa-1
    if k==a_nkapa+nkapa+1+i,
        A(n,nkapa+1-i)=2; A(nkapa+2,nkapa+1-i)=-2; A(n,nkapa+2)=-2;
        A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A1;
    end
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+6nk+1$  que pertenece a la clase Semi-diagonal negativa
%
if k==a_nkapa+2*nkapa+1,
    A(n,1)=2; A(nkapa+2,1)=-2; A(n,nkapa+2)=-2;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A4;
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
%   el intervalo  $4nk^2+6nk+1 < k < 4nk^2+7nk+2$  que pertenecen a la
%   clase Gorda.
%
for i=1:nkapa,
    if k==a_nkapa+2*nkapa+1+i,
        A(n-i,1)=2; A(nkapa+2,1)=-2; A(n-i,nkapa+2)=-2;
        A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A1;
    end
end

```

```

end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+7nk+2$ 
%
if k==a_nkapa+3*nkapa+2,
    A(nkapa+3,1)=2; A(nkapa+2,1)=-2;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A5;
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+7nk+3$ 
%
if k==a_nkapa+3*nkapa+3
    A(nkapa+1,1)=2; A(nkapa+2,1)=-2;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A6;
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento esta en
%   el intervalo  $4nk^2+7nk+3 < k < 4nk^2+8nk+3$  que pertenecen a la
%   clase Gorda.
%
for i=1:nkapa-1,
    if k==a_nkapa+3*nkapa+3+i,
        A(nkapa+1-i,1)=2; A(nkapa+2,1)=-2; A(nkapa+1-i,nkapa+2)=-2;
        A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A1;
    end
end
%
%   Se describen los elementos de la base cuyo ordenamiento
%    $4nk^2+8nk+3$  que se encuentra en la clase
%   Mitad y fin.
%
if k==a_nkapa+4*nkapa+3,
    A(1,1)=1; A(nkapa+2,1)=-1; A(1,nkapa+2)=-1;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A7;
end
%
%   Se obtienen los elementos de la semi capa superior transformando
%   un elemento de la semi capa inferior, usando la transpuesta.
%
for i=1:4*nkapa+3,

```

```

    if k==a_nkapa+4*nkapa+3+i,
        A=(k_npar(n,a_nkapa+4*nkapa+3-i))';
    end
end
%
% Se describen los elementos de la base cuyo ordenimiento
%  $4nk^2+12nk+7$  que se encuentra en la clase
% Mitad y fin.
%
if k==a_nkapa+8*nkapa+7
    A(n,n)=1; A(n,nkapa+2)=-1; A(nkapa+2,n)=-1;
    A(nkapa+1:nkapa+3,nkapa+1:nkapa+3)=A7;
end
%
%
% Se colocan los elemento k=1,...,7 obtenidos con k_4
%
else
    A(nkapa+1:nkapa+4,nkapa+1:nkapa+4)= k_4(k);
end

```

El siguiente algoritmo, presenta los elementos  $k = 1, \dots, 7$  base  $\beta_4$

```

function A=k_4(k)
%
% k_4
% A brief description.
%
% Funcion que muestra el k-esimo elemento de la
% base beta 3.
% Entrada:
% k 1,...,7
% Salida:
%
% A k-esimo vector de beta cuatro.
%
%
A=zeros(4);
if k==1,
    A(2,2)=1; A(2,3)=-1;
    A(3,2)=1; A(3,3)=-1;
    A(4,2)=-2; A(4,3)=2;

```

```

end
if k==2,
    A(1,1)=-2; A(1,2)=2;
    A(2,2)=1; A(2,3)=-1;
    A(3,2)=-1; A(3,3)=1;
    A(4,1)=2; A(4,2)=-2;
end
if k==3,
    A(2,1)=-2; A(2,2)=1; A(2,3)=1;
    A(3,1)=2; A(3,2)=-1; A(3,3)=-1;
end
for i=1:3
    if k==3+i,
        A=(k_4(4-i))';
    end
end
if k==7
    A(1,1)=-1; A(1,2)=1;
    A(2,1)=1; A(2,4)=-1;
    A(4,2)=-1; A(4,4)=1;
end

```

Este programa revisa que todos los elementos de la base  $\beta_n$  con orden par, sean cuadrados mágicos

```

function time=betapar(n)
%
% Comprueba que todos los elementos de beta n sean cuadrados magicos
%
% Entrada:
%     n     Orden par
% Salida:
%
%     k,A   En caso de que algun elemento no sea un cuadrado magico
%           indica cual es su orden y despliga el elemento.
%
%
for k=1:n^2-2*n-1,
    A=k_npar(n,k);
    s=magia(A);
    if sum(s)>0,

```

# Bibliografía

- [1] Abe, G. "Unsolved Problems on Magic Squares." *Disc. Math.* 127, 3-13, 1994.
- [2] Alejandre, S. "Suzanne Alejandre's Magic Squares." <http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html>.
- [3] Andrews, W. S. *Magic Squares and Cubes*, 2nd rev. ed. New York: Dover, 1960.
- [4] Andrews, W. S. and Sayles, H. A. "Magic Squares Made with Prime Numbers to have the Lowest Possible Summations." *Monist* 23, 623-630, 1913.
- [5] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. "Magic Squares." Ch. 7 in *Mathematical Recreations and Essays*, 13th ed. New York: Dover, 1987.
- [6] Barnard, F. A. P. "Theory of Magic Squares and Cubes." *Memoirs Natl. Acad. Sci.* 4, 209-270, 1888.
- [7] Barrera, P. "Algebra lineal" , Comunicaciones Internas del Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2002
- [8] Benson, W. H. and Jacoby, O. *Magic Cubes: New Recreations*. New York: Dover, 1981.
- [9] Benson, W. H. and Jacoby, O. *New Recreations with Magic Squares*. New York: Dover, 1976.
- [10] Berlekamp, E. R.; Conway, J. H; and Guy, R. K. *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 2: Games in Particular*. London: Academic Press, 1982.
- [11] Chabert, J.-L. (Ed.). "Magic Squares." Ch. 2 in *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. New York: Springer-Verlag, pp. 49-81, 1999.
- [12] Danielsson, H. "Magic Squares." <http://www.magic-squares.de/magic.html>.
- [13] Flannery, S. and Flannery, D. In *Code: A Mathematical Journey*. London: Profile Books, pp. 16-24, 2000.

- [14] Frénicle de Bessy, B. "Des quarréz ou tables magiques. Avec table generale des quarréz magiques de quatre de costé." In *Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique*, par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences (Ed. P. de la Hire). Paris: De l'imprimerie Royale par Jean Anisson, pp. 423-507, 1693. Reprinted as *Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences* 5 (pour 1666-1699), p. 209-354, 1729.
- [15] Fults, J. L. *Magic Squares*. Chicago, IL: Open Court, 1974.
- [16] Gardner, M. "Magic Squares." Ch. 12 in *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions: A New Selection*. New York: Simon and Schuster, pp. 130-140, 1961.
- [17] Gardner, M. "Magic Squares and Cubes." Ch. 17 in *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. New York: W. H. Freeman, pp. 213-225, 1988.
- [18] Grogono, A. W. "Magic Squares by Grog." <http://www.grogono.com/magic/>.
- [19] Hawley, D. "Magic Squares." <http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/aug98/art1/>.
- [20] Heinz, H. "Downloads." <http://www.geocities.com/~harveyh/downloads.htm>.
- [21] Heinz, H. "Magic Squares." <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/4057/magicsquare.htm>.
- [22] Heinz, H. and Hendricks, J. R. *Magic Square Lexicon: Illustrated*. Self-published, 2001. <http://www.geocities.com/~harveyh/BookSale.htm>.
- [23] Hirayama, A. and Abe, G. *Researches in Magic Squares*. Osaka, Japan: Osaka Kyoikutosho, 1983.
- [24] Horner, J. "On the Algebra of Magic Squares, I., II., and III." *Quart. J. Pure Appl. Math.* 11, 57-65, 123-131, and 213-224, 1871.
- [25] Hunter, J. A. H. and Madachy, J. S. "Mystic Arrays." Ch. 3 in *Mathematical Diversions*. New York: Dover, pp. 23-34, 1975.
- [26] Kanada, Y. "Magic Square Page." <http://www.kanadas.com/puzzles/magic-square.html>.
- [27] Kraitchik, M. "Magic Squares." Ch. 7 in *Mathematical Recreations*. New York: Norton, pp. 142-192, 1942.
- [28] Lei, A. "Magic Square, Cube, Hypercube." <http://www.cs.ust.hk/~philipl/magic/>.
- [29] Madachy, J. S. "Magic and Antimagic Squares." Ch. 4 in *Madachy's Mathematical Recreations*. New York: Dover, pp. 85-113, 1979.

- [30] MathPages. "Solving Magic Squares."  
<http://www.mathpages.com/home/kmath295.htm>.
- [31] Moran, J. *The Wonders of Magic Squares*. New York: Vintage, 1982.
- [32] Pappas, T. "Magic Squares," "The 'Special' Magic Square," "The Pyramid Method for Making Magic Squares," "Ancient Tibetan Magic Square," "Magic 'Line.'," and "A Chinese Magic Square." *The Joy of Mathematics*. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, pp. 82-87, 112, 133, 169, and 179, 1989.
- [33] Peterson, I. "Ivar Peterson's MathLand: More than Magic Squares."  
[http://www.maa.org/mathland/mathland\\_10\\_14.html](http://www.maa.org/mathland/mathland_10_14.html).
- [34] Pickover, C. A. *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars: An Exhibition of Surprising Structures Across Dimensions*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2002.
- [35] Pinn, K. and Wieczerkowski, C. "Number of Magic Squares from Parallel Tempering Monte Carlo." *Int. J. Mod. Phys. C* 9, 541-547, 1998.  
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/9804109/>.
- [36] Pivari, F. "Nice Examples."  
<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3469/examples.html>.
- [37] Pivari, F. "Create Your Magic Square." <http://www.pivari.com/squaremaker.html>.
- [38] Rincon, H. "Álgebra Lineal" Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM. 2001
- [39] Sloane, N. J. A. Sequences A006052/M5482 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences." <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [40] Suzuki, M. "Magic Squares."  
<http://mathforum.org/te/exchange/hosted/suzuki/MagicSquare.html>.
- [41] Weisstein, E. W. "Books about Magic Squares."  
<http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/MagicSquares.html>.
- [42] Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex, England: Penguin Books, p. 75, 1986.