



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"PARTICULAS CARGADAS EN HACES  
BESSEL"

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
F I S I C O  
P R E S E N T A :  
VICTOR HUGO MELLADO ENRIQUEZ



DIRECTORA DE TESIS: DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD

MEXICO, D. F.



2005

m-341204

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Partículas cargadas en haces Bessel"

realizado por Mellado Enríquez Víctor Hugo

con número de cuenta 09758467-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis

Propietario

Dra. Rocío Jáuregui Renaud

Propietario

Dr. Víctor Manuel Romero Rochín

Propietario

Dr. Julio Javier Martinelli Benito

Suplente

Dr. Mayo Villagran Muniz

Suplente

Dr. Manuel Torres Labansat

Consejo Departamental de Física

  
M. EN C. ALICIA ZARKOSA PEÑAFIEL

Dedico este trabajo a mis  
muy queridos y amados padres  
a quienes admiro demasiado

Silvia y Víctor

por su apoyo constante, infinito e incondicional.

A mi siempre admirable hermano

Luis Antonio.

“La auténtica felicidad es imposible sin la soledad.”

“Por lo general no hay  
ni puede haber riqueza justa.”

“La universidad estimula todas las capacidades.  
entre ellas la tontería.”

Anton Chéjov

# AGRADECIMIENTOS

De manera muy especial agradezco a la **Dra. Rocío Jaúregui Renaud** por la supervisión y el apoyo que me concedió para que fuese posible la realización de este trabajo. Dejaré de lado lo formal.

Además, por permitirme colaborar contigo. Por la gran paciencia que tuviste para conmigo y que lograste inculcarme durante la realización de este trabajo. También, por introducirme al tema de partículas cargadas en interacción con la luz, entre muchos otros. Gracias, por tu valiosísima ayuda Rocío.

A los sinodales:

**Dr. Víctor Manuel Romero Rochín, Dr. Manuel Torres Labansat, Dr. Mayo Villagran Muniz, Dr. Julio Martinell Benito**, que con su revisión del manuscrito, hicieron comentarios tan acertados que han enriquecido este trabajo en múltiples aspectos. Gracias por haber dedicado tiempo y trabajo a esta tesis.

También quiero expresar mi gratitud al **Dr. Shahen Hacyan Saleryan** por sus valiosas discusiones que nos proporcionó, por sus comentarios, por sus propuestas que han enriquecido y seguirán enriqueciendo enormemente este trabajo.

Agradezco de manera especial a la **Dra. Karen Volke Sepúlveda**, quien ha brindado un apoyo importante en la realización del trabajo, con discusiones, comentarios y material acerca del tema estudiado.

Agradezco al **Dr. Eugenio Ley Koo** por sus comentarios enriquecedores en el aspecto conceptual y básico de este trabajo.

Al **Dr. Eduardo Andrade** por su apoyo durante y después del servicio social. Además, por mostrarme que lo experimental no es tan feo como uno cree.

Agradezco a todos aquellos y aquellas que no los menciono para no engordar más el trabajo, pero no por eso son menos importantes.

En el ámbito personal, no bastan estas líneas (y ni muchas más) para agradecer a mis padres por todo el amor, cariño, paciencia, dedicación y ejemplo

b

que nos han concedido a mi hermano y a mí. Por mostrar carácter, constancia y superación día con día y en cada momento. GRACIAS (infinita y eternamente agradecido).

A mi hermano por ser un ejemplo a seguir. Y que juntos, siempre y sanamente, demos lo mejor de nuestro ser, para competir y superar los retos de la mejor manera posible que enfrentamos en la vida.

A todos mis seres queridos. En especial, a los mas allegados y buena onda, les agradezco por exigirme, una superación en mi persona, en cada aspecto de ella, para la cual han contribuido enormemente. Gracias a todos y a todas.

A toda la **bandera** que conocí en la Facultad de Ciencias. Gracias por permitirme compartir tantos momentos tan gratos e inolvidables. En especial, esa **bandera** de los últimos semestres (coto for ever!!!).

También a las personas que he conocido, a lo largo de la vida y me consideran su amigo (la función es biyectiva). Gracias.

Aprovecho la ocasión para expresar mi gratitud por tanta motivación que recibí, y que deseo recibir muchos años más, de parte del profesorado tan excelente que me encontré en la vida académica. Debido a que me ayudaron a entender muchas situaciones que envuelve la vida. No les hago mención por su nombre de pila, pero cuando los visito, los veo, los saludo, lo hago con mucho placer y orgullo por contar con su presencia y amistad que me han brindado. En especial a los **profes del IF**. Gracias.

Así mismo, agradezco a las autoridades del **Instituto de Física de la UNAM**, a las del departamento de **Física Teórica**, a las de la sala de **computación F.T.**, a las de la **biblioteca** y al personal de la biblioteca, que han permitido el uso de las instalaciones para la realización de esta tesis. El paquete incluye a las **secretarias**: Liz y Mary del departamento de teórica.

Por si alguien falto de mencionar, les agradezco, en general a todas y a todos, por formar parte de lo que ha rodeado la "existencia" de mi ser, de mi alma, de mi karma, de mi vibra. Sin ustedes no sería lo que soy.

G R A C I A S.

# Resumen

El presente trabajo tiene por objeto, el estudio de las trayectorias clásicas de partículas cargadas en interacción con haces Bessel. Los haces Bessel son haces de luz adifraccionales que transportan energía, momentum lineal y portan momentum angular independiente a su estado de polarización. Hacemos uso del formalismo lagrangiano, para obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una partícula (puntual) cargada relativista en un campo electromagnético (EM), despreciando la emisión de radiación. Al campo EM dado por un haz Bessel, se le añade un campo magnético externo uniforme y constante, que es paralelo a la dirección de propagación del haz.

La descripción del campo óptico la realizamos con la ayuda de potenciales auxiliares, conocidos como potenciales de polarización o de Hertz. Con ello, logramos identificar un potencial de Hertz para polarización transversal eléctrica (TE) y otro para polarización transversal magnética (TM). Con la combinación adecuada de modos TE y TM, obtenemos polarización circular.

Resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento con la ayuda de una computadora y un programa, cuyo método de integración es de predicción-corrección. Los resultados que obtenemos en ausencia de campo magnético externo son, en general, regiones anulares de confinamiento y no confinamiento. Es decir, regiones en donde la partícula puede o no quedar confinada radialmente. Estas regiones dependen fuertemente de las condiciones iniciales (CI). Se hace énfasis en los efectos que sobre la partícula efectúa el tipo de polarización que tiene el campo EM.

En presencia del campo magnético externo, todas las trayectorias analizadas involucran a las partículas atrapadas radialmente. Resaltamos los resultados que se obtienen cuando la frecuencia del haz es igual a la frecuencia característica de un ciclotrón (condición de resonancia). Las trayectorias que toma la partícula para esta situación son espirales (a tiempos cortos). A tiempos largos, se forma un anillo compacto en el plano  $XY$ . A diferencia de lo que ocurre en presencia de una onda plana, existe un valor máximo para la energía que puede adquirir la partícula en condiciones inicialmente resonantes. De cualquier forma este valor máximo puede ser varios ordenes de magnitud al que se obtiene en condiciones no resonantes.



# Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	5
2.1. Descripción en términos de haces	5
2.1.1. Campos ópticos invariantes en propagación	9
2.2. Haces Bessel	13
2.2.1. Generación experimental de haces Bessel	15
3. Partícula cargada en un haz Bessel	19
3.1. Introducción	19
3.2. Ecuaciones de movimiento	21
3.2.1. Cantidades conservadas	23
3.3. Solución numérica de las ecuaciones	26
3.3.1. Polarización TE	26
3.3.2. Polarización TM	42
3.3.3. Polarización circular ( $L$ ) y ( $R$ )	47
3.4. Movimiento en presencia de $B_{zE}$	71
3.4.1. Polarización TE y TM	71
3.4.2. Resultados para polarización circular ( $L$ ) y ( $R$ )	77
3.4.3. Efectos resonantes	77
4. Conclusiones y perspectivas	87
A. Modos TE y TM	93
A.1. Polarización TE, $b_z \neq 0$	93
A.2. Polarización TM	93

B. Polarización ( $L$ ) y $b_z = 0$	97
B.1. $m = 0$ . . . . .	97
B.2. $m = 1$ . . . . .	100
C. Polarización circular y $b_z \neq 0$	105
D. Figuras para el caso Resonante	109
D.1. Modos TE . . . . .	109
D.2. Modos ( $L$ ) y ( $R$ ) . . . . .	113

# Capítulo 1

## Introducción

Hablar del fenómeno de la luz implica viajar en el tiempo, recorrer la historia de la humanidad encontrando las diferentes interpretaciones de este fenómeno, entre las que destacan la interpretación ondulatoria y la corpuscular. Mencionemos sólo algunas ideas relacionadas con la luz de pensadores (filósofos, científicos,...), como el caso de Epicuro (341-270 a.C.) quien decía que de los objetos brotan partículas que hieren los ojos; Aristóteles (384-322 a.C.), quien propuso una teoría ondulatoria (similar a la del eter); Huygens (1629-1695), elaborando la idea de que la luz es una onda primaria seguida de onditas esféricas, explicó fenómenos como el de polarización y la doble refracción; Newton (1642-1727) consideró que los corpúsculos de luz excitan al eter en vibraciones características (rojo-largo, violeta-corto), observó la dispersión y el fenómeno de los colores. Estos hechos históricos ilustran la base de grandes debates en la búsqueda de una interpretación que explique todos los fenómenos conocidos relacionados con la luz. Fue James Clerk Maxwell (1831-1879) quien plasmó las ideas de Faraday (1791-1867) en cuatro ecuaciones que describen los aparatos electromagnéticos y ópticos en gran escala. Esta teoría identifica a la luz como una onda transversal (onda electromagnética (EM)). Posteriormente, Hertz (1857-1894) verificó experimentalmente esas ideas. También, encontramos las ideas de Planck y de Einstein acerca de la luz: los famosos cuantos de luz que el químico Gilbert Lewis (1926) sugirió llamar fotones. Así, las diversas propiedades que posee la luz han llevado a aceptar su naturaleza dual onda- partícula.

Con el avance tecnológico la gama de aplicaciones asociada a estos estudios es muy variada. En la actualidad es común hablar de láseres, sin embargo, hay toda una diversidad de haces de luz a los cuales se les adju-

dica esa etiqueta. Por ende, toda una variedad de modelos para describir las propiedades de cada haz. Por ejemplo, mencionemos los que se describen con una geometría cartesiana (haces Hermite-Gaussianos), cilíndrica circular, parabólica, elíptica (haces: Bessel, Weber, Mathieu, respectivamente), etc.

En este trabajo, se estudian haces Bessel, que transportan energía, momentum lineal y momentum angular ajeno a su estado de polarización. Además estos haces tienen la muy interesante propiedad de ser invariantes a lo largo de la dirección de propagación. Esto es, su frente de onda (dado por una o más funciones de Bessel de primera clase, no singular, de orden  $m$ ,  $J_m$ ) no depende de la variable de propagación. En el capítulo 2 exponemos de manera breve los fundamentos teóricos acerca de la descripción de un haz en general, así como de un campo óptico invariante en propagación. Cabe señalar que ésta descripción es desarrollada en forma más amplia en la tesis doctoral "Light beams with angular momentum and applications in optical tweezers" (Karen Volke Sepúlveda, Tesis Doctoral, INAOE, México 2003), que además, incluye la demostración experimental de la transferencia de momentum angular orbital a micro-partículas dieléctricas usando haces Bessel [1].

Al final del capítulo 2 hacemos la descripción de los haces Bessel, con la ayuda de potenciales auxiliares llamados potenciales de polarización o de Hertz (1889), obteniendo modos transversales eléctricos (TE) y modos transversales magnéticos (TM). Concluimos el capítulo con una discusión muy breve de mecanismos para generar experimentalmente los haces Bessel.

En el capítulo 3 hacemos uso del formalismo lagrangiano, para la descripción de una partícula (puntual) cargada en interacción con el campo EM de un modo Bessel despreciando la emisión de radiación. Obtenemos las ecuaciones de movimiento para los modos TE y TM. Posteriormente, con la combinación adecuada de modos TE y TM, obtenemos modos Bessel con polarización circular y las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada inmersa en ellos. Además, se identifican variables dinámicas naturales del sistema acoplado, como el momentum lineal a lo largo de la dirección de propagación,  $P_z$ , y el momentum angular a lo largo de la dirección de propagación,  $L_z$ , ambas cantidades se conservan. De interpretar a la energía a través del hamiltoniano, esta resultaría **no** ser una constante de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento se resuelven numéricamente, con la ayuda de una computadora y un programa cuyo método de integración es de predicción-corrección: Se obtienen regiones anulares en donde la partícula puede o no quedar confinada dependiendo fuertemente de las condiciones

iniciales (CI). La anchura de dichas regiones, también depende del haz utilizado, identificado con el orden de la función de Bessel,  $J_m$ .

Para polarización circular derecha, de acuerdo con los cálculos realizados, la región central es de *confinamiento*, y para los modos TE y polarización circular izquierda la región central es de *no confinamiento* sólo en el caso con  $m = 1$ . Para TM la región central es de *confinamiento* sólo en el caso con  $m = 1, 2$  y  $3$ .

Otro resultado de relevancia es que en presencia de un campo magnético externo uniforme,  $B_{zE}$ , las regiones en que en su ausencia no hay confinamiento de partículas, se convierten en regiones de confinamiento, tanto para los modos TE, TM y circularmente polarizados. Efectos resonantes son brevemente estudiados.

Es importante señalar el tipo de láser que tendría que utilizarse para verificar los resultados obtenidos. La mayor contribución a la fuerza en la interacción de una partícula cargada con el campo EM de un haz la proporciona la fuerza eléctrica,  $F_e = eE$ , donde  $e$  representa la carga de la partícula y  $E$  el campo eléctrico. Este último se evalúa en términos de la intensidad del láser. Entonces, en las ecuaciones de movimiento tenemos este factor acompañado por otras cantidades como la masa de la partícula ( $m_0$ ) y la velocidad de la luz ( $c$ ). Se identifica la cantidad adimensional,  $A_{\perp} = eE_0/(m_0c^2k_{\perp})$ , donde  $k_{\perp}$  es el número de onda perpendicular a la dirección de propagación. Considerando los valores de esas constantes para un electrón y la velocidad de la luz, se tiene que, si la cantidad adimensional es del orden de 1, entonces se requieren intensidades del orden de:  $I_{las} \sim 10^{18} \text{Watts/cm}^2$ . Por lo tanto, el tiempo de exposición deberá ser muy chico ( $t \sim 10^{-15} \text{s}$ ). A la fecha, los láseres reportados en la literatura llegan a alcanzar intensidades del orden de  $(10^{18} - 10^{21}) \text{Watts/cm}^2$  [2].

En el último capítulo expresamos las conclusiones de éste trabajo y algunas de las perspectivas que se tienen en mente para ampliar la descripción de este tipo de sistemas. Por ejemplo, los resultados nos muestran que no es suficiente tener dos cantidades conservadas para sistematizar el comportamiento de la partícula cargada en interacción con el campo EM dado por un modo Bessel. Sin embargo, con ellas ya es posible tener una idea cualitativa (clásica) de lo que el campo óptico asociado a un modo Bessel provoca en la partícula cargada.

El trabajo a futuro, es mucho y muy interesante, por ejemplo, para regiones en el espacio de condiciones iniciales que presentan un comportamiento estable, se ha sugerido (Dr. Shahen Hacyan) emplear técnicas de mecánica

clásica (principio variacional) que permitan obtener soluciones analíticas aproximadas. Agradezco al Dr. Hacyan por enriquecer este trabajo con las discusiones que nos proporcionó.

La clase de sistemas aquí estudiados se encuentran de manera factible en física de plasmas y una de las perspectivas, la más ambiciosa, es permitir la verificación experimental de nuestros resultados.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Descripción en términos de haces

El estudio riguroso de cualquier sistema físico electromagnético (EM) está basado en las ecuaciones de Maxwell. La existencia de soluciones de onda viajeras muestran el transporte de momentum lineal, momentum angular y energía a través del espacio y esto es fundamental para la teoría.

En un medio no conductor libre de fuentes, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (2.4)$$

donde  $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ ,  $\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ ,  $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  y  $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  representan al campo vectorial eléctrico, al desplazamiento eléctrico, a la inducción magnética y al campo vectorial magnético respectivamente. Si el medio es homogéneo, isotrópico y lineal, tenemos  $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{H}} = (1/\mu) \vec{\mathbf{B}}$ , con  $\epsilon$  la permitividad eléctrica y  $\mu$  la permeabilidad magnética. De las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de onda y usando las relaciones para  $\vec{\mathbf{D}}$  y  $\vec{\mathbf{H}}$ , tenemos

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (2.5)$$

donde  $v = c/\sqrt{\mu\epsilon}$ , es la velocidad de la luz en el medio. Durante el desarrollo de esta tesis supondremos  $v = c$ . La dependencia temporal de los campos puede suponerse armónica y caracterizada por la frecuencia  $\omega$ , es decir,  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ . Debido a la linealidad de la ecuación de onda; cualquier otra dependencia temporal puede ser desarrollada en términos de funciones armónicas. Con esta condición en la ecuación de onda se obtiene la ecuación de Helmholtz vectorial:

$$[\nabla^2 + k^2] \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (2.6)$$

es decir, la parte espacial de la ecuación de onda para campos armónicos. Aquí  $k = \omega/c$ , es el número de onda y  $c$  la velocidad de fase.

La solución más simple a la ecuación (2.5) para el caso sin acotar es la onda plana  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , con  $\vec{E}_0$  un vector constante (en general complejo) que define la amplitud y polarización de la onda y el argumento de la exponencial define su fase. Para ondas planas,  $\vec{k}$  está asociado con la dirección de propagación y su módulo queda determinado por la longitud de onda en el vacío ( $\lambda$ ) y el índice de refracción del medio en donde se propaga ( $n$ ),  $k = 2\pi n/\lambda$ , en nuestro caso  $n = 1$ . Cualquier solución de la ecuación de Helmholtz puede ser representada como una superposición de ondas planas con diferentes fases y amplitudes.

Con el avance tecnológico asociado a la invención del láser, la atención de la comunidad óptica se centró en **soluciones tipo haz**, esto es, altamente dirigidos y con extensión transversal finita. Como punto de partida para la descripción de un haz se supone una función escalar de la forma

$$U(\vec{r}, t) = u(x, y, z) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (2.7)$$

para representar una de las componentes del campo EM que se considera aproximadamente perpendicular a la dirección de propagación (eje  $z$ ). La dependencia de  $u$  en las variables  $x$  y  $y$  especifican el perfil transversal del haz, mientras que la dependencia en  $z$  considera cambios en la amplitud transversal y la fase, debido a la difracción y efectos de propagación. Esta última dependencia suele considerarse "lenta". Sustituyendo  $U(\vec{r}, t)$  en la ecuación de Helmholtz, se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + (k^2 - k_z^2)u = 0. \quad (2.8)$$



Como se tiene en mente haces altamente dirigidos propagándose a lo largo de  $z$  tenemos que  $k_z \approx k$ ; así, el último término de la ecuación anterior es despreciado, y la condición sobre la forma en que varía  $u(x, y, z)$  a lo largo de  $z$  la podemos expresar de la siguiente manera

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|.$$

Este esquema es conocido como la aproximación **paraxial** y, por lo tanto, la ecuación de onda paraxial es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

La solución de esta ecuación es separable en varios sistemas de coordenadas ortogonales, en particular cartesianas y cilíndricas circulares. Nos interesa la simetría cilíndrica para la cual tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

con  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\varphi = \arctan(y/x)$  las coordenadas radial y azimutal, respectivamente.

Ahora bien, físicamente, los modos de propagación deben tener una extensión transversal finita para acarrear una cantidad finita de energía, es decir, el perfil transversal del haz deberá caer suave y rápidamente conforme aumenta la distancia transversal  $\rho$  al eje de propagación. Se propone entonces, una función de la forma  $\exp[i(k\rho^2/q(z))]$ , con  $q(z)$  una función compleja. El precio que se debe pagar por una extensión finita es el de incorporar en la descripción efectos de difracción. Para preservar la estabilidad del modo durante la propagación, esos efectos se imponen en el escalamiento de las variables transversales por un factor dependiente de la distancia de propagación,  $z$ , más que en su estructura (la solución completa nos dará un haz gaussiano).

En el vacío, si la dimensión transversal del haz aumenta con la distancia de propagación entonces su amplitud debe decrecer de tal forma que el flujo de energía acarreado por el haz a través de cualquier plano transversal permanezca constante.

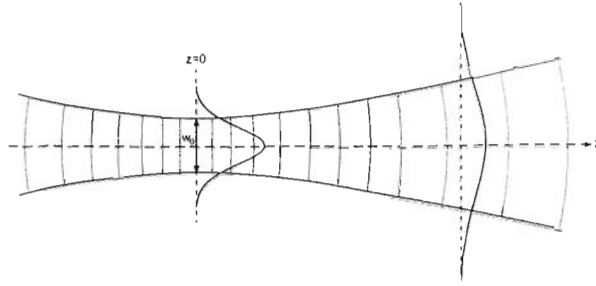


Figura 2.1: Haz Gaussiano.

Si el radio de curvatura  $R$  (del frente de onda) es infinito, esto significa que los frentes de onda son aproximadamente planos para la cintura del haz (esto es en  $z = 0$ ) y ahí el campo se comporta como una onda plana. Para grandes valores de  $|z|$  tenemos  $R \sim z$ , lo cual corresponde a ondas esféricas divergiendo a partir de la cintura del haz ( $z > 0$ ) o a ondas esféricas convergiendo hacia el centro de la cintura del haz ( $z < 0$ ). Estas características se ilustran en la Fig. 2.1.

En la Fig. 2.1 también se observa que los frentes no son equidistantes, debido a un término conocido como fase de Gouy, es decir, un cambio de fase acumulativo en la dirección axial añadido a los frentes de onda a través de la propagación. La fase adicional es  $\pm\pi/2$  por cada lado de la cintura del haz, un cambio total de  $\pi$ , adquirido principalmente en la región central del haz. Así, los frentes de onda de un haz gaussiano que pasan a través de su cintura, cambian su fase en un factor  $\frac{1}{2}\lambda$  en comparación con la onda plana (su velocidad de fase es ligeramente mayor que la de la onda plana).

La propiedad más distintiva de los haces LG es debida al índice azimutal,  $m \neq 0$ , [3, 4]: la distribución de amplitud compleja rota conforme el haz se propaga debido a que la fase azimutal no es constante;  $m$  se refiere al número de ciclos de fase  $2\pi$  alrededor del modo (circunferencial). Se dice entonces que hay una **singularidad**, en este caso, una dislocación de tornillo o **vórtice óptico**. A  $m$  se le llama también helicidad o carga topológica [5].

Experimentalmente, los modos paraxiales gaussianos (de orden cero) surgen como los modos transversales del resonador del láser. Los de alto orden pueden también ser excitados usando placas retardadoras de espiral.

Quizá los métodos de generación de haces con perfiles transversales predefinidos más comunes hoy en día, son los que utilizan hologramas generados por computadora [6]. Al final del capítulo en la sección de generación experimental se comenta más sobre esta técnica.

### 2.1.1. Campos ópticos invariantes en propagación

Las soluciones ampliamente conocidas de la ecuación de Helmholtz, por ejemplo, ondas planas, esféricas y cilíndricas, forman un conjunto completo para desarrollar cualquier campo óptico en términos de cualquiera de ellas.

Durnin [7, 8] y su equipo de trabajo (1987), estudiaron las soluciones sin acotar (tridimensionales) a la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas circulares (desde el punto de vista de modos de propagación), llamados *haces Bessel*. La principal característica de esos modos (en el espacio libre) es que idealmente, pueden propagarse una distancia infinita sin sufrir alteraciones en su sección transversal. También se les llama *haces adifraccionales*. Teóricamente podrían acarrear una energía infinita (debido a su extensión infinita) en el mismo sentido que una onda plana. Sin embargo, en la práctica presentan efectos de difracción debido a las aperturas finitas que los generan.

En esta sección nos enfocaremos a la descripción de un campo escalar “adifraccional”. Expresemos un campo escalar arbitrario  $U(\vec{r})$  en términos de su transformada de Fourier tridimensional  $\tilde{U}(\vec{k})$ , de la siguiente manera

$$U(\vec{r}) = \iiint \tilde{U}(\vec{k}) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dV_k \quad (2.11)$$

donde la integración es en todo el espacio de frecuencias  $(k_x, k_y, k_z)$ . Si la dependencia del campo se supone armónica de una sola componente de la frecuencia, la magnitud del vector de onda  $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  es necesariamente restringida al único valor  $k = \omega/c$ , esto fue señalado por McCutchen [9]. El problema se reduce a una integración sobre la superficie esférica haciendo  $\tilde{U}(\vec{k}) = \tilde{A}(\varphi_{\vec{k}}, \theta_{\vec{k}}) \delta(|k| - \omega/c)$ ;  $\varphi_{\vec{k}}$  es el ángulo azimutal,  $\theta_{\vec{k}}$  es el ángulo polar. La esfera de McCutchen se define como una esfera unitaria en el espacio de frecuencias (ver Fig. 2.2). Así tenemos que

$$U(\vec{r}) = \int_{\Omega} \tilde{A}(\varphi_{\vec{k}}, \theta_{\vec{k}}) e^{ik[(x \cos \varphi_{\vec{k}} + y \sin \varphi_{\vec{k}}) \sin \theta_{\vec{k}} + z \cos \theta_{\vec{k}}]} k^2 d\Omega_{\vec{k}} \quad (2.12)$$

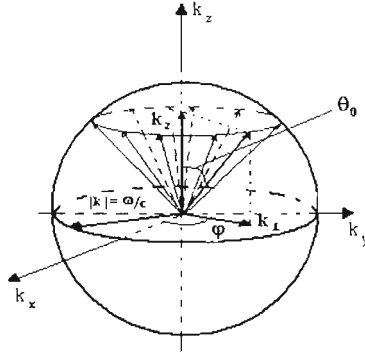


Figura 2.2: Esfera de McCutchen y el cono del vector de onda de un campo óptico invariante en propagación en el espacio de frecuencias.

donde  $d\Omega_{\vec{k}}$  es el ángulo sólido,  $\Omega$  es la superficie de esfera unitaria, con las relaciones  $k_x = k \sin \theta_{\vec{k}} \cos \varphi_{\vec{k}}$ ,  $k_y = k \sin \theta_{\vec{k}} \sin \varphi_{\vec{k}}$  y  $k_z = k \cos \theta_{\vec{k}}$ . Ahora a  $U(\vec{r})$  se le pedirá que cumpla la condición de que

$$I(x, y, z \geq 0) = I(x, y, z = 0), \quad (2.13)$$

donde  $I(x, y, z) = |U(\vec{r}, t)|^2$  denota la intensidad promediada en el tiempo del campo escalar. Esta condición matemática nos dice que el perfil transversal de intensidad es independiente de la variable de propagación, es decir, el perfil de intensidad para el plano  $z = 0$  es el mismo para cualquier plano transversal  $z > 0$ . Para ello basta con exigir un valor (constante) para  $\theta_{\vec{k}} = \theta_0$ , esto es equivalente a constreñir la componente axial del vector de onda a un solo valor:  $\dot{A}(\varphi_{\vec{k}}, \theta_{\vec{k}}) = (1/k^2)\delta(\cos \theta_{\vec{k}} - \cos \theta_0)A(\varphi_{\vec{k}})$ . Esto conduce a

$$U(\vec{r}) = e^{ik_z z} \int A(\varphi_{\vec{k}}) e^{ik_{\perp}(x \cos \varphi_{\vec{k}} + y \sin \varphi_{\vec{k}})} d\varphi_{\vec{k}} \quad (2.14)$$

con  $k_{\perp} = k \sin \theta_0$  y  $A(\varphi_{\vec{k}})$  una función, en general, compleja. Esta última expresión (2.14) es la más general para un campo escalar invariante en propagación en términos de su espectro de Fourier. Si la función de modulación azimutal  $A(\varphi_{\vec{k}})$  en el espacio de frecuencias es conocida, el campo puede ser determinado.

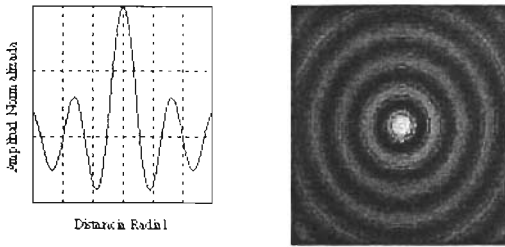


Figura 2.3: Haz Bessel de orden cero y su frente de onda.

Físicamente la relación (2.14), se interpreta como una superposición de ondas planas cuyo vector de onda permanece en la superficie del cono. A lo largo de la dirección axial, todas estas ondas planas están en fase, puesto que el cambio de fase axial es introducido a través de la propagación sobre una distancia,  $\Delta z$ , y es el mismo para todas las componentes, es decir,  $k_z(\Delta z)$ . Las componentes transversales del vector de onda, a pesar de tener la misma magnitud,  $k_{\perp}$ , difieren en su ángulo azimutal alrededor de la sección transversal del cono. Esto significa que en la dirección transversal, las ondas planas deben interactuar para generar patrones de interferencia que no cambian en la propagación. Una sola onda plana puede ser considerada el caso trivial de un campo óptico invariante en propagación con amplitud transversal constante.

El caso particular  $A(\varphi_{\vec{k}}) = \text{constante}$  en la ecuación (2.14) corresponde al haz Bessel de orden cero:  $U(\vec{r}) = A_0 e^{ik_z z} J_0(k_{\perp} \rho)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , su amplitud normalizada se muestra en la Fig. 2.3, observando que es un conjunto de anillos brillantes y oscuros intercalados, resaltando que la región central es brillante. En el contexto óptico, Durnin [7] generó haces Bessel de orden cero de la siguiente forma: utilizando una pantalla con una rendija anular y colocando enfrente una lente centrada exactamente en el plano focal, se generan ondas planas con un eje de propagación que forma un ángulo fijo  $\theta_0$  respecto al eje de simetría del problema. La superposición de estas es precisamente aquella que corresponde a la ecuación (2.14) para ondas Bessel de orden cero. Nótese que la región cónica de interferencia se extiende a una

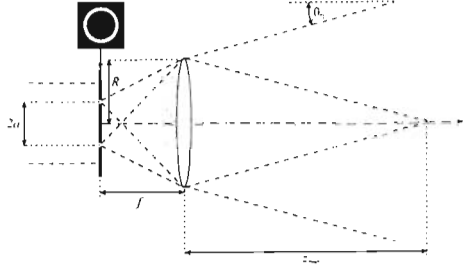


Figura 2.4: Generación del haz Bessel de orden cero. Por medio de una rendija circular.

distancia  $z_{max} = R/\tan \theta_0 = fR/a$ , donde  $R$  es el radio de apertura de la lente,  $f$  su distancia focal y  $a$  el radio de la rendija. Un haz ideal corresponde a una apertura infinita,  $R \rightarrow \infty$ , y se propaga una distancia infinita,  $z_{max} \rightarrow \infty$ . En la Fig. 2.4 se esquematiza este dispositivo experimental.

Para un campo invariante en propagación también podemos escribir  $U(\vec{r}) = F(x_1, x_2)Z(z)$ , donde  $F(x_1, x_2)$  representa la dependencia transversal y  $Z(z)$  la longitudinal;  $x_1$  y  $x_2$  son variables transversales generalizadas. Sustituyendo  $U(\vec{r})$  en la ecuación de Helmholtz se obtiene

$$[\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2]F(x_1, x_2) = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (2.16)$$

donde  $k_z$  es el número de onda y  $k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2$ . El régimen paraxial puede ser definido por la condición  $k_{\perp}/k_z \ll 1$ . La única solución de la ecuación (2.16) que satisface la invariancia en propagación a lo largo de  $z > 0$  es  $Z(z) = \exp[ik_z z]$ , la cual genera una solución de la forma

$$U(\vec{r}) = F(x, y)e^{ik_z z} \quad (2.17)$$

El problema se reduce a determinar todas las posibles soluciones a la ecuación de Helmholtz bidimensional para las coordenadas transversales. Esta ecuación es separable en, por ejemplo, coordenadas rectangulares, polares, elípticas y parabólicas. Las soluciones para los dos primeros casos son ondas planas y haces Bessel, respectivamente, para simetría elíptica son los llamados haces Mathieu [10, 11, 12] y para la parabólica, haces Weber [13, 14]. Se les llama

de esa manera a los haces debido a que la estructura de los frentes de onda involucra a las funciones especiales de Bessel, Mathieu y Weber, respectivamente.

La relación entre la ecuación (2.17) y (2.14) está dada por:

$$J_m(k_{\perp}\rho)e^{i\varphi m} = \frac{(-1)^m}{2\pi} e^{im\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\varphi_{\vec{k}}} e^{ik_{\perp}[\cos\varphi_{\vec{k}} + \text{sen}\varphi_{\vec{k}}]} d\varphi_{\vec{k}} \quad (2.18)$$

## 2.2. Haces Bessel

En esta sección nos encargaremos de la descripción del campo óptico asociado a los modos Bessel. Es decir, describiremos al campo EM correspondiente. Para ello emplearemos campos escalares auxiliares que determinan los campos vectoriales EM fundamentales. En la literatura estos campos auxiliares se conocen como potenciales de polarización o de *Hertz* (1889) y *Righi* (1901) [15]. Como el nombre lo sugiere, esos potenciales están relacionados con la polarización eléctrica y magnética de los campos.

Un campo EM con simetría cilíndrica es descrito en términos de potenciales de Hertz  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  [16]. A partir de ellos los potenciales EM están dados por:

$$\Phi = -\frac{\partial\Pi_1}{\partial z} \quad (2.19)$$

$$\vec{A} = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi}, -\frac{\partial\Pi_2}{\partial\rho}, \frac{\partial\Pi_1}{c\partial t} \right\} \quad (2.20)$$

Estos satisfacen la norma de Lorentz. El campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) correspondiente es:

$$E_{\rho} = \frac{\partial^2\Pi_1}{\partial z\partial\rho} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial^2\Pi_2}{\partial t\partial\varphi} \quad (2.21)$$

$$E_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\Pi_1}{\partial z\partial\varphi} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2\Pi_2}{\partial t\partial\rho} \quad (2.22)$$

$$E_z = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Pi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\Pi_1}{\partial z^2} \quad (2.23)$$

y el campo magnético ( $\vec{B}$ ) es:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial t \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z \partial \rho} \quad (2.24)$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial t \partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z \partial \varphi} \quad (2.25)$$

$$B_z = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z^2}. \quad (2.26)$$

Ambos potenciales  $\Pi_j$ , ( $j = 1, 2$ ), satisfacen la ecuación:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi_j}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Pi_j}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Pi_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_j}{\partial z^2} = 0. \quad (2.27)$$

Cualquier solución de esta ecuación que es regular en el origen puede ser escrita como una combinación lineal de las funciones

$$\Pi_j = C_j J_m(k_\perp \rho) e^{i(-\omega t + k_z z + m\varphi)} \quad (2.28)$$

donde  $J_m$  es la función de Bessel de orden  $m$  de primera clase no singular,  $C_j$  es constante, y  $k_\perp^2 = (\omega/c)^2 - k_z^2$ ,  $\omega = k_l c$ .

Los modos TE (TM), transversales eléctricos (transversales magnéticos), son aquellos en donde las componentes del campo eléctrico (magnético) son perpendiculares a la dirección principal de propagación. Así, si el eje  $z$  se identifica con la dirección principal de propagación, entonces para TE (TM) no hay componente de  $\vec{E}$  ( $\vec{B}$ ) a lo largo de  $z$ ,  $E_z = 0$  ( $B_z = 0$ ).

Los TE (TM) los obtenemos haciendo  $\Pi_1 = 0$  ( $\Pi_2 = 0$ ). Y usando la ecuación (2.28) en (2.21 - 2.26) tenemos que los  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  para los modos TE están dados por

$$\vec{E} = -E_0 \left[ \frac{m}{\rho k_\perp} J_m(\rho k_\perp) \hat{\rho} + i J'_m(\rho k_\perp) \hat{\varphi} \right] e^{i(-k_l c t + k_z z + m\varphi)} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} = E_0 \left[ i \frac{k_z}{k_l} J'_m(\rho k_\perp) \hat{\rho} - \frac{k_z}{k_l} \frac{m}{\rho k_\perp} J_m(\rho k_\perp) \hat{\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{k_\perp}{k_l} J_m(\rho k_\perp) \hat{z} \right] e^{i(-k_l c t + k_z z + m\varphi)} \end{aligned} \quad (2.30)$$



donde  $E_0 = C_2 k_\perp k_t$  y  $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  son vectores unitarios en la direccion radial, azimutal y de propagación, respectivamente,  $J'_m = dJ_m(x)/dx$ .

Para los modos TM, tenemos que  $\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{B}}$  son

$$\vec{\mathbf{B}} = E_0 \left[ \frac{m}{\rho k_\perp} J_m(\rho k_\perp) \hat{\rho} + i J'_m(\rho k_\perp) \hat{\varphi} \right] e^{i(-k_t ct + k_z z + m\varphi)} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} = E_0 \left[ i \frac{k_z}{k_t} J'_m(\rho k_\perp) \hat{\rho} - \frac{k_z}{k_t} \frac{m}{\rho k_\perp} J_m(\rho k_\perp) \hat{\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{k_\perp}{k_t} J_m(\rho k_\perp) \hat{z} \right] e^{i(-k_t ct + k_z z + m\varphi)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Observamos que los haces Bessel tienen vórtices ópticos. Como mencionamos previamente estos son defectos topológicos o dislocaciones del frente de onda. En general, se consideran dos tipos de dislocaciones, las de borde y las de tornillo. Las que nos interesan son las de tornillo o **vórtices**. Los campos cercanos a un vórtice matemáticamente se comportan como  $\rho^m \exp[i m \varphi]$ . Se caracterizan por tener como frente de onda una espiral girando alrededor de la línea del defecto (escalera de caracol). En los haces Bessel este defecto se encuentra a lo largo del eje axial, el orden del haz,  $m$ , corresponde al número de espirales que giran alrededor del defecto topológico (ver Fig. 2.5).

### 2.2.1. Generación experimental de haces Bessel

Un método experimental para generar haces Bessel es por medio de lentes cónicas (sólo para el caso de orden cero) llamados *axicones* [17, 18]. Un axicón iluminado con un haz (gaussiano) bien colimado genera un haz Bessel de orden cero (Fig. 2.6), con un ángulo del cono de aproximadamente  $\theta_0 \approx (n-1)\gamma$ , donde  $n$  es el índice refractivo y  $\gamma$  el ángulo interno del axicón, respectivamente. La distancia de propagación máxima en este caso está dada por  $z_{max} = \omega_c / \tan(\theta_0)$ , con  $\omega_c$  el radio del haz colimado. Este es el método más eficiente en términos de la potencia del haz.

Ahora bien, se demuestra que cuando un axicón es iluminado con un LG de orden azimutal  $m$  y  $p = 0$  ( $p$  es el orden radial), esto genera un haz

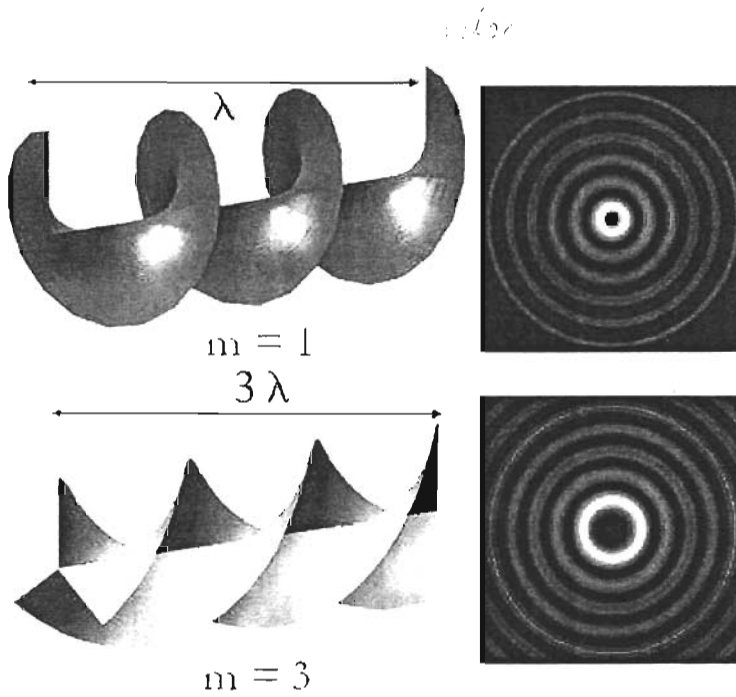


Figura 2.5: Vórtices para un haz Bessel de orden uno y para un haz de orden tres, con su respectivo frente de onda. Nótese que la región central es oscura.

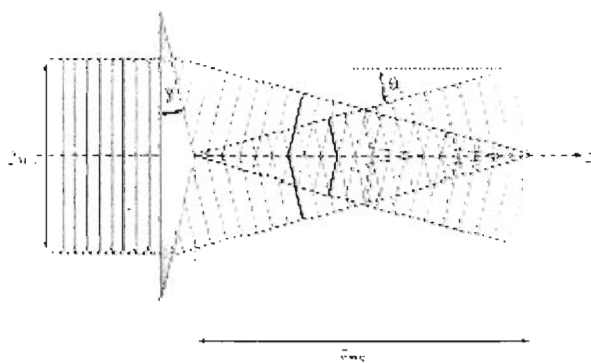


Figura 2.6: Generación de un haz Bessel de orden cero con un axicón. Nótese que el patrón de interferencia es el mismo que en la Fig. 2.4.

Bessel de la misma helicidad [19]. Esto es porque el axicón, dada su forma cónica, afecta solo la fase radial y longitudinal del haz incidente, pero no tiene influencia en la azimutal.

Para generar haces Bessel también se han usado elementos desarrollados con técnicas fotolitográficas [20]. En este caso se usa un elemento óptico plano, ésta componente óptica es denominada “trochoson”; es un dispositivo que sólo modula la fase. Su argumento de transmitancia tiene dos sumandos que dependen linealmente de la variable radial  $\rho$  y del ángulo polar  $\varphi$ ,  $\zeta(\rho, \varphi) = \exp[-i\alpha\rho + im\varphi]$ , donde  $m = 0, 1, 2, \dots$  y  $\alpha$  es el parámetro relacionado con el valor  $k_{\perp}$  del haz Bessel que deseamos generar. El propósito de emplear este elemento óptico de fase es producir haces de luz que virtualmente son una superposición de un número pequeño de haces Bessel. Esto se demuestra desarrollando la función  $\zeta(\rho, \varphi) = \exp[-i\alpha\rho + im\varphi]$  como serie de funciones de Bessel de orden  $m$ . Así en realizaciones específicas se obtiene el 80 por ciento de la energía en estos cuasi-modos con amplitud  $J_m(\alpha\rho)$  (haces de luz cuasi-Bessel).

Quizá, la técnica más usada hoy en día es la de *hologramas generados por computadora* [6], aquí la fase es el patrón más importante para generarlo. En una computadora (con un programa adecuado), se modela la interferencia de el haz de interés con una onda de referencia (onda plana, por ejemplo). El patrón de interferencia correspondiente se utiliza para construir físicamente éste patrón (en un negativo fotográfico, por ejemplo). Las franjas oscuras y brillantes harán el papel de un dispositivo modulador de amplitud. La técnica adecuada para generar un dispositivo modulador de fase corresponde a depositar de manera controlada un material con las características ópticas apropiadas sobre un sustrato que puede ser directamente el negativo fotográfico. Al dispositivo resultante se le conoce como placa holográfica.

# Capítulo 3

## Partícula cargada en un haz Bessel

### 3.1. Introducción

James Clerk Maxwell (1831-1879) expresó las ideas de Faraday en forma matemática; cuatro ecuaciones que abarcan los principios fundamentales de todos los aparatos electromagnéticos y ópticos en gran escala, también llegó a la conclusión de que la luz es de naturaleza electromagnética. Heinrich Hertz (1857-1894) produjo en el laboratorio ondas electromagnéticas (que hoy llamamos radio-ondas). Así, con las ecuaciones de Maxwell surgió gran interés en el ámbito de las aplicaciones. Un ejemplo contemporáneo: para implementar la comunicación entre una nave espacial y la Tierra la clave es entender el comportamiento del campo EM a ser utilizado. Los electrones que se mueven en los circuitos eléctricos de la nave espacial forman un campo EM, y las variaciones en su movimiento causan una perturbación en el campo que viaja a la velocidad de la luz. Posteriormente, electrones de otros circuitos en la Tierra detectan estos cambios en el campo y se mueven en consonancia con ellos.

Es, sin embargo, fundamental entender también el comportamiento de la materia en presencia de campos eléctricos y magnéticos. Así, la respuesta a campos eléctricos lleva a clasificar a los materiales como electretos, dieléctricos y conductores. Sin embargo, esta clasificación resulta burda para ciertos sistemas. Por ejemplo, un líquido conductor como el mercurio requiere para su descripción no sólo conocer su respuesta eléctrica sino también las ecuaciones

ciones de movimiento de un fluido (magnetohidrodinámica). Cabe señalar que la distinción entre un líquido conductor y un plasma se da por medio de la densidad de partículas cargadas (entre otras propiedades):  $10^{22}$  por centímetro cúbico, para un líquido conductor y una densidad de alrededor de  $10^{18}$  por centímetro cúbico o menores que esa cantidad, para un plasma. Un plasma es esencialmente un gas de partículas cargadas, electrones e iones, con una densidad de carga macroscópica nula. Al aplicar campos eléctricos, los electrones y los iones se aceleran en direcciones contrarias y tienden a separarse. Fuerzas electrostáticas restauradoras son activadas por esta separación y se generan oscilaciones del plasma. En un plasma, siempre están presentes átomos neutros, cuyos efectos suelen ser despreciados, así como la pérdida de energía y momentum por la radiación del campo. Similarmente suelen despreciarse efectos cuánticos (importantes solo para muy altas densidades y muy bajas temperaturas). Los plasmas presentan una serie de fenómenos únicos en la naturaleza que los hacen especialmente interesantes. Por ejemplo, en la ionósfera terrestre o en plasmas electrónicos tenues creados en laboratorio, los efectos de amortiguamiento de los electrones al responder a una onda electromagnética de una frecuencia dada suelen ser muy pequeños. El número de onda en el medio, satisface la relación de dispersión  $ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$  con la frecuencia de plasma  $\omega_p = 4\pi NZe^2/m$  que depende del número de electrones por unidad de volumen  $NZ$  y su masa individual  $m$ . Para frecuencias  $\omega$  inferiores a la frecuencia de plasma, el número de onda es puramente imaginario. Ondas incidentes de estas características son reflejadas por el plasma y los campos EM decrecen exponencialmente con la distancia a la superficie. Esta es la razón por la cual las ondas de radio son reflejadas en varias capas de la ionósfera (la ionización de las capas superiores de la ionósfera es producida por radiación ultravioleta) [21]. Asimismo, la expulsión de campos EM dentro de un plasma es un efecto bien conocido en procesos termonucleares y se trata de explotar en intentos para confinar plasmas calientes.

Estos ejemplos muestran que es muy importante caracterizar el movimiento de partículas cargadas en presencia de campos EM de distinta índole y que el estudio del comportamiento de partículas cargadas en haces Bessel pudiera encontrar alguna aplicación en sistemas altamente ionizados. En las próximas secciones realizaremos precisamente tal estudio. A continuación se deducen las ecuaciones de movimiento que gobiernan a una partícula cargada en interacción con los campos EM de un haz Bessel bajo el supuesto de que la emisión de radiación de la partícula (puntual) es despreciable. Pos-

teriormente estableceremos las cantidades conservadas en el caso en que la radiación incidente esté polarizada y calcularemos numéricamente las soluciones de las ecuaciones de movimiento con diversas condiciones a la frontera. Se dará énfasis a la búsqueda de condiciones que lleven a movimientos confinados aún en ausencia de campos magnéticos adicionales.

Cuando se añade un campo magnético uniforme, constante, se espera la modificación de las condiciones a la frontera para obtener trayectorias confinadas. Además en este caso existen dos unidades naturales de tiempo. Una asociada a la frecuencia del haz monocromático incidente y la otra a la frecuencia de ciclotrón. Estudiaremos la clase de efectos esperados en el caso particular en que estas frecuencias coinciden.

### 3.2. Ecuaciones de movimiento

Podemos identificar varios sistemas de referencia para describir a la partícula, uno de ellos es el de laboratorio, otro el sistema propio de la partícula y finalmente alguno en que la luz sea descrita por campos con una apariencia más sencilla que en estos. Tendremos por lo tanto, un tiempo propio ( $\tau$ ), un tiempo del Laboratorio ( $t$ ) y un tiempo ( $t'$ ) del último sistema que mencionamos y que puede ser aquel en que  $k_z = 0$ .

Para derivar las ecuaciones de movimiento utilizaremos la poderosa herramienta que provee el formalismo lagrangiano. Esto lo haremos primero en términos del tiempo propio y luego haremos una reparametrización de las trayectorias en términos del tiempo del laboratorio.

El lagrangiano que describe la interacción de una partícula cargada con campos EM está dado por:

$$L = -m_0 c \sqrt{\tilde{x}^\alpha \tilde{x}_\alpha} - \frac{e}{c} \tilde{x}_\alpha A^\alpha \quad (3.1)$$

donde  $m_0$  es la masa de la partícula,  $c$  la velocidad de la luz,  $e$  es la carga de la partícula,  $\tilde{x}^\alpha$  es la cuadrivelocidad de la partícula y  $A^\alpha$  es el cuadripotencial y para nuestro caso esas cantidades están dadas por

$$\tilde{x}^\alpha \longrightarrow (\tilde{x}_0, \tilde{\rho}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}) \quad \tilde{x}_\alpha \longrightarrow (\dot{x}_0, -\dot{\rho}, -\dot{\varphi}, -\dot{z}) \quad (3.2)$$

$$x^\alpha \longrightarrow (x_0, \rho, \varphi, z) \quad A^\alpha \longrightarrow (A_0, A_\rho, A_\varphi, A_z) \quad (3.3)$$

donde  $x_0 = ct$  y  $\dot{x}_0 = c \frac{dt}{d\tau}$ ,  $A_0 = \Phi$  y  $\ddot{x}^\alpha$  está definido como

$$\ddot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (3.4)$$

Las ecuaciones de movimiento son las de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (3.5)$$

Entonces el lagrangiano para una partícula cargada relativista en campos electromagnéticos externos, en coordenadas cilíndricas circulares tiene la siguiente forma

$$L = -m_0 c \sqrt{[\dot{x}_0^2 - (\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2)]} - \frac{e}{c} [\dot{x}_0 A_0 - \dot{\rho} A_\rho - \rho\dot{\varphi} (A_\varphi + \frac{\rho}{2} B_{zE}) - \dot{z} A_z] \quad (3.6)$$

Nótese que hemos incorporado la presencia de un campo magnético externo uniforme  $B_{zE}$  en la dirección axial.

Dado que,

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \ddot{x}^\alpha \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{[\dot{x}_0^2 - (\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2)]}} \quad (3.7)$$

donde  $\tilde{\gamma}$  es el factor cinemático, obtenemos que

$$\frac{d}{d\tau} (-m_0 c \dot{x}_0 \tilde{\gamma}) = -\frac{e}{c} [\vec{u}_s \cdot \vec{E}] \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m_0 c \dot{\rho} \tilde{\gamma}) - m_0 c \rho \dot{\varphi}^2 \tilde{\gamma} = \frac{e}{c} [\dot{x}_0 E_\rho + (\vec{u}_s \times \vec{B})_\rho] \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m_0 c \rho^2 \dot{\varphi} \tilde{\gamma}) = \frac{e}{c} [\rho \dot{x}_0 E_\varphi + \rho (\vec{u}_s \times \vec{B})_\varphi] \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m_0 c \dot{z} \tilde{\gamma}) = \frac{e}{c} [\dot{x}_0 E_z + (\vec{u}_s \times \vec{B})_z] \quad (3.11)$$

donde  $\vec{u}_s = (\dot{\rho}, \rho\dot{\varphi}, \dot{z})$ .

Inmediatamente se identifica la ecuación asociada a la evolución de la energía de la partícula (3.8) y la fuerza de Lorentz (3.9 - 3.11).



## 3.2.1. Cantidades conservadas

A continuación identificaremos las cantidades conservadas en este sistema (tiempo "τ"). Para ello, pondremos las ecuaciones en términos de los potenciales de Hertz; usando las ecuaciones (2.19 - 2.20), (3.6) y (3.5), las siguientes relaciones

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial \varphi} = -\frac{m}{k_t c} \frac{\partial \Pi_j}{\partial t} = im \Pi_j, \quad \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} = -\frac{k_z}{k_t c} \frac{\partial \Pi_j}{\partial t} = ik_z \Pi_j, \quad (3.12)$$

y la dependencia armónica en el tiempo de los potenciales de Hertz,  $\partial \Pi_j / \partial t = -ik_t c \Pi_j$ , con  $j = 1, 2$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange se reescriben en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left( \tilde{\gamma} c \frac{dt}{d\tau} - ik_z \frac{e}{m_0 c^2} \Pi_1 \right) = \\ & - \frac{e}{m_0 c^2} \left[ c \frac{dt}{d\tau} k_z k_t \Pi_1 + m k_t \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \Pi_2 + ik_t \rho \tilde{\varphi} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - k_t^2 \tilde{z} \Pi_1 \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} (\tilde{\gamma} \tilde{\rho}) = \tilde{\gamma} \rho \tilde{\varphi}^2 + \frac{e}{m_0 c^2} \rho \tilde{\varphi} B_{zE} - \\ & - \frac{e}{m_0 c^2} \left[ c \frac{dt}{d\tau} \left( k_t \frac{m}{\rho} \Pi_2 - ik_z \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} \right) + \rho \tilde{\varphi} \left( -\frac{m^2}{\rho^2} \Pi_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} \right) + \tilde{z} \left( -k_z \frac{m}{\rho} \Pi_2 + ik_t \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left[ \tilde{\gamma} \left( \rho^2 \tilde{\varphi} - c \frac{dt}{d\tau} \frac{m}{k_t} \right) + \frac{e}{m_0 c^2} \left( -\rho \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} + ik_z \frac{m}{k_t} \Pi_1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c^2} \rho^2 B_{zE} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \tilde{\gamma} \left( \tilde{z} - c \frac{dt}{d\tau} \frac{k_z}{k_t} \right) - i \frac{k_z^2}{k_t} \frac{e}{m_0 c^2} \Pi_1 \right] = 0. \quad (3.16)$$

Recuerde que  $k_{\perp}^2 = (\omega/c)^2 - k_z^2$ ,  $\omega = k_t c$ .

Para obtener las ecuaciones (3.15) y (3.16) utilizamos también las ecuaciones (3.12) y (3.13). Estas últimas ecuaciones (3.15 - 3.16) nos definen directamente cantidades conservadas puesto que tenemos la derivada total con

respecto al tiempo igual a cero. Su interpretación física es directa: la ecuación (3.15) está relacionada con el momentum angular a lo largo del eje  $z$  y la (3.16) con el momentum lineal a lo largo de ese mismo eje. Explícitamente en la ecuación (3.15) tenemos:

- el momentum angular que la luz le da a la partícula,

$$(e/\tilde{\gamma}c^2)(-\rho(\partial\Pi_2)/(\partial\rho) + ik_z(m/k_l)\Pi_1),$$

- el momentum angular efectivo de la partícula,

$$\tilde{\gamma}m_0(\rho^2\dot{\tilde{\varphi}} - c(dt/d\tau)(m/k_l)),$$

- el del campo magnético uniforme,

$$(e\rho^2/2\tilde{\gamma}c^2)B_zE.$$

Mientras que en la ecuación (3.16) tenemos:

- el momentum lineal efectivo de la partícula a lo largo de la dirección del eje  $z$ ,

$$m_0(\dot{\tilde{z}} - c(dt/d\tau)(k_z/k_l)),$$

- el momentum lineal que la luz le da a la partícula,

$$i(k_l^2/k_l)(e/\tilde{\gamma}c^2)\Pi_1.$$

Ahora reparametrizamos las ecuaciones al tiempo del laboratorio, para esto se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \dot{\rho} & \dot{\tilde{\varphi}} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \dot{\varphi} & \dot{\tilde{z}} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{dz}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \dot{z} \\ \tilde{\gamma} &= \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\frac{dt}{d\tau}}; & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{\tilde{\rho}}^2 + (\rho\dot{\tilde{\varphi}})^2 + \dot{\tilde{z}}^2)}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\gamma$  es el factor cinemático. Las ecuaciones de movimiento que obtenemos son:

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma - ik_z \frac{e}{m_0 c^2} \Pi_1 \right) =$$

$$-\frac{e}{m_0 c^2} \left[ c k_z k_l \Pi_1 + m k_l \frac{\dot{\rho}}{\rho} \Pi_2 + i k_l \rho \dot{\varphi} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - k_l^2 \dot{z} \Pi_1 \right], \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma}{c} \dot{\rho} \right) = \frac{\gamma}{c} \rho \dot{\varphi}^2 + \frac{e}{m_0 c^2} \rho \dot{\varphi} B_z \mathcal{E} - \frac{e}{m_0 c^2} \left[ \frac{k_\perp^2}{k_z} \Pi_2 \right] \times \\ \left[ c \left( k_l \frac{m}{\rho} \Pi_2 - i k_z \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} \right) - \rho \dot{\varphi} k_\perp^2 \Pi_2 + \dot{z} \left( -k_z \frac{m}{\rho} \Pi_2 + i k_l \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} \right) \right], \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\gamma}{c} \left( \rho^2 \dot{\varphi} - c \frac{m}{k_l} \right) + \frac{e}{m_0 c^2} \left( -\rho \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} + i k_z \frac{m}{k_l} \Pi_1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{e}{m_0 c^2} \rho^2 B_z \mathcal{E} \right] = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\gamma}{c} \left( \dot{z} - c \frac{k_z}{k_l} \right) - i \frac{k_\perp^2}{k_l} \frac{e}{m_0 c^2} \Pi_1 \right] = 0. \quad (3.21)$$

Etiquetemos a las constantes de movimiento. De las ecuaciones (3.20) y (3.21) tenemos que integrando con respecto al tiempo y despejando  $m_0 \rho^2 \dot{\varphi}$  y  $m_0 \dot{z}$  encontramos:

$$m_0 \rho^2 \dot{\varphi} = \frac{L_z}{\gamma} + m_0 \frac{m c}{k_l} + \frac{e \rho}{\gamma c} \left( \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - i \frac{m k_z}{\rho k_l} \Pi_1 \right) - \frac{1}{2} \frac{e}{\gamma c} \rho^2 B_z \mathcal{E} \quad (3.22)$$

$$m_0 \dot{z} = \frac{P_z}{\gamma} + m_0 \frac{c k_z}{k_l} + i \frac{e}{\gamma c} \frac{k_\perp^2}{k_l} \Pi_1 \quad (3.23)$$

donde  $L_z$  y  $P_z$  son constantes (el momentum angular y lineal, respectivamente) y  $\gamma$  es el factor cinemático.

Además  $d\Pi_1/dt = -i k_l c \Pi_1 + \rho (\partial \Pi_1 / \partial \rho) + \rho \dot{\varphi} (i m / \rho) \Pi_1 + \dot{z} i k_z \Pi_1$ , y sustituyendo las ecuaciones (3.22 - 3.23) en (3.18 - 3.19) en términos de los potenciales de Hertz resulta

$$\dot{\gamma} = \frac{e}{m_0 c^2} \dot{\rho} \left[ i k_z \frac{\partial \Pi_\parallel}{\partial \rho} - k_l \frac{m}{\rho} \Pi_2 \right] + \\ + \frac{e}{m_0 c^2} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} + \frac{m c}{k_l \rho} + \frac{e}{\gamma m_0 c} \left( \frac{\partial \Pi_\perp}{\partial \rho} - i \frac{m k_z}{\rho k_l} \Pi_1 \right) \right] -$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho B_z \varepsilon \left[ -i k_t \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - k_z \frac{m}{\rho} \Pi_1 \right] + \\ & + \frac{e}{m_0 c^2} \left[ \frac{P_z}{\gamma m_0} + \frac{k_z c}{k_t} + i \frac{e}{\gamma m_0 c} \frac{k_\perp^2}{k_t} \Pi_1 \right] \left( k_\perp^2 \Pi_1 \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{\rho} + \frac{e}{\gamma m_0 c^2} \left[ c^2 \left( i k_z \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} - k_t \frac{m}{\rho} \Pi_2 \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} + \frac{m c}{k_t \rho} + \frac{e}{\gamma m_0 c} \left( \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - i \frac{m}{\rho} \frac{k_z}{k_t} \Pi_1 \right) - \frac{1}{2} \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho B_z \varepsilon \right]^2 + \\ & + \frac{e}{\gamma m_0 c^2} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} + \frac{m c}{k_t \rho} + \frac{e}{\gamma m_0 c} \left( \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - i \frac{m}{\rho} \frac{k_z}{k_t} \Pi_1 \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho B_z \varepsilon \right] \left[ -c \left( \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} - \left( \frac{m}{\rho} \right)^2 \Pi_2 - B_z \varepsilon \right) \right] + \\ & + \frac{e}{\gamma m_0 c^2} \left[ \frac{P_z}{\gamma m_0} + \frac{c k_z}{k_t} + i \frac{e}{\gamma m_0 c} \frac{k_\perp^2}{k_t} \Pi_1 \right] \left[ -c \left( i k_t \frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} - k_z \frac{m}{\rho} \Pi_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Al identificar las constantes de movimiento  $L_z$  y  $P_z$  además de identificar variables dinámicas naturales hemos reducido el número de ecuaciones de movimiento a sólo dos ecuaciones diferenciales acopladas. Recordemos que al tratarse de un problema con campos dependientes del tiempo la variable que pudiésemos considerar análoga a la energía a través del hamiltoniano  $H$  no es constante de movimiento.

### 3.3. Solución numérica de las ecuaciones

#### 3.3.1. Polarización TE

Haciendo uso de las ecuaciones de movimiento (3.8 - 3.11), reparametrizándolas en términos del tiempo de laboratorio, y dado que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  para los modos TE, tienen la forma (2.29) y (2.30), obtenemos:

$$\ddot{\rho} = \frac{e E_0}{\gamma m_0 c} \left[ \left( \frac{k_z}{k_t} \dot{z} - c \right) \frac{n_z}{k_\perp \rho} J_n(k_\perp \rho) + \rho \frac{k_\perp}{k_t} \dot{\varphi} J_m(k_\perp \rho) \right] \cos(k_z z + m \varphi)$$

$$\begin{aligned}
& -\omega t) + \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho \dot{\varphi} B_{zE} + \rho \dot{\varphi}^2 + \\
& + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\rho} \left[ \dot{\rho} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \\
& \left. - \rho \dot{\varphi} J'_m(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) \right], \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} = & -\frac{e}{\gamma m_0 c} \frac{1}{\rho} \dot{\rho} B_{zE} - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c} \frac{1}{\rho} \times \\
& \left[ \left( c - \frac{k_z}{k_t} \dot{z} \right) J'_m(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \\
& \left. \frac{k_{\perp}}{k_t} \dot{\rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) \right] + \\
& + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\varphi} \left[ \dot{\rho} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \\
& \left. - \rho \dot{\varphi} J'_m(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) \right], \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{z} = & \frac{e E_0}{\gamma m_0 c} \frac{k_z}{k_t} \left[ -\dot{\rho} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) + \right. \\
& \left. + \rho \dot{\varphi} J'_m(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) \right] + \\
& + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{z} \left[ \dot{\rho} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \\
& \left. - \rho \dot{\varphi} J'_m(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) \right]. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Analizaremos primeramente la situación en que no hay campo magnético externo,  $B_{zE} = 0$ , resaltando así los efectos que, sobre la partícula, ejerce el campo EM de un haz Bessel con polarización TE. Consideremos un sistema de referencia inercial arbitrario y realicemos un cambio a un sistema que se mueve a lo largo de la dirección del eje  $z$  con una velocidad  $v = k_z/k_t$  respecto al sistema original. En el nuevo sistema inercial  $k_z = 0$ . Al principio de este capítulo mencionamos un tiempo que llamamos  $t'$  medido en esta clase de sistemas "privilegiados". En lo que resta de esta sección las ecuaciones de movimiento estarán parametrizadas por este tiempo que denotaremos simplemente por  $t$ . La elección del sistema inercial en que  $k_z = 0$  lleva a una simplificación considerable tanto de la forma que toman las ecuaciones de

movimiento como de la expresión para las cantidades conservadas. Por ejemplo, para  $m = 0$  el potencial de Hertz TE ya no depende ni de  $\varphi$  ni de  $z$  y en consecuencia

$$A_\varphi = \frac{E_0}{k_t} J_1(k_\perp \rho) \cos(k_t ct) \quad (3.29)$$

es la única componente de  $A^\mu$  distinta de cero.

Las ecuaciones de movimiento para  $\varphi$  y para  $z$ , en estas circunstancias, se pueden escribir como

$$(\rho\dot{\varphi})^2 = \frac{l^2 c^2}{m_0^2 c^2 + P_z^2 + l^2} \left( 1 - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2} \right) \quad (3.30)$$

$$P_z = \gamma m_0 \dot{z} \quad (3.31)$$

$$\dot{z}^2 = \frac{P_z^2 c^2}{m_0^2 c^2 + P_z^2} \left[ 1 - \frac{1}{c^2} (\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2) \right] \quad (3.32)$$

con

$$l = \frac{L_z}{\rho} - \frac{e}{c} A_\varphi \quad L_z = \gamma m_0 \rho (\rho\dot{\varphi}) + \frac{e}{c} \rho A_\varphi \quad (3.33)$$

Haciendo la sustitución de  $\dot{z}$ ,  $\rho\dot{\varphi}$  y  $\gamma$ , las ecuaciones restantes sólo dependen de  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  y  $t$ , y de algunas constantes. Explícitamente para el caso  $m = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & \frac{e_0}{(a\gamma)^2} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{k_\perp}{k_t} \frac{L_z}{m_0} J_0(k_\perp \rho) \cos(k_t ct) - \right. \\ & \left. - \frac{e_0}{k_t} \frac{k_\perp}{k_t} J_0(k_\perp \rho) J_1(k_\perp \rho) \cos^2(k_t ct) \right] + \\ & \frac{e_0}{(a\gamma)^2} \left[ + \frac{1}{\rho c} \frac{L_z}{m_0} \dot{\rho} J_1(k_\perp \rho) \text{sen}(-k_t ct) - \right. \\ & \left. - \frac{e_0}{k_t ct} \dot{\rho} J_1^2(k_\perp \rho) \text{sen}(-k_t ct) \cos(k_t ct) \right] + \\ & + \frac{e_0}{(a\gamma)^2} \left[ \frac{1}{e_0} \left( \frac{L_z}{m_0} \right)^2 \frac{1}{\rho^3} - \frac{2}{k_t \rho^2} \frac{L_z}{m_0} J_1(k_\perp \rho) \cos(k_t ct) + \right. \\ & \left. + \frac{e_0}{k_t^2 \rho} J_1^2(k_\perp \rho) \cos^2(k_t ct) \right], \quad (3.34) \end{aligned}$$

donde  $e_0 = eE_0/m_0c$ , y

$$(a\gamma) = \left[ \frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + P_z^2 + l^2} \left( 1 - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

Este conjunto de ecuaciones acopladas se resuelven numéricamente utilizando el programa **DE** desarrollado en la Universidad de Florida. El método de integración es de predicción-corrección. Los resultados evidentemente dependen del valor de las condiciones iniciales (CI) y las constantes físicas. En los ejemplos a ser reportados hemos elegido los valores:  $k_{\perp} = 1$  (lo cual establece  $1/k_{\perp}$  como unidad de longitud),  $c = 1$  (lo cual establece a  $1/(k_{\perp}c)$  como unidad de tiempo). Observamos que  $e_0/ck_{\perp} = eE_0/m_0k_{\perp}c^2$  es un parámetro adimensional. Los láseres más intensos obtenibles a la fecha [2] involucran intensidades  $I_{las}$  del orden de  $10^{18}$  Watts/cm<sup>2</sup> y hasta  $10^{21}$  Watts/cm<sup>2</sup>, denotaremos las primeras intensidades como  $I_{las}^{(18)} \sim 10^{18}$  Watts sobre cm<sup>2</sup>. Estos láseres son pulsados con una duración de cientos de femtosegundos. El parámetro adimensional se escribe entonces como

$$\frac{e_0}{ck_{\perp}} \sim \sqrt{144 I_{las}^{18}/k_{\perp}^2} \quad (3.36)$$

para un electrón. En circunstancias límite se ha obtenido  $e_0/\omega$  del orden de 3. En nuestros ejemplos tomaremos a  $e_0/ck_{\perp} = 0.2$ , lo cual en principio hace factible la posibilidad de realizar experimentos asociados a este sistema. Cabe destacar que probablemente tal onda EM estaría fuera del límite paraxial.

Elegimos como condiciones iniciales fijas  $\dot{\rho}(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0.1$ , y  $\varphi(0) = z(0) = 0$  en los resultados a ser reportados, mientras que exploraremos diversas  $\rho(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$ . En general, encontramos que existen valores de CI para los que la partícula realiza un movimiento en una región radial finita, mientras que para otros valores la partícula a partir de un cierto tiempo se aleja del eje de simetría. Esto se ilustra en la Fig. 3.1.

Vemos que un ligero cambio en la condición inicial  $\rho(0)$  (manteniendo el mismo valor para las otras CI) lleva a una trayectoria cualitativamente distinta. Así si  $0 < k_{\perp}\rho(0) \leq 0.774$ , entonces la trayectoria está dentro de un anillo y se dice que la partícula se encuentra confinada y, si  $0.775 \leq k_{\perp}\rho(0) \leq 3.277$ , entonces la trayectoria es una línea cuasirrecta a tiempos largos y se dice que la partícula no se encuentra confinada o simplemente, la partícula se escapa. Recuerde que  $k_{\perp} = 1$ , entonces, para los intervalos de confinamiento y

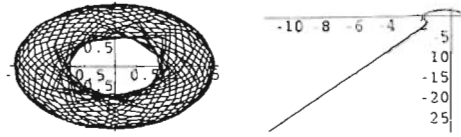


Figura 3.1: Proyección (en el plano  $XY$ ) de la trayectoria de la partícula (polarización TE) con:  $m = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $dt = 10/(k_{\perp}c)$ . Si  $\rho(0) = 0.774$ , entonces la trayectoria es un anillo (partícula confinada) y si  $\rho(0) = 0.775$ , la trayectoria es una línea cuasirrecta a tiempos largos (partícula no confinada).

no confinamiento (registrados en las Tablas) los expresamos sólo en términos de  $\rho(0)$  y no con  $k_{\perp}\rho(0)$  (argumento de las  $J$ 's).

