

00382



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

EL FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO Y UNA
ESFERA: MÉTODOS ASINTÓTICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER MANDUJANO SÁNCHEZ

DIRECTORES DE TESIS: DR. RAMÓN PERALTA-FABI

COMITÉ TUTORAL: DR. VÍCTOR MANUEL ROMERO ROCHÍN
DR. JOSÉ LUIS MATEOS TRIGOS



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

FEBRERO

2005

m 340935



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Publicaciones de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo excepcional.

NOMBRE: Francisco Javier Mandujano Sánchez

FECHA: 10 de Febrero de 2005

FIRMA: [Firma manuscrita]

El flujo alrededor de un cilindro y una esfera: métodos asintóticos

F. Mandujano

Enero, 2005

Agradecimientos

Como es usual, empiezo por el principio, agradecerle a las personas que hicieron posible que esté vivo, para empezar, y que pudiera llegar hasta aquí, cosa que no habría sido posible sin su apoyo moral y económico. Así que al Dr. Mario Mandujano y Dra. Maria del Carmen Sánchez, osea mis padres, les agradezco todo, en particular haberme quitado lo vago y mostrarme que el conocimiento es un de los tesoros más grandes que un ser humano puede tener. Ya que estamos en la parte de la sangre, pues he de agradecerle a mis hermanos por su apoyo, tolerancia y comprensión; sobre todo a los Drs. Meli Mandujano y Jordan Golubov por haberme dado trabajo, lo cual me ayudo a sobrevivir esto dos últimos años de desempleo. En esta parte sólo me falta agradecer a dos personitas, Melissa y Valentina, básicamente por que existen pues sus sonrisas han sido la fuente de mi inspiración (en el caso que haya tenido alguna).

Ahora el turno de mis maestros, que por cierto han sido muchos y variados, pero eso sí, tuve la suerte de haberme encontrado con los mejores. Así que al Dr. Ramón Peralta-Fabi un agradecimiento grandote, pues la labor que alguna vez comenzaron mis padres, la ha complementado igual de bien (sobretudo en la parte de quitarme lo vago). Realmente agradezco el apoyo, la amistad y sobretudo la confianza que ha tenido en mi y en mi trabajo, además de las excelentes discusiones de tipo variado y unas muy divertidas chorchas. A la Dra. Catalina Stern, por su confianza incondicional, su amistad y en general por ser una excelente persona. Al Dr. Víctor Romero, por sus comentarios a lo largo del trabajo, pero sobre todo a su amistad y el mundo de cosas que me ha enseñado y que hemos compartido. En general, quiero agradecerles a los Drs. A. Minzoni, M. Mayorga, M. López, J. L. Mateos y J. Cantó por los comentarios sobre el trabajo.

Seguiré con algunas palabras para los amigos. A Carlos, a Ivan y Ernesto. La verdad es que han sido de mucha ayuda tanto en sus discusiones al calor de los alcoholes (en las que nunca está muy claro quién es el más necio), como no dejarme claudicar y echarme muchas porras. A toda la banda de locos que me han ofrecido su amistad, a pesar de que me conocen.

Finalmente, pues a la Universidad Nacional Autónoma de México, que con todas sus cualidades y defectos es, y siempre será, mi segundo hogar. A la DGEP por la beca que me mantuvo hasta que, obviamente, se terminó y al Posgrado en Ciencias Física.

Contenido

1	El problema y sus antecedentes	3
1	El flujo alrededor de un cilindro	8
2	El flujo alrededor de una esfera	17
2	El Método	25
1	El método en 2D	27
1.1	Las líneas de corriente y el arrastre	31
2	El método en 3D	32
2.1	Las líneas de corriente y el arrastre	37
3	El flujo alrededor de un cilindro	39
1	Las ecuaciones de Stokes: $R_e = 0$	40
2	Soluciones aproximadas a N fija	42
2.1	Serie de Fourier	42
3	Las propiedades del flujo	47
4	Los resultados en 2D	49
1	Truncando las series de Fourier y las de potencias de R_e	49
1.1	Las series de potencias en R_e	50
1.2	Las series de Fourier	54
1.3	Los siguientes coeficientes	58
2	El comportamiento como función de N	61
2.1	Los resultados numéricos	65
3	Las propiedades del flujo	66
3.1	Los campos de velocidad y presión	66
3.2	Las líneas de corriente y el arrastre	68
4	Estos resultados contra los demás	73
4.1	Navier-Stokes vs Oseen	73

4.2	Otros cálculos	75
5	Conclusiones	79
5	El flujo alrededor de una esfera	83
1	Los primeros órdenes	83
1.1	El caso $N=3$ y la solución de Stokes	84
2	Para los siguientes órdenes	86
2.1	Las propiedades del flujo	91
3	Los primeros valores de N	92
3.1	Las series en potencias de R_e	92
4	Las series en polinomios de Legendre	95
5	Las soluciones como función de N	96
5.1	El arrastre y las líneas de corriente	98
6	Cómo se ve contra otros cálculos	100
7	Conclusiones	103
6	Conclusiones generales y perspectivas	107
1	Aspectos generales del método	107
2	Las diferencias entre 2D y 3D.	110
3	Perspectivas	112
A	Detalles algebraicos	117
1	La transformación de coordenadas	117
1.1	Coordenadas cilíndricas	117
1.2	Coordenadas esféricas	118
1.3	Las relaciones de recurrencia para a_n , b_n y c_n	118
2	Los cálculos	120
B	La aproximación de Oseen	123
1	Las ecuaciones linealizadas de Oseen	123
1.1	Algunos resultados generales	127
C	Soluciones numéricas	129
1	El método de disparo	129
1.1	Los resultados	131

Abstract

A new technique based on series truncation is developed to study the steady viscous flow past a circular cylinder and a sphere for low Reynolds numbers (R_e). The equations of motion are written in terms of a new coordinate $x(r)$, where r is the distance from the object, such that the domain of integration of the Navier-Stokes equations is finite. Solutions for the velocity and pressure fields are assumed as power series in x , whose coefficients are functions of R_e and the angular coordinate. After the substitution of the proposed solutions into the governing equations, they result into three recurrence relations between the coefficients of the power series. The boundary conditions result into two coupled non linear ordinary differential equations of infinite order and degree. In practice, the series solutions are truncated at some order N such that the problem to be solved is finite. These equations were studied for the case of the flow in 2 and 3D using Fourier series and Legendre polynomials, respectively. The ordinary differential equations are then transformed into a complete system of non linear algebraic equations. This problem was studied using power series in R_e . Results for a wide range of values of N were computed, and some of the convergence properties were analyzed. The approximate solutions found were compared with different results found in the literature.

Resumen

El problema del flujo alrededor de un cilindro y de una esfera a números de Reynolds (R_e) chicos, se estudia a partir de un método de truncamiento de series. Las ecuaciones de movimiento se reescriben en términos de una nueva variable $x(r)$, donde r es la distancia al objeto, que tiene la propiedad de estar definida en un intervalo finito. Las soluciones a los campos de velocidad y presión se proponen como series de potencias en x , cuyos coeficientes son funciones de R_e y de la variable angular. Así, las ecuaciones de Navier-Stokes se traducen a tres relaciones de recurrencia entre los coeficientes de las series de potencias de x . Las condiciones de frontera, junto con las relaciones de recurrencia, resultan en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de grado y orden infinito. En la práctica, las series de potencias se deben truncar a un orden N finito, de manera que se debe resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyo orden y grado dependen de N . Estas ecuaciones se estudiaron para el caso del flujo en 2 y 3D, utilizando series de Fourier y polinomios de Legendre, respectivamente. Las ecuaciones diferenciales quedan reducidas a ecuaciones algebraicas, no lineales, que se estudian proponiendo soluciones en series de potencias de R_e . Se presentan resultados para un amplio intervalo de valores de N y se discuten las propiedades de convergencia. Las soluciones aproximadas encontradas se comparan con los resultados encontrados en la literatura.

Capítulo 1

El problema y sus antecedentes

El problema que se estudia consiste en un cuerpo fijo, cuya longitud característica es a , con simetría circular (en 2 y 3D) colocado en el origen de un sistema de coordenadas. El cuerpo se encuentra inmerso en un fluido que se mueve con velocidad uniforme \vec{U} , como se muestra en la figura 1.1. El fluido es Newtoniano, con densidad ρ y viscosidad cortante μ . El estudio

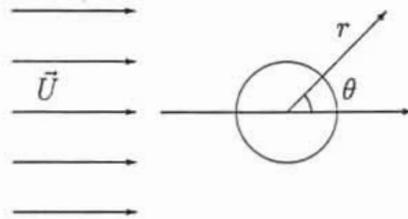


Figura 1.1: Esquema del flujo alrededor de un cuerpo con simetría circular.

fenomenológico del problema, muestra que el flujo tiene varios regímenes dependiendo del valor de a , ρ , μ y \vec{U} . A partir de estas cantidades se define el número de Reynolds, que resulta ser el único parámetro adimensional en este problema y se define como $R_e = \frac{Ua}{\nu}$, donde ν es la viscosidad cinemática (μ/ρ), es decir, está definido como el cociente entre dos distancias; la longitud característica (a) del objeto y la longitud de penetración viscosa (ν/U). Por lo tanto, este parámetro compara los efectos inerciales con los viscosos. Para valores pequeños de R_e se observa un primer régimen que corresponde a un flujo estacionario sin regiones de recirculación (ver figura 1.2). Al aumentar el valor de R_e por encima de cierto valor crítico (≈ 2.5 para el cilindro y

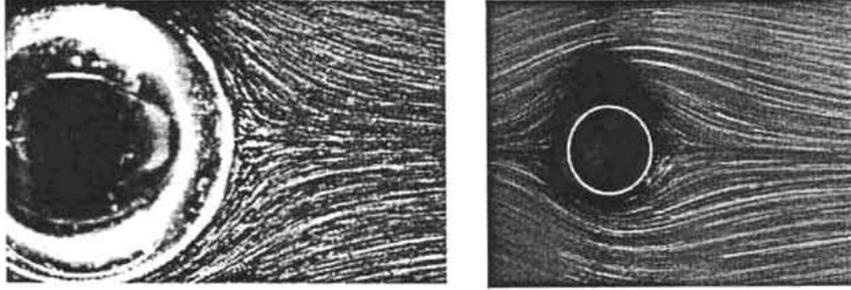


Figura 1.2: El flujo alrededor de una esfera (izq.) y de un cilindro (der.), a $R_e = 4.07$ y $R_e = 0.77$, respectivamente. Fotos de Sadatoshi Taneda [1].

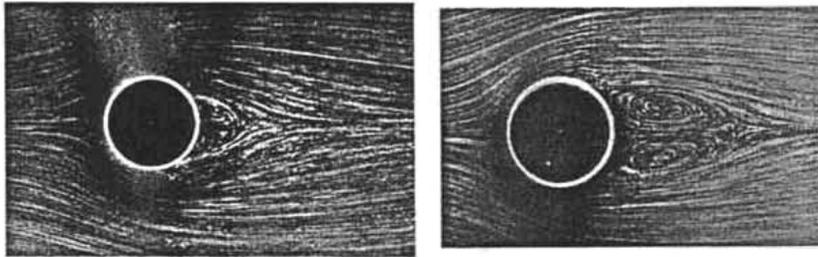


Figura 1.3: Región de recirculación para el flujo alrededor de un cilindro; para $R_e = 6.55$ (izq.) y $R_e = 13$ (der.). Fotos de Sadatoshi Taneda [1].

≈ 10 para la esfera, aproximadamente), aparece una región de recirculación detrás del objeto; el flujo sigue siendo estacionario (ver figura 1.3). Si se sigue aumentando R_e , se llega a un régimen no estacionario, en donde la región de recirculación empieza a oscilar de forma periódica.

Matemáticamente, el problema a resolver consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales parabólico, no lineales, conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones se siguen de los principios de conservación de masa y de momento¹ y tienen la siguiente forma

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (1.1)$$

¹En el caso más general una ecuación adicional se deriva de la conservación de la energía, sin embargo, en el caso que aquí se trata, la energía permanece constante.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.2)$$

donde \vec{u} , P y ρ son funciones de la posición y del tiempo [2,3]. Para completar el sistema de ecuaciones es necesaria una ecuación de estado y condiciones a la frontera. Puesto que este estudio se centra en el caso de R_e chicos, el flujo es estacionario, por lo que que los campos de velocidad y presión son independientes del tiempo. La densidad se supone constante en todo el fluido; flujo incompresible (debido a que se suponen velocidades mucho menores que la velocidad del sonido [3]). Como condiciones a la frontera se utiliza que el campo de velocidades debe permanecer uniforme en el infinito y que la velocidad sobre la superficie del cuerpo debe ser cero². En conclusión, las ecuaciones que describen el flujo incompresible alrededor de un cuerpo en el caso estacionario, escritas en forma adimensional, están dadas por

$$R_e(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla P + \nabla^2 \vec{u}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad (1.4)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{si} \quad \|\vec{r}\| = 1, \quad (1.5)$$

$$\vec{u} = \hat{U} \quad \text{y} \quad (1.6)$$

$$P - P_0 \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|\vec{r}\| \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

donde \hat{U} es un vector unitario en la dirección del flujo y P_0 es la presión constante en el infinito. Debido a la simetría circular del problema, los campos de velocidad y presión dependen de la distancia al cuerpo y del ángulo entre el vector de posición y \hat{U} . En el caso bidimensional, si se escoge la dirección del flujo a lo largo del eje x los campos dependen de las coordenadas cilíndricas (r, θ) , mientras que en el caso tridimensional, los campos dependen de las coordenadas esféricas (r, θ) ; cuando la dirección del flujo se escoge a lo largo del eje z .

En casos en los que el problema tiene alguna simetría, es conveniente trabajar con las ecuaciones en el lenguaje de la función de corriente. Entonces, dado el sistema de coordenadas generalizadas (q_1, q_2, q_3) , tales que los campos son independientes de la tercera coordenada, cuando se toma el rotacional de la

²Esta condición está basada en que no se ha observado que el fluido, en condiciones normales, se deslice en la superficie sólida. además de la validez de los resultados obtenidos a partir de su uso [3].

ecuación (1.3) y se utiliza la identidad

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

se obtiene la ecuación

$$R_e \nabla \times (\vec{u} \times \vec{w}) = \nabla^2 \vec{w}, \quad (1.8)$$

donde $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ es la vorticidad, la cual, sólo tiene una componente diferente de cero. La función de corriente, $\psi(r, \theta)$, se puede definir a partir de un potencial vectorial para el campo de velocidades, es decir,

$$\vec{B} = \frac{\psi(r, \theta)}{r} \hat{k} \quad (\text{cilíndricas}), \quad (1.9)$$

$$\vec{B} = \frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (\text{esféricas}), \quad (1.10)$$

de manera que el campo de velocidades se calcula a partir de

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{B}, \quad (1.11)$$

Es fácil demostrar que este campo de velocidades es solenoidal en 2 y 3D, i. e., la divergencia del campo de velocidades es cero. Cuando se sustituye (1.11) en la ecuación (1.8), se obtiene una ecuación diferencial parcial elíptica, no lineal, de cuarto orden para la función de corriente.

El primero en estudiar el problema fue Stokes en 1851 [2–5], que propuso como primera aproximación despreciar el término no lineal en la ecuación (1.3), basado en que cuando el flujo es lento y el fluido lo suficientemente viscoso ($R_e \rightarrow 0$), las fuerzas inerciales son despreciables comparadas con las fuerzas viscosas, de manera que el problema a resolver es lineal. En el caso del flujo en 2D, Stokes encontró que el problema no se puede resolver; paradoja de Stokes [4–6]. En el caso del flujo en 3D, encontró la solución al problema y determinó su famosa expresión para el arrastre sobre la esfera, conocida como la ley de Stokes [2, 3, 7]. Desde el punto de vista de Stokes, la no existencia de la solución al problema en 2D, era un indicador de que el flujo no es estacionario [4]; actualmente es sabido que esto es incorrecto. Más tarde, en 1889, Whitehead propuso un método perturbativo para encontrar la siguiente aproximación a la solución de Stokes en 3D [4, 8]. El problema a resolver al orden más bajo coincide con resolver las ecuaciones en la aproximación

de Stokes. Whitehead encontró que no era posible hallar una solución al problema, a orden R_e , que satisficiera las ecuaciones de movimiento y las condiciones a la frontera [4]. El hecho de que no se pueda encontrar una segunda aproximación al problema se conoce como la paradoja de Whitehead. No fue hasta 1910 que Oseen [4, 5, 9] mostró que las paradojas son consecuencia de la naturaleza singular del flujo a R_e bajos, debido a que la solución no representa una aproximación uniforme en todo el dominio. Para entender la fuente del problema, Oseen estimó, a partir de la solución de Stokes, la magnitud de los términos despreciados y encontró que éstos son comparables con los términos retenidos en las ecuaciones a distancias grandes, i. e., distancias tales que $O(R_e r)$ es de orden uno, de manera que la solución de Stokes no es una aproximación uniforme al flujo lejos del cuerpo.

La alternativa propuesta por Oseen fue que, dado que la solución de Stokes es incorrecta lejos del objeto, en donde la velocidad es prácticamente uniforme, el término no lineal en la ecuación (1.3), puede ser aproximado por el término $R_e (\hat{U} \cdot \nabla) \vec{u}$. Claramente, el problema en esta aproximación es lineal y se puede resolver en 2 y 3D. Las soluciones al problema se conocen de forma aproximada y fueron calculadas originalmente por Oseen en 1910, para el caso en 3D, y por Lamb en 1911, en el caso de 2D [4, 5]. En este caso, la aproximación en la vecindad del objeto es pobre, puesto que en esa región el flujo no es uniforme; sobre todo a R_e altos.

Aunque con la aproximación de Oseen es posible obtener soluciones uniformemente válidas en todo el dominio, la aproximación sigue estando restringida a números de Reynolds mucho menores que la unidad. Goldstein (1929) [10, 11] y Tomotika & Aoi (1950) [12] estudiaron el problema de Oseen para R_e arbitrario, aunque las soluciones son de valor limitado puesto que, a números de Reynolds de orden uno, la aproximación de Oseen deja de ser cualitativamente válida, sobre todo en la vecindad del objeto [4].

A mediados de los años 1950's, se desarrolló el método de acoplamiento de expansiones asintóticas (AEA) [13, 14]. En 1957 Kaplun [15], Lagerstrom [14] y Proudman & Pearson [8], de manera independiente, aplicaron el método a este problema. Los AEA consisten en proponer como solución dos tipos de expansiones asintóticas, una válida cerca del objeto y la otra lejos, y finalmente se acoplan en la región en donde la solución perturbativa no es uniforme. En las siguientes secciones se muestra con más detalle el método de los AEA. Los resultados obtenidos muestran que las soluciones dependen de series logarítmicas en R_e , por lo que, para calcular correcciones para R_e

de orden uno, es necesario calcular un número infinito de términos [4, 8]. Durante la década de los 1960's, se hicieron estudios del problema utilizando el método de truncamiento de series. Estos procedimientos consisten en proponer como solución desarrollos en serie de una de las variables independientes. Al truncar dichos desarrollos, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que se pueden resolver de forma iterativa. La diferencia entre la metodología utilizada radica en la representación en la que se trabajan las ecuaciones de movimiento. Van Dyke [16] y Underwood [17] trabajaron con la ecuación diferencial, para la función de corriente, que se reduce a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que resuelven numéricamente. Nieuwstadt & Keller [18] y Dennis & Walker [19] utilizaron el método de truncamiento de series para la vorticidad y la función de corriente, el sistema de ecuaciones diferenciales resultante se estudia numéricamente. R. Soto y R. Peralta-Fabi [20] utilizan series de potencias, en una nueva variable que depende de la distancia al objeto, para los campos de velocidad y presión. Al sustituir en las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones a la frontera, el problema se reduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuyo orden y grado dependen del orden al que las series se truncan. Estas ecuaciones se resuelven usando métodos analíticos aproximados y métodos numéricos. El uso del método de truncamiento de series se ha combinado de maneras diferentes con cálculos numéricos, como en los casos anteriores en donde el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que hay que resolver en cada caso se resuelve numéricamente.

1 El flujo alrededor de un cilindro

En este caso, el problema tiene invariancia bajo traslaciones en la dirección del eje z , de manera que los campos de velocidad y presión son funciones de las coordenadas cilíndricas (r, θ) . A partir de las expresiones (1.8), (1.9) y (1.11) se obtiene que la ecuación para la función de corriente está dada por

$$\frac{R_e}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla^2 \psi = \nabla^4 \psi, \quad (1.12)$$

con el operador ∇ en coordenadas cilíndricas. Las condiciones de frontera son

$$\psi(r, \theta) = 0 \text{ y} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \text{ si } r = 1, \quad (1.14)$$

$$\psi(r, \theta) \sim r \sin \theta \text{ si } r \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

La primera aproximación propuesta para resolver el problema fue suponer que en el límite cuando $R_e \rightarrow 0$, el término no lineal en la ecuación (1.12) se puede despreciar, de manera que el problema se reduce a resolver la ecuación bi-armónica para la función de corriente. La solución al nuevo problema que satisface las condiciones (1.13) y (1.14) está dada por [3, 4, 8]

$$\psi(r, \theta) = A\left(\frac{1}{r} - r + 2r \ln r\right) \sin \theta. \quad (1.16)$$

Es claro que, debido al término logarítmico en r , no hay forma de ajustar la constante A para que se satisfaga la condición (1.15). Por lo tanto no hay solución de las ecuaciones de Stokes³.

Si a partir de la solución anterior se estima el cociente entre el término no lineal, correspondiente a las fuerzas inerciales en el fluido, y el término lineal de las fuerzas viscosas, se encuentra que

$$\frac{R_e \|(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}\|}{\|\nabla^2 \vec{u}\|} \approx AR_e r \ln r, \quad (1.17)$$

lejos del cilindro. Por lo tanto, para distancias tales que

$$CR_e r \ln r = O(1), \quad (1.18)$$

las fuerzas inerciales y las viscosas son comparables, de manera que la expresión (1.16) no es consistente con la suposición de que el término no lineal sea despreciable en todo el dominio [4, 8]. Por lo tanto, esta expresión no es una aproximación uniformemente válida al flujo en todo el dominio. Es importante notar que esto es consecuencia de que el dominio de integración de las ecuaciones de movimiento es infinito; lejos está la región donde la solución de las ecuaciones de Stokes no es uniforme.

El hecho de que el problema anterior no se pueda resolver, tiene como consecuencia que el problema no lineal no pueda ser resuelto usando teoría de perturbaciones regulares [4]. En otras palabras, si se propone que la función de corriente tenga la forma

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r})R_e + \psi_2(\vec{r})R_e^2 + \dots, \quad (1.19)$$

³Más adelante, en el capítulo 4, se discute con más detalle la solución en esta aproximación.

y se sustituye en la ecuación (1.12), después de coleccionar términos en potencias de R_e , se encuentra que el problema al orden más bajo coincide con resolver las ecuaciones de Stokes. con las condiciones de frontera (1.13-1.15). Por lo tanto, es un problema singular desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones.

Una alternativa es buscar una manera diferente de aproximar el término despreciado; sustituirlo por uno lineal diferente de cero. En 1910 Oseen propuso que, dado que la solución de las ecuaciones de Stokes es incorrecta para distancias lejanas al cilindro, en donde la velocidad del flujo es prácticamente uniforme, el término no lineal en (1.3) se aproxima por el término $(\hat{U} \cdot \nabla) \vec{u}$. Entonces, la ecuación diferencial para la función de corriente en este caso es

$$R_e \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla^2 \psi = \nabla^4 \psi, \quad (1.20)$$

con las condiciones de frontera (1.13-1.15). La solución de la ecuación anterior es de la forma [8]

$$\psi(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{2B_0 r} \right) \sin \theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2B_0} \phi_n \left(\frac{1}{2} R_e r \right) \frac{r \sin(n\theta)}{n} + O(B_0^{-2}), \quad (1.21)$$

donde

$$B_0 = \frac{1}{2} - \gamma - \ln \frac{1}{4} R_e, \quad (1.22)$$

y

$$\phi_n(r) = 4K_1(r)I_n(r) + 2K_0(r)(I_{n+1}(r) + I_{n-1}(r)), \quad (1.23)$$

las $I_n(r)$ y $K_n(r)$ son las funciones modificadas de Bessel y γ es la constante de Euler. La expresión anterior es una solución aproximada a la ecuación (1.20), que fue encontrada originalmente por Lamb en 1911 [5, 8]. La solución exacta de las ecuaciones linealizadas de Oseen fue calculada más tarde por Faxén en 1927 [8] y por Tomotika y Aoi en 1950 [12]. Sin embargo, esta aproximación está restringida a números de Reynolds mucho menores que la unidad, puesto que cuando la velocidad del flujo no es pequeña la aproximación propuesta por Oseen empeora cerca del cilindro; en donde nunca es válida. Por lo tanto, con la solución exacta de las ecuaciones de movimiento en la aproximación de Oseen, no se pueden obtener mejores resultados para el flujo que los obtenidos al utilizar la expresión aproximada (1.21).

Con el fin de calcular las características del flujo, es conveniente tener una expresión más simple de la función de corriente. A partir de la solución

aproximada de Lamb, se encuentra que

$$\psi(r, \theta) \approx \left[\frac{1}{B_0} \left(r \ln r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r} \right) + 2R_e \left(\frac{1}{8B_0} r^2 \ln r - \frac{1}{8}r^2 - \left(\frac{1}{16B_0} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{16B_0} - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \right] \sin \theta, \quad (1.24)$$

es una buena aproximación cerca del cilindro [21].

Para mejorar esta aproximación, una primera posibilidad es utilizar un desarrollo estilo (1.19), para la función de corriente. El problema al orden más bajo de aproximación es el de Stokes y su solución perturbativa tiene las dificultades ya mencionadas, de manera que se sustituye por la ecuación de Oseen y, a partir de su solución, se calcula el siguiente orden. Si el problema tiene solución, ésta representa una corrección válida para números de Reynolds mayores. Sin embargo, debido a la complejidad de la solución de la ecuación de Oseen, no hay mucho trabajo en esta dirección, por lo que no se conoce una segunda aproximación [4].

De la teoría de perturbaciones singulares se sabe que una condición necesaria, aunque no suficiente, para obtener un comportamiento singular, es que el parámetro perturbativo sea el cociente de dos longitudes características cuyo valor tiende a cero. En este caso, en el problema se tiene al radio del cilindro (a) y U/ν , por lo que, cuando $R_e \rightarrow 0$, la longitud de penetración viscosa es mucho mas grande que a [4]. De manera que el problema es singular y la alternativa es usar métodos de AEA [8, 14, 15, 22].

La idea central de este método es que la solución al problema se compone de dos desarrollos, cerca y lejos del cilindro, que se acoplan en la región donde la solución perturbativa del problema no es uniforme. De manera que, cerca del cilindro ($r = O(1)$), se propone un desarrollo de la forma

$$\psi(r, \theta; R_e) = f_0(R_e)\psi_0(r, \theta) + f_1(R_e)\psi_1(r, \theta) + \dots, \quad (1.25)$$

donde $f_{n+1}/f_n \rightarrow 0$ si $R_e \rightarrow 0$. Este desarrollo se debe considerar como proveniente de la solución de la ecuación (1.12), con las condiciones de frontera (1.13-1.15), en el límite $R_e \rightarrow 0$ para valores fijos de r . Evidentemente, como la expresión (1.25) es la función de corriente cerca del cilindro, ésta debe satisfacer la ecuación (1.12) y las condiciones (1.13) y (1.14). Hay que notar que el desarrollo propuesto anteriormente es del estilo del desarrollo (1.19), de manera que la expresión (1.25) es una solución uniforme cuando $r = O(1)$.

Puesto que el desarrollo (1.25) no satisface la condición de frontera al infinito, pues es la región en donde no es uniforme, la condición (1.15) se sustituye por la condición de que (1.25) debe acoplarse con un desarrollo válido para r grandes.

El que la solución propuesta para $\psi(r, \theta; R_e)$ deje de ser válida, debido a que los términos inerciales son comparables con los términos viscosos, sugiere efectuar una transformación en (1.12), de manera que la ecuación resultante sea independiente del número de Reynolds. Esto se puede lograr haciendo un reescalamiento del sistema de coordenadas y de la función de corriente como se muestra a continuación. Sean

$$\rho = R_e r \quad \text{y} \quad \psi = R_e \Psi, \quad (1.26)$$

este nuevo conjunto de variables se conoce como variables de Oseen. La transformación anterior no es única, sin embargo, es la más sencilla y se puede utilizar sin pérdida de generalidad. Así, la ecuación para la función de corriente toma la forma

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla_\rho^2 \Psi = \nabla_\rho^4 \Psi, \quad (1.27)$$

donde ∇_ρ es el operador gradiente en las coordenadas (ρ, θ) . En este caso, se propone como solución un desarrollo de la forma

$$\Psi(\rho, \theta; R_e) = \Psi_0(\rho, \theta) + F_1(R_e)\Psi_1(\rho, \theta) + \dots, \quad (1.28)$$

donde $F_{n+1}/F_n \rightarrow 0$ cuando $R_e \rightarrow 0$, con ρ fija. En este caso, la expresión anterior debe satisfacer la condición de flujo uniforme y acoplarse, para valores pequeños de ρ , con el desarrollo (1.25)⁴ expresado en estas variables.

Cuando (1.25) se sustituye en la ecuación de Navier-Stokes (1.12), se encuentra que el problema a resolver, para el término $\psi_0(r, \theta)$, corresponde a resolver las ecuaciones de Stokes, cuya solución está dada por la expresión (1.16); por lo que al desarrollo (1.25) se le conoce como expansión de Stokes. Análogamente, el primer término en el desarrollo de Oseen (1.28) es el correspondiente a un flujo uniforme. Entonces, se obtiene que los desarrollos de Stokes y Oseen, antes del acoplamiento, son

$$\psi(r, \theta; R_e) \approx f_0(R_e) \left(r \ln r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r} \right) \sin \theta, \quad (1.29)$$

$$\Psi(\rho, \theta; R_e) \approx \rho \sin \theta. \quad (1.30)$$

⁴Para mayores detalles de la validez de estos desarrollos véase [4, 8, 14, 15].

Cuando la expresión (1.29) se escribe en términos de las variables de Oseen y desarrollando para ρ pequeñas, se obtiene

$$\psi(r, \theta; R_e) \approx \frac{f_0(R_e)}{R_e} \ln \frac{1}{R_e} \rho \sin \theta. \quad (1.31)$$

Para que la expresión anterior y (1.30) satisfagan (1.26) se requiere que

$$f_0(R_e) = \left(\ln \frac{1}{R_e} + k \right)^{-1}. \quad (1.32)$$

En realidad es suficiente considerar el caso $k = 0$, sin embargo, más adelante se explota la libertad para escoger esta constante. Del resultado anterior se puede inferir que las $f_n(R_e)$ son potencias inversas de $(k - \ln R_e)$.

Al haber sustituido el desarrollo de Oseen (1.28) en (1.27), se encuentra que la ecuación diferencial que debe satisfacer $\Psi_1(\rho, \theta)$ es la ecuación linealizada de Oseen. La solución, para valores pequeños de ρ , esta dada aproximadamente [4] por

$$\Psi_1(\rho, \theta) \approx -C \left(\ln \frac{4}{\rho} + 1 - \gamma \right) \rho \sin \theta + O(\rho^2 \ln \rho), \quad (1.33)$$

donde γ es la constante de Euler y C es una constante. Esta expresión proviene de una solución encontrada por Oseen [21] para el campo de velocidades, que tiene la ventaja de escribirse de forma simple. En cambio, si se resuelve el problema en términos de la función de corriente, la solución queda expresada en términos de series infinitas [8]. Entonces, la expansión de Oseen para regiones cercanas al cilindro es

$$\Psi(\rho, \theta; R_e) \approx \left(1 - CF_1(R_e) \left(\ln \frac{4}{\rho} + 1 - \gamma \right) \right) \rho \sin \theta. \quad (1.34)$$

Si se considera el siguiente término en la expansión, para ρ pequeñas, del desarrollo de Stokes (1.29) en función de las variables de Oseen, se tiene que

$$\psi(\rho, \theta; R_e) \approx \frac{1}{R_e} \left(1 + f_0 \left(\ln \rho - k - \frac{1}{2} \right) \right) \rho \sin \theta, \quad (1.35)$$

por lo tanto, para acoplar (1.34) con (1.35) según la regla $\Psi = R_e \psi$, se obtiene que $CF_1(R_e) = f_0(R_e)$. Este resultado también sugiere que las funciones $F_n(R_e)$ son potencias inversas de $(k - \ln R_e)$.

Cuando se sigue el procedimiento de acoplamiento se encuentra que los coeficientes de (1.25) y (1.28) son de la forma

$$\begin{aligned} f_n(R_e) &= \left(\ln \frac{1}{R_e} + k \right)^{-n-1} . \\ F_n(R_e) &= \left(\ln \frac{1}{R_e} + k \right)^{-n} , \end{aligned}$$

de manera que los términos ψ_n , satisfacen la ecuación

$$\nabla^4 \psi_n = 0;$$

i.e., la ecuación linealizada de Stokes, debido a que el término no lineal, de orden R_e , es mucho menor que el término lineal. Si se continúa el procedimiento de acoplamiento, o usando el principio de mínima singularidad [4], se encuentra que la solución para el término ψ_n es un múltiplo de (1.29), de manera que el desarrollo de Stokes tiene la forma general

$$\psi(r, \theta; R_e) \approx \left(f_0(R_e) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n f_0(R_e)^n \right) \left(r \ln r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r} \right) \sin \theta, \quad (1.36)$$

donde

$$f_0(R_e) = \left(\ln \frac{1}{R_e} + k \right)^{-1} .$$

Si se escoge la k tal que

$$k = \ln 4 - \gamma + \frac{1}{2},$$

se encuentra que las expresiones (1.34) y (1.35) se acoplan perfectamente. Por lo tanto, en el siguiente paso en el desarrollo de Stokes se encuentra que $a_2 = 0$. Kaplun [4, 15] llevó el desarrollo un paso más adelante y encontró que $a_3 \approx 0.82$.

Puesto que los coeficientes f_n y F_n son potencias inversas de $(k - \ln R_e)$, las correcciones debidas a los términos no lineales, en la región de Stokes, son incluidas a través de las condiciones de frontera que hay que imponer a cada paso. De manera que, en lo que a las ecuaciones de movimiento concierne, el flujo está regido por las ecuaciones de Stokes. Por lo tanto, para considerar correcciones debidas a términos no lineales en las ecuaciones, hay que calcular un número infinito de términos en (1.36). En 1975 Skinner [22] hizo una extensión de los desarrollos de Stokes y Oseen y calculó una primera

corrección al flujo, en donde se toman en cuenta los términos no lineales, sin embargo, las correcciones muestran ser más pequeñas que el error cometido al truncar la serie logarítmicas en (1.36).

En 1995 Kropinsky, Ward & Keller [23], propusieron un método pseudo-numérico para poder obtener resultados que tuvieran toda la información contenida en la suma infinita en la expresión (1.36). Aunque a partir de estas nuevas propuestas se obtienen resultados satisfactorios, respecto a los obtenidos integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento, las contribuciones de los términos no lineales no son consideradas en la región de Stokes, de manera que dichos resultados tienen validez restringida para números de Reynolds de orden uno. Más tarde, en 1996, Keller y Ward [24] extendieron el método para calcular correcciones debidas a los términos no lineales, y cuyos resultados parecen comparar bien con experimentos y cálculos numéricos, para $R_e \leq 1.8$.

Respecto a los métodos de truncamiento de series, Van Dyke en 1964 [16] y Underwood en 1969 [17, 25], trabajaron con la ecuación (1.12) y desarrollaron la función de corriente en series de Fourier en el ángulo polar, de manera que el problema se reduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Estas ecuaciones fueron resueltas numéricamente usando un método de disparo [25]. En 1973, Nieuwstadt & Keller [24], propusieron series de Fourier para la función de corriente y la vorticidad, en el ángulo polar, y utilizaron las ecuaciones de Navier-Stokes en el lenguaje de la vorticidad y la función de corriente. Así, el problema se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que resuelven numéricamente. Los dos métodos anteriores fueron utilizados y corroborados con otros cálculos para $R_e \leq 10$, en el caso de Underwood, y $R_e \leq 40$, para Nieuwstadt & Keller. Evidentemente, en vista de la naturaleza analítica-numérica del método utilizado, sólo obtuvieron resultados para algunos valores de R_e dentro de estos intervalos.

Las combinaciones entre métodos analíticos y numéricos se han explotado desde diferentes puntos de vista. En algunos casos, se busca un comportamiento asintótico para encontrar expresiones cerradas para las características del flujo, en algún intervalo finito de R_e . En otros, simplemente se busca reducir la complejidad del problema numérico, por ejemplo, Dennis & Chang [26] utilizan el desarrollo en series de Fourier, para la función de corriente, de manera que una de las ecuaciones diferenciales parciales se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que resuelven numéricamente. La ecuación de momento se resuelve numéricamente para

la vorticidad usando diferencias finitas. Por tanto, el problema de resolver dos ecuaciones diferenciales parciales, se reduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias y una ecuación diferencial parcial.

Por otro lado, con el rápido desarrollo de computadoras y programas, el problema ha sido estudiado para un gran intervalo de valores del número de Reynolds. Los métodos numéricos que han sido utilizados para este problema, desde la década de los 1930's, para R_e fijo, se han mejorado y en los últimos años se han propuesto diferentes alternativas para mejorar los resultados. Estos métodos se pueden dividir en dos grandes grupos: en el primero, se considera el problema estacionario [27–30]; el segundo, consiste en buscar soluciones estacionarias a partir de resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes dependientes del tiempo [31–33]. Sin embargo, se encuentra que es más eficiente, en el caso de estudiar el problema estacionario, utilizar las ecuaciones de movimiento independientes del tiempo. Básicamente, la razón radica en que el tiempo requerido para que la solución del problema dependiente del tiempo llegue al estado estacionario puede ser muy grande [34].

Dentro de los dos grupos anteriores, las diferencias surgen en el método para discretizar las ecuaciones diferenciales y en las condiciones de frontera que se utilizan. Por un lado, el dominio de la coordenada radial es infinito, de manera que en este sentido se han propuesto diferentes alternativas. Como primera aproximación, se puede utilizar la condición de flujo uniforme a una distancia finita suficientemente lejana del cilindro [31] y, en algunos casos, extrapolar para $r \rightarrow \infty$ [28]. Otra alternativa es buscar formas asintóticas para las soluciones de las ecuaciones, dependiendo de la representación en que se estudian, para distancias suficientemente lejanas [18, 33, 35]. Estas expresiones son basadas, por ejemplo, en soluciones a las ecuaciones de Oseen, que tienen como condición de frontera al flujo uniforme en $r \rightarrow \infty$ [26]. En los diferentes resultados se encuentra que al usar formas asintóticas para el flujo lejano, se producen mejores resultados, comparados con aquellos provenientes de haber impuesto la condición de flujo uniforme a una distancia finita, sobre todo para números de Reynolds grandes [18], aunque, hay reportes en los cuales, a partir de una transformación tal que el dominio de integración es finito, los resultados para el arrastre no difieren mucho, al usar una condición asintótica para el flujo lejos y la condición de flujo uniforme [30].

Para el caso de la condición de frontera sobre la superficie del cilindro, el problema surge al describir la superficie del cuerpo, lo cual, depende del tipo de variables y de coordenadas en que se estudia el problema. Una vez

más se abre una gama de alternativas, entre las cuales están el usar técnicas de diferencias finitas y transformaciones conformes [36–38], que tienen como desventaja que hay que invertir el Jacobiano de la transformación, que puede ser lento cuando se tienen mallas muy finas. En otros estudios, la influencia del cilindro se introduce a través de un término adicional en la ecuación de conservación de momento [32, 39, 40].

En los últimos años se han mejorado las técnicas de dinámica molecular para flujos viscosos. La idea es resolver numéricamente una forma discreta de las ecuaciones de Boltzmann [41, 42]. Los resultados, que en su mayoría están enfocados a números de Reynolds relativamente grandes, parecen ser consistentes, aunque no en todos los casos, con las demás teorías y resultados experimentales.

2 El flujo alrededor de una esfera

Para el caso en 3D, el problema tiene simetría axial de manera que los campos de velocidad y presión dependen de las coordenadas esféricas (r, θ) ; cuando el flujo se escoge en dirección del eje z . En este caso la ecuación para la función de corriente está dada por

$$\frac{Re}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) D^2 \psi = D^4 \psi, \quad (1.37)$$

donde

$$D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\psi(r, \theta) = 0 \quad \text{y} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{si } r = 1, \quad (1.39)$$

$$\psi(r, \theta) \sim \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad \text{si } r \rightarrow \infty. \quad (1.40)$$

De manera similar al caso del cilindro, la primera aproximación realizada fue suponer que $Re = 0$, de modo que el problema se reduce a resolver una ecuación bi-armónica para la función de corriente. A diferencia del problema

en dos dimensiones, en este caso el problema se puede resolver y se encuentra que la solución es [2, 3]

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{4} \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta. \quad (1.41)$$

Si a partir de la expresión anterior se estima el tamaño de los términos despreciados en la ecuación de momento, respecto al término viscoso, se encuentra que

$$\frac{R_e \|\ (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \|}{\|\ \nabla^2 \vec{u} \|} \approx R_e r, \quad (1.42)$$

para distancias grandes del objeto. Por lo tanto, para aquellos valores de r tales que

$$R_e r = O(1),$$

los términos inerciales son comparables con los términos viscosos, de manera que la expresión (1.41) no es una solución uniforme en todo el dominio. El que en este caso las ecuaciones de Stokes se puedan resolver se debe a que la solución a las ecuaciones de movimiento decae suficientemente rápido, de manera que en la región de no uniformidad el campo de velocidades es prácticamente uniforme y la condición en $r \rightarrow \infty$ se satisface.

Más tarde, Whitehead propuso una expansión del tipo (1.19), de manera que el orden más bajo de aproximación corresponde a resolver las ecuaciones de Stokes, y encontró que en el problema a primer orden en R_e , el campo de velocidades no satisface la condición en infinito. Por lo tanto, la naturaleza singular del problema se refleja hasta el término de orden R_e , a diferencia del caso bidimensional que sucede en el término de orden cero. Del análisis del tamaño relativo del término despreciado en la ecuación de momento, ya se había encontrado que la región de no uniformidad se localiza a distancias del orden de R_e^{-1} , aunque la solución de Stokes parece comportarse adecuadamente a esas distancias. Lo que está en serias dificultades es la distribución de los gradientes de velocidad, que no decae lo suficientemente rápido lejos de la esfera, por lo que el siguiente orden en teoría de perturbaciones regulares no se puede resolver.

Evidentemente, la alternativa fue la aproximación de Oseen. En el caso tridimensional la ecuación de Oseen toma la siguiente forma

$$R_e \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) D^2 \psi = D^4 \psi, \quad (1.43)$$

con las condiciones de frontera (1.38-1.40). Una primera aproximación a la solución fue encontrada por Oseen en 1910 [3, 4, 8], la cual es de la forma

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{4} \left(2r^2 + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \frac{1}{R_e} (1 + \cos \theta) \left(1 - e^{-\frac{1}{2} R_e r (1 - \cos \theta)} \right), \quad (1.44)$$

y representa una aproximación uniforme al flujo en todo el dominio, cuando R_e es mucho menor que uno, que satisface exactamente la condición de frontera en el infinito y la condición sobre la superficie de la esfera; hasta una función de orden R_e [3, 4]. Puesto que la aproximación de Oseen está restringida a números de Reynolds bajos, ya que deja de ser válida para R_e grande, la expresión anterior es suficiente dentro de los límites de validez de la aproximación de Oseen. Este problema fue estudiado para valores arbitrarios de R_e por Goldstein en 1929 [10] y por Tomotika y Aoi en 1950 [12], sin embargo, por las razones ya mencionadas en el caso de 2D, los resultados sólo son válidos a $R_e \ll 1$.

Proudman & Pearson en 1956 [8], estudiaron el problema usando el método de los AEA. Para exponer el método con claridad, se sigue el desarrollo expuesto por Van Dyke (1975) [4]. De manera similar al caso del cilindro, se tienen dos desarrollos, válidos cerca y lejos de la esfera y que deben acoplarse en la región en donde la solución de Stokes no es uniforme. El primer término en la expansión cerca de la esfera es la solución de Stokes, puesto que para $R_e \rightarrow 0$ es una buena aproximación al flujo y satisface la condición a la frontera sobre la esfera. Evidentemente, el primer término en la expansión de Oseen (externa) corresponde a un flujo uniforme. En el trabajo de Proudman & Pearson [8] se muestran formalmente los resultados anteriores. Si se escribe la solución de Stokes en variables de Oseen ($\rho = R_e r$) y se desarrolla para R_e chico, con r fija, se obtiene que

$$\psi_1 \approx \frac{1}{2R_e^2} \rho^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \frac{1}{R_e} \rho \sin^2 \theta, \quad (1.45)$$

de manera que la expansión de Oseen debe tener la forma

$$\Psi(\rho, \theta) = \frac{1}{2R_e^2} \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{R_e} \Psi_2(\rho, \theta) + \dots \quad (1.46)$$

Cuando se sustituye la expresión anterior en la ecuación (1.37), se obtiene que Ψ_2 satisface la ecuación linealizada de Oseen, es decir,

$$\left(D_\rho - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) D_\rho \Psi_2 = 0, \quad (1.47)$$

donde

$$D_\rho \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

cuya solución es de la forma [4, 8]

$$\Psi_2(\rho, \theta) = -2C(1 + \cos \theta) \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\rho(1 - \cos \theta)} \right), \quad (1.48)$$

C es una constante de integración que debe ajustarse de manera que la expansión de Oseen se acople con la expansión de Stokes en la región en donde $\rho = O(1)$. Si se reescriben las expansiones de Stokes y de Oseen en variables de Stokes (r, θ) , y se desarrollan para R_e chico se obtiene

$$\psi(r, \theta) \approx \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta - \frac{3}{4}r \sin^2 \theta, \quad (1.49)$$

$$\Psi(r, \theta) \approx \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta - Cr \sin^2 \theta, \quad (1.50)$$

de manera que, para que las dos expresiones anteriores se acoplen a este orden, se tiene que $C = \frac{3}{4}$. A partir de las expansiones cerca y lejos del objeto, calculadas hasta el momento, es posible recuperar la expresión (1.44) [4].

Para el cálculo de la segunda aproximación a la expansión de Stokes, se desarrolla la expresión (1.46), escrita en variables de Stokes, a primer orden en R_e de manera que en la región en donde $\rho = O(1)$ la expansión de Oseen es

$$\Psi(r, \theta) \approx \frac{1}{2}(r^2 - \frac{3}{2}r) \sin^2 \theta - \frac{3}{16}r^2 R_e (1 - \cos \theta) \sin^2 \theta, \quad (1.51)$$

por lo tanto, en la región en donde $\rho = O(1)$, la expansión de Stokes debe tener la forma

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2}(r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{r}) \sin^2 \theta + R_e \psi_2(r, \theta) + \dots \quad (1.52)$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación (1.37), se encuentra que la ecuación que satisface ψ_2 es

$$D^2 \psi_2 = -\frac{9}{4} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (1.53)$$

La solución de la ecuación anterior, que satisface la condición de frontera sobre la superficie de la esfera, está dada por [4, 8]

$$\begin{aligned} \psi_2(r, \theta) = & C_1 \left(2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \\ & - \frac{3}{32} \left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.54)$$

donde C_1 es una constante de integración que se debe ajustar al hacer el acoplamiento con la expansión de Oseen. Cuando se escriben las expansiones (1.46) y (1.52), en variables de Oseen, y se desarrollan para R_e pequeños, se encuentra que la condición de acoplamiento exige que $C_1 = \frac{3}{32}$. De manera que la expansión de Stokes, considerando sólo dos términos en el desarrollo, es

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{4}(r-1)^2 \sin^2 \theta \left[\left(1 + \frac{3}{8}R_e\right) \left(2 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{8}R_e \left(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta \right]. \quad (1.55)$$

A partir de la expresión anterior, se encuentra que aparece una región de recirculación atrás del objeto para $R_e = 8$, a diferencia de las predicciones experimentales de $R_e = 10$.

Proudman & Pearson [8] llevaron el cálculo más adelante y encontraron que la expansión de Stokes contiene términos en R^2 y en $R^2 \ln R_e$, de manera que la expansión de Oseen también contiene términos logarítmicos en R_e , que empiezan en $R^3 \ln R_e$. Calcularon el término en $R^2 \ln R_e$ en la expansión de Stokes, y encontraron que la condición para que haya una región de recirculación resulta en una ecuación trascendental que no tiene soluciones reales. Más tarde, Chester & Breach en 1969 [43] realizaron el cálculo para el término en $R_e^3 \ln R_e$, con el que obtienen una expresión para el arrastre, válida para $R_e \leq 0.5$. Debido a que las soluciones quedan expresadas en términos de series logarítmicas, para calcular correcciones de orden uno en R_e , es necesario calcular un número infinito de términos. Es importante resaltar que, aunque en los casos de 2 y 3D se obtienen series logarítmicas en el número de Reynolds, que restringe los resultados a $R_e < 1$, la aproximación en el caso tridimensional es mucho mejor que en el caso bidimensional, puesto que el segundo término en la expansión de Stokes ya contiene información de los términos no lineales en la ecuación de momento. En cambio, en el caso bidimensional, la contribución de la no linealidad del problema, cerca del cilindro, se introduce a través de las condiciones de frontera en la región de acoplamiento [8].

Recientemente, S. -J. Liao en 2002 [44] encontró expresiones analíticas para el coeficiente de arrastre a partir del método de análisis homotópico (Homotopic Analysis Method), que propuso y desarrolló en 1997 [45]. Este método consiste en construir una familia de ecuaciones diferenciales parciales, embebidas en un parámetro $q \in [0, 1]$ y que dependen de un parámetro auxiliar \hbar ,

diferente de cero, de la siguiente manera

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(r, \mu, q) - \psi_0(r, \mu)] = q\hbar\mathcal{A}\Psi(r, \mu, q), \quad (1.56)$$

donde $\mu = \cos\theta$, \mathcal{L} es un operador lineal auxiliar arbitrario y \mathcal{A} es el operador no lineal (operador de Navier-Stokes)

$$\mathcal{A}\Psi \equiv \mathcal{D}^4\Psi - \frac{Re}{r^2} \left[\frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{\partial\Psi}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\mu}{(1-\mu^2)} \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\mu} \right] \mathcal{D}^2\Psi, \quad (1.57)$$

donde

$$\mathcal{D}^2 \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(1-\mu^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \right]. \quad (1.58)$$

La función $\psi_0(r, \mu)$, que satisface las condiciones (1.38-1.40), es una aproximación inicial a las ecuaciones de Navier-Stokes. El caso $\mathcal{A}\Psi = 0$ corresponde a la ecuación para la función de corriente (1.37) con el cambio de variable $\mu = \cos\theta$. Las condiciones de frontera correspondientes a (1.56) son

$$\Psi(1, \mu, q) = \left. \frac{\partial\Psi(r, \mu, q)}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (1.59)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r, \mu, q) = \frac{1}{2}r^2(1 - \mu^2). \quad (1.60)$$

De la ecuación diferencial y las condiciones de frontera se puede ver que cuando $q = 0$ y $q = 1$

$$\Psi(r, \mu, 0) = \psi_0(r, \mu), \quad (1.61)$$

$$\Psi(r, \mu, 1) = \psi(r, \mu), \quad (1.62)$$

donde $\psi(r, \mu)$ es la solución exacta a las ecuaciones de Navier-Stokes dadas por (1.37-1.40). De manera que conforme el parámetro q aumenta entre cero y uno, la función $\Psi(r, \mu, q)$ se deforma de la aproximación inicial a la solución exacta del problema⁵. Hay que notar que en esta formulación existe una gran libertad para escoger $\psi_0(r, \mu)$, el operador \mathcal{L} y el parámetro \hbar . Al suponer que todas las derivadas de $\Psi(r, \mu, q)$ existen en $q = 0$, se encuentra que la serie de Taylor, al rededor de $q = 0$, se puede escribir como

$$\Psi(r, \mu, q) = \psi_0(r, \mu) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_0^{[m]}(r, \mu)}{m!} q^m, \quad (1.63)$$

⁵De hecho este método también se conoce como método de deformación de la topología [44].

donde

$$\psi_0^{[m]}(r, \mu) = \left. \frac{\partial^m \Psi(r, \mu, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}.$$

Si se utiliza la libertad para escoger $\psi_0(r, \mu)$, el operador lineal \mathcal{L} y el parámetro \hbar de tal manera que la serie (1.63) converja en $q = 1$, se obtiene que la serie de Taylor de la solución es

$$\psi(r, \mu) = \psi_0(r, \mu) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(r, \mu) q^m, \quad (1.64)$$

donde

$$\psi_m(r, \mu) = \frac{\psi_0^{[m]}(r, \mu)}{m!}.$$

Esta serie es una relación directa entre la primera aproximación al problema y la solución exacta, a través de las funciones desconocidas $\psi_m(r, \mu)$. A partir de la ecuación diferencial (1.56) y la serie (1.63) se construye una familia de ecuaciones diferenciales parciales, para las funciones desconocidas, que resultan ser lineales y, una vez que se han escogido el operador lineal \mathcal{L} y el parámetro \hbar de forma adecuada, se pueden resolver de forma iterativa. Es importante señalar que, según el autor, una de las propiedades fundamentales de este método, además de pasar de un problema no lineal a un número infinito de subproblemas lineales, es que si se encuentran \mathcal{L} y \hbar tales que la serie (1.64) converja y el problema sea soluble a cada orden, entonces (1.64) converge a la solución del problema [44, 45].

Se presentan resultados para el coeficiente de arrastre, calculando términos de hasta décimo orden⁶, que parecen ser válidas para números de Reynolds mayores que uno. Al parecer, esto se debe a que este método no requiere la suposición de que R_e sea pequeño, como en el caso perturbativo. Sin embargo, este trabajo se enfoca en el estudio del arrastre y no contiene un análisis de las demás características del flujo, como el estudio de las líneas de corriente y sus propiedades.

En cuanto a los métodos semi-analíticos y numéricos, se encuentra la misma historia que en el caso del flujo en 2D. En 1971 Dennis & Walker [19] realizaron el cálculo para R_e en un rango de 0.1 a 40. El método utilizado consiste en proponer como soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes, en

⁶En este caso el orden se entiende como el número de términos considerados en la suma en la expresión (1.64).

la formulación vorticidad-función de corriente, series truncadas en polinomios de Legendre, de manera que las ecuaciones diferenciales parciales se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias, para funciones que dependen de la distancia a la esfera y del número de Reynolds. Finalmente, resuelven numéricamente el problema resultante para diferentes órdenes en el truncamiento de las series. Los primeros resultados de la integración numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes se realizaron en la década de los 1960's, por Hamielec & Johnson [46] y Hamielec, Storey & Whitehead [47] en 1962. Principalmente se han realizado cálculos usando elemento finito [48–50], diferencias finitas [51, 52] y métodos espectrales [53, 54], relativo a la forma de discretizar las ecuaciones de movimiento. Respecto a las condiciones de frontera, se utilizan diferentes tipos de condición al infinito, ya sea suponiendo un flujo uniforme o ajustar un flujo asintótico a una distancia finita suficientemente grande. Por ejemplo, en el trabajo de Cliffe y Lever en 1986 [50] se comparan tres procedimientos, utilizando elemento finito y diferentes condiciones de frontera, y discuten las ventajas y desventajas en cada caso. En los últimos años, se han realizado cálculos para un amplio intervalo de valores de R_e , como en el caso de Johnson & Patel, que encontraron soluciones numéricas para R_e hasta 300 [55].

Capítulo 2

El Método

El método utilizado para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de frontera, dadas por las expresiones (1.3-1.7), está basado en el trabajo de R. Soto y R. Peralta-Fabi [20]. Como primer paso, se hace un cambio de variable (x), en la coordenada radial (r), tal que x está definida entre cero y uno; así el nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales parciales queda definido en un dominio finito.

La transformación propuesta por Soto y Peralta-Fabi [20] es

$$x(r) = 1 - \frac{1}{r}, \quad (2.1)$$

que tiene la propiedad de mapear el intervalo $[1, \infty)$ al intervalo $[0, 1]$. El nuevo sistema de ecuaciones con condiciones a la frontera y en forma adimensional, se puede escribir simbólicamente, como

$$Re(\vec{u} \cdot \nabla_a) \vec{u} = -\nabla_a P + \nabla_a^2 \vec{u}, \quad (2.2)$$

$$\nabla_a \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{u}(0, \theta) = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{u}(1, \theta) = \hat{U}, \quad (2.5)$$

$$P^*(1, \theta) \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

donde el subíndice indica derivadas respecto a las variables (x, θ) . \hat{U} es un vector unitario en la dirección del flujo uniforme, $P^* = P - P_0$ y P_0 es la presión lejos del cuerpo.

Las soluciones de estas ecuaciones se proponen como series de potencias en

x , i. e.,

$$u_r(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta; R_e) x^n. \quad (2.7)$$

$$u_\theta(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta; R_e) x^n, \quad (2.8)$$

$$P^*(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta; R_e) x^n. \quad (2.9)$$

Sustituyendo estas expresiones para los campos de velocidad y presión en las ecuaciones (2.2) y (2.3) y coleccionando términos con la misma potencia en x , se obtienen tres relaciones de recurrencia para los coeficientes a_n , b_n y c_n , las cuales, sólo tienen dos coeficientes independientes (c_0 y b_1), de manera que todos los restantes se expresan en función de éstos. En el caso de las condiciones a la frontera, haciendo $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$ la condición sobre la superficie del cuerpo queda satisfecha y, para $x = 1$ ($r \rightarrow \infty$), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\theta; R_e) = \cos \theta, \quad (2.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\theta; R_e) = -\sin \theta, \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta; R_e) = 0, \quad (2.12)$$

en vista que todos los coeficientes se escriben en función de los dos coeficientes independientes, las expresiones (2.10-2.11) resultan en dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que determinan $c_0(\theta; R_e)$ y $b_1(\theta; R_e)$. En la condición a la frontera sobre la presión se tiene, a lo más una constante libre, así que debe satisfacerse de forma natural; dadas las dos funciones independientes. Una vez que los coeficientes c_0 y b_1 se calculan a partir las ecuaciones (2.10) y (2.11), las expresiones (2.7-2.9) son soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de frontera. Sin embargo, debido a la naturaleza infinita del problema, en la práctica el problema no se puede resolver, por lo que las series (2.7-2.9) se deben truncar.

1 El método en 2D

Una vez que las ecuaciones de Navier-Stokes son escritas en coordenadas cilíndricas, se hace el cambio de variable (2.1), de manera que las ecuaciones (2.2-2.6) toman la forma

$$R_e \left[(1-x)u_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta^2 \right] = -(1-x) \frac{\partial P}{\partial x} + (1-x)^3 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \\ + (1-x) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - (1-x)^2 \frac{\partial u_r}{\partial x} - 2(1-x)u_r, \quad (2.13)$$

$$R_e \left[(1-x)u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r u_\theta \right] = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + (1-x)^3 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} \\ + (1-x) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - (1-x)^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + 2(1-x) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - (1-x)u_\theta, \quad (2.14)$$

$$(1-x) \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r = 0, \quad (2.15)$$

$$\bar{u}(0, \theta) = 0 \quad (2.16)$$

$$u_r(1, \theta) = \cos \theta, \quad (2.17)$$

$$u_\theta(1, \theta) = -\sin \theta, \quad (2.18)$$

$$P^*(1, \theta) \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

Sustituyendo las expresiones (2.7-2.9) en las ecuaciones (2.13-2.15) y coleccionando términos en potencias de x , las ecuaciones diferenciales se transforman en tres relaciones de recurrencia¹, dadas por

$$a_n = \frac{1}{n} \left((n-2)a_{n-1} - b'_{n-1} \right), \quad (2.20)$$

$$b_n = \frac{1}{n(n-1)} \left[R_e \sum_{m=1}^{n-3} b_m \left(b'_{n-m-2} - (m-1)a_{n-m-2} + ma_{n-m-1} \right) \right. \\ \left. + c'_{n-2} - b''_{n-2} + b''_{n-3} - 2a'_{n-2} + 2a'_{n-3} + (3n-5)(n-1)b_{n-1} \right. \\ \left. - (3n^2 - 13n + 13)b_{n-2} + (n-2)(n-4)b_{n-3} \right], \quad (2.21)$$

$$c_n = \frac{1}{n} \left[R_e \sum_{m=1}^{n-2} \left(b_m b_{n-m-1} + ma_m a_{n-m-1} - b_m a'_{n-m-1} - ma_m a_{n-m} \right) \right. \\ \left. + (n-1)c_{n-1} + a''_{n-1} - a''_{n-2} - 2b'_{n-1} + 2b'_{n-2} + n(n+1)a_{n+1} \right. \\ \left. - n(n-3)a_n + (3n^2 - 7n + 3)a_{n-1} - (n-1)(n-3)a_{n-2} \right], \quad (2.22)$$

¹Para más detalles algebraicos ver el apéndice A.

donde las primas representan derivadas con respecto a θ . Si se calculan los coeficientes para los primeros valores de n , se encuentra que

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0, \\
 a_2 &= -\frac{1}{2}b_1, \\
 b_2 &= \frac{1}{2}(c'_0 + b_1), \\
 c_1 &= 2a_2, \\
 a_3 &= -\frac{1}{3}(a_2 - b'_2), \\
 b_3 &= \frac{1}{6}(c'_1 - b''_1 + 8b_2 + b_1), \\
 c_2 &= \frac{1}{2}(c_1 - 2b'_1 + 2a_3 + 2a_2), \\
 &\vdots,
 \end{aligned}$$

los coeficientes anteriores se ordenaron de manera que, una vez que se conoce un renglón, el siguiente queda determinado. Claramente, para valores más grandes de n , los coeficientes dependerán de coeficientes anteriores. De las expresiones anteriores se puede ver que los únicos coeficientes independientes son c_0 y b_1 ; de aquí en adelante $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$, respectivamente. El significado físico de estas dos cantidades se discute en la siguiente sección. Como ejemplo, a continuación se escriben los coeficientes para los primeros valores de n , como función de los independientes,

$$\begin{aligned}
 c_0(\theta) &\equiv \varphi(\theta), \\
 a_1(\theta) &= 0, \\
 b_1(\theta) &\equiv \eta(\theta), \\
 c_1(\theta) &= -\eta', \\
 a_2(\theta) &= -\frac{1}{2}\eta', \\
 b_2(\theta) &= \frac{1}{2}[\varphi' + \eta], \\
 c_2(\theta) &= -\frac{1}{2}[\varphi' + \eta], \\
 a_3(\theta) &= \frac{1}{3!}[\varphi'' + 2\eta'],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3(\theta) &= \frac{1}{3!} \left[4\varphi' - 2\eta'' + 3\eta \right], \\
c_3(\theta) &= \frac{1}{3!} \left[2R_e\eta^2 - 3\varphi'' + \eta''' - 2\eta' \right], \\
a_4(\theta) &= -\frac{1}{4!} \left[6\varphi'' - 2\eta''' + 7\eta' \right], \\
b_4(\theta) &= \frac{1}{4!} \left[R_e\eta'\eta - 2\varphi''' + 19\varphi' - 12\eta'' + 12\eta \right], \\
c_4(\theta) &= \frac{1}{4!} \left[R_e \left(6\varphi'\eta + 2\eta\eta'' - 4\eta'^2 + 12\eta^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi^{(4)} - 11\varphi'' + 6\eta''' - 6\eta' \right], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Cuando se sustituyen los coeficientes a_n , b_n y c_n , escritos en función de $\varphi(\theta)$ y $\eta(\theta)$, las condiciones (2.10) y (2.11) resultan en dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas, de orden y grado infinito que no es posible resolver, de manera que las expresiones (2.7-2.9) se truncan a un orden N y las condiciones de frontera toman la forma

$$\sum_{n=1}^N a_n(\theta; R_e) = \cos \theta, \quad (2.23)$$

$$\sum_{n=1}^N b_n(\theta; R_e) = -\sin \theta, \quad (2.24)$$

Así, el problema a resolver resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyo grado y orden son finitos y dependen del valor de N . A partir de las soluciones a estas ecuaciones, para una N fija, se obtienen expresiones para el campo de velocidad que satisface las ecuaciones (2.13-2.15) a un orden $N - 2$, debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes son de segundo orden², y las condiciones a la frontera a orden N .

A manera de ejemplo, a continuación se escriben las condiciones (2.23-2.24) para los primeros valores de N . Si $N = 3$

$$\begin{aligned}
\varphi'' + 5\eta' &= -6 \cos \theta, \\
2\eta'' - 7\varphi' - 12\eta &= 6 \sin \theta.
\end{aligned}$$

²Esto significa que, para tener un problema soluble, no es posible truncar las series a $N < 2$.

Para $N = 4$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2\eta''' - 10\varphi'' - 27\eta' &= 24 \cos \theta, \\ 2\varphi''' + 20\eta'' - 24\varphi' - 60\eta - R_e\eta'\eta &= -24 \sin \theta, \end{aligned}$$

que resulta el primer orden que contiene términos no lineales y al número de Reynolds, y para $N = 5$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2\varphi^{(4)} + 28\eta''' - 87\varphi'' \\ - 168\eta' - R_e [\eta''\eta + \eta'^2] &= 120 \cos \theta, \\ 3\eta^{(4)} - 32\varphi''' - 178\eta'' + 342\varphi' \\ 360\eta + R_e [2\varphi''\eta + 20\eta'\eta] &= -120 \sin \theta. \end{aligned}$$

De la forma de estas ecuaciones, se puede ver que el orden de las derivadas y el grado de la no linealidad crece conforme N crece. Es fácil notar que el orden de las ecuaciones diferenciales, para una N fija, es $N - 1$; mientras que la dependencia entre el grado de no linealidad de las ecuaciones y N no es tan evidente, en el apéndice A se discute más a fondo esta dependencia.

Un aspecto importante que hay que notar de los conjuntos de ecuaciones diferenciales anteriores, es que la primera ecuación es par, es decir, es invariante bajo la transformación $\theta \rightarrow -\theta$, mientras que la segunda es impar. Por lo tanto, se encuentra que los coeficientes a_n son funciones pares del ángulo y los b_n son funciones impares de éste. Haciendo un análisis similar, con el campo de presión, se encuentra que las c_n son funciones pares de θ . Este hecho se explota más adelante, cuando se construyen las soluciones a los sistemas de ecuaciones diferenciales para distintos valores de N .

Para poder resolver estas ecuaciones diferenciales, es necesario imponer condiciones de frontera. Como se buscan soluciones tales que el campo de velocidades sólo tenga componente radial en el eje horizontal, se tiene la condición adicional

$$\sum_{n=1}^N b_n(\theta)x^n = 0, \quad (2.25)$$

en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Entonces, para que la componente u_θ del campo de velocidades se anule en el eje horizontal, los coeficientes $b_n(\theta)$ deben ser cero en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. De las relaciones de recurrencia (2.20-2.22) y la condición anterior, se encuentra que las condiciones a la frontera, para las ecuaciones

(2.23) y (2.24), están dadas por

$$\varphi^{(2n+1)}(0) = \varphi^{(2n+1)}(\pi) = 0, \quad (2.26)$$

$$\eta^{(2n)}(0) = \eta^{(2n)}(\pi) = 0, \quad (2.27)$$

para $n = 0, 1, \dots$

1.1 Las líneas de corriente y el arrastre

La relación entre la función de corriente y el campo de velocidades, en coordenadas cilíndricas, es

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

a partir de los desarrollos (2.7), (2.8) y las expresiones anteriores se encuentra que la función de corriente está dada por [20]

$$\psi(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{1-x} \int_0^\theta a_n(t; R_e) dt, \quad (2.29)$$

La fuerza por unidad de longitud que el fluido hace sobre el cilindro es

$$\vec{F} = \int_S \vec{\tau} \cdot \hat{n} dS,$$

donde $\vec{\tau}$ es el tensor de esfuerzos y \hat{n} un vector unitario a la superficie del cuerpo (S); que apunta hacia afuera de ésta. Debido a la simetría del problema y a que el cilindro no está rotando, la fuerza sobre el cilindro va en dirección del flujo [2], entonces su magnitud está dada por

$$F = \int_S (\tau_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta) dS, \quad (2.30)$$

donde las componentes del tensor de esfuerzos, escritas en forma adimensional y en coordenadas cilíndricas, son

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -P + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \tau_{\theta r} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned}$$

Al sustituir los desarrollos (2.7) y (2.9) en las expresiones anteriores y al calcular en $x = 0$ ($r = 1$), se obtienen que las componentes del tensor de esfuerzos sobre el cuerpo son

$$\tau_{rr} = -\varphi(\theta; R_e), \quad (2.31)$$

$$\tau_{\theta r} = \eta(\theta; R_e), \quad (2.32)$$

por lo que el coeficiente de arrastre, definido como $C_D = \frac{F}{R_e}$, se calcula a partir de

$$C_D = -\frac{1}{R_e} \int_0^{2\pi} \left(\varphi(\theta; R_e) \cos \theta + \eta(\theta; R_e) \sin \theta \right) d\theta. \quad (2.33)$$

Entonces, de los resultados anteriores se encuentra, por un lado, el contenido físico de las funciones desconocidas $\eta(\theta; R_e)$ y $\varphi(\theta; R_e)$, puesto que son los esfuerzos cortantes y normales sobre la superficie del cilindro, respectivamente. Además, se ha encontrado que el problema queda determinado a partir de conocer el tensor de esfuerzos sobre la superficie del cuerpo.

2 El método en 3D

De forma análoga al caso de 2D, las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben en coordenadas esféricas y se hace el cambio de variable (2.1), de manera que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, en las variables (x, θ) , está dado por

$$R_e \left((1-x)u_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta^2 \right) = (1-x) \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + (1-x)^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - 2u_r - 2\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2\cot \theta u_\theta \right), \quad (2.34)$$

$$R_e \left((1-x)u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r u_\theta \right) = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + (1-x) \left((1-x)^2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\sin^2 \theta} \right), \quad (2.35)$$

$$(1-x) \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + 2u_r + \cot \theta u_\theta = 0, \quad (2.36)$$

donde las primeras dos ecuaciones corresponden a las componentes de la ecuación de conservación de momento, y la tercera corresponde a la ecuación de continuidad. Las condiciones a la frontera están dadas por

$$\bar{u}(0, \theta) = 0 \quad (2.37)$$

$$u_r(1, \theta) = \cos \theta, \quad (2.38)$$

$$u_\theta(1, \theta) = -\sin \theta, \quad (2.39)$$

$$P^*(1, \theta) \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

Al sustituir las expresiones (2.7-2.9) en la ecuaciones (2.34-2.36), y una vez que se han coleccionado términos con iguales potencias en x , se obtiene el siguiente conjunto de relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \left[(n-3)a_{n-1} + \cot \theta b_{n-1} \right], \\ b_n &= \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{m=1}^{n-2} R_e b_m \left(b'_{n-m-2} - (m-1)a_{n-m-2} + m a_{n-m-1} \right) \right. \\ &\quad \left. 3(n-2)(n-1)b_{n-1} - 3(n-2)(n-3)b_{n-2} + (n-3)(n-4)b_{n-3} \right. \\ &\quad \left. + (n-1)a'_{n-1} - 2(n-2)a'_{n-2} + (n-3)a'_{n-3} + c'_{n-2} \right], \\ c_n &= \frac{1}{n} \left[\sum_{m=1}^{n-1} R_e \left(b_m(b_{n-m-1} - a'_{n-m-1}) + m a_m(a_{n-m-1} - a_{n-m}) \right) \right. \\ &\quad \left. + a''_{n-1} + \cot \theta a'_{n-1} - a''_{n-2} - \cot \theta a'_{n-2} + n(n+1)a_{n+1} - n(3n-5)a_n \right. \\ &\quad \left. + (3n-4)(n-3)a_{n-1} - (n-4)(n-3)a_{n-2} + (n-1)c_{n-1} \right], \end{aligned}$$

donde las primas se refieren a derivadas respecto de θ . De forma análoga al caso del cilindro, estas relaciones de recurrencia tienen dos coeficientes independientes, a partir de los cuales se calculan todos lo demás. Como es de esperarse. estas relaciones resultan más complicadas que en el caso de 2D, ya que además de ser no lineales, los coeficientes no son constantes. Con el fin de simplificar la forma de estas relaciones se hizo el cambio de variable $\mu = \cos \theta$ y se define un nuevo conjunto de coeficientes, dado por $\beta_n = \frac{b_n}{\sqrt{1-\mu^2}}$, de manera que las relaciones de recurrencia anteriores toman la forma

$$a_n = \frac{1}{n} \left[(n-3)a_{n-1} + \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2)\beta_{n-1} \right] \right], \quad (2.41)$$

$$\beta_n = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{m=1}^{n-2} R_e \beta_m \left((\mu^2-1)\beta'_{n-m-2} + \mu \beta_{n-m-2} - (m-1)a_{n-m-2} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& +m a_{n-m-1}) + 3(n-2)(n-1)\beta_{n-1} - 3(n-2)(n-3)\beta_{n-2} \\
& + (n-3)(n-4)\beta_{n-3} - (n-1)a'_{n-1} + 2(n-2)a'_{n-2} \\
& (n-3)a'_{n-3} - c'_{n-2}]. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{n} \left[\sum_{m=1}^{n-1} R_e \left((1-\mu^2)\beta_m(\beta_{n-m-1} + a'_{n-m-1}) + m a_m(a_{n-n-1} - a_{n-m}) \right) \right. \\
& + \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)a'_{n-1}] - \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)a'_{n-2}] + n(n+1)a_{n+1} \\
& - n(3n-5)a_n + (3n-4)(n-3)a_{n-1} - (n-4)(n-3)a_{n-2} \\
& \left. (n-1)c_{n-1} \right], \tag{2.43}
\end{aligned}$$

en este caso las primas representan derivadas con respecto a μ . Los coeficientes independientes c_0 y β_1 se redefinen como $\varphi(\mu; R_e)$ y $\eta(\mu; R_e)$, respectivamente. Así, los primeros coeficientes, en función de las dos funciones independientes son de la forma

$$\begin{aligned}
c_0(\mu) &\equiv \varphi(\mu), \\
a_1(\mu) &= 0, \\
\beta_1(\mu) &\equiv \eta(\mu), \\
c_1(\mu) &= \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)\eta], \\
a_2(\mu) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)\eta], \\
\beta_2(\mu) &= -\frac{1}{2}\varphi', \\
c_2(\mu) &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)\varphi'], \\
a_3(\mu) &= -\frac{1}{6} \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)\varphi'], \\
\beta_3(\mu) &= -\frac{1}{6} \left(2 \frac{d^2}{d\mu^2} [(1-\mu^2)\eta] + 3\varphi' \right), \\
c_3(\mu) &= \frac{1}{3} \left(R_e(1-\mu^2)\eta^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} [(1-\mu^2)\eta] \right\} \right. \\
& \left. - \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2)\varphi'] \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4(\mu) &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta] \right\} + \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)\varphi'] \right), \\
\beta_4(\mu) &= -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} R_e (1 - \mu^2) \eta' \eta + 4 \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta] \right. \\
&\quad \left. - \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\varphi'] + 6\varphi' \right), \\
c_4(\mu) &= \frac{1}{4} \left(R_e \left\{ (1 - \mu^2)\eta \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta] + \eta - \varphi' \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)\eta] \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)\eta' \eta] \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta] \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{6} \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\varphi'] \right] - \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)\varphi'] \right), \\
&\vdots,
\end{aligned}$$

en las expresiones anteriores se omitió la dependencia en R_e y en μ para simplificar la escritura. Las condiciones en $x = 1$ ($r \rightarrow \infty$) sobre el campo de velocidad, resultan en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de orden y grado infinito. En la práctica, para tener un problema finito, las sumas en (2.10) y (2.11) se deben truncar. Por lo tanto, estas ecuaciones se aproximan por

$$\sum_{n=1}^N a_n = \mu, \tag{2.44}$$

$$\sum_{n=1}^N \beta_n = -1, \tag{2.45}$$

que representan un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de orden y grado finito. A manera de ejemplo a continuación se escriben los sistemas de ecuaciones correspondientes a los primeros valores de N .

Para $N = 3$ se tiene el sistema

$$\frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) (3\eta(\mu) - \varphi'(\mu))] = 6\mu, \tag{2.46}$$

$$\frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] - 3(\eta(\mu) - \varphi'(\mu)) = 3, \quad (2.47)$$

que son lineales y se pueden resolver analíticamente. Para $N = 4$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] + 3\eta(\mu) - 2\varphi'(\mu) \right) \right] = \mu, \\ -\frac{1}{24} R_e (1 - \mu^2) \eta'(\mu) \eta(\mu) - \frac{2}{3} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] + \eta(\mu) \\ + \frac{1}{12} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\varphi'(\mu)] - \frac{3}{2} \varphi'(\mu) = -1, \end{aligned} \quad (2.48)$$

de donde se puede ver que este es el primer problema no lineal a resolver. Más adelante, se discuten las soluciones para los dos casos anteriores, puesto que, en el caso $N = 4$ es posible encontrar una solución analítica a las ecuaciones no lineales. Si $N = 5$ se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \left(-\frac{1}{2} R_e (1 - \mu^2) \eta(\mu) \eta'(\mu) + \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] \right. \right. \\ \left. \left. + 30\eta(\mu) - \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\varphi'(\mu)] - 10\varphi'(\mu) \right) \right] = 60\mu, \\ -R_e \left[\frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)\eta^2(\mu)] + 7(1 - \mu^2)\eta'(\mu)\eta(\mu) - \eta(\mu) \left((1 - \mu^2)\varphi''(\mu) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu\varphi'(\mu) \right) \right] + \frac{3}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} \left[(1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] \right] - 61 \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] \\ + 60\eta(\mu) + 14 \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\varphi'(\mu)] - 120\varphi'(\mu) = -60. \end{aligned}$$

De los sistemas de ecuaciones anteriores, se ve que en el caso tridimensional, las ecuaciones a N fija son más difíciles de resolver, ya que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales no son constantes. Esto tiene como consecuencia que el número de términos en las ecuaciones diferenciales ordinarias crezca rápidamente conforme N crece.

En resumen, una vez que se resuelven las ecuaciones (2.44) y (2.45) para una N fija, se obtienen expresiones para los campos de velocidad y presión que satisfacen las ecuaciones (2.34-2.36) hasta un orden $N - 2$, y las condiciones de frontera (2.44) y (2.45) hasta orden N^3 . La razón por la que la ecuación

³La condición de frontera sobre el campo de presión no se satisface para ningún valor de N .

diferencial se resuelva hasta orden $N - 2$, en vez de N , se debe a que las ecuaciones diferenciales parciales son de segundo orden, de manera que para tener un problema soluble es necesario escoger $N \geq 2$, aunque, como se verá más adelante la primera aproximación físicamente relevante es a partir de $N = 3$.

2.1 Las líneas de corriente y el arrastre

Para el caso de 3D, la relación entre la función de corriente y el campo de velocidades, en coordenadas esféricas, es

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned}$$

una vez que los desarrollos (2.7) y (2.9) se han sustituido en las expresiones anteriores se encuentra que la función de corriente está dada por

$$\psi(x, \mu; R_e) = -\sum_{n=1}^N \frac{x^n}{(1-x)^2} \int_{-1}^{\mu} a_n(t; R_e) dt, \quad (2.49)$$

Para calcular el coeficiente de arrastre se utiliza la expresión (2.30), que tomando en cuenta el cambio de variable $\mu = \cos \theta$. tiene la forma

$$F = -2\pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-\mu^2} \tau_{rr} - \mu \tau_{r\theta} \right) d\mu. \quad (2.50)$$

Las componentes del tensor de esfuerzos, en coordenadas esféricas y escritas en forma adimensional, son

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -P + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \tau_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \end{aligned}$$

por lo que, a partir de las soluciones aproximadas para los campos de velocidad y presión, las componentes de los esfuerzos sobre la superficie de la esfera están dados por

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -\varphi(\mu), \\ \tau_{r\theta} &= \sqrt{1-\mu^2} \eta(\mu), \end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones anteriores en (2.50) se obtiene que el coeficiente de arrastre ($C_D = \frac{F}{R_e}$), en términos de las funciones φ y η , es

$$C_D = -\frac{2\pi}{R_e} \int_{-1}^1 \left((1 - \mu^2)\eta(\mu) + \mu\varphi(\mu) \right) d\mu. \quad (2.51)$$

De manera similar al caso bidimensional, las funciones independientes están relacionadas con las componentes del tensor de esfuerzos sobre la superficie de la esfera. Por lo tanto, las propiedades del flujo quedan determinadas una vez que se conocen estas cantidades.

Capítulo 3

El flujo alrededor de un cilindro

En este capítulo se resuelven las ecuaciones (2.23) y (2.24) usando dos métodos aproximados: uno analítico y uno numérico. En el primer caso, se buscan soluciones en series truncadas de Fourier, cuyos coeficientes son funciones del número de Reynolds, de manera que el problema se transforma de un sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones algebraicas. Como el problema sigue siendo no lineal, hay que utilizar métodos numéricos y/o analíticos aproximados para resolverlo. En este trabajo se presentan dos tipos de solución. Los coeficientes de las series de Fourier, para $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$, se proponen como series de potencias en R_e , de manera que el problema algebraico no lineal se transforma en uno lineal que se puede resolver de forma iterativa. Con el fin de estudiar la validez de las series de potencias de R_e , el problema algebraico no lineal se resuelve numéricamente.

Para el caso numérico, se discuten resultados de la integración de las ecuaciones (2.23) y (2.24) usando un método de disparo, es decir, el problema con condiciones de frontera se transforma a uno con condiciones iniciales. La integración numérica se realizó usando el programa Mathematica 4.0 en un procesador Pentium III a 800MHz.

Finalmente se comparan los resultados de los dos métodos utilizados y se compara con los resultados obtenidos en la literatura existente, para aquellos valores del número de Reynolds en los que el método analítico (aproximado) y la solución numérica son consistentes.

1 Las ecuaciones de Stokes: $R_e = 0$

En el caso en el que $R_e = 0$, que corresponde a resolver las ecuaciones de Stokes, las ecuaciones (2.23) y (2.24) son lineales y tienen la forma

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} C_k(N) \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \varphi(\theta) + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N} D_k(N) \frac{d^{2k-1}}{d\theta^{2k-1}} \eta(\theta) = \cos \theta, \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N} \tilde{C}_k(N) \frac{d^{2k-1}}{d\theta^{2k-1}} \varphi(\theta) + \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \tilde{D}_k(N) \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \eta(\theta) = -\sin \theta. \quad (3.2)$$

El análisis realizado para los primeros valores de N muestran que las soluciones son de la forma¹

$$\eta(\theta) = A \sin \theta, \quad (3.3)$$

$$\varphi(\theta) = B \cos \theta, \quad (3.4)$$

donde A y B son constantes que dependen de N . De las expresiones (3.3) y (3.4) y las relaciones de recurrencia (2.20-2.22), se encuentra que los coeficientes a_n , b_n y c_n tienen la siguiente forma

$$a_n(\theta) = \alpha_n \cos \theta, \quad (3.5)$$

$$b_n(\theta) = \zeta_n \sin \theta, \quad (3.6)$$

$$c_n(\theta) = \varepsilon_n \cos \theta. \quad (3.7)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las relaciones de recurrencia (2.20-2.22) y después de haber coleccionado términos en $\sin \theta$ y $\cos \theta$, se obtiene un nuevo conjunto de relaciones entre los coeficientes α_n , ζ_n y ε_n , que tienen dos coeficientes independientes, $\zeta_1 (\equiv A)$ y $\varepsilon_0 (\equiv B)$, puesto que son los coeficientes asociados a las dos funciones independientes. Las nuevas relaciones de recurrencia resultan en un conjunto de tres ecuaciones en diferencias lineales, acopladas, y cuyos coeficientes son funciones del índice n , dadas por

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \left((n-2)\alpha_{n-1} - \zeta_{n-1} \right), \quad (3.8)$$

$$\zeta_n = \frac{1}{n(n-1)} \left(2\alpha_{n-2} - 2\alpha_{n-3} - \varepsilon_{n-2} + (3n-5)(n-1)\zeta_{n-1} \right)$$

¹En estas soluciones ya están consideradas las soluciones al sistema de ecuaciones homogéneo, que son cero por las condiciones de frontera.

$$-(13n^2 - 13n + 12)\zeta_{n-2} + (n^2 - 6n + 7)\zeta_{n-3}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & \frac{1}{n} \left((n-1)\varepsilon_{n-1} - 2\zeta_{n-1} + 2\zeta_{n-2} + n(n+1)\alpha_{n+1} - n(3n-2)\alpha_n \right. \\ & \left. (3n^2 - 7n + 2)\alpha_{n-1} - (n^2 - 4n + 2)\alpha_{n-2} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

que se pueden resolver analíticamente y tienen como solución

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 = \zeta_0 = 0 \\ \zeta_1 &\equiv A \text{ y } \varepsilon_0 \equiv B, \\ \varepsilon_1 &= 2\alpha_2 = -A, \\ \zeta_2 &= \frac{1}{2}(A - B), \\ \alpha_n &= -\frac{1}{8n} \left(\frac{1}{2}(n^2 + n + 4)(A - B) + 4B \right), \\ \zeta_n &= \frac{1}{8n} \left(\frac{1}{2}(n^2 + n + 4)(A - B) + 4B \right) \text{ si } n \geq 3, \\ \varepsilon_n &= -\frac{1}{2}(A - B) \text{ si } n \geq 2. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las condiciones (2.10-2.12), se obtienen las tres ecuaciones siguientes

$$-\frac{1}{2}A - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8n} \left(\frac{1}{2}(n^2 + n + 4)(A - B) + 4B \right) = 1, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2}(3A - B) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8n} \left(\frac{1}{2}(n^2 + n + 4)(A - B) + 4B \right) = -1, \quad (3.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(A - B) = 0. \quad (3.13)$$

Claramente, la única forma de satisfacer la condición (3.13) es que $A = B$, de otra manera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta)$ diverge por ser la suma infinita de una constante. Así, las ecuaciones (3.11) y (3.12) toman la forma

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n} = -\frac{1}{A}, \quad (3.14)$$

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n} = -\frac{1}{A}. \quad (3.15)$$

Las ecuaciones anteriores no se pueden resolver, debido a que la serie involucrada es divergente. En el caso en el que las series son truncadas a alguna N , las ecuaciones anteriores son incompatibles o, en otras palabras, tienen soluciones diferentes. Por lo tanto, cuando $R_e = 0$, no se puede encontrar una solución que satisfaga las condiciones de frontera.

2 Soluciones aproximadas a N fija

Hasta el momento, las ecuaciones (2.13-2.15) se han reducido a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, para dos funciones independientes. Sin embargo, debido a la complejidad de estas ecuaciones, no se han podido resolver analíticamente, ni siquiera en el caso de $N = 4$. Para resolverlas, se buscaron soluciones aproximadas usando series de Fourier. De esta manera el problema se reduce a resolver ecuaciones algebraicas no lineales. Con el fin de estudiar la validez de las soluciones obtenidas, las ecuaciones (2.23) y (2.24) se resolvieron numéricamente para algunos valores de N .

2.1 Series de Fourier

Las soluciones a las ecuaciones para $\eta(\theta; R_e)$ y $\varphi(\theta; R_e)$ se proponen como series truncadas de Fourier, cuyos coeficientes dependen del número de Reynolds, es decir,

$$\eta(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \zeta_{1l}(R_e) \sin(l\theta), \quad (3.16)$$

$$\varphi(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \varepsilon_{nl}(R_e) \cos(l\theta), \quad (3.17)$$

de manera que, para N fija, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Para ello, los desarrollos anteriores se sustituyen en el sistema de ecuaciones diferenciales. Usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, cada ecuación diferencial se transforma en M ecuaciones algebraicas. Así, para N y M fijas, el problema se reduce a resolver un sistema completo de $2M$ ecuaciones algebraicas no lineales.

Es importante resaltar, que aunque el problema es algebraico, sigue siendo difícil de resolver. Por un lado, las ecuaciones algebraicas son no lineales,

y aún en el caso de considerar sólo los primeros términos en las series de Fourier, las ecuaciones resultantes pueden ser muy complicadas. Por otro lado, encontrar las ecuaciones diferenciales a partir de iterar las relaciones de recurrencia (2.20-2.22), para valores relativamente grandes de N , es difícil debido al creciente tamaño de las expresiones, aún cuando se utiliza una computadora (ver apéndice A).

Para aumentar la eficiencia de los cálculos, se propone que todos los coeficientes de los desarrollos (2.7-2.9) tienen la forma

$$a_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \alpha_{nl}(R_e) \cos(l\theta), \quad (3.18)$$

$$b_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \zeta_{nl}(R_e) \sin(l\theta), \quad (3.19)$$

$$c_n(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \varepsilon_{nl}(R_e) \cos(l\theta), \quad (3.20)$$

en donde se utiliza el hecho de que los coeficientes a_n y c_n son funciones pares de θ , mientras que las b_n son funciones impares de θ . Sustituyendo estas expresiones en las relaciones de recurrencia (2.20-2.22), se obtiene un nuevo conjunto de relaciones de recurrencia para los coeficientes de los desarrollos anteriores², dadas por

$$\alpha_{nl} = \frac{1}{n} \left[(n-2)\alpha_{n-1,l} - l\zeta_{n-1,l} \right], \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{nl} = \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{R_e}{2} \sum_{m=1}^{n-3} \sum_{p,k=1}^M \left\{ \zeta_{mp}(k\zeta_{n-m-2,k} - (m-1)\alpha_{n-m-2,k} \right. \right. \\ \left. \left. m\alpha_{n-m-1,k})(\delta_{p,k+l} + \delta_{p,l-k} - \delta_{p,k-l}) \right\} + l^2(\zeta_{n-2,l} \right. \\ \left. - \zeta_{n-3,l}) + 2l(\alpha_{n-2,l} - \alpha_{n-3,l}) + (3n-5)(n-1)\zeta_{n-1,l} \right. \\ \left. - (3n^2 - 13n + 13)\zeta_{n-2,l} + (n-2)(n-4)\zeta_{n-3,l} - l\varepsilon_{n-2,l} \right], \quad (3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nl} = \frac{1}{n} \left[R_e \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{p,k}^M \left\{ \zeta_{mk}(\zeta_{n-m-1,k} + k\alpha_{n-m-1,k})(\delta_{p,k+l} \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{p,k-l} - \delta_{p,l-k}) + m\alpha_{mk}(\alpha_{n-m-1,k} - \alpha_{n-m,k})(\delta_{p,k-l} \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{p,k+l} + \delta_{p,l-k}) \right\} + (n-1)\varepsilon_{n-1,l} - l^2(\alpha_{n-1,l} - \alpha_{n-2,l}) \right] \end{aligned}$$

²Para más detalles del álgebra ver apéndice A.

$$\begin{aligned}
& -2l(\zeta_{n-1,l} - \zeta_{n-2,l}) + n(n+1)\alpha_{n+1,l} - n(3n-2)\alpha_{nl} \\
& + (3n^2 - 7n + 3)\alpha_{n-1,l} - (n-1)(n-3)\alpha_{n-2,l} \Big], \quad (3.23)
\end{aligned}$$

donde δ_{nl} es la delta de Kronecker. Como los coeficientes ε_{0l} y ζ_{1l} son los correspondientes a las dos funciones independientes, éstos resultan ser las $2M$ funciones de R_e necesarias para que, a partir de las relaciones de recurrencia anteriores, se puedan calcular todos los demás coeficientes. La ventaja de usar las expresiones (3.21-3.23) es que se pueden calcular directamente los desarrollos en serie de Fourier para todos los coeficientes a_n , b_n y c_n . Ahora, si se usan los desarrollos (3.18) y (3.19), las ecuaciones (2.23) y (2.24) toman la forma

$$\sum_{n=1}^N \alpha_{nl} = \delta_{1l}, \quad (3.24)$$

$$\sum_{n=1}^N \zeta_{nl} = -\delta_{1l}. \quad (3.25)$$

A partir de iterar las relaciones (3.21-3.23), los coeficientes de Fourier se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
\alpha_{nl} &= \alpha_{nl}(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{1M}, \varepsilon_{0l}, \dots, \varepsilon_{1M}), \\
\zeta_{nl} &= \zeta_{nl}(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{1M}, \varepsilon_{0l}, \dots, \varepsilon_{1M}),
\end{aligned}$$

por lo que, después de ser sustituidos en las ecuaciones (3.24) y (3.25) se obtiene un sistema de $2M$ ecuaciones algebraicas no lineales, para $2M$ funciones desconocidas de R_e .

Por tanto, una vez que las soluciones para la parte angular se han propuesto como desarrollos en serie de Fourier, el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Como es de esperarse, estos sistemas de ecuaciones aumentan en complejidad, puesto que el número de incógnitas aumenta, así como el grado de no linealidad, cuando se aumentan M y N .

Para los primeros valores de N y M , es posible encontrar algunos resultados analíticos, sin embargo, en general, los sistemas de ecuaciones resultantes no se pueden resolver analíticamente, de manera que hay que recurrir a soluciones numéricas y/o métodos para obtener soluciones aproximadas.

Soluciones en potencias de R_e

Como primer método para buscar soluciones aproximadas de las ecuaciones (3.24) y (3.25), se propone que los coeficientes de la series de Fourier, para las funciones independientes $\eta(\theta)$ y $\varphi(\theta)$, tienen la forma

$$\varepsilon_{0l}(R_e) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{0lj} R_e^j, \quad (3.26)$$

$$\zeta_{1l}(R_e) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{1lj} R_e^j, \quad (3.27)$$

entonces, a partir de las relaciones de recurrencia (3.21-3.23) se calculan los coeficientes α_{nl} , ζ_{nl} y ε_{nl} , en función de ε_{0l} y ζ_{1l} , y se sustituyen en las ecuaciones (3.24) y (3.25); para N y M fijas. Después de coleccionar términos con la misma potencia en R_e , a cada orden, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con $2M$ incógnitas. Los resultados obtenidos, para los primeros valores de N y M , muestran que

$$\begin{aligned} \omega_{1lj} = \gamma_{0lj} &= 0, \\ \text{si } l - j > 1 \text{ y } l > 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

de manera que las soluciones a las ecuaciones (2.23) y (2.24) tienen la forma

$$\eta(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=l-1}^{M'} \omega_{1lk} \sin(l\theta) R_e^k, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\theta; R_e) &= \sum_{l=1}^M \sum_{k=l-1}^{M'} \varepsilon_{0lk} \cos(l\theta) R_e^k, \\ &\text{con } M' \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Evidentemente, el álgebra involucrada al realizar los cálculos necesarios para encontrar los coeficientes a_n , b_n y c_n , a partir de los coeficientes independientes ε_{0l} y ζ_{1l} , crece conforme N y M crecen. Esto sugiere plantear el problema desde un punto de vista que permita hacer los cálculos de forma iterativa usando la computadora. Si los coeficientes de Fourier se escriben de la siguiente forma

$$\alpha_{nl}(R_e) = \sum_{k=0}^{M'} \mu_{nlk} R_e^k, \quad (3.31)$$

$$\zeta_{nl}(R_e) = \sum_{k=0}^{M'} \omega_{nlk} R_e^k, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_{nl}(R_e) = \sum_{k=0}^{M'} \gamma_{nlk} R_e^k, \quad (3.33)$$

donde $l = 1, \dots, M$.

y se sustituyen en las relaciones de recurrencia (3.21-3.23), al coleccionar términos en potencias de R_e , se obtiene el siguiente conjunto de relaciones entre los coeficientes de las series de potencias

$$\mu_{nlj} = \frac{1}{n} \left[(n-2) \mu_{n-1,lj} - l \omega_{n-1,lj} \right], \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \omega_{nlj} = & \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-3} \left(\sum_{k=1}^{M-lj-1} \sum_{p=0} \omega_{m,k+l,j-p-1} \Gamma_{n-m,kp} \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{k=1}^l \sum_{p=0}^{j-1} \omega_{m,l-k,j-p-1} \Gamma_{n-m,kp} - \sum_{k=l}^{M-lj-1} \sum_{p=0} \omega_{m,k-l,j-p-1} \Gamma_{n-m,kp} \right) \right. \\ & - l \gamma_{n-2,lj} + 2l (\mu_{n-2,lj} - \mu_{n-3,lj}) + (3n-5)(n-1) \omega_{n-1,lj} \\ & (3n^2 - 13n - l^2 + 13) \omega_{n-2,lj} \\ & \left. + ((n-2)(n-4) - l^2) \omega_{n-3,lj} \right], \quad (3.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nlj} = & \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-2} \left(\sum_{k=1}^{M-lj-1} \sum_{p=0} (\omega_{m,k+l,j-p-1} \Lambda_{n-m,kp} \right. \right. \\ & + m \mu_{m,k+l,j-p-1} \Delta_{n-m,kp}) + \sum_{k=l}^M \sum_{p=0}^{j-1} (\omega_{m,k-l,j-p-1} \Lambda_{n-m,kp} \\ & + m \mu_{m,k-l,j-p-1} \Delta_{n-m,kp}) - \sum_{k=l}^l \sum_{p=0}^{j-1} (\omega_{m,l-k,j-p-1} \Lambda_{n-m,kp} \\ & - m \mu_{m,k-l,j-p-1} \Delta_{n-m,kp}) \left. \right) + (n-1) \gamma_{n-1,lj} - 2l (\omega_{n-1,lj} - \omega_{n-2,lj}) \\ & + n(n+1) \mu_{n+1,lj} - n(3n-2) \mu_{nlj} + (3n^2 - 7n - l^2 + 3) \mu_{n-1,lj} \\ & \left. - ((n-1)(n-3) - l^2) \mu_{n-2,lj} \right], \quad (3.36) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{qkp} &= k \omega_{q-2,kp} - (m-1) \mu_{q-2,kp} + m \mu_{q-1,kp}, \\ \Lambda_{qkp} &= \omega_{q-1,kp} + k \mu_{q-1,kp}, \\ \Delta_{qkp} &= \mu_{q-1,kp} - \mu_{qkp}. \end{aligned}$$

Los coeficientes independientes de las series (3.31-3.33) son γ_{0lj} y ω_{1lj} , por ser los coeficientes asociados a los desarrollos para las funciones $\eta(\theta; R_e)$ y $\varphi(\theta; R_e)$. Es fácil demostrar por iteración directa de las relaciones anteriores que, dadas las condiciones (3.28), todos los coeficientes tales que $l - j > 1$ se anulan para todo valor de n . La ventaja de este nuevo conjunto de relaciones de recurrencia, es que los coeficientes involucrados son constantes.

Por otro lado, si se sustituyen las expresiones (3.31-3.33) en las ecuaciones (3.24) y (3.25), después de coleccionar términos con la misma potencia de R_e , se obtienen las ecuaciones

$$\sum_{n=1}^N \mu_{nlj} = \delta_{0j} \delta_{1l}, \quad (3.37)$$

$$\sum_{n=1}^N \omega_{nlj} = -\delta_{0j} \delta_{1l}, \quad (3.38)$$

$$\text{para } l = 1, \dots, M$$

$$\text{y } j = 0, \dots, M'$$

cuando los coeficientes μ_{nlj} , ω_{nlj} y γ_{nlj} se escriben en función de γ_{0lj} y ω_{1lj} , las expresiones anteriores representan, para j fija, un sistema de $2M$ ecuaciones algebraicas lineales con $2M$ incógnitas. Esto corresponde a resolver el problema a orden j en el número de Reynolds. De manera que, para calcular correcciones de hasta orden M' en R_e , hay que resolver $M' + 1$ sistemas de ecuaciones de esta índole.

Con el fin de estudiar la validez de las soluciones aproximadas a las ecuaciones algebraicas no lineales (3.24) y (3.25), también se resolvieron numéricamente para los primeros valores de N y M . Para ello, se utilizó el método de Newton, es decir, el sistema de ecuaciones se linealiza alrededor de un punto cercano a una solución del sistema original. Este método resulta impráctico en el caso que M aumenta, puesto que el número de variables aumenta, por lo que el número de condiciones iniciales necesarias para el método crece.

3 Las propiedades del flujo

Dado el conjunto de coeficientes μ_{nlj} , ω_{nlj} y γ_{nlj} , que satisfacen las ecuaciones (3.37) y (3.38), para valores fijos de N , M y M' . los campos de velocidad y

presión están dados por

$$u_r(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{j=l-1}^{M'} \mu_{nlj} \cos(l\theta) R_e^j x^n, \quad (3.39)$$

$$u_\theta(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{j=l-1}^{M'} \omega_{nlj} \sin(l\theta) R_e^j x^n, \quad (3.40)$$

$$P^*(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^M \sum_{j=l-1}^{M'} \gamma_{nlj} \cos(l\theta) R_e^j x^n, \quad (3.41)$$

estas expresiones son soluciones aproximadas de las ecuaciones (2.13-2.15), que satisfacen las condiciones a la frontera a un orden M' en R_e . Aquí, es importante resaltar que las expresiones anteriores no se pueden escribir en la forma visualizada por Whitehead, es decir, los coeficientes que multiplican a cada potencia de R_e no representan campos de velocidades que satisfagan a ningún orden el sistema de ecuaciones (2.13-2.15). En otras palabras, estos campos de velocidad y presión no representan una solución perturbativa en el R_e , que se sabe que es singular.

De las expresiones (2.29) y (2.33), para la función de corriente y el coeficiente de arrastre, junto con las expresiones para $\eta(\theta; R_e)$, $\varphi(\theta; R_e)$ y $a_n(\theta; R_e)$, se obtiene que

$$\psi(r, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{j=l-1}^{M'} \frac{\mu_{nlj}}{l} r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n R_e^l \sin(l\theta), \quad (3.42)$$

$$C_D(R_e) = -\frac{\pi}{R_e} \sum_{j=0}^{M'} \left(\gamma_{01j} + \omega_{11j} \right) R_e^j. \quad (3.43)$$

El coeficiente de arrastre queda determinado si se conoce el primer término de las series de Fourier de $\eta(\theta; R_e)$ y de $\varphi(\theta; R_e)$. Por lo tanto, para fines de esta cantidad, parece ser suficiente considerar en los cálculos $M = 2$ para obtener resultados razonables. Sin embargo, debido a la naturaleza no lineal del problema, el resultado obtenido al truncar en $M = 2$, para cierto coeficiente, es diferente que al truncar en $M = k$. Por lo tanto, es importante tener en cuenta la convergencia de los coeficientes como función del orden al que se trunca.

Capítulo 4

Los resultados en 2D

En este capítulo se describen los resultados analíticos y numéricos, que se obtienen usando los métodos descritos en el capítulo anterior. La idea fundamental es, por un lado, estudiar para que valores de R_e los desarrollos para los campos de velocidad y presión son válidos y estudiar su convergencia. Para estudiar las propiedades de convergencia del método, se estudiaron las ecuaciones de movimiento en la aproximación de Oseen usando este lenguaje (ver apéndice B) y se comparan con el caso no lineal.

Una vez que se ha estudiado la validez de las soluciones aproximadas a (2.23) y (2.24), en función del número de Reynolds, se comparan con los resultados obtenidos con anterioridad usando otras aproximaciones [8, 15, 44] resultados numéricos [17, 24] y experimentales [56, 57]. En la referencia [58] se puede ver una versión resumida del método y de los resultados que se presentan para este caso.

1 Truncando las series de Fourier y las de potencias de R_e

Para resolver las ecuaciones (3.37) y (3.38), se desarrolló una rutina en Mathematica 4.0 para realizar el álgebra. De manera que, para resolver estas ecuaciones a orden k en R_e , para N y M fijas, se iteran las relaciones de recurrencia (3.34-3.36), y se calculan los coeficientes μ_{nlk} y ω_{nlk} en función de los independientes; γ_{0lk} y ω_{1lk} . Se encuentra el sistema de ecuaciones, a partir de (3.37) y (3.38), y se resuelve analíticamente. Después, se sustituyen los resultados obtenidos para el orden k y se realiza el mismo procedimiento

para el orden $k + 1$ en R_e . Es importante notar de las relaciones de recurrencia, que los coeficientes con índices nlj sólo dependen de coeficientes con índices anteriores (o iguales), lo cual, permite resolver el problema de forma iterativa. En otras palabras, para resolver el problema a orden k en R_e , sólo hay que conocer las soluciones a los $k - 1$ órdenes anteriores.

Para N y M fijos, los sistemas de ecuaciones a resolver son de la forma

$$F_i(\omega_{11k}, \gamma_{01k}, \dots, \omega_{1ik}, \gamma_{0ik}) = \delta_{1i}, \quad (4.1)$$

$$G_i(\omega_{11k}, \gamma_{01k}, \dots, \omega_{1ik}, \gamma_{0ik}) = -\delta_{1i}, \quad (4.2)$$

donde $i = 1, \dots, M$, δ_{ij} es la delta de Kronecker y F_i y G_i son funciones lineales de sus argumentos con coeficientes constantes. Cada valor de k corresponde a un sistema completo de $2M$ ecuaciones. Resultados preliminares, para los primeros valores de k , muestran que

$$\omega_{1lj} = 0, \quad (4.3)$$

$$\gamma_{0lj} = 0, \quad (4.4)$$

si l y j son los dos pares (ó impares) y si $l - j > 1$. Como las soluciones asintóticas para los campos de velocidad y presión se escriben como el producto de tres series truncadas, las ecuaciones algebraicas se estudiaron para distintos valores de N , M y M' .

1.1 Las series de potencias en R_e

Los coeficientes de Fourier para las funciones $\eta(\theta; R_e)$ y $\varphi(\theta; R_e)$, toman la forma

$$\varepsilon_{0l}(R_e) = \sum_{j=l-1}^{M'} \gamma_{0lj} R_e^j, \quad (4.5)$$

$$\zeta_{1l}(R_e) = \sum_{j=l-1}^{M'} \omega_{1lj} R_e^j, \quad (4.6)$$

donde $l = 1, \dots, M$. El que los coeficientes γ_{0lk} y ω_{1lk} sean cero cuando lk son pares (ó impares), significa que los coeficientes de Fourier son polinomios en potencias pares de R_e cuando l es impar, y polinomios en potencias impares, si l es par. Entonces, se obtiene que las funciones φ y η están dadas por

$$\varphi(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \sum_{j=l-1}^{M'} \gamma_{0lj} R_e^j \cos(l\theta), \quad (4.7)$$

$$\eta(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \sum_{j=l-1}^{M'} \omega_{1lj} R_e^j \sin(l\theta). \quad (4.8)$$

Si en las expresiones anteriores sólo se consideran términos de orden M' , tal que $M' < M$, los coeficientes de Fourier para $l = M' + 2$ tienen la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0,M'+2}(R_e) &= O(R_e^{M'+1}), \\ \zeta_{1,M'+2}(R_e) &= O(R_e^{M'+1}), \end{aligned}$$

por lo tanto, a orden M' en el número de Reynolds, los coeficientes ε_{0l} y ζ_{1l} son cero para $l > M' + 1$, de manera que se puede hacer $M = M' + 1$ sin pérdida de generalidad. A primera vista, esta forma de escoger M y M' parece ser la más adecuada, ya que al truncar la serie en potencias de R_e de esta manera, la serie de Fourier se trunca automáticamente. Sin embargo, hay que notar que, como los términos en serie de Fourier son polinomios cuya primera potencia distinta de cero es $l - 1$ y la última M' , los últimos coeficientes de Fourier sólo tienen unos cuantos términos con las potencias más altas en R_e , en particular el último, sólo tiene el término correspondiente a la potencia M' en R_e . En

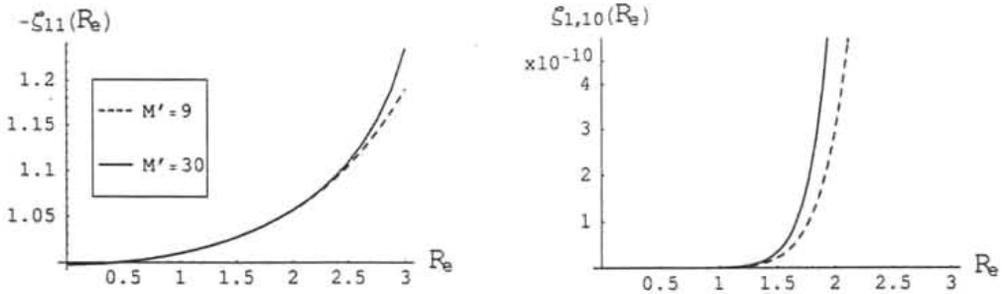


Figura 4.1: Gráficas de los coeficientes (4.6) para $l = 1$ y $l = 10$, con $N = 10$ y $M = 10$.

las figuras 4.1 y 4.2 se muestra el primer coeficiente ζ_{11} y el último coeficiente ζ_{1M} de la expresión (4.6), con N y M fijas y para dos valores de M' ; uno mayor que M y el otro tal que $M' = M - 1$. Las diferencias entre una M' y la otra son notables a partir de cierto valor de R_e , que depende del valor de N . Para los primeros valores de N y con R_e pequeño, no hay mucha diferencia entre las curvas para diferentes valores de M' , tomando en cuenta que, en el

ejemplo de la figura 4.1, la diferencia entre estos dos valores es de 21. Cuando se aumenta el valor de N , se encuentra que las diferencias entre una M' y la otra son notables para valores de R_e cada vez más pequeños, como se ve en la gráfica de la derecha en figura 4.2. Por lo tanto, es conveniente truncar tal que $M' \gg M$ para evitar rápidas divergencias en los últimos coeficientes de Fourier, sobre todo para valores grandes de N .

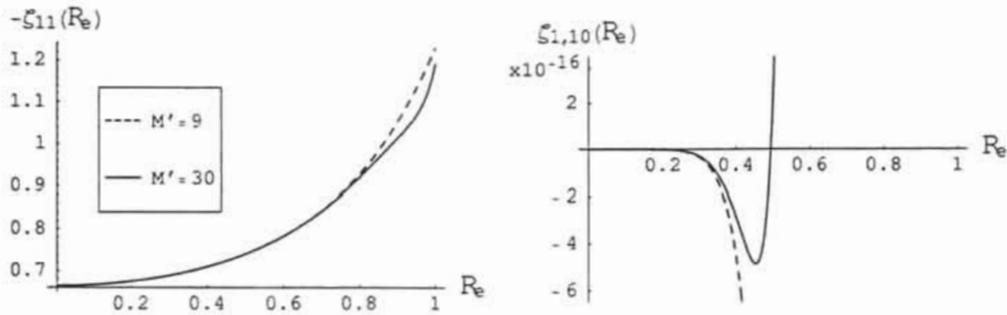


Figura 4.2: Gráficas de los coeficientes (4.6) para $l = 1$ y $l = 10$, con $N = 30$ y $M = 10$.

Los valores de R_e en los que las diferencias entre las curvas son notables, por ejemplo en la figura 4.1, son de orden uno, mientras que en la figura 4.2 son menores que uno. A primera vista, este resultado es poco alentador, puesto que parece que al aumentar el valor de N el radio de convergencia de los coeficientes de Fourier (4.5) y (4.6) disminuye. Sin embargo, hay que notar que el hecho de que las diferencias entre las dos curvas, por ejemplo en la gráfica de la derecha en la figura 4.1, sean aparentes hasta $R_e \sim 1.5$ no significa que las expresiones (4.7) y (4.8) sean soluciones válidas hasta tales valores de R_e . Esto se debe a que al truncar las expresiones para los campos de velocidad y presión a cierto valor de N en la variable x , el término no lineal se está aproximando por otro, que también es no lineal, pero es en principio más sencillo. De manera que la validez de los resultados está restringida a aquellos valores de R_e en los cuales los términos no lineales, despreciados en las ecuaciones diferenciales originales (las ecuaciones de Navier-Stokes), realmente lo sean. Lo único que refleja este resultado, es que la convergencia de las series de potencias en R_e es cada vez más lenta, conforme aumenta el valor de N .

Otras soluciones

Con el fin de comparar las soluciones en series de potencias de R_e , para valores fijos de N , se estudiaron los sistemas de ecuaciones (3.24) y (3.25), para los primeros valores de N y M , en los que se pueden obtener resultados analíticos. Cuando $N = 4$ y $M = 2$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 10\varepsilon_{01} - 29\zeta_{11} &= 24, \\ 4\varepsilon_{02} - 7\zeta_{12} &= 0, \\ 98\varepsilon_{01} - \zeta_{11}(160 - R_e\zeta_{12}) &= 48, \\ 280\zeta_{12} - 220\varepsilon_{02} + R_e\zeta_{11}^2 &= 0. \end{aligned}$$

La única solución real del sistema anterior es

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{10}(24 + 29\zeta_{11}), \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{02} = \frac{7}{4}\zeta_{12}, \quad (4.10)$$

$$\zeta_{11} = 3 \cdot 7^{1/3} \left(-\frac{69 \cdot 7^{1/3}}{R_e f(R_e)^{1/3}} + \frac{f(R_e)^{1/3}}{R_e} \right), \quad (4.11)$$

$$\zeta_{12} = \frac{3}{35} \left(-\frac{996}{R_e} + \frac{33327 \cdot 7^{1/3}}{R_e f(R_e)^{2/3}} + \frac{49^{1/3} f(R_e)^{2/3}}{R_e} \right), \quad (4.12)$$

donde

$$f(R_e) = -52 R_e + \sqrt{2299563 + 2704R_e^2}.$$

Calculando la serie de Taylor, a orden K en R_e , de las expresiones (4.9-4.12), se encuentra, evidentemente, el mismo resultado que al haber resuelto los sistemas de ecuaciones lineales (3.37) y (3.38), para $N = 4$, $M = 2$ y $M' = K$. Si se aumenta el valor de N (o de M) un par de pasos más, el problema sigue siendo soluble analíticamente y se obtienen resultados similares que en el caso $N = 4$ y $M = 2$. Estos resultados comprueban que la rutina que realiza los cálculos, para obtener los coeficientes de Fourier α_{nl} , ζ_{nl} y ε_{nl} , funciona correctamente.

Si se comparan las soluciones analíticas con sus respectivas series de Taylor, se encuentra que para estos casos las series (4.5) y (4.6) representan buenas aproximaciones a las soluciones analíticas para un amplio rango de valores de R_e . Sin embargo, conforme se aumenta el valor de N , el intervalo de valores de R_e en el que las expresiones (4.5) y (4.6) son válidas decrece.

Puesto que los casos que se pueden resolver analíticamente son pocos y para valores de N pequeños, las ecuaciones (3.24) y (3.25) se resolvieron numéricamente para valores más grandes de N ¹. Los resultados muestran un comportamiento similar que en el caso de valores de N anteriores. Los resultados numéricos ajustan satisfactoriamente con las expresiones (4.5) y (4.6), cuando el R_e es pequeño. Debido a la complejidad del problema, conforme N aumenta, la solución numérica es cada vez más difícil de calcular y el error cometido crece, sobre todo a R_e relativamente grandes. Dentro de este análisis, no es posible dar una estimación concreta de cuánto es grande o relativamente grande, puesto que esto depende del valor de N y de la precisión del método numérico. Sin embargo, los resultados obtenidos hasta el momento, muestran que para $R_e \leq 1$, las series en potencias representan excelentes aproximaciones a los coeficientes (4.5) y (4.6).

1.2 Las series de Fourier

Tomando en cuenta que se debe escoger $M' \gg M$, se obtuvieron resultados para $N = 4, \dots, 30$ y $M = 2, \dots, 21$, con M' hasta de 30. El programa que realiza los cálculos funciona, en principio, para cualesquiera valores de N , M y M' . Sin embargo, cuando éstos toman valores grandes, los cálculos involucrados requieren cantidades muy grandes de memoria RAM y en algún momento ésta resulta insuficiente, además de que el tiempo involucrado en cada cálculo crece rápidamente.

En la siguiente serie de gráficas, se muestran los primeros coeficientes de las series de Fourier de η y φ , para valores diferentes de M ; con N y M' fijas. Puesto que el problema a resolver es no lineal, resulta que los primeros coeficientes cambian cuando se cambia el valor de M , es decir, el orden al que se truncan las series de Fourier. Esto sugiere que el valor de M se debe escoger tal que las diferencias entre las soluciones para los coeficientes ζ_{11} y ε_{01} , para valores consecutivos de M , sean pequeñas, al menos dentro de un intervalo finito del número de Reynolds. En las dos gráficas de la figura 4.3, se puede ver que las diferencias entre los diferentes valores de M son apreciables para $R_e \sim 2$, cuando $M \geq 10$. Por lo tanto, en este caso particular, los coeficientes ε_{01} y ζ_{11} han alcanzado prácticamente su valor asintótico, en el intervalo $R_e < 2$. Un aspecto interesante de resaltar es que los resultados para los coeficientes de Fourier, para cualquier valor de

¹Los valores máximos que se utilizaron fueron $N = 8$ y $M = 6$.

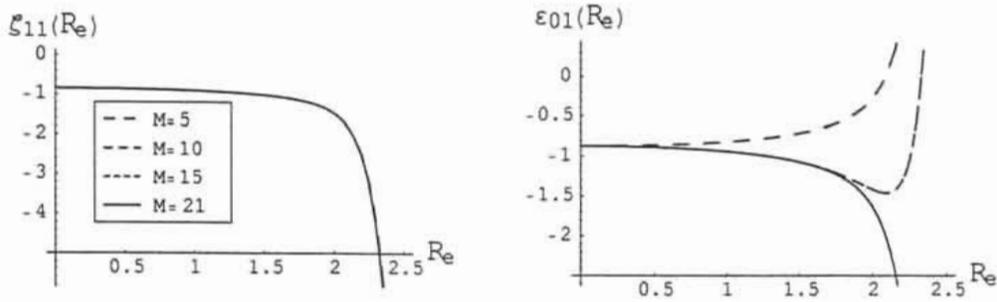


Figura 4.3: Gráficas de los coeficientes (4.5) y (4.6) para $l = 1$. En este caso $N = 15$ y $M' = 30$.

l , muestran que los coeficientes ζ_{1l} convergen más rápido que los ε_{0l} , como se puede ver en la figura 4.3. En la gráfica de la izquierda, todas las curvas están prácticamente colapsadas en una sola, en cambio, en la de la derecha, se observan claras diferencias en el mismo intervalo de valores de Re . Esto se puede deber a que en el problema truncado a orden N , el campo de velocidades satisface las condiciones de frontera exactamente, en cambio, la presión no satisface las condición al infinito, como se discute en la sección 3.1.

Cuando se analizan los siguientes términos en serie de Fourier, se encuentra que, a partir de cierto valor de M , todos los coeficientes ε_{0l} y ζ_{1l} , con $l = 1, \dots, M$, han alcanzado prácticamente su valor asintótico, dentro de un intervalo finito de Re . Por ejemplo, para $l = 3$ y $l = 5$ los coeficientes de Fourier se muestran en la figura 4.4. Aquí, se puede ver que a partir de cierto valor de M , las diferencias entre los coeficientes son pequeñas. En términos puramente cualitativos, es evidente de las figuras que las diferencias entre las curvas aparecen a valores cada vez menores de Re , conforme se aumenta el valor de l . En la siguientes dos figuras, 4.5 y 4.6, se muestran los mismos resultados para el caso de $N = 30$; con el mismo valor de M' . Por un lado, es claro que el intervalo de valores de Re en el que las soluciones, para los distintos valores de M , han obtenido prácticamente su valor asintótico decrece. En este caso, por ejemplo, para los primeros coeficientes las diferencias entre las soluciones aparece cuando $Re > 1$, a diferencia del caso con $N = 15$ donde se encontró $Re > 2.5$. Sin embargo, si se sigue aumentando el valor de N , el intervalo de valores de Re para el cual los coeficientes (4.5) y (4.6)

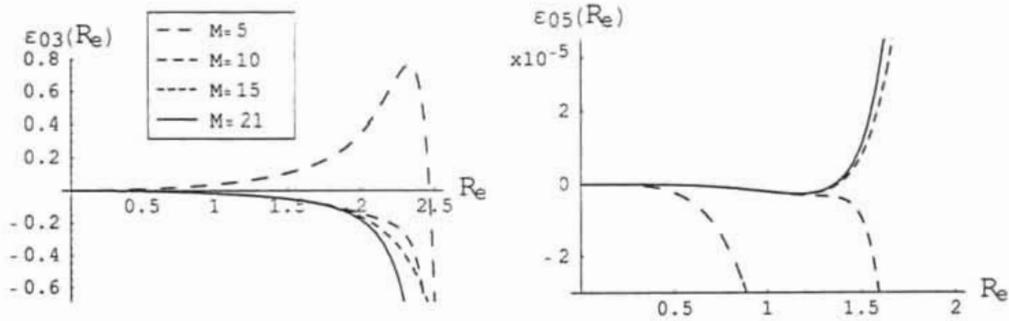


Figura 4.4: Gráficas de los coeficientes (4.5) para $l = 3$ y $l = 5$. En este caso $N = 15$ y $M' = 30$.

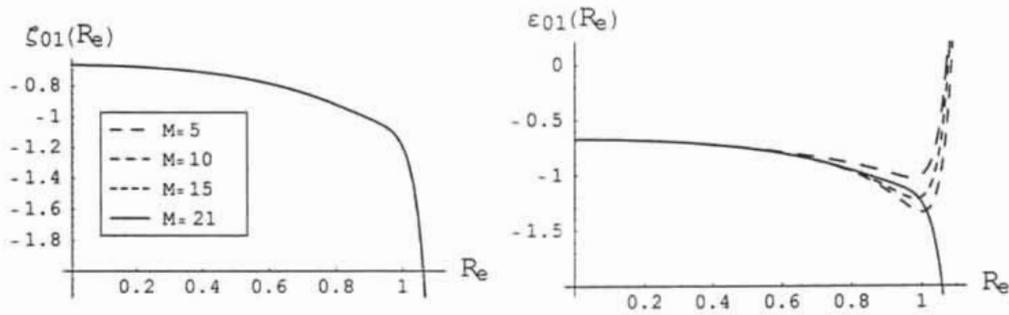


Figura 4.5: Gráficas de los coeficientes (4.5) y (4.6) para $l = 1$. En este caso $N = 30$ y $M' = 30$.

han obtenido, aproximadamente, el valor asintótico es tal que $R_e < 1$. Esto se puede ver del hecho que, si en las series en potencias en R_e , que tienen por ejemplo M' potencias en R_e y M términos en serie de Fourier, sólo se consideran correcciones hasta orden $K - 1$ en R_e , con $K < M$, el resultado es exactamente igual al caso de haber truncado las series de Fourier a una $M = K$. Por lo tanto, si los coeficientes de Fourier, obtenidos al truncar a un cierto valor M , se denotan como

$$\zeta_{nl}^{(M)}(R_e) = \sum_{j=l-1}^{M'} \omega_{nlj} R_e^j, \quad (4.13)$$

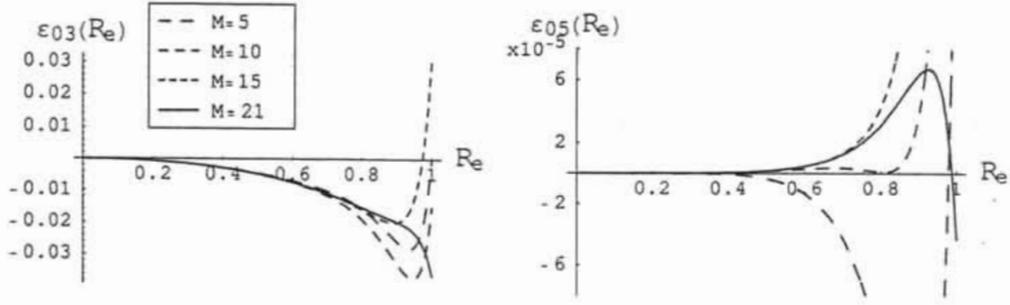


Figura 4.6: Gráficas de los coeficientes (4.5) y (4.6) para $l = 5$. En este caso $N = 30$ y $M' = 30$.

$$\varepsilon_{nl}^{(M)}(R_e) = \sum_{j=l-1}^{M'} \gamma_{nlj} R_e^j, \quad (4.14)$$

se encuentra que, para dos valores consecutivos de M , las diferencias entre los coeficientes son de la forma

$$\zeta_{nl}^{(M+1)} - \zeta_{nl}^{(M)} = O(R_e^M), \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{nl}^{(M+1)} - \varepsilon_{nl}^{(M)} = O(R_e^M). \quad (4.16)$$

Por lo tanto, para $R_e < 1$, las diferencias entre valores consecutivos de M se hacen pequeñas conforme aumenta el valor de M . Análogamente, para R_e de orden uno, las diferencias aumentan rápidamente.

Lo que se ha encontrado, finalmente, es que las correcciones a los primeros coeficientes de Fourier, debidas al aumento en el valor de M , ocurren a partir de los términos de orden M en el número de Reynolds, y en adelante. Por lo que, para $R_e < 1$, las correcciones, o los cambios, en los primeros coeficientes en serie de Fourier son pequeños a M grandes. Sin embargo, cuando el R_e se incrementa por encima de la unidad, los cambios en los primeros coeficientes en serie de Fourier pueden ser muy grandes, de manera que la convergencia es dudosa. En las gráficas anteriores, se ve que el comportamiento en la vecindad de $R_e \sim 1$ es, en general, un rápido crecimiento (o decrecimiento), sobre todo cuando N es grande, como se puede apreciar en la figuras 4.5 y 4.6. Además, se puede ver que en esa misma vecindad, el comportamiento de los coeficientes (4.13) y (4.14) puede cambiar de forma drástica; por ejemplo

en la gráfica de la derecha de la figura 4.6. en donde las curvas cambian de concavidad para diferentes valores de M .

En conclusión, por un lado se encontró que las series de potencias se deben truncar tal que $M' \gg M$ y, por otro lado, que M se debe escoger de manera que para $R_e < 1$ las diferencias (4.15) y (4.16) sean lo más pequeñas que sea posible, lo cual, se logra para M relativamente pequeña. Aunque los cambios en los coeficientes ζ_{1l} y ε_{0l} se pueden hacer tan pequeños como se desee para $R_e < 1$, esta claro que para $R_e > 1$ pasa lo contrario, por lo tanto, las expresiones (4.13) y (4.14) no son válidas para números de Reynolds de orden uno.

Cuando $N \leq 10$, los valores de M y M' máximos que se calcularon fueron de 21 y de 40, respectivamente. Estos valores se pueden seguir aumentando, aunque el tiempo requerido en cada paso del proceso se incrementa rápidamente. Para $10 < N \leq 30$, los cálculos se realizaron para valores menores de M' , con M de hasta 21. En estos casos, el obtener un resultado para potencias en R_e más altas, puede requerir del orden de entre días hasta semanas².

1.3 Los siguientes coeficientes

Ya que se ha establecido el criterio con el que las series de Fourier y las series de potencias en R_e son truncadas, se estudia el comportamiento de los coeficientes a_n , b_n y c_n , calculados a partir de las funciones $\eta(\theta; R_e)$ y $\varphi(\theta; R_e)$ y las relaciones de recurrencia. Entonces, para un valor fijo de N , M y M' ³, los coeficientes de las series de potencias están dados por

$$a_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \sum_{j=0}^{M'} \mu_{nlj} R_e^j \cos(l\theta), \quad (4.17)$$

$$b_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \sum_{j=0}^{M'} \zeta_{nlj} R_e^j \sin(l\theta), \quad (4.18)$$

$$c_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \sum_{j=0}^{M'} \gamma_{nlj} R_e^j \cos(l\theta). \quad (4.19)$$

²Todos los cálculos se realizaron usando un procesador Pentium III a 800 MHz, con una memoria RAM de 384 Mb.

³En adelante $M = 21$ y $M' = 30$.

Las siguientes dos gráficas, en la figura 4.7, muestran los coeficientes anteriores para los primeros valores de n . Por un lado, es evidente que el primer

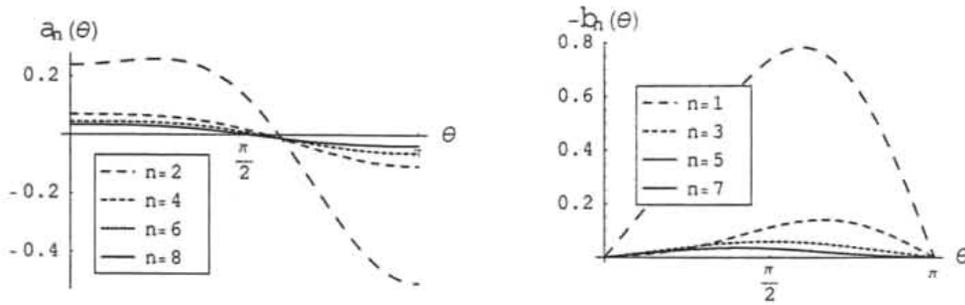


Figura 4.7: Gráficas de $a_n(\theta; R_e)$ y $b_n(\theta; R_e)$ para distintos valores de n , truncando a $N = 30$ y con $R_e = 0.5$.

coeficiente distinto de cero en cada desarrollo es el dominante; cuando $R_e < 1$. De manera que los siguientes términos aparecen como correcciones al término dominante. Estas correcciones parecen ser cada vez más asimétricas respecto a $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por otro lado, los coeficientes parecen ser funciones cuyo valor máximo decrece conforme aumenta el valor de n . Para estudiar el comportamiento de los coeficientes (4.17-4.19), para valores de n cercanos a N , de una manera más cualitativa, se calcula la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de estos coeficientes en el intervalo $[0, \pi]$, es decir,

$$\langle F_n^2 \rangle = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_n(\theta)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20)$$

donde F_n puede ser cualquiera de los coeficientes (4.17-4.19). En la figura 4.8 se graficó la expresión anterior, tomando el caso en el que $F_n = b_n$, como función de R_e y para distintos valores de n . En la gráfica del lado derecho, las curvas parecen tomar valores cada vez más pequeños, cuando $R_e < 1$. En cambio, en la gráfica del lado izquierdo, parece suceder lo contrario, pues como se puede ver, para un R_e fijo menor que uno, el coeficiente mayor es el correspondiente a la n más grande. Esto significa que no se puede asegurar que $F_{n+1}/F_n \rightarrow 0$ cuando $n \sim N$. Si se aumenta el valor de N , es decir, el orden al que se truncan las series de potencias en x , el comportamiento es bastante similar; como se puede observar en la figura 4.9. Si $N = 30$, los primeros coeficientes parecen tomar valores cada vez más pequeños conforme

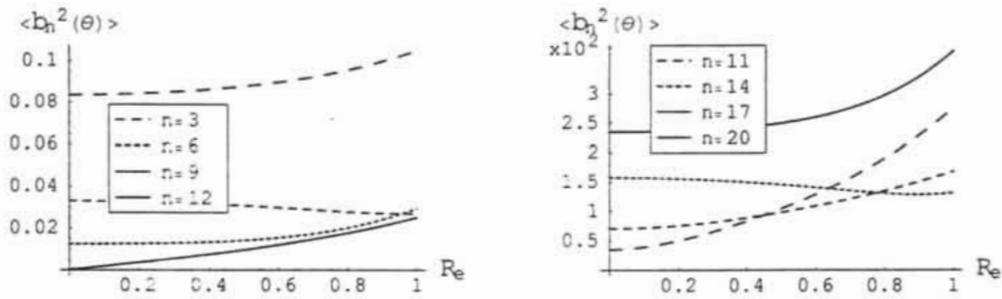


Figura 4.8: Gráficas de la expresión (4.20) tomando $N = 20$; para distintos valores de n .

aumenta el valor de n , sin embargo, los últimos coeficientes presentan el comportamiento contrario. En conclusión, como las soluciones propuestas

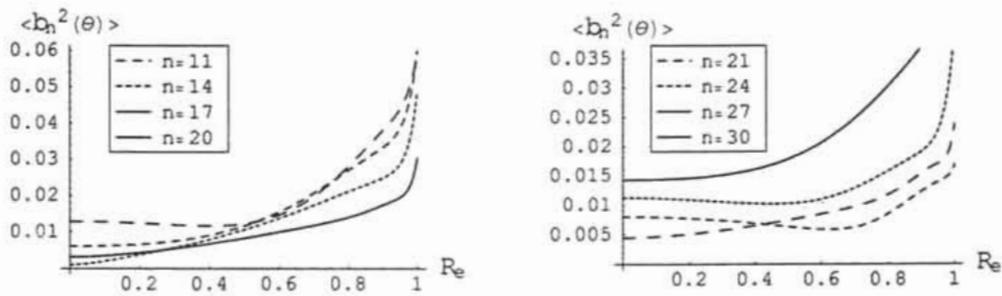


Figura 4.9: Gráficas de la expresión (4.20) tomando $N = 30$; para distintos valores de n .

para el campo de velocidad y presión se truncan a una N , se encuentra que cuando n es cercana a N , no se satisface que $F_{n+1}/F_n \rightarrow 0$. Sin embargo, hay que notar que el valor de n , para el cual los coeficientes no satisfacen que $F_{n+1}/F_n \rightarrow 0$, aumenta conforme aumenta el valor de N . De manera que esto parece ser consecuencia de truncar las series, puesto que al hacer crecer N , y en particular en el límite cuando $N \rightarrow \infty$, los desarrollos en serie en potencias de x parecen converger.

2 El comportamiento como función de N

En esta sección se estudia con más detalle el comportamiento de las soluciones como función de N , manteniendo fijo el valor de M y M' . En este caso los coeficientes de Fourier se denotan como

$$\zeta_{1l}^{(N)}(R_e) = \sum_{j=l-1}^{M'} \omega_{nlj} R_e^j, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{0l}^{(N)}(R_e) = \sum_{j=l-1}^{M'} \gamma_{nlj} R_e^j. \quad (4.22)$$

En la figura 4.10 se muestran las expresiones anteriores para diferentes valores de N . Para $R_e < 1$ se puede apreciar que las diferencias entre valores

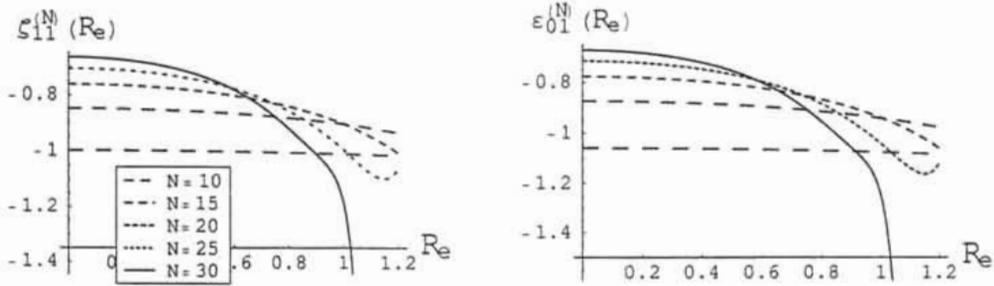


Figura 4.10: Gráficas de $\zeta_{11}^{(N)}(R_e)$ y $\varepsilon_{01}^{(N)}(R_e)$, para distintos valores de N .

consecutivos de N van disminuyendo conforme $N \rightarrow \infty$. Evidentemente, en la vecindad de $R_e \sim 1$ es en donde se observan las diferencias más grandes y/o cambios drásticos en el comportamiento. Otro de los aspectos importantes que hay que notar, es que las diferencias entre diferentes valores de N empiezan a hacerse pequeñas a partir de N grandes, de manera que la convergencia parece ser lenta. Para coeficientes de Fourier con valores más grandes de l se observa el mismo comportamiento, es decir, las diferencias entre valores consecutivos de N se incrementa en la vecindad de $R_e \sim 1$, como se puede apreciar en la figura 4.11. Además, los coeficientes de Fourier presentan un crecimiento (o decrecimiento), en la vecindad de $R_e \sim 1$, que aumenta cuando N aumenta. De manera que, para R_e de orden no, los coeficientes de Fourier divergen rápidamente.

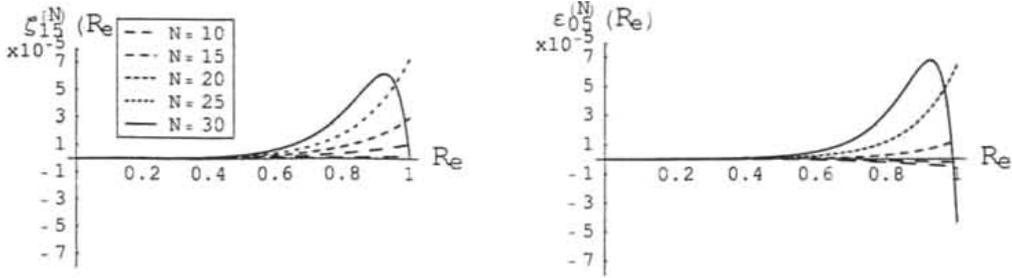


Figura 4.11: Gráficas de $\zeta_{15}^{(N)}(R_e)$ y $\varepsilon_{05}^{(N)}(R_e)$, para distintos valores de N .

Para estudiar el comportamiento de los esfuerzos sobre la superficie del cilindro, como función de N , las funciones η y φ se escriben de la siguiente forma

$$\varphi^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \zeta_{1l}(R_e) \cos(l\theta), \quad (4.23)$$

$$\eta^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^{M'} \varepsilon_{0l}(R_e) \sin(l\theta), \quad (4.24)$$

que representan una sucesión de funciones, que se suponen aproximaciones a la solución para el caso $N \rightarrow \infty$. En las figuras 4.12 y 4.13 se muestran las expresiones (4.23) y (4.24) con $M = 21$ y $M' = 30$, para diferentes valores de N y de R_e . De estas gráficas se puede ver, de manera cualitativa, que

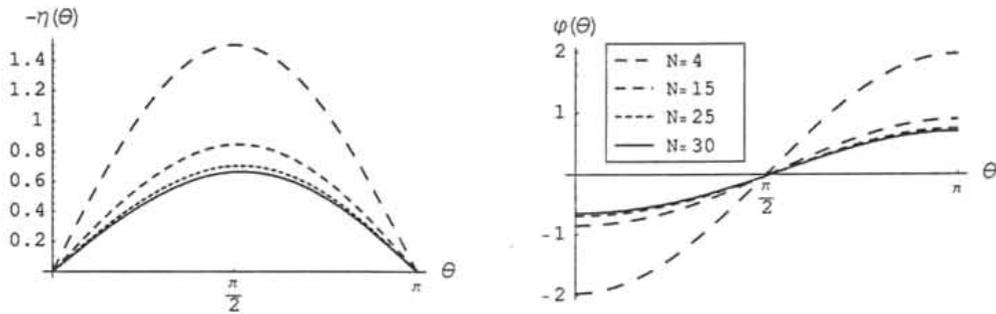


Figura 4.12: Gráficas de $\eta(\theta)$ y $\varphi(\theta)$ para distintos valores de N , con $R_e = 0.1$.

cuando el R_e es pequeño, las diferencias entre las soluciones para valores

consecutivos de N disminuyen conforme N aumenta. Por lo que, aunque de manera cualitativa, muestra que las soluciones tienen un comportamiento asintótico como función de N . Por otro lado, para una N fija, la asimetría

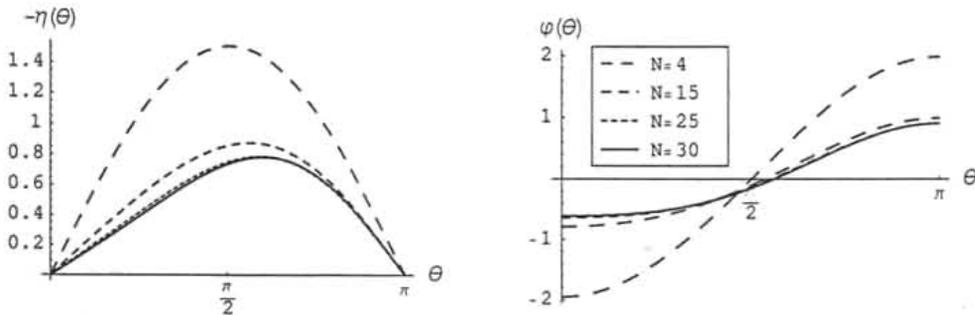


Figura 4.13: Gráficas de $\eta(\theta)$ y $\varphi(\theta)$ para distintos valores de N , con $R_e = 0.5$.

alrededor de $\theta = \frac{\pi}{2}$ se incrementa cuando se aumenta el valor de R_e , es decir, la asimetría entre aguas arriba y aguas abajo se incrementa conforme se aumenta el número de Reynolds.

Cuando se incrementa R_e , además de los cambios en la asimetría del flujo, las diferencias entre las soluciones para valores consecutivos de N aumenta, como se puede notar en las figuras 4.14 y 4.15. Para valores de R_e por encima de la unidad, el comportamiento de η y φ cambia drásticamente para valores grandes de N , lo cual no es un buen indicador en un método asintótico. Puesto que se espera que para N grandes, las expresiones (4.23) y (4.24), para valores consecutivos de N , caigan dentro de una región que contenga a la solución para $N \rightarrow \infty$. De manera que, para números de Reynolds de orden uno, la convergencia de las soluciones propuestas no es clara. En conclusión, los resultados vistos de forma cualitativa, muestran que cuando el número de Reynolds es menor que uno, las expresiones (4.23) y (4.24) parecen ser dos sucesiones convergentes. Aunque hasta este punto aún no es posible saber si convergen a la solución del problema.

Hasta el momento, los resultados del análisis de las series como función de N , M y M' , muestran que la convergencia de las soluciones sólo se puede asegurar cuando el número de Reynolds es menor que uno. Las limitantes en el tamaño del número de Reynolds aparecen de dos formas. La primera, que en este caso es la más difícil de estimar, se debe al hecho de truncar las series a un orden N en la variable x . puesto que a cada orden se conside-

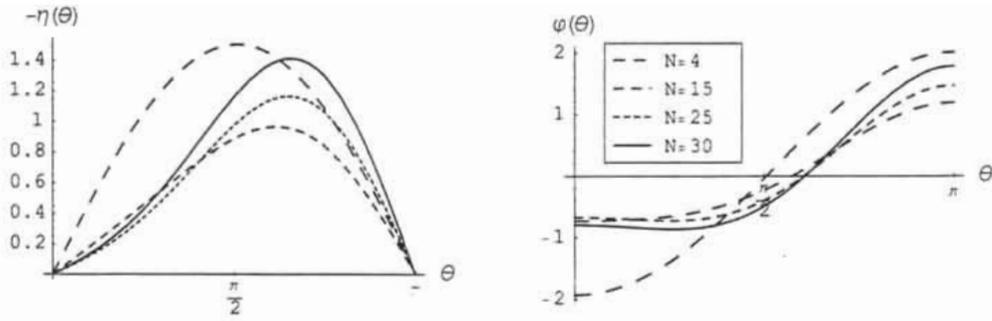


Figura 4.14: Gráficas de $\eta(\theta)$ y $\varphi(\theta)$, para distintos valores de N , con $R_e = 1$.

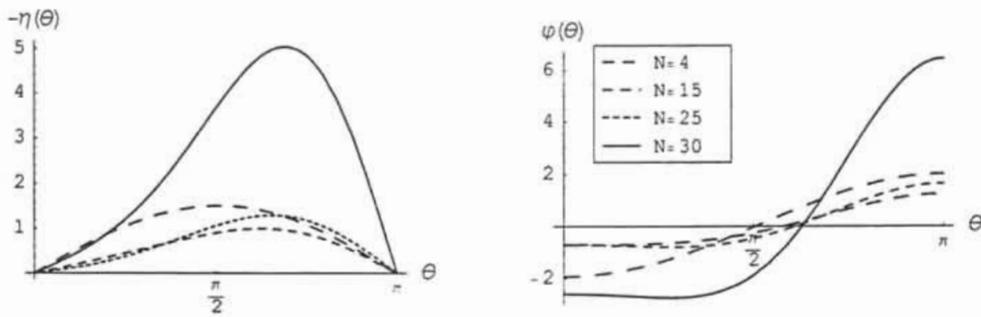


Figura 4.15: Gráficas de $\eta(\theta)$ y $\varphi(\theta)$ para distintos valores de N , con $R_e = 1.1$.

ran distintas aproximaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes. El segundo proviene de haber usado series en potencias de R_e , para resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales. Del análisis hecho a los coeficientes de Fourier, se encontró que las series de potencias en R_e resultan funciones que crecen (decrecen) rápidamente, cuando R_e es de orden uno. Por lo tanto, estos desarrollos no representan una buena aproximación de la solución a los sistemas de ecuaciones algebraicas, cuando $R_e > 1$. Esto significa que, para una N fija, la solución puede mejorarse cambiando las series de potencias en R_e , por algún otro tipo de funciones. Más adelante, cuando se estudia el problema usando la aproximación de Oseen, se discute la posibilidad de utilizar cocientes de polinomios en R_e .

2.1 Los resultados numéricos

Las ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, se resolvieron numéricamente para diferentes valores de N y R_e . El método numérico utilizado consiste en cambiar el problema, de condiciones de frontera, a uno de condiciones iniciales; los detalles del método se describen en el apéndice C. Se encontraron resultados para $\varphi(\theta)$ y $\eta(\theta)$ con valores de hasta $N = 8$ y diferentes valores de R_e . En todos los casos se pudieron obtener resultados para $R_e < 1$, para valores más grandes, sólo se encontraron resultados para los primeros valores de N . La razón principal, es que las ecuaciones diferenciales a resolver, a una N fija y visto como problema de condiciones iniciales, parecen tener sensibilidad en las condiciones iniciales para N y R_e grandes⁴. Esto se debe a que cuando N crece, el grado de los términos no lineales en las ecuaciones diferenciales ordinarias también crece y estos términos están modulados por el número de Reynolds. Cuando se incrementa el valor de N , el algoritmo que utiliza Mathematica para resolver el problema falla.

Al comparar los resultados se encuentra que las diferencias entre las soluciones numéricas y analíticas, son pequeñas para $R_e < 1$. Para los primeros valores de N , se pudieron comparar las soluciones para R_e de orden uno, los resultados obtenidos muestran que las expresiones (4.23) y (4.24) representan buenas aproximaciones a las soluciones de las ecuaciones (3.24) y (3.25). Para valores más grandes de N , se compararon resultados para $R_e < 1$, en donde se encontraron básicamente los mismos resultados que con N chico.

Una de las posibilidades para estudiar las propiedades de convergencia de las series de potencias en x , como función del orden al que se truncan, es resolver las ecuaciones diferenciales (2.23) y (2.24), para diferentes valores de N a R_e fijo. Sin embargo, el cálculo de estas ecuaciones, dada una N fija, puede ser muy largo y las ecuaciones muy complicadas. Puesto que a cada paso la ecuación cambia en orden y grado, no es sencillo plantear un método numérico iterativo que las resuelva, aproximadamente, con la misma precisión. El método que se utilizó en este trabajo, funciona para $N < 9$, para N más grande es difícil encontrar el conjunto de condiciones iniciales que correspondan a las de frontera (para más detalles ver apéndice C). En vista de que el problema numérico puede ser muy complejo para N grande, parece ser conveniente reducir el problema de ecuaciones diferenciales a uno más simple, como en este caso usando series de Fourier. Aunque los cálculos numéricos fueron limitados, las soluciones obtenidas para los primeros casos

⁴Para mayores detalles ver el apéndice C.

mostraron que las series de Fourier parecen ser una alternativa adecuada para la representación de las soluciones del problema.

Es de resaltar que el que sea posible hacer cálculos para valores de N hasta de 30, se debe a que las relaciones de recurrencia, para los coeficientes de las series de potencias en R_e , involucran números puros. De manera que el número de términos en las ecuaciones algebraicas lineales no crece tan rápido, como en el caso de las ecuaciones diferenciales para $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$ o en las ecuaciones algebraicas no lineales para los coeficientes de Fourier $\varepsilon_{0l}(R_e)$ y $\zeta_{1l}(R_e)$.

3 Las propiedades del flujo

En esta sección se analizan las características del flujo, como los campos de velocidad y presión, arrastre y líneas de corriente y cuales son sus propiedades de convergencia.

3.1 Los campos de velocidad y presión

Una vez que se han estudiado las propiedades de convergencia de las soluciones en serie para las funciones η y φ , se calculan los campos de velocidad y presión, que tienen la forma

$$u_x^{(N)}(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^N a_n(\theta; R_e)x^n, \quad (4.25)$$

$$u_\theta^{(N)}(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^N b_n(\theta; R_e)x^n, \quad (4.26)$$

$$P^{*(N)}(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^N c_n(\theta; R_e)x^n, \quad (4.27)$$

donde los coeficientes en las expresiones anteriores están dados por las series (4.17-4.19). En la sección 1.3 se encontró que los coeficientes para los primeros valores de n son los dominantes. De manera que, cuando x es pequeña, las expresiones (4.25-4.27) pueden ser aproximadas por las mismas series truncadas a una $N' < N$. Es de recalcar que esto no es equivalente a resolver el problema truncado a un orden N' , si no que una vez obtenida la solución al problema a orden N , los campos pueden ser aproximados por los primeros términos, sólo en la región cercana al cilindro.

Para estudiar el comportamiento de los campos, las series se truncan de manera que, dado que se tienen las funciones (4.23) y (4.24) para N y M fijas, se desprecian los términos a partir de cierta $N' < N$. Por lo que las expresiones (4.25-4.27) se aproximan, cerca del cilindro, por

$$u_x^{(N)}(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^{N'} a_n(\theta; R_e) x^n, \quad (4.28)$$

$$u_\theta^{(N)}(x, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^{N'} b_n(\theta; R_e) x^n, \quad (4.29)$$

$$P^{*(N)}(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{N'} c_n(\theta; R_e) x^n. \quad (4.30)$$

En la figura 4.16, se muestran las gráficas de la velocidad sobre el eje, detrás del cilindro, truncada a diferentes valores de N' , para dos valores de N y con R_e fijo. Por un lado, se ve que a partir de $N' \sim 8$, las diferencias entre

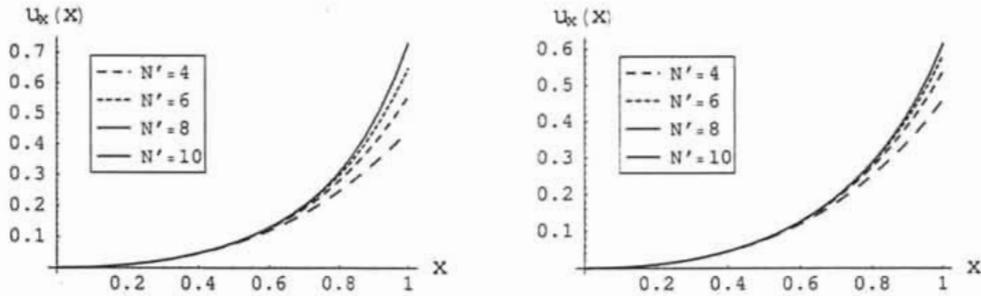


Figura 4.16: Gráficas de (4.28), con $R_e = 1$ y en $\theta = 0$, truncada a diferentes valores de N' ; $N = 20$ (izquierda), $N = 30$ (derecha).

los diferentes valores de N' aparecen a valores de x cada vez más grandes. Evidentemente, las diferencias más grandes se encuentran en la vecindad de $x = 1$, de manera que, cerca del cilindro, parece ser suficiente tomar $N' = 10$. Por otro lado, si se compara la gráfica de la izquierda con la de la derecha, se ve que, conforme se aumenta el valor de N , las diferencias entre diferentes valores de N' decrecen, de manera que son notables a valores de x cada vez más grandes. Esto significa que, entre más grande es N , menor es el número de términos en serie de potencias de x que hay que considerar, para fines del cálculo de los campos de velocidad y presión, cerca del cilindro.

La presión

Al truncar las expresiones para los campos de velocidad y presión, la condición de frontera sobre la velocidad es forzada a satisfacerse para toda N . La condición de frontera sobre la presión, antes de truncar, exige que la suma infinita de los coeficientes c_n se anule. En los cálculos hasta ahora descritos, se encuentra que esta condición no se satisface para ningún valor de N . La incógnita fundamental es si existen $\varphi(\theta)$ y $\eta(\theta)$ que sean consistentes con la condición de frontera sobre el campo de presión, en el límite cuando $N \rightarrow \infty$. Si el campo de presión se anula en el infinito ($x = 1$), significa que la expresión (4.27) es divisible entre $1 - x$. En otras palabras la presión se puede escribir de la forma

$$P^*(x, \theta; R_e) = (1 - x) \sum_{n=0}^N \tilde{c}_n(\theta; R_e) x^n, \quad (4.31)$$

si $N \rightarrow \infty$. La relación entre los coeficientes c_n y los \tilde{c}_n es

$$c_n = \tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}.$$

Al escribir las relaciones de recurrencia (2.20-2.22) en función de los coeficientes \tilde{c}_n , se encuentra que las ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer $\varphi(\theta)$ y $\eta(\theta)$, no cambian. Esto se debe a que las funciones independientes en las relaciones de recurrencia resultantes son las mismas. Por lo tanto, parece existir una solución para los esfuerzos sobre la superficie, consistente con la condición de frontera sobre la presión.

Cuando las series en potencias de x se truncan a una N finita, las expresiones (4.27) y (4.31), aunque ya no son iguales, difieren en una función de orden $O(x^{N+1})$. Entonces, si sólo se consideran términos hasta x^N , estos desarrollos son iguales, a ese orden, y no se satisface la condición de frontera en $x = 1$ ($r \rightarrow \infty$). Al truncar a N los desarrollos de los campos, su validez queda restringida a $x < 1$, así que no resulta necesario construir un campo de presiones que satisfaga la condición de frontera. El hecho importante es que al parecer, el que no se pueda satisfacer la condición sobre la presión es una consecuencia de truncar los desarrollos en series de potencias de x .

3.2 Las líneas de corriente y el arrastre

Una vez que se tienen las expresiones para los esfuerzos sobre la superficie del cilindro y se han calculado las expresiones aproximadas para el campo de velocidad y presión, se calcula la función de corriente y el arrastre.

La función de corriente, cerca del cilindro, se puede aproximar por la expresión

$$\psi^{(N)}(\tau, \theta; R_e) = \sum_{n=1}^{N'} \sum_{l=1}^M \left[\sum_{j=l-1}^{M'} \mu_{nlj} R_e^j \right] \frac{\sin(l\theta)}{l} r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n, \quad (4.32)$$

en la cual, de manera similar que en el caso de los campos de velocidad y presión, se han despreciado los últimos $N - N'$ términos. Una de las ventajas de que los resultados se puedan obtener considerando sólo los primeros N' términos, es que es más fácil manipular las expresiones. En las figuras 4.17

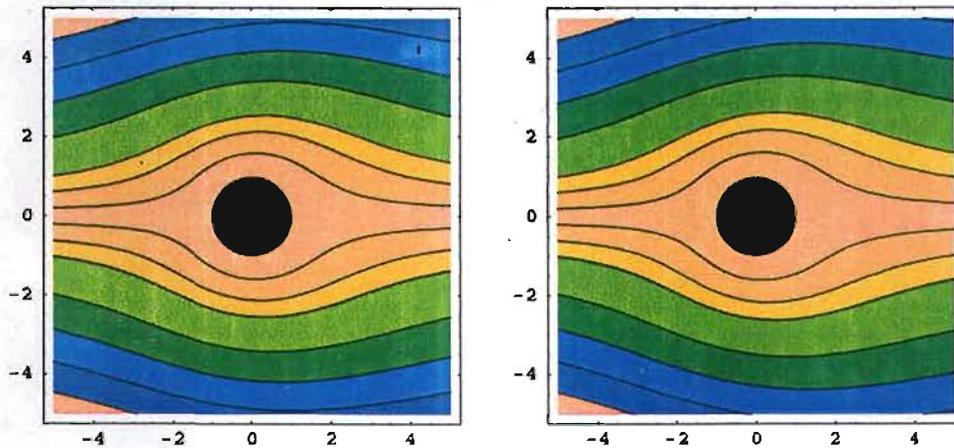


Figura 4.17: Gráficas de las líneas de corriente para $N = 20$ (izquierda), $N = 30$ (derecha) y $R_e = 0.5$.

y 4.18 se muestran algunas líneas de corriente para diferentes valores de R_e , con dos valores de N . Cuando el número de Reynolds está fijo, se puede ver que, si se aumenta el valor de N , la asimetría entre aguas arriba y aguas abajo aumenta. Claramente, las diferencias entre valores consecutivos de N disminuye cuando N crece y el R_e es pequeño. Por ejemplo, en la figura 4.17, las diferencias entre los dos valores de N son poco apreciables. Cuando el R_e crece se encuentra, por un lado, que la asimetría entre aguas arriba y aguas abajo aumenta. Lo cual es cualitativamente consistente con las observaciones experimentales. Por otro lado, para $R_e \sim 1$ y en adelante, las diferencias

entre las líneas de corriente para diferentes valores de N aumentan. En la figura 4.18 se muestran las líneas de corriente para un número de Reynolds mayor, en este caso las diferencias entre las dos gráficas es notable, tomando en cuenta que se utilizaron los mismos valores para las líneas de corriente en ambas gráficas. Es importante notar que las diferencias entre distintos

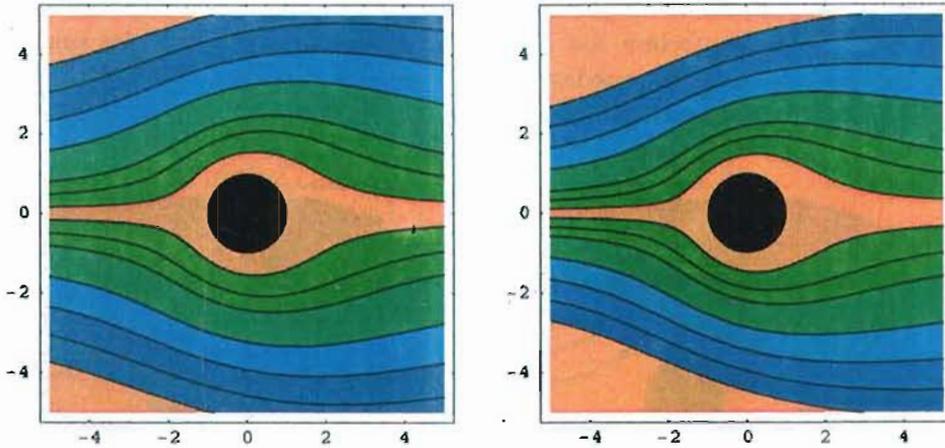


Figura 4.18: Gráficas de la líneas de corriente para $N = 20$ (izquierda), $N = 30$ (derecha) y $R_e = 1$.

valores de N se incrementan lejos del cilindro, esto se debe a que en la función de corriente sólo se consideraron los primeros $N' < N$ términos. De manera que es de esperarse que las soluciones difieran cada vez más, lejos del cuerpo. Esta aproximación es válida para $x \ll 1$, sin embargo, se debe tener en cuenta que, en términos de distancia, x pequeña significa estar a unos cuantos radios del cilindro.

Cuando las series de potencias para los campos de velocidad y presión se truncan, el problema original se aproxima por otro, en principio más sencillo, que es válido a cierta distancia al cilindro y para cierto intervalo de valores de R_e . Esto se debe a que a cada paso, la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes se aproxima de manera diferente y su contribución está regulada por el número de Reynolds. Para aquellos valores de N y R_e a partir de los cuales las soluciones no cambian apreciablemente, se puede decir que ya se han considerado las contribuciones de los términos no lineales, relevantes

a las propiedades del flujo.

En el caso del arrastre, en el capítulo 3 se encontró que el coeficiente de arrastre, como función del número de Reynolds, está dado por

$$C_D^{(N)}(R_e) = -\frac{\pi}{R_e} \sum_{l=0}^{M'} \left(\gamma_{01j} + \omega_{11j} \right) R_e^j. \quad (4.33)$$

donde, como en los casos anteriores, el superíndice representa el orden al que se truncan las series de potencias de x . En este caso, es importante recordar que el arrastre sólo depende de los esfuerzos sobre la superficie del cilindro, es decir, sólo dependen de $\eta^{(N)}$ y $\varphi^{(N)}$, lo cual es un resultado importante, puesto que estas funciones son las que parecen converger más rápido.

En la figura 4.19 se graficó la expresión anterior para diferentes valores de N . Claramente, se ve que las diferencias entre las curvas se hacen más pequeñas conforme se aumenta el valor de N . En esta gráfica se puede notar que los primeros valores de N representan malas aproximaciones al coeficiente

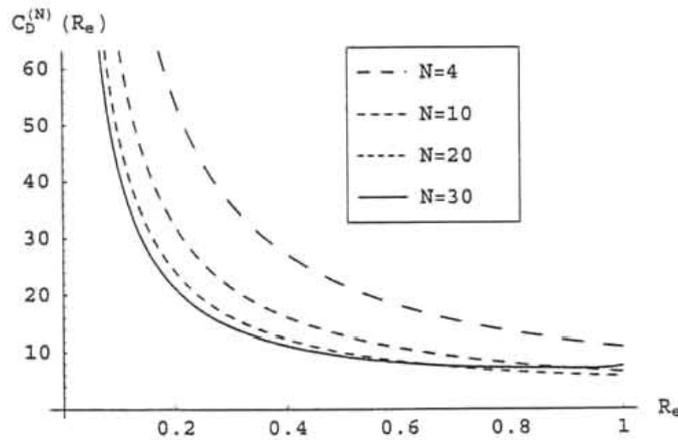


Figura 4.19: Gráfica del coeficiente de arrastre como función de R_e , para diferentes valores de N .

de arrastre, aún para números de Reynolds muy pequeños, lo cual es otro reflejo de que las series convergen lento. Otro aspecto interesante de la figura 4.19 es que conforme se aumenta el valor de N , las curvas se van pegando cada vez más al eje de las ordenadas. De manera que las diferencias más

grandes se observan en la vecindad de $R_e = 0$. Esto se debe a que, en el caso de 2D, cuando el número de Reynolds es estrictamente igual a cero, las ecuaciones a resolver son las de Stokes que, como se mostró en el capítulo 3, no tienen solución. Por lo tanto, uno de los defectos de atacar este problema con este método es que, a cada paso en la aproximación, las ecuaciones de Navier-Stokes se aproximan por otras que cