# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## UNA APLICACION DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE A LA TEORIA DE MODELOS: EL TEOREMA DEL ULTRAPRODUCTO.

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**M A T E M A T I C O**

P R E S E N T A :


**PAVEL RAMIREZ HERNANDEZ**


**DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO**

**2005**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Una aplicación de las Algebras de Boole a la Teoría de Modelos: el Teorema del Ultraproducto"

realizado por Pável Ramírez Hernández

con número de cuenta 09551532-4 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | | |
|---|---|---|
| Director de Tesis Propietario | M. en C. | Rafael Rojas Barbachano |
| Propietario | Dr. | Carlos Torres Alcaraz |
| Propietario | Mat. | José Gabriel Ocampo Márquez |
| Suplente | Mat. | David Meza Alcántara |
| Suplente | Mat. | Alexei Eleusis Díaz Vera |

**Consejo Departamental de** Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

# Una aplicación de las Álgebras de Boole a la Teoría de Modelos: el Teorema del Ultraproducto

Pável Ramírez Hernández

## DEDICATORIA

A Sara y a Rafael: su amor, su amor revolucionario, su lucha, su compromiso con la vida y su fuerza son la mejor herencia que pude recibir.

A Tania, quien me ha compartido su infinita alegría y su enorme esperanza desde el buen día en que nació. Su existencia es motor de mi felicidad.

A Avril. quien con su amor, su alegría y su presencia me da fuerza. me enamora, me motiva y me da razones para luchar y construir.

A Mamá Guera, Papá Martín, mi abuela Delia (†), mis tías. tíos, primas. primos y sobrinas, quienes como la gran familia que son, han acompañado momentos muy difíciles y otros muy felices. Por todo lo que aprendí y por los días que vendrán.

A Pablo, quien ha sabido construir un fuerte lazo de solidaridad, cariño y fraternidad.

A mis amigos: Sole, Eduardo, Yareli, Lucía, Edgar, María Elena, Julia María. Leonardo, Jorge, Julia, María, Jano, Alan. Adrián, Jorge, Horacio, Jaime. Francisco y Fernando, mis compañeros de siempre.

A mis amigos de la Universidad: Alexei. Andrés. David, Edgar. Edna. Enrique, Elio, Israel, Juan Pablo, Omar, Oscar, Osvaldo. ¡qué buenos años!

A mis queridas escuelas y sus grandes maestros: Herminio Almendros. Centro Activo Freire, la Comunidad Educativa Montessori y la Facultad de Ciencias. donde supieron darme un espacio para ser.

A mis maestros Jessica, Paris, Genaro, André, Francisco, Daniel y Héctor.

A mis compañeros de trabajo y mis alumnos, por su paciencia.

Al comité ¡EUREKA! y a los Hijos por la Identidad y la Justicia, contra el Olvido y el Silencio, con quienes comparto la sangre y la historia, la alegría y el coraje: Rosario, Inti, Celia, Daniel, Laura, Acela. Mario Álvaro, Reyna. Lichita, Raúl, Elisa, Mati. Elda, Coni, Faustino. Priscila, Sergio, Valentina. Rosaura, Paula, Vane, Federico, Maya, Rocío. Vane. Nati y los demás.

A las mujeres y los hombres del Ejército Zapatista de Liberación Nacional.

A mis tíos María de los Ángeles Sánchez (†) y Juan Manuel Ramírez Duarte (†).

A Rafael, Jesús, Jacob, César, Valentín, Austreberta, Adolfo, Javier, Violeta, Delia, Irma, Artemisa, Teresa, Alicia,. . . , a los desaparecidos políticos: ¡Vivos los llevaron! ¡Vivos los queremos!

## AGRADECIMIENTOS

A María Emilia Caballero, Luis Briseño, Renato Iturriaga y Genaro Prado por sus consejos a lo largo de mis estudios de Licenciatura.

A Rafael Rojas, Carlos Torres y a Gabriel Ocampo por el acercamiento a la Lógica Matemática, la gran amistad con que la saben acompañar y por su apoyo para la elaboración de esta tesis.

A mis compañeros Alexei Díaz, David Meza, Osvaldo Téllez, Avril Vázquez, Tania Ramírez y Pablo Álvarez por su participación en los seminarios, la revisión de este trabajo y su solidaridad durante todo el proceso.

A María Emilia Caballero por su apoyo para la elaboración de esta tesis y por el privilegio de seguir sus consejos durante mis estudios de Maestría.

A Natalia de Bengoechea por haberme acompañado en el inicio de una investigación de matemáticas en la Sierra Norte de Puebla.

A Leonardo Espinosa, quien transcribió el presente trabajo a LATEX.

# Contenido

# Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar el Teorema del Ultraproducto. La construcción del ultraproducto es una técnica empleada para generar nuevos modelos a partir de otros, aunque él es de interés por sí solo. Fue desarrollada inicialmente por Skolem hacia los años de 1920–1930, y formalmente enunciada por J. Łoš en la década de 1950.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 desarrollaremos las Álgebras de Boole, filtros y ultrafiltros; veremos el Teorema de Representación de Stone y sus propiedades topológicas.

En el capítulo 2 estudiaremos los lenguajes de primer orden y desarrollaremos una álgebra de Boole especial: la Álgebra de Lindenbaum.

En el capítulo 3 desarrollaremos el concepto de ultraproducto y algunas de sus aplicaciones.

Supondremos conocimientos básicos de lógica matemática, teoría de conjuntos y topología. El Axioma de Elección se usara en este trabajo e indicaremos su uso, generalmente en demostraciones, con (**AE**). A lo largo del texto abreviaremos "si y sólo si" con syss.

# Capítulo 1

# Álgebras de Boole

*"Las matemáticas son la música de la razón"*
**SILVESTER**

## 1.1. Redes

Sea COPO la clase de los conjuntos parcialmente ordenados.

**Definición 1.1.1.** Sea $\langle X, \leq \rangle \in$ COPO

$a \in X$ es una *cota superior* para $A$ en $X$ *syss* $\forall x \in A(x \leq a)$.

$a \in X$ es una *cota inferior* para $A$ en $X$ *syss* $\forall x \in A(a \leq x)$.

$a \in X$ es el *supremo* de $A$ ($a = \sup A$) *syss* $a$ es la mínima cota superior para $A$.

$a \in X$ es el *ínfimo* de $A$ ($a = \inf A$) *syss* $a$ es la máxima cota inferior para $A$.

*Notación*: Si $A = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, entonces escribiremos:

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \sup A$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \inf A$$

En particular, si $A = \{x, y\}$, escribiremos $x \vee y = \sup A$, $x \wedge y = \inf A$.

**Definición 1.1.2.** Sea $\langle R, \leq\rangle \in$ COPO. $\langle R, \leq\rangle$ es una *red* syss $\forall x, y \in R(x \vee y \in R \,\&\, x \wedge y \in R)$.

**Ejemplo 1.1.3.** Cualquier Conjunto Totalmente Ordenado es una red.

*Demostración:* Sean $\langle a, \leq\rangle$ un conjunto totalmente ordenado, $x, y \in a$. Como $\leq$ es un orden total sobre a, entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.
Sin perder generalidad $x \leq y$. Así,

$$x \wedge y = x \in a.$$

$$x \vee y = y \in a.$$

por lo que $\langle a, \leq\rangle$ es red. ■

**Proposición 1.1.4.** *Cualquier subconjunto finito no vacío de una red tiene supremo e ínfimo.*

*Demostración:* Sean $\langle X, \leq\rangle$ una red, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $A$ finito. Procedamos por inducción sobre $n = |A|$

- Si $n = 1$, entonces $A = \{x\}$ para algún $x \in X$. Así, $\sup A = x = \inf A$.
- Supongamos que si $|A| = n$, entonces $A$ tiene supremo e ínfimo.

  Sea $A \subseteq X$ con $|A| = n + 1$. Definimos a $\bar{A} = A \setminus \{x\}$, para algún $x \in A$. Así, $|\bar{A}| = n$ y por hipótesis de inducción, $\bar{A}$ tiene supremo e ínfimo, digamos $y = \sup \bar{A}$ y $z = \inf \bar{A}$.

  Entonces $y \vee x = \sup A$ y $z \wedge x = \inf A$

■

Obsérvese que no todo *COPO* es *red*: Sea $A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$.
Así, $\langle A, \subseteq\rangle$ es un COPO pero $\{0\}$ y $\{1\}$ no tienen supremo en $A$.

**Proposición 1.1.5.** *Si $R$ es una red, $A, B \subseteq R$ tienen supremo e ínfimo y $\{\sup A, \sup B\}$ tiene supremo, $\{\inf A, \inf B\}$ tiene ínfimo, entonces existen $\sup(A \cup B)$, $\inf(A \cup B)$ y*

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \inf\{\inf A, \inf B\}$$

*Demostración:* Sea $z = \sup\{\sup A, \sup B\}$. Así, $\sup A \leq z$ y $\sup B \leq z$. Por lo tanto $\forall x\,((x \in A \rightarrow x \leq z) \& (x \in B \rightarrow x \leq z))$. Entonces $\forall x(x \in A \cup B \rightarrow x \leq z)$. Es decir, $z$ es cota superior para $A \cup B$.

Si $w$ es cota superior para $A \cup B$, entonces $w$ es cota superior para $A$ ypara $B$. Así, $\sup A \leq w$ y $\sup B \leq w$. Entonces $\sup\{\sup A, \sup B\} \leq w$, esto es $z \leq w$.

Por lo tanto $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

Ahora, sea $u = \inf\{\inf A, \inf B\}$. Así, $u \leq \inf A$ y $u \leq \inf B$. Por lo tanto $\forall x\,((x \in A \rightarrow u \leq x) \& (x \in B \rightarrow u \leq x))$. Entonces $\forall x(x \in A \cup B \rightarrow u \leq x)$. Es decir, $u$ es cota inferior para $A \cup B$. Si $v$ es cota inferior para $A \cup B$, entonces $v$ es cota inferior para $A$ y para $B$. Así, $v \leq \inf A$ y $v \leq \inf B$. Entonces $v \leq \inf\{\inf A, \inf B\}$, esto es $v \leq u$.

Por lo tanto $\inf(A \cup B) = \inf\{\inf A, \inf B\}$.

(La proposición es válida para cualquier conjunto parcialmente ordenado). ∎

**Proposición 1.1.6.** *Sea $\langle X, \leq \rangle$ una red. Para cualesquiera $x, y, z \in X$:*

*a)* $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$.

*b)* $x \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y \vee z$ *y* $x \wedge z \leq y \wedge z$.

*Demostración:* a) Es claro que $x = \sup\{x, x\}$, $x = \inf\{x, x\}$.

Supongamos que $x \leq y$ y veamos que cualquier cota superior de $\{y, z\}$ es cota superior de $\{x, z\}$.

Sea $w$ cota superior de $\{y, z\}$. Así, $y \leq w$ y $z \leq w$. Como $x \leq y$, tenemos que $x \leq w$ y $z \leq w$, es decir, $w$ es cota superior de $\{x, z\}$. Por lo tanto $x \vee z \leq y \vee z$. Análogamente, $x \wedge z \leq y \wedge z$. De la misma manera, si $x \leq y$ y $r \leq s$, entonces $x \wedge r \leq y \wedge s$ y $x \vee r \leq y \vee s$. ∎

**Proposición 1.1.7.** *En cualquier red $R$ se satisfacen las siguientes igualdades, para cualesquiera $x, y, z \in R$:*

$$x \vee y = y \vee x, \;\; x \wedge y = y \wedge x \tag{R$_1$}$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \;\; x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \tag{R$_2$}$$

$$(x \vee y) \wedge y = y, \;\; (x \wedge y) \vee y = y \tag{R$_3$}$$

*Demostración:* $R_1$: $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$; $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$

$R_2$: Por la Proposición 1.1.7,

$$\begin{aligned} x \vee (y \vee z) &= \sup\{x, \sup\{y, z\}\} \\ &= \sup\{x, y, z\} \\ &= \sup\{\sup\{x, y\}, z\} \\ &= (x \vee y) \vee z\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= \inf\{x, \inf\{y, z\}\} \\ &= \inf\{x, y, z\} \\ &= \inf\{\inf\{x, y\}, z\} \\ &= (x \wedge y) \wedge z\,. \end{aligned}$$

$R_3$: Por la Proposición 1.1.6, como $y \leq x \vee y$ y $x \vee y \leq y$, tenemos que $(x \vee y) \wedge y = y$. Las igualdades restantes se prueban de manera análoga. ∎

Es claro que si un COPO tiene cota superior, esa cota es única. Lo mismo si tiene cota inferior. En particular para cualquier *red*:

Si una red $R$ tiene cota superior, esa cota es el máximo de $R$ (el 1), si tiene cota inferior, esa cota es el mínimo de $R$ (el 0).

**Proposición 1.1.8.** *Sea $\langle R, r\rangle$ una red. Si $R$ tiene maximal, entonces es único.*

*Demostración:* Sean $R$ una red, $x, y \in R$ maximales. Así, $x = x \vee y = y$ ∎

**Definición 1.1.9.** Sea $\langle R, r\rangle$ una red.

$R$ es *complementada* syss $R$ tiene máximo (1), mínimo (0) y

$$\forall x \in R\, \exists y \in R((x \vee y = 1) \& (x \wedge y = 0)) \qquad (\mathrm{R}_4)$$

$y$ es un *complemento* de $x$, y lo denotaremos como $x^c$.

**Proposición 1.1.10.** *En cualquier red complementada $R$, se cumple que*

$$\forall x \in R((x \wedge 1 = x) \& (x \vee 1 = 1) \& (x \wedge 0 = 0) \& (x \vee 0 = x))\,.$$

*Demostración:* Sea $x \in R$. $x \vee 1$ es cota superior para 1 $(1 \leq x \vee 1)$ y 1 es el máximo de $R$ $(x \vee 1 \leq 1)$. Por lo que $x \vee 1 = 1$. Las otras tres igualdades se prueban de manera análoga. ■

**Definición 1.1.11.** Sea $\langle R, r \rangle$ una red. $R$ es *distributiva* syss para cualesquiera $x, y, z \in R$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \qquad (\mathrm{R}_5)$$

**Proposición 1.1.12.** *Si $R$ es una red complementada y distributiva, entonces cada elemento de $R$ tiene sólo un complemento.*

*Demostración:* Sean $R$ una red complementada y distributiva, $x \in R$.
Como $R$ es complementada y distributiva, $R$ tiene 0 y 1, y para $x$ hay $y \in R$ tal que $(x \vee y = 1)\&(x \wedge y = 0)$, es decir $y = x^c$.
Sea $z \in R$ tal que $z = x^c$. Así. $(x \vee z = 1)\&(x \wedge z = 0)$, de donde $x \vee z = x \vee y$. Por la Proposición 1.1.7 tenemos lo siguiente:
$x \vee z = x \vee y \Rightarrow (x \vee z) \wedge y = (x \vee y) \wedge y \Rightarrow (x \wedge y) \vee (z \wedge y) = y \Rightarrow 0 \vee (z \wedge y) = y \Rightarrow z \wedge y = y$, y por tanto $y \leq z$.
Análogamente:
$x \wedge z = x \wedge y \Rightarrow (x \wedge z) \vee y = (x \wedge y) \vee y \Rightarrow (x \vee y) \wedge (z \vee y) = y \Rightarrow 1 \wedge (y \vee z) = y \Rightarrow y \vee z = y$, y por tanto $z \leq y$
Por lo tanto $z = y$
Así, cada elemento tiene un único complemento ■

**Proposición 1.1.13.** *En cualquier red distributiva $R$, para cualesquiera $x, y, z \in R$, $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.*

*Demostración:* Sean $x, y, z \in R$. Por la Proposición 1.1.7 y la Proposición 1.1.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee z &= (x \wedge y \vee y)\,[(z \wedge y) \vee z] \\
&= [(x \wedge y) \vee (z \wedge y)] \vee z \\
&= [(x \wedge y) \vee (z \wedge y)] \vee [(x \vee z) \wedge 1] \\
&= [(x \wedge y) \vee (z \wedge y)] \vee [(x \vee z) \wedge (z \vee z)] \\
&= [(x \vee z) \wedge y] \wedge [(x \vee z) \wedge z] \\
&= [y \wedge (x \vee z)] \vee [z \wedge (x \vee z)] \\
&= (y \vee z) \wedge (x \vee z) \\
&= (x \vee z) \wedge (y \vee z)
\end{aligned}$$

■

**Proposición 1.1.14.** *Si $R$ es una red complentada y distributiva, entonces*

$$\forall x \in R \ \ ((x^c)^c = x)$$

*Demostración:* Sea $x \in R$. Sea $y \in R$ tal que $y = x^c$. Así, $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. Por la Proposición 1.1.12, tenemos que $x = y^c = (x^c)^c$. ■

**Definición 1.1.15.** Sea $\mathcal{B}$ una red. $\mathcal{B}$ es una *álgebra de Boole* syss $\mathcal{B}$ es una red complementada y distributiva con al menos dos elementos.

**Observación 1.1.16.** Es posible definir una álgebra de Boole como una estructura $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1\rangle$, donde en $\mathcal{B}$ son verdaderos los axiomas $\{R_1, \ldots, R_5\}$ y $|B| \geq 2$. Las *operaciones* $\vee, \wedge, ^c$ corresponden a supremo, ínfimo y complemento, respectivamente, mientras que 0 es el mínimo de $B$ y 1 el máximo. Al conjunto $B$ se le da un orden de la siguiente forma: $x \leq y$ syss $x \vee y = x$ para cualesquiera $x, y$ en $B$. Con este orden, $\langle \mathcal{B}, \leq\rangle$ resulta ser una red complementada y distributiva.

**Ejemplo 1.1.17.**

1. Sea $X$ un conjunto vacío. $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$ es una Álgebra de Boole. (Tomamos $\wedge, \vee, ^c, 0, 1$ como $\cup, \cap$, complemento relativo a $X$, $\emptyset, X$, respectivamente).

2. El conjunto 2 es una Álgebra de Boole.

3. Sea $X$ un conjunto infinito. Sean $\mathrm{FIN}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) \,|\, Y \text{ es finito}\}$, $\mathrm{COF}(X) = \{Y \in \mathcal{P} \,|\, X \setminus Y \text{ es finito}\}$. Así $\langle \mathrm{FIN}(X) \cup \mathrm{COF}(X), \subseteq\rangle$ es una Álgebra de Boole:

4. Sea $\langle X, \tau\rangle$ un espacio topológico.

   Sea $C(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) \,|\, Y \text{ es cerrado y abierto }\}$.

   Al tomar $\vee,\wedge,^c,0,1$ como en el ejemplo 1.1.3, $\langle C(X), \subseteq\rangle$ es una Álgebra de Boole.

5. Sea $\langle X, \tau\rangle$ un espacio topológico. Podemos generalizar el ejemplo 4 de la siguiente manera:

Recordemos que $A \subseteq x$ es regularmente abierto syss $A = (\overline{A})^\circ$. Sea $RA(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\, A \text{ es regularmente abierto }\}$. Tomemos $\vee, \wedge, ^c, 0, 1$ de la siguiente forma:

$A \vee B = (\overline{A \cup B})^{\circ}$.

$A \wedge B = A \cap B$.

$A^c = X \setminus (\overline{A})$.

$0 = \emptyset$.

$1 = X$.

El lector puede verificar que $\langle RA(X), \subseteq \rangle$ es una Álgebra de Boole.

**Teorema 1.1.18.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. Entonces*

$$\forall x, y \in \mathcal{B}\ (x \wedge y^c = 0 \iff x \leq y)\,.$$

*Demostración:* $\Rightarrow]$ $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y^c) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^c) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y \leq y$
$\Leftarrow]$ $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow x \wedge y^c = (x \wedge y) \wedge y^c = x \wedge (y \wedge y^c) = x \wedge 0 = 0$.
De manera dual $x \vee y^c = 1 \iff x \leq y$. ∎

**Teorema 1.1.19.** *Si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole, entonces para cada $x, y \in B$:*

*a)* $x \leq y \iff y^c \leq x^c$.

*b)* $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$, $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.

*Demostración:* Por el teorema previo, la proposición 1.1.6, tenemos que:
a) $x \leq y \iff x \wedge x \wedge y^c = 0 \iff y^c \leq x^c$.
b) i)$(x \wedge y)^c$ es cota superior de $\{x^c, y^c\}$, pues como $x \wedge y \leq x$ y $x \wedge y \leq y$, por a) tenemos que $x^c \leq (x \wedge y)^c$ y $y^c \leq (x \wedge y)^c$.
ii) Si $z \in B$ es tal que $x^c \leq z$ y $y^c \leq z$, entonces $z^c \leq x$ y $z^c \leq y$. Así, $z^c \leq x \wedge y$, y por a) tenemos que $(x \wedge y)^c \leq z$.
Por lo tanto $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$. Análogamente $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$. ∎

## 1.2. Filtros

**Definición 1.2.1.** Sea $R$ una red y $F \subseteq R$, $F \neq \emptyset$. $F$ es un *filtro* en $R$ syss

a) $\forall x, y \in F\ \ (x \wedge y \in F)$.

b) $\forall x \in F \ \ \forall y \in R \ \ (x \leq y \rightarrow y \in F)$.

Sea $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$. $I$ es un ideal en $R$ syss

a) $\forall x, y \in I \ \ (x \vee y \in I)$.

b) $\forall x \in I \ \ \forall y \in R \ \ (y \leq x \rightarrow y \in I)$.

*Observación.* Si una red tiene 1 (es decir máximo), entonces cada filtro en ella la tiene.
Si una red tiene 0 (es decir mínimo), entonces cada ideal en ella lo tiene.

*Ejemplos.* 1. Cada red es filtro e ideal.
2. Si $R$ tiene 1, entonces $\{1\}$ es filtro en $R$. Si $R$ tiene 0, entonces $\{0\}$ es ideal en $R$.
3. Sea $R$ una red. Para cada $x \in R$, $\{y \mid x \leq y\}$ es un filtro y le diremos *el filtro principal generado por* $x$.
(Análogamente $\{y \mid y \leq x\}$ es *el ideal principal generado por* $x$).

**Proposición 1.2.2.** *En toda red finita cada filtro (y cada ideal) es principal.*

*Demostración:* Sea $R$ una red finita y $F$ un filtro en $R$.
Por la Proposición 1.1.4 y las últimas observaciones, $F$ tiene 1, por tanto, es no vacío y por la Proposición 1.1.4 tiene mínimo, digamos $x$. Entonces $F$ es principal generado por $x$.
La prueba para ideales es análoga. ∎

**Definición 1.2.3.** Sea $R$ red. Un filtro $F$ en $R$ es *filtro propio* syss $F \subsetneqq R$.
Así, si $R$ tiene 0, entonces un filtro $F$es propio syss $0 \notin F$.
Los filtros que no son propios en general son triviales, así que a partir de ahora supondremos que los filtros (y los ideales) son propios.

**Definición 1.2.4.** Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. $A \subseteq B$ tiene la *propiedad de intersección finita* (pif) syss cada subconjunto finito de $A$, no vacío, tiene ínfimo distinto de cero.

**Proposición 1.2.5.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole y $A \subseteq B$ un conjunto con la pif. Para cada $x \in B$, $A \cup \{x\}$ o $A \cup \{x^c\}$ tiene la pif.*

*Demostración:* Sean $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, $x \in B$. Como $A$ tiene la pif, $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \wedge (x \vee x^c) \neq 0$. Así,

$$[(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \wedge (x)] \vee [(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \vee x^c] \neq 0$$

Entonces $(x_1 \wedge \ldots x_n) \wedge x \neq 0$ o $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge x^c) \neq 0$. Por lo tanto $A \cup \{x\}$ tiene la pif o $A \cup \{x^c\}$ tiene la pif. ∎

**Proposición 1.2.6.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. Sea $A = \{A_i \mid i \in I\}$ una cadena de subconjuntos de $B$.*
*Si para cada $i \in I$, $A_i$ tiene la pif, entonces $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ tiene la pif.*

*Demostración:* Sea $A_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$. Como $A$ es cadena, hay $j \in I$ tal que $A_n \subseteq A_j$. Como $A_j$ tiene la pif, tenemos que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$. ∎

**Definición 1.2.7.** Sean $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. $A \subseteq B$. Definimos los conjuntos $A^{\leq}$ y $A^{\wedge}$ como sigue:

1. $A^{\leq} = \{x \in B \mid \exists y \in A \ (y \leq x)\}$.
2. $A^{\wedge} = \{\inf(D) \mid D \subseteq A$ y $D$ es finito$\}$.
   Así, $A \subseteq A^{\wedge} \subseteq (A^{\wedge})^{\leq}$.

**Lema 1.2.8.** *Sean $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, $A \subseteq B$.*

1. *$(A^{\wedge})^{\leq}$ es un filtro.*
2. *Cualquier filtro que contiene a $A$, contiene también a $(A^{\wedge})^{\leq}$.*
3. *$(A^{\wedge})^{\leq}$ es un filtro propio syss $A$ tiene la pif.*

*Demostración:* Sea $A \subseteq B$, $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole.