Es importante resaltar que aunque los datos numéricos dependan del sistema de referencia, la posibilidad de permanecer atrapada ó no atrapada es independiente del sistema inercial de descripción. Si el valor de  $\rho(0)$  en el sistema en que  $k_z = 0$  se encuentra dentro del intervalo, por ejemplo  $(0, 0.774]$  (región central) la partícula se encuentra confinada en una región limitada por dos círculos concéntricos, pero si  $\rho(0)$  se encuentra en el intervalo  $[8.3, 9.4149]$  la partícula no se encuentra atrapada (se escapa), es decir, se aleja cada vez más del centro de simetría del haz como se observa en las gráficas.

Estas regiones anulares (intervalos) de confinamiento y no confinamiento, no varían mucho si cambiamos ligeramente el valor de  $\dot{\varphi}(0)$ . Para  $\dot{\varphi}(0) = 0$  los resultados que obtenemos los resumimos en la Tabla (3.1). Mientras que para  $\dot{\varphi} = 0.001$  en la Tabla (3.2). Comparando las Tablas (3.1 - 3.2), vemos que el primer intervalo de confinamiento disminuyó ligeramente (región central,  $(0, 0.767]$ ). Además, observamos que la distancia entre el inicio del segundo intervalo de confinamiento (3.30) y el tercero (6.29) es parecida a la distancia de separación entre el inicio del tercero (6.29) y el cuarto (9.51), y así sucesivamente. Notamos que ésta separación es semejante a la que tienen los ceros de la función de Bessel  $J_0(k_{\perp}\rho)$  (ver Tabla 3.3).

Ahora ilustremos las trayectorias asociadas a la velocidad angular ( $\rho\dot{\varphi}$ ).  $\dot{\varphi}(0) = 0.001$  (Fig. 3.2) para valores cercanos a la frontera entre la primera re-



Atrapada			No Atrapada		
0	$< \rho(0) \leq$	0.774	0.775	$\leq \rho(0) \leq$	3.277
3.278	$\leq \rho(0) \leq$	4.944	4.946	$\leq \rho(0) \leq$	6.337
6.338	$\leq \rho(0) \leq$	8.297	8.3	$\leq \rho(0) \leq$	9.4149
9.415	$\leq \rho(0) \leq$	11.532	11.533	$\leq \rho(0) \leq$	12.505
12.506	$\leq \rho(0) \leq$	14.726	14.727	$\leq \rho(0) \leq$	15.605
15.606	$\leq \rho(0) \leq$	17.90			

Tabla 3.1:  $m = 0$  y  $\dot{\varphi}(0) = 0$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización TE.

Atrapada			No Atrapada		
0	$< \rho(0) \leq$	0.767	0.768	$\leq \rho(0) \leq$	3.29
3.30	$\leq \rho(0) \leq$	4.99	5.0	$\leq \rho(0) \leq$	6.28
6.29	$\leq \rho(0) \leq$	8.21	8.22	$\leq \rho(0) \leq$	9.50
9.51	$\leq \rho(0) \leq$	11.60	11.61	$\leq \rho(0) \leq$	12.37
12.38	$\leq \rho(0) \leq$	14.61	14.62	$\leq \rho(0) \leq$	15.78
15.79	$\leq \rho(0) \leq$	17.98			

Tabla 3.2:  $m = 0$  y  $\dot{\varphi}(0) = 0.001$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización TE.

No.de cero	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094

Tabla 3.3: Ceros de las funciones de Bessel:  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$ .

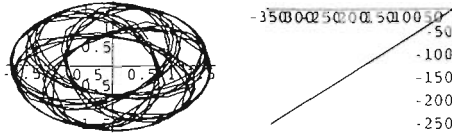


Figura 3.2: Trayectoria en el plano  $XY$  (TE) con:  $m = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0.001$ ,  $dt = 10/(k_{\perp}c)$ . Para  $\rho(0) = 0.767$  (izq.) y  $\rho(0) = 0.768$  (der.).

gión (región central de confinamiento) y la segunda región (región de no confinamiento). Observamos que la región de confinamiento (la donita) está bien definida por dos círculos concéntricos, y si se varía un tanto el valor de  $\rho(0)$  se obtiene una trayectoria no confinada, como en el caso anterior.

Para  $m = 0$  la ecuación (3.34) no involucra más que a la misma  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  y al tiempo. Un análisis numérico de la contribución a la fuerza radial de los términos dependientes de la velocidad  $\dot{\rho}$ , muestra que, para el rango de condiciones explorado, esta es muy pequeña comparada con los demás términos. Lo cual nos lleva a buscar un pseudopotencial (dependiente del tiempo) efectivo ( $V_{eff}$ ), que nos permita visualizar de una manera más fácil lo que ocurre en este problema. La idea es tener una función cuyo gradiente con respecto a  $\rho$  nos determine la fuerza en la cual la partícula cargada se moverá. Basta entonces integrar los términos independientes de la velocidad respecto a  $\rho$  en la ecuación (3.34). Este potencial dependerá de los valores de las cantidades conservadas  $L_z$  y  $P_z$  que a su vez quedan determinadas por  $\rho(0)$  y  $\dot{\varphi}(0)$ . La expresión de este pseudopotencial es:

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{e_0 L_z k_{\perp}^2}{(a\gamma)^2 m_0 k_t} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(k_t c t) + \frac{e_0^2 k_{\perp}}{((a\gamma)k_t)^2 \rho} J_1^2(k_{\perp} \rho) \cos^2(k_t c t) + \frac{L_z^2}{2((a\gamma)m_0)^2} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.37)$$

En la Fig. 3.3 se ilustran las gráficas de este potencial como función de  $\rho$  y su evolución en el tiempo, en ellas se tomó  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Observemos que para  $\rho(0)$  cercana al cero, la partícula verá barreras del

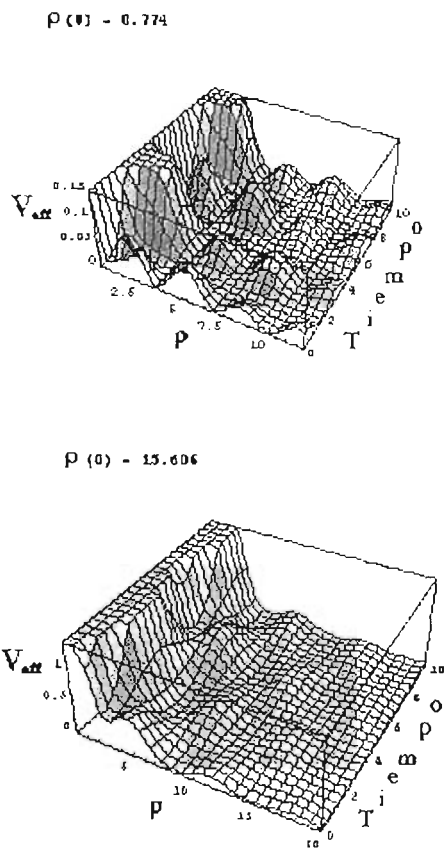


Figura 3.3: Pseudo-potencial,  $V_{eff}$  (evolución temporal), con el valor de  $\rho(0) = 0.774$  y  $\rho(0) = 15.606$ , de arriba a abajo, respectivamente.

Atrapada		$m = 2$	No Atrapada	
0	$< \rho(0) \leq 1.22$		1.23	$\leq \rho(0) \leq 2.89$
2.90	$\leq \rho(0) \leq 3.96$		3.97	$\leq \rho(0) \leq 6.01$
6.02	$\leq \rho(0) \leq 7.98$		7.99	$\leq \rho(0) \leq 9.21$
9.22	$\leq \rho(0) \leq 11.34$			

Tabla 3.4:  $m = 2$ , en términos de  $\rho(0)$ . Polarización TE.

potencial (montañas) muy altas y alineadas a lo largo del tiempo (una especie de carriles), y conforme la CI se aleja del centro ( $\rho(0) = 15.606$ ), las montañas ya no están alineadas (no hay carriles). También, notamos que a medida que avanza el tiempo, esas montañas varían su altura y la partícula tiene la posibilidad de sobrepasar una de esas montañas (es cuando se escapa). Así, hay regiones en donde la partícula se encuentra en medio de dos montañas y para un tiempo posterior (con la misma coordenada espacial), se encuentra con una montaña y dos valles a un lado de ésta, la pregunta es ¿Cuál de los dos caminos (valles) eligirá la partícula para continuar su trayectoria? ¿Llegará un momento en que la energía efectiva de la partícula sobrepase una de esas barreras (que varían en el tiempo) y se escape? y ¿Para un tiempo posterior quedará otra vez confinada? Hasta el momento no hemos podido encontrar una forma sistemática de dar una respuesta a estas preguntas.

En los casos con  $m \neq 0$  las ecuaciones no son tan simples como para  $m = 0$ . Sin embargo, la solución numérica se obtiene en forma análoga. Cabe mencionar que los resultados para el caso con  $m = 1$ , están después de los resultados con  $m = 4$ . Algunos resultados para los casos  $m = 2$ ,  $m = 3$  y  $m = 4$  se reportan a continuación, se tomó  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Observamos en la Tabla (3.4) que la región central (de confinamiento),  $(0, 1.22]$ , aumentó con respecto a la que se tiene en el caso de  $m = 0$ ,  $(0, 0.774]$ . También observamos, que a medida que nos alejamos del centro del haz, la anchura de la región de confinamiento aumenta, comparada con la anchura de la región central.

Las trayectorias que toma la partícula se ilustran en la Fig. 3.4. La región anular en donde la partícula se encuentra restringida a moverse, aumenta si nos alejamos del centro del haz. Así, para la primera región de confinamiento la región anular está definida por dos círculos cuyos radios son  $\rho_1 = 1.2$  y  $\rho_2 = 1.6$  aproximadamente. Y para el valor de  $\rho(0) = 7.98$ , los radios que definen la región anular son  $\rho_1 \sim 6.5$  y  $\rho_2 \sim 8.0$ .

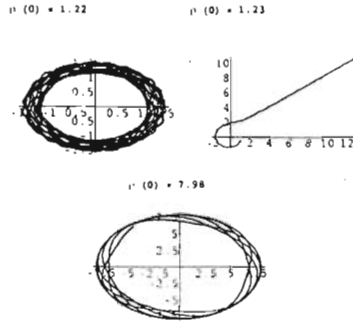


Figura 3.4: Trayectoria (XY) (TE) con:  $m = 2$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\rho(0) = 1.22$  (confinamiento), y  $\rho(0) = 1.23$  (no confinamiento). Y  $\rho(0) = 7.98$ .

Atrapada		$m = 3$	No Atrapada	
0	$< \rho(0) \leq 2.94$		2.95	$\leq \rho(0) \leq 4.31$
4.32	$\leq \rho(0) \leq 5.03$		5.04	$\leq \rho(0) \leq 7.28$
7.29	$\leq \rho(0) \leq 9.34$		9.36	$\leq \rho(0) \leq 10.56$
10.57	$\leq \rho(0) \leq 12.75$			

Tabla 3.5:  $m = 3$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización TE.

Al aumentar el orden del haz a  $m = 3$  las trayectorias son semejantes a las encontradas para el caso  $m = 0$  y  $m = 2$  (ver Tabla 3.5). En este caso, si  $\rho(0)$  está lejos del centro del haz, la región anular de confinamiento aumenta, por ejemplo  $[10.57, 12.75]$ , pero, aún no alcanza la anchura de la región central,  $(0, 2.94]$ .

En la Fig. 3.5 se observa que la región anular de confinamiento aumentó como se esperaba, y mientras nos alejamos del centro, las regiones de confinamiento, también aumentan.

Algo semejante ocurre para  $m = 4$  (Tabla 3.6 y Fig. 3.6). Parece que la región central,  $(0, 4.37]$ , es un máximo para las regiones de confinamiento con  $m = 4$ . Conforme aumenta el orden  $m$  del haz, aumenta la región central.

Los ceros de la función de Bessel correspondiente para  $m > 0$ , parecen también ser relevantes. La región de no confinamiento se hace más delgada,

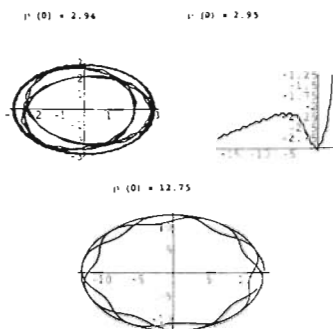


Figura 3.5: Trayectoria  $(XY)$  (TE) con:  $m = 3$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $\rho(0) = 2.94$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 2.95$  (no confinamiento), y  $\rho(0) = 12.75$ .

Atrapada		$m = 4$	No Atrapada	
0	$< \rho(0) \leq 4.37$		4.38	$\leq \rho(0) \leq 8.51$
8.52	$\leq \rho(0) \leq 10.66$			

Tabla 3.6:  $m = 4$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización TE.

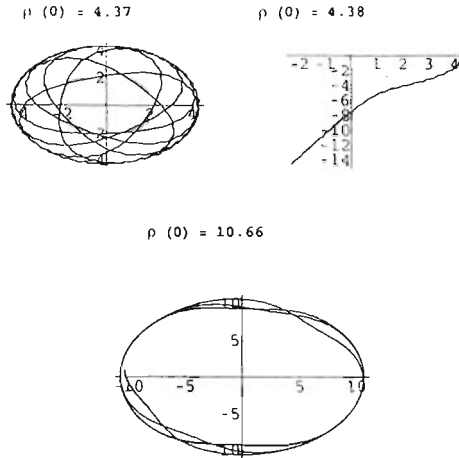


Figura 3.6: Trayectoria  $(XY)$  (TE) con:  $m = 4$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\rho(0) = 4.37$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 4.38$  (no confinamiento) y  $\rho(0) = 10.66$ .

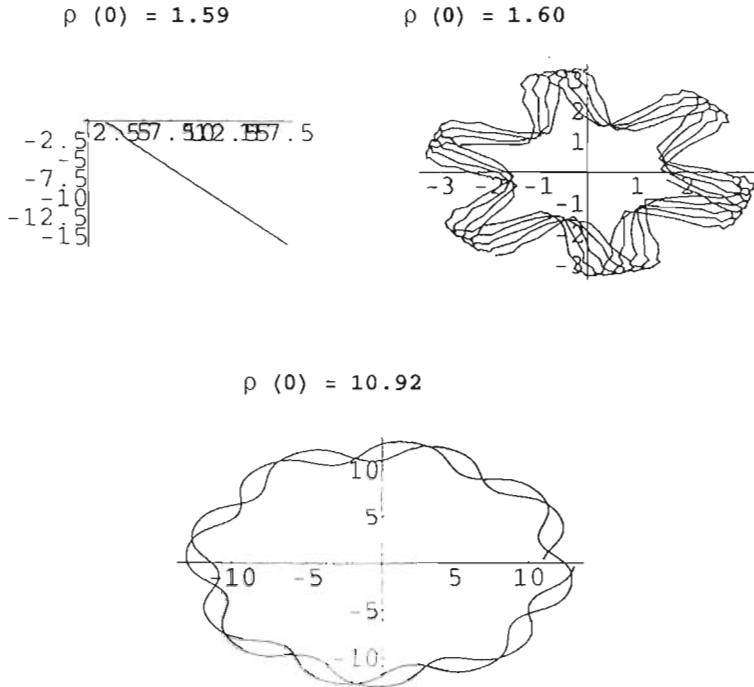
para valores más alejados del centro del haz, tanto para  $m = 3$  como para  $m = 4$ .

¿Qué pasa con el caso  $m = 1$ ? Bien, este es un caso especial debido a que hay un cambio cualitativo en los resultados obtenidos comparándolos con los casos anteriores: en los casos  $m = 0, 2, 3$  y  $4$  la vecindad de  $\rho(0)$  alrededor de cero es una región de confinamiento y para el caso en el que  $m = 1$  es una región de no confinamiento. Esto se muestra en la Tabla (3.7) ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ ).

Las trayectorias (ver Fig. 3.7) no son cualitativamente distintas a las obtenidas en los casos anteriores. Una vez más, la región de confinamiento anular es mayor cuando nos alejamos del centro del haz.

¿Por qué se inicia con un intervalo de no confinamiento? ¿Qué pasa para esos valores pequeños de  $\rho$ ? Para comprender lo que sucede en este intervalo, lo que analizaremos será la forma que tienen las funciones de Bessel en el límite en que  $\rho \ll 1$ . Sustituyendo  $k_z = 0$  y  $m = 1$  en las ecuaciones de movimiento (3.26 - 3.28) tenemos:

Atrapada		$m = 1$	No Atrapada	
			$0 < \rho(0) \leq 1.59$	
1.60	$\leq \rho(0) \leq 2.66$		2.67	$\leq \rho(0) \leq 4.69$
4.70	$\leq \rho(0) \leq 6.54$		6.55	$\leq \rho(0) \leq 7.82$
7.83	$\leq \rho(0) \leq 9.86$		9.88	$\leq \rho(0) \leq 10.91$
10.92	$\leq \rho(0) \leq 13.09$			

Tabla 3.7:  $m = 1$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización TE.Figura 3.7: Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con:  $m = 1$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\rho(0) = 1.59$  (no confinamiento) y  $\rho(0) = 1.60$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 10.92$ .



$$\ddot{\rho} = \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \left[ -c \frac{1}{k_{\perp} \rho} J_1(k_{\perp} \rho) + \rho \dot{\varphi} \frac{k_{\perp}}{k_t} J_1(k_{\perp} \rho) \right] \cos(\varphi - k_t ct) + \rho \dot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \rho \dot{\varphi} B_z E + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\rho} \left[ \dot{\rho} \frac{1}{k_{\perp} \rho} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi - k_t ct) - \right.$$

$$\left. - \rho \dot{\varphi} J_1'(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(\varphi - k_t ct) \right] \quad (3.38)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \frac{1}{\rho} \left[ c J_1'(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(\varphi - k_t ct) - \frac{k_{\perp}}{k_t} \dot{\rho} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi - k_t ct) - \right.$$

$$\left. - \dot{\rho} B_z E \right] - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\varphi} \left[ \dot{\rho} \frac{1}{k_{\perp} \rho} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi - k_t ct) - \right.$$

$$\left. + \rho \dot{\varphi} J_1'(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(\varphi - k_t ct) \right] \quad (3.39)$$

$$\ddot{z} = \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{z} \left[ \dot{\rho} \frac{1}{k_{\perp} \rho} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi - k_t ct) - \rho \dot{\varphi} J_1'(k_{\perp} \rho) \operatorname{sen}(\varphi - k_t ct) \right] \quad (3.40)$$

Nos interesa el caso en el que  $\rho \ll 1$ , y sabemos que:

$$J_m(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m + \dots = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m + \dots \quad (3.41)$$

de tal suerte que sólo  $J_0$  es diferente de cero en el origen. Fijemos nuestra atención en  $J_0(k_{\perp} \rho)$  y  $J_2(k_{\perp} \rho)$  ya que usando propiedades de la función de Bessel, transformamos adecuadamente los términos  $(1/k_{\perp} \rho) J_1(k_{\perp} \rho)$  y  $J_1'(k_{\perp} \rho)$  en combinaciones lineales de  $J_0(k_{\perp} \rho)$  y  $J_2(k_{\perp} \rho)$ .

$$J_0(x) \rightarrow 1 \quad J_1(x) \rightarrow \frac{x}{2} \quad J_2(x) \rightarrow \frac{x^2}{8}. \quad (3.42)$$

Entonces

$$\ddot{\rho} \sim \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \left[ -c \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{8} \right) + \rho \dot{\varphi} \frac{k_{\perp}}{k_t} \frac{\rho}{2} \right] \cos(\varphi - k_t ct) + \rho \dot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho \dot{\varphi} B_z E + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\rho} \left[ \dot{\rho} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{8} \right) \cos(\varphi - k_t ct) - \right.$$

$$-\rho\dot{\varphi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho^2}{8}\right)\text{sen}(\varphi-k_t ct)] \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} \sim \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \frac{1}{\rho} \left[ c \left( 1 + \frac{\rho^2}{8} \right) \text{sen}(\varphi - k_t ct) - \frac{k_{\perp}}{k_t} \rho \frac{\rho}{2} \cos(\varphi - k_t ct) \right] - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} - \\ - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \frac{1}{\rho} \dot{\rho} B_{zE} + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\varphi} \left[ \dot{\rho} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{8} \right) \cos(\varphi - k_t ct) - \right. \\ \left. - \rho \dot{\varphi} \left( 1 - \frac{\rho^2}{8} \right) \text{sen}(\varphi - k_t ct) \right] \quad (3.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} \sim \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{z} \left[ \dot{\rho} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{8} \right) \cos(\varphi - k_t ct) - \right. \\ \left. - \rho \dot{\varphi} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho^2}{8} \right) \text{sen}(\varphi - k_t ct) \right]. \quad (3.45) \end{aligned}$$

Observamos que  $\ddot{\varphi}$  es singular para  $\rho = 0$ , debido al término de  $1/\rho$ . Inicialmente  $\ddot{\rho}$  no se anula, debido al término:  $-[eE_0/(2\gamma m_0)]|\cos(\varphi - k_t ct)|$ , pero  $\ddot{\varphi}$  es singular, esto ocasiona un cambio en  $\dot{\varphi}$ ,  $\varphi$  y estos ocasionarán a su vez cambios en  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$  y  $\rho$ . Entonces podemos resumir que pequeños cambios en  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{\rho}$  producen fuertes cambios en  $\ddot{\varphi}$  y  $\ddot{\rho}$ . Para comprender mejor el análisis observemos las gráficas de  $\rho(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\rho}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$  y  $\ddot{\rho}(t)$  (ver Fig. 3.8, en la siguiente página, allí el eje horizontal es el tiempo).

La gráfica de  $\ddot{\rho}$  se inicia con un valor negativo, por lo tanto la partícula es atraída hacia el centro del haz, esto aumenta la aceleración centrífuga hasta que la partícula experimenta una fuerza radial positiva y es empujada lejos del centro (ver  $\rho$  contra  $t$ ). Vemos en la gráfica de  $\ddot{\varphi}$  que esta decrece hasta alcanzar un mínimo (negativo). Esto sucede en el mismo tiempo en que  $\dot{\rho} = 0$ . El valor de  $\ddot{\varphi}$  aumenta hasta un valor máximo, que es simultáneo a cuando  $\dot{\rho}$  lo alcanza. Para un tiempo posterior, cuando  $\ddot{\varphi}$  vuelve a ser cero, el valor de  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{\rho}$  alcanzan un valor mínimo (ambos, negativos). Para tiempos largos vemos que la partícula se aleja con aceleración casi constante, en la dirección radial y azimutal, debido a que los valores de  $\ddot{\varphi}$  y  $\ddot{\rho}$  oscilan alrededor del cero, más cerca del cero conforme avanza el tiempo. Además, el valor de  $\dot{\varphi} = 0$ , implica que el momentum angular que lleva la partícula también es constante y la velocidad radial tiende a un valor positivo.

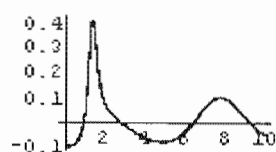
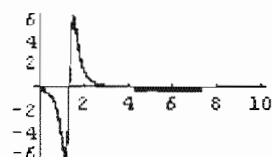
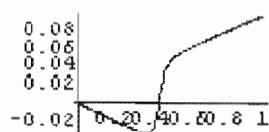
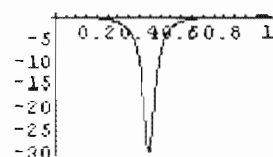
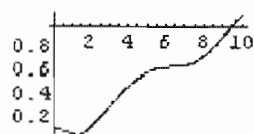
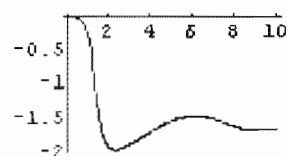
$\ddot{\rho}(t)$  $\ddot{\varphi}(t)$  $\dot{\rho}(t)$  $\dot{\varphi}(t)$  $\rho(t)$  $\varphi(t)$ 

Figura 3.8: Evolución temporal de: la aceleración radial, azimutal, las velocidades en esas direcciones y la posición azimutal y radial.  $\ddot{\rho}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\rho}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  y  $\rho(t)$ , respectivamente, para  $m = 1$ , con CI tales que se tiene no confinamiento (TE). El eje horizontal es el tiempo.

Entonces, pequeños cambios en  $\ddot{\varphi}$  y  $\ddot{\rho}$  (la aceleración de la partícula) ocasiona cambios en  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{\rho}$  y consecuentemente en  $\rho$  y  $\varphi$ , que a su vez inducen nuevamente cambios en  $\ddot{\varphi}$  y  $\ddot{\rho}$ , provocando un cambio drástico en el movimiento de la partícula, esto es, que hasta un cierto tiempo la partícula da vueltas alrededor del centro del haz, pero en algún instante tiene la energía suficiente para alejarse del centro y finalmente la partícula se escapa.

¿Cómo se ve la aceleración angular y radial así como la velocidad angular y radial como función del tiempo para CI tales que se tiene confinamiento? Pues veamos la Fig. 3.9. El confinamiento radial implica que  $\rho(t)$  alcanza un valor máximo y después regresa a un valor mínimo y así a lo largo del tiempo, es decir, la partícula es empujada un poco más lejos del centro del haz (no lo suficiente para que se escape), después es atraída hasta cierto punto, definiendo una región anular en donde la partícula queda confinada. Y los valores de  $\ddot{\rho}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\dot{\rho}$  y  $\dot{\varphi}$  también oscilan entre ciertos valores, algo que no sucede en la región de no confinamiento.

Hay trayectorias un tanto "exóticas" en las que la partícula queda confinada hasta cierto tiempo y después escapa. En la Fig. 3.10 se ilustra un ejemplo. No se han podido caracterizar las CI que las generan. En este ejemplo las CI son:  $\dot{\rho} = 0.001$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $m = 0$  y sin campo magnético externo, y  $k_{\perp} \sim (1/100)k_z$ , es la trayectoria vista a diferentes tiempos; a tiempos cortos la partícula está confinada y a tiempos más largos la partícula se escapa.

### 3.3.2. Polarización TM

Haciendo uso de las ecuaciones de movimiento (3.8 - 3.11). Reparametrizándolas para el tiempo del laboratorio, y dado que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  para los modos TM, tienen la forma (2.31) y (2.32) obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \left[ \dot{z} - c \frac{k_z}{k_t} \right] J'_m(k_{\perp} \rho) \text{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) + \\ & \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho \dot{\varphi} B_{zE} + \rho \dot{\varphi}^2 + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\rho} \left[ \rho \frac{k_z}{k_t} J'_m(k_{\perp} \rho) \text{sen}(k_z z + m\varphi - \omega t) + \right. \\ & \left. + \rho \dot{\varphi} \frac{k_z}{k_t} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right] \end{aligned}$$

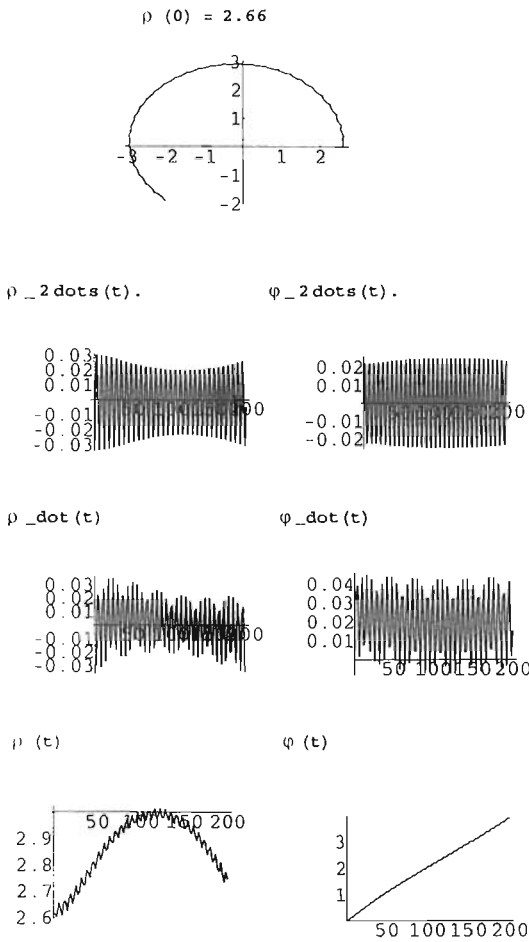


Figura 3.9: Evolucion temporal de: la aceleración radial y azimutal, las velocidades en esas direcciones, y la posición azimutal y radial  $\ddot{\rho}$ ,  $\ddot{\phi}(t)$ ,  $\dot{\rho}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$ ,  $\phi(t)$  y  $\rho(t)$ , respectivamente, para  $m = 1$  con CI tales que se tiene una región de confinamiento. Observemos que el valor de  $\rho(0) = 2.66$ , es el limite superior del intervalo correspondiente a esa región de confinamiento (TE). El eje horizontal es el tiempo.

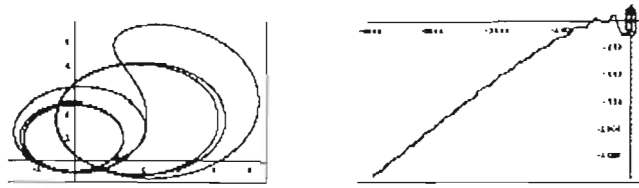


Figura 3.10: Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 0.001$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $k_{\perp} = 0.01$ ,  $k_z = 1$  y  $B_{zE} = 0$ . A la izquierda con un tiempo  $dt = 50/c k_{\perp}$  y a la derecha con  $dt = 1010/c k_{\perp}$ .

$$-z \frac{k_z}{k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t)], \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & -\frac{c}{\gamma m_0 c \rho} \dot{\rho} B_{zE} - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c \rho} \left[ z - c \frac{k_z}{k_t} \right] \times \\ & \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) + \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\varphi} \left[ \rho \frac{k_z}{k_t} J'_m(k_{\perp} \rho) \times \right. \\ & \left. \sin(k_z z + m\varphi - \omega t) + \rho \dot{\varphi} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \\ & \left. - z \frac{k_z}{k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) \right], \quad (3.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = & \frac{cE_0}{\gamma m_0 c} \left[ c \frac{k_z}{k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \\ & \left. - \rho J'_m(k_{\perp} \rho) \sin(k_z z + m\varphi - \omega t) - \rho \dot{\varphi} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \times \right. \\ & \left. \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \frac{cE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{z} \left[ \rho \frac{k_z}{k_t} J'_m(k_{\perp} \rho) \sin(k_z z + m\varphi - \omega t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho \dot{\varphi} \frac{k_z}{k_t} \frac{m}{k_{\perp} \rho} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - z \frac{k_z}{k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z + m\varphi - \omega t) \right] \right]. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Consideremos, una vez más, el caso en que el campo magnético  $B_{zE}$  es cero y el sistema de referencia inercial en que  $k_z = 0$ . La elección de este sistema inercial lleva a una simplificación considerable en la forma que toman los campos y las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, para  $\mathbf{m} = 0$ , explícitamente tenemos que:

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0 \frac{k_{\perp}}{k_t} J_0(\rho k_{\perp}) \cos(\omega t) \hat{z} \quad (3.49)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -E_0 J_1(\rho k_{\perp}) \sin(\omega t) \hat{\varphi} \quad (3.50)$$

y las ecuaciones de movimiento están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \dot{z} J_1(k_{\perp} \rho) \sin(\omega t) + \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho \dot{\varphi} B_{zE} + \rho \dot{\varphi}^2 - \\ & - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\rho} \dot{z} \frac{k_{\perp}}{k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{e}{\gamma m_0 c} \frac{\dot{\rho}}{\rho} B_{zE} - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\varphi} \dot{z} \frac{k_{\perp}}{k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\omega t), \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = & \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \left[ c \frac{k_{\perp}}{k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\omega t) + \dot{\rho} J_1(k_{\perp} \rho) \sin(\omega t) \right] - \\ & - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{z}^2 \frac{k_{\perp}}{k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nótese que en este caso la única componente del campo eléctrico está en la dirección  $z$  y sólo hay componente en  $\varphi$  del campo magnético. Además en la vecindad del cero  $J_1 \sim 0$ . Esto, es esencial para comprender los resultados encontrados.

Elegimos como condiciones iniciales fijas  $\dot{\rho}(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , y  $\varphi(0) = z(0) = 0$  en los resultados a ser reportados, mientras que exploraremos diversas  $\rho(0)$ . En general, encontramos que existen valores de CI para los que la partícula realiza un movimiento en una región radial finita, mientras que para otros valores la partícula a partir de un cierto tiempo se aleja del eje de simetría.

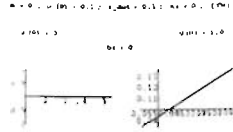


Figura 3.11: Proyección  $(XY)$  de la trayectoria de la partícula (polarización TM) con:  $m = 0$ ,  $z(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $\epsilon_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$ . Si  $\varphi(0) = 0$  (izquierda) la trayectoria está sólo en el eje  $X$ . Si  $\varphi(0) = 1$  (derecha) la trayectoria es esa línea recta, entonces hablamos de una región de no confinamiento.  $dt = 100/ck_{\perp}$ .

El primer resultado que encontramos para  $m = 0$  es que: para todo valor inicial de  $\rho$ ,  $\rho(0)$ ,  $\varphi = 0$  es *solución* del problema para las CI arriba mencionadas. Esta propiedad no se altera al pasar a un sistema en que  $k_z$  es diferente de de cero. Asimismo si eligiésemos las condiciones iniciales  $\varphi \neq 0$  manteniendo  $\dot{\varphi} = 0$  el movimiento rectilíneo es solución exacta a la ecuación de movimiento.

Para valores de  $m \neq 0$ , el campo eléctrico del haz se mantiene en la dirección  $z$  y el campo magnético tiene componentes radiales y azimutales. En estos casos,  $\varphi$  constante no es solución exacta al problema. Nuevamente, dependiendo de las CI es posible obtener atrapamiento transversal. Contrario a lo que ocurre con los modos TE con  $m = 1$  que inician con una región de no confinamiento, para TM cuando  $m = 1$  la región central de CI es de confinamiento. Esta propiedad se mantiene para  $m = 2, 3$  no así para  $m \geq 4$ . La razón de ello es que el tercer término de la ecuación (3.47) para  $\rho \sim 0$  es dominante para  $m < 4$  y muy pequeño para  $m \geq 4$ . Las ecuaciones de movimiento para el caso  $m = 4$  así como algunas de las trayectorias admisibles se encuentran en el Apéndice A.2.

En la Fig. 3.12 ilustramos el caso con  $m = 1$  y  $m = 2$ . Nótese que las trayectorias son cualitativamente distintas a las encontradas para los modos TE correspondientes. Notése la escala de movimiento en las direcciones  $x$  y  $y$ .

En la Fig. 3.13 se ejemplifican los casos  $m = 3$  y  $m = 4$ . En el caso  $m = 4$ , se pone  $\varphi(0) = 1.0$  (abajo derecha), haciendo énfasis en que: si  $\varphi(0) = 0$ , entonces  $\varphi = 0$  es solución aproximada de nuestro problema con las mismas CI. Es relevante destacar que para el caso  $m = 0$  y  $m = 4$  con  $\varphi(0) = 0$  se tiene región central de no confinamiento, y para el caso en que  $\varphi(0) = 1$ ,



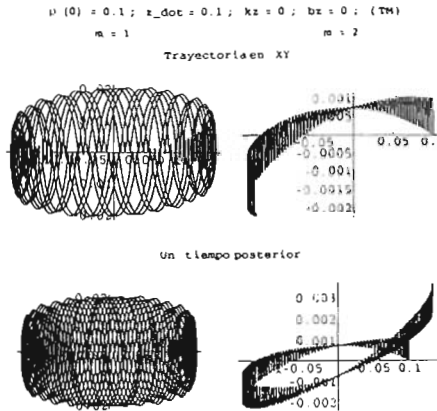


Figura 3.12: Trayectoria (XY) (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1, k_{\perp} = 1, k_z = 0, e_0 = 0.2, \rho(0) = 0.1$  y  $\varphi(0) = 0$ . A la izquierda  $m = 1$  y a la derecha  $m = 2$ . Los tiempos de graficación (de arriba a abajo),  $dt = 250/ck_{\perp}, dt = 2500/ck_{\perp}$  y  $dt = 10000/ck_{\perp}$ .

para  $m = 0$  esa región inicial sigue siendo de no confinamiento y para  $m = 4$ , la región ya es de confinamiento.

El papel de los ceros de las funciones de Bessel para los modos TE y TM también resultan diferentes. En los ejemplos anlizados se encontró que para  $m > 0$  los ceros de la función  $J_m$  se encuentran en las regiones de confinamiento. En la Fig. 3.14 mostramos la proyección de la trayectoria de la partícula en XY, para el caso  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha). En ésta figura  $k_{\perp}\rho(0)$  es el valor de los primeros cinco ceros de las funciones  $J_1$  (para  $m = 1$ ) y  $J_2$  (para  $m = 2$ ). En el Apéndice A.2 mostramos el caso para algunos ceros de la función  $J_3$  y el orden del haz  $m = 3$ .

### 3.3.3. Polarización circular (L) y (R)

Los haces Bessel circularmente polarizados tienen asociados campos eléctricos que se obtienen mediante la superposición adecuada de los modos TE y TM. De acuerdo a la literatura usual, si escogemos  $\Pi_1(m, k_{\perp}, k_z) = -i \frac{k_z}{k_{\perp}}$   $\Pi_2(m, k_{\perp}, k_z)$  se obtiene polarización circular derecha (R) y con la elección de  $\Pi_1(m, k_{\perp}, k_z) = i \frac{k_z}{k_{\perp}}$   $\Pi_2(m, k_{\perp}, k_z)$  se obtiene polarización circular

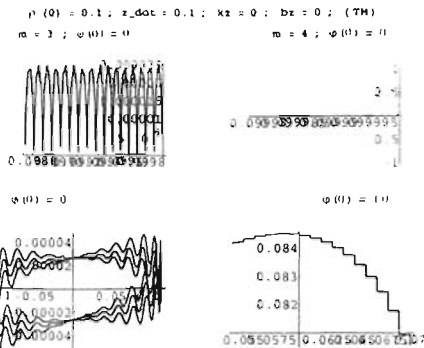


Figura 3.13: Trayectoria ( $XY$ ) (TM) con:  $i(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$  y  $\varphi(0) = 0$  (arriba). A la izquierda  $m = 3$  y a la derecha  $m = 4$ . Abajo,  $m = 3$  y  $\varphi(0) = 0$  (izquierda),  $m = 4$  y  $\varphi(0) = 1$  (derecha). Los tiempos de graficación:  $dt = 100/ck_{\perp}$  y  $dt = 100000/ck_{\perp}$ .

izquierda ( $L$ ). Entonces los campos eléctricos,  $\vec{E}_{m+1}^{(R)} = \vec{E}_{m+1}^{(R)}(\vec{r}, t; k_{\perp}, k_z)$  y  $\vec{E}_{m-1}^{(L)} = \vec{E}_{m-1}^{(L)}(\vec{r}, t; k_{\perp}, k_z)$  tienen la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_{m+1}^{(R)} &= E_0^{(R)} e^{i(k_z z - k_z ct)} \left[ -J_{m+1}(k_{\perp} \rho) e^{i(m+1)\varphi} (\hat{x} - i\hat{y}) \right. \\ &\quad \left. - i \frac{k_{\perp}}{k_z} J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\varphi} \hat{z} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{m-1}^{(L)} &= E_0^{(L)} e^{i(k_z z - i k_z ct)} \left[ -J_{m-1}(k_{\perp} \rho) e^{i(m-1)\varphi} (\hat{x} + i\hat{y}) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{k_{\perp}}{k_z} J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\varphi} \hat{z} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nótese que los campos  $R$  y  $L$  no forman un conjunto ortogonal. Además, en la aproximación paraxial, el campo eléctrico es prácticamente perpendicular al eje  $z$  y gira en el plano  $XY$  tal y como lo hacen las ondas planas circularmente polarizadas. Los haces Bessel circularmente polarizados son los que se generan más fácilmente en laboratorio lo que incrementa su relevancia. Notamos además que, por construcción no es posible elegir un sistema en que eliminemos  $k_z$  tal y como lo habíamos hecho con los modos TE y TM.

Las relaciones

$$J'_m(x) = \frac{1}{2}(J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)) \quad (3.56)$$

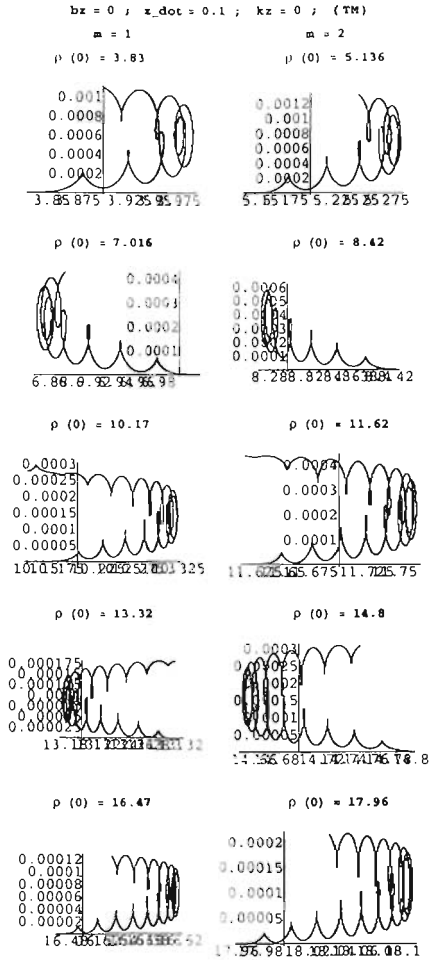


Figura 3.14: Trayectoria  $(XY)$  (TM) con:  $\dot{x}(0) = 0.1$ ,  $k_z = 1$ ,  $k_x = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$  y  $b_z = 0$ . A la izquierda  $m = 1$  y a la derecha  $m = 2$ . Primero se muestra el valor de  $\rho(0) = 3.83$  (izquierda) y  $\rho(0) = 5.136$  (derecha), estos valores son el primer cero de  $J_1$  y  $J_2$ , respectivamente. Abajo, se muestran los siguientes cuatro ceros de  $J_1$  (izquierda) y  $J_2$  (derecha). El tiempo de cada gráfica es  $dt = 100/c k_\perp$ , y hasta abajo a la derecha  $dt = 100/c k_\perp$ .

$$\frac{mJ_m(x)}{x} = \frac{1}{2}(J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)) \quad (3.57)$$

permiten concluir que la contribución del campo EM a la constante de movimiento  $L_z$  de un haz circularmente polarizado es

$$\Re\left(\frac{c}{c^2}\left(-\rho\frac{\partial\Pi_2^{(m)}}{\partial\rho} + \frac{ik_z m}{k_t}\Pi_1^{(m)}\right)\right) = \pm\left(\frac{eE_0\rho}{k_t c}\right)J_{m\pm 1}(k_\perp\rho)\cos(m\varphi + k_z z - \omega t), \quad (3.58)$$

mientras que para  $P_z$  es

$$P_z = \mp\frac{eE_0}{c}\frac{k_\perp}{k_z k_t}J_m(k_\perp\rho)\cos(m\varphi + k_z z - \omega t). \quad (3.59)$$

el signo de arriba corresponde a  $(R)$  y el de abajo a  $(L)$ .

En la siguiente sección escribimos las ecuaciones de movimiento, manteniendo esa convención de signos para  $(R)$  y  $(L)$ .

### Ecuaciones de movimiento $(L)$ y $(R)$ y su solución numérica

Para obtener las ecuaciones con polarización circular derecha e izquierda ponemos  $\Pi_1(m, k_\perp, k_z) = \mp i\frac{k_z}{k_t}\Pi_2(m, k_\perp, k_z)$  en las ecuaciones (3.22 - 3.25). Recordando que  $\Pi_2 = C J_m(k_\perp\rho)\exp[i(k_z z + m\phi - k_t ct)]$ , obteniendo la parte real de las ecuaciones, y además simplificando la ecuación de  $\dot{\rho}$  haciendo uso de la ecuación de onda (2.27), obtenemos las ecuaciones

$$m_0\dot{\rho} = \frac{L_z}{\gamma\rho} + \frac{m_0 mc}{k_t\rho} \mp \frac{eE_0}{\gamma ck_t}J_{m\pm 1}(k_\perp\rho)\cos(m\varphi + k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma c}\rho B_{zE} \quad (3.60)$$

$$m_0\dot{z} = \frac{P_z}{\gamma} + \frac{m_0 k_z c}{k_t} \pm \frac{eE_0}{\gamma c}\frac{k_\perp}{k_z k_t}J_m(k_\perp\rho)\cos(m\varphi + k_z z - \omega t). \quad (3.61)$$

En este caso el factor cinemático evoluciona de acuerdo a la igualdad

$$\dot{\gamma} = -\frac{eE_0}{m_0 c^2}\dot{\rho}J_{m\pm 1}(k_\perp\rho)\cos(m\varphi + k_z z - \omega t) \mp \frac{eE_0}{m_0 c^2}J_{m\pm 1}(k_\perp\rho)\sin(m\varphi + k_z z - \omega t) \times$$

$$\left[ \frac{L_z}{m_0 \gamma \rho} + \frac{mc}{k_t \rho} \mp \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_t} J_{m \pm 1}(k_{\perp} \rho) \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z F \right] \pm \frac{eE_0}{m_0 c^2} \left[ \frac{P_z}{m_0 \gamma} + \frac{k_z c}{k_t} \pm \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \frac{k_{\perp}}{k_z k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \times \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) \right] \left( \frac{k_{\perp}}{k_z} J_m(k_{\perp} \rho) \sin(m\varphi + k_z z - \omega t) \right) \quad (3.62)$$

y la ecuación radial es

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{\rho} - \frac{eE_0}{\gamma m_0} J_{m \pm 1}(k_{\perp} \rho) \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{L_z}{m_0 \gamma \rho} + \frac{mc}{k_t \rho} \mp \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_t} J_{m \pm 1}(k_{\perp} \rho) \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z F \right]^2 + \\ & + \frac{e}{\gamma m_0 c^2} \left[ \frac{L_z}{m_0 \gamma \rho} + \frac{mc}{k_t \rho} \mp \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_t} J_{m \pm 1}(k_{\perp} \rho) \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z F \right] \left[ cE_0 \frac{k_{\perp}}{k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) + cB_z F \right] + \\ & + \frac{e}{2\gamma m_0 c} \frac{k_z}{k_t} \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) \left[ \frac{P_z}{m_0 \gamma} + \frac{k_z c}{k_t} \pm \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \frac{k_{\perp}}{k_z k_t} J_m(k_{\perp} \rho) \times \right. \\ & \left. \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) \right] \left[ J_{m-1} \left( 1 \mp \frac{k_t^2}{k_z^2} \right) + J_{m+1}(k_{\perp} \rho) \left( 1 \pm \frac{k_t^2}{k_z^2} \right) \right] \quad (3.63) \end{aligned}$$

Recuerde que  $P_z$  y  $L_z$  son constantes. Cabe señalar que en ausencia del campo óptico la ecuación (3.62) estaría relacionada con la evolución de la energía de la partícula.

Ahora como se hizo en TE, el caso con  $m = 1$  se localiza después de los resultados con  $m = 0, 2, 3$  y 4.

El primer caso analizado es  $\mathbf{m} = 0$ , usando el hecho de que  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ , las ecuaciones para el estado con polarización circular izquierda ( $L$ ) explícitamente están dadas por:

$$m_0 \dot{\varphi} = \frac{L_z}{\gamma \rho} - \frac{eE_0}{\gamma c k_t} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma c} \rho B_z F \quad (3.64)$$

$$m_0 \dot{z} = \frac{P_z}{\gamma} + \frac{m_0 k_z c}{k_t} - \frac{eE_0}{\gamma c} \frac{k_{\perp}}{k_z k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(k_z z - \omega t) \quad (3.65)$$

En este caso el factor cinemático evoluciona de acuerdo a la igualdad

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{eE_0}{m_0c^2} \dot{\rho} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) - \\ &\quad - \frac{eE_0}{m_0c^2} J_1(k_{\perp}\rho) \text{sen}(k_z z - \omega t) \times \\ &\quad \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_t} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z E \right] - \\ &\quad - \frac{eE_0}{m_0c^2} \left[ \frac{P_z}{\gamma m_0} + \frac{ck_z}{k_t} - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_z k_t} J_0(k_{\perp}\rho) \times \right. \\ &\quad \left. \cos(k_z z - \omega t) \right] \left( \frac{k_{\perp}}{k_z} J_0(k_{\perp}\rho) \text{sen}(k_z z - \omega t) \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

y la ecuación radial es

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{\rho} + \frac{eE_0}{\gamma m_0} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_t} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z E \right]^2 + \\ &\quad + \frac{e}{\gamma m_0 c} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_t} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z E \right] \left[ E_0 \frac{k_{\perp}}{k_t} J_0(k_{\perp}\rho) \cos(m\varphi + k_z z - \omega t) + B_z E \right] - \\ &\quad - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_z} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) \left[ \frac{P_z}{\gamma m_0} + \frac{ck_z}{k_t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c k_z k_t} J_0(k_{\perp}\rho) \cos(k_z z - \omega t) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

aquí notamos la importancia que tienen los ceros de las funciones (de Bessel)  $J_0(k_{\perp}\rho)$  y  $J_1(k_{\perp}\rho)$ , siendo relevante  $J_0(k_{\perp}\rho)$ , ya que, cuando  $(k_{\perp}\rho) \approx 0$  entonces  $J_m(k_{\perp}\rho) \approx 0$  si  $m \geq 1$  y  $J_0(k_{\perp}\rho) \approx 1$ . Por ende la facilidad que tenemos en determinar intervalos bien definidos con respecto al argumento de las  $J$ 's,  $(k_{\perp}\rho)$ , en donde la partícula está o no confinada. Traducir la información a una variable dinámica no es trivial.

Atrapada			No Atrapada		
0.01	$\leq \rho(0) \leq$	1.63	1.64	$\leq \rho(0) \leq$	3.00
5.33	$\geq \rho(0) \geq$	3.01	5.34	$\leq \rho(0) \leq$	6.16
6.17	$\leq \rho(0) \leq$	8.47	9.14	$\geq \rho(0) \geq$	8.48
11.71	$\geq \rho(0) \geq$	9.15	11.72	$\leq \rho(0) \leq$	12.33
12.34	$\leq \rho(0) \leq$	14.82	15.34	$\geq \rho(0) \geq$	14.83
18.02	$\geq \rho(0) \geq$	15.35			

Tabla 3.8:  $m = 0$  y  $P_z = -0.56568896046$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
$7.071 \times 10^{-6}$	$\leq L_z \leq$	0.132014	0.133021	$\leq L_z \leq$	0.143850
-0.260901	$\leq L_z \leq$	0.142738	-0.261382	$\leq L_z \leq$	-0.211112
-0.209426	$\leq L_z \leq$	0.326658	0.292991	$\leq L_z \leq$	0.327242
-0.386359	$\leq L_z \leq$	0.291381	-0.386655	$\leq L_z \leq$	-0.331970
-0.329920	$\leq L_z \leq$	0.433460	0.399821	$\leq L_z \leq$	0.433919
-0.479141	$\leq L_z \leq$	0.398042			

Tabla 3.9:  $m = 0$  y  $P_z = -0.56568896046$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

Para las CI elegimos  $\dot{\rho}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ , y  $\varphi(0) = z(0) = 0$  y variaremos  $\rho(0)$  y  $\dot{z}(0)$ . Cabe señalar que los valores de las condiciones iniciales determinan los valores de las cantidades conservadas  $P_z$  y  $L_z$ . Esta relación no es biyectiva puesto que diferentes valores de, por ejemplo  $\rho(0)$  manteniendo todo lo demás fijo pueden conducir a un mismo valor de, por ejemplo  $L_z$ .

Los resultados que obtenemos son (como esperábamos): regiones de confinamiento y no confinamiento. En la Tabla (3.8) mostramos el caso  $P_z = -0.56568896046$ .

Nótese que al asignar un valor a  $P_z$  y variar  $\rho(0)$  manteniendo iguales las CI mencionadas anteriormente, será necesario variar  $\dot{z}(0)$ . Cabe señalar que este intercalamiento de regiones de CI que conducen a atrapamiento y no atrapamiento se verificaron hasta valores de  $\rho(0) \sim 100$ .

Al traducir los valores de las CI a la constante de movimiento  $L_z$  en este ejemplo particular, resulta que (ver la Tabla 3.9): por ejemplo en el segun-

do renglón de la tabla en términos de  $L_z$ , la correspondencia de  $L_z(\rho(0))$  es tal que  $L_z(3.01) = 0.142738$  y  $L_z(5.33) = -0.2609013$ ,  $L_z(5.34) = -0.2613818$  y  $L_z(6.16) = -0.211122$ , entonces  $L_z(9.14) = 0.2929914$ ,  $L_z(14.82) = 0.43345983$ , y así registramos los resultados obtenidos.

Notamos que un valor dado de  $L_z$  y de  $P_z$  no es suficiente para determinar si la partícula se verá confinada o no. Hay traslape de valores de  $L_z$  que pertenecen a regiones de confinamiento y no confinamiento.

Sin embargo, podemos identificar que los ceros de la función  $J_0$  (2.40, 5.52, 8.65, 11.79, 14.93,...), se encuentran en las regiones de no confinamiento y cerca de las fronteras entre la región de confinamiento y no confinamiento; y para ese valor es donde  $L_z$  alcanza un máximo o un mínimo, según el signo de  $L_z$ . Y los ceros de  $J_1$  (3.83, 7.02, 10.17, 13.32, 16.47,...), están en la región de confinamiento. Ejemplificando lo anterior, veamos la Fig. 3.15 que muestra la variación de  $L_z$  con respecto a  $\rho$ , para  $P_z = -0.28284448023$  y  $P_z = 0$ . Obsérvese que, las regiones de no confinamiento se localizan cerca de los valles y de las crestas (ceros de  $J_0$ ), por lo tanto, para un valor dado de  $L_z$ , tendremos una región de confinamiento o no confinamiento, según el valor de  $k_{\perp}\rho(0)$ ,  $k_{\perp} = 1$ .

Los resultados obtenidos para otros valores de  $P_z$ , los encontramos en el Apéndice B.1. Lo relevante de este análisis lo resumimos en las siguientes líneas.

La primera región de valores de  $\rho(0)$  (que llamamos región central) en que se obtiene confinamiento, aumenta conforme  $P_z$  es menos negativo. Parece existir un valor de  $P_z$ , que no hemos podido caracterizar plenamente, tal que se maximiza dicha región. Esta observación se basa en que cuando aumentamos  $P_z$  a valores positivos, ésta región ya no aumenta, como se muestra en las tablas correspondientes (Apéndice B.1).

Otro resultado importante es que la región de valores de  $\rho(0)$  que conduce a no confinamiento es más delgada conforme nos alejamos del centro del haz.

En la Fig. 3.16 ilustramos una de las posibles trayectorias que se obtienen para una región de confinamiento y no confinamiento. Aquí la región anular definida por dos círculos concéntricos (donita) es mayor comparado con el caso de polarización (TE).



Lz vs  $\rho$

$P_z = -0.28284448023$

$P_z = 0.0$

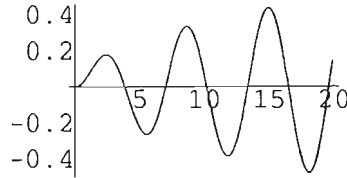
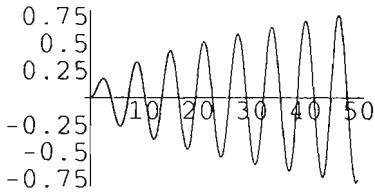


Figura 3.15: Evolución de  $L_z$  a lo largo de  $\rho$  con polarización circular izquierda, ( $L$ ), para  $m = 0$ ,  $P_z = -0.28284448023$  (izquierda) y  $P_z = 0$  (derecha). Observamos que las regiones de no confinamiento se encuentran cerca de los valles y de las crestas. El eje horizontal es  $\rho$ .

$\rho(0) = 1.72; L_z = 0.140801$

$\rho(0) = 1.73; L_z = 0.141737$

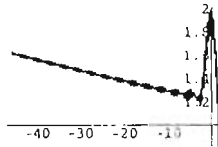
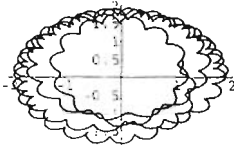


Figura 3.16: Trayectoria ( $L$ ) con:  $P_z = -0.28284448023$  y  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.72$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 1.73$  (no confinamiento).

Atrapada			No Atrapada		
0.01	$\leq \rho(0) \leq$	1.08	1.09	$\leq \rho(0) \leq$	3.15
5.11	$\geq \rho(0) \geq$	3.16	5.12	$\leq \rho(0) \leq$	6.12
6.13	$\leq \rho(0) \leq$	8.46	9.29	$\geq \rho(0) \geq$	8.47
11.60	$\geq \rho(0) \geq$	9.30	11.61	$\leq \rho(0) \leq$	12.29
12.30	$\leq \rho(0) \leq$	14.83	15.84	$\geq \rho(0) \geq$	14.84

Tabla 3.10:  $m = 2$  y  $P_z = -0.56568896046$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

Un resultado relevante que encontramos es que: si  $P_z < 0.52$  la región central ( $\rho(0) \in (0, 0.09)$ ) es de confinamiento, y si  $P_z > 0.53$  entonces la región central ( $\rho(0) \in (0, 2.92)$ ) es de no confinamiento. Ejemplos gráficos de estos resultados se ilustran en el Apéndice B.1.

En la Fig. 3.17 damos un par de ejemplos con  $P_z = 0.56568896046$  (la región central es de no confinamiento). Si  $\rho(0) \leq 2.92$  no se tiene confinamiento y si  $2.93 \leq \rho(0) \leq 5.84$  se tiene confinamiento.

Para los casos de orden  $m = 2, 3, 4, \dots$  los resultados encontrados son análogos (cualitativamente) a los que tenemos en el caso  $m = 0$ . Una vez más, el caso  $m = 1$  se localiza después de estos resultados.

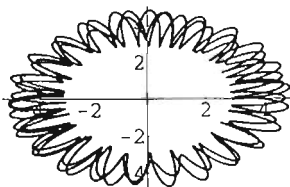
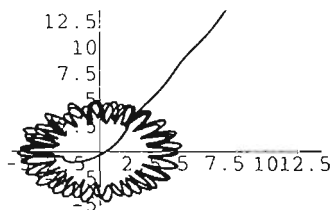
Por ejemplo, si  $m = 2$  y  $P_z = -0.56568896046$ . Aquí la región central ( $\rho(0) \in (0, 1.08]$ ) es de confinamiento y es menor que en el caso  $m = 0$  (para  $P_z = -0.56568896046$ , único valor analizado en  $m = 2$ ). Los valores de los intervalos están en la Tabla (3.10). Y los correspondientes para  $L_z$  los tenemos en la Tabla (3.11).

Otra vez, los ceros de las funciones  $J_0, J_1$  son importantes (*parece que son los que nos ayudarán a sistematizar los resultados*), los de  $J_0$  se encuentran en las regiones de no confinamiento, los de  $J_1$  están en las de regiones de confinamiento. En este caso los ceros de  $J_3$  están en las regiones de confinamiento. Finalmente, los ceros de  $J_2$  (5.13, 8.41, 11.62 y 14.8) definen las fronteras de confinamiento y no confinamiento alejadas de la región central. Esos hechos están relacionados con que los  $l$ -ésimos ceros de las funciones de Bessel de orden  $n$ ,  $j_{n,l}$  se entrelazan (ver Tabla 3.3)

$$j_{n,1} < j_{n+1,1} < j_{n,2} < j_{n+1,2} < j_{n,3} < \dots \quad (3.68)$$

$$\rho(0) = 2.92; \quad Lz = 0.152094$$

$$\rho(0) = 2.93; \quad Lz = 0.151128$$



$$\rho(0) = 5.84; \quad Lz = -0.251896$$

$$\rho(0) = 5.85; \quad Lz = -0.251023$$

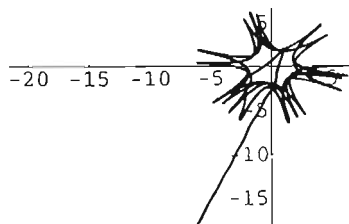
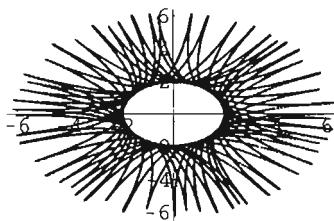


Figura 3.17: Trayectoria  $(XY)$  ( $L$ ) con:  $P_z = 0.56568896046$  y  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 2.92$  (arriba izq.) y  $\rho(0) = 2.93$  (arriba der.). Abajo,  $\rho(0) = 5.84$  (izquierda) y  $\rho(0) = 5.85$  (derecha).

Atrapada		No Atrapada	
-1.496873	$\leq Lz \leq$	-1.429885	-1.543470 $\leq Lz \leq$
-1.542100	$\leq Lz \leq$	-1.185431	-1.222347 $\leq Lz \leq$
-1.755540	$\leq Lz \leq$	-1.224008	-1.756069 $\leq Lz \leq$
-1.687601	$\leq Lz \leq$	-1.049132	-1.095077 $\leq Lz \leq$
-1.863567	$\leq Lz \leq$	-1.097050	-1.863916 $\leq Lz \leq$
			-1.497926 $\leq Lz \leq$
			-1.184535 $\leq Lz \leq$
			-1.689701 $\leq Lz \leq$
			-1.048496 $\leq Lz \leq$
			-1.797222 $\leq Lz \leq$

Tabla 3.11:  $m = 2$  y  $P_z = -0.56568896046$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

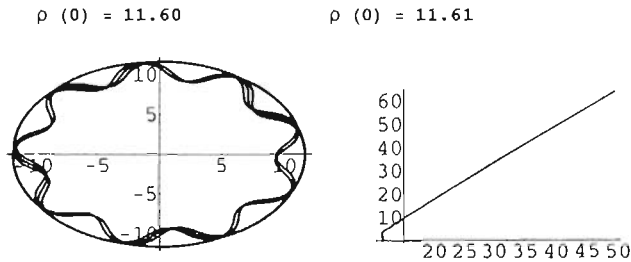


Figura 3.18: Trayectoria  $(XY)$  ( $L$ ) con:  $m = 2$ ,  $P_z = -0.56568896046$  y  $\rho(0) = 11.60$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 11.61$  (no confinamiento).

Algunos ejemplos gráficos para esta situación los encontramos en la Fig. 3.18 y en la Fig. 3.19.

También, para el caso  $m = 2$  encontramos que: si  $P_z < 0.31$  la región con  $\rho(0) \in (0, 0.97)$  es de confinamiento y si  $P_z > 0.32$  la región con  $\rho(0) \in (0, 3.38)$  es de no confinamiento. Ésta región de no confinamiento, es mayor que la del caso análogo con  $m = 0$  ( $(0, 2.92)$ ). En la Fig. 3.20 se ilustra un ejemplo para el caso  $m = 3$  y  $P_z = -0.56568896046$ .

¿Qué pasa para el caso  $m = 1$ ? Bien, la respuesta ya no es tan sorprendente, debido al análisis encontrado en el caso de los modos TE. Así pues, las ecuaciones explícitamente para  $m = 1$  son:

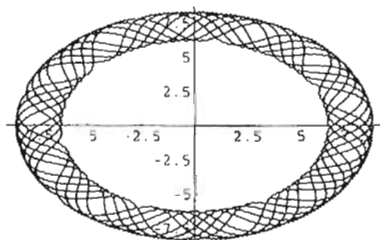


Figura 3.19: Trayectoria  $(XY)$   $(L)$  con:  $P_2 = -0.28284448023$  y  $m = 2$ ,  $\rho(0) = 8.417$ .

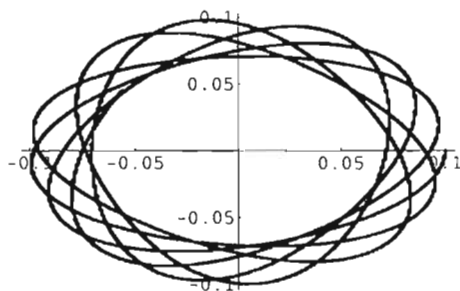


Figura 3.20: Trayectoria  $(XY)$   $(L)$  con:  $P_2 = -0.56568896046$ ,  $m = 3$  y  $\rho(0) = 0.1$ .

$$m_0 \rho \dot{\varphi} = \frac{L_z}{\gamma \rho} + \frac{m_0 c}{k_t \rho} + \frac{e E_0}{\gamma c k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) - \frac{c}{2\gamma c} \rho B_z \mathcal{E} \quad (3.69)$$

$$m_0 \dot{z} = \frac{P_z}{\gamma} + \frac{m_0 c k_z}{k_t} - \frac{e E_0}{\gamma c} \frac{k_{\perp}}{k_z k_t} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) \quad (3.70)$$

En este caso el factor cinemático evoluciona de acuerdo a la igualdad

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & -\frac{c E_0}{m_0 c^2} \dot{\rho} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) + \\ & + \frac{e E_0}{m_0 c^2} J_0(k_{\perp} \rho) \sin(\varphi + k_z z - \omega t) \times \\ & \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} + \frac{c}{k_t \rho} + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) \right. \\ & \left. - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z \mathcal{E} \right] - \frac{e E_0}{m_0 c^2} \left[ \frac{P_z}{\gamma m_0} + \frac{c k_z}{k_t} - \frac{e E_0}{\gamma m_0 c} \frac{k_{\perp}}{k_z k_t} J_1(k_{\perp} \rho) \right. \\ & \left. \cos(\varphi + k_z z - \omega t) \right] \left( \frac{k_{\perp}}{k_z} J_1(k_{\perp} \rho) \sin(\varphi + k_z z - \omega t) \right) \quad (3.71) \end{aligned}$$

la ecuación (3.71), en ausencia del campo EM dado por el haz, estaría asociada con la energía de la partícula.

Y la ecuación radial es

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{\rho} - \frac{e E_0}{\gamma m_0} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} + \frac{c}{k_t \rho} + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) - \frac{c}{2\gamma m_0 c} \rho B_z \mathcal{E} \right]^2 + \\ & + \frac{e}{\gamma m_0 c} \left[ \frac{L_z}{\gamma m_0 \rho} + \frac{c}{k_t \rho} + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c k_t} J_0(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) - \right. \\ & \left. - \frac{e}{2\gamma m_0 c} \rho B_z \mathcal{E} \right] \left[ E_0 \frac{k_{\perp}}{k_t} J_1(k_{\perp} \rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) + B_z \mathcal{E} \right] + \\ & + \frac{c E_0}{2\gamma m_0 c} \frac{k_z}{k_t} \left( J_0(k_{\perp} \rho) \left[ 1 + \left( \frac{k_t}{k_z} \right)^2 \right] \right) + \end{aligned}$$

Atrapada			No Atrapada		
			1.73	$\geq \rho(0) \geq$	0.01
1.74	$\leq \rho(0) \leq$	3.65	4.56	$\geq \rho(0) \geq$	3.66
7.03	$\geq \rho(0) \geq$	4.57	7.04	$\leq \rho(0) \leq$	7.73
7.74	$\leq \rho(0) \leq$	10.08	10.69	$\geq \rho(0) \geq$	10.09
13.34	$\geq \rho(0) \geq$	10.70	13.35	$\leq \rho(0) \leq$	13.89
13.90	$\leq \rho(0) \leq$	16.40			

Tabla 3.12:  $m = 1$  y  $P_z = -0.28284448023$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

$$\begin{aligned}
 &+ J_2(k_{\perp}\rho) \left[ 1 - \left( \frac{k_t}{k_z} \right)^2 \right] \cos(\varphi + k_z z - \omega t) \left[ \frac{P_z}{\gamma m_0} + \frac{ck_z}{k_t} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \frac{k_{\perp}}{k_z k_t} J_1(k_{\perp}\rho) \cos(\varphi + k_z z - \omega t) \right] \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

Otra vez, nótese la importancia que tienen los ceros de las funciones  $J_0(k_{\perp}\rho)$  y  $J_1(k_{\perp}\rho)$ . El comportamiento para  $m = 1$  es análogo para el caso TE, iniciando con una región de no confinamiento. Los resultados para  $m = 1$  y  $P_z = -0.28284448023$  se encuentran en la Tabla (3.12). Observamos que los ceros de  $J_0$  (2.40, 5.52, 8.65, 11.79, 14.93,...), se encuentran en la región de confinamiento, y los ceros pares (el segundo, cuarto,...) de  $J_1$  (7.02, 13.32,...) están en las regiones de confinamiento cerca de las fronteras y (el primero, tercero,...) los impares (3.83, 10.17, 16.47,...) están en las regiones de no confinamiento también cerca de las fronteras.

La Tabla (3.13) tiene los valores para la variable dinámica  $L_z$ .

La región de confinamiento crece conforme  $\rho(0)$  está más lejos del centro del haz, tanto para  $k_{\perp}\rho$ , como para  $L_z$ , y la de no confinamiento se adelgaza con respecto a  $k_{\perp}\rho$ , mientras que con respecto a  $L_z$  no decrece de manera monótona. Sin embargo, la anchura de los intervalos es de aproximadamente 0.03 y 0.06, ésta diferencia se intercala en las regiones de no confinamiento.

Cuando disminuye el valor de  $P_z$ , es decir, se hace más negativo, la región central (no confinamiento) aumenta ( $\rho(0) \in (0, 1.82]$ ), y los resultados se sistematizan también con los ceros de  $J_1$ , como lo esperábamos, esto es, que los ceros de  $J_1$  se encuentran en las regiones de no confinamiento, destacando que su localización es cerca de las fronteras.

Atrapada			No Atrapada		
			-0.853570	$\leq Lz \leq$	-0.795268
-0.852661	$\leq Lz \leq$	-0.584849	-0.614279	$\leq Lz \leq$	-0.584183
-1.092407	$\leq Lz \leq$	-0.615637	-1.092407	$\leq Lz \leq$	-1.032520
-1.010656	$\leq Lz \leq$	-0.438220	-0.473452	$\leq Lz \leq$	-0.437722
-1.205844	$\leq Lz \leq$	-0.475126	-1.205919	$\leq Lz \leq$	-1.149578
-1.147455	$\leq Lz \leq$	-0.338733			

Tabla 3.13:  $m = 1$  y  $P_z = -0.28284448023$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

En este caso, también existe ese valor de  $P_z$  (aún no caracterizado) para el cual se maximiza la primera región de confinamiento,  $\rho(0) \in (1.74, 3.65)$ . También encontramos que para valores de  $P_z > 0$  la región de no confinamiento ( $\rho(0) \in (0, 4.12]$ ) aumentó con respecto a  $k_{\perp}\rho$ .

Los resultados de estas afirmaciones están ilustrados en el Apéndice B.2.

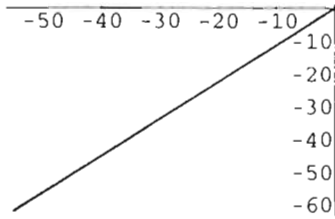
En la Fig. 3.21 y en la Fig. 3.22 se tiene a la partícula confinada en una región anular (determinada por dos círculos concéntricos). Las trayectorias tomadas por la partícula en estos ejemplos hacen atractivas a las gráficas. Estas trayectorias son un tanto simpáticas, debido a que no se había obtenido algo semejante. Sin embargo, claramente se distingue la región anular (“donita”) en donde la partícula se encuentra confinada.

En la Fig. 3.23 mostramos otras gráficas que complementan la información física, por ejemplo,  $\ddot{\rho}$  vs  $\rho$ , nos da información de la variación de la fuerza radial ( $F_{\rho} = m_0\ddot{\rho}$ ); con  $\dot{\varphi}$  vs  $\rho$ , obtenemos información del momentum angular,  $L_z = m_0\rho^2\dot{\varphi}$ ; la velocidad en dirección radial ( $\dot{\rho}$ ) y azimutal con  $\rho\dot{\varphi}$ . Así, podemos obtener una idea del por qué la partícula se queda o no confinada.

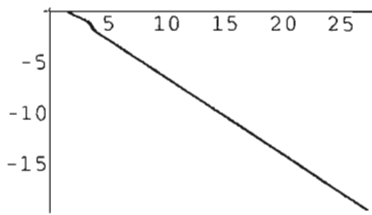
Como en el caso en que tenemos una región de confinamiento, la  $F_{\rho}$  es repulsiva y atractiva (oscilando entre dos valores), la velocidad radial también oscila entre valores positivos y negativos, manteniendo a la partícula en una región anular. Y cuando tenemos una región de no confinamiento  $F_{\rho}$  es atractiva y cambia a repulsiva (oscilando entre valores positivos y negativos), cuyo valor tiende a cero para tiempos largos, y la velocidad radial en



$\rho(0) = 0.01; \quad Lz = -0.795268$



$\rho(0) = 1.73; \quad Lz = -0.853570$



$\rho(0) = 1.74; \quad Lz = -0.852661$

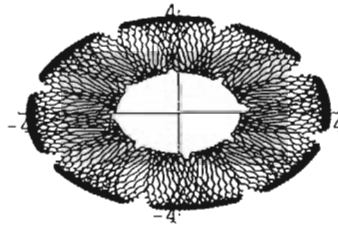
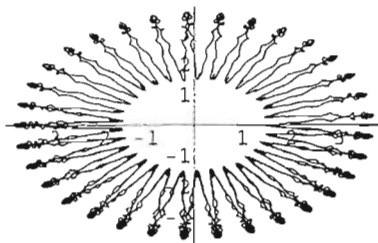
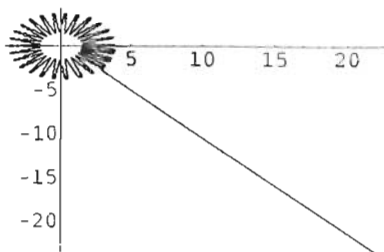


Figura 3.21: Trayectoria  $(XY)$  ( $L$ ) con:  $m = 1$ ,  $P_c = -0.28284448023$  y si  $\rho(0) \leq 1.73$  ( $m$  confinamiento),  $\rho(0) = 1.74$  (confinamiento).

$$\rho(0) = 1.71; L_z = -1.019726$$

$$\rho(0) = 1.73; L_z = -1.017885$$



$$\rho(0) = 3.61; L_z = -0.786770$$

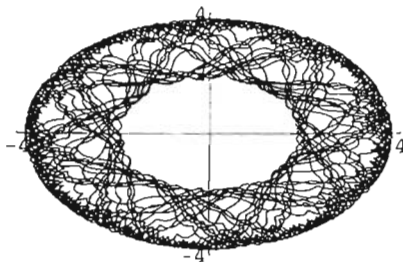


Figura 3.22: Trayectoria  $(XY)$  ( $L$ ) con:  $m = 1$ ,  $P_z = 0.0$  y  $\rho(0) = 1.71$  (superior izq.),  $\rho(0) = 1.73$  (superior der.) y  $\rho(0) = 3.61$  (abajo).

este caso cambia de negativa a positiva (tendiendo a un valor positivo), la consecuencia es que la partícula se aleja del centro de simetría.

La evolución de esas cantidades con respecto a  $z$  se ilustran en la Fig. 3.24. Los valores que toman esas cantidades ( $\ddot{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{\gamma}$  y  $\gamma$ ) para  $m = 0$ , también oscilan entre dos valores (a lo largo de  $z$ ). llenando el espacio (debido al tiempo de graficación y a que la región es de confinamiento) y por lo tanto se verán rectángulos negros.

Con las gráficas de la Fig. 3.24, complementamos la información para una región de confinamiento y para una región de no confinamiento, a lo largo de la dirección  $z$ . Una vez más, observamos que en la región de no confinamiento la aceleración radial ( $F_\rho$ ), el momentum angular ( $m_0\rho^2\dot{\varphi}$ ),  $\dot{\gamma}$  tienden a cero y la velocidad radial ( $\dot{\rho}$ ), la velocidad a lo largo de la dirección de propagación ( $\dot{z}$ ) y el factor cinemático ( $\gamma$ ) tienden a un valor positivo. Las gráficas en donde se llena el espacio, es debido a que los valores correspondientes a esas cantidades se repiten una y otra vez, pues la partícula se encuentra girando en una región anular.

¿Qué sucede en  $z$  a lo largo del tiempo? Debido a que ahora  $z$  es una variable, es válido cuestionarse por la evolución temporal. Esto se ilustra en la Fig. 3.25, además se muestra la evolución de  $\dot{z}$  contra *tiempo*. En la Fig. 3.26 se tiene la evolución de  $z$  y  $\dot{z}$  a lo largo de  $\rho$ .

Como se esperaba, a lo largo de  $z$ , la trayectoria de la partícula está oscilando, debido a los términos,  $J_m(k_\perp\rho)$  y  $\cos(m\varphi + k_z z - \omega t)$  en la ecuación (3.61). Sin embargo, notamos que la oscilación es muy pequeña para el caso  $m = 1$  (no confinamiento).

Lo que deseábamos era: obtener intervalos definidos por  $L_z$  que nos determinarían regiones de confinamiento y no confinamiento, sin que hubiese traslape de valores, como con  $k_\perp\rho$ . Sin embargo, dado un valor de  $P_z$  y usando ambos intervalos ( $k_\perp\rho$  y  $L_z$ ) identificamos si la partícula se quedará confinada o no.

### Resultados para polarización circular derecha

Los resultados para polarización circular derecha son análogos a los que se encuentran con polarización circular izquierda cuando se toma el signo

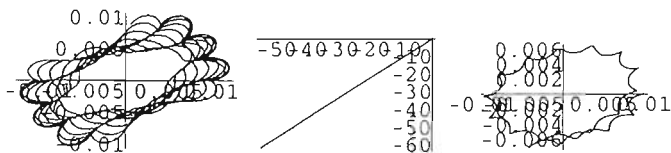
$$\rho(0) = 0.01; P_z = -0.28284448023$$

$$m = 0;$$

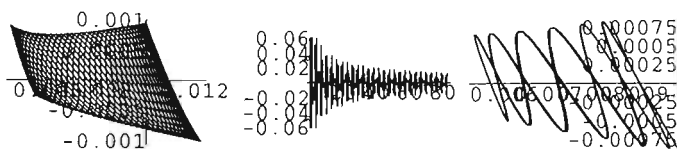
$$m = 1$$

$$m = 2$$

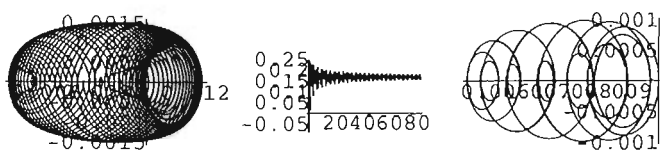
Proyecciones en el plano XY.



$\rho_{\ddot{}} \text{ vs } \rho$



$\rho_{\dot{}} \text{ vs } \rho$



$\psi_{\dot{}} \text{ vs } \rho$

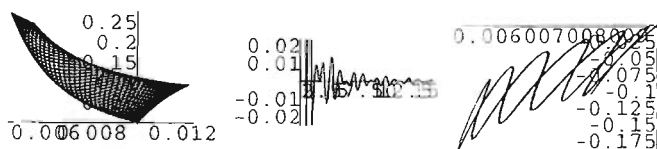


Figura 3.23: Evolución de  $\ddot{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\psi}$  con respecto a  $\rho$  ( $P_z = -1$ ); columnas corresponden a  $m = 0$ ,  $m = 1$  y  $m = 2$ , de izquierda a derecha, respectivamente. Aquí  $P_z = -0.28284448023$  y  $\rho(0) = 0.01$ . El eje horizontal es  $\rho$ .

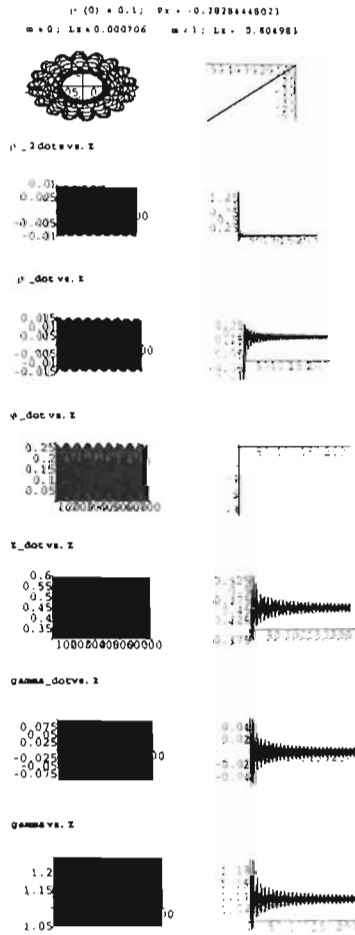


Figura 3.24: Evolución de:  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{\gamma}$  y  $\gamma$  a lo largo de  $z$ . ( $L$ ). Trayectoria ( $XY$ ) (hasta arriba), con:  $m = 0$  (columna izquierda) y  $m = 1$  (columna derecha),  $\rho(0) = 0.1$  y  $P_2 = -0.28284448023$ . El eje horizontal es  $z$ .

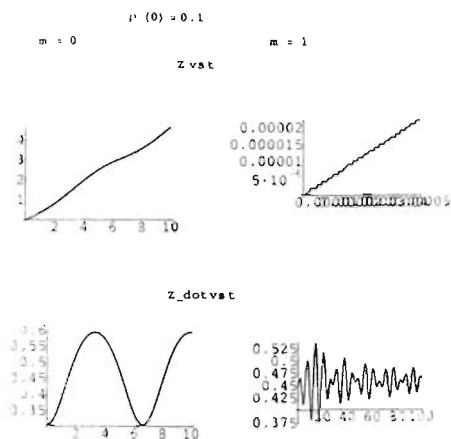


Figura 3.25: Evolución temporal de  $z$  (arriba) y  $\dot{z}$  (abajo), ( $L$ ), para  $m = 0$  (izq.) y  $m = 1$  (der.),  $\rho(0) = 0.1$  y  $P_z = -0.28284448023$ . El eje horizontal es el tiempo.

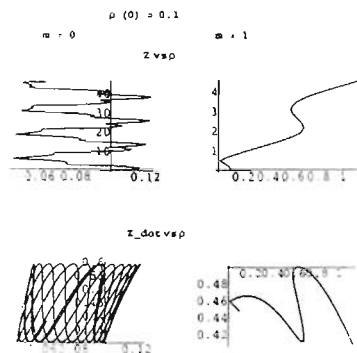
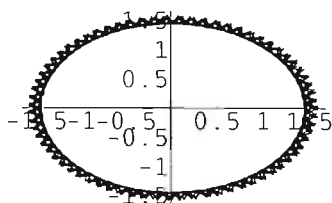


Figura 3.26: Evolución de  $z$  (arriba) y  $\dot{z}$  (abajo), a lo largo de  $\rho$ , ( $L$ ), para  $m = 0$  (izq.) y  $m = 1$  (der.),  $\rho(0) = 0.1$  y  $P_z = -0.28284448023$ . El eje horizontal es  $\rho$ .

$$\rho(0) = 1.57; \quad Lz = 0.125833$$

$$m = 0$$



$$\rho(0) = 0.1; \quad Lz = -1.429836$$

$$m = 2$$

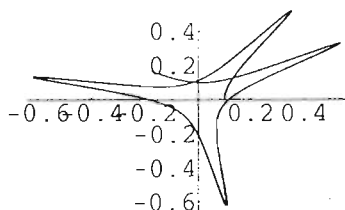


Figura 3.27: Trayectoria  $(XY)$  para polarización circular *derecha*,  $(R)$ . Con  $P_z = -0.56568896046$ ,  $m = 0$  (izquierda) y  $\rho(0) = 1.57$  y  $m = 2$  (derecha) con  $\rho(0) = 0.1$ , confinamiento en ambos casos.

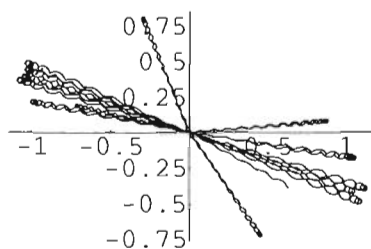
correspondiente en las ecuaciones (3.60 - 3.63) y los valores de  $m$  positivos se reemplazan por negativos.

Cuando se toman los valores positivos de  $m$  y el signo correspondiente a una polarización derecha en (3.60 - 3.63), los resultados son muy distintos. Por ejemplo, para  $m = 1$  y  $P_z \sim -0.56$  y polarización circular izquierda, la región central es de no confinamiento. No así para polarización circular derecha en que  $\rho(0) \in (0, 3.04]$ , es una región de confinamiento. Esto se debe a que ahora las funciones de Bessel que aparecen en las ecuaciones de movimiento son  $J_2$  y  $J_1$  que son cero en el origen. Recordemos que en el caso de polarización circular izquierda las funciones de Bessel relevantes eran  $J_0$  y  $J_1$ .

La Fig. 3.27 muestra ejemplos para ésta situación con  $m = 0$ ,  $m = 2$  y en la Fig. 3.28 con  $m = 1$ , ambas para el valor de  $P_z = -0.56568896046$ .

En la Fig. 3.29 ilustramos la evolución temporal de las cantidades que nos dan información física, para polarización circular izquierda y derecha. Una

$$\rho(0) = 0.01; Lz = -0.714857$$



$$\rho(0) = 3.04; Lz = -0.501424$$

$$\rho(0) = 3.05; Lz = -0.500765$$

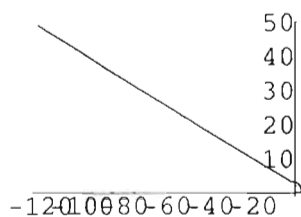
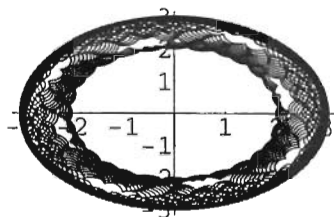


Figura 3.28: Trayectoria  $(XY)$   $(R)$  con:  $m = 1$ ,  $P_z = -0.565688960416$ .  $\rho(0) = 0.1$  y  $\rho(0) = 3.04$  (confinamiento), y  $\rho(0) = 3.05$  (no confinamiento).



vez más, en el caso en que no hay confinamiento (polarización izquierda) la velocidad radial tiende a un valor positivo y para el caso en que hay confinamiento (polarización derecha) la velocidad radial oscila entre un valor negativo y uno positivo. En el primer caso la consecuencia es que la partícula se aleja del centro de simetría y en el segundo la partícula está confinada.

En la sección 3.4.2 mostramos las trayectorias clásicas que toma la partícula en presencia de un campo magnético externo uniforme y constante ( $B_{zE} \neq 0$ ).

## 3.4. Movimiento en presencia de $B_{zE}$

### 3.4.1. Polarización TE y TM

Además del campo EM dado por el haz de luz, agregamos un campo magnético externo uniforme,  $B_{zE} \neq 0$ . La variable adimensional natural para comparar los campos asociados al haz y al campo magnético es  $b_z = eB_{zE}/\sqrt{2}m_0c^2k_\perp = \mathcal{A}_\perp B_{zE}/E_0$ . Si la partícula es un electrón y medimos  $B_{zE}$  en teslas,  $B_{zE}^{(T)}$ , esta cantidad adimensional se escribe como  $b_z = 5.85 B_{zE}^{(T)}/k_\perp$ .

### Resultados para polarización TE

Exploremos primero valores en el intervalo  $2 \cdot 10^{-7} < b_z < 4.2$  y luz con polarización TE. Si  $b_z = 4.124$ , entonces  $B_{zE}^{(T)}/k_\perp \sim 0.705$ . Es importante resaltar que cuando  $b_z = 2 \cdot 10^{-7}$  en el caso con  $m = 0$ , la trayectoria de la partícula no es modificada visiblemente, en cambio cuando  $b_z = 4 \cdot 10^{-7}$  la partícula modifica su trayectoria, y en el plano XY se observan espirales (Fig. 3.30). Además, existe un umbral de  $b_z$  para el cual son ya visibles en las gráficas los efectos del campo, aún sobre las trayectorias que sin campo magnético y mismas condiciones iniciales estarían confinadas, esto se ilustra en la Fig. 3.31.

En la Fig. 3.31 se tienen las mismas CI que las reportadas en la Fig. 3.1. Observamos que para  $b_z = 0.00024$ , la trayectoria es esencialmente la misma en ambas figuras. Sin embargo, cuando aumentamos ligeramente el valor de  $b_z$ , la partícula gira en espirales cuyas dimensiones radiales son centenares de veces el tamaño de las espirales para  $b_z = 0.00024$ . También cambia la

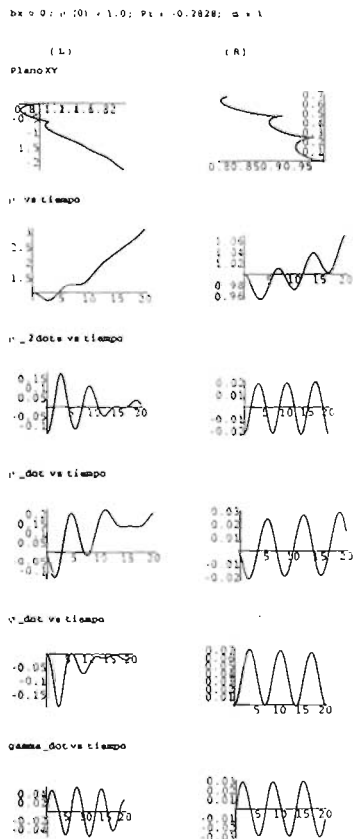


Figura 3.29: Evolución temporal ( $L$ ) y ( $R$ ) con:  $m = 1$ ,  $P_2 = -0.28284448023$ ,  $\rho(0) = 1.0$ ,  $dt = 20/ek_z$ . Columna izquierda polarización circular izquierda (no confinamiento) y columna derecha polarización circular derecha (confinamiento). El eje horizontal es  $t$ .

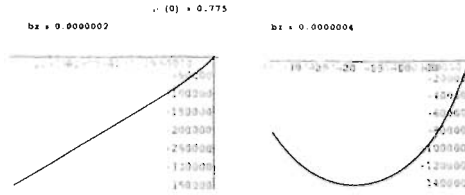


Figura 3.30: Trayectoria ( $XY$ ) (TE), para  $m = 0$ ,  $b_z = 4 \cdot 10^{-7}$  (der.), si  $b_z \leq 2 \cdot 10^{-7}$  (izq.) entonces los resultados son esencialmente los mismos que se obtienen con  $b_z = 0$ , en este caso para CI de no confinamiento.

frecuencia global en que se recorren ángulos del orden de  $2\pi$ . Mientras que el primer efecto se revierte para valores mayores de  $b_z$ , esto no ocurre con el segundo efecto. Al comparar con dicha figura (Fig. 3.1) vemos que el valor a partir del cual se observa en las gráficas la presencia del campo externo es  $B_{zE} = 0.0013$ , lo cual implica que  $b_z = 0.00026$ .

En el Apéndice A.1 encontramos ejemplos, para el caso  $m = 1$ .

### Resultados para polarización TM

Una vez más, la presencia de  $B_{zE} \neq 0$  nos proporciona regiones de confinamiento radial para la partícula. Los ejemplos que a continuación presentamos, para los casos  $m = 0, 1$  y  $2$ , fueron obtenidos en el sistema privilegiado. Ahí, el campo externo es tal que la variable adimensional,  $b_z = 0.01$ , lo cual implica que  $B_{zE}^T/k_{\perp} \sim 0.0017$ . Los resultados obtenidos son similares a los que tenemos para TE. Para esas intensidades del campo las trayectorias que sigue la partícula son espirales muy amplias. Posteriormente, nos vamos al sistema del laboratorio, para poner la frecuencia del haz Bessel igual a la frecuencia característica del ciclotrón,  $\omega_c$ .

En la Fig. 3.32 el caso  $m = 0$  con  $k_z = 0$  y  $b_z = 0.01$ . En la izquierda  $\varphi(0) = 0$  en la derecha  $\varphi(0) = 1$ . Arriba, en ausencia de campo, en el centro con campo y abajo, con la misma intensidad del campo, pero a un tiempo posterior. Como ya lo habíamos mencionado, las trayectorias son espirales como las obtenidas para el caso correspondiente para los modos TE. Obsérvese que la región en ausencia de campo es de no confinamiento.

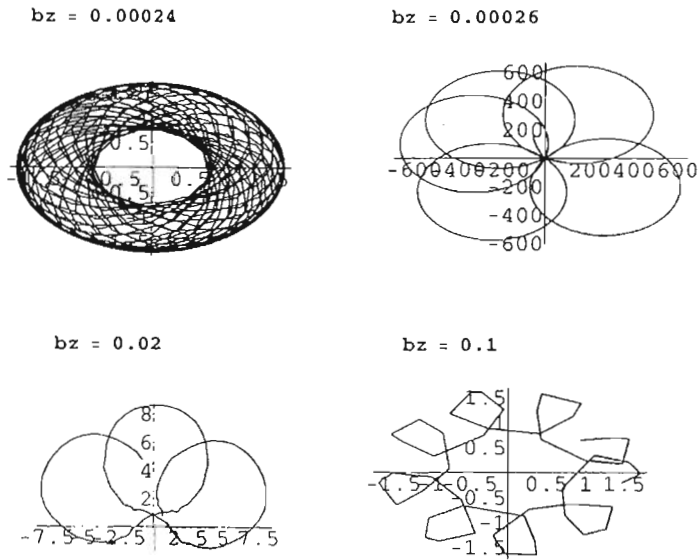


Figura 3.31: Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 0.774$  y  $b_z \neq 0$ ,  $b_z = 0.00026$  (superior der.). Para  $b_z = 0.1$  (inferior der.) la región radial de confinamiento es semejante a la de  $b_z \leq 0.00024$ , es decir, del orden de  $k^{-1}$ . Recordemos que  $\rho(0) = 0.774$  define la frontera de confinamiento y no confinamiento para  $B_{zE} = 0$ .

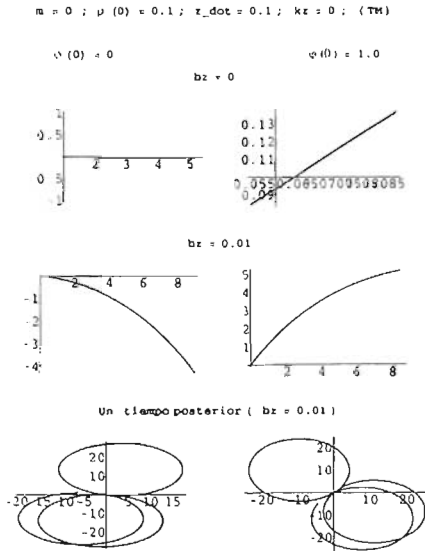


Figura 3.32: Trayectoria  $(XY)$  (TM) con:  $m = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$ . Arriba, en ausencia del campo ( $dt = 100/ck_{\perp}$ ),  $\varphi(0) = 0$  (izquierda) y  $\varphi(0) = 1$  (derecha). Abajo, con  $b_z = 0.01$  ( $\varphi = 0$  ya no es solución) y ( $dt = 100/ck_{\perp}$ ). Luego, la misma intensidad del campo, a un tiempo posterior  $dt = 2000/ck_{\perp}$ .

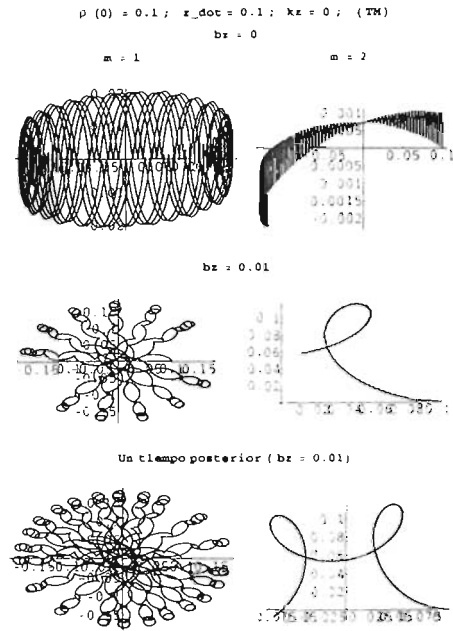


Figura 3.33: Trayectoria  $(X,Y)$  (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1, k_{\perp} = 1, k_z = 0, e_0 = 0.2, \rho(0) = 0.1, m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha). Arriba, en ausencia del campo ( $dt = 100/ck_{\perp}$ ), abajo, con  $b_z = 0.01$  y  $dt = 100/ck_{\perp}$ . Luego,  $b_z = 0.01$ , a un tiempo posterior  $dt = 2000/ck_{\perp}$ .

En la Fig. 3.33 se muestra para una región de confinamiento (en ausencia del campo externo) el caso  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha). Posteriormente, se pone campo magnético,  $b_z = 0.01$ , ilustrando las trayectorias tomadas por la partícula para cada caso y a diferentes tiempos. Aquí también se obtiene esa región anular en donde la partícula está confinada. Para el caso  $m = 2$  es claro y para  $m = 1$ , vemos que el radio interno de la donita es muy pequeño.

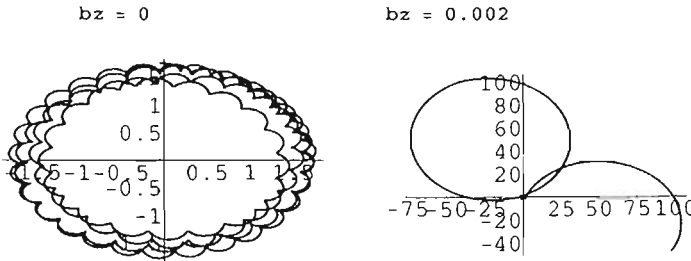


Figura 3.34: Trayectoria  $(XY)$  ( $L$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.63$   $b_z = 0$  a la izquierda y  $b_z = 0.002$  a la derecha.

### 3.4.2. Resultados para polarización circular ( $L$ ) y ( $R$ )

Algunos de los resultados obtenidos son semejantes (cualitativamente) a los encontrados para los modos TE. Una vez más, enfatizando el resultado de tener regiones de confinamiento que antes no lo eran como en el caso de la región central,  $\rho(0) \in (0.01, 1.73)$ , para  $m = 1$  y polarización circular izquierda. En la Fig. 3.34 y Fig. 3.35 ilustramos algunas trayectorias admisibles para la partícula. Vemos que si  $b_z$  es pequeño, se obtiene algo parecido a lo que tenemos con los modos TE, es decir, espirales (muy amplias) dentro de la región anular. Sin embargo, cuando el campo  $b_z$  es mayor (ver Fig. 3.35) entonces, se obtiene algo muy bonito (exótico) aparentemente las trayectorias son espirales. En el Apéndice C tenemos ejemplos, para polarización circular derecha.

### 3.4.3. Efectos resonantes

Cuando se estudia el problema de una partícula cargada en presencia de un campo magnético externo, uniforme y constante además de una onda plana circularmente polarizada que se propaga en la misma dirección del campo [22], se encuentran resultados muy interesantes si la frecuencia de ciclotrón  $\omega_c = eB_{zE}/mc$  coincide con la frecuencia de la onda plana. Estos efectos resonantes se resumen en que la "sincronización" altera la masa efectiva de la partícula de tal suerte que en este esquema ideal la partícula podría incrementar sin ningún límite su energía. El propósito de esta sección

$$b_z = 0.02 ; L_z = -0.728146$$

$$b_z = 0.2 ; L_z = -0.727246$$

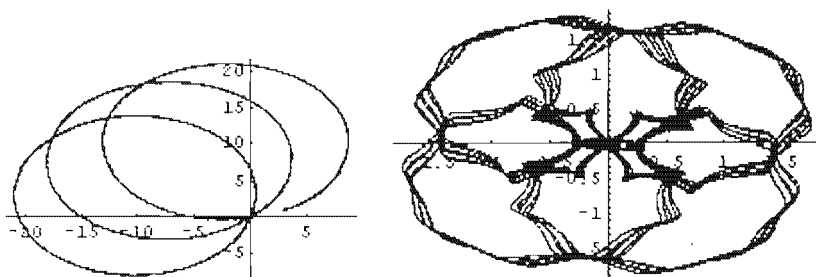


Figura 3.35: Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $m = 1$ ,  $b_z = 0.02$  (izquierda) y  $b_z = 0.2$  (derecha), y  $\rho(0) = 0.1$ . Las CI son tales que sin campo se tendría no confinamiento.

es estudiar si existen efectos análogos para modos de Bessel. Trabajaremos tanto los modos TE, TM y circular para ver la influencia del momento orbital y de espín en el caso resonante.

Debido a que los resultados obtenidos los compararemos con los reportados por Bourdier y Gond [23] presentamos a continuación algunos de estos últimos. En ese trabajo se considera a una partícula inicialmente en reposo. El parámetro adimensional  $\Omega_0 = cB_0/m_e\omega_0$  ahí empleado es el equivalente a  $b_z$  mientras que la cantidad adimensional  $eE_0/m_e c\omega_0 \sim 3 \times 10^{-3}$  es equivalente a nuestro parámetro  $e_0/ck_{\perp}$ . En el caso en que no se da la condición de resonancia, los autores obtienen que la partícula efectúa un movimiento en espiral en la dirección perpendicular al campo magnético con un radio que aumenta hasta un valor máximo y luego disminuye hasta alcanzar el origen reiniciándose entonces el crecimiento en espiral. Para el caso resonante, esta espiral no tiene un radio máximo. Los resultados para el caso no resonante y resonante, los ejemplificamos en la Fig. 3.36. En lo que se refiere a la trayectoria en la dirección del campo magnético, en resonancia  $z$  crece mucho más rápido que en el caso fuera de resonancia. Lo mismo ocurre con el factor  $\gamma$ . En la Fig. 3.37, se ilustra la evolución temporal de  $z$  y  $\gamma$  para el caso resonante



( $\Omega_0 = 1$ ) y no resonante ( $\Omega_0 = 1.01$ ).

Para evitar confusiones la condición de resonancia se aplicará directamente en el sistema de laboratorio ( $k_z \neq 0$ ). Tomamos  $k_z = 1$  y escogemos condiciones iniciales tales que la partícula no pueda ser confinada transversalmente en ausencia del campo magnético para modos TM y  $m = 0$ , y sí sea confinada transversalmente para  $m = 1, 2$ . Si se aplica un campo magnético tal que  $b_z = 1.4142$  para este valor de  $k_z$  se satisfecerá la condición de resonancia. Si por otra parte se aplica un campo magnético tal que  $b_z = 1.4142$  pero el haz tiene la frecuencia asociada a  $k_z \neq 1$  estaríamos trabajando un caso no resonante. Los resultados de la solución numérica asociada a estas tres circunstancias se ilustran en la figuras 3.38 y 3.39.

En la Fig. 3.38 se muestra la proyección de la trayectoria de la partícula en el plano  $XY$  para el caso no resonante y el caso resonante con  $m = 0, 1$  y  $2$  y modos TM, respectivamente. En el primer renglón se ilustra el caso no resonante ( $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 10$ ), en el segundo y tercer renglón, el caso resonante ( $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ ), tanto a tiempos cortos como a tiempos largos. Nótese que hay un cambio drástico en el movimiento de la partícula. En el caso **no resonante** la trayectoria que sigue la partícula es semejante a las trayectorias antes reportadas, esto es, esta confinada a una región anular. Para el caso **resonante** las trayectorias son espirales que se alejan del valor de  $\rho$  inicial. Sin embargo a diferencia del caso de ondas planas circularmente polarizadas, a tiempos largos  $\rho$  no crece indefinidamente sino que se inicia un movimiento de precesión alrededor del origen. Estas trayectorias espirales difieren según el haz utilizado. Al incrementar  $m$  aumenta el número de ciclos alrededor de  $\rho$  inicial antes de que sea evidente el movimiento de precesión. Por otra parte, la velocidad angular respecto al origen disminuye conforme  $m$  aumenta. En todos los casos se forma una anillo en el plano  $XY$ .

En la Fig. 3.39 mostramos la evolución temporal de  $x, z$  y  $\gamma$  para el caso no resonante y resonante y modos TM. Nótese el cambio tan drástico en las escalas asociadas al caso no resonante y al caso resonante. En este ejemplo, en el caso resonante la partícula recorre una distancia más de cien veces mayor en la dirección de propagación que la distancia asociada al caso no resonante. Evidentemente la partícula adquiere más energía en resonancia que en el caso fuera de resonancia. En ambos casos el factor  $\gamma$  oscila pero la amplitud de oscilación involucra la cuarta cifra significativa en el caso no resonante y la

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

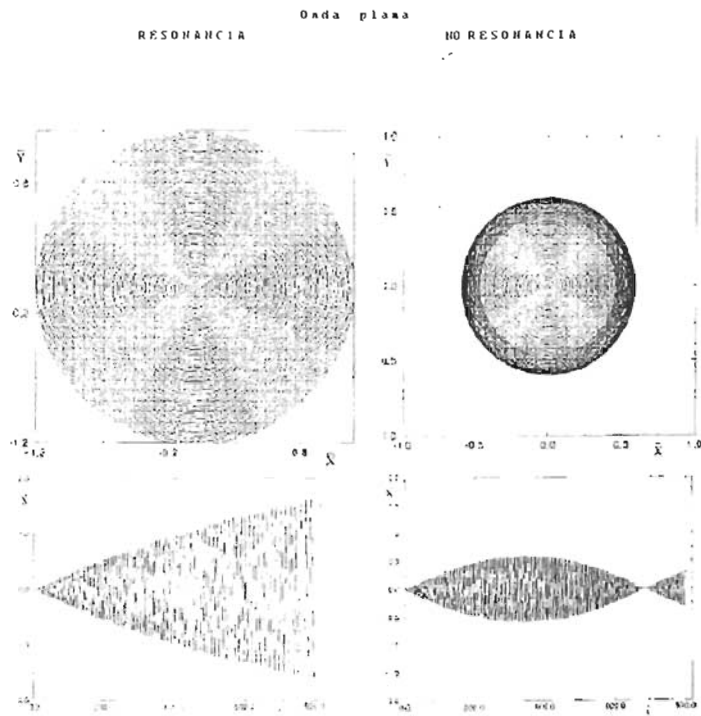


Figura 3.36: Trayectoria de la partícula cargada en  $(XY)$  para una onda plana circularmente polarizada, inicialmente en resonancia y en reposo (arriba izquierda) y no resonante (arriba derecha). Abajo, la evolución temporal de  $X$ . A la izquierda el caso resonante y a la derecha el no resonante. Las trayectorias en  $XY$  son espirales.

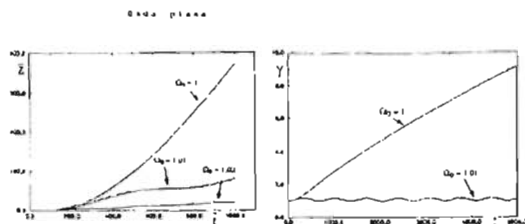


Figura 3.37: Evolución temporal de  $Z$  y  $\gamma$ , para el caso resonante ( $\Omega_0 = 1$ ) y el no resonante ( $\Omega_0 = 1.01$  y  $\Omega_0 = 1.02$ ). Con las mismas condiciones que en 3.36.

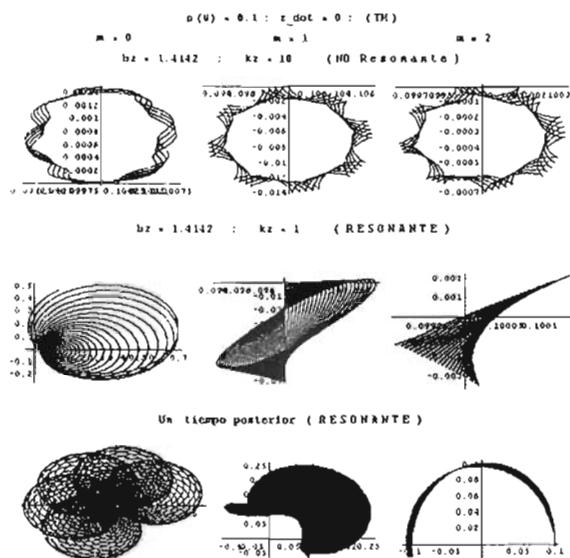


Figura 3.38: Trayectoria ( $XY$ ) ( $TM$ ). Inicialmente resonante, con:  $z(0) = 0$  (partícula inicialmente en reposo).  $k_{\perp} = 1$ .  $\rho(0) = 0.1$ .  $m = 0$  (izquierda),  $m = 1$  (centro) y  $m = 2$  (derecha). Arriba, con  $b_z = 1.4142$ ,  $k_z = 10$  (no resonante) y  $dt = 20/ck_{\perp}$ . Abajo, con  $b_z = 1.4142$ ,  $k_z = 1$  y  $dt = 100/ck_{\perp}$  (inicialmente resonante). Abajo (resonante), un tiempo posterior  $dt = 1000/ck_{\perp}$  ( $m = 0$ ),  $dt = 3000/ck_{\perp}$  ( $m = 1$ ) y  $dt = 15000/ck_{\perp}$  ( $m = 2$ ).

segunda cifra en el caso resonante para este ejemplo. Resultados semejantes se obtienen para otros valores de los parámetros involucrados. Asimismo, los resultados obtenidos cuando  $\omega \approx \omega_c$  son muy parecidos cualitativamente a los resonantes.

Debemos mencionar que en los casos analizados el comportamiento general de la trayectoria de la partícula en presencia de un campo magnético  $B_z$  y haces Bessel TE o haces Bessel circularmente polarizados es muy semejante a lo ya mencionado en párrafos anteriores para modos TM. En la Fig. 3.40 se ilustra el caso  $m = 0$  ( $R$ ), nótese el cambio de escala en cada una de las gráficas, el tiempo para el caso no resonante es menor para que se vea claro la oscilación de los valores graficados. En la Fig. 3.41 se muestra el caso para polarización circular izquierda (en la izquierda) y polarización circular derecha (en la derecha). Con  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$ ,  $k_z = 10$  (caso no resonante) y  $k_z = 1$  (caso resonante, sólo cuando  $b_z = 1.4142$ ). Hasta arriba, mostramos el caso en ausencia del campo externo ( $b_z = 0$ ), y vemos que se trata de una región de confinamiento. Obsérvese que, la polarización tiene influencia en el movimiento de la partícula, el radio de la trayectoria inicial es ligeramente mayor para ( $R$ ) que para ( $L$ ). Abajo,  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 10$  (caso no resonante). Posteriormente, con la misma intensidad del campo externo y  $k_z = 1$  se tiene resonancia con la frecuencia característica del ciclotrón,  $dt = 20/ck_{\perp}$ . Un tiempo posterior de  $dt = 200/ck_{\perp}$  y  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (hasta abajo). En la Fig. 3.42 se muestra la evolución temporal de  $z$ ,  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}$ , asociadas a la Fig. 3.41. Otros ejemplos se muestran en el Apéndice D.

Finalmente consideramos el caso en que  $\omega = \omega_c$  pero la partícula no está inicialmente en reposo. En los ejemplos estudiados la partícula se comporta a tiempos cortos de una forma muy similar a los anteriores ejemplos. No así a tiempos largos en los que se presenta un movimiento con oscilaciones más bruscas en las tres direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  que conlleva un aumento muy significativo en el factor  $\gamma$ .

Vemos entonces que se obtienen resultados interesantes aún cuando no hay resonancia inicial. Notamos que hay una gran riqueza en la dinámica del problema. Aquí, sólo se fijaron algunas de las CI, pues hay una gran diversidad de resultados que no se han explorado. Esto es, variando CI.

En el siguiente capítulo damos una breve discusión de lo que se tiene en mente para el trabajo a futuro. Así como, un resumen de los resultados encontrados hasta este momento.

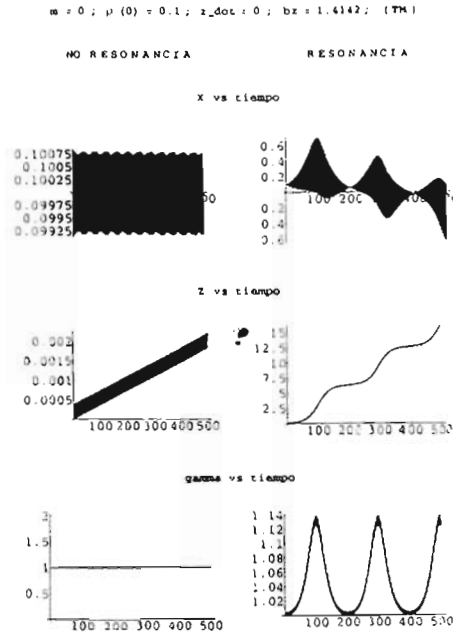


Figura 3.39: Evolución temporal de  $X$ ,  $Z$  y  $\gamma$  (TM). Inicialmente resonante, con:  $m = 0$ .  $b_z = 1.4142$ ,  $\dot{z}(0) = 0$  (partícula inicialmente en reposo). Izquierda, con  $k_z = 10$  (no resonante) y derecha  $k_z = 1$  (resonante),  $dt = 100/ck_{\perp}$ .

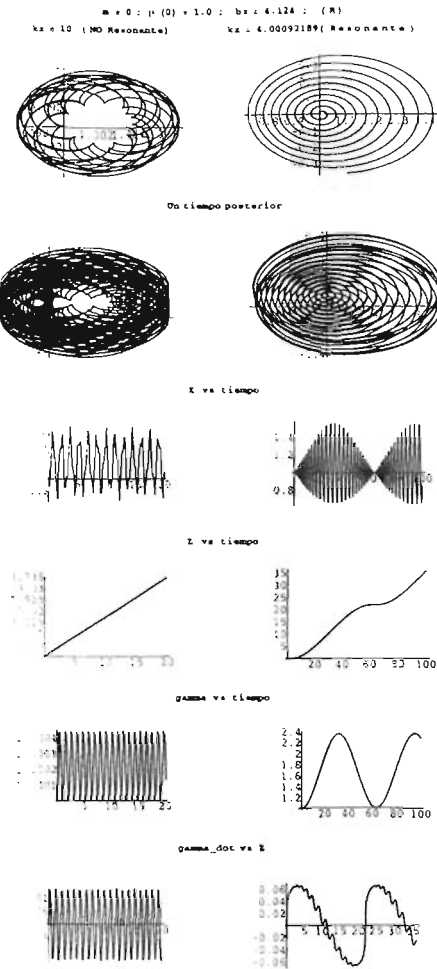


Figura 3.40: Evolución temporal de  $X$ ,  $Z$ ,  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}(R)$  con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_z = 4.124$ . A la izquierda  $k_z = 10$  (caso no resonante) y a la derecha  $k_z = 4.00092189$  (caso resonante). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba,  $dt = 20/ck_{\perp}$ ). Y luego, un tiempo posterior de  $dt = 100/ck_{\perp}$ . En las demás, el tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ . El eje horizontal es el tiempo.

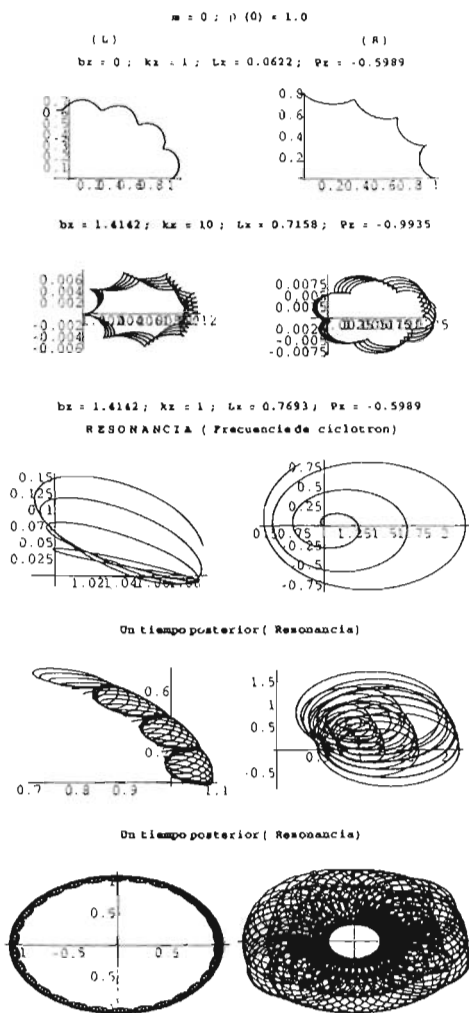


Figura 3.41: Trayectoria en  $XY$  para (L) y (R) con:  $m = 0$  y  $\rho(0) = 1$ . A la izquierda (L) y a la derecha (R), primero en ausencia del campo ( $b_z = 0$ ). Luego, el caso no resonante ( $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 10$ ). Posteriormente, en resonancia ( $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ ). El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ ,  $dt = 200/ck_{\perp}$  y  $dt = 2000/ck_{\perp}$ , respectivamente.

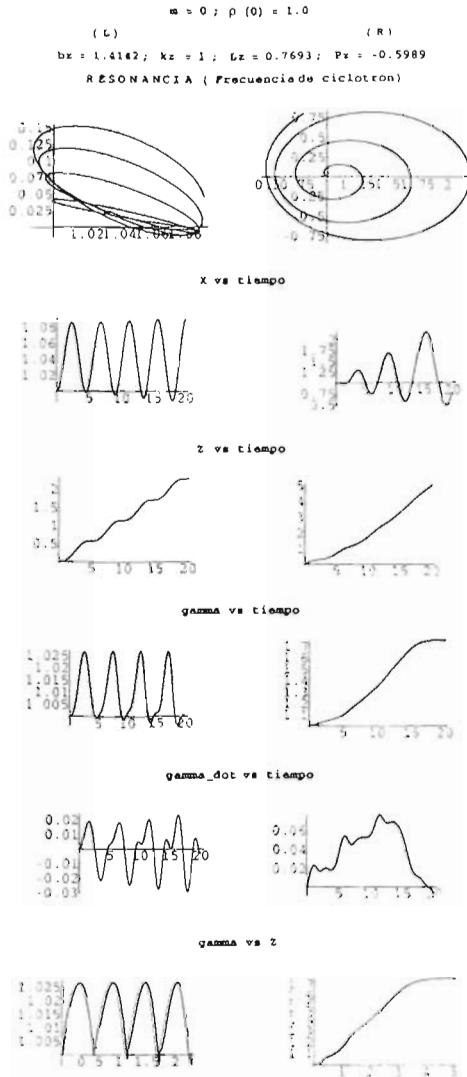


Figura 3.42: Evolución temporal de  $X$ ,  $Z$ ,  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}$  ( $L$ ) y ( $R$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_2 = 1.414$  y  $k_2 = 1$ . A la izquierda polarización circular izquierda y a la derecha polarización circular derecha. Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). Y hasta abajo,  $\gamma$  contra  $Z$ . El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck$ . El eje horizontal es el tiempo



# Capítulo 4

## Conclusiones y perspectivas

El uso de campos auxiliares (potenciales de polarización o de Hertz,  $\Pi_{1,2}$ ) para expresar a los potenciales electromagnéticos ( $\Phi$  y  $\vec{A}$ ) de los modos Bessel, nos permite identificar las polarizaciones TE y TM que están asociadas directamente a un potencial de Hertz. Sus combinaciones apropiadas permiten obtener modos Bessel con polarización circular.

Una formulación lagrangiana relativista de la interacción entre una partícula cargada y el campo electromagnético Bessel, nos llevó directamente a las ecuaciones de movimiento y a la identificación de las cantidades conservadas. En el caso de interacción con modos TE y TM se eligió un sistema de referencia privilegiado que viaja en la dirección  $z$ , y para el cual  $k_z = 0$  (límite *antiparaxial*). En este sistema las ecuaciones se simplifican ya que el campo electromagnético es independiente de la coordenada  $z$ . Cuando se analiza el caso de polarización circular no podemos utilizar este sistema inercial preferencial. Sin embargo, las propiedades de las funciones de Bessel llevan a expresiones sencillas de las ecuaciones de movimiento en términos de modos  $m \pm 1$ . El factor *uno* es manifestación del espín *uno* del fotón.

La importancia de identificar cantidades conservadas es múltiple. Por un lado disminuye el número de ecuaciones a resolver, por otro se traducen las condiciones iniciales en variables dinámicas conocidas.

A continuación resumimos los resultados que hemos encontrado para el movimiento de partículas cargadas en haces TE, TM y circularmente polarizados:

- Se analizan algunos casos con  $m = 0, 1, 2, 3$  y  $4$ .
- Existen regiones en el espacio de las condiciones iniciales  $\rho(0), \varphi(0)$  de

estructura anular que conducen a movimientos confinados y no confinados en el plano  $XY$ .

- Estas regiones están relacionadas con el argumento inicial de la función de Bessel  $J_m(k_\perp \rho)$  y los ceros de la función correspondiente. Sin embargo, no fue posible encontrar una expresión matemática cerrada que establezca esta relación y que necesariamente involucraría a otras condiciones iniciales como  $\dot{\varphi}(0)$  y  $\dot{\rho}(0)$ .
- En general, los casos  $m = 0, 2, 3, 4$ , son cualitativamente semejantes.
- Para polarizaciones TE y circular izquierda, existe una región central que es de confinamiento para  $m = 0, 2, 3, 4$  y de no confinamiento para  $m = 1$ . Si aumenta el orden del haz, es decir, aumentando  $m$ , la región central aumenta.
- Conforme nos alejamos del centro del haz (se analizó hasta  $k_\perp \rho(0) \sim 20$ ) las regiones de no confinamiento se hacen más delgadas. Y las regiones de confinamiento se hacen más anchas.
- Existen regiones en donde pequeños cambios en las CI (condiciones iniciales) nos dan resultados cualitativamente distintos.
- En presencia de un campo magnético externo uniforme y constante, se tiene confinamiento radial de la partícula si la intensidad de campo excede un umbral.
- Las trayectorias que sigue la partícula en presencia de éste campo externo son una especie de espirales (donita en  $XY$ ), y una trayectoria global helicoidal.
- Cuando la frecuencia del haz es igual a la frecuencia característica del ciclotrón (condición de resonancia), las trayectorias que toma la partícula (inicialmente en reposo) son espirales a tiempos cortos, similares a las encontradas para una onda EM plana. Para tiempos largos se manifiesta la contribución del campo óptico y magnético externo al movimiento de la partícula, al generarse un movimiento de precesión alrededor del origen. No sucede así para el caso de onda plana.

- Observando un comportamiento temporal muy distinto para el caso no resonante y para el caso resonante a lo largo de la dirección de propagación,  $z$ .
- Aunque para el caso resonante la energía que adquiere la partícula aumenta de manera considerable, se obtienen valores máximos de esta. De hecho, la energía oscila. Este comportamiento puede deberse a que el campo eléctrico del haz Bessel disminuye conforme aumenta  $\rho$ , a diferencia del límite idealizado de una onda plana en que la amplitud máxima de  $E$  no depende de la posición.

En el caso particular de los modos Bessel circularmente polarizados, el análisis fue directamente realizado en términos, tanto de las CI, como de los valores correspondientes a las cantidades conservadas. Se encontró que:

- A  $P_z$  fijo, se encontraron regiones de confinamiento y no confinamiento dependiendo del valor de  $\rho(0)$ .
- La anchura de estas regiones depende de  $P_z$ , de tal suerte que la región central de confinamiento es máxima para un valor de  $P_z$  aún no caracterizado. Si el valor de  $P_z$  es cada vez menos negativo, entonces las regiones de confinamiento son mayores.
- Para polarización circular izquierda y  $m = 0$  o  $m = 2$ , existe un umbral de  $P_z$ , a partir del cual, la región central de confinamiento, se convierte en una región de no confinamiento. En  $m = 1$ , la región central es de no confinamiento y aumenta a medida que  $P_z$  aumenta.
- Para polarización circular derecha y  $m = 0, 1, 2, 3$  se ha comprobado que la región central es de confinamiento si  $P_z < 0.37$ .
- Existe simetría en las ecuaciones al reemplazar polarización circular derecha por izquierda con el reemplazo simultáneo de  $m$  por  $-m$ .
- Cuando la región es de confinamiento, la fuerza radial y la velocidad radial oscilan entre dos valores, provocando que la partícula se quede confinada en una región anular.
- Cuando la región es de no confinamiento, la partícula es atraída (fuerza radial negativa) hacia el centro del haz, posteriormente es empujada (fuerza radial positiva) lejos del centro del haz y la partícula se escapa, ya que la velocidad radial tiende a un valor positivo.

- Para caracterizar una región de confinamiento y no confinamiento, no es suficiente conocer los valores de las variables dinámicas  $L_z$  y  $P_z$ . Esto se debe a que  $L_z$  no es una función biyectiva de  $\rho(0)$  y, para un valor de  $\rho(0)$  en regiones de no confinamiento y otro valor de  $\rho(0)$  en regiones de confinamiento se puede obtener un mismo valor de  $L_z$ .
- En presencia de campo magnético externo uniforme, las situaciones no son tan simples. Sin embargo, algunas de las trayectorias son espirales como en el caso para polarización TE. La trayectoria global sigue siendo helicoidal, es decir se forma una donita en el plano  $XY$ .
- Cuando la partícula está inicialmente en reposo y en resonancia, los resultados son aún más interesantes. Debido a que, por ejemplo, la velocidad en la dirección de propagación es mucho mayor en el caso resonante que en el caso no resonante. En algunos casos del orden de unas diez veces mayor, en otros del orden de cien veces mayor. Y las demás cantidades reportas ( $Z$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\gamma}$ ) también muestran un comportamiento similar.
- Para polarización circular derecha esa misma componente de la velocidad ( $\dot{z}$ ) es mayor que para polarización circular izquierda, cuando hay resonancia.
- Las trayectorias son espirales dentro de la donita que se forma en el plano  $XY$ . Cualitativamente, para polarización circular derecha la contribución de  $B_{zE}$  y del campo EM al movimiento de la partícula es mayor que para el caso con polarización circular izquierda.
- Cuando la intensidad del campo cambia, entonces también cambian las trayectorias que puede tomar la partícula inicialmente en reposo y en resonancia. Como se ilustró para polarización ( $R$ ).
- Si la partícula no está inicialmente en reposo, pero si en resonancia, los resultados a tiempos cortos, son semejantes (cualitativamente). En cambio para tiempos largos y para el caso particular con  $m = 0$  y ( $R$ ) las trayectorias sí son muy distintas. Es decir, siguen siendo espirales, pero cuando  $\dot{z} \neq 0$  las espirales siguen creciendo. Lo que no sucede si  $\dot{z} = 0$ .

Si la partícula no está inicialmente en reposo, tenemos que:

- Con polarización circular derecha, el caso resonante, es un tanto distinto. a pesar de tener las trayectorias espirales. En el caso  $m = 1$ . con el tiempo de graficacion aún no se tienen esas donitas que se tiene para el caso  $m = 0$  y  $b_z \sim 4$ .
- Para el caso ( $R$ ) y  $m = 0$  con  $b_z \sim 1.5$ . Las trayectorias son muy distintas para cuando  $b_z \sim 4$ . Teniendo espirales que para tiempos largos varian su tamaño.
- Cuando tenemos polarización circular izquierda y  $\dot{z} \neq 0$ , las trayectorias son análogas a las obtenidas para el caso inicialmente en reposo. No siguen la misma trayectoria, pero de manera global, en ambos casos se dibujan las donitas en el plano  $XY$ .

En este trabajo hemos mostrado que un haz Bessel en interacción con una partícula cargada. puede dar origen a trayectorias acotadas en la dirección radial. Este fenómeno es ampliamente conocido y explotado para campos magnéticos externos. El presente estudio muestra también la riqueza del sistema de ecuaciones dinámico correspondiente. Para regiones en el espacio de condiciones iniciales que presentan un comportamiento estable. se ha sugerido emplear técnicas de mecánica clásica que permitan obtener soluciones analíticas aproximadas. Además, resulta relevante analizar la posibilidad de tener efectos caóticos. Ello requiere de una mejor caracterización de las regiones para las cuales condiciones iniciales cercanas conducen a evoluciones muy diferentes. Entre otras cosas se requiere mejorar la precisión de nuestros cálculos.

El estudio realizado en este trabajo, creemos que es de importancia fundamental, debido a que, en la actualidad se quiere tener control y manipulación óptica de la materia para diversos fines. Como por ejemplo, el confinamiento de partículas, el usar pulsos ultracortos para lograr intensidades tan grandes como las aquí mencionadas y poder transmitir bastante energía a la materia en la dirección de propagación (aunque la idea es muy ambiciosa. no es imposible. y usar estos pulsos como un acelerador de partículas).

Por ello, la posibilidad de ampliar este estudio para permitir su verificación experimental en física de plasmas es sin duda, la perspectiva más ambiciosa que tenemos en mente.



# Apéndice A

## Modos TE y TM

### A.1. Polarización TE, $b_z \neq 0$

En la siguiente página se muestra la proyección de la trayectoria en el plano  $XY$ , para el caso  $m = 1$ ,  $b_z = 0.2$ . Nótese que las CI que elegimos son tales que si  $b_z = 0$  se tendría no confinamiento mientras que las distintas trayectorias aquí ilustradas están confinadas. En las dos primeras gráficas (arriba)  $\rho(0) = 1$  "y las mismas CI". Obsérvese que, las trayectorias dentro de la dona son espirales, en la gráfica de la derecha el tiempo es  $dt = 500/(k_{\perp}c)$ . En medio las gráficas tienen  $\rho(0) = 0.774$ , se observa que si  $b_z = 0.0001$  (derecha) la espiral es muy amplia con  $dt = 10/(k_{\perp}c)$  y con  $b_z = 0.2$  (izquierda) las trayectorias espirales son de menor tamaño, aquí  $dt = 100/(k_{\perp}c)$ . En la última sólo sabemos que  $m = 1$  y  $b_z = 0.2$  y  $\rho(0) = 1$ .

### A.2. Polarización TM

Por ejemplo, para  $\mathbf{m} = 4$ , las ecuaciones de movimiento en el sistema privilegiado ( $k_z = 0$ ) explícitamente son:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} = & \frac{eE_0}{\gamma m_0 c} \dot{z} \frac{1}{2} [J_3(k_{\perp} \rho) - J_5(k_{\perp} \rho)] \text{sen}(4\varphi - \omega t) + \\ & + \frac{e}{\gamma m_0 c} \rho \dot{z} B_{zE} + \rho \dot{\varphi}^2 - \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\rho} \dot{z} \frac{k_{\perp}}{k_t} J_4(k_{\perp} \rho) \cos(4\varphi - \omega t). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

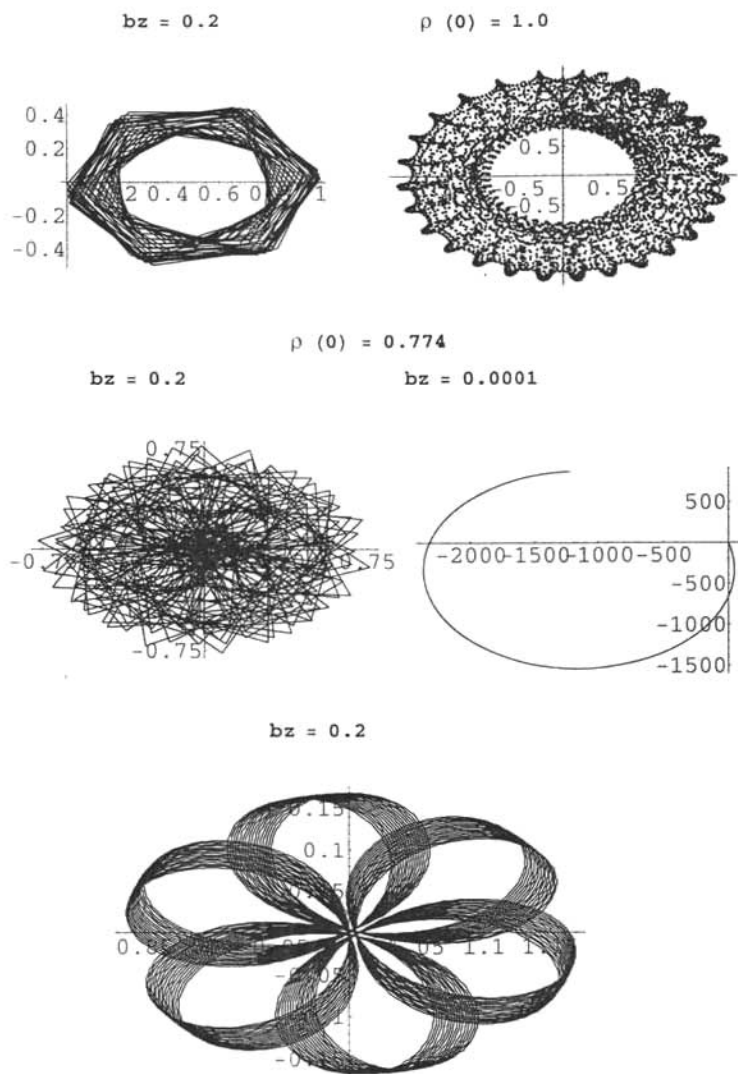


Figura A.1: Trayectoria  $(XY)$  (TE) con:  $m = 1$ ,  $b_z \neq 0$ .



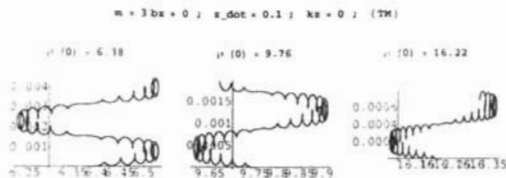


Figura A.2: Trayectoria  $(XY)$  (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1, k_{\perp} = 1, k_z = 0, e_0 = 0.2, \rho(0) = 0.1$  y  $\varphi(0) = 0$  (arriba). A la izquierda  $\rho(0) = 6.38$  (primer cero de  $J_3$ ),  $\rho(0) = 9.76$  (segundo cero de  $J_3$ ) y a la derecha  $\rho(0) = 16.22$  (cuarto cero de  $J_3$ ). El tiempo de graficación es  $dt = 5000/ck_{\perp}$ .

$$\ddot{\varphi} = -\frac{e}{\gamma m_0 c \rho} \dot{\rho} B_{zE} - \frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} + \frac{e E_0}{\gamma m_0 c \rho} \frac{1}{k_{\perp} \rho} [J_3(k_{\perp} \rho) + J_5(k_{\perp} \rho)] \cos(4\varphi - \omega t) - \frac{e E_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{\varphi} \dot{z} \frac{k_{\perp}}{k_t} J_4(k_{\perp} \rho) \cos(4\varphi - \omega t), \quad (\text{A.2})$$

$$\ddot{z} = \frac{e E_0}{\gamma m_0 c} \left[ c \frac{k_{\perp}}{k_t} J_4(k_{\perp} \rho) \cos(4\varphi - \omega t) - \dot{\rho} \frac{1}{2} [J_3(k_{\perp} \rho) - J_5(k_{\perp} \rho)] \sin(4\varphi - \omega t) - \rho \dot{\varphi} \frac{4}{k_{\perp} \rho} J_4(k_{\perp} \rho) \cos(4\varphi - \omega t) \right] - \frac{e E_0}{\gamma m_0 c^2} \dot{z}^2 \frac{k_{\perp}}{k_t} J_4(k_{\perp} \rho) \cos(4\varphi - \omega t). \quad (\text{A.3})$$

En la Fig. A.2 se ilustra para el caso con  $m = 3$ , aquí  $k_{\perp} \rho(0)$  tiene el valor del primer y segundo cero de  $J_3$  izquierda y centro, respectivamente. A la derecha tenemos el valor del cuarto cero de  $J_3$ . Nótese que la partícula está confinada.



## Apéndice B

### Polarización ( $L$ ) y $b_z = 0$

#### B.1. $m = 0$

En la siguiente tabla se muestran las regiones de confinamiento y no confinamiento para el caso  $m = 0$  y  $P_z = -1.13137792092$  (Tabla B.1). También en este caso podemos verificar que los ceros de la función  $J_0$  (2.40, 5.52, 8.65, 11.79, 14.93,...), se encuentran en las regiones de no confinamiento, y para ese valor es donde  $L_z$  alcanza un máximo o un mínimo, según el signo de  $L_z$ . Y los ceros de  $J_1$  (3.83, 7.02, 10.17, 13.32, 16.47,...), están en la región de confinamiento.

Para la variable dinámica  $L_z$  (ver Tabla B.2): La correspondencia es, por ejemplo en el segundo renglón de la tabla en términos de  $L_z$ ,  $L_z(\rho(0))$ ,  $L_z(5.21) = -0.2532023$  y  $L_z(3.10) = 0.1319257$ ,  $L_z(5.22) = -0.253977$  y  $L_z$

Atrapada		No Atrapada	
0.01	$\leq \rho(0) \leq$	1.32	3.09
5.21	$\geq \rho(0) \geq$	3.10	6.22
6.23	$\leq \rho(0) \leq$	8.44	8.45
11.66	$\geq \rho(0) \geq$	9.23	12.39
12.41	$\leq \rho(0) \leq$	14.80	14.81
17.98	$\geq \rho(0) \geq$	15.43	

Tabla B.1:  $m = 0$  y  $P_z = -1.13137792092$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
$7.071 \times 10^{-6}$	$\leq Lz \leq$	0.098251	0.099388	$\leq Lz \leq$	0.133197
-0.253202	$\leq Lz \leq$	0.131926	-0.253977	$\leq Lz \leq$	-0.200640
-0.198813	$\leq Lz \leq$	0.324713	0.279247	$\leq Lz \leq$	0.325393
-0.384308	$\leq Lz \leq$	0.277392	-0.384795	$\leq Lz \leq$	-0.319153
-0.316898	$\leq Lz \leq$	0.432441	0.384451	$\leq Lz \leq$	0.432957
-0.477782	$\leq Lz \leq$	0.382349			

Tabla B.2:  $m = 0$  y  $P_z = -1.13137792092$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
0.01	$\leq \rho(0) \leq$	1.72	1.73	$\leq \rho(0) \leq$	2.94
5.39	$\geq \rho(0) \geq$	2.95	5.40	$\leq \rho(0) \leq$	6.13
6.14	$\leq \rho(0) \leq$	8.47	9.09	$\geq \rho(0) \geq$	8.48
11.75	$\geq \rho(0) \geq$	9.10	11.76	$\leq \rho(0) \leq$	12.30
12.31	$\leq \rho(0) \leq$	14.81	15.30	$\geq \rho(0) \geq$	14.82
18.05	$\geq \rho(0) \geq$	15.31			

Tabla B.3:  $m = 0$  y  $P_z = -0.28284448023$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

(6.22) = -0.2006399...

Ahora los resultados para  $P_z = -0.28284448023$  (ver Tabla B.3 y la Tabla B.4).

Aquí observamos que, la primera región ( $\rho(0) \in (0, 1.72]$ ) es más pequeña que en el caso con  $P_z = -0.56568896046$  ( $\rho(0) \in (0, 1.63]$ ), tanto para  $k_{\perp}\rho(0)$ , como para  $L_z$ .

Otra cosa que resalta en las tablas, es que en las regiones de no confinamiento, mientras más lejos nos encontremos del centro del haz (por ejemplo,  $\rho(0) = 12.30$ ), más delgada es ésta región y, las regiones de confinamiento se ensanchan, con respecto a  $k_{\perp}\rho(0)$ . Porque con respecto a  $L_z$  positivo y negativo no podemos establecer lo mismo, ya que el crecimiento no es monótono.

La región central ( $\rho(0) \in (0, 1.63]$ ) aumenta conforme  $P_z$  es menos negativo, y existe un valor de  $P_z$ , que no se ha caracterizado completamente, el cual maximiza dicha región. debido a que si aumentamos el valor de  $P_z$ , ésta

Atrapada			No Atrapada		
$7.071 \times 10^{-6}$	$\leq Lz \leq$	0.140801	0.141737	$\leq Lz \leq$	0.150143
-0.263404	$\leq Lz \leq$	0.149140	-0.263731	$\leq Lz \leq$	-0.216028
-0.214414	$\leq Lz \leq$	0.326658	0.300578	$\leq Lz \leq$	0.327242
-0.387310	$\leq Lz \leq$	0.299123	-0.387452	$\leq Lz \leq$	-0.337310
-0.335965	$\leq Lz \leq$	0.432957	0.406524	$\leq Lz \leq$	0.433460
-0.4796598	$\leq Lz \leq$	0.404910			

Tabla B.4:  $m = 0$  y  $P_z = -0.28284448023$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
$7.071 \times 10^{-6}$	$\leq Lz \leq$	0.136974	0.137943	$\leq Lz \leq$	0.154882
$\vdots$	$\leq Lz \leq$	0.153971			

Tabla B.5:  $m = 0$  y  $P_z = 0.0$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

región no aumenta (ver Tabla B.5),  $P_z = 0$ . Cabe señalar que las velocidades en la dirección de  $z$ ,  $\dot{z}$ , son relativistas.

Aumentamos el valor de  $P_z$ , por ejemplo a  $P_z = 0.56568896046$  (ver Tabla B.6). En ésta situación, la región central ( $k_{\perp}\rho(0) \in (0, 2.92]$ ) es de no confinamiento, y conforme aumentamos el valor de  $P_z$  aumenta ésta región con respecto a  $k_{\perp}\rho(0)$ . Por ejemplo,  $P_z = 0.6$ , aquí  $k_{\perp}\rho(0) \in (0, 4.12]$  y  $-0.064387 \leq Lz \leq 7.071 \times 10^{-6}$ .

Entonces, encontramos que: si  $P_z < 0.52$  la región central es de confinamiento, y si  $P_z > 0.53$  entonces la región central es de no confinamiento.

Un ejemplo para el caso en que  $P_z = 0.52$  se ilustra en la Fig. B.1.

Atrapada			No Atrapada		
			0.000706	$\leq Lz \leq$	0.152094
-0.251896	$\leq Lz \leq$	0.151128			

Tabla B.6:  $m = 0$  y  $P_z = 0.56568896046$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

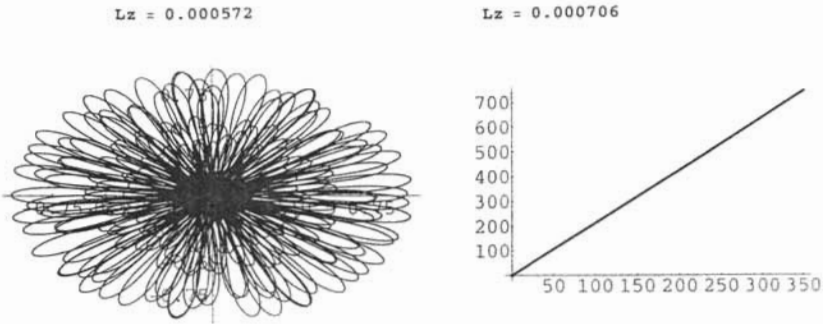


Figura B.1: Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $P_z = 0.52$  y  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 0.09$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 0.10$  (no confinamiento).

Atrapada			No Atrapada		
			1.82	$\geq \rho(0) \geq$	0.01
1.83	$\leq \rho(0) \leq$	3.63	4.65	$\geq \rho(0) \geq$	3.64
6.97	$\geq \rho(0) \geq$	4.66	6.98	$\leq \rho(0) \leq$	7.78
7.79	$\leq \rho(0) \leq$	10.08	10.76	$\geq \rho(0) \geq$	10.09
13.31	$\geq \rho(0) \geq$	10.77	13.32	$\leq \rho(0) \leq$	13.94
13.95	$\leq \rho(0) \leq$	16.41			

Tabla B.7:  $m = 1$  y  $P_z = -0.56568896046$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

## B.2. $m = 1$

A continuación se presentan los resultados para el caso con  $m = 1$ . Por ejemplo, con  $P_z = -0.56568896046$  (ver Tabla B.7). Observamos que la región central ( $\rho(0) \in (0, 1.82]$ ) es de no confinamiento y es más grande que en el caso con  $P_z = -0.28284448023$  ( $\rho(0) \in (0, 1.73]$ ), y una vez más, tenemos traslape con los valores de  $L_z$  (ver Tabla B.8).

Algo análogo sucede en el caso de  $P_z = -1.1313\dots$  y comprobaremos que entre más negativo sea  $P_z$  la región ( $\rho(0) \in (0, 1.82)$ ) aumenta (con expectativas a un límite). la Tabla (B.9) muestra los resultados para el valor

Atrapada			No Atrapada		
			-0.792911	$\leq Lz \leq$	-0.716271
-0.791869	$\leq Lz \leq$	-0.511145	-0.533949	$\leq Lz \leq$	-0.510234
-1.010685	$\leq Lz \leq$	-0.535372	-1.011179	$\leq Lz \leq$	-0.953440
-0.951554	$\leq Lz \leq$	-0.360156	-0.399699	$\leq Lz \leq$	-0.359528
-1.125972	$\leq Lz \leq$	-0.401503	-1.126280	$\leq Lz \leq$	-1.065498
-1.063275	$\leq Lz \leq$	-0.259641			

Tabla B.8:  $m = 1$  y  $P_z = -0.56568896046$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
			1.96	$\geq \rho(0) \geq$	0.01
1.97	$\leq \rho(0) \leq$	3.55	4.79	$\geq \rho(0) \geq$	3.56
6.88	$\geq \rho(0) \geq$	4.80	6.89	$\leq \rho(0) \leq$	7.87
7.88	$\leq \rho(0) \leq$	10.06	10.87	$\geq \rho(0) \geq$	10.07
13.25	$\geq \rho(0) \geq$	10.88	13.26	$\leq \rho(0) \leq$	14.02
14.03	$\leq \rho(0) \leq$	16.40			

Tabla B.9:  $m = 1$  y  $P_z = -1.13137792092$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

de  $P_z = -1.13137792092$ . Y en términos de la variable dinámica  $L_z$  (ver Tabla B.10).

En las tablas anteriores encontramos que conforme nos alejamos del centro del haz las regiones de no confinamiento son más delgadas con respecto  $k_{\perp}\rho(0)$  y las regiones de confinamiento aumentan.

Observamos también que (Tablas: B.9 - B.10), si  $P_z$  es menos negativo, la primera región de confinamiento ( $\rho(0) \in (1.97, 3.55)$ ) aumenta con respecto a  $k_{\perp}\rho(0)$  y con respecto a  $L_z$ . Alcanza un ancho máximo para cierto valor de  $P_z$  (aún no caracterizado).

Comprobando lo anterior, para  $P_z = 0$  (ver Tablas: B.11 - B.12). Para éste caso, las velocidades ( $\dot{z}$ ) son relativistas ( $\dot{z} \sim 0.6$ ), pero si  $P_z$  es más grande digamos  $P_z = 0.6$ , las velocidades ya no son tan cercanas a la de la luz ( $c$ ), bueno,  $\dot{z} = 0.09c$ , recordando que  $c = 1$ .

Atrapada			No Atrapada		
			-0.841157	$\leq Lz \leq$	-0.756982
-0.839878	$\leq Lz \leq$	-0.564720	-0.582453	$\leq Lz \leq$	-0.563477
-1.043586	$\leq Lz \leq$	-0.584082	-1.044476	$\leq Lz \leq$	-0.983088
-0.983088	$\leq Lz \leq$	-0.403269	-0.454757	$\leq Lz \leq$	-0.402460
-1.163030	$\leq Lz \leq$	-0.456836	-1.163681	$\leq Lz \leq$	-1.093170
-1.090728	$\leq Lz \leq$	-0.301292			

Tabla B.10:  $m = 1$  y  $P_z = -1.13137792092$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
			1.72	$\geq \rho(0) \geq$	0.01
1.73	$\leq \rho(0) \leq$	3.61			

Tabla B.11:  $m = 1$  y  $P_z = 0.0$  en términos de  $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda.

Atrapada			No Atrapada		
			-1.000708	$\leq Lz \leq$	-1.018812
-1.017885	$\leq Lz \leq$	-0.786770			

Tabla B.12:  $m = 1$  y  $P_z = 0.0$  en términos de  $L_z$ . Polarización circular izquierda.



Además, se ha encontrado que para el valor de  $P_z = 0.6$  la región de no confinamiento (la central) tiene un ancho tal que el valor de  $k_{\perp}\rho(0) \in (0, 4.12]$ , y  $L_z \in [-0.726217, -0.485051]$ . Mostrando así, que la región central que es de no confinamiento aumenta conforme aumenta el valor de  $P_z$ .



## Apéndice C

### Polarización circular y $b_z \neq 0$

Primero veamos el caso  $m = 3$  y  $\rho(0) = 2.20$ , con  $b_z = 0.02$ , en la siguiente página. Polarización izquierda (arriba). La situación en ausencia del campo externo ( $B_{zE} = 0$ ) es una región de confinamiento con forma de donita muy delgada, en presencia del campo externo (uniforme) las trayectorias son distintas.

Estos resultados son análogos en el caso de polarización circular derecha ( $R$ ). Como se muestra en la Fig. C.2, a la izquierda ( $L$ ) y a la derecha ( $R$ ).

En la Fig. C.3 se tienen las mismas CI que la de la Fig. C.2 (derecha), mostramos la trayectoria de la partícula a tiempos cortos,  $dt = 5/(k_{\perp}c)$  (izquierda), y observemos el cambio de dirección (y de concavidad) en la trayectoria que sigue la partícula. Para un tiempo posterior,  $dt = 200/(k_{\perp}c)$ , se tienen una vez más las espirales, como en el caso de polarización izquierda, TE y TM.

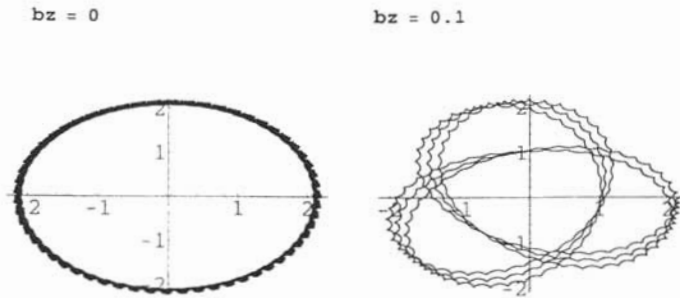


Figura C.1: Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $m = 3$ ,  $\rho(0) = 2.20$ ,  $B_{zE} = 0$  (izq.) y con  $b_z = 0.02$  (der.).

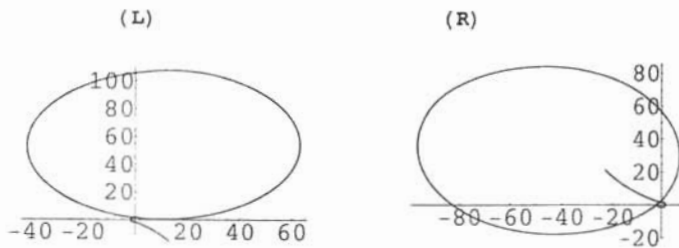


Figura C.2: Trayectoria ( $XY$ ) con:  $m = 0$ ,  $b_z = 0.01$  y  $\rho(0) = 1.64$ . A la izquierda con polarización ( $L$ ) y a la derecha con polarización ( $R$ ). Ambas con  $dt = 35/(k_c)$ .

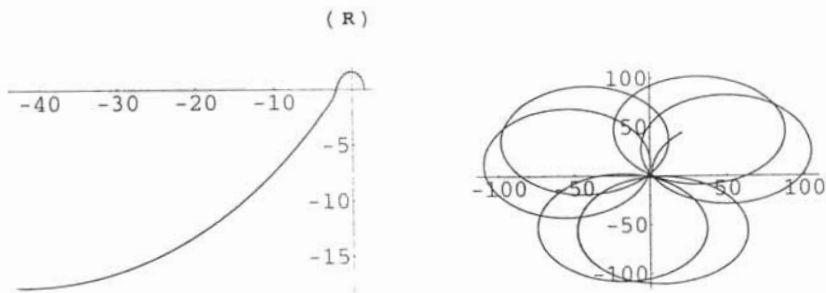


Figura C.3: Trayectoria  $(XY)$ , polarización circular *derecha* con:  $m = 0$ ,  $b_z = 0.01$  y  $\rho(0) = 1.64$ . A la izquierda con un tiempo de  $dt = 5/(k_{\perp}c)$  y a la derecha con  $dt = 200/(k_{\perp}c)$ .



## Apéndice D

### Figuras para el caso Resonante

#### D.1. Modos TE

En la Fig. D.1 ilustramos los ejemplos para el caso resonante y el caso no resonante con  $m = 1$  y  $m = 2$  (la partícula inicialmente en reposo). Una vez más, se observa que el campo contribuye al movimiento de la partícula según el orden del haz. En este caso favorece al orden  $m = 1$  (ver el penúltimo renglón), las trayectorias que sigue la partícula son espirales y aumenta el número de ellas cuando aumenta la intensidad del campo externo (último renglón).

La evolución temporal de algunas cantidades como por ejemplo,  $\rho$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $\ddot{\rho}$  y  $\dot{\rho}$  se ilustran en la Fig. D.2 para el caso no resonante (izquierda) y el caso resonante (derecha). La partícula está inicialmente en reposo y en resonancia. Para el caso resonante se muestran dos gráficas para cada cantidad reportada. Las de la izquierda es a un tiempo  $dt = 50/ck_{\perp}$  y las de la derecha es a  $dt = 500/ck_{\perp}$ . En particular, para el caso inicialmente resonante y no resonante, la gráfica de  $z$  contra *tiempo*, nos muestra cualitativamente el resultado obtenido por Bourdier y sus colaboradores [23, 24]. Nótese que aquí  $\gamma$  alcanza un máximo. También, se observa un cambio drástico en la evolución temporal de  $x$ , la aceleración y la velocidad radial ( $\ddot{\rho}$  y  $\dot{\rho}$ , respectivamente).

Cabe señalar que cuando la frecuencia del haz es cercana a la del ciclotrón,  $\omega \approx \omega_c$ , los resultados son muy semejantes (cualitativamente). Esto lo ilustramos en la Fig. D.3, dejamos fijo  $k_z$  y variamos la intensidad del campo magnético externo.

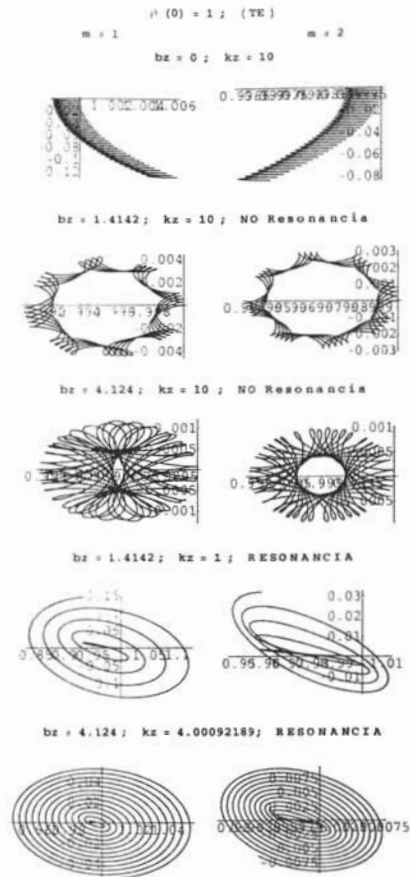


Figura D.1: Trayectoria  $(XY)$  ( $TE$ ) con:  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha). Hasta arriba con  $b_z = 0$  y  $k_z = 10$ . El caso no resonante con  $k_z = 10$ ,  $b_z = 1.4142$  (segundo renglón) y  $b_z = 4.124$  (tercer renglón). En los últimos dos renglones, el caso resonante, con  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$  (penúltimo renglón) y  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 4.0009$ . Con un tiempo de graficación  $dt = 20/ck_{\perp}$ .



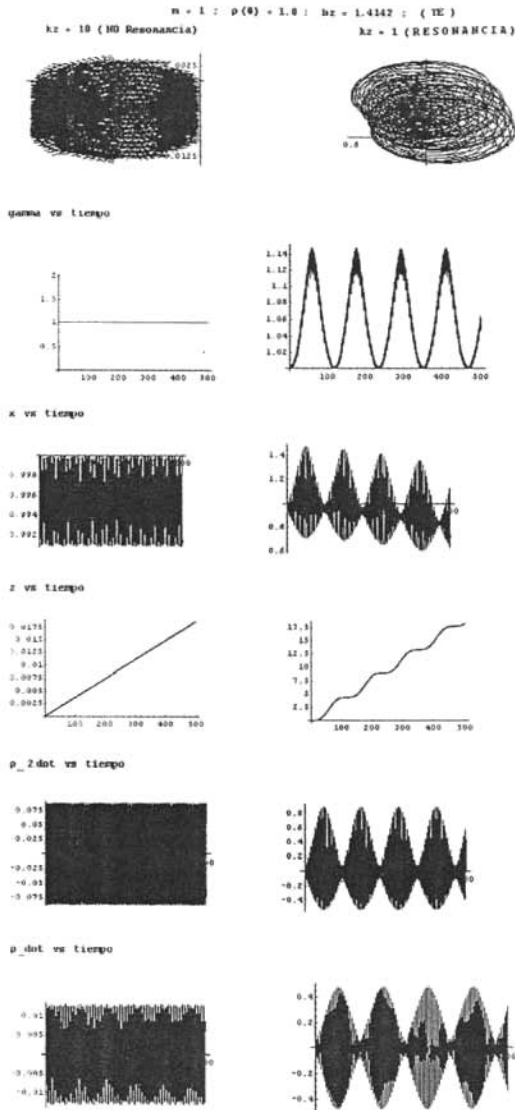


Figura D.2: Evolución temporal (TE) para  $\gamma$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $\dot{p}$  y  $\dot{\rho}$  con:  $\rho(0) = 1$ ,  $m = 1$  y  $bz = 1.4142$ . A la izquierda el caso no resonante ( $k_z = 10$  y  $dt = 25/ck_{\perp}$ ) y a la derecha el caso resonante ( $k_z = 1$ ). Para el caso resonante, hay dos tiempos de graficación,  $dt = 25/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 500/ck_{\perp}$  (derecha).

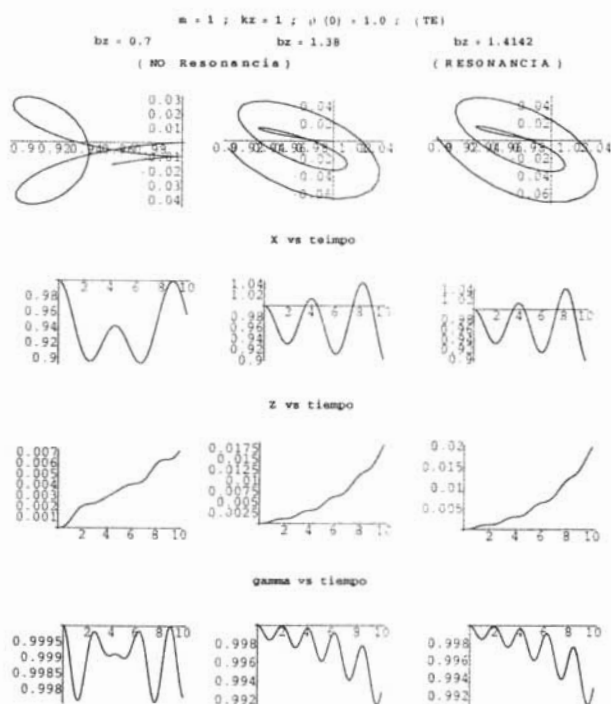


Figura D.3: Evolución temporal (a tiempos cortos) de  $x$ ,  $z$  y  $\gamma$  (TE) con  $b_z = 0.7$  (izquierda),  $b_z = 1.38$  (centro) y  $b_z = 1.4142$  (derecha). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). Izquierda y centro caso no resonante y en la derecha caso *resonante*. El tiempo de graficación es  $dt = 10/ck_{\perp}$ . Respectivamente, el tiempo es el eje horizontal.

## D.2. Modos ( $L$ ) y ( $R$ )

### Resultados para ( $L$ )

En al Fig. D.4 se muestra el caso con polarización circular izquierda,  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$ ,  $b_z = 4.124$ . En la parte superior, se tiene la proyección de la partícula en el plano  $XY$  para el caso no resonante (izquierda) y para el caso sí resonante (derecha). Posteriormente, se ilustra la evolución temporal de  $x$  y  $z$ . Luego, como una curiosidad muestro  $\gamma$  contra  $z$ ,  $\dot{\gamma}$  contra  $z$  y  $\dot{z}$  contra  $z$ . El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ . El eje del tiempo y de  $z$  será el eje horizontal, respectivamente. Obsérvese que las CI son las mismas que en la Fig. 3.40.

### Resultados para ( $R$ )

En la Fig. D.5 mostramos el caso con **resonancia** y *no resonancia*, para polarización circular derecha. Con  $m = 0$ ,  $k_z = 4.00092189$ ,  $\rho(0) = 1$ ,  $b_z = 2.062$  (caso no resonante),  $b_z = 4.104$  ( $\omega \approx \omega_c$ , también no resonante) y  $b_z = 4.124$  ( $\omega = \omega_c$ , caso resonante). También ilustramos la evolución temporal de  $x$ ,  $z$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{z}$  y  $\dot{\rho}$ . Nótese, el cambio de escala en los ejes para el caso no resonante y el caso cerca de la resonancia.

Como un ejemplo más, en la Fig. D.6 se muestra la proyección de la trayectoria de la partícula para el caso *resonante* con  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y distintos valores del campo externo. Nótese que  $\dot{z} = 0$ , entonces  $P_z$  tendrá un valor para cada caso. Los valores del campo externo son  $b_z = 1.4142$  ( $k_z = 1$ ) en la izquierda y  $b_z = 4.124$  ( $k_z = 4.00092189$ ) en la derecha. Los tiempos son (de arriba a abajo)  $dt = 20/ck_{\perp}$ ,  $dt = 200/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 100/ck_{\perp}$  (derecha), y finalmente,  $dt = 2000/ck_{\perp}$ . Vemos distintas trayectorias para la partícula (inicialmente en reposo y en resonancia) según la intensidad del campo.

### resultados con $P_z$ fijo

Ahora se ilustran ejemplos cuando se deja fijo el momentum lineal a lo largo del eje  $z$ ,  $P_z = -0.28284448023$ , y para ello es necesario variar  $\dot{z}$ . La consecuencia es que la partícula no está inicialmente en reposo, esto es para ambas polarizaciones ( $L$  y  $R$ ). Los resultados obtenidos son análogos. Sin

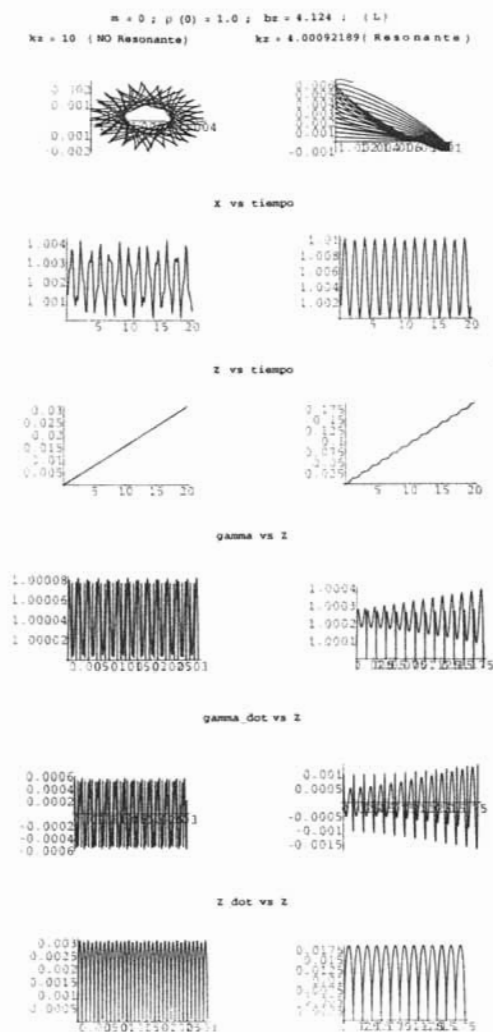


Figura D.4: Evolución temporal de  $x$ ,  $z$ . Evolución a lo largo de  $z$  para  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}$  y  $\dot{z}$  ( $L$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_2 = 4.124$ . A la izquierda  $k_z = 10$  (caso no resonante) y a la derecha  $k_z = 4.00092189$  (caso resonante). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ . El eje horizontal es tiempo y  $z$ , respectivamente.

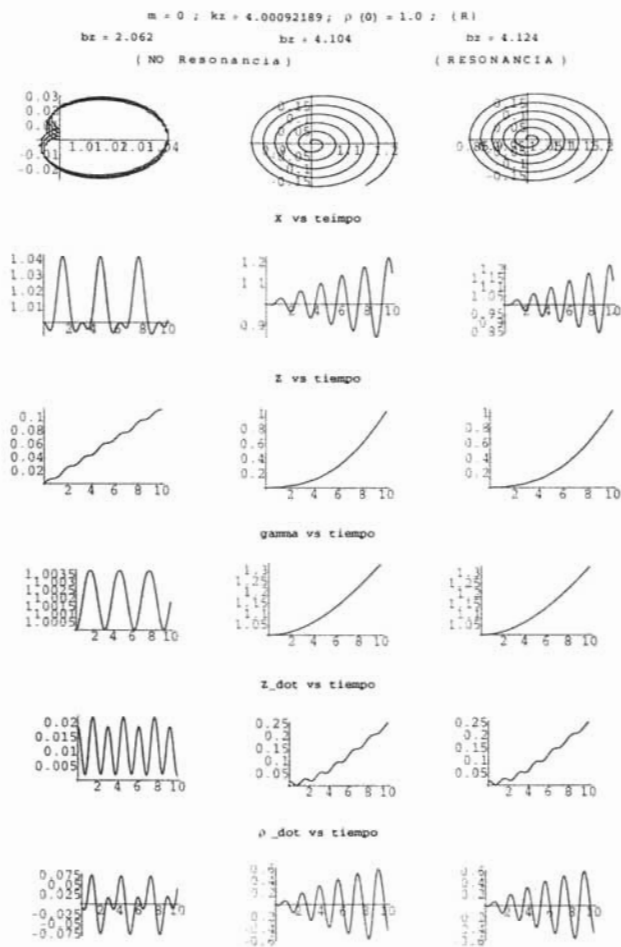


Figura D.5: Evolución temporal de  $x$ ,  $z$  y  $\gamma$  ( $R$ ) con  $b_z = 2.062$  (izquierda),  $b_z = 4.104$  (centro) y  $b_z = 4.124$  (derecha). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). Izquierda y centro caso no resonante y en la derecha caso *resonante*. El tiempo de graficación es  $dt = 10/ck_{\perp}$ . Respectivamente, el tiempo es el eje horizontal.

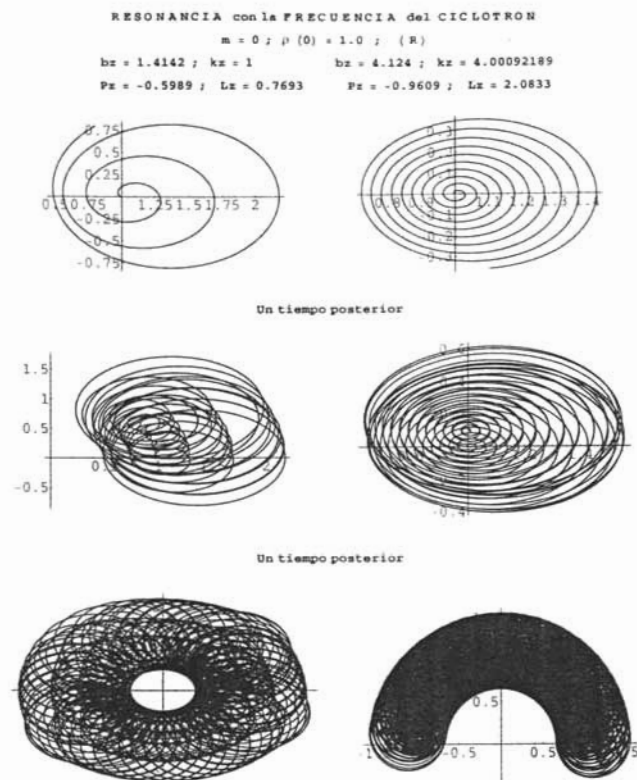


Figura D.6: Trayectoria en el plano  $XY$  ( $R$ ) inicialmente en resonancia con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$ . A la izquierda  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ . A la derecha  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 4.00092189$ . Los tiempos de graficación son (de arriba a abajo)  $dt = 200/c k_{\perp}$ ,  $dt = 100/c k_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 2000/c k_{\perp}$  (derecha), y finalmente,  $dt = 2000/c k_{\perp}$ .

embargo, recordemos que las velocidades son relativistas, por lo tanto, si queremos la condición de resonancia con la partícula inicialmente en reposo, será necesario realizar las transformaciones de Lorentz correspondientes. Por ejemplo, para el número de onda y por ende la frecuencia, para la velocidad en la dirección de propagación, y obtener las cantidades correctas en el sistema de referencia que vea a la partícula en reposo. Así como para los campos EM externos [15], en éste caso, sólo hay campo magnético. Y como es paralelo a la dirección de propagación, no hay variación en el valor de la intensidad de  $B_{zE}$ . Sin embargo, por curiosidad mostramos los resultados.

En la Fig. D.7 se ilustra un ejemplo con  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$ ,  $b_z = 1.4142$  ( $k_z = 1$ ) y polarización circular derecha. Nótese que, a tiempos grandes no es lo mismo tener resonancia en reposo, que resonancia con una velocidad inicial distinta de cero ( $\dot{z} \neq 0$ ). Arriba, la velocidad inicial a lo largo de la dirección de propagación es  $\dot{z} = 0.3392$ ,  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 6000/ck_{\perp}$  (derecha). Abajo, la velocidad inicial es  $\dot{z} = 0$ ,  $dt = 200/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (derecha). Obsérvese que, las trayectorias son distintas para tiempos grandes. En el caso inicialmente en reposo, se forma una donita. En cambio, cuando  $\dot{z}(0) \neq 0$ , aún no se forma una donita. Nótese también que, las espirales en un principio tienen un tamaño, luego crecen y crecen. Tal vez, la trayectoria global siga siendo helicoidal y las espirales seguirán creciendo.

Mostramos a continuación, el caso con polarización circular izquierda. Para una región de confinamiento ( $m = 0$ ) y no confinamiento ( $m = 1$ ). Sólo hemos analizado el caso con  $P_z = -0.28284448023$ . El valor del campo externo es tal que  $b_z = 4.124$ , lo cual implica que  $k_z \sim 4.0009$  (número de onda en la dirección  $z$ ). En la Fig. D.8 mostramos la proyección de la trayectoria de la partícula en el plano  $XY$ , primero sin campo y  $k_z = 1$  ( $\dot{z} \sim 0.34$ ), luego ponemos campo externo con el mismo valor de  $k_z$ , luego con el valor de  $k_z$  adecuado para obtener la frecuencia característica de un ciclotrón. Observando que a tiempos cortos ( $10/ck_{\perp}$ ), las trayectorias son una especie de espirales, posteriormente a tiempos mucho más largos,  $6000/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $1000/ck_{\perp}$  (derecha), la trayectoria es una parte del círculo en el plano  $XY$  (como se esperaba). Aquí, también cambia la frecuencia global en que se recorren ángulos de  $2\pi$ . Además en ésta situación, la velocidad de la partícula en la dirección de propagación,  $\dot{z} \sim 0.79$ , es relativista.

Posteriormente, con las mismas condiciones y los mismos valores analizamos la situación para polarización circular derecha. En donde el compor-

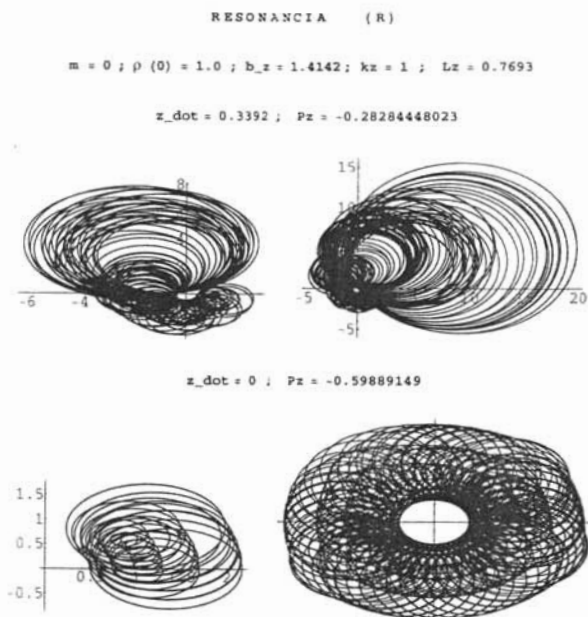


Figura D.7: Trayectoria ( $XY$ ) ( $R$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ . Arriba,  $\dot{z}(0) = 0.3392$ ,  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (derecha). Abajo  $\dot{z}(0) = 0$  (inicialmente en reposo y resonante),  $dt = 200/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (derecha).



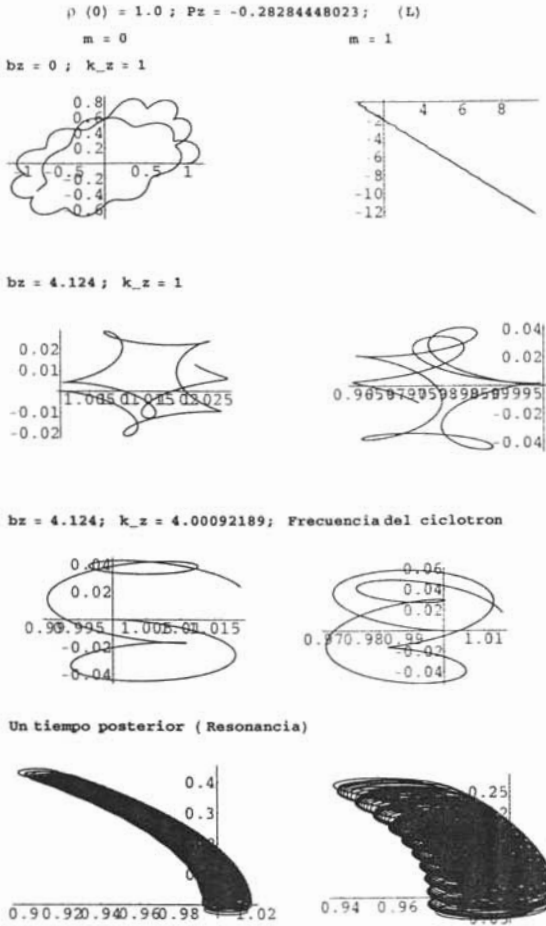


Figura D.8: Trayectoria (XY) (L) con:  $m = 0$  (izquierda) y  $m = 1$  (derecha),  $\rho(0) = 1$  y  $P_z = -0.28284448023$ . Arriba,  $b_z = 0$  y  $k_z = 1$ , luego (abajo)  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 1$ , y los dos últimos renglones con  $k_z = 4.0092189$ , lo cual implica estar en resonancia con la frecuencia del ciclotrón. Primero a un tiempo ( $dt = 10/ck_z$ ), (hasta abajo) el tiempo posterior es  $dt = 6000/ck_z$  (izq.) y  $dt = 1000/ck_z$  (der.).

tamiento cambia un tanto, ya que la región analizada para  $m = 1$  es una región de confinamiento. En la Fig. D.9, Observamos que, cuando el sistema está en resonancia con la frecuencia del ciclotrón hay un cambio cualitativo en las trayectorias, tanto en el caso  $m = 0$  como en el caso  $m = 1$ . La diferencia entre polarización circular izquierda y circular derecha con  $m = 1$  es que, para la primera situación ( $L$ ) la trayectoria será una donita (tiempos largos) formada a lo largo de ella por trayectorias espirales y para la segunda situación ( $R$ ) la donita formada son espirales como las que hemos obtenido en casos anteriores (modos TE).

En la Fig. D.10 mostramos la proyección en el plano  $XY$  de la trayectoria de la partícula para polarización circular (izquierda y derecha). Hasta arriba sin campo externo, con  $k_z = 1$  (cuando  $k_z = 10$  las trayectorias son semejantes). Posteriormente, se añade el campo y obtenemos el valor de la frecuencia del ciclotrón. Primero, con  $k_z = 10$  (caso *no resonante*). Después a un tiempo posterior, en principio se forma una donita. En los últimos dos renglones, el sistema inicialmente está en *resonancia* con la frecuencia del ciclotrón. Se mantuvo la intensidad del campo externo,  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ . El tiempo posterior es  $dt = 2000/ck_\perp$  (también es el caso *resonante*). Observamos que en polarización ( $R$ ) el campo externo contribuye al movimiento de la partícula, de tal manera que la trayectoria que sigue la partícula es una espiral. En el caso con polarización ( $L$ ) la trayectoria de la partícula no es una espiral como el caso anterior. Sin embargo, tiene una trayectoria global en forma helicoidal (para tiempos largos). En cambio, para polarización ( $R$ ) se tiene una trayectoria un tanto simpática, las espirales durante un tiempo tienen un tamaño, y para un tiempo posterior, esas espirales crecen de tamaño. Véase, que no es evidente concluir que a mayores tiempos se formará una donita.

En la Fig. D.11, tenemos las gráficas que nos dan información física a lo largo del tiempo, para polarización circular izquierda y derecha (*caso resonante*). Mostrando la proyección de la trayectoria en el plano  $XY$  para el caso en que  $m = 0$ ,  $k_z = 1$ .  $P_z = -0.28284448023$ . Primero, el efecto de cada polarización sobre la partícula ( $b_z = 0$ ). Posteriormente, con  $b_z = 1.4142$ . La partícula se encuentra inicialmente en reposo y en resonancia. El tiempo de graficación de las dos primeras es  $dt = 20/ck_\perp$  y el de las demás es  $dt = 100/ck_\perp$ .

En la Fig. D.11, para el caso resonante, obsérvese que para ( $L$ ) el tamaño

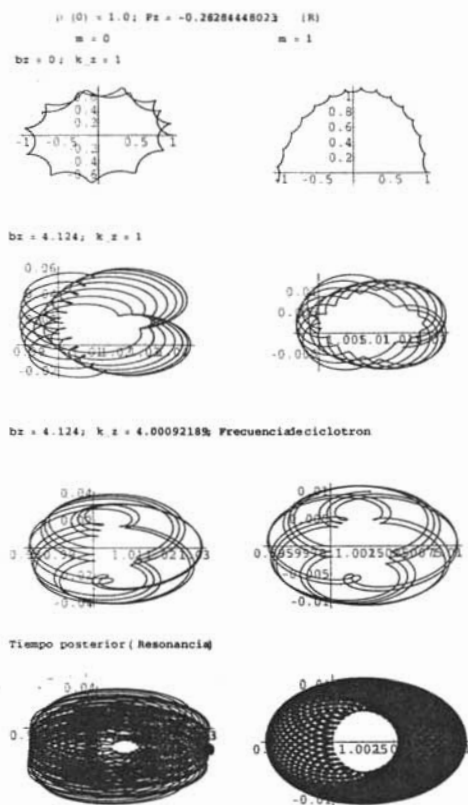
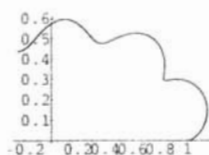


Figura D.9: Trayectoria  $(XY)$  (R) con  $m = 0$  (izquierda) y  $m = 1$  (derecha),  $\rho(0) = 1.0$  y  $P_z = -0.2828448023$ . Arriba,  $b_z = 0$  y  $k_z = 1$ , luego (abajo)  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 1$ , y los tres últimos renglones con  $k_z = 4.0092189$ , lo cual implica estar en resonancia con la frecuencia del ciclotrón. Primero a un tiempo ( $dt = 10/ck_{\perp}$ ), luego con  $dt = 100/ck_{\perp}$  y (hasta abajo) el tiempo posterior es  $dt = 1000/ck_{\perp}$ .

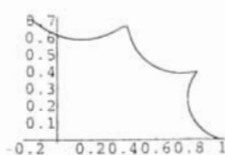
$$m = 0; \rho(0) = 1.0; Pz = -0.28284448023$$

$$bz = 0; k_z = 1; Lz = 0.06$$

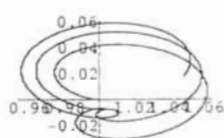
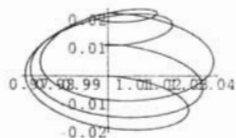
(L)



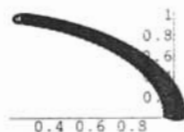
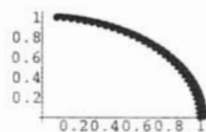
(R)



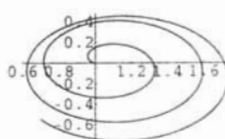
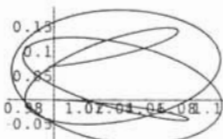
$$bz = 1.4142; k_z = 10; Lz = 0.72$$



Un tiempo posterior



$$bz = 1.4142; k_z = 1;$$

Resonancia (Frecuenciadeciclotron);  $Lz = 0.77$ 

Un tiempo posterior (Resonancia)

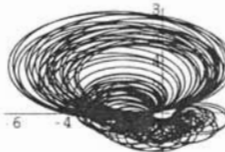
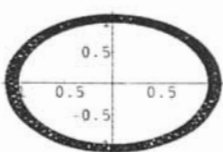


Figura D.10: Trayectoria (XY) (L y R) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.0$  y  $P_z = -0.28284448023$ . A la izquierda (L) y a la derecha (R). Arriba,  $k_z = 1$  y  $b_z = 0$ , luego (abajo) con  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 10$ . Con estos valores a un tiempo posterior,  $dt = 200/ck_z$ . Luego (abajo)  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ , esto es en resonancia al tiempo  $dt = 20/ck_z$  y (hasta abajo) el tiempo posterior es  $dt = 2000/ck_z$ .

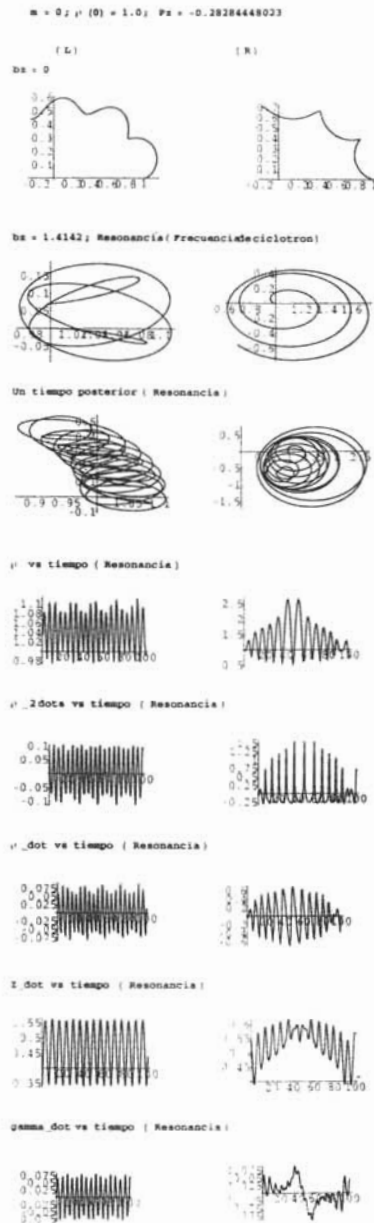


Figura D.11: Evolución de:  $\rho$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $I$  y  $\gamma$  a lo largo del tiempo. Partícula inicialmente en reposo y en resonancia. En la izquierda (L) y en la derecha (R). Trayectoria (XY) (hasta arriba), con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.0$ ,  $k_2 = 1$  y  $P_z = -0.2828448023$ . El eje horizontal es el tiempo.

de las espirales varía un poco. En cambio, para ( $R$ ) la variación del tamaño del radio en la trayectoria de la partícula es mayor como lo muestra claramente la espiral dibujada en el plano  $XY$  (superior derecha). También vemos un cambio cualitativo en  $\ddot{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{z}$  y  $\dot{\gamma}$ .

Los resultados obtenidos a tiempos cortos ( $dt \sim 20/ck_{\perp}$ ), para polarización circular derecha, TE y TM (para TM sólo en el caso  $m = 0$ ) cuando hay resonancia, son parecidos cuando la partícula está inicialmente en **reposo** y en **resonancia**. Sin embargo, hemos mostrado el ejemplo para tiempos más grandes y las trayectorias no son semejantes. Notando que  $\dot{z}(0)$  es muy grande, y no podemos concluir que para cualquier velocidad sucede algo análogo.

# Índice de figuras

2.1. Haz Gaussiano. . . . .	8
2.2. Esfera de McCutchen y el cono del vector de onda de un campo óptico invariante en propagación en el espacio de frecuencias. . . . .	10
2.3. Haz Bessel de orden cero y su frente de onda. . . . .	11
2.4. Generación del haz Bessel de orden cero. Por medio de una rendija circular. . . . .	12
2.5. Vórtices para un haz Bessel de orden uno y para un haz de orden tres, con su respectivo frente de onda. Nótese que la región central es oscura. . . . .	16
2.6. Generación de un haz Bessel de orden cero con un axicón. Nótese que el patrón de interferencia es el mismo que en la Fig. 2.4. . . . .	17
3.1. Proyección (en el plano $XY$ ) de la trayectoria de la partícula (polarización TE) con: $m = 0$ , $\dot{\varphi}(0) = 0$ , $z(0) = 0.1$ , $k_{\perp} = 1$ , $k_z = 0$ , $e_0 = 0.2$ , $dt = 10/(k_{\perp}c)$ . Si $\rho(0) = 0.774$ , entonces la trayectoria es un anillo (partícula confinada) y si $\rho(0) = 0.775$ , la trayectoria es una línea cuasirrecta a tiempos largos (partícula no confinada). . . . .	30
3.2. Trayectoria en el plano $XY$ (TE) con: $m = 0$ , $\dot{\varphi}(0) = 0.001$ , $dt = 10/(k_{\perp}c)$ . Para $\rho(0) = 0.767$ (izq.) y $\rho(0) = 0.768$ (der.). . . . .	32
3.3. Pseudo-potencial, $V_{eff}$ (evolución temporal), con el valor de $\rho(0) = 0.774$ y $\rho(0) = 15.606$ , de arriba a abajo, respectivamente. . . . .	33
3.4. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con: $m = 2$ , $\dot{\varphi}(0) = 0$ , $\rho(0) = 1.22$ (confinamiento), y $\rho(0) = 1.23$ (no confinamiento). Y $\rho(0) = 7.98$ . . . . .	35
3.5. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con: $m = 3$ , $\dot{\varphi}(0) = 0$ , $\rho(0) = 2.94$ (confinamiento) y $\rho(0) = 2.95$ (no confinamiento), y $\rho(0) = 12.75$ . . . . .	36
3.6. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con: $m = 4$ , $\dot{\varphi}(0) = 0$ , $\rho(0) = 4.37$ (confinamiento) y $\rho(0) = 4.38$ (no confinamiento) y $\rho(0) = 10.66$ . . . . .	37
3.7. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con: $m = 1$ , $\dot{\varphi}(0) = 0$ , $\rho(0) = 1.59$ (no confinamiento) y $\rho(0) = 1.60$ (confinamiento) y $\rho(0) = 10.92$ . . . . .	38

- 3.8. Evolución temporal de: la aceleración radial, azimutal, las velocidades en esas direcciones, y la posición azimutal y radial.  $\ddot{\rho}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\rho}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\varphi(t)$  y  $\rho(t)$ , respectivamente, para  $m = 1$ , con CI tales que se tiene **no** confinamiento (TE). El eje horizontal es el tiempo. . . . . 41
- 3.9. Evolución temporal de: la aceleración radial y azimutal, las velocidades en esas direcciones, y la posición azimutal y radial  $\ddot{\rho}$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\rho}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\varphi(t)$  y  $\rho(t)$ , respectivamente, para  $m = 1$  con CI tales que se tiene una región de confinamiento. Observemos que el valor de  $\rho(0) = 2.66$ , es el límite superior del intervalo correspondiente a esa región de confinamiento (TE). El eje horizontal es el tiempo. . . . . 43
- 3.10. Trayectoria (XY) (TE) con:  $m = 0$ ,  $\dot{\rho}(0) = 0.001$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $k_{\perp} = 0.01$ ,  $k_z = 1$  y  $B_{zE} = 0$ . A la izquierda con un tiempo  $dt = 50/ck_{\perp}$  y a la derecha con  $dt = 1010/ck_{\perp}$ . . . . . 44
- 3.11. Proyección (XY) de la trayectoria de la partícula (polarización TM) con:  $m = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$ . Si  $\varphi(0) = 0$  (izquierda) la trayectoria está sólo en el eje  $X$ . Si  $\varphi(0) = 1$  (derecha) la trayectoria es esa línea recta, entonces hablamos de una región de no confinamiento.  $dt = 100/ck_{\perp}$ . . . . . 46
- 3.12. Trayectoria (XY) (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$  y  $\varphi(0) = 0$ . A la izquierda  $m = 1$  y a la derecha  $m = 2$ . Los tiempos de graficación (de arriba a abajo),  $dt = 250/ck_{\perp}$ ,  $dt = 2500/ck_{\perp}$  y  $dt = 10000/ck_{\perp}$ . . . . . 47
- 3.13. Trayectoria (XY) (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$  y  $\varphi(0) = 0$  (arriba). A la izquierda  $m = 3$  y a la derecha  $m = 4$ . Abajo,  $m = 3$  y  $\varphi(0) = 0$  (izquierda),  $m = 4$  y  $\varphi(0) = 1$  (derecha). Los tiempos de graficación:  $dt = 100/ck_{\perp}$  y  $dt = 100000/ck_{\perp}$ . . . . . 48
- 3.14. Trayectoria (XY) (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$  y  $b_z = 0$ . A la izquierda  $m = 1$  y a la derecha  $m = 2$ . Primero se muestra el valor de  $\rho(0) = 3.83$  (izquierda) y  $\rho(0) = 5.136$  (derecha), estos valores son el primer cero de  $J_1$  y  $J_2$ , respectivamente. Abajo, se muestran los siguientes cuatro ceros de  $J_1$  (izquierda) y  $J_2$  (derecha). El tiempo de cada gráfica es  $dt = 50/ck_{\perp}$ , y hasta abajo a la derecha  $dt = 100/ck_{\perp}$ . . . . . 49
- 3.15. Evolución de  $L_z$  a lo largo de  $\rho$  con polarización circular izquierda, ( $L$ ), para  $m = 0$ ,  $P_z = -0.28284448023$  (izquierda) y  $P_z = 0$  (derecha). Observamos que las regiones de no confinamiento se encuentran cerca de los valles y de las crestas. El eje horizontal es  $\rho$ . . . . . 55



3.16. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $P_z = -0.28284448023$ y $m = 0$ , $\rho(0) = 1.72$ (confinamiento) y $\rho(0) = 1.73$ (no confinamiento). . . . .	55
3.17. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $P_z = 0.56568896046$ y $m = 0$ , $\rho(0) = 2.92$ (arriba izq.) y $\rho(0) = 2.93$ (arriba der.). Abajo, $\rho(0) = 5.84$ (izquierda) y $\rho(0) = 5.85$ (derecha). . . . .	57
3.18. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $m = 2$ , $P_z = -0.56568896046$ y $\rho(0) = 11.60$ (confinamiento) y $\rho(0) = 11.61$ (no confinamiento). . . . .	58
3.19. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $P_z = -0.28284448023$ y $m = 2$ , $\rho(0) = 8.417$ . . . . .	59
3.20. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $P_z = -0.56568896046$ , $m = 3$ y $\rho(0) = 0.1$ . . . . .	59
3.21. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $m = 1$ , $P_z = -0.28284448023$ y si $\rho(0) \leq 1.73$ (no confinamiento), $\rho(0) = 1.74$ (confinamiento). . . . .	63
3.22. Trayectoria $(XY)$ $(L)$ con: $m = 1$ , $P_z = 0.0$ y $\rho(0) = 1.71$ (superior izq.), $\rho(0) = 1.73$ (superior der.) y $\rho(0) = 3.61$ (abajo). . . . .	64
3.23. Evolución de $\ddot{\rho}$ , $\dot{\rho}$ , $\dot{\varphi}$ con respecto a $\rho$ , $(L)$ . Las columnas corresponden a $m = 0$ , $m = 1$ y $m = 2$ , de izquierda a derecha, respectivamente. Aquí $P_z = -0.28284448023$ y $\rho(0) = 0.01$ . El eje horizontal es $\rho$ . . . . .	66
3.24. Evolución de: $\ddot{\rho}$ , $\dot{\rho}$ , $\dot{\varphi}$ , $\dot{z}$ , $\dot{\gamma}$ y $\gamma$ a lo largo de $z$ , $(L)$ . Trayectoria $(XY)$ (hasta arriba), con: $m = 0$ (columna izquierda) y $m = 1$ (columna derecha), $\rho(0) = 0.1$ y $P_z = -0.28284448023$ . El eje horizontal es $z$ . . . . .	67
3.25. Evolución temporal de $z$ (arriba) y $\dot{z}$ (abajo), $(L)$ , para $m = 0$ (izq.) y $m = 1$ (der.), $\rho(0) = 0.1$ y $P_z = -0.28284448023$ . El eje horizontal es el tiempo. . . . .	68
3.26. Evolución de $z$ (arriba) y $\dot{z}$ (abajo), a lo largo de $\rho$ , $(L)$ , para $m = 0$ (izq.) y $m = 1$ (der.), $\rho(0) = 0.1$ y $P_z = -0.28284448023$ . El eje horizontal es $\rho$ . . . . .	68
3.27. Trayectoria $(XY)$ para polarización circular derecha, $(R)$ . Con $P_z = -0.56568896046$ , $m = 0$ (izquierda) y $\rho(0) = 1.57$ y $m = 2$ (derecha) con $\rho(0) = 0.1$ , confinamiento en ambos casos. . . . .	69
3.28. Trayectoria $(XY)$ $(R)$ con: $m = 1$ , $P_z = -0.56568896046$ , $\rho(0) = 0.1$ y $\rho(0) = 3.04$ (confinamiento), y $\rho(0) = 3.05$ (no confinamiento). . . . .	70
3.29. Evolución temporal $(L)$ y $(R)$ con: $m = 1$ , $P_z = -0.28284448023$ , $\rho(0) = 1.0$ , $dt = 20/ck_{\perp}$ . Columna izquierda polarización circular izquierda (no confinamiento) y columna derecha polarización circular derecha (confinamiento). El eje horizontal es el tiempo. . . . .	72
3.30. Trayectoria $(XY)$ $(TE)$ , para $m = 0$ , $b_z = 4 \cdot 10^{-7}$ (der.), si $b_z \leq 2 \cdot 10^{-7}$ (izq.) entonces los resultados son esencialmente los mismos que se obtienen con $b_z = 0$ , en este caso para CI de no confinamiento. . . . .	73

- 3.31. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 0.774$  y  $b_z \neq 0$ ,  $b_z = 0.00026$  (superior der.). Para  $b_z = 0.1$  (inferior der.) la región radial de confinamiento es semejante a la de  $b_z \leq 0.00024$ , es decir, del orden de  $k_{\perp}^{-1}$ . Recordemos que  $\rho(0) = 0.774$  define la frontera de confinamiento y no confinamiento para  $B_{zE} = 0$ . . . . . 74
- 3.32. Trayectoria ( $XY$ ) (TM) con:  $m = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$ . Arriba, en ausencia del campo ( $dt = 100/ck_{\perp}$ ),  $\varphi(0) = 0$  (izquierda) y  $\varphi(0) = 1$  (derecha). Abajo, con  $b_z = 0.01$  ( $\varphi = 0$  ya no es solución) y ( $dt = 100/ck_{\perp}$ ). Luego, la misma intensidad del campo, a un tiempo posterior  $dt = 2000/ck_{\perp}$ . . . . . 75
- 3.33. Trayectoria ( $XY$ ) (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$ .  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha). Arriba, en ausencia del campo ( $dt = 100/ck_{\perp}$ ), abajo, con  $b_z = 0.01$  y  $dt = 100/ck_{\perp}$ . Luego,  $b_z = 0.01$ , a un tiempo posterior  $dt = 2000/ck_{\perp}$ . . . . . 76
- 3.34. Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.63$   $b_z = 0$  a la izquierda y  $b_z = 0.002$  a la derecha. . . . . 77
- 3.35. Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $m = 1$ ,  $b_z = 0.02$  (izquierda) y  $b_z = 0.2$  (derecha), y  $\rho(0) = 0.1$ . Las CI son tales que sin campo se tendría no confinamiento. . . . . 78
- 3.36. Trayectoria de la partícula cargada en ( $XY$ ) para una onda plana circularmente polarizada, inicialmente en resonancia y en reposo (arriba izquierda) y no resonante (arriba derecha). Abajo, la evolución temporal de  $X$ . A la izquierda el caso resonante y a la derecha el no resonante. Las trayectorias en  $XY$  son espirales. . . . . 80
- 3.37. Evolución temporal de  $Z$  y  $\gamma$ , para el caso resonante ( $\Omega_0 = 1$ ) y el no resonante ( $\Omega_0 = 1.01$  y  $\Omega_0 = 1.02$ ). Con las mismas condiciones que en 3.36. . . . . 81
- 3.38. Trayectoria ( $XY$ ) (TM). Inicialmente resonante, con:  $\dot{z}(0) = 0$  (partícula inicialmente en reposo),  $k_{\perp} = 1$ ,  $\rho(0) = 0.1$ .  $m = 0$  (izquierda),  $m = 1$  (centro) y  $m = 2$  (derecha). Arriba, con  $b_z = 1.4142$ ,  $k_z = 10$  (no resonante) y  $dt = 20/ck_{\perp}$ . Abajo, con  $b_z = 1.4142$ ,  $k_z = 1$  y  $dt = 100/ck_{\perp}$  (inicialmente resonante). Abajo (resonante), un tiempo posterior  $dt = 1000/ck_{\perp}$  ( $m = 0$ ),  $dt = 3000/ck_{\perp}$  ( $m = 1$ ) y  $dt = 15000/ck_{\perp}$  ( $m = 2$ ). . . . . 81
- 3.39. Evolución temporal de  $X$ ,  $Z$  y  $\gamma$  (TM). Inicialmente resonante, con:  $m = 0$ ,  $b_z = 1.4142$ ,  $\dot{z}(0) = 0$  (partícula inicialmente en reposo). Izquierda, con  $k_z = 10$  (no resonante) y derecha  $k_z = 1$  (resonante),  $dt = 100/ck_{\perp}$ . . . . . 83

3.40. Evolución temporal de  $X$ ,  $Z$ ,  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}$  ( $R$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_z = 4.124$ . A la izquierda  $k_z = 10$  (caso no resonante) y a la derecha  $k_z = 4.00092189$  (caso resonante). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba,  $dt = 20/ck_{\perp}$ ). Y luego, un tiempo posterior de  $dt = 100/ck_{\perp}$ . En las demás, el tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ . El eje horizontal es el tiempo. . . . . 84

3.41. Trayectoria en  $XY$  para ( $L$ ) y ( $R$ ) con:  $m = 0$  y  $\rho(0) = 1$ . A la izquierda ( $L$ ) y a la derecha ( $R$ ). primero en ausencia del campo ( $b_z = 0$ ). Luego, el caso no resonante ( $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 10$ ). Posteriormente, en resonancia ( $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ ). El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ ,  $dt = 200/ck_{\perp}$  y  $dt = 2000/ck_{\perp}$ , respectivamente. . . . . 85

3.42. Evolución temporal de  $X$ ,  $Z$ ,  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}$  ( $L$ ) y ( $R$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 1$ . A la izquierda polarización circular izquierda y a la derecha polarización circular derecha. Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). Y hasta abajo,  $\gamma$  contra  $Z$ . El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ . El eje horizontal es el tiempo. . . . . 86

A.1. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con:  $m = 1$ ,  $b_z \neq 0$ . . . . . 94

A.2. Trayectoria ( $XY$ ) (TM) con:  $\dot{z}(0) = 0.1$ ,  $k_{\perp} = 1$ ,  $k_z = 0$ ,  $e_0 = 0.2$ ,  $\rho(0) = 0.1$  y  $\varphi(0) = 0$  (arriba). A la izquierda  $\rho(0) = 6.38$  (primer cero de  $J_3$ ),  $\rho(0) = 9.76$  (segundo cero de  $J_3$ ) y a la derecha  $\rho(0) = 16.22$  (cuarto cero de  $J_3$ ). El tiempo de graficación es  $dt = 5000/ck_{\perp}$ . . . . . 95

B.1. Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $P_z = 0.52$  y  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 0.09$  (confinamiento) y  $\rho(0) = 0.10$  (no confinamiento). . . . . 100

C.1. Trayectoria ( $XY$ ) ( $L$ ) con:  $m = 3$ ,  $\rho(0) = 2.20$ ,  $B_{zE} = 0$  (izq.) y con  $b_z = 0.02$  (der.). . . . . 106

C.2. Trayectoria ( $XY$ ) con:  $m = 0$ ,  $b_z = 0.01$  y  $\rho(0) = 1.64$ . A la izquierda con polarización ( $L$ ) y a la derecha con polarización ( $R$ ). Ambas con  $dt = 35/(k_{\perp}c)$ . . . . . 106

C.3. Trayectoria ( $XY$ ), polarización circular derecha con:  $m = 0$ ,  $b_z = 0.01$  y  $\rho(0) = 1.64$ . A la izquierda con un tiempo de  $dt = 5/(k_{\perp}c)$  y a la derecha con  $dt = 200/(k_{\perp}c)$ . . . . . 107

- D.1. Trayectoria ( $XY$ ) (TE) con:  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha). Hasta arriba con  $b_z = 0$  y  $k_z = 10$ . El caso no resonante con  $k_z = 10$ ,  $b_z = 1.4142$  (segundo renglón) y  $b_z = 4.124$  (tercer renglón). En los últimos dos renglones, el caso resonante, con  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$  (penúltimo renglón) y  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 4.0009$ . Con un tiempo de graficación  $dt = 20/ck_{\perp}$ . . . . . 110
- D.2. Evolución temporal (TE) para  $\gamma$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $\bar{\rho}$  y  $\dot{\rho}$  con:  $\rho(0) = 1$ ,  $m = 1$  y  $bz = 1.4142$ . A la izquierda el caso no resonante ( $k_z = 10$  y  $dt = 25/ck_{\perp}$ ) y a la derecha el caso *resonante* ( $k_z = 1$ ). Para el caso resonante, hay dos tiempos de graficación,  $dt = 25/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 500/ck_{\perp}$  (derecha). 111
- D.3. Evolución temporal (a tiempos cortos) de  $x$ ,  $z$  y  $\gamma$  (TE) con:  $b_z = 0.7$  (izquierda),  $b_z = 1.38$  (centro) y  $b_z = 1.4142$  (derecha). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). Izquierda y centro caso no resonante y en la derecha caso *resonante*. El tiempo de graficación es  $dt = 10/ck_{\perp}$ . Respectivamente, el tiempo es el eje horizontal. . . . . 112
- D.4. Evolución temporal de  $x$ ,  $z$ , Evolución a lo largo de  $z$  para  $\gamma$ ,  $\dot{\gamma}$  y  $\dot{z}$  ( $L$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_z = 4.124$ . A la izquierda  $k_z = 10$  (caso no resonante) y a la derecha  $k_z = 4.00092189$  (caso resonante). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). El tiempo de graficación es  $dt = 20/ck_{\perp}$ . El eje horizontal es tiempo y  $z$ , respectivamente. . . . . 114
- D.5. Evolución temporal de  $x$ ,  $z$  y  $\gamma$  ( $R$ ) con:  $b_z = 2.062$  (izquierda),  $b_z = 4.104$  (centro) y  $b_z = 4.124$  (derecha). Trayectoria en el plano  $XY$  (hasta arriba). Izquierda y centro caso no resonante y en la derecha caso *resonante*. El tiempo de graficación es  $dt = 10/ck_{\perp}$ . Respectivamente, el tiempo es el eje horizontal. . . . . 115
- D.6. Trayectoria en el plano  $XY$  ( $R$ ) inicialmente en resonancia con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$ . A la izquierda  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ . A la derecha  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 4.00092189$ . Los tiempos de graficación son (de arriba a abajo)  $dt = 20/ck_{\perp}$ ,  $dt = 200/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 100/ck_{\perp}$  (derecha), y finalmente,  $dt = 2000/ck_{\perp}$ . . . . . 116
- D.7. Trayectoria ( $XY$ ) ( $R$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1$  y  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ . Arriba,  $\dot{z}(0) = 0.3392$ ,  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (derecha). Abajo  $\dot{z}(0) = 0$  (inicialmente en reposo y resonante),  $dt = 200/ck_{\perp}$  (izquierda) y  $dt = 2000/ck_{\perp}$  (derecha). . . . . 118

- D.8. Trayectoria  $(XY)$  ( $L$ ) con:  $m = 0$  (izquierda) y  $m = 1$  (derecha),  $\rho(0) = 1$  y  $P_z = -0.28284448023$ . Arriba,  $b_z = 0$  y  $k_z = 1$ , luego (abajo)  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 1$ , y los dos últimos renglones con  $k_z = 4.0092189$ , lo cual implica estar en resonancia con la frecuencia del ciclotrón. Primero a un tiempo ( $dt = 10/ck_{\perp}$ ), (hasta abajo) el tiempo posterior es  $dt = 6000/ck_{\perp}$  (izq.) y  $dt = 1000/ck_{\perp}$  (der.) . . . . . 119
- D.9. Trayectoria  $(XY)$  ( $R$ ) con:  $m = 0$  (izquierda) y  $m = 1$  (derecha),  $\rho(0) = 1.0$  y  $P_z = -0.28284448023$ . Arriba,  $b_z = 0$  y  $k_z = 1$ , luego (abajo)  $b_z = 4.124$  y  $k_z = 1$ , y los tres últimos renglones con  $k_z = 4.0092189$ , lo cual implica estar en resonancia con la frecuencia del ciclotrón. Primero a un tiempo ( $dt = 10/ck_{\perp}$ ), luego con  $dt = 100/ck_{\perp}$  y (hasta abajo) el tiempo posterior es  $dt = 1000/ck_{\perp}$ . . . . . 121
- D.10. Trayectoria  $(XY)$  ( $L$  y  $R$ ) con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.0$  y  $P_z = -0.28284448023$ . A la izquierda ( $L$ ) y a la derecha ( $R$ ). Arriba,  $k_z = 1$  y  $b_z = 0$ , luego (abajo) con  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 10$ . Con estos valores a un tiempo posterior,  $dt = 200/ck_{\perp}$ . Luego (abajo)  $b_z = 1.4142$  y  $k_z = 1$ , esto es en resonancia al tiempo  $dt = 20/ck_{\perp}$  y (hasta abajo) el tiempo posterior es  $dt = 2000/ck_{\perp}$ . . . . . 122
- D.11. Evolución de:  $\rho$ ,  $\ddot{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{z}$  y  $\dot{\gamma}$  a lo largo del tiempo. Partícula inicialmente en reposo y en resonancia. En la izquierda ( $L$ ) y en la derecha ( $R$ ). Trayectoria  $(XY)$  (hasta arriba), con:  $m = 0$ ,  $\rho(0) = 1.0$ ,  $k_z = 1$  y  $P_z = -0.28284448023$ . El eje horizontal es el tiempo. . . . . 123



# Índice de cuadros

3.1.	$m = 0$ y $\dot{\varphi}(0) = 0$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización TE. . . . .	31
3.2.	$m = 0$ y $\dot{\varphi}(0) = 0.001$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización TE. . . . .	31
3.3.	Ceros de las funciones de Bessel: $J_0, J_1, J_2$ y $J_3$ . . . . .	31
3.4.	$m = 2$ , en términos de $\rho(0)$ . Polarización TE. . . . .	34
3.5.	$m = 3$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización TE. . . . .	35
3.6.	$m = 4$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización TE. . . . .	36
3.7.	$m = 1$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización TE. . . . .	38
3.8.	$m = 0$ y $P_2 = -0.56568896046$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	53
3.9.	$m = 0$ y $P_2 = -0.56568896046$ en términos de $L_2$ . Polarización circular izquierda. . . . .	53
3.10.	$m = 2$ y $P_2 = -0.56568896046$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	56
3.11.	$m = 2$ y $P_2 = -0.56568896046$ en términos de $L_2$ . Polarización circular izquierda. . . . .	58
3.12.	$m = 1$ y $P_2 = -0.28284448023$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	61
3.13.	$m = 1$ y $P_2 = -0.28284448023$ en términos de $L_2$ . Polarización circular izquierda. . . . .	62
B.1.	$m = 0$ y $P_2 = -1.13137792092$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	97
B.2.	$m = 0$ y $P_2 = -1.13137792092$ en términos de $L_2$ . Polarización circular izquierda. . . . .	98
B.3.	$m = 0$ y $P_2 = -0.28284448023$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	98
B.4.	$m = 0$ y $P_2 = -0.28284448023$ en términos de $L_2$ . Polarización circular izquierda. . . . .	99

B.5. $m = 0$ y $P_z = 0.0$ en términos de $L_z$ . Polarización circular izquierda. . .	99
B.6. $m = 0$ y $P_z = 0.56568896046$ en términos de $L_z$ . Polarización circular izquierda. . . . .	99
B.7. $m = 1$ y $P_z = -0.56568896046$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	100
B.8. $m = 1$ y $P_z = -0.56568896046$ en términos de $L_z$ . Polarización circular izquierda. . . . .	101
B.9. $m = 1$ y $P_z = -1.13137792092$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . . . .	101
B.10. $m = 1$ y $P_z = -1.13137792092$ en términos de $L_z$ . Polarización circular izquierda. . . . .	102
B.11. $m = 1$ y $P_z = 0.0$ en términos de $\rho(0)$ . Polarización circular izquierda. . .	102
B.12. $m = 1$ y $P_z = 0.0$ en términos de $L_z$ . Polarización circular izquierda. . .	102



# Bibliografía

- [1] Karen P. Volke Sepúlveda, "Light beams with angular momentum and applications in optical tweezers" (Tesis Doctoral, INAOE, México 2003).
- [2] G. Malka, E. Lefebvre and J.L. Miquel, "Experimental observation of electrons accelerated in vacuum to relativistic energies by a high-intensity laser", *Phys. Rev. Lett.* 78 (17), 3314-3317 (1997).
- [3] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. and J. P. Woerdman *Phys. Rev. A* 45, 8185 (1992).
- [4] S. M. Barnett and L. Allen, "Orbital angular momentum and non-paraxial beams", *Opt. Commun.* 110, 670-678 (1994).
- [5] G. Indebetouw, "Optical vortices and their propagation". *J. Mod. Opt.* 40(1) 73-87 (1993).
- [6] A. Vasara, J. Turunen and A. Friberg, "Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms". *J. Opt. Soc. Am. A* 6, 1748-1754 (1989).
- [7] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory". *J. Soc. Am. A* 4 651 (1987).
- [8] J. Durnin, J.J. Miceli, and J. H. Eberly, "Diffraction-free beams", *Phys. Rev. Lett.* 58, 1499-1501 (1987).
- [9] C.W. McCutchen, "Generalized aperture and three-dimensional diffraction effects", *J.O.S.A.* 54, 240-244 (1964).

- [10] S. Chavez-Cerda, G.H.C. New, J.C.Gutierrez-Vega, I.Allison, A.T. O'Neil, I. MacVicar, M.J. Padgett and J. Courtial, "Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams", *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.* 4, S52-S57 (2002).
- [11] J.C. Gutierrez-Vega, J.M.Iturbide-Castillo and S. Chavez-Cerda, "Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams", *Optics Letters* 25, 1493-1495 (2000).
- [12] J.C.Gutierrez-Vega, "Formal analysis of the propagation of invariant optical fields with elliptic symmetries", Ph. D Thesis, INAOE, México (2000).
- [13] M.Bandres, J.C.Gutierrez-Vega, Sabino Chavez-Cerda, "Parabolic nondiffracting optical wave fields", *Opt. Lett.* 29, No. 1, México 2004.
- [14] Dra. Karen Volke S. y Dr. Eugenio Ley K. y S. Chavez-Cerda, "Bases matemáticas y físicas de haces adifraccionales parabólicos", *XLV Congreso de la Sociedad Mexicana de Física*, León Guanajuato, 28 de Octubre al 01 de Noviembre del 2002.
- [15] D.Jackson. *Classical Electrodynamics*, 3a. ed., p.280.
- [16] A.Nisbet *Proc. Roy. Soc. A* 231, 250 (1955); 240, 375 (1957).
- [17] G.Indebetouw, "Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis", *J.Opt.Soc.Am. A* 6, 150-152 (1989).
- [18] M.V. Perez, C. Gomez Reino and J.M. Cuadrado, "Diffraction patterns and zones plates produced by thin linear axicons", *Optica Acta* 33 (9), 1161-1176 (1986).
- [19] J. Arlt and K.Dholakia, "Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon". *Opt.Commun.* 177, 297-301 (2000).
- [20] S.N. Khounina, V.V. Kotlyar, V.A.Soifer, M.V.Shinkaryev and G.V.Uspleniev, "Trochossosn", *Opt. Comm.* 91, 158-162 (1992)
- [21] Solomon Gartenhaus, *Elements of Plasma Physics*, (edit. Holt. Rinehart and Winston, INC. 1964).

- [22] C. S. Roberts y J. Buchsbaum, "Motion of a charged particle in a constant magnetic field and a transverse electromagnetic wave propagating along the field" *Phys. Rev.* 135, A381-A389 (1964).
- [23] A. Bourdier and S. Gond, "Dynamics of a charged particle in a circularly polarized traveling electromagnetic wave", *Phy. Rev. E* 62, 4189-4206 (2000).
- [24] A. Boudier, "Dynamics of a relativistic charged particle in a constant homogeneous magnetic field and transverse homogeneous rotating electric field", *Phy. Rev. E* 54, 5681-5691 (1996).
- [25] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press. Fourth Edition, USA 1995).
- [26] E. Hecht, *Optics*. tercera edición (Addison-Wesley Longman, Inc. USA. 1998).