1) a) Si $x, y \in (A^{\wedge})^{\leq}$, entonces hay $D, E$ subconjuntos finitos de $B$ tales que $\inf(D) \leq x$, $\inf(E) \leq y$. $D \cup E$ es finito y tenemos $\inf(D \cup E) = \inf(D) \wedge \inf(E) \leq x \wedge y$. Por lo tanto $x \wedge y \in (A^{\wedge})^{\leq}$.

b) Si $x \in (A^{\wedge})^{\leq}$ y $y \in B$ es tal que $x \leq y$, entonces hay $D \subseteq B$ finito tal que $\inf(D) \leq x \leq y$. Así, $y \in (A^{\wedge})^{\leq}$.

Por lo tanto $(A^{\wedge})^{\leq}$ es filtro.

2) Sea $F$ filtro con $A \subseteq F$. Veamos que $(A^\wedge)^\leq \subseteq F$. Sea $x \in (A^\wedge)^\leq$. Entonces hay $D \subseteq A$ finito tal que $\inf(D) \leq x$. Como $F$ es filtro, $\inf(D) \in F$ y por lo tanto $x \in F$.

3) $\Rightarrow$] Si $A$ no tiene la pif, entonces hay $D \subseteq A$ finito tal que $\inf(D) = 0$. Entonces $0 \in (A^\wedge)^\leq$ y por ello $(A^\wedge)^\leq$ no es un filtro propio.

$\Leftarrow$] Si $(A^\wedge)^\leq$ no es propio, entonces $0 \in (A^\wedge)^\leq$. Así, hay $D \subseteq A$ finito tal que $\inf(D) \leq 0$, es decir $\inf(D) = 0$ y $A$ no tiene la pif. ∎

Una conclusión importante de esta proposición es que cualquier subconjunto $A$ de una Álgebra de Boole puede extenderse a un filtro propio si y sólo si $A$ tiene la pif. Al filtro $(A^\wedge)^\leq$ le diremos el filtro generado por $A$.

Observemos que si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole y $A \subseteq B$, no basta que $0 \notin A$ y que $\forall x, y \in A \ \ (x \wedge y \neq 0)$ para que $A$ tenga la pif:

Sea $B = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$. Sea $\mathcal{B} = \langle B, \subseteq \rangle$. Tomemos $A \subseteq B$ como sigue: $A = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, \}\}$. Así, $\emptyset \notin A$ y $\forall x, y \in A \ (A \cap y \neq \emptyset)$. Sin embargo, $A$ es un subconjunto finito de $A$ y su ínfimo es $\emptyset$. Por lo tanto $A$ no tiene la pif.

**Proposición 1.2.9.** *Sean $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. $A \subseteq B$. Si $0 \notin A$ y $\forall x, y \in A \ \ (x \wedge y \in A)$, entonces $A$ tiene la pif.*

*Demostración:* Sea $A_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$. Así, $y_1 = x_1 \wedge x_2 \in A$, $y_{n+1} = y_n \wedge x_{n+1}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $y_i \in A$ y como $0 \notin A$, $y_i \neq 0$. En particular $y_n \neq 0$, es decir, $\inf A_n = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$. ∎

## 1.3. Ultrafiltros

Si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole, entonces $\subseteq$ es un orden parcial sobre los filtros en $B$.

**Definición 1.3.1.** Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, $F$ filtro propio en $B$. $F$ es *ultrafiltro* syss $F$ es $\subseteq$-máximal.

**Lema 1.3.2.** *Sean $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, $F$ un filtro propio en $B$. $F$ es ultrafiltro syss para cada $x \in B$. $x \in F$ o $x^c \in F$, pero no ambos.*

*Demostración:* $\Rightarrow$] Supongamos que $F$ es ultrafiltro y sea $x \notin F$. Sea $G$ el filtro generado por $F \cup \{x\}$. Así, $G$ no es filtro propio. Entonces $G$ no tiene la pif, y por tanto hay $D \subseteq F$ finito tal que $\inf(D) = 0 \leq x^c$. Como $\inf(D) \in F$, tenemos que $x^c \in F$. Por otro lado $x \in F$ y $x^c \in F$. Así, $0 = x \wedge x^c \in F$, y esto es una contradición ($F$ es filtro propio). Por lo tanto no pueden ambos estar en $F$.

$\Leftarrow$] Sea $F$ filtro propio tal que para cada $x \in B$, $x \in F$ o $x^c \in F$ (y no ambos). Sea $G$ filtro en $B$ tal que $F \subsetneq G$. Así, hay $x \in G \setminus F$. Es decir, hay $x \in B$ tal que $x \in G$ y $x \notin F$. Por hipótesis $x \in G$ y $x^c \in F$. Como $F \subsetneq G$, tenemos que $x \in G$ y $x^c \in G$. Así, $0 = x \wedge x^c \in G$ y $G$ no es un filtro propio. Por lo tanto $F$ es $\subseteq$-maximal. ■

**Corolario 1.3.3.** *Sea $X \neq \emptyset$. Como $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es una Álgebra de Boole, para cada $x \in X$ $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid x \in A\}$ es un ultrafiltro:*

El ultrafiltro principal generado por $\{x\}$.

**Definición 1.3.4.** Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, $F$ un ultrafiltro en $B$. $F$ es *ultrafiltro principal* syss $F$ es generado por algún elemento de la álgebra de Boole.

**Proposición 1.3.5.** *Sea $X$ un conjunto no vacío. Un ultrafiltro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es principal syss tiene como elemento un conjunto finito.*

*Demostración:* Sea $X \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$] Sea $U$ un ultrafiltro principal en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Como $U$ es generado por $\{x\}$, para algún $x \in X$, entonces $U$ tiene un elemento finito.

$\Leftarrow$] Sea $U$ un ultrafiltro principal en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tal que $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \in U$. Primero observemos que si algún $x_k \in A$ es tal que $\{x_k\} \in U$, entonces $U$ estaría generado por $\{x_k\}$, pues si $B \in U$ es tal que $\{x_k\} \notin B$, entonces $\emptyset = B \cap \{x_k\} \in U$.

Ahora probemos que hay $x_k \in A$ tal que $\{x_k\} \in U$.

Si $\{x_1\} \notin U$, entonces $X \setminus \{x_1\} \in U$. Así, $A_1 = \{x_2, \ldots, x_n\} = A \cap (X \setminus \{x_1\}) \in U$.

Si $\{x_2\} \notin U$, entonces $X \setminus \{x_2\} \in U$. Así, $A_2 = \{x_3, \ldots, x_n\} = A_1 \cap (X \setminus \{x_2\}) \in U$.

Así, si $\{x_i\} \notin U$ para $1 \leq i < n$, entonces $\{x_n\} \in U$.

Concluimos que $x_k \in A$ tal que $\{x_k\} \in U$ y por lo tanto $U$ es principal. ■

**Corolario 1.3.6.** *Si $X$ es finito, entonces cada ultrafiltro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es principal.*

**Teorema 1.3.7 (Ultrafiltro).** *Cada filtro en una Álgebra de Boole puede extenderse a un ultrafiltro.*

*Demostración:* Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole y $F$ un filtro en $B$.
Sea $\mathcal{F} = \{G \mid G$ es filtro en $B$ y $F \subseteq G\}$. Como $B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es no vacío. $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\mathcal{D} = \{D_i \mid i \in I\}$ una cadena en $\mathcal{F}$. Veamos que $\bigcup \mathcal{D}$ es cota superior para $\mathcal{F}$: Si $x, y \in \bigcup \mathcal{D}$, entonces hay $i, j \in I$ tales que $x \in D_i$, $y \in D_j$, sin perder generalidad $i \leq j$. Así, $x \wedge y \in D_j \subseteq \bigcup \mathcal{D}$. Si $x \in \bigcup \mathcal{D}$ y $x \leq z$, entonces hay $i \in I$ tal que $x \in D_i$, de donde $z \in D_i \subseteq \bigcup \mathcal{D}$. Además $\forall i \in I \quad 0 \notin D_i$, por tanto $0 \notin \bigcup \mathcal{D}$. Así, $\bigcup \mathcal{D}$ es filtro propio y $F \subseteq \bigcup \mathcal{D}$. Por lo tanto $\cup \mathcal{D} \in \mathcal{F}$.
Así, $\bigcup \mathcal{D}$ es cota superior para $\mathcal{D}$ en $\mathcal{F}$.
Por el Lema de Zorn (**AE**), hay un elemento maximal en $\mathcal{F}$, que es un ultrafiltro que extiende a $F$. ■

**Corolario 1.3.8.** *En una Álgebra de Boole, todo subconjunto con la pif puede ecxtenderse a un ultrafiltro*

*Demostración:* Extendemos al conjunto con la pif a un filtro propio y lo extendemos a un ultrafiltro. ■

**Corolario 1.3.9.** *En una Álgebra de Boole, cada elemento distinto de cero está en algún ultrafiltro.*

*Demostración:* Si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole y $x \in B$ no es cero, entonces $\{x\}$ tiene la pif y podemos extenderlo a un ultrafiltro. ■

**Corolario 1.3.10.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. Si $x, y \in B$ son tales que $x \neq y$, entonces hay un ultrafiltro $U$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*

*Demostración:* Si $x \neq y$, entonces $\neg(x \leq y) \vee \neg(y \leq x)$. Sin perder generalidad $\neg(x \leq y)$. Entonces $x \wedge y^c \neq 0$. Como $\{x \wedge y^c\}$ tiene la pif, podemos extenderlo a un ultrafiltro $U$. Así, $x \in U$y $y^c \in U$. Entonces $x \in U$ y $y \notin U$. ■

**Proposición 1.3.11.** *Hay ultrafiltros no principales.*

*Demostración:* Sea $X$ un conjunto infinito. $\mathrm{COF}(X)$ tiene la pif: Veamos que $\emptyset \notin \mathrm{COF}(X)$ y que para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathrm{COF}(X)$, $x_1 \cap x_2 \in \mathrm{COF}(X)$. Esto garantizará que $\mathrm{COF}(X)$ tiene la pif. $\emptyset \notin \mathrm{COF}(X)$ pues $X \setminus \emptyset = X$ no es finito.

Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{COF}(X)$. $X \setminus (x_1 \cap x_2) = (X \setminus x_1) \cup (X \setminus x_2)$. Como $X \setminus x_1$ y $X \setminus x_2$ son finitos, $x_1 \cap x_2 \in \mathrm{COF}(X)$. Por lo tanto $\mathrm{COF}(X)$ tiene la pif. Sea $U$ un ultrafiltro que extienda a $\mathrm{COF}(X)$. Así, $U$ es un ultrafiltro sin conjuntos finitos y por tanto no es principal. ■

## 1.4. Homorfismos y Álgebras Cociente

**Definición 1.4.1.** Sean $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, $C$ un subconjunto de $B$ no vacío. $C$ es una *subálgebra* de $\mathcal{B}$ syss $C$ es cerrado bajo $\wedge, \vee$ y $^c$.

**Proposición 1.4.2.** *Si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole y $C$ es subálgebra de $B$, entonces $0 \in C$ y $1 \in C$.*

*Demostración:* Como $C \neq 0$, hay $X \in C$. Como $C$ es cerrado bajo $^c$, $x^c \in C$. Como $C$ es cerrado bajo $\wedge$, $\vee$, tenemos que

$$0 = x \wedge x^c \in C, \qquad 1 = x \vee x^c \in C\,.$$

Así, $\{0, 1\}$ es la mínima subálgebra de $\mathcal{B}$. ■

**Proposición 1.4.3.** Sean $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole y $F$ un filtro en $B$. Definimos $I = \{x^c \in B \mid x \in F\}$.

a) $I$ es ideal.

b) $F \cup I$ es subálgebra de $\mathcal{B}$.

c) $F$ es ultrafiltro en $F \cup I$.

*Demostración:* a) Sean $x, y \in I$. Así, $x^c \in F$ y $y^c \in F$. Como $F$ es filtro, $x^c \wedge y^c \in F$, de donde $(x \vee y)^c \in F$, es decir $x \vee y \in I$. Sea $x \in I$, $y \in B$ tal que $y \leq x$. Como $x \in I$, $x^c \in F$. Así, $x^c \wedge y \leq x^c \wedge x = 0$. Entonces $x^c \leq y^c$ y por tanto $y^c \in F$, es decir, $y \in I$. Por lo tanto $I$ es ideal.
(b) $F \cup I$ es subálgebra de $\mathcal{B}$:
i) $\{0, 1\} \subseteq F \cup I \subseteq B$.
ii) Sea $x, y \in F \cup I$.
Así, alguno de $\{x, y\}$ es elemento de $I$, o ambos son elementos de $F$. Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$. Si alguno elemento de $I$. Supongamos sin perdida de generalidad que $x \in I$. Así, $x^c \in F$. Como $F$ es filtro, $x^c \vee y^c \in F$. Es decir $(x \wedge y)^c \in F$ y por definición $x \wedge y \in I$.

En ambos casos concluimos que $x \wedge y \in F \cup I$. Análogamente $x \vee y \in F \cup I$.Para ver que $x^c \in F \cup I$, basta observar que si $x \in F$, entonces $x^c \in I$; si $x \in I$, entonces $x^c \in F$. En ambos casos tenemos que si $x \in F \cup I$, entonces $x^c \in F \cup I$.
Por lo tanto $F \cup I$ es subálgebra de $\mathcal{B}$.
(c) Es claro que $F$ es filtro en $F \cup I$. Veamos que es $\subseteq$-maximal:
Si $G$ es filtro en $F \cup I$ y extiende propiamente a $F$, entonces hay $y \in G$ tal que $y \in (F \cup I) \setminus F$, es decir, $y \in I$. Así, $y^c \in F \subseteq G$. Como $G$ es filtro, entonces $0 = y \wedge y^c \in G$, que es una contradicción.
Por lo tanto $F$ es $\subseteq$-maximal, es decir, $F$ es ultrafiltro en $F \cup I$. ■

**Definición 1.4.4.** Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Álgebras de Boole, $f \colon B_1 \to B_2$ función. $f$ es un *homomorfismo* (de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$) syss para cualesquiera $x, y \in B_1$

$$f(x \wedge_1 y) = f(x) \wedge_2 f(y), \qquad f(x \vee_1 y) = f(x) \vee_2 f(y)$$

y

$$f(x^{c_1}) = f(x)^{c_2}$$

Si $f$ es biyectiva, diremos que $f$ es *isomorfismo*.

**Proposición 1.4.5.** *Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ son Álgebras de Boole y $f \colon B_1 \to B_2$ es un homomorfismo, entonces:*

*a)* $f(1_1) = 1_2, \quad f(0_1) = 0_2$

*b)* $\forall x, y \in B_1 \quad (x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y))$

*c)* $f[B_1]$ *es subálgebra de* $\mathcal{B}_2$.

*Demostración:* a) Sea $x \in B_1$. $f(0_1) = f(x \wedge_1 x^{c_1}) = f(x) \wedge_2 f(x)^{c_2} = 0_2$.
Así, $f(1_1) = f(0_1^{c_1}) = f(0_1)^{c_2} = (0_2)^{c_2} = 1_2$
b) Sean $x, y \in B_1$. $x \leq_1 y \Rightarrow x \wedge_1 y^{c_1} = 0 \Rightarrow f(x \wedge_1 y^{c_1}) = f(0_1) \Rightarrow f(x) \wedge_2 f(y)^{c_2} = 0_2 \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)$.
c) Por (a), $f[B] \neq \emptyset$.
$f(x), f(y) \in f[B] \Rightarrow x, y \in B \Rightarrow x \wedge_1 y, x \vee_1 y, x^{c_1} \in B \Rightarrow f(x \wedge_1 y), f(x \vee_1 y), f(x^{c_1}) \in f[B] \Rightarrow f(x) \wedge_2 f(y), f(x) \vee_2 f(y), f(x)^{c_2} \in f[B]$. ■

Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole y $F$ un filtro en $B$. Definimos $\sim \subseteq B \times B$ como sigue: $x \sim y$ syss hay $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$.

**Proposición 1.4.6.** $\sim$ *es de equivalencia.*

*Demostración:* a) Sea $x \in B$. $x \wedge 1 = x \wedge 1$. Así, $x \sim x$.

b) Sean $x, y \in B$ tales que $x \sim y$. Así, hay $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$. Entonces $y \wedge f = x \wedge f$, es decir, $y \sim x$.

c) Sean $x, y, z \in B$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$. Sean $f, g \in F$ tales que $x \wedge f = y \wedge f$, $y \wedge g = z \wedge g$. Sea $h = f \wedge g$. Como $F$ es filtro $h \in F$.

Así, $x \wedge h = x \wedge (f \wedge g) = (x \wedge f) \wedge g = (y \wedge f) \wedge g = y \wedge (f \wedge g) = y \wedge (g \wedge f) = (y \wedge g) \wedge f = (z \wedge g) \wedge f = z \wedge (g \wedge f) = z \wedge h$. Es decir, $x \sim z$.

Por lo tanto $\sim$ es de equivalencia. ■

**Proposición 1.4.7.** *$\sim$ es de congruencia.*

*Demostración:* Sean $x, x', y, y' \in B$ tales que $x \sim x'$, $y \sim y'$. Veamos que $x \wedge y \sim x' \wedge y'$, $x \vee y \sim x' \vee y'$, $x^c \sim (x')^c$. Sean $f, g \in F$ tales que $x \wedge f = x' \wedge f$, $y \wedge g = y' \wedge g$. Así, $f \wedge g \in F$.

a) $(x \wedge y) \wedge (f \wedge g) = (x \wedge f) \wedge (y \wedge g) = (x' \wedge f) \wedge (y' \wedge g) = (x' \wedge y') \wedge (f \wedge g)$.

b) $(x \vee y) \wedge (f \wedge g) = (x \wedge (f \wedge g)) \vee (y \wedge (f \wedge g)) = (x' \wedge (f \wedge g)) \vee (y' \wedge (f \wedge g)) = (x' \vee y') \wedge (f \wedge g)$.

c) $x^c \wedge f = x^c \wedge [(f \wedge x) \vee (f \wedge (x')^c)] = [x^c \wedge (f \wedge x)] \vee [x^c \wedge (f \wedge (x')^c)] = [(x')^c \wedge x^c] \wedge f = [(x')^c \wedge (f \wedge x')] \vee [(x')^c \wedge (f \wedge x^c)] = (x')^c \wedge [(f \wedge x') \vee (f \wedge x^c)] = (x')^c \wedge f$ ■

**Proposición 1.4.8.** *Abreviamos:* $x \odot y = (x \vee y^c) \wedge (x^c \vee y)$

*a)* $x \odot y = 1 \iff x = y$

*b)* $x \sim y \iff x \odot y \in F$

*Demostración:* a)

$$\begin{aligned}(x \vee y^c) \wedge (x^c \vee y) = 1 &\iff x \vee y^c = 1 \text{ y } x^c \vee y = 1\\ &\iff x^c \wedge y = 0 \text{ y } x^c \vee y = 1\\ &\iff y \wedge x^c = 0 \text{ y } y \vee x^c = 1\\ &\iff x^c = y^c\\ &\iff x = y\end{aligned}$$

b) $\Leftarrow]$ Sea $f = x \odot y$.

Así,

$$\begin{aligned}
x \wedge f &= x \wedge [(x \vee y^c) \wedge (x^c \vee y)] \\
&= [x \wedge (x^c \vee y)] \wedge (x \vee y^c) \\
&= [(x \wedge x^c) \vee (x \wedge y)] \wedge (x \vee y^c) \\
&= (x \wedge y) \wedge (x \vee y^c) \\
&= [(x \wedge y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge y^c] \\
&= (x \wedge y) \\
&= (y \wedge x) \\
&= [(y \wedge x) \wedge x^c] \vee [(y \wedge x) \wedge y] \\
&= (y \wedge x) \wedge (x^c \vee y) \\
&= [(y \wedge x) \vee (y \wedge y^c)] \wedge (x^c \vee y) \\
&= [y \wedge (x \vee y^c)] \wedge (x^c \vee y) \\
&= y \wedge [(x \vee y^c) \wedge (x^c \vee y)] \\
&= y \wedge f
\end{aligned}$$

Entonces $x \wedge f = y \wedge f$. Por lo tanto $x \sim y$.
$\Rightarrow]$ $x \sim y \iff$ hay $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$.
Además $x \wedge f \leq x$ y $y \wedge f \leq y$
Así,

$$y \wedge f \leq x \text{ y } x \wedge f \leq y$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (y \wedge f) \wedge x^c = 0 \text{ y } (x \wedge f) \wedge y^c = 0 \\
&\Rightarrow f \wedge (x^c \wedge y) = 0 \text{ y } f \wedge (x \wedge y^c) = 0 \\
&\Rightarrow f \leq (x^c \wedge y)^c \text{ y } f \leq (x \wedge y^c)^c \\
&\Rightarrow f \leq x \vee y^c \text{ y } f \leq x^c \vee y \\
&\Rightarrow x \vee y^c \in F \text{ y } x^c \vee y \in F \\
&\Rightarrow (x \vee y^c) \wedge (x^c \vee y) \in F
\end{aligned}$$

■

Por la proposición 1.4.7, al conjunto $B/F = \{|x| \,|\, x \in B\}$ podemos darle estructura de Álgebra de Boole.

$$\begin{aligned}
|x| \wedge |y| &= |x \wedge y| \\
|x| \vee |y| &= |x \vee y| \\
|x|^c &= |x^c|
\end{aligned}$$

$B/F$ es la álgebra cociente de $\mathcal{B}$ módulo $F$.

La función $h\colon B \to B/F$ donde $h(x) = |x|$ es claramente homomorfismo: el homomorfismo canónico (de $B$ sobre $B/F$).

**Proposición 1.4.9.** *$|x| = 1$ en $B/F$ syss $x \in F$.*

*Demostración:* $|x| = 1$ syss $x \sim 1$

$$\begin{array}{ll} \text{syss} & \exists f \in F\ (x \wedge f = f) \\ \text{syss} & \exists f \in F\ (f \leq x) \\ \text{syss} & x \in F \end{array}$$

Entonces dada $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, cada filtro $F$ tiene asociado un homomorfismo. ∎

**Lema 1.4.10.** *Sean $B_1, B_2$ Álgebras de Boole. Sea $f\colon B_1 \to B_2$ homomorfismo.*

*$F = \{x \in B_1 \mid f(x) = 1\}$ es un filtro y $f[B_1] \cong B_1/F$.*

*Demostración:* a) $F$ es filtro. Sean $x, y \in F$. Así, $f(x) = 1 = f(y) \Rightarrow f(x \wedge Y) = f(x) \wedge f(y) = 1$. Por lo tanto $x \wedge y \in F$.

Sean $x \in F$, $y \in B$ tal que $x \leq y$. Así $x \wedge y = x$. Entonces $f(x \wedge y) = f(x) = 1 \Rightarrow x \wedge y \in F \Rightarrow y \in F$. Por lo tanto $F$ es filtro.

b) Por la observación: $|x| = |y|$ syss $x \sim y$.

$$\begin{array}{ll} \text{syss} & x \odot y \in F \\ \text{syss} & f(x \odot y) \in F \\ \text{syss} & f(x) \odot f(y) = 1 \\ \text{syss} & f(x) = f(y) \end{array}$$

Entonces la función $g\colon B_1/F \to f[B_1]$ definida como

$$g\,(|x|) = f(x)$$

está bien definida. La función $g$ es 1-1 pues $g(|x|) = g(|y|) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow |x| = |y|$.

Además $g$ es sobre:

Sea $y \in f[B_1] \Rightarrow$ hay $x \in B_1$ tal que $f(x) = y \Rightarrow$ hay $|x| \in B_1/F$ tal que $f(|x|) = y$.

$g$ es homomorfismo:

a) $g(|x| \vee |y|) = g(|x \vee y|) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = g(|x|) \vee g(|y|)$.

b) $g(|x| \wedge |g|) = g(|x \wedge y|) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = g(|x|) \wedge g(|y|)$.

c) $g(|x|)^c = g(|x^c|) = f(x^c) = f(x)^c) = g(|x|)^c$.

Por lo tanto $B_1/F \underset{g}{\cong} f[B_1]$.

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & f[B_1] \\ & B_1/_F \arrow[u, "g\cong"'] \end{tikzcd}$$

El filtro $F$ es la coraza de $f$. (El dual que es el kernel, con un ideal). ■

**Lema 1.4.11.** *Un homomorfismo $h$ es 1-1 syss su coraza es $\{1\}$.*

*Demostración:* $\Rightarrow]$ $h$ es 1-1 syss $\forall x \forall y\ (h(x) = h(y) \Rightarrow x = y)$, en particular $\forall x\ (h(x) = 1 \Rightarrow x = 1)$ pues $h(x) = h(1) \Rightarrow x = 1$.

$\Leftarrow]$ Observemos que $h(x \wedge y^c)^c = 1 \Rightarrow h(x^c \vee y) = 1 \Rightarrow x^c \vee y = 1 \Rightarrow x \wedge y^c = 0$. Así $h(x) = h(y) \Rightarrow h(x) \vee h(y)^c = 1$ y $h(x) \wedge h(y)^c = 0 \Rightarrow h(x \vee y^c) = 1$ y $h(x \wedge y^c) = 0 \Rightarrow x \vee y^c = 1$ y $x \wedge y^c = 0 \Rightarrow x^c = y^c \Rightarrow x = y$. ■

**Teorema 1.4.12.** *En un filtro $F$ de una Álgebra de Boole $\mathcal{B}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

*a)* $B/F \cong 2$.

*b)* $F$ *es ultrafiltro.*

*c)* $F$ *es primo.*

*d)* *Para cada* $x \in B$, $x \in F$ *o* $x^c \in F$.

*Demostración:* b) $\Longleftrightarrow$ d) Lema 1.3.2).
d) $\Rightarrow$ a) Sea $f\colon B \to B/F$ el homomorfismo canónico. (Sea $x \in B$ y $|x| = f(x)$). Sea $|x| \in B/F$. Supongamos $|x| \neq 1$. Entonces $x \notin F$ (Proposición 1.4.9). Por hipótesis $x^c \in F$. Entonces $|x^c| = 1$ y por lo tanto $|x|^c = 1$.
Entonces $|x| = |x|^{cc} = 1^c = 0$. Por lo tanto $B/F = \{0, 1\} \cong 2$.

c) $\Rightarrow$ a) Definimos $h\colon B \to 2$ como $h(x) = 1$ syss $x \in F$. Veamos que $h$ es homomorfismo

$h(x \wedge y) = 1$ syss $x \wedge y \in F$ syss $x \in F$ y $y \in F$ syss $h(x) = 1$ y $h(y) = 1$ syss $h(x) \wedge h(y) = 1$. (Análogo si $h(x \vee y) = 0$)

Por lo tanto $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$.

$h(x \vee y) = 1$ syss $x \vee y \in F$ syss $x \in F$ o $y \in F$ syss $h(x) = 1$ o $h(y) = 1$ syss $h(x) \vee h(y) = 1$. (Análogo si $h(x \vee y) = 0$).

Por lo tanto $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$.

$h(x^c) = 1$ syss $x^c \in F$ syss $x \notin F$ syss $h(x) = 0$ syss $h(x)^c = 1$. (Análogo si $h(x^c) = 0$). Por lo tanto $h(x^c) = h(x)^c$.

Por lo tanto $h$ es homomorfismo.

Por lo tanto $B/F \cong h[B] = 2$.

a) $\Rightarrow$ d) Sea $x \in B$. $x \notin F \Rightarrow |x| \neq 1$.
$\Rightarrow |x| = 0$. Así. $|x^c| = |x|^c = 1. \Rightarrow x^c \in F$.

b) $\Rightarrow$ c) Sean $x, y \in B$ tal que $x \vee y \in F$ y $x \notin F$. Veamos que $y \in F$.
Sea $G$ el $F$ generado por $F \cup \{x\}$. Por b), $G$ no es propio. Por lo tanto hay $z \in F$ tal que $x \wedge z = 0$. Como $z \wedge (x \vee y) \in F$ y $(z \wedge x) \vee (z \wedge y) = 0 \vee (z \wedge y)$, tenemos que $z \wedge y \in F$. Por lo tanto $y \in F$ $(z \wedge y \leq y)$.

c) $\Rightarrow$ d) Sea $x \in B$. Como $1 \in F$ y $1 = x \vee x^c$, entonces $x \in F$ o $x^c \in F$. ■

**Definición 1.4.13.** Sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una colección contable de subconjuntos de una Álgebra de Boole, donde cada $A_n$ tiene ínfimo, digamos $a_n = \inf(A_n)$.

Un ultrafiltro $F$ en $B$ *preserva ínfimos* syss para cada $n \in \mathbb{N}$, $h(a_n) = \inf\{h(a) \mid a \in A_n\}$ donde $h$ es el homomorfismo canónico ($h\colon B \to B/F \cong 2$).

**Teorema 1.4.14 (Lema de Tarski).** *Si $x \neq 0$, entonces hay un ultrafiltro que pasa por $x$ (tiene a $x$) y preserva ínfimos.*

*Demostración:* Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole, $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ con ínfimos. $a_n = \inf(A_n)$ para cualquier $n \in W$. Construimos recursivamente $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donde

a) $b_n \in A_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y

b) $\{x, a_0 \vee b_0^c, \dots, a_n \vee b_n^c\}$ tiene la pif para cada $n \in \mathbb{N}$

Definimos $b_0$:
Sabemos que

$$x \wedge (a_0 \vee b_0^c) = (x \wedge a_0) \vee (x \wedge b_0^c)$$

Si $a_0 \wedge x \neq 0$, entonces $b_0 = a_0$. Así, $x \wedge (a_0 \vee b_0^c) = x \neq 0, = (x \wedge a_0) \vee (x \wedge b_0^c)$.
Si $a_0 \wedge x = 0$, entonces hay $b_0 \in A_0$ tal que

$$x \wedge (a_0 \vee (x \wedge b^c) = 0$$

(Supongamos $\forall\, b \in A_0,\ \ x \wedge (a_0 \vee b^c) = 0$. Así, $(x \wedge a_0) \vee (x \wedge b^c) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ x \wedge a_0 = 0 \text{ y } x \wedge b^c = 0 \\
&\Rightarrow\ x \leq b \qquad \forall\, b \in A_0 \ \text{ tal que } x \wedge a_0 = 0 \\
&\Rightarrow\ x \leq a_0 \quad \text{ tal que } x \wedge a_0 = 0 \\
&\Rightarrow\ x = x \wedge a_0 = 0 \quad \text{ que es una contradicción } (x \neq 0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto hay $b_0$ como queremos).
Supongamos que hay $b_n$ tal que

$$y = x \wedge (a_0 \vee b_0^c) \wedge \cdots \wedge (a_n \vee b_n^c) \neq 0\,.$$

Ahora encontramos $b_{n+1}$:
Si $y \wedge a_{n+1} \neq 0$, entonces tomamos $b_{n+1} = a_{n+1}$ pues

$$y \wedge (a_{n+1} \vee b_{n+1}^c) = y \wedge (a_{n+} \vee a_{n+1}^c) \neq 0$$

Si $y \wedge a_{n+1} = 0$, tomamos $b_{n+1}$ tal que $y \wedge (a_{n+1} \vee b_{n+1}^c) = 0$. $b_{n+1}$ existe, pues $\forall\, b \in A_n\ \ y \wedge a_{n+1} = 0$ y $y \wedge b^c = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \forall\, b \in A_n\ y \wedge a_{n+1} = 0 \ \text{ y } y \leq b \\
&\Rightarrow\ y \wedge a_{n+1} = 0 \ \text{ y } \ y \leq a_{n+1} \\
&\Rightarrow\ y \wedge a_{n+1} = 0 \ \text{ y } \ y = y \wedge a_{n+1} \\
&\Rightarrow\ y = 0\,,
\end{aligned}$$

que es una contradicción.
Así, $\{x, a_0 \wedge b_0, \dots, a_n \wedge b_n^c, \dots\}$ tiene la pif.

Por lo tanto puede extenderse a un ultrafiltro $F$ tal que:

a) $x \in F$
b) $F$ preserva ínfimos.
Sea $h\colon B \to B/F$ el $h$ homomorfismo canónico.
Recordemos que

$$a \wedge b^c = 0 \iff a \leq b$$

Así,

$$\begin{aligned} a \vee b^c = 1 &\iff a^c \wedge b = 0 \\ &\iff b \wedge a^c = 0 \\ &\iff b \leq a, \end{aligned}$$

Es decir, $a \vee b^c = 1 \iff b \leq a$
Veamos que $h(a_n) = \inf\{h(a) \mid a \in A_n\}$, es decir,

$$h(\inf a_n) = \inf\{h(a_n) \mid a \in A_n\}.$$

$a_n \vee b_n^c \in F \Rightarrow h(a_n \vee b_n^c) = 1 \Rightarrow h(a_n) \vee h(b_n)^c = 1$

$$\begin{aligned} &\iff h(b_n) \leq h(a_n) \\ &\Rightarrow \inf\{h(b) \mid b \in A_n\} \leq h(a_n) \end{aligned}$$

Por otro lado, $a_n = \inf(A_n)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_n \leq b \quad \forall b \in A_n \\ &\Rightarrow h(a_n) \leq h(b) \quad \forall b \in A_n \\ &\Rightarrow h(a_n) \leq \inf\{h(b) \mid b \in A_n\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(a_n) = \inf\{h(b) \mid b \in A_n\}$ ■

## 1.5. Filtros en Topología

Es claro que para cada $x \in X$, $V_x$ (la familia de vecindades de $x$) es un filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$: el filtro de vecindades de $x$.

**Lema 1.5.1.** *Sean $F$ un filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, $x \in X$, son equivalentes:*

*a)* $x \in \cap\{\overline{A} \mid A \in F\}$.

*b) Para todo $A \in F$ y $U \in V_x$, $A \cap U \neq \emptyset$.*

*c) hay un filtro propio que contiene a $F \cup V_x$.*

*Demostración:* b) $\Rightarrow$ c) $F \cup V_x$ tiene la pif:
$\emptyset \notin \{F \cup V \mid V \in V_x\}$ y si $H, G \in F \cup V_x$, entonces $H \cap G \in F \cup V_x$.

Por lo tanto $F \cup V_x$ puede extenderse a un filtro propio.

c) $\Rightarrow$ b) Sea $G$ el filtro propio que extiende a $F \cup V_x$.
$A \in F$ y $V \in V_x \Rightarrow A \in G$ y $V \in G \Rightarrow A \cap V \in G \Rightarrow A \cap V \neq \emptyset$ ($G$ es propio).
a) $\iff$ b)

$x \in \cap\{\overline{A} \mid A \in F\}$ syss para cada $A \in F$ $x \in \overline{A}$
syss para cada $A \in F$ y para cada $v \in V_x$ $(A \cap V \neq \emptyset)$

■

**Definición 1.5.2.** Sea $F$ un filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$.
$x \in X$ es un *punto de adherencia* de $F$ syss $x$ satisface alguna de las equivalencias del lema anterior.

**Definición 1.5.3.** Sean $F$ filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, $x \in X$.
$F$ *converge a* $x$ syss $V_x \subseteq F$.

**Observación 1.5.4.** Un punto es adherente a cada filtro que converge a él.

*Demostración:* Sea $F$ convergente a $x$. Así, $V_x \subseteq F$, por lo tanto $\forall v \in V_x$ $\forall A \in F$, $A \cap v \neq \emptyset$. ■

**Lema 1.5.5.** *Un ultrafiltro converge precisamente a sus puntos de adherencia.*

*Demostración:* Sea $F$ un ultrafiltro. Por 1.5.4 $F$ converge sólo a sus puntos de adherencia. Veamos que $F$ converge a sus puntos de adherencia. Sea $x$ de adherencia de $F$. Por 1.5.1, hay un filtro propio $G$ que extiende a $F \cup V_x$. Como $F$ es ultrafiltro, entonces $G = F$. Así, $V_x \subseteq F$. Por lo tanto $F$ converge a $x$. ■

**Lema 1.5.6.** *$X$ es Hausdorff syss cada filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$ converge a lo más a un punto (i.e. syss cada ultrafiltro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$ tiene a lo más un punto de adherencia).*

*Demostración:*
$\Rightarrow]$ Sea $F$ un filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$.
Si $x \neq y$, entonces hay $U, V$ abiertos en $X$ tales que $U \in V_x, V \in V_y$ y $U \cap V = \emptyset$. Así, ningún filtro propio contiene a $V_x \cup V_y F$. Entonces converge a lo más a un punto.
$\Leftarrow]$ Sea $x \neq y$. Como cada filtro converge a lo más a un punto, $V_x \cup V_y$ no tiene la pif. Así, hay $B \subseteq V_x \cup V_y$ finito tal que $\bigcap B = \emptyset$. Además $B \cap V_x \neq \emptyset$ y $B \cap V_y \neq \emptyset$. Sean $U = \bigcap\{b \in B \mid b \in V_x\}$, $V = \bigcap\{b \in B \mid b \in V_y\}$. Así, $U$ y $V$ son abiertos en $X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. ∎

**Lema 1.5.7.** *$X$ es compacto syss cada filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$ tiene al menos un punto de adherencia.*

*Demostración:*
$\Rightarrow]$ Sean $X$ compacto y $F$ un filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$. $\overline{F} = \{\overline{A} \mid A \in F\}$ es un conjunto de cerrados con la pif. $\Rightarrow \bigcap \overline{F} \neq \emptyset$. Por 1.5.1 $F$ tiene un punto de adherencia.

$\Leftarrow]$ Sea $F$ un conjunto de cerrados en $X$ con la pif. $F$ puede extenderse a un filtro (propio) $G$. $G$ tiene al menos un punto de adherencia. i.e. $\bigcap\{\overline{A} \mid A \in G\} \neq \emptyset$. Además

$$\bigcap\{\overline{G} \mid A \in G\} \subseteq \bigcap\{\overline{A} \mid A \in F\} = \bigcap F$$

Por lo tanto $\bigcap F \neq \emptyset$. Por lo tanto $X$ es compacto. ∎

**Corolario 1.5.8.** *Un espacio $X$ es compacto syss cada ultrafiltro converge al menos a un punto.*

*Demostración:*
$\Rightarrow]$ Si $X$ es compacto, entonces cada ultrafiltro tiene al menos un punto de adherencia y por el Lema 1.5.5 converge al menos a un punto.
$\Leftarrow]$ Sea $F$ filtro en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$. Extendemos $F$ a un ultrafiltro $G$ que converge al menos a un punto $x$. Así, $x$ es de adherencia de $G$ y de $F$.
$\left(x \in \bigcap\{\overline{A} \mid A \in G\} \subseteq \bigcap\{\overline{A} \mid A \in F\}\right)$. Entonces cada filtro tiene al menos un punto de adherencia.

Por lo tanto $X$ es compacto. ∎

## 1.6. Teorema de Representación de Stone

Si $X$ es numerable, entonces $\langle \mathrm{FIN}(X) \cup \mathrm{COF}(X), \subseteq \rangle$ es una Álgebra de Boole numerable no isomorfa a $\mathcal{P}(Y)$ para cualquier $Y$. Así, no toda Álgebra de Boole es isomorfa a una Álgebra de Boole en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$. Sin embargo, toda Álgebra de Boole es isomorfa a una subálgebra de Boole en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$:

**Teorema 1.6.1 (Representación de Stone).** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. $\mathcal{B}$ es isomorfa a un subconjunto de la Álgebra de Boole $\mathcal{P}(S(B))$, donde $S(B) = \{U \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) \mid U$ es ultrafiltro en $B\}$.*

*Demostración:* Construímos la función $h\colon B \to \mathcal{P}(S(B))$ como sigue: $h(x) = \{U \in S(B) \mid x \in U\}$.

*Afirmación:* $h$ es inyectiva.

Sean $x, y \in B$ tal que $x \neq y$. Por Corolario 1.3.10, hay un ultrafiltro $U$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Así, $h(x) \neq h(y)$ y $h$ es inyectiva.

Por lo tanto $h\colon B \to h[B]$ es una biyección.

Veamos que $h$ es homomorfismo:

Sean $x, y \in B$. Para cada filtro en $B$ $x \wedge y \in F \iff x \in F$ y $y \in F$.

Ahora veamos que $h$ es homomorfismo:

i)

$$\begin{aligned} h(x \wedge y) &= \{U \in S(B) \mid x \wedge y \in U\} = \{U \in S(B) \mid x \in U \text{ y } y \in U\} \\ &= \{U \in S(B) \mid x \in U\} \cap \{U \in S(B) \mid y \in V\} \\ &= h(x) \cap h(y) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} h(x^c) &= \{U \in S(B) \mid x^c \in U\} = \{U \in S(B) \mid x \notin U\} \\ &= S(B) \setminus h(x) \\ &= [h(x)]^c \end{aligned}$$

iii) $h(0) = \{U \in S(B) \mid 0 \in U\} = \emptyset$

iv)

$$\begin{aligned} h(x \vee y) &= h\left((x^c \wedge y^c)^c\right) \\ &= [h(x^c \wedge y^c)]^c \\ &= [h(x^c) \cap h(y^c)]^c \\ &= [[h(x)]^c \cap [h(y)]^c]^c \\ &= h(x) \cup h(y) \end{aligned}$$

v) $h(1) = h(0^c) = [h(0)]^c = [\emptyset]^c = B$.
Por lo tanto $h$ es isomorfismo. ■

**Definición 1.6.2.** Sea $\langle X, \tau\rangle$ un espacio topológico.

1. $\langle X, \tau\rangle$ es un *espacio booleano* syss $\langle X, \tau\rangle$ es Hausdorff ($T_2$), compacto y tiene una base de conjuntos cerrados y abiertos (cerrados y abiertos).

2. $\langle X_2, \tau_2\rangle \subseteq \langle X, \tau\rangle$ es *conexo* syss $X_2$ no es la unión de dos abiertos ajenos en $\tau_2$.

3. $\langle x_2, \tau_2\rangle \subseteq \langle X, \tau\rangle$ es una *componente* de $X$ syss $\langle X_2, \tau_2\rangle$ es un subespacio conexo maximal.

4. $\langle X, \tau\rangle$ es *totalmente disconexo* syss cada componente de $X$ tiene un solo punto.

**Lema 1.6.3.** *Todo espacio booleano es totalmente disconexo.*

*Demostración:* Sea $\langle X, \tau\rangle$ un espacio booleano. Sean $\langle X_2, \tau_2\rangle \subseteq \langle X \tau\rangle$ y $\{x, y\} \subseteq X_2$ con $x \neq y$. Como $\langle X, \tau\rangle$ es $T_2$, hay $V \in \tau$ tal que $V$ es cerrado, $x \in V$ y $y \notin V$. Así, $X_2 = (X_2 \cap V) \cup (X_2 \cap (X_2 \setminus V))$. Entonces $X_2$ es la unión de dos abiertos ajenos no vacíos, es decir, $X_2$ no es conexo. ■

## 1.7. Álgebras características

**Proposición 1.7.1.** *Si $\langle X. \tau\rangle$ es un espacio topológico, entonces $\{V \in \tau \mid V$ es cerrado$\}$ es una Álgebra de Boole.*

*Demostración:* Sea $\langle X. \tau\rangle$ un espacio topológico. Sea $C(X) = \{V \in \tau \mid V$ es cerrado$\}$.
i) $a, b \in C(X) \Rightarrow a \cup b, a \cap b \in C(X)$.
ii) $C(X)$ tiene máximo $(X)$ y mínimo $(\emptyset)$.
iii) Para cada $a \in C(X)$, $X \setminus a \in C(X)$ y $a \cup (X \setminus a) = X$, $a \cap (X \setminus a) = \emptyset$.
Por lo tanto $\langle C(X), \subseteq\rangle$ es una Álgebra de Boole. ■

**Corolario 1.7.2.** $C(X)$ *es subálgebra de* $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$. ■

Sabemos que si $\langle X \tau\rangle$ es un espacio booleano, entonces $C(X)$ es una base para $\tau$. ¿Habrá otra subálgebra de $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$ que sea base para $\tau$?
La respuesta es no.

**Teorema 1.7.3.** *Si $\langle X, \tau \rangle$ un espacio booleano y $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ tal que $\mathcal{A}$ es base para $\tau$, entonces $\mathcal{A} = C(X)$.*

*Demostración:* Sea $\langle X, \tau \rangle$ espacio booleano, $\mathcal{A}$ subálgebra de $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ y base para $\tau$.
$\subseteq$] $V \in \mathcal{A} \Rightarrow V \in \tau$. $V \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ subálgebra $\Rightarrow X \setminus V \in \mathcal{A} \Rightarrow x \setminus v \in \tau$.
Por lo tanto los elementos de $\mathcal{A}$ son abiertos y cerrados.

$\supseteq$] Sea $C \in C(X)$. Como $C$ es abierto, para toda $x \in X$ hay un básico de $\mathcal{A}$ (digamos $A_x$) tal que $x \in A_x \subseteq C$. Como $C$ es cerrado y $X$ compacto, $C$ es compacto. Por lo tanto la cubierta $\{A_x \mid x \in C\}$ de $C$ tiene una subcubierta finita, digamos $\{A_{x_1}, \ldots, A_{x_n}\}$. Así, $C = \bigcup\{A_{x_1}, \ldots, A_{x_n}\}$. Como $\mathcal{A}$ es subálgebra, $\bigcup\{A_{x_1}, \ldots A_{x_n}\} \in \mathcal{A}$, es decir, $C \in \mathcal{A}$. ∎

Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. Demos una topología para $S(B)$: la topología generada por $h[B]$ como base. ($h[B] = \{h(x) \mid x \in B\}$, donde $h(x) = \{U \in S(B) \mid x \in U\}$).
El espacio de Stone para una Álgebra de Boole $\mathcal{B}$, será $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$.

**Lema 1.7.4.** *$h[B]$ es base para una topología en $S(B)$.*

*Demostración:*
i) $S(B) = \bigcup\limits_{x \in B} h(x)$.
ii) $U \in h(x) \cap h(y) \Rightarrow x \wedge y \in U \Rightarrow U \in h(x \wedge y) \subseteq h(x) \cap h(y)$. ∎

**Teorema 1.7.5.** *Si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole, entonces $S(B)$ es un espacio booleano y $h \colon B \to S(B)$ es un isomorfismo entre $\mathcal{B}$ y la álgebra característica de $S(B)$:*

$$B \underset{h}{\cong} C(S(B))\,.$$

*Demostración:* Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole. Veamos que $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$ es booleano. Sean $V, W \in S(B)$, $V \neq W$. Como $V$ y $W$ son ultrafiltros en $B$, hay $x \in B$ tal que $x \in V$ y $x \notin W$. Así, hay $x \in B$ tal que $x \in V$ y $x^c \in W$. Entonces $V \in h(x)$ y $W \in h(x^c)$. Además $h(x)$ y $h(x^c)$ son abiertos ajenos. Por lo tanto $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$ es $T_2$.
Veamos que $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$ es compacto.
Sea $U \subseteq \tau_{h[B]}$ cubierta de $S(B)$. Para cada $u \in U$, $u$ es la unión de un conjunto de básicos. Entonces podemos ver a $U$ como una cubierta de básicos.

Sea $U = \{h(x_i) \mid i \in I\}$. Si $U$ no tiene subcubiertas de finitas, entonces cualquier subconjunto finito de $U$ no cubre a $S(B)$, es decir, $\bigcup\{h(x_i) \mid i \in I_n\} \neq S(B)$ donde $I_n \subseteq I$ es finito. Así, $S(B) \setminus \bigcup\{h(x_i) \mid i \in I_n\} \neq \emptyset$, es decir $\bigcap\{h(x_i^c) \mid i \in I_n\} \neq \emptyset$. Así, $h(\bigwedge_{i \in I_n} x_i^c) \neq h(0)$, por lo tanto $\bigwedge_{i \in I_n} x_i^c \neq 0$.
Así, $\{x_i^c \mid i \in I\}$ tiene la pif. Sea $V$ un ultrafiltro en $B$ que extiende a $\{x_i^c \mid i \in I\}$.
Observemos que para cada $i \in I$, $x_i^c \in V$, y por ello para cada $i \in I$, $x_i \notin V$, de donde $V \notin \bigcup\{h(x_i) \mid i \in I\} = U$.
Por lo tanto $U$ no es cubierta de $S(B)$, ques es una contradicción. Por lo tanto $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$ es compacto.
Para ver que $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$ tiene una base de cerrados y abiertos observemos que los básicos son cerrados. Para cada $x \in B$, $h(x)$ es un abierto y $h(x) = S(B) \setminus h(x^c)$. Por lo tanto $h(x)$ es cerrado y $h[B]$ es una base de cerrados y abiertos.
Por lo tanto $\langle S(B), \tau_{h[B]} \rangle$ es un espacio booleano.
Ahora veamos que $h$ es isomorfismo. Para demostrarlo utilizaremos el teorema previo.
Afirmamos que $h[B]$ es subálgebra de $\langle \mathcal{P}(S(B)), \subseteq \rangle$. $h[B] \subseteq \mathcal{P}(S(B))$, pues para cada $x \in B$, $h(x)$ es un conjunto de ultrafiltros. (es decir, $h(x) \in \mathcal{P}(S(B))$).

Veamos que $h[B] \neq \emptyset$.
Como $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole, $B$ tiene dos elementos: $x, y$. Sin perder generalidad $\{x\}$ puede extenderse a un ultrafiltro $V$ y por lo tanto $\emptyset \neq h(x) \in h[B]$.
Si $h(x), h(y) \in h[B]$, entonces $h(x) \cup h(y) = h(x \vee y) \in h[B]$ y $h(x) \cap h(y) = h(x \wedge y) \in h[B]$.
Por lo tanto $h[B]$ es subálgebra de $\langle \mathcal{P}(S(B)), \subseteq \rangle$ y es base para $\tau_{h[B]}$. Por lo tanto $h[B] = C(S(B))$ y por lo tanto $B \underset{h}{\cong} C(S(B))$. ∎

Una lectura topológica de lo que dice el Teorema anterior es la siguiente:

**Teorema 1.7.6.** *Todo espacio booleano es homeomorfo al espacio de Stone de su álgebra característica.*

*Demostración:* Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio booleano. Definimos $f \colon X \to S(C(X))$, $f(x) = \{U \in C(X) \mid x \in U\}$ (a cada punto le asociamos el conjunto de cerrados y abiertos que lo tienen).

Veamos que $f$ es homeomorfismo.

Para cada $x \in X$ y cada $U \in C(X)$, $x \in U$ o $x \in X \setminus U$, por lo tanto $f(x)$ es ultrafiltro en $C(X)$, es decir, $U \in f(x)$ o $U^c \in f(x)$. $(f(x) \in S(C(X))$.

$f$ es inyectiva:

$x \neq y \Rightarrow \exists V, W \in \tau \;\; (x \in V \text{ y } y \in W \text{ y } V \cap W = \emptyset)$

$\Rightarrow \exists U_1, U_2 \in C(X) \;\; (x \in U_1 \subseteq V \text{ y } y \in U_2 \subseteq W \text{ y } U_1 \cap U_2 = \emptyset)$.

$\Rightarrow U_1 \in f(x)$ y $U_2 \in f(y)$ y $x \notin f(y)$ y $y \notin f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

$f$ es sobre:

Sea $V \in S(C(X))$, $V$ es ultrafiltro en $C(X)$. Como $V$ es ultrafiltro, $V$ tiene la pif (en $\langle \mathcal{P}(X), \tau \rangle$). Por lo tanto $V$ puede extenderse a un ultrafiltro $W$ en $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$. Como $X$ es compacto, $W$ converge a algún $x \in X$.

*Afirmación:* $V = f(x)$.

$\subseteq]$ $x$ es de adherencia para $W$. Por lo tanto $x \in \bigcap\{\overline{A} \mid A \in V\} = \bigcap\{A \mid A \in V\}$, es decir, $V \subseteq f(x)$.

$\supseteq]$ Sea $U \in C(X)$ tal que $U \notin V$. Como $V$ es ultrafiltro en $C(X)$, $U^c \in V$. Además $x \in \bigcap\{A \mid A \in V\}$, en particular $x \in X \setminus U$. Así, $x \notin U$ y por lo tanto $U \notin f(x)$.

Por lo tanto $f$ es biyectiva.

$f$ es homeomorfismo:

Basta observar que $f$ manda la base de cerrados y abiertos sobre la base para la topología de $S(C(X))$. Afirmamos que para cada $A$ cerrado y abierto de $X$:

$$\{U \in S(C(X)) \mid A \in U\} = \{f(x) \mid x \in A\} = f[A]$$

$\subseteq]$ Sea $U$ un ultrafiltro en $C(X)$ tal que $A \in U$. Veamos que $U \in \{f(x) \mid x \in A\}$. Como $f$ es sobre, hay $x \in X$ tal que $f(x) = U$. Además $A \in U$, por lo tanto $x \in A$. Entonces $U \in \{f(x) \mid x \in A\}$.

$\supseteq]$ Sea $x \in A$ Entonces $f(x)$ es el conjunto de cerrados y abiertos que tienen a $x$ y $f(x)$ es ultrafiltro en $C(X)$. Como $A$ es cerrado y abierto y $x \in A$, $A \in f(x)$. Por lo tanto $f(x) \in \{U \in S(C(X)) \mid A \in U\}$.

Recordemos que la base para la topología de $S(C(X))$ es

$$h[C(X)] = \{h(c)|, \mid c \in C(X)\}$$

donde $h$ es $h(c) = \{U \in S(C(X)) \mid c \in U\}$. Así, $h(A) = \{U \in S(C(X)) \mid A \in U\}$.

Como $\langle X, \tau \rangle$ es booleano, la base de cerrados y abiertos es $C(X)$ (los cerrados y abiertos son subálgebra de $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$.

Así, $f$ manda la base de cerrados y abiertos sobre la base para la topología de $S(C(X))$.

Por lo tanto $f$ es un homeomorfismo. ■

## 1.8. Álgebras de Boole sin átomos y espacios de Cantor

**Definición 1.8.1.** Sea $\langle B, \leq \rangle$ una Álgebra Boole. Sea $x \in B$.
$x$ es un *átomo* syss $x \neq 0$ y $x$ es $\leq$-minimal.

**Proposición 1.8.2.** Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra Boole.
(a) $x \in B$ es átomo syss $[x]$ (el filtro principal generado por $x$) es ultrafiltro.
(b) $x \in B$ es átomo syss hay exactamente un ultrafiltro en $B$ que pasa por $x$.

*Demostración:*
a) $\Rightarrow$] Si $[x]$ no es ultrafiltro, entonces hay un ultrafiltro $W$ tal que $[x] \subsetneqq W$. Sea $w \in W \setminus [x]$. Como ($x \not\leq w$), $x \neq x \wedge w$. Además $\{w, x\} \subseteq W$, de donde $w \wedge x \neq \emptyset$. Así, $0 \neq w \wedge x < x$, por lo tanto $x$ no es átomo.
$\Leftarrow$] Si $x$ no es átomo, entonces hay $y \in B$ tal que $y \neq 0$, $y \neq x$ y $y \leq x$. Entonces $[x] \subsetneqq [y]$. Por lo tanto $[x]$ no es ultrafiltro.

b) $\Rightarrow$] Si $x$ es átomo, entonces $[x]$ es ultrafiltro. Sea $W$ ultrafiltro tal que $x \in W$. Así, $[x] \subseteq W$, es decir $[x] \subsetneqq W$ o $[x] = W$. Como $[x]$ es ultrafiltro, no es cierto que $[x] \subsetneqq W$, por lo tanto $[x] = W$.
$\Leftarrow$] Si $x$ no es átomo, entonces hay $y \in B \setminus \{0\}$ tal que $y < x$. Así, $\{x, y\}$ y $\{x, y^c\}$ tienen la pif. Por lo tanto podemos extenderlos a dos ultrafiltros que pasan por $x$ y $y$ y son distintos. ■

**Definición 1.8.3.** Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole.
$\mathcal{B}$ es *átomica* syss $\forall y \in B(y \neq 0 \rightarrow \exists x$ ($x \leq y$ tal que $x$ átomo)).

**Ejemplo 1.8.4.** Si $X$ es un conjunto, entonces $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es atómica: los unitarios son átomos.

**Proposición 1.8.5.** Si $\mathcal{B}$ es una Álgebra de Boole finita, entonces $\mathcal{B}$ es atómica e isomorfa a $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$ donde $A = \{x \in B \mid x \text{ es átomo}\}$.

*Demostración:* Si $\mathcal{B}$ no es atómica, entonces hay $y \in B$, $y \neq 0$ tal que para cada $x \in B$, si $x \leq y$, entonces $x$ no es átomo. Por lo tanto $\mathcal{B}$ no es finita.

Sea $A$ el conjunto de átomos de $\mathcal{B}$. Sea $f \colon B \to \mathcal{P}(A)$ definida como

$$f(x) = \{y \in A \,|\, y \leq x\}$$

*Afirmación.* $f$ es isomorfismo.

a) $f$ es inyectiva:

Si $x \neq y$, no es cierto que $x \leq y$ y $y \leq x$. Así, $x \wedge y^c \neq 0$ o $y \wedge x^c \neq 0$. Sin perder generalidad $x \wedge y^c \neq 0$. Como $\mathcal{B}$ es atómica, hay $z \in A$ tal que $z \leq x \wedge y^c \leq x$. Así, $z \in f(x)$ y $z \notin f(y)$, pues si $z \in f(y)$, tendríamos que $z \leq y$ y como $z \leq x \wedge y^c$, entonces $z = z \wedge z \leq (x \wedge y^c) \wedge y = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto $f$ es inyectiva.

$f$ es sobre:

Si $Y = \emptyset$, entonces $Y = f(0)$.

Sea $Y \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Como $\mathcal{B}$ es finita, $Y$ tiene supremo. Sea $x = \sup Y$. Afirmamos que $f(x) = Y$.

$\supseteq]$ $y \in Y \Rightarrow y \leq x \Rightarrow y \in f(x)$.

$\subseteq]$ Si $w \notin Y$, entonces para cada $y \in Y$ $w \wedge y = 0$. Entonces para cada $y \in Y$ $y \leq w^c$, de donde $x \leq w^c$, es decir $x \not\leq w$ (pues $x \leq w$ y $x \leq w^c \Rightarrow x \leq w$ y $w \leq x^c \Rightarrow x \leq x^c \Rightarrow x = x \wedge x \leq x^c \wedge x = 0$, que es una contradicción). Por lo tanto $w \notin f(x)$.

Por lo tanto $f$ es sobre.

$f$ preserva el orden: Sean $x, y \in B$ tales que $x \leq y$ y veamos que $f(x) \subseteq f(y)$. Sea $w \in f(x)$. Así, $w \in A$ y $w \leq x$, como $x \leq y$, entonces $w \leq x \leq y$, es decir $w \in f(y)$.

1. $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$.

$$\begin{aligned} w \in f(x \wedge y) &\iff w \in A \text{ y } w \leq x \wedge y \\ &\iff w \in A \text{ y } w \leq x \text{ y } w \leq y \end{aligned}$$

2. $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$.

$\subseteq]$ Sea $w \in A$ tal que $w \notin f(x) \cup f(y)$. Así, $w \not\leq x$ y $w \not\leq y$, de donde $w \wedge x^c \neq 0$ y $w \wedge y^c \neq 0$. Como $w$ es átomo, $w \wedge x^c = w$ y $w \wedge y^c = w$. Así, $w \leq x^c$ y $w \leq y^c$, de donde $w \leq x^c \wedge y^c = (x \vee y)^c$.

Así, $w \notin f(x \wedge y)$, pues si $w \leq x \wedge y$, tendríamos que $w = w \wedge w \leq (x \vee y) \wedge (x \vee y)^c = 0$, que es una contradicción.

$\supseteq$] Sea $w \in f(x) \cup f(y)$. Así, $w \leq x$ o $w \leq y$. Entonces $w \leq x \vee y$ y $w \in f(x \vee y)$.

3. $f(x^c) = A \setminus f(x^c)$

$$\begin{aligned} w \in f(x^c) &\iff w \in A \text{ y } w \leq x^c \\ &\iff w \in A \text{ y } w \wedge x = 0 \\ &\iff w \in A \text{ y } w \not\leq x \\ &\iff w \in A \setminus f(x) \end{aligned}$$

4. Es claro que $f(0) = \emptyset$.
5. $f(1) = f(0^c) = f(0)^c = A$. ■

**Definición 1.8.6.** Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole.
$\mathcal{B}$ es *sin átomos* syss $\mathcal{B}$ no tiene átomos.

**Lema 1.8.7.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole.*
*$\mathcal{B}$ es sin átomos syss $S(B)$ es perfecto.*

(Recordemos que $X$ es perfecto syss todos sus puntos son de acumulación).

Antes de probarlo veamos el siguiente lema:

**Lema 1.8.8.** *$X$ es perfecto syss ningún unitario es abierto.*

*Demostración:* $\Rightarrow$] Sea $X$ perfecto. Supongamos que hay un unitario abierto $A$. Entonces hay $y \in X$ tal que $A = \{y\}$. Como $X$ es perfecto, $y$ es de acumulación. Así, cualquier vecindad de $y$ intersecta a $X$ en algún $x \in X$, $x \neq y$. En particular $A$ es vecindad de $y$ y $X \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto ningún unitario es abierto.
$\Leftarrow$] Si $X$ no es perfecto, entonces hay $x \in X$ que no es acumulación, es decir, hay una vecindad de $X$, digamos $A_x$, tal que $A_x \setminus \{x\} \cap X = \emptyset$. Entonces $A_x = \{x\}$ y por lo tanto $\{x\}$ es abierto. ■

Probemos ahora el Lema 1.8.7.

*Demostración:* Sea $x \in B$, $x$ es átomo syss hay un solo ultrafiltro que pasa por $x$ syss $|h(x)| = 1$, donde $h$ es como en 1.6.1 (Teorema de Representación de Stone).

Así, $\mathcal{B}$ es sin átomos syss ningún básico de $S(B)$ es unitario syss ningún abierto en $S(B)$ es unitario syss $S(B)$ es perfecto. ■

**Lema 1.8.9.** *Sea $\langle X, \tau \rangle$ espacio topológico. Si $X$ es perfecto y Hausdorff, entonces ningún subconjunto finito no vacío de $X$ es abierto.*

*Demostración:* Sea $Y \subseteq X$ finito tal que $Y$ tiene el menor cardinal para ser abierto. Como $X$ es perfecto, $|Y| > 1$. Sea $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Como $X$ es $T_2$, hay $V_1, \ldots, V_n \in \tau$ tales que $x_i \in V_i$ y $x_n \notin V_i \;\; \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces $Y \setminus \{x_n\} = Y \cap (V_0 \cup \cdots \cup V_{n-1})$ es abierto, que es una contradicción, pues $|Y \setminus \{x_n\}| < |Y|$.

Por lo tanto $X$ no es perfecto. ■

**Definición 1.8.10.** Sea $\langle X, \tau \rangle$ espacio topológico. $X$ es un *espacio de Cantor* syss $X$ es Hausdorff, compacto con una base numerable de cerrados y abiertos. Así, $X$ es de Cantor syss $X$ es un espacio booleano con una base numerable.

**Teorema 1.8.11.** *Sea $\langle X, \tau \rangle$ espacio topológico. Si $X$ es un espacio de Cantor, entonces $X$ es homeomorfo a $\langle 2^{w}, \tau_p \rangle$, donde $\tau_p$ es la topología del producto.*

*Demostración:* Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de cerrados y abiertos no vacíos. Sea

$$\mathcal{B}' = \left\{ \langle U_n, V_n \rangle \in \mathcal{B}^2 \,|\, U_n \cap V_n = \emptyset, \quad n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Por el Lema 1.8.9 los abiertos no vacíos son infinitos.

Definimos recursivamenteuna sucesión de conjuntos.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $f \in {}^{k}2$, sean:

0) $X_{f(0)}$.

Sea $\langle U_0, V_0 \rangle \in \mathcal{B}'$. Sean

$$X_0 = U_0, X_1 = X \setminus X_0 .$$

1) $X_{f(0)\ldots f(k+1)}$:

si $U_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} \neq \emptyset$, entonces sean $x_{k+1}, y_{k+1} \in U_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)}$, con $x_{k+1} \neq y_{k+1}$. Como $X$ es $T_2$, hay $\langle U_{n(k+1)}, V_{n(k+1)} \rangle \in \mathcal{B}'$ tal que $x_{k+1} \in U_{n(k+1)}$, $y_{k+1} \in V_{n(k+1)}$ y $U_{n(k+1)} \cup V_{n(k+1)} \subseteq U_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)}$. Sean

$$\begin{aligned} X_{f(0),\ldots,f(k),0} &= U_{n(k+1)} \\ X_{f(0),\ldots,f(k),1} &= X_{f(0),\ldots,f(k)} \setminus X_{f(0),\ldots,f(k),0}\,. \end{aligned}$$

Si $U_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} = \emptyset$ y $V_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} \neq \emptyset$, entonces sean $x_{k+1}, y_{k+1} \in V_{k+1} \cap X_{f(0)\ldots f(k)}$, con $x_{k+1} \neq y_{k+1}$. Como $X$ es $T_2$, hay $\langle U_{n(k+1)}, V_{n(k+1)} \rangle \in \mathcal{B}'$ tal que $x_{k+1} \in U_{n(k+1)}$, $y_{k+1} \in V_{n(k+1)}$ y $U_{n(k+1)} \cup V_{n(k+1)} \subseteq V_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)}$. Sean

$$\begin{aligned} X_{f(0),\ldots,f(k),1} &= V_{n(k+1)} \\ X_{f(0),\ldots,f(k),0} &= X_{f(0),\ldots,f(k)} \setminus X_{f(0),\ldots,f(k)1}\,. \end{aligned}$$

Si $U_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} = \emptyset$ y $V_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} = \emptyset$, entonces sean $x_{k+1}, y_{k+1} \in X_{f(0),\ldots,f(k)}$, con $x_{k+1} \neq y_{k+1}$.

Como $X$ es $T_2$, hay $\langle U_{n(k+1)}, V_{n(k+1)} \rangle \in \mathcal{B}'$ tal que $x_{k+1} \in U_{n(k+1)}$, $y_{k+1} \in V_{n(k+1)}$ y $U_{n(k+1)} \cup V_{n(k+1)} \subseteq X_{f(0),\ldots,f(k)}$. Sean

$$\begin{aligned} X_{f(0),\ldots,f(k),0} &= U_{n(k+1)} \\ X_{f(0),\ldots,f(k),1} &= X_{f(0),\ldots,f(k)} \setminus X_{f(0),\ldots,f(k),0}\,. \end{aligned}$$

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada $f \in {}^{k}2$

i) $X_{f(0),\ldots,f(k)} = X_{f(0),\ldots,f(k),0} \cup X_{f(0),\ldots,f(k),1}$.

ii) $X_{f(0),\ldots,f(k),0} \cap X_{f(0),\ldots,f(k),1} = \emptyset$.

iii) $U_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} \subseteq X_{f(0),\ldots,f(k),0}$ y $V_{k+1} \cap X_{f(0),\ldots,f(k)} \subseteq X_{f(0),\ldots,f(k),1}$

iv) $X_{f(0),\ldots,f(k)}$ es cerriabierto y no vacío.

Observemos:
Para cada $f \in {}^{\omega}2$, el conjunto $A_f = \{X_{f(0),f(1),\ldots,f(k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ tiene la pif: Si tomamos $\{X_{f(0),\ldots,f(k_1)}, X_{f(0),\ldots,f(k_2)}, \ldots, X_{f(0),\ldots,f(k_n)}\} = A_{f,n}$, sea $k = \text{máx}\{k_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Así, $\emptyset \neq X_{f(0),\dots,f(k)} \subseteq X_{f(0),\dots,f(k_i)}$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. es decir, $\bigcap A_{f,n} \neq \emptyset$. como $A_f$ es un conjunto de cerrados con la pif en un compacto, $\bigcap A_f = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} X_{f(0),\dots,f(k)} \neq \emptyset$.

Sea $X_f = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} X_{f(0),\dots,f(k)}$. Veamos que en $X_f$ hay un solo elemento. Supongamos que hay $a, b \in X_f$ con $a \neq b$. Como $X$ es $T_2$ hay $U_a, U_b \in \mathcal{B}$ tales que $a \in U_a$, $b \in U_b$ y $U_a \cap U_b = \emptyset$. Así, hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle U_a, U_b\rangle = \langle U_{n+1}, V_{n+1}\rangle$. Así, $a \in U_{n+1} \cap X_{f(0),\dots,f(n)} \neq \emptyset$, $b \in V_{n+1} \cap X_{f(0),\dots,f(n)} \neq \emptyset$. Por iii) tenemos que $U_{n+1} \cap X_{f(0),\dots,f(n)} \subseteq X_{f(0),\dots,f(n),0}$ y $V_{n+1} \cap X_{f(0),\dots,f(n)} \subseteq X_{f(0),\dots,f(n),1}$.

Por ii) Si $f(n+1) = 0$, entonces $b \notin X_{f(0),\dots,f(n+1)}$ y si $f(n+1) = 1$. entonces $a \notin X_{f(0),\dots,f(n+1)}$. Pero $X_f \subseteq x_{f(0),\dots,f(n+1)}$. Esto es una contradicción.

Por lo tanto $a = b$.

Así, para cada $f \in {}^{\omega}2$ hay un único elemento en $X_f$, digamos $X_f = \{x_f\}$.

Por otro lado, para cada $x \in X$ hay $f \in {}^{\omega}2$ tal que $x \in X_f$. Por lo anterior. la función $g\colon X \to {}^{\omega}2$ definida como $g(x) = G(H(x))$ está bien definida (donde $H(x) = x_f$ y $G(x_f) = f$). Como $H$ y $G$ son biyectivas, $g$ es biyectiva. Veamos que es homeomorfismo.

a) $g$ es continua.

Sea

$$B_{k_i} = \{f \in {}^{\omega}2 \mid f(k) = i\}$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $i \in 2$. Así $B_{k_i}$ es subbásico para la topología de ${}^{\omega}2$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $i \in 2$, sea $Y_{k_i} = \bigcup\limits_{f\in {}^{k}2} X_{f(0),\dots,f(k-1),i}$.

Así, $Y_{k_i}$ es abierto y $x \in Y_{k_i}$ syss $x_f \in Y_{k_i}$ syss $f(k) = i$ syss $f \in B_{k_i}$. Por lo tanto $Y_{k_i} = g^{-1}(B_{k_i})$ y por lo tanto la imagen inversa de cada abierto es abierto en $X$. Por lo tanto $g$ es continua.

b) $g^{-1}$ es continua.

Veamos que $g$ es cerrada. Sea $E \subseteq X$ cerrrado. Como $X$ es compacto. $E$ es compacto. Como $g$ es continua, $g(E)$ es compacto. Como ${}^{\omega}2$ es Hausdorff. $g(E)$ es cerrada.

Por lo tanto $g$ es homeomorfismo. ∎

**Corolario 1.8.12.** *Cualesquiera dos Álgebras de Boole numerables sin átomos son isomorfas.*

*Demostración:* Sean $B_0, B_1$ Álgebras de Boole numerables sin átomos. Así. $S(B_0)$ y $S(B_1)$ son booleanos perfectos con bases numerables, por lo tanto $S(B_0) \cong S(B_1)$.

Así, $C(S(B_0)) \cong C(S(B_1))$ y por Teorema 1.7.5 $B_0 \cong B_1$
$(B_0 \cong C(S(B_0)) \cong C(S(B_1)) \cong B_1)$. ∎

**Definición 1.8.13.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole.*
*$\mathcal{B}$ es densa syss para cada $x, y \in B$ tales que $x \neq y$ y $x \leq y$, hay $z \in B$ tal que $x \leq z \leq y$ y $x \neq z \neq y$.*

**Proposición 1.8.14.** *Sea $\mathcal{B}$ una Álgebra de Boole.*
*$\mathcal{B}$ es densa syss $\mathcal{B}$ es sin átomos.*

*Demostración:* Abreviaremos $x \leq y$ y $y \neq x$, con $x < y$.
$\Rightarrow$] Sea $x \in B$. Así, $0 \leq x$. Si $x = 0$, entonces $x$ no es átomo. Si $0 < x$, entonces hay $y \in B$ tal que $0 < y < x$, es decir, $x$ no es átomo.
$\Leftarrow$] Sean $x, y \in B$ tales que $x < y$. Así, $0 < y \wedge x^c$. Como $\mathcal{B}$ es sin átomos, hay $z \in B$ tal que $0 < z < y \wedge x^c$. Así, $x < z \vee x < y$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es densa. ∎

# Capítulo 2

# Lógica Matemática

## 2.1. Lenguajes proposicionales.

Aquellos argumentos, proposiciones, enunciados o razonamientos, cuya válidez depende sólo de la forma en que están elaborados, pueden representarse con un lenguaje proposicional y estudiar desde la lógica matemática.

**Definición 2.1.1.** $\mathcal{L}$ es un *lenguaje proposicional* syss $\mathcal{L}$ consta de:

1. Un conjunto numerable de letras proposicionales

$$P = \{P_n \mid n \in w\}$$

2. Un conjunto de conectivos lógicos

$$\{\neg, \&\}$$

3. Un conjunto de símbolos auxiliares

$$\{(,)\}$$

A los elementos de $\mathcal{L}$ les diremos símbolos de $\mathcal{L}$.

**Definición 2.1.2.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. El conjunto de expresiones en $\mathcal{L}$ es el conjunto de sucesiones finitas de símbolos de $\mathcal{L}$. (*Notación:* $\mathrm{EXPR}_{\mathcal{L}}$).

Dado un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, distinguiremos de $\mathrm{EXPR}_{\mathcal{L}}$ al subconjunto de aquellas expresiones que puedan "decir algo". El conjunto será el de las fórmulas de $\mathcal{L}$.

**Ejemplo 2.1.3.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Algunas expresiones de $\mathcal{L}$ son:

$$P_{28}, \neg\neg P_{35}, P_6 \ \& \ \ P_5, \neg \ \ \& \ , P_0, P_1, P_2, P_3 P_4$$

**Definición 2.1.4 (Fórmulas de $\mathcal{L}$).** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional

1. Cualquier letra proposicional es una fórmula de $\mathcal{L}$.
2. Si $\alpha$ y $\beta$ son fórmulas de $\mathcal{L}$, entonces $\neg\alpha$ y $(\alpha \ \& \ \ \beta)$ son fórmulas de $\mathcal{L}$.
3. Sólo son fórmulas de $\mathcal{L}$ aquellas expresiones de $\mathcal{L}$ obtenidas con un número finito de aplicaciones de 1) y 2).

*Notación:* $\mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.

**Ejemplo 2.1.5.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Algunas fórmulas de $\mathcal{L}$:*

*a)* $\neg(P_{28}\& \ \neg P_{35})$

*b)* $\neg(\neg P_{28}\& \ \neg P_{35})$

*c)* $\neg(\neg(P_0\& \ \neg P_{28}) \ \& \ \ \neg\neg(\neg(P_{28}\& \ \neg P_{35}) \ \& \ \ \neg\neg(P_0 \ \& \ \ \neg P_{35})))$.

Ahora introduciremos otros conectivos lógicos como $(\vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ abreviaturas de algunas fórmulas. a partir de los conectivos definidos.
Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$

$$(\alpha \vee \beta) = \neg(\neg\alpha\& \ \neg\beta),$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\alpha\& \ \neg\beta),$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) = (\alpha \rightarrow \beta)\& \ (\beta \rightarrow \alpha).$$

**Definición 2.1.6.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, $\nu$ es una *interpretación* de $\mathcal{L}$ syss es una función $\nu \colon P \rightarrow 2$, donde 2 es visto como la álgebra de Boole 2.

A partir de una interpretación de $\mathcal{L}$, $\nu$, extendemos la función $\nu$ a una función $\nu^*\colon \text{FORM}_{\mathcal{L}} \to 2$.
Sea $\alpha \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$

a) Si $\alpha = P_k$ para alguna $k \in w$, entonces $\nu^*(\alpha) = \nu(P_k)$.

b) Si $\alpha = \neg\beta$ para alguna $\beta \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$, entonces $\nu^*(\alpha) = \nu^*(\beta)^c$.

c) Si $\alpha = \beta\&\gamma$ para alguna $\beta, \gamma \in \text{FORM}$, entonces $\nu^*(\alpha) = \nu(\beta) \wedge \nu^*(\gamma)$.

donde $^c$ y $\wedge$ son las operaciones de la álgebra 2.
Así. dadas $\nu \in {}^P2$, $\alpha, \beta \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$,

$$\begin{aligned}
\nu^*(\alpha \vee \beta) &= \nu^*(\neg(\neg\alpha\&\neg\beta)) \\
&= \nu^*(\neg\alpha\&\neg\beta)^c \\
&= (\nu^*(\neg\alpha) \wedge \nu^*(\neg\beta))^c \\
&= (\nu^*(\alpha)^c \wedge \nu^*(\beta)^c)^c \\
&= \nu^*(\alpha) \vee \nu^*(\beta)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu^*(\alpha \to \beta) &= \nu^*(\neg(\alpha\&\neg\beta)) \\
&= [\nu^*(\alpha\&\neg\beta)]^c \\
&= [\nu^*(\alpha) \wedge \nu^*(\neg\beta)]^c \\
&= [\nu^*(\alpha) \wedge \nu^*(\beta)^c]^c \\
&= \nu^*(\alpha)^c \vee \nu^*(\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu^*(\alpha \leftrightarrow \beta) &= \nu^*(\alpha \to \beta) \wedge \nu^*(\beta \to \alpha) \\
&= [\nu^*(\alpha)^c \vee \nu^*(\beta)] \wedge [\nu^*(\beta)^c \vee \nu^*(\alpha)] \\
&= [[\nu^*(\alpha)^c \vee \nu^*(\beta)] \wedge \nu(\beta)^c] \vee [[\nu^*(\alpha^c \vee \nu^*(\beta)] \wedge \nu^*(\alpha)] \\
&= [(\nu^*(\alpha)^c \wedge \nu^*(\beta)^c) \vee (\nu^*(\beta) \wedge \nu^*(\beta)^c] \vee \\
&\quad\ [(\nu^*(\alpha)^c \wedge \nu^*(\alpha)) \vee (\nu^*(\beta) \wedge \nu^*(\alpha))] \\
&= [\nu^*(\alpha)^c \wedge \nu^*(\beta)^c] \vee [\nu^*(\alpha) \wedge \nu^*(\beta)]
\end{aligned}$$

**Observación 2.1.7.** Por lo anterior, dadas $\nu \in {}^P2$, $\alpha, \beta \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$

a) $\nu^*(\neg\alpha) = 1$ syss $\nu^*(\alpha) = 0$,

b) $\nu^*(\alpha\&\beta) = 1$ syss $\nu^*(\alpha) = 1 = \nu^*(\beta)$ syss $\nu^*(\alpha) \wedge \nu^*(\beta) = 1$

c) $\nu^*(\alpha \vee \beta) = 0$ syss $\nu^*(\alpha) = 0 = \nu^*(\beta)$ syss $\nu^*(\alpha) \vee \nu^*(\beta) = 0$

d) $\nu^*(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ syss $\nu^*(\alpha) = 1$ y $\nu^*(\beta) = 0$ syss $\nu^*(\alpha) \leq \nu^*(\beta)$

e) $\nu^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ syss $\nu^*(\alpha) = \nu^*(\beta)$ ■

**Definición 2.1.8.** Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$, $\nu \in {}^P2$.
Si $\alpha$ es $P_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, $\nu^*$ *satisface* a $\alpha$ syss $\nu(P_k) = 1$,
Si $\alpha$ es $\neg\beta$, entonces $\nu^*$ *satisface* a $\neg\beta$ syss no es el caso que $\nu^*$ satisface a $\beta$.
Si $\alpha$ es $\beta\&\gamma$, entonces $\nu^*$ *satisface* a $\beta\&\gamma$ syss $\nu^*$ satisface a $\beta$ y $\nu^*$ satisface a $\gamma$.

*Notación:* $\nu^*$ *satisface* a $\alpha$ syss $\nu^* \models \alpha$.

**Definición 2.1.9.** *Sean* $\alpha \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$. $\Sigma \subseteq \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.

*$\alpha$ es satisfacible syss hay $\nu \in {}^P2$ tal que $\nu^* \models \alpha$.*

*$\Sigma$ es satisfacible syss hay $\nu \in {}^P2$ tal que $\nu^* \models \alpha$ para cada $\alpha \in \Sigma$.*

**Proposición 2.1.10.** *Sean* $\alpha \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.

$\nu \in {}^P2$, $\nu^* \models \alpha$ *syss* $\nu^*(\alpha) = 1$.

*Demostración:*
La prueba es por inducción sobre la formación de la fórmula $\alpha$.
Sean $\nu \in {}^P2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.
1. Si $\alpha = P_m$ para alguna $m \in w$. $\nu^* \models \alpha$ syss $\nu^*(\alpha) = 1$.
2. a) Si $\alpha = \neg\beta$ entonces $\nu^* \models \neg\beta$ syss no es el caso que $\nu^* \models \beta$

$$\begin{aligned}
&\iff \text{no es el caso que } \nu^*(\beta) = 1\\
&\iff \nu^*(\beta) = 0\\
&\iff \nu^*(\beta)^c = 1\\
&\iff \nu^*(\neg\beta) = 1
\end{aligned}$$

b) Si $\alpha = \beta\&\gamma$, entonces $\nu^* \models (\beta\&\gamma)$ syss $\nu^* \models \beta$ y $\nu^* \models \gamma$

$$\begin{aligned}
&\iff \nu^*(\beta) = 1 \text{ y } \nu^*(\gamma) = 1\\
&\iff \nu^*(\beta) \wedge \nu^*(\gamma) = 1\\
&\iff \nu^*(\beta\&\gamma) = 1
\end{aligned}$$

■

**Definición 2.1.11.** Sea $\alpha \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.

$\alpha$ es una *tautología* syss cualquier $\nu \in {}^{P}2$ es tal que $\nu^*(\alpha) = 1$.

*Notación:* $\models \alpha$.

**Ejemplo 2.1.12.** Sean $\alpha, \beta \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$. Por la Observación 2.1.7 tenemos que las siguientes fórmulas son tautologías:

1. $\alpha \rightarrow \alpha$ (para cada $\nu \in {}^{P}2$. $\nu^*(\alpha) \leq \nu^*(\alpha)$. Así, $\models \alpha \rightarrow \alpha$)
2. $\alpha \rightarrow \gamma$, si $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \gamma$ son tautologías (Sea $\nu \in {}^{P}2$. Como $\nu^*(\alpha) \leq \nu^*(\beta) \leq \nu^*(\gamma)$, concluimos que $\models \alpha \rightarrow \gamma$)
3. $\alpha \leftrightarrow \alpha$ (para cada $\nu \in {}^{P}2$, $\nu^*(\alpha) = \nu^*(\alpha)$)
4. $\beta \leftrightarrow \alpha$, si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautología
5. $\alpha \leftrightarrow \gamma$, si $\alpha \leftrightarrow \beta$ y $\beta \leftrightarrow \gamma$ son tautologías
6. $\alpha \& \beta$, si $\alpha$ y $\beta$ son tautologías.

**Teorema 2.1.13.** *Sea* $\alpha \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.

*$\alpha$ es una tautología syss $\neg\alpha$ no es satisfacible.*

*Demostración:* Sea $\alpha \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.
$\Rightarrow$] Si $\neg\alpha$ es satisfactible, entonces hay $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^* \models \neg\alpha$. Así no es el caso que $\nu^* \models \alpha$. Por lo tanto hay $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^*(\alpha) = 0$. es decir, $\alpha$ no es tautología.
$\Leftarrow$] Si $\alpha$ no es tautología, entonces hay $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^*(\alpha) = 0 \Rightarrow \nu^*(\alpha)^c = 1$.
Así, $\nu^*(\neg\alpha) = 1$. Por lo tanto $\neg\alpha$ es satisfactible. ■

**Proposición 2.1.14.** *Sean* $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \text{FORM}_{\mathcal{L}}$, $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{FORM}_{\mathcal{L}}$. *Si cualquier* $\nu \in {}^{P}2$ *que satisface a* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *satisface a* $\psi$, *entonces*

$$(\alpha_1 \& \ldots \& \alpha_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

*es tautología.*

*Demostración:* Si $(\alpha_1 \& \ldots \& \alpha_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ no es tautología, entonces hay $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^*(\alpha_1 \& \ldots \& \alpha_n) = 1$ y $\nu^*(\varphi \rightarrow \psi) = 0$. Así, $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^*(\alpha_i) = 1$ para cada $\alpha_i \in \Sigma$, $\nu^*(\varphi) = 1$ y $\nu^*(\psi) = 0$. Entonces hay $\nu \in {}^{P}2$ que satisface a $\Sigma \cup \{\varphi\}$ y no a $\psi$. ■

## 2.2. Álgebra de Lindenbaum

**Definición 2.2.1.** Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje prosicional, $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.
$\alpha$ *implica lógicamente* a $\beta$ ($\alpha \models \beta$) syss cualquier $\nu \in {}^{P}2$ que satisface a $\alpha$, satisface a $\beta$.

**Ejemplo 2.2.2.** *Sean* $\varphi, \psi \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.

1. $\varphi \& \psi \models \varphi$
2. $\varphi \models \psi \to \varphi$
3. $\varphi \& \neg\varphi \models \psi$
4. $\varphi \models \psi \vee \neg\psi$

**Lema 2.2.3.** *Sean* $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.

$$\alpha \models \beta \text{ syss } \models \alpha \to \beta .$$

*Demostración:* $\alpha \to \beta$ no es tautología syss hay $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^*(\alpha) = 1$ y $\nu^*(\beta) = 0$ syss hay $\nu \in {}^{P}2$ tal que $\nu^* \models \alpha$ y $\nu^* \not\models \beta$ syss $\alpha \not\models \beta$. ■

Es posible leer los lenguajes proposicionales como Álgebras de Boole. Para ello necesitamos definir una relación de orden. Lo natural sería pensar en la siguiente relación.
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Definimos $\leq \subseteq \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}^2$ como $\alpha \leq \beta$ syss $\alpha \models \beta$.
Es claro que $\leq$ es reflexiva y transitiva, sin embargo, no es antisimétrica: Si $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$, entonces $\alpha$ y $\beta$ son lógicamente equivalentes, pero no iguales.
Definamos, entonces la relación de orden en otro conjunto:

**Definición 2.2.4.** Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.

$\alpha$ y $\beta$ son lógicamente equivalentes ($\alpha \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv \beta$) syss $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.

**Lema 2.2.5.** *Sean* $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.

$\alpha \models\mathrel{\mkern-9mu}\dashv \beta$ *syss* $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

*Demostración:* Consecuencia del lema anterior. ■

**Definición 2.2.6.** Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$. Definimos $\sim \subseteq \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}^2$ como sigue;

$\alpha \sim \beta$ syss $\alpha \models\!\!\mid \beta$.

**Proposición 2.2.7.** $\sim$ *es de equivalencia.*

*Demostración:* Por el lema previo y los ejemplos de Tautologías, tenemos lo siguiente:

a) $\alpha \models\!\!\mid \alpha$ para cada $\alpha \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$.

b) Si $\alpha \models\!\!\mid \beta$, entonces $\beta \models\!\!\mid \alpha$.

c) Si $\alpha \models\!\!\mid \beta$ y $\beta \models\!\!\mid \gamma$, entonces $\alpha \models\!\!\mid \gamma$.

■

Para cada $\alpha \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$, sea $|\alpha| = \{\beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} \mid \alpha \models\!\!\mid \beta\}$.

Sea $\mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_{\sim} = \{|\alpha| \mid \alpha \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}\}$.

Ahora definimos una relación de orden $\leq \subseteq (\mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_{\sim})^2$:

$$|\alpha| \leq |\beta| \text{ syss } \models \alpha \to \beta$$

**Proposición 2.2.8.** $\leq$ *está bien definida.*

*Demostración:* Sean $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$ tales que $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$.

Así, $\models \alpha \to \beta$ syss $\alpha \models \beta$ syss $\alpha' \models \beta'$ syss $\models \alpha' \to \beta'$. ■

**Lema 2.2.9.** $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_{\sim}, \leq \rangle$ *es una red.*

*Demostración:* Sean $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_{\sim}$.

1) Como $\models \alpha \to \alpha$, entonces $|\alpha| \leq |\alpha|$.

Si $|\alpha| \leq |\beta|$ y $|\beta| \leq |\alpha|$, entonces $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$. Es decir, $\alpha \models\!\!\mid \beta$. Así, $\alpha \sim \beta$, es decir $|\alpha| = |\beta|$.

Si $|\alpha| \leq |\beta|$ y $|\beta| \leq |\gamma|$, entonces $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma$. Así, $\models \alpha \to \beta$ y $\models \beta \to \gamma$. Entonces $\models \alpha \to \gamma$. Por lo tanto $|\alpha| \leq |\gamma|$.

Por lo tanto $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_{\sim}, \leq \rangle$ es un conjunto parcialente ordenado.

2) Veamos que $\{|\alpha|, |\beta|\}$ tiene supremo e ínfimo.

Sean $|\alpha| \vee |\beta| = |\alpha \vee \beta|$, $|\alpha| \wedge |\beta| = |\alpha \& \beta|$.
Veamos que $|\alpha \vee \beta|$ es la mínima cota superior de $\{|\alpha|, |\beta|\}$. Sin perder generalidad, veamos que $|\alpha| \leq |\alpha \vee \beta|$. Sea $\nu \in {}^P2$ tal que $\nu \models \alpha$. Así, $\nu^*(\alpha) = 1$ y por tanto $\nu^*(\alpha \vee \beta) = 1$. Entonces $\alpha \models \alpha \vee \beta$ y por tanto $|\alpha| \leq |\alpha \vee \beta|$.
Por lo tanto $|\alpha \vee \beta|$ es cota superior para $\{|\alpha|, |\beta|\}$.
Supongamos ahora que $|\gamma|$ es cota superior para $\{|\alpha|, |\beta|\}$. Así, $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$. Sea $\mu \in {}^P2$ tal que $\mu \models \alpha \vee \beta$. Entonces $\mu^*(\alpha) = 1$ o $\mu^*(\beta) = 1$. En cualquier caso $\mu^*(\gamma) = 1$ y por tanto $\mu \models \gamma$. Así $\alpha \vee \beta \models \gamma$, es decir $|\alpha \vee \beta| \leq |\gamma|$. Por lo tanto $|\alpha \vee \beta|$ es el supremo de $\{|\alpha| |\beta|\}$
Probemos ahora que $|\alpha \& \beta|$ es la máxima cota inferior de $\{|\alpha|, |\beta|\}$. Sea $\nu \in {}^P2$ tal que $\nu \models \alpha \& \beta$. Así, $\nu^*(\alpha) = 1$ y $\nu^*(\beta) = 1$. Entonces $\alpha \& \beta \models \alpha$ y $\alpha \& \beta \models \beta$. Por lo tanto $|\alpha \& \beta|$ es cota inferior para $\{|\alpha|, |\beta|\}$.
Supongamos que $|\gamma|$ también es cota inferior. Sea $\mu \in {}^P2$ tal que $\mu \models \gamma$. Como $|\gamma| \leq |\alpha|$ y $|\gamma| \leq |\beta|$, tenemos que $\mu \models \alpha$ y $\mu \models \beta$. Es decir, $\mu^*(\alpha) = 1 = \mu^*(\beta)$. Por lo tanto $\mu \models \alpha \& \beta$. Por lo tanto $|\gamma| \leq |\alpha \& \beta|$.
Así, $|\alpha \& \beta|$ es la máxima cota inferior de $\{|\alpha|, |\beta|\}$. ■

**Teorema 2.2.10.** $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}, \leq \rangle$ *es una Álgebra de Boole.*

*Demostración:* Por el Lema (2.2.9) $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}, \leq \rangle$ es una red. Veamos que:
a) $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}, \leq \rangle$ es complementada,
b) es distributiva, y
c) tiene dos elementos.

a) Sea $|\alpha| \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}$. Definimos $0 = |\alpha \& \neg\alpha|$, $1 = |\alpha \vee \neg\alpha|$. Es claro que para cualquier $|\beta| \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}$, $\alpha \& \neg\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha \vee \neg\alpha$. Entonces $0 \leq |\beta| \leq 1$. Por lo tanto 0 y 1 son respectivamente el mínimo y el máximo de $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}, \leq \rangle$. Además $0 \neq 1$ pues $\alpha \vee \neg\alpha \notin |\alpha \& \neg\alpha|$. $(\alpha \vee \neg\alpha \not\models \alpha \& \neg\alpha)$.

Veamos ahora un complemento para $|\alpha|$. Sea $|\alpha|^c = |\neg\alpha|$. Así, $|\alpha|^c \vee |\neg\alpha| = |\alpha \vee \neg\alpha| = 1$ y $|\alpha|^c \wedge |\neg\alpha| = |\alpha \& \neg\alpha| = 0$.

b) Sean $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}} /_{\sim}$. Veamos $|\alpha| \wedge (|\beta| \vee |\gamma|) = (|\alpha| \wedge |\beta|) \vee (|\alpha| \wedge |\gamma|)$. $|\beta| \vee |\gamma| = |\beta \vee \gamma| \Rightarrow |\alpha| \wedge (|\beta| \vee |\gamma|) = |\alpha| \wedge |\beta \vee \gamma| = |\alpha \& (\beta \vee \gamma)|$. También $|\alpha| \wedge |\beta| = |\alpha \& \beta|$. $|\alpha| \wedge |\gamma| = |\alpha \& \gamma| \Rightarrow (|\alpha| \wedge |\beta|) \vee (|\alpha| \wedge |\gamma|) = (|\alpha \& \beta|) \vee (|\alpha \& \gamma|) = |(\alpha \& \beta) \vee (\alpha \& \gamma)|$.
Sea $\nu \in {}^P2$ tal que $\nu \models \alpha \& (\beta \vee \gamma)$. Así, $\nu^*(\alpha) = 1 = \nu^*(\beta \vee \gamma)$. Entonces $\nu^*(\beta) = 1$ o $\nu^*(\gamma) = 1$. Así. $\nu^*(\alpha) = 1 = \nu^*(\beta)$ o $\nu^*(\alpha) = 1 = \nu^*(\gamma) \Rightarrow$

$\nu^*(\alpha\&\beta) = 1$ o $\nu^*(\alpha\&\gamma) = 1 \Rightarrow \nu \models (\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma)$. Por lo tanto $\alpha\&(\beta \vee \gamma) \models (\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma)$. Es decir, $|\alpha\&(\beta \vee \gamma)| \leq |(\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma)|$.

Ahora sea $\nu \in {}^P2$ tal que $\nu \models (\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma)$. Entonces $\nu^*(\alpha\&\beta) = 1$ o $\nu^*(\alpha\&\gamma) = 1$, $\Rightarrow \nu^*(\alpha) = 1$ y $\nu^*(\beta) = 1$, o $\nu^*(\alpha) = 1$ y $\nu^*(\gamma) = 1 \Rightarrow \nu^*(\alpha) = 1$, y $\nu^*(\beta) = 1$ o $\nu^*(\gamma) = 1 \Rightarrow \nu^*(\alpha) = 1$ y $\nu^*(\beta\vee\gamma) = 1 \Rightarrow \nu^*(\alpha\&(\beta\vee\gamma)) = 1$. Por lo tanto. $(\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma) \models \alpha\&(\beta \vee \gamma)$.

Es decir, $|(\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma)| \leq |\alpha\&(\beta \vee \gamma)|$. Por lo tanto $|\alpha\&(\beta \vee \gamma)| = |(\alpha\&\beta) \vee (\alpha\&\gamma)|$. Por lo tanto $|\alpha| \wedge (|\beta| \vee |\gamma|) = (|\alpha| \wedge |\beta|) \vee (|\alpha| \wedge |\gamma|)$.

c) Por a) $\mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim$ tiene dos elementos.

Así, $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim, \leq\rangle$ es una Álgebra de Boole: la álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$. ∎

**Proposición 2.2.11.** $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim, \leq\rangle$ *es sin átomos.*

*Demostración:* Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}$, con $|\alpha| \neq |\beta|$. Así. $|\alpha| \leq |\beta \to \alpha| \leq |\beta|$. pues $\alpha \models \beta \to \alpha$ y $\beta \to \alpha \models \beta$. Por otro lado $|\alpha| \neq |\beta \to \alpha| \neq |\beta|$. ∎

**Corolario 2.2.12.** $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim, \leq\rangle$ *es la única Álgebra de Boole sin átomos (salvo isomorfimo).*

*Demostración:* $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim, \leq\rangle$ es una Álgebra de Boole densa y numerable. Por la Proposición 1.8.14 y el Corolario 1.8.12, es la única salvo isomorfismo. ∎

¿Qué es un filtro propio en $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim, \leq\rangle$?

Un filtro propio es un conjunto de enunciados en $\mathcal{L}$ cerrado bajo implicación lógica.

¿Qué es un ultrafiltro en $\langle \mathrm{FORM}_{\mathcal{L}}/_\sim, \leq\rangle$?

Un conjunto de enunciados cerrado bajo implicación lógica en el que para cada enunciado $\alpha$, $\alpha$ está en el conjunto o $\neg\alpha$ esta en el conjunto, pero no ambos.

# Capítulo 3

# Ultraproductos

Hemos estudiado a los lenguajes proposicionales y los hemos interpretado en la álgebra de Boole 2. Sin embargo, los lenguajes proposicionales carecen de la riqueza necesaria para escribir argumentos como el siguiente:

"Todo conjunto de conjuntos no vacíos tiene un conjunto de representantes. $A = \{[a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a \leq b$ y $a, b \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de conjuntos no vacíos y por tanto tiene un conjunto de representantes. Sea $C$ un conjunto de representantes para $A$".

Hay lenguajes suficientemente ricos para tal propósito.

## 3.1. Lenguajes de primer orden.

**Definición 3.1.1.** $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden syss $\mathcal{L} = \mathrm{VAR} \cup \rho \cup \{\approx\} \cup \mathrm{CONECT} \cup \mathrm{CUANTIF} \cup \mathrm{AUX}$, donde VAR es un conjunto numerable de variables, CONECT es un conjunto de conectivos lógicos, CUANTIF es un conjunto de cuantificadores, AUX es un conjunto de símbolos auxiliares y $\rho$ (el tipo de semejanza) es la unión de tres conjuntos: $\rho = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, donde $\mathcal{C}$ es un conjunto de letras de constantes individuales, $(\mathcal{F})$ es un conjunto de letras funcionales y $(\mathcal{P})$ es un conjunto de letras predicativas. .

*Observación.* De los conjuntos anteriores sólo $\rho$ puede ser vacío.

**Ejemplo 3.1.2.** Un lenguaje para la aritmética de Peano: Sea $\mathcal{L}_A = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \rho_A \cup \{\approx\} \cup \{\neg, \&\} \cup \{\exists\} \cup \{), \, , \, (\}$ donde $\rho_A = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ está formado por: $\mathcal{C} = \{c_0\}$, $\mathcal{F} = \{f_0^1, f_1^2, f_2^2\}$, $\mathcal{P} = \{p_0^2\}$.

Es importante observar que lo que determina un lenguaje de primer orden es su tipo de semejanza ($\rho$), así que tiene sentido llamar a estos lenguajes como: "*lenguaje de tipo* $\rho$" (Notación: $\mathcal{L}_\rho$). A partir de ahora supondremos que $\rho$ es un tipo de semejanza.

**Definición 3.1.3.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de tipo $\rho$. El conjunto de expresiones de $\mathcal{L}_\rho$ es el conjunto de sucesiones finitas de símbolos de $\mathcal{L}_\rho$. (*Notación:* $\mathrm{EXPR}_\rho$).

**Definición 3.1.4.** A continuación definimos recursivamente al conjunto de términos de tipo $\rho$ ($\mathrm{TERM}_\rho$). Los términos serán los "objetos" de los que "hablará" el lenguaje.

i) $\mathrm{VAR} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathrm{TERM}_\rho$

ii) Si $f_n^k \in \mathcal{F}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \mathrm{TERM}_\rho$, entonces
$$f_n^k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathrm{TERM}_\rho$$

iii) Sólo sin términos de tipo $\rho$ aquellas expresiones obtenidas de i) o ii) después de un número finito de pasos.

A continuación construiremos al conjunto de sucesiones símbolos de $\mathcal{L}_\rho$ que "dicen" algo.

**Definición 3.1.5 (Fórmulas atómicas de tipo $\rho$).** $\alpha \in \mathrm{EXPR}_\rho$ es una fórmula atómica de tipo $\rho$ syss $\alpha$ es de la forma:

i) $(\tau \approx \sigma)$, donde $\tau, \sigma \in \mathrm{TERM}_\rho$, o

ii) $(p_n^k(\tau_1, \ldots, \tau_n))$ para $p_n^k \in \mathcal{P}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{TERM}_\rho$

*Notación:* $\mathrm{ATOM}_\rho$.

A continuación definimos recursivamente al conjunto de fórmulas de tipo $\rho$ ($\mathrm{FORM}_\rho$).

**Definición 3.1.6 (Fórmulas de tipo $\rho$).**

i) $\mathrm{ATOM}_\rho \subseteq \mathrm{FORM}_\rho$

ii) Si $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_\rho$ y $v_k \in \mathrm{VAR}$, entonces $(\neg\alpha) \in \mathrm{FORM}_\rho$, $(\alpha \& \beta) \in \mathrm{FORM}_\rho$ y $(\exists\, v_k, \alpha) \in \mathrm{FORM}_\rho$.

iii) Sólo son fórmulas de tipo $\rho$, expresiones de tipo $\rho$ obtenidas después de un número finito de pasos entre i) y ii).

Es posible introducir nuevos conectivos y el cuantificador universal de la siguiente forma:
Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{FORM}_\rho$. $v_k \in \mathrm{VAR}$

$$(\alpha \vee \beta) = \neg(\neg\alpha \& \neg\beta).$$

$$(\alpha \to \beta) = \neg(\alpha \& \neg\beta).$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) = (\alpha \to \beta) \& (\beta \to \alpha).$$

$$(\forall v_k(\alpha) = (\neg(\exists v_k(\neg\alpha))).$$

Por comodidad cuando sea posible omitir paréntesis sin alterar la lectura de las fórmulas, lo haremos.

**Definición 3.1.7.** Sean $\alpha$ un fórmula de tipo $\rho$ y $v_k$ una variable.

El alcance del cuantificador $\exists v_k$ en $\exists v_k\alpha$ es la fórmula $\alpha$.

**Definición 3.1.8.** Sean $\alpha$ un fórmula de tipo $\rho$ y $v_k$ una variable que aparece en $\alpha$.

$v_k$ es acotada en $\alpha$ syss $v_k$ es la variable de un cuantificador $\exists v_k$ en $\alpha$, o $v_k$ está en el alcance de un cuantificador $\exists v_k$ en $\alpha$.
$v_k$ es libre en $\alpha$ syss $v_k$ no es acotada en $\alpha$.

**Definición 3.1.9.** Sea $\alpha$ un fórmula de tipo $\rho$.

$\alpha$ es un enunciado de tipo $\rho$ syss $\alpha$ no tiene variables libres.

*Notación:* $\mathrm{ENUN}_\rho$.
Entenderemos por *teoría* a cada conjunto de enunciados.

## 3.2. Teoría de modelos

**Definición 3.2.1.** Sea $\mathcal{L}_\rho$ un lenguaje de tipo $\rho$.
$\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo $\rho$ syss $\mathfrak{A} = \langle|\mathfrak{A}|, I\rangle$, donde $|\mathfrak{A}|$ es un conjunto no vacío (el universo de $\mathfrak{A}$) y $I$ es una función con dominio $\rho$ (la función de interpretación) tal que:

para cada $c \in \mathcal{C}$ $I(c) \in |\mathfrak{A}|$,
para cada $f \in \mathcal{F}$ de aridad $k$, $I(f)\colon |\mathfrak{A}|^k \to |\mathfrak{A}|$, y
para cada $p \in \mathcal{P}$ de aridad $n$, $I(p) \subseteq |\mathfrak{A}|^n$.
*Notación*: Si $\ell \in \rho$, entonces $\ell^{\mathfrak{A}} = I(\ell)$.

**Ejemplo 3.2.2.** Sea $\rho_A$ como en 3.1.2. Veamos algunas estructuras de tipo $\rho_A$.

1. $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N}, I_1 \rangle$ es una estructura de tipo $\rho_A$, donde
   $I_1(c_0) = 0$
   $I_1(f_0^1)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la función sucesor.
   $I_1(f_1^2)\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es la suma.
   $I_1(f_2^2)\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es el producto.
   $I_1(p_0^2) \subseteq \mathbb{N}^2$ es el orden.
   $\mathfrak{A}_1$ puede escribirse así:
   $$\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, \leq \rangle .$$

2. $\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{Z}, I_2 \rangle$ es una estructura de tipo $\rho_A$, donde.
   $I_2(c_0) = 1$.
   $I_2(f_0^1)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es la función predecesor.
   $I_2(f_1^2)\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ es la resta.
   $I_2(f_2^2)\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ es la suma.
   $I_2(p_0^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ es la divisibilidad. Así,
   $$\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{Z}, 1, -s, -, +, | \rangle .$$

Los ejemplos previos ilustran que es posible interpretar el mismo lenguaje en universos distintos.

**Definición 3.2.3.** Sean $\tau \in \mathrm{TERM}_\rho$, $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|, I \rangle$, es una estructura de tipo $\rho$ y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$. La interpretación de $\tau$ en $\mathfrak{A}$ bajo $s$ es de la siguiente forma:

i) Si $\tau$ es una constante:
$$c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$$

ii) Si $\tau$ es una variable, digamos $v_7$, entonces $v_7$, es una variable que corre en $|\mathfrak{A}|$. Para ser mas precisos:

Si $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$, entonces $V_7^{\mathfrak{A}}[s] = s(7)$.

En general, si $v_n$ es variable y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$, entonces $v_n^{\mathfrak{A}}[s] = s(n)$. Es decir, la interpretación de una variable en una sucesión, es el término de la sucesión correspondiente al índice de la variable.

iii) Si $\tau$ es $f(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, donde $f$ es una letra funcional de aridad $k$ y $\tau_1, \ldots, \tau_k$ son términos,

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_k)^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_k^{\mathfrak{A}}[s]) .$$

A continuación definimos recursivamente la satisfacibilidad de una fórmula en una estructura, bajo una sucesión.

**Definición 3.2.4.** Sean $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo $\rho$, $\alpha \in \mathrm{FORM}_\rho$, $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$. Escribiremos $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ para denotar: $\mathfrak{A}$ *satisface* a $\alpha$ en la sucesión $s$:

1. Si $\alpha$ es atómica:

   a) $\alpha = \tau \approx \sigma$, donde $\tau$ y $\sigma$ son términos de tipo $\rho$:

   $$\mathfrak{A} \models (\tau \approx \sigma)[s] \quad \text{syss} \quad \tau^{\mathfrak{A}}[s] = \sigma^{\mathfrak{A}}[s] .$$

   b) $\alpha = p^k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde $p \in \mathcal{P}$ es una letra predicativa de aridad $n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos de tipo $\rho$.

   $$\mathfrak{A} \models p(\tau_1, \ldots, \tau_n)[s] \quad \text{syss} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in p^{\mathfrak{A}}$$

2. Si $\alpha$ es de la forma $\neg\beta$, $\beta\& \gamma$, o $\exists\, v_k\beta$, donde $\beta, \gamma$ son fórmulas de tipo $\rho$ y $v_k$ es una variable:

   *a*) $\alpha = \neg\beta$
   $\mathfrak{A} \models \neg\beta[s]$ syss no es el caso que $\mathfrak{A} \models \beta[s]$ (*Notación:* $\mathfrak{A} \not\models \beta[s]$)

   *b*) $\alpha = \beta\& \gamma$
   $\mathfrak{A} \models \beta\& \gamma[s]$ syss $\mathfrak{A} \models \beta[s]$ y $\mathfrak{A} \models \gamma[s]$

   *c*) $\alpha = \exists\, v_k\beta$
   $\mathfrak{A} \models \exists\, v_k\beta[s]$ syss hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \beta[s(k/a)]$,
   donde $s(k/a) = \begin{cases} a & \text{si } n = k \\ s(n) & \text{en otro caso} \end{cases}$

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo $\rho$. Observemos que puede haber una fórmula $\alpha$ de tipo de $\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ y $\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s']$. Por ejemplo, sea $\alpha$ la fórmmula $p_0^2(v_0, v_1)$. Sean $s = \langle 0, 1, 2, 3, \ldots, \rangle$, $s' = \langle 1, 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle$. Así, $\mathfrak{A}_1 \models \alpha[s]$ y $\mathfrak{A}_1 \models \neg\alpha[s']$.
Sin embargo, si $\alpha$ es un enunciado, entonces para cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ o $\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$ (pues $\alpha$ no tiene variables libres). Esto nos permite hacer la siguiente definición.

**Definición 3.2.5.** Sean $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo $\rho$ y $\sigma$ un enunciado de tipo $\rho$.

$\mathfrak{A}$ es modelo de $\sigma$ ($\mathfrak{A}$ hace verdadero a $\sigma$) syss hay $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma[s]$. *Notación:* $\mathfrak{A} \models \sigma$.

**Definición 3.2.6.** Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$.

$\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A}$) syss $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ y

a) Para cada $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

b) Para cada $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{|\mathfrak{A}|}$.

c) Para cada $p \in \mathcal{P}$, $p^{\mathfrak{A}} = p^{\mathfrak{B}} \restriction_{|\mathfrak{A}|}$.

**Definición 3.2.7.** Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$ y $h$ una función de $|\mathfrak{A}|$ en $|\mathfrak{B}|$. $h$ es un *homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ syss:

a) Para cada $c \in \mathcal{C}$, $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

b) Para cada $f \in \mathcal{F}$ de aridad $k$ y $a_1, \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k))$$

c) Para cada $p \in \mathcal{P}$ de aridad $n$ y $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

$$(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathfrak{A}} \quad \text{syss} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in p^{\mathfrak{B}}.$$

**Definición 3.2.8.** Sea $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ homomorfismo

a) $h$ es una *inmersión* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ syss $h$ es inyectiva.

b) $h$ es *isomorfismo* syss $h$ es biyectiva. *Notación.* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

**Proposición 3.2.9.** $\cong$ *es una relación de equivalencia entre las estructuras del mismo tipo de semejanza.*

*Demostración:*

1. $\cong$ es reflexiva.

   Sea $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo $\rho$. Tomamos $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ como $h(a) = a$, para cada $a \in |\mathfrak{A}|$. Así, $h$ es biyectiva. $h$ es homomorfismo:

   *a*) Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{A}}$,

   *b*) Si $f$ es una letra funcional de aridad $k$, y $a_1, \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$, entonces

   $$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathfrak{A}}(h(a_1), \ldots, h(a_k))\,.$$

   *c*) Si $p$ es una letra predicativa de aridad $n$, y $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, entonces

   $$(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathfrak{A}} \quad \text{syss} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in p^{\mathfrak{A}}\,.$$

   Por lo tanto $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$.

2. $\cong$ es simétrica. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$ tales que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Entonces hay $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ homomorfismo biyectivo.

   Así, $h^{-1}\colon |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}|$ es una función biyectiva. Veamos que es homomorfismo.

   *a*) Si $c \in \mathcal{C}$, entonces

   $$h^{-1}(c^{\mathfrak{B}}) = h^{-1}(h(c^{\mathfrak{A}})) = c^{\mathfrak{A}}\,.$$

   *b*) Si $f$ es una letra funcional de aridad $k$, y $b_1, \ldots, b_k \in |\mathfrak{B}|$, entonces hay $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq |\mathfrak{A}|$ tal que $b_i = h(a_i)$ para $1 \leq i \leq k$.
   Así,

   $$\begin{aligned} h^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_k)) &= h^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k))) \\ &= h^{-1}(h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k))) \\ &= f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) \\ &= f^{\mathfrak{A}}(h^{-1}(b_1), \ldots, h^{-1}(b_k)) \end{aligned}$$

c) Si $p$ es una letra predicativa de aridad $n$, y $b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{B}|$, entonces hay $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq |\mathfrak{B}|$ tal que $b_i = h(a_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Así,

$$\begin{aligned}(b_1, \ldots, b_n) \in p^{\mathfrak{B}} \quad &\text{syss} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in p^{\mathfrak{B}} \\ &\text{syss} \quad (a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathfrak{A}} \\ &\text{syss} \quad (h^{-1}(a_1), \ldots, h^{-1}(a_n)) \in p^{\mathfrak{A}}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

3. $\cong$ es transitiva.

Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ estructuras de tipo $\rho$, tales que

$$h \colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}| \quad \text{y} \quad g \colon |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{C}|$$

son isomorfismos.

Así, $g \circ h \colon |\mathfrak{A}| \to |\mathbb{C}|$ es una función biyectiva. Veamos que es homomorfismo.

a) Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $g \circ h(c^{\mathfrak{A}}) = g(h(c^{\mathfrak{A}})) = g(c^{\mathfrak{B}}) = c^{\mathfrak{C}}$.

b) Si $f$ es una letra funcional de aridad $k$ y $a_1, \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$, entonces

$$\begin{aligned} g \circ h(f(a_1, \ldots, a_k)^{\mathfrak{A}}) &= g(h(f(a_1, \ldots, a_k)^{\mathfrak{A}})) \\ &= g(f(h(a_1), \ldots, h(a_n))^{\mathfrak{A}}) \\ &= f(g(h(a_1)), \ldots, g(h(a_n)))^{\mathfrak{C}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$.

■

**Definición 3.2.10.** Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$. $\mathfrak{A}$ es *elementalmente equivalente* a $\mathfrak{B}$ syss $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ hacen verdaderos a los mismos enunciados.
*Notación:* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

**Proposición 3.2.11.** $\equiv$ *es una relación de equivalencia entre estructuras del mismo tipo de semejanza.*

*Demostración:* Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ estructuras de tipo $\rho$. Es claro que $\equiv$ es reflexiva y simétrica.

Si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$, entonces para cada $\sigma \in \mathrm{ENUN}_\rho$, $\mathfrak{A} \models \sigma$ syss $\mathfrak{B} \models \sigma$ syss $\mathfrak{C} \models \sigma$.

Por lo tanto $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{C}$ son elementalmente equivalentes. ∎

**Lema 3.2.12.** *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras del mismo tipo y $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ isomorfismo. Para cada $\tau \in \mathrm{TERM}_\rho$ y cada $s \in {}^\omega|\mathfrak{A}|$ se cumple que:*

$$h(\tau^{\mathfrak{A}}[s]) = \tau^{\mathfrak{B}}[h \circ s]$$

*Demostración:*

Procedamos por inducción sobre la formación de términos ($\tau$)

1. Si $\tau$ es una variable, digamos $v_n$

$$h(v_n^{\mathfrak{A}}[s]) = h(s(n)) = h \circ s(n) = v_n^{\mathfrak{B}}[h \circ s]$$

2. Si $\tau$ es una constante, digamos $c$

$$h(c^{\mathfrak{A}}[s]) = h(c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[h \circ s]$$

3. Si $\tau$ es una letra funcional de aridad $k$, aplicada a $k$ términos, digamos $\tau = f(\tau_1, \ldots, \tau_k)$

$$\begin{aligned} h((f(\tau_1, \ldots, \tau_k))^{\mathfrak{A}}[s]) &= h(f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_k^{\mathfrak{A}}[s])) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(h(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s]), \ldots, h(\tau_k^{\mathfrak{A}}[s])) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\tau_1^{\mathfrak{B}}[h \circ s], \ldots, \tau_k^{\mathfrak{B}}[h \circ s])) \\ &= (f(\tau_1, \ldots, \tau_k))^{\mathfrak{B}}[h \circ s] \end{aligned}$$

∎

**Lema 3.2.13.** *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$.*

*Sea $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ una función biyectiva. $h$ es un isomorfismo syss para cada $s \in {}^\omega|\mathfrak{A}|$ y cada $\varphi \in \mathrm{FORM}_\rho$*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ s]$$

*Demostración:* $\Rightarrow$] Sea $s \in {}^\omega|\mathfrak{A}|$. Sea $\varphi$ fórmula y $h$ isomorfismo de $|\mathfrak{A}|$ sobre $|\mathfrak{B}|$

1. Si $\varphi$ es atómica:

   *a*) $\varphi = \tau_i \approx \tau_j$, donde $\tau_i, \tau_j$ son términos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \tau_i \approx \tau_j[s] &\iff \tau_i^{\mathfrak{A}}[s] = \tau_j^{\mathfrak{A}}[s] \\
&\iff h(\tau_i^{\mathfrak{A}}[s]) = h(\tau_j^{\mathfrak{A}}[s]) \\
&\iff \tau_i^{\mathfrak{B}}[h \circ s] = \tau_j^{\mathfrak{B}}[h \circ s] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \tau_i \approx \tau_j[h \circ s]
\end{aligned}$$

   *b*) $\varphi = p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde $p$ es una letra predicativa de aridad $n$, y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models p(\tau_1, \ldots, \tau_n)[s] &\iff (\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in p^{\mathfrak{A}} \\
&\iff (h(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s]), \ldots, h(\tau_n^{\mathfrak{A}}[s])) \in p^{\mathfrak{B}} \\
&\iff (\tau_1^{\mathfrak{B}}[h \circ s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{B}}[h \circ s]) \in p^{\mathfrak{B}} \\
&\iff \mathfrak{B} \models p(\tau_1, \ldots, \tau_n)[h \circ s]
\end{aligned}$$

2. *a*) $\varphi = \neg\psi$.
   $\mathfrak{A} \models \neg\psi[s] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi[s] \iff \mathfrak{B} \not\models \psi[h \circ s] \iff \mathfrak{B} \models \neg\psi[h \circ s]$.

   *b*) $\varphi = \psi \& \chi$.
   $\mathfrak{A} \models \psi\&\chi[s] \iff \mathfrak{A} \models \psi[s]$ y $\mathfrak{A} \models \chi[s] \iff \mathfrak{B} \models \psi[h \circ s]$ y $\mathfrak{B} \models \chi[h \circ s] \iff \mathfrak{B} \models \psi\&\chi[h \circ s]$.

   *c*) $\varphi = \exists\, v_k\psi$, donde $v_k$ es una variable.
   $\mathfrak{A} \models \exists\, v_k\psi[s] \iff$ hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[s(k/a)]$

   $\iff$ hay $b \in |\mathfrak{B}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \psi[h \circ s(k/b)]$ (donde $b = h(a)$)
   $\iff \mathfrak{B} \models \exists\, v_k\psi[h \circ s]$

$\Leftarrow$] a) Sean $c \in \mathcal{C}$, $v_k$ una variable y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$.

$$v_k^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}[s] \iff \mathfrak{A} \models v_k \approx c\ [s] \iff \mathfrak{B} \models v_k \approx c\ [h \circ s] \iff$$
$$v_k^{\mathfrak{B}}[h \circ s] = c^{\mathfrak{B}}[h \circ s]\,.$$

Además $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$ y $c^{\mathfrak{B}}[h \circ s] = c^{\mathfrak{B}}$.
Así, $s(k) = c^{\mathfrak{A}} \iff h \circ s(k) = c^{\mathfrak{B}}$.

Entonces $h(s(k)) = h(c^{\mathfrak{A}}) \iff h \circ s(k) = c^{\mathfrak{B}}$. Por lo tanto $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
b) Sean $f$ una letra funcional de aridad $k$, $a_1, \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$. Sea $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tal que $s(i) = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por hipótesis $\mathfrak{A} \models f(v_1, \ldots, v_k) \approx v_{k+1}[s] \iff \mathfrak{B} \models f(v_1, \ldots, v_k) \approx v_{k+1}[h \circ s]$. Así, $f^{\mathfrak{A}}(v_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, v_k^{\mathfrak{A}}[s]) = v_{k+1}^{\mathfrak{A}}[s] \iff f^{\mathfrak{B}}(v_1^{\mathfrak{B}}[h \circ s], \ldots, v_k^{\mathfrak{B}}[h \circ s]) = v_{k+1}^{\mathfrak{B}}[h \circ s]$.
Esto es, $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = s(k+1) \iff f^{\mathfrak{A}}(h(a_1), \ldots, h(a_k)) = h \circ s(k+1)$.
Entonces

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = h(s(k+1)) \iff f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k)) = h \circ s(k+1)\,.$$

Por lo tanto

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k))\,.$$

c) Sean $p$ una letra predicativa de aridad $n$ y $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Sea $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tal que $s(i) = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por hipótesis $\mathfrak{A} \models p(v_1, \ldots, v_n)[s] \iff \mathfrak{B} \models p(v_1, \ldots, v_n)[h \circ s]$. Así, $(v_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, v_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in p^{\mathfrak{A}} \iff (v_1^{\mathfrak{B}}[h \circ s], \ldots, v_n^{\mathfrak{B}}[h \circ s]) \in p^{\mathfrak{B}}$.
Esto es, $(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathfrak{A}} \iff (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in p^{\mathfrak{B}}$. ∎

**Teorema 3.2.14.** *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos estructuras del mismo tipo de semejanza isomorfas, entonces son elementalmente equivalentes.*

*Demostración:* Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$ y $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ isomorfismo.
Sea $\sigma$ un enunciado de tipo $\rho$. Por el Lema anterior, para cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$,

$$\mathfrak{A} \models \sigma[s] \iff \mathfrak{B} \models \sigma[h \circ s]$$

y como $\sigma$ es enunciado, $\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{B} \models \sigma$. ∎

**Definición 3.2.15.** Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$. $\mathfrak{A}$ es *subestructura elemental* de $\mathfrak{B}$ syss $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ y para cada $\varphi$ fórmula de tipo $\rho$ y cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[s]$.
*Notación:* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

**Lema 3.2.16.** $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

*Demostración:* Evidente. ∎

**Definición 3.2.17.** Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$ y $h$ una inmersión de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.
$h$ es un inmersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ syss para cada fórmula $\varphi$ y cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ s].$$

**Proposición 3.2.18.** *Sea $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos estructuras de tipo $\rho$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.*

*$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ syss $\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$ es una inmersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.*
*($\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$ representa a la función identidad restringuida en $|\mathfrak{A}|$).*

*Demostración:* $\Rightarrow$] Es claro que $\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$ es una inmersión de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Veamos que es una inmersión elemental.
Sea $\varphi$ fórmula y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$. Como $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ y $s = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \circ s$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \circ s]$.

$\Leftarrow$] Sean $\varphi$ fórmula y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$. Como $s = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \circ s$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \circ s] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[s].$$

∎

**Definición 3.2.19.** Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ estructuras de tipo $\rho$.
$\mathfrak{A}$ es *elementalmente sumergible* en $\mathfrak{B}$ syss hay una inmersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

**Proposición 3.2.20.** *Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ estructuras. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$ es elementalmente sumergible en $\mathfrak{B}$.*

*Demostración:* Consecuencia del Lema anterior. ∎

Hemos visto que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos estructuras tales que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Deberíamos pensar que si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Sin embargo, no es cierto, aún cuando $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
Sea $\rho$ el tipo de semejanza que tiene como único símbolo la letra predicativa binaria $p$.
Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, < \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, donde la interpretación de $p$ es el orden irreflexivo $<$ sobre $\mathbb{N}$. Así, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.
Sin embargo, para la fórmula $\neg\exists\, v_0\, (p(v_0, v_1))$ y la sucesión constante $s(n) = 1$,

$$\mathfrak{A} \models \neg\exists\, v_0 (p(v_0, v_1))[s]$$

y

$$\mathfrak{B} \models \neg\exists\, v_0(p(v_0, v_1))[s]\,.$$

Entonces, ¿bajo que condiciones una subestructura es subestructura elemental?

**Lema 3.2.21.** *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos estructuras de tipo $\rho$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.*

*$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ syss para cada fórmula $\varphi$ y cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ con $\mathfrak{B} \models \exists\, v_k\varphi[s]$, hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(k/_a)]$.*

*Demostración:* $\Rightarrow$]Supongamos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Sean $\varphi$ una fórmula y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tales que $\mathfrak{B} \models \exists\, v_k\varphi[s]$. Así, $\mathfrak{A} \models \exists\, v_k\varphi[s]$. Entonces hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[s(k/_a)]$. Como $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(k/_a)]$.

$\Leftarrow$] Supongamos que para cada fórmula $\varphi$ y cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ con $\mathfrak{B} \models \exists\, v_k\varphi[s]$, hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(k/a)]$. Probemos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Sea $\alpha$ una fórmula y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$. Veamos que $\mathfrak{A} \models \alpha[s] \iff \mathfrak{B} \models \alpha[s]$. Procedamos por inducción sobre la formación de $\alpha$.

1] Si $\alpha$ es atómica. Primero observemos que si $\tau$ es un término, como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, tenemos que para cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$, $\tau^{\mathfrak{A}}[s] = \tau^{\mathfrak{B}}[s]$.

a) $\alpha = \tau \approx \sigma$, donde $\tau$ y $\sigma$ son términos.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \tau \approx \sigma[s] &\iff \tau^{\mathfrak{A}}[s] = \sigma^{\mathfrak{A}}[s] \\ &\iff \tau^{\mathfrak{B}}[s] = \sigma^{\mathfrak{B}}[s] \\ &\iff \mathfrak{B} \models \tau \approx \sigma[s] \end{aligned}$$

b) $\alpha = p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde $p$ es una letra predicativa de aridad $n$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models p(\tau_1, \ldots, \tau_n)[s] &\iff (\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in p^{\mathfrak{A}} \\ &\iff (\tau_1^{\mathfrak{B}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{B}}[s]) \in p^{\mathfrak{B}} \\ &\iff \mathfrak{B} \models p(\tau_1, \ldots, \tau_n)[s] \end{aligned}$$

2] a) Si $\alpha$ es de la forma $\neg\beta$.

$$\mathfrak{A} \models \neg\beta[s] \iff \mathfrak{A} \not\models \beta[s] \iff \mathfrak{B} \not\models \beta[s] \iff \mathfrak{B} \models \neg\beta[s]$$

b) Si $\alpha$ es de la forma $\beta\&\gamma$.
$\mathfrak{A} \models \beta\&\gamma[s] \iff \mathfrak{A} \models \beta[s]$ y $\mathfrak{A} \models \gamma[s] \iff \mathfrak{B} \models \beta[s]$ y $\mathfrak{B} \models \gamma[s] \iff \mathfrak{B} \models \beta\&\gamma[s]$.

c) Si $\alpha$ es de la forma $\exists v_k \beta$.

$\mathfrak{A} \models \exists v_k \beta[s] \iff$ hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{A} \models \beta[s(k/a)] \iff$ hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \beta[s(k/a)] \iff \mathfrak{B} \models \exists v_k \beta[s]$. ■

Podemos leer este resultado de la siguiente manera: Una estructura es subestructura elemental syss "los existenciales bajan".

**Corolario 3.2.22.** *Sean $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ syss para cada fórmula $\varphi$ cuyas variables libres estén entre $\{v_0, \ldots, v_n\}$ y $a_0, \ldots, a_{n-1}$ elementos de $|\mathfrak{A}|$ tales que para algún $b \in |\mathfrak{B}|$, $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, b]$, entonces hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$.*

*Demostración:* $\Rightarrow$] Si $\varphi$ es una fórmula cuyas variables libres están entre $\{v_0, \ldots, v_n\}$ y $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ son tales que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, b]$ para algún $b \in |\mathfrak{B}|$, entonces $\mathfrak{B} \models \exists v_n \varphi[s]$ para cada $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tal que $s(j) = a_j$ (para $0 \leq j < n$). Como $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, por el lema anterior, hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(n/a)]$, es decir, hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$.

$\Leftarrow$) Sean $\varphi$ fórmula y $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \exists v_k \varphi[s]$. Veamos que hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(k/a)]$. Si $v_k$ no es libre en $\varphi$, entonces no hay nada que probar.

Supongamos que $v_k$ es libre en $\varphi$ y sin perder generalidad que las variables libres de $\varphi$ están en el conjunto $\{v_0, \ldots, v_k\}$. Como $\mathfrak{B} \models \exists v_k \varphi[s]$, hay $b \in |\mathfrak{B}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(0), \ldots, s(k-1), b]$. Por hipótesis hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(0), \ldots, s(k-1), a]$, es decir, hay $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[s(k/a)]$. Por el lema previo tenemos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. ■

**Proposición 3.2.23.** $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Observemos que el tipo de semejanza de estas estructuras sólo tiene una letra predicativa binaria.

*Demostración:* Usaremos el corolario anterior para probar que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \prec \langle \mathbb{R}, < \rangle$. Sea $\varphi$ una fórmula cuyas varias libres están entre $v_0, \ldots, v_n$ y sean $q_0, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}$.

Supongamos que hay $r \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi[q_0, \ldots, q_{n-1}, r]$. Veamos que hay $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi[q_0, \ldots, q_{n-1}, q]$. Sin perder generalidad supongamos que $q_0 < q_1 < \cdots < q_{n-1}$. Supongamos que $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($r \in \mathbb{Q}$ es trivial). Tenemos dos casos:

1) $r$ está entre $q_k$ y $q_{k+1}$, par algún $0 \leq k \leq n-1$.

2) $r < q_0$ o $q_{n-1} < r$

**Caso 1.** Elegimos $q \in \mathbb{Q} \cap (q_k, q_{k+1})$. Definimos $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq q_k \text{ o } q_{k+1} \leq x \\ \left(\frac{q-q_k}{r-q_k}\right)(x-q_k)+q_k & \text{si } q_k \leq x \leq r \\ \left(\frac{q_{k+1}-q}{q_{k+1}-r}\right)(x-r)+q & \text{si } r \leq x \leq q_{k+1}\,. \end{cases}$$

Como $h$ es biyectiva y creciente $h\colon \langle \mathbb{R}, < \rangle \to \langle \mathbb{R}, < \rangle$ es un isomorfismo. Por la proposición 3.2.20, $h$ es una inmersión elemental.

Así, como $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi[q_0, \ldots, q_{n-1}, r]$, tenemos que

$$\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi[h(q_0), \ldots, h(q_{n-1}), h(r)]\,,$$

es decir, $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi[q_0, \ldots, q_{n-1}, q]$. Por el corolario anterior, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \prec \langle \mathbb{R}, < \rangle$.
Por lo tanto $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

**Caso 2.** Análogo al caso 1. (Ejercicio para el lector). ∎

## 3.3. Ultraproductos

Sean $J$ un conjunto de índices y $\{\mathfrak{A}_j \mid j \in J\}$ un conjunto de estructuras de tipo $\rho$. Construiremos una nueva estructura a partir de las estructuras dadas.
Sean $|\mathfrak{A}| = \prod\limits_{j \in J} |\mathfrak{A}_j|$, $\quad F \subseteq \mathcal{P}(J)$. Por **(AE)**, $|\mathfrak{A}| \neq \emptyset$.
Definimos $\sim_F \subseteq |\mathfrak{A}| \times |\mathfrak{A}|$ como sigue: $f \sim_F g$ syss $\{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in F$.

**Proposición 3.3.1.** *Si para cada $j \in J$, $|\mathfrak{A}_j|$ tiene al menos tres elementos, entonces $F$ es filtro en $\langle \mathcal{P}(J), \subseteq \rangle$ syss $\sim_F$ es de equivalencia.*

*Demostración:* $\Rightarrow]$ Sean $f, g, h \in \mathfrak{A}$.

a) Como $F$ es filtro, $\{j \in J \mid f(j) = f(j)\} = J \in F$. Es decir, $f \sim_F f$.

b) Si $f \sim_F g$, entonces $\{j \in J \mid g(j) = f(j)\} = \{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in F$. Es decir, $g \sim_F f$.

c) Si $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$, entonces $\{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in F$ y $\{j \in J \mid g(j) = h(j)\} \in F$. Como $F$ es filtro en $\langle \mathcal{P}(F), \subseteq \rangle$, entonces $\{j \in J \mid f(j) = h(j)\} =$

$\{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \cap \{j \in J \mid g(j) = h(j)\} \in F$, es decir, $f \sim_F h$. Así, $\sim_F$ es de equivalencia.

$\Leftarrow$] a) Sean $A, B \in F$. Veamos que $A \cap B \in F$. Para cada $j \in J$ sean $a_j, b_j, c_j \in |\mathfrak{A}_j|$. Sean $f, g, h \in |\mathfrak{A}|$ como sigue:

$$f(j) = a_j$$

$$g(j) = \begin{cases} f(j) & \text{si } j \in A \\ b_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(j) = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \in B \\ c_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$. Como $\sim_F$ es de equivalencia, $f \sim_F h$. Por lo tanto $A \cap B = \{j \in J \mid f(j) = h(j)\} \in F$.
b) Sean $A \in F$, $B \in \mathcal{P}(J)$ tales que $A \subseteq B$. Veamos que $B \in F$.
Sean $f, g, h \in |\mathfrak{A}|$ como en (a). Así, $f \sim_F g$ y $f \sim_F h$. Como $\sim_F$ es de equivalencia, $h \sim_F g$. Por lo tanto $B = \{j \in J \mid h(j) = g(j)\} \in F$.
Por lo tanto $F$ es filtro en $\langle \mathcal{P}(J), \subseteq \rangle$.
A partir de ahora supondremos que $F$ es un filtro en $\langle \mathcal{P}(J), \subseteq \rangle$. Sabemos que para cada $j \in J$, cada letra predicativa $p \in P$ de aridad $k$ se interpreta en $|\mathfrak{A}|$ como una relación de aridad $k$. Definimos ahora una relación $S_p \subseteq (|\mathfrak{A}|)^k$ para interpretar a $p$.

$$\langle f_1, \ldots, f_k \rangle \in S_p \text{ syss } \{j \in J \mid \langle f_1(j), \ldots, f_k(j) \in p^{\mathfrak{A}_j}\} \in F$$

■

**Proposición 3.3.2.** *Para cada letra predicativa $p_j$, $\sim_F$ es de congruencia respecto a $S_p$.*

*Demostración:* Supongamos que $p$ es aridad $k$. Sean $f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k \in |\mathfrak{A}|$ tales que

$$f_1 \sim_F g_1, \ldots, f_k \sim_F g_k \text{ y } \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \in S_p.$$

Veamos que $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle \in S_p$. Como $f_i \sim_F g_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $A_i = \{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in F$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $F$ es filtro.

$\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \in F$. Sean

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{j \in J \mid \langle f_1(j), \ldots, f_k(j)\rangle \in p^{\mathfrak{A}_j}\} \\ C & = & \{j \in J \mid \langle g_1(j), \ldots, f_k(j)\rangle \in p^{\mathfrak{A}_j}\}\,. \end{array}$$

Por hipótesis $B \in F$. Así, $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B \in F$. Además, $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B \subseteq C$, pues

$$j \in \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B \Rightarrow \langle f_1(j), \ldots, f_k(j)\rangle = \langle g_1(j), \ldots, g_k(j)\rangle$$

y

$$\langle f_1(j), \ldots, f_k(j)\rangle \in p^{\mathfrak{A}_j}\,.$$

Entonces $\langle g_1(j), \ldots, g_k(j)\rangle \in p^{\mathfrak{A}_j}$, es decir, $j \in C$.
Como $F$ es filtro $C \in F$. Así, $\langle g_1, \ldots, g_k\rangle \in S_p$. ∎

Para cada $f \in \prod\limits_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|$, definimos:

$$f/_F = \left\{ g \in \prod_{j\in J} |\mathfrak{A}_j| \mid g \sim_F f \right\}.$$

Sea $\prod |\mathfrak{A}_j|/_F = \{f/F \mid f \in \prod\limits_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|\}$.

Para simplificar la notación, sea $|\mathfrak{B}| = \prod\limits_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|/_F$. Para cada letra predicativa $p$ de aridad $k$, la relación $S_p$ induce una relación $R_p$ sobre $|\mathfrak{B}|$ definida por:

$$\langle f_1/_F, \ldots, f_k/_F\rangle \in R_p \text{ syss } \langle f_1, \ldots, f_k\rangle \in S_p\,.$$

**Proposición 3.3.3.** *Para cada letra predicativa p, $R_p$ está bien definida.*

*Demostración:* Proposición anterior. ∎

Para cada $f \in {}^{\omega}\left(\prod\limits_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|\right)$ $\quad (f = \langle f_1, \ldots, f_n, \ldots, \ldots\rangle)$, sean $f/_F = \langle f_1/_F, \ldots, f_n/_F, \ldots\rangle$ y $f(j) = \langle f_1(j), \ldots, f_n(j), \ldots,\rangle$. Así, $f/_F \in {}^{\omega}|\mathfrak{B}|$ y $f(j) \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}_j|$.

Para cada letra funcional $g$ de aridad $n$ y cada $j \in J$, $g^{\mathfrak{A}_j}$ es una función: $g^{\mathfrak{A}_j}\colon |\mathfrak{A}_j|^n \to |\mathfrak{A}_j|$.
Definimos $g^{\mathfrak{B}}\colon |\mathfrak{B}|^n \to |\mathfrak{B}|$ como sigue:

$$g^{\mathfrak{B}}(f_1/_F, \dots, f_n/_F) = \langle g^{\mathfrak{A}_j}(f_1(j), \dots, f_n(j))\rangle_{j\in J}/_F$$

Para cada letra de constante individual $c$ y cada $j \in J$, $c^{\mathfrak{A}_j} \in |\mathfrak{A}_j|$. Definimos ahora $c^{\mathfrak{B}}$:

$$c^{\mathfrak{B}} = \langle c^{\mathfrak{A}_j}\rangle_{j\in J}/_F$$

Así, $c^{\mathfrak{B}} \in |\mathfrak{B}|$.

**Lema 3.3.4.** *Para cada letra funcional $g$, $g^{\mathfrak{B}}$ está bien definida.*

*Demostración:* Supongamos que $g$ es de aridad $n$.
Sean $f_1, h_1, \dots, f_n, h_n \in \prod\limits_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|$ tales que $f_1 \sim_F h_1, \dots, f_n \sim_F h_n$. Veamos que $g^{\mathfrak{B}}(f_1, \dots, f_n) = g^{\mathfrak{B}}(h_1, \dots, h_n)$, es decir,

$$\langle g^{\mathfrak{A}_j}(f_1(j), \dots, f_n(j))\rangle_{j\in J}/_F = \langle g^{\mathfrak{A}_j}(h_1(j), \dots, h_n(j))\rangle_{j\in J}/_F\,,$$

o equivalentemente

$$\langle g^{\mathfrak{A}_j}(f_1(j), \dots, f_n(j))\rangle_{j\in J} \sim_F \langle g^{\mathfrak{A}_j}(h_1(j), \dots, h_n(j))\rangle_{j\in J}$$

Como $f_1 \sim_F h_1, \dots, f_n \sim_F h_n$ y $F$ es filtro, entonces

$$\{j \in J \mid f_1(j) = h_1(j) \& \dots \& f_n(j) = h_n(j)\} = \{j \in J \mid f_1(j) = h_1(j)\} \cap \dots$$
$$\dots \cap \{j \in J \mid f_n(j) = h_n(j)\} \in F\,.$$

Como para cada $j \in J$ $g^{\mathfrak{A}_j}$ es función, entonces

$$\{j \in J \mid f_1(j) = h_1(j) \& \dots \& f_n(j) = h_n(j)\} \subseteq$$
$$\subseteq \{j \in J \mid g^{\mathfrak{A}}(f_1(j), \dots, f_n(j)) = g^{\mathfrak{A}}(h_1(j), \dots, h_n(j))\}$$

Como $F$ es filtro, $\{j \in J \mid g^{\mathfrak{A}_j}(f_1(j), \dots, f_n(j)) = g^{\mathfrak{A}_j}(h_1(j), \dots, h_n(j))\} \in F$, es decir, $\langle g^{\mathfrak{A}_j}(f_1(j), \dots, f_n(j))\rangle_{j\in J} \sim_F \langle g^{\mathfrak{A}_j}(h_1(j), \dots, h_n(j))\rangle_{j\in J}$.

En resumen: hemos construido una estructura $\mathfrak{B} = \langle |\mathfrak{B}|, I\rangle$, donde $|\mathfrak{B}| = \prod\limits_{i\in J} |\mathfrak{A}_j|/_F$ y la función de interpretación $I$ es la siguiente:

a) Si $p$ es una letra predicativa de aridad $k$, entonces

$$I(p) = p^{\mathfrak{B}} = R_p \subseteq |\mathfrak{B}|^k .$$

b) Si $g$ es una letra funcional de aridad $n$, entonces

$$I(g) = g^{\mathfrak{B}} \colon |\mathfrak{B}|^n \to |\mathfrak{B}| .$$

c) Si $c$ es una letra de constante individual, entonces

$$I(c) = c^{\mathfrak{B}} \in |\mathfrak{B}| .$$

■

**Definición 3.3.5.** La estructura $\mathfrak{B}$ es un ultraproducto syss $F$ es un ultrafiltro.

**Lema 3.3.6.** *Para cada $\tau \in \mathrm{TERM}_\rho$ y cada $f/_F \in {}^{\omega}|\mathfrak{B}|$.*

$$\tau^{\mathfrak{B}}[f/_F] = \langle \tau^{\mathfrak{A}_j}[f(j)] \rangle_{j \in J}/_F$$

*Demostración:*
Procedamos por inducción sobre la formación de los términos ($\tau$).
a) Si $\tau$ es una variable, digamos $v_n$.

$$\begin{aligned} v_n^{\mathfrak{B}}[f/_F] &= f_n/_F = \langle f_n(j) \rangle_{j \in J}/_F \\ &= \langle v_n^{\mathfrak{A}_j}[f(j)] \rangle_{j \in J}/_F \end{aligned}$$

b) Si $\tau$ es una constante, digamos $c$

$$\begin{aligned} c^{\mathfrak{B}}[f/_F] &= c^{\mathfrak{B}} = \langle c^{\mathfrak{A}_j} \rangle_{j \in J}/_F \\ &= \langle c^{\mathfrak{A}_j}[f(j)] \rangle_{j \in J}/_F \end{aligned}$$

c) Si $\tau$ es de la forma $g(\tau_1, \ldots, \tau_n\rangle$, donde $g$ es una letra funcional de aridad $n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos. Por hipótesis de inducción, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\tau_i^{\mathfrak{B}}[f/_F] = \langle \tau_i^{\mathfrak{A}_j}[f(j)] \rangle_{j \in J}/_F$$

Probaremos que $g(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{\mathfrak{B}}[f/_F] = \langle g(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{\mathfrak{A}_j}[f(j)] \rangle_{j \in J}/_F$.

Por hipótes de inducción y la definición de $g^{\mathfrak{B}}$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} g(\tau_1,\ldots,\tau_n)^{\mathfrak{B}}[f/_F] &= g^{\mathfrak{B}}(\tau_1^{\mathfrak{B}}[f/_F],\ldots,\tau_n^{\mathfrak{B}}[f/_F]) \\ &= g^{\mathfrak{B}}(\langle\tau_1^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F,\ldots,\langle\tau_n^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F) \\ &= \langle g^{\mathfrak{A}_j}(\tau_1^{\mathfrak{A}_j}[f(j)],\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}_j}[f(j)])\rangle_{j\in J}/_F \\ &= \langle g(\tau_1,\ldots,\tau_n)^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F\,. \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.3.7 (Teorema del Ultraproducto, Łoš).** *Si $F$ es un ultrafiltro en $\langle\mathcal{P},\subseteq\rangle$, entonces para cada fórmula $\varphi$ de tipo $\rho$ y cada $f/_F\in{}^{\omega}|\mathfrak{B}|$,*

$$\mathfrak{B}\models\varphi[f/_F] \text{ syss } \{j\in J\,|\,\mathfrak{A}_j\models\varphi[f(j)]\}\in F\,.$$

*Demostración:*
Procedamos por inducción sobre la formación de la fórmula $\varphi$.
1) Si $\varphi$ es atómica
1.a) $\varphi=\tau_n\approx\tau_m$, donde $\tau_n,\tau_m$ son términos de tipo $\rho$. Por la definición de satisfacibilidad de Tarski y el Lema anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\models\tau_n\approx\tau_m[f/_F] \quad &\text{syss} \quad \tau_n^{\mathfrak{B}}[f/_F]=\tau_m^{\mathfrak{B}}[f/_F] \\ &\text{syss} \quad \langle\tau_n^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F=\langle\tau_m^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F \\ &\text{syss} \quad \langle\tau_n^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}\sim_F\langle\tau_m^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J} \\ &\text{syss} \quad \{j\in J\,|\,\tau_n^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]=\tau_m^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\}\in F \\ &\text{syss} \quad \{j\in J\,|\,\mathfrak{A}_j\models\tau_n\approx\tau_m[f(j)]\}\in F \end{aligned}$$

1.b) $\varphi = p(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, donde $p$ es una letra predicativa de aridad $k$ y $\tau_1,\ldots,\tau_k$ son términos de tipo $\rho$. Por la definición de satisfacibilidad (Tarski), el Lema anterior y la construcción de $\mathfrak{B}$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\models p(\tau_1,\ldots,\tau_k)[f/_F] \quad &\text{syss} \quad (\tau_1^{\mathfrak{B}}[f/_F],\ldots,\tau_k^{\mathfrak{B}}[f/_F])\in p^{\mathfrak{B}}=R_p \\ &\text{syss} \quad (\langle\tau_1^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F,\ldots,\langle\tau_k^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J}/_F)\in R_p \\ &\text{syss} \quad (\langle\tau_1^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J},\ldots,\langle\tau_k^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle_{j\in J})\in S_p \\ &\text{syss} \quad \{j\in J\,|\,\langle\tau_1^{\mathfrak{A}_j}[f(j)],\ldots,\tau_k^{\mathfrak{A}_j}[f(j)]\rangle\in p^{\mathfrak{A}_j}\}\in F \\ &\text{syss} \quad \{j\in J\,|\,\mathfrak{A}_j\models p(\tau_1,\ldots,\tau_k)[f(j)]\}\in F \end{aligned}$$

2) Si $\varphi$ es de la forma $\neg\alpha$, $\alpha\&\beta$, $\exists v_k\alpha$, donde $v_k$ es una variable.

Sean

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \alpha[f(j)]\} \\ J_\beta &= \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \beta[f(j)]\} \\ J_{\alpha\&\beta} &= \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \alpha\&\beta[f(j)]\} \\ J_{\neg\alpha} &= \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \neg\alpha[f(j)]\} \end{aligned}$$

Observemos que $J_\alpha \cap J_\beta = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \alpha[f(j)] \text{ y } \mathfrak{A}_j \models \beta[f(j)]\} = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \alpha\&\beta[f(j)]\} = J_{\alpha\&\beta}$.

$$J \setminus J_\alpha = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \not\models \alpha[f(j)]\} = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \neg\alpha[f(j)]\} = J_{\neg\alpha}$$

Como $F$ es filtro,

$$J_\alpha \in F \text{ y } J_\beta \in F \iff J_{\alpha\&\beta} \in F\,.$$

Como $F$ es ultrafiltro

$$J_\alpha \notin F \iff J_{\neg\alpha} \in F\,.$$

Por hipótesis de inducción, la definición de satisfacibilidad (Tarski) y la observación previa, tenemos lo siguiente:
2.a) $\varphi = \neg\alpha$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \neg\alpha[f/_F] \quad &\text{syss} \quad \mathfrak{B} \not\models \alpha[f/_F] \\ &\text{syss} \quad J_\alpha \notin F \\ &\text{syss} \quad J_{\neg\alpha} \in F \end{aligned}$$

2.b) $\varphi = \alpha\&\beta$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \alpha\&\beta[f/_F] \quad &\text{syss} \quad \mathfrak{B} \models \alpha[f/_F] \text{ y } \mathfrak{B} \models \beta[f/_F] \\ &\text{syss} \quad J_\alpha \in F \text{ y } J_\beta \in F \\ &\text{syss} \quad J_{\alpha\&\beta} \in F \end{aligned}$$

2.c) $\varphi = \exists\, v_k\alpha$, donde $v_k$ es una variable.
Sea $J_{\exists\, v_k\alpha} = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \exists\, v_k\alpha[f(j)]\}$.
Recordemos la notación y hagamos algunas observaciones

$$\begin{aligned} f/_F &= \langle f_1/_F, \ldots, f_n/_F \rangle \\ f(j) &= \langle f_1(j), \ldots, f_n(j) \rangle \end{aligned}$$

Así, si $a \in \prod_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|$, entonces

$$f(k/a)/_F = \langle f_1/_F, \ldots, f_{k-1}/_F, a/_F, f_{k+1}/_F, \ldots \rangle$$
$$f(k/a)(j) = \langle f_1(j), \ldots, f_{k-1}(j), a(j), f_{k+1}(j), \ldots \rangle = f(j)(k/a(j))$$

Probaremos lo siguiente: $\mathfrak{B} \models \exists v_k \alpha[f/_F]$ syss $J_{\exists v_k \alpha} \in F$.

$\Rightarrow]$

$$\mathfrak{B} \models \exists v_k \alpha[f/_F] \text{ syss hay } a \in \prod_{j\in J} |\mathfrak{A}_j| \text{ tal que } \mathfrak{B} \models \alpha[f(k/a)/_F].$$

Sea $J_{\alpha(k/_a)} = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \alpha[f(k/_a)(j)]$. Por hipótesis de inducción $J_{\alpha(k/_a)} \in F$. Además $J_{\alpha(k/_a)} \subseteq J_{\exists v_k \alpha}$, pues si $j \in J_{\alpha(k/_a)}$, entonces $\mathfrak{A}_j \models \alpha[f(k/_a)(j)]$, de donde $\mathfrak{A}_j \models \alpha[f(j)(k/_{a(j)})]$ y por lo tanto $\mathfrak{A}_j \models \exists v_k \alpha[f(j)]$, es decir $j \in J_{\exists v_k \alpha}$ como $F$ es filtro, $J_{\exists v_k} \alpha \in F$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $J_{\exists v_k \alpha} \in F$. Si $j \in J_{\exists v_k \alpha}$, entonces $\mathfrak{A}_j \models \exists v_k \alpha[f(j)]$, y por ello hay $a(j) \in |\mathfrak{A}_j|$ tal que $\mathfrak{A}_j \models \alpha[f(j)(k/_{a(j)})]$. Sea $c \in \prod_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|$. Elegimos $b \in \prod_{j\in J} |\mathfrak{A}_j|$ como sigue:

$$b(j) = \begin{cases} a(j) & \text{si } j \in J_{\exists v_k \alpha} \\ c(j) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(**AE**).
Así, $\mathfrak{A}_j \models \alpha[f(k/_b)(j)]$, sea $J_{\alpha(k/_b)} = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \alpha[f(k/_b)(j)]$. Así, $J_{\exists v_k \alpha} \subseteq J_{\alpha(k/b)}$. Como $F$ es filtro, $J_{\alpha(k/b)} \in F$ y por hipótesis de inducción $\mathfrak{B} \models \alpha[f(k/b)/F]$. Por lo tanto $\mathfrak{B} \models \exists v_k \alpha[f/_F]$. ■

**Corolario 3.3.8.** *Si* $\sigma \in \mathrm{ENUN}_\rho$, *entonces* $\mathfrak{B} \models \sigma$ *syss* $\{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \sigma\} \in F$. ■

**Corolario 3.3.9.** *Si* $T \subseteq \mathrm{ENUN}_\rho$ *es una teoría tal que para cada* $j \in J$, $\mathfrak{A} \models T$, *entonces* $\mathfrak{B} \models T$

*Demostración:* Sea $\sigma \in T$. Por hipótesis, para cada $j \in J$, $\mathfrak{A}_j \models \sigma$, es decir $J = \{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \sigma\}$. Como $F$ es filtro, $J \in F$. Así, $\mathfrak{B} \models \sigma$. Por lo tanto $\mathfrak{B} \models T$. ■

**Corolario 3.3.10.** *Si* $T \subseteq \mathrm{ENUN}_\rho$ *es una teoría tal que* $\{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models T\} \in F$, *entonces* $\mathfrak{B} \models T$.

*Demostración:* Sea $\sigma \in T$. Por hipótesis $\{j \in J \,|\, \mathfrak{A}_j \models \sigma\} \in F$. Así, $\mathfrak{B} \models \sigma$. ■

## 3.4. Ultrapotencias

**Definición 3.4.1.** Sean $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo $\rho$ y $\prod_{j\in J} \mathfrak{A}/_F$ un ultraproducto. $\prod_{j\in J} \mathfrak{A}/_F$ es una ultrapotencia syss para cada $j \in J$, $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}$.

Como en una ultrapotencia todas las estructuras son iguales, podemos escribirla así: ${}^J\mathfrak{A}/_F$.

Sean $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo $\rho$, $J$ un conjunto de índices, y $F$ un ultrafiltro en $\langle \mathcal{P}(J), \subseteq \rangle$. Para cada $a \in |\mathfrak{A}|$ definimos $a_J = \langle a \rangle \in {}^J\mathfrak{A}$ como $a_J(j) = a$, es decir, $a_J = \langle a \rangle_{j\in J}$ es la constante $a$ en ${}^J\mathfrak{A}$. Sea $\mathfrak{B} = {}^J\mathfrak{A}/_F$. Definimos $d\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ como sigue:

$$d(a) = a_J/_F, .$$

**Teorema 3.4.2.** *$d$ es una inmersión elemental.*

*Demostración:* Primero veamos que $d$ es una inmersión, es decir, un homomorfismo inyectivo.

a) Sea $c$ una letra de constante individual. Veamos que $d(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$. Por la definición de $d$ y la cinstrucción de la ultrapotencia:

$$d(c^{\mathfrak{A}}) = c_J^{\mathfrak{A}}/_F = \langle c^{\mathfrak{A}} \rangle_{j\in J}/_F = c^{\mathfrak{B}}$$

b) Sean $g$ una letra funcional de aridad $n$ y $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Veamos que $d(g^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = g^{\mathfrak{B}}(d(a_1), \ldots, d(a_n))$. Por la definición de $d$ y la construcción de la ultrapotencia:

$$\begin{aligned}
d(g^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= g^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)_J/_F \\
&= \langle g^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \rangle_{j\in J}/_F \\
&= g^{\mathfrak{B}}(\langle a_1 \rangle_{j\in J}/_F, \ldots, \langle a_n \rangle_{j\in J}/_F) \\
&= g^{\mathfrak{B}}(a_{1J}/_F, \ldots, a_{nJ}/_F) \\
&= g^{\mathfrak{B}}(d(a_1), \ldots, d(a_n))
\end{aligned}$$

c) Sean $p$ una letra predicativa de aridad $k$ y $a_1, \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$. Sea $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$ tal que $s(n) = a_n$ para $n \in \{1, \ldots, k\}$. Veamos que $(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathfrak{A}}$ syss $(d(a_1), \ldots, d(a_n)) \in p^{\mathfrak{B}}$. Mostraremos algo equivalente:

$$\mathfrak{A} \models p(v_1, \ldots, v_k)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{B} \models p(v_1, \ldots, v_k)[d \circ s]\,.$$

Por el Teorema del ultraproducto, la definición de $d$ y la construcción de la ultrapotencia:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\models p(v_1,\ldots,v_k)[s] \quad &\text{syss} \quad \{j\in J \mid \mathfrak{A}_j\models p(v_1,\ldots,v_k)[s]\} = J \in F\\ &\text{syss} \quad \mathfrak{B}\models p(v_1,\ldots,v_k)[d\circ s]\,.\end{aligned}$$

d) Ahora veamos que $d$ es inyectiva. Como $F$ es ultrafiltro, $d(a_1)=d(a_2) \Rightarrow a_{1J}/_F = a_{2J}/_F \Rightarrow a_{1J}\sim_F a_{2J}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad \{j\in J \mid a_{iJ}(j)) = a_{2J}(j)\}\in F\\ &\Rightarrow \quad \text{hay } j\in J \text{ tal que } a_{iJ}(j) = a_{2J}(j)\\ &\Rightarrow \quad a_1 = a_2\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $d$ es una inmersión. Ahora veamos que es una inmersión elemental.

Sea $\varphi\in \mathrm{FORM}_\rho$ y $s\in {}^{\omega}|\mathfrak{A}|$. Mostraremos que $\mathfrak{A}\models\varphi[s]$ syss $\mathfrak{B}\models\varphi[d\circ s]$

Supongamos que las variables libres están entre $v_0,\ldots,v_n$.

Sean $a_0=s(0),\ldots,a_n=s(n)$. Por el Teorema de ultraproducto y la definición de $d$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}\models\varphi[d\circ s] \quad &\text{syss} \quad \mathfrak{B}\models\varphi[d\circ s(0),\ldots,d\circ s(n)]\\ &\text{syss} \quad \mathfrak{B}\models\varphi[d(a_0),\ldots,d(a_n)]\\ &\text{syss} \quad \mathfrak{B}\models\varphi[a_{0J}/_F,\ldots,a_{nJ}/_F]\\ &\text{syss} \quad \{j\in J\mid \mathfrak{A}\models\varphi[a_{0J}(j),\ldots,a_{nJ}(j)]\}\in F\\ &\text{syss} \quad \{j\in J\mid \mathfrak{A}_j\models\varphi[a_0,\ldots,a_n]\}\in F\\ &\text{syss} \quad \mathfrak{A}\models\varphi[s]\,.\end{aligned}$$

En particular, si $\sigma$ es un enunciado, $\mathfrak{A}\models\sigma$ syss $\mathfrak{B}\models\sigma$, por lo que $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$.

■

**Corolario 3.4.3.** $\mathfrak{A}\prec {}^J\mathfrak{A}/_F$ *y* $\mathfrak{A}\equiv {}^J\mathfrak{A}/_F$. ■

Hay un resultado importante, cuya demostración está fuera de los límites de este trabajo: el Teorema de Keisler–Shelah:

$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ syss hay $J$ conjunto de índices y $F$ ultrafiltro tales que ${}^J\mathfrak{A}/_F\cong{}^J\mathfrak{B}/_F$.

El regreso es fácil: como ${}^J\mathfrak{A}/_F\cong{}^J\mathfrak{B}/_F$, entonces ${}^J\mathfrak{A}/_F\equiv{}^J\mathfrak{B}/_F$. Por el corolario anterior

$$\mathfrak{A}\equiv{}^J\mathfrak{A}/_F\equiv{}^J\mathfrak{B}/_F\equiv\mathfrak{B}\,.$$

La otra implicación fue probada por Keisler con la hipótesis generalizada del continuo y por Shelah usando cardinales.

Nos preguntamos ahora por la relación entre un ultraproducto y sus factores:

**Proposición 3.4.4.** *Si $F$ es el ultrafiltro principal generado por $j_0 \in J$, entonces* $\prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j/_F \cong \mathfrak{A}_{j_0}$.

*Demostración:* Sea $\mathfrak{B} = \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j/F$. Definimos $h \colon |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}_{j_0}|$ como sigue:

$$h(f/_F) = f(j_0)\,.$$

Probaremos:

a) $h$ está bien definida.

b) $h$ es biyectiva

c) $h$ es isomorfismo.

a) Sean $f \sim_F g$. Veamos que $h(f/_F) = h(g/_F)$. Como $f \sim_F g$, entonces $\{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in F$. Como $F$ es principal generado por $j_0$, $j_0 \in \{j \in J \mid f(j) = g(j)\}$. Así, $f(j_0) = g(j_0)$, es decir, $h(f/_F) = h(g/_F)$.

b) i) $h$ es inyectiva: Sean $f/_F, g/_F \in |\mathfrak{B}|$. Si $h(f/_F) = h(g/_F)$, entonces $f(j_0) = g(j_0)$. Como $F$ es ultrafiltro principal generado por $j_0$, $\{j_0\} \in F$. Así, $\{j_o\} \subseteq \{j \in J \mid f(j) = g(j)\}$, por lo que $\{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in F$. Por lo tanto $f \sim_F g$. Así, $f/_F = g/_F$.

ii) $h$ es sobreyectiva: Sea $b \in \prod_{j \in J} |\mathfrak{A}_j|$. Si $a \in |\mathfrak{A}_{j_0}|$, definimos $c \in \prod_{j \in J} |\mathfrak{A}_j|$ como

$$c(j) = \begin{cases} a & \text{si } j = j_0 \\ b & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, $h(c/_F) = c(j_0) = a$. Por i) y ii), tenemos que $h$ es biyectiva.

c) Sea $\varphi$ una fórmula de tipo $\rho$, $f/_F \in {}^{\omega}|\mathfrak{B}|$. Por el Lema 3.2.13, para que $h$ sea isomorfismo basta ver que $\mathfrak{B} \models \varphi[f/_F]$ syss $\mathfrak{A}_{j_0} \models \varphi[h \circ f/_F]$. Por el Teorema de ultraproducto y por ser $F$ el ultrafiltro generado por $j_0$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \varphi[f/_F] \quad & \text{syss} \quad \{j \in J \mid \mathfrak{A}_j \models \varphi[f/_F]\} \in F \\ & \text{syss} \quad j_0 \in \{j \in J \mid \mathfrak{A}_j \models \varphi[f(j)]\} \\ & \text{syss} \quad \mathfrak{A}_{j_0} \models \varphi[f(j_0)] \\ & \text{syss} \quad \mathfrak{A}_{j_0} \models \varphi[h(f/_F)] \end{aligned}$$

■

**Corolario 3.4.5.** *Si $F$ es ultrafiltro principal, entonces* ${}^J\mathfrak{A}/_F \cong \mathfrak{A}$.

**Corolario 3.4.6.** *Si $J$ es finito y $F$ ultrafiltro en $\langle \mathcal{P}(J), \subseteq\rangle$, entonces* ${}^J\mathfrak{A}/_F \cong \mathfrak{A}$. ∎

El ultraproducto es más interesante si se construye con un ultrafiltro no principal.

Sea $F$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathfrak{A}_n = \langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ y sea $\mathfrak{B}$ el ultraproducto $\prod\limits_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n/_F$. Así, $\mathfrak{B}$ es la ultrapotencia ${}^\omega\mathfrak{A}/_F$, donde $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leq\rangle$. Sabemos que $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Sin embargo, $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$:

**Proposición 3.4.7.** $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

*Demostración:* Afirmamos que $\mathfrak{B}$ es un COPO que no está bien ordenado.

a) Sea $f_1/_F \in |\mathfrak{B}|$. Veamos que $f_1/_F, \leq_{\mathfrak{B}} f_1/_F$. Para ello, sea $g/F \in {}^\omega|\mathfrak{B}|$ tal que $g_1/_F = f_1/_F$ (es decir, $g/_F = \langle f_1/_F, g_2/_F, \ldots\rangle$) y mostremos que $\mathfrak{B}\models v_1 \leq v_1[g/_F]$. Como para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{A}_n = \langle \mathbb{N}, \leq\rangle$, tenemos que para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{A}_n\models v_1 \leq v_1[g(n)]$, pues en $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ se cumple que $g(n)(1) \leq g(n)(1)$. Entonces $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_n\models v_1 \leq v_1[g(n)]\}$. Como $F$ es filtro, tenemos que $\mathbb{N} \in F$, es decir,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_n\models v_1 \leq v_1[g(n)]\} \in F\,.$$

Por el Teorema de Ultraproducto, $\mathfrak{B}\models v_1 \leq v_1[g/_F]$.

b) Sea $f_1/_F, f_2/_F \in |\mathfrak{B}|$ tales que $f_1/_F \leq_{\mathfrak{B}} f_2/_F$ y $f_2/_F \leq_{\mathfrak{B}} f_1/_F$. Veamos que $f_1/_F = f_2/_F$.

Sea $g/_F \in {}^\omega|\mathfrak{B}|$ tal que $g_1/_F = f_1/_F$, $g_2/_F = f_2/_F$

$$(g/_F = \langle f_1/_F, f_2/_F, g_3/_F, g_4/_F, \ldots\rangle)\,.$$

Así, $\mathfrak{B} \models v_1 \leq v_2[g/_F]$ y $\mathfrak{B} \models v_2 \leq v_1[g/_F]$.

Por el Teorema del Ultraproducto, $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2[g(n)]\} \in F$ y $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_n \models v_2 \leq v_1[g(n)]\} \in F$. Como $F$ es filtro, $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2[g(n)]$ y $\mathfrak{A}_n \models v_2 \leq v_1[g(n)]\} \in F$, es decir $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2 \& v_2 \leq v_1[g(n)]\} \in F$.

Así, $\{n \in \mathbb{N} \mid f_1(n) = f_2(n)\} \in F$, y por tanto $f_1 \sim_F f_2$. Así, $f_1/_F = f_2/_F$.

c) Sean $f_1/_F, f_2/_F, f_3/_F \in {}^\omega|\mathfrak{B}|$ tales que $f_1/_F \leq_{\mathfrak{B}} f_2/_F$ y $f_2/_F \leq_{\mathfrak{B}} f_3/_F$. Sea $g/_F \in {}^\omega|\mathfrak{B}|$ tal que $g_1/_F = f_1/_F$, $g_2/_F = f_2/_F$, $g_3/_F = f_3/_F$

$$(g/_F = \langle f_1/_F, f_2/_F, f_3/_F, g_4/_F, g_5/_F, \ldots\rangle)\,.$$

Así, $\mathfrak{B} \models v_1 \leq v_2[g/_F]$ y $\mathfrak{B} \models v_2 \leq v_3[g/_F]$. Por el Teorema del ultraproducto, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2[g(n)]\} \in F$ y $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_2 \leq v_1[g(n)]\} \in F$. Como $F$ es filtro, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2[g(n)]$ y $\mathfrak{A}_n \models v_2 \leq v_1[g(n)]\} \in F$, es decir, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2 \& v_2 \leq v_1[g(n)]\} \in F$.

Como $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2 \& v_2 \leq v_3[g(n)]\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_3[g(n)]\}$, tenemos que $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_3[g(n)]\} \in F$.

Por el Teorema del Ultraproducto, $\mathfrak{B} \models v_1 \leq v_3[g/_F]$, es decir, $f_1/_F \leq_{\mathfrak{B}} f_3/_F$.

Por a), b) y c), $\mathfrak{B}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para ver que $mkB$ no est"a bien ordenado, mostraremos una sucesión infinita estrictamente decreciente.

Sea $s \in {}^{\omega}|\mathfrak{B}|$ la sucesión definida por:

$$s_k(n) = \langle \text{máx}\{0, n-k\} \rangle_{n \in \mathbb{N}/_F} .$$

Así,

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rangle /_F \\ s_1 &= \langle 0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle /_F \\ s_2 &= \langle 0, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle /_F \end{aligned}$$

Afirmamos que $s$ es estrictamente decreciente. Sean $j, k \in' N$ tales que $j < k$. Veamos que $s_j <_{\mathfrak{B}} s_k$,

$$s_j = (0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle /_F .$$

$$s_k = (0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle /_F .$$

Sea $g/_F \in {}^{\omega}|\mathfrak{B}|$ tal que $g_1/_F = s_j$, $g/_F = s_k$. Veamos que $s_j \leq_{\mathfrak{B}} \leq s_k$ y que $s_j \neq s_k$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}_n \models v_1 \leq v_2\,[g(n)]$, por lo que $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2\,[g(n)]\}$. Como $F$ es filtro, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{A}_n \models v_1 \leq v_2[g(n)]\} \in F$ y por Teorema del Ultraproducto, $\mathfrak{B} \models v_1 \leq v_2\,[g/_F]$, es decir,

$$s_j \leq_{\mathfrak{B}} s_k .$$

Por otro lado $s_j \neq s_k$, pues si fueran iguales, entonces

$$\langle \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j}, 0, 1, 2, \ldots \rangle \sim_F \langle \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle$$

y $F$ sería un filtro principal.

La imagen de $s$ es un conjunto no vacío sin primer elemento. Por lo tanto $\mathfrak{B}$ no está bien ordenado.

Por lo tanto $\mathfrak{B} \ncong \mathfrak{A}$. ■

$\mathfrak{B}$ es un modelo no estándar de $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

Haciendo la misma construcción para $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$, tendremos un modelo no estándar para la aritmética. Otra aplicación del Teorema del Ultraproducto es el Teorema de Compacidad.

**Teorema 3.4.8.** *Sea $\Sigma$ un conjunto de enunciados de tipo $\rho$. $\Sigma$ es satisfactible syss $\Sigma$ es finitamente satisfactible.*

*Demostración:* $\Rightarrow$] Si $\Sigma$ es satisfactible, entonces cada subconjunto finito de $\Sigma$ es satisfactible.

$\Leftarrow$] Sea $J = \{j \in \mathcal{P}(\Sigma) \mid j \text{ es finito }\}$. Como $\Sigma$ es finitamente satisfactible, para cada $j \in J$ hay una estructura $\mathfrak{A}_j$ de tipo $\rho$ tal que $\mathfrak{A}_j \models j$. Ahora construimos un filtro en $\langle \mathcal{P}(J), \subseteq\rangle$. Para cada $\sigma \in \Sigma$ sea $\overline{\sigma} = \{j \in J \mid \sigma \in j\}$. Sea $E = \{\overline{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$.

*Afirmación*: $E$ tiene la PIF. Sea $\{\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n\} \subseteq E$.

Observemos que $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in \overline{\sigma}_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Así,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\sigma}_i \neq \emptyset .$$

Sea $F$ un ultrafiltro que extienda a $E$.

Observemos que para cada $\sigma \in \Sigma$, $\overline{\sigma} \subseteq \{j \in J \mid \mathfrak{A}_j \models \sigma\}$ (Si $j \in \overline{\sigma}$, entonces $\{\sigma\} \in j$ y por lo tanto $\mathfrak{A}_j \models \sigma$).

Como $\overline{\sigma} \in F$ y $F$ es filtro, $\{j \in J \mid \mathfrak{A}_j \models \sigma\} \in F$. Por el Corolario 3.3.8 del Teorema del Ultraproducto, $\prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j/_F \models \sigma$, por lo tanto $\Sigma$ es satisfactible. ■

Concluímos el presente trabajo con la pregunta: ¿Qué relación hay entre el Teorema de Compacidad y los espacios Topológicos?

Sea $V_\rho$ la clase de todas las estructuras de tipo $\rho$.

**Definición 3.4.9.** Sean $\sigma \in \mathrm{ENUN}_\rho$, $\Sigma \subseteq \mathrm{ENUN}_\rho$. $\mathrm{Mod}(\sigma) = \{\mathfrak{A}_\rho \mid \mathfrak{A} \models \sigma\}$. $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathfrak{A} \in V_\rho \mid \mathfrak{A} \models \Sigma\}$. Sea $\mathcal{F} = \{\mathrm{Mod}(\sigma) \mid \sigma \in \mathrm{ENUN}_\rho\}$.

**Proposición 3.4.10.** *$\mathcal{F}$ es base para los cerrados de alguna topología $\tau_\rho$.*

*Demostración:*
$\mathrm{Mod}(\alpha)$, $\mathrm{Mod}(\beta) \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{Mod}(\alpha) \cup \mathrm{Mod}(\beta) = \mathrm{Mod}(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{F}$. Además $\bigcap_{\sigma \in \mathrm{ENUN}_\rho} \mathrm{Mod}(\sigma) = \emptyset$ (pues $\mathrm{Mod}(\alpha) \cap \mathrm{Mod}(\neg\alpha) = \emptyset$). ■

*Observación.* Como $V_\rho \backslash \mathrm{Mod}(\sigma) = \mathrm{Mod}(\neg\sigma) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es una base de cerrados y abiertos.
Además $\{\mathrm{Mod}(\Sigma) \mid \Sigma \subseteq \mathrm{ENUN}_\rho\}$ es la familia de todos los cerrados, pues $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Mod}(\sigma)$.

**Teorema 3.4.11.** *Son equivalentes:*

1. *El espacio topológico $(V_\rho, \tau_\rho)$ es compacto.*

2. *El teorema de compacidad.*

*Demostración:* 1) $\Rightarrow$ 2)
Sea $\Sigma \subseteq \mathrm{ENUN}_\rho$ finitamente satisfactible.

Sea $A = \{\mathrm{Mod}(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$. Así, $A \subseteq \mathcal{F}$. Además $A$ tiene la pif: Sean $\mathrm{Mod}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{Mod}(\sigma_n) \in A$. Como $\Sigma$ es finitamente satisfactible, hay $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$. En particular $\mathfrak{A} \models \sigma_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $\mathfrak{A} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Mod}(\sigma_i)$.
Como $(V_\rho, \tau_\rho)$ es compacto, $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Mod}(\sigma) \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{A} \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Mod}(\sigma)$. Así, para cada $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \sigma$, es decir $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Por lo tanto $\Sigma$ es satisfacible.
2) $\Rightarrow$ 1)
Sea $F$ un conjunto de cerrados con la pif. Por la Proposición anterior $F \subseteq \{\mathrm{Mod}(\Sigma) \mid \Sigma \subseteq \mathrm{ENUN}_\rho\}$.
Sea $\Gamma = \{\sigma \in \mathrm{ENUN}_\rho \mid \sigma \in \Sigma \text{ y } \mathrm{Mod}(\Sigma) \in F\}$.
$\Gamma$ es finitamente satisfacible: Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Gamma$. Sin perden generalidad, $\sigma_1 \in \Sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma_n$, donde $\mathrm{Mod}(\Sigma_1), \ldots, \mathrm{Mod}(\Sigma_n) \in F$.
Como $F$ tiene la pif, hay $\mathfrak{A} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Mod}(\Sigma_i)$. En particular, $\mathfrak{A} \models \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$.
Por el Teorema de Compacidad $\Gamma$ es satisfacible. Así, hay $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$.
Observemos que para cada $\mathrm{Mod}(\Sigma) \in F$ y cada $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \sigma$, es decir, para cada $\mathrm{Mod}(\Sigma) \in F$, $\mathfrak{A} \models \Sigma$.
Por lo tanto $\mathfrak{A} \in \bigcap F$.
Por lo tanto $\langle V_\rho, \tau_\rho \rangle$ es compacto. ■

# Bibliografía


BELL, JOHN Y ALAN SLOMSON, Models and Ultraproducts, North Holland 1969.

BELL, JOHN Y MOSHÉ MACHOVER, A Course in Mathematical Logic, North Holland 1977.

BŁASZCZYK, ALEKSANDER, Lectures on Boolean Algebras, 2004.

CHANG, CHEN Y JEROME KEISLER, Model Theory, North Holland 1990.

ENDERTON, HERBERT, Una Introducción Matemática a la Lógica, Universidad Nacional Autónoma de México 1987.

JANÉ, IGNACIO, Álgebras de Boole y Lógica, Universitat de Barcelona 1989.

MENDELSON, ELLIOTT, Introduction to Mathematical Logic, Chapman & Hall 1997.

MUNKRES, JAMES, Topology, a first course, Prentice Hall 1975.

OCAMPO, JOSÉ GABRIEL, Tópicos en lógica, Tesis, Universidad Nacional Autónoma de México 1997.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, Diccionario de la lengua española 1994.

WILLARD, STEPHEN, General Topology, Addison-Wesley 1970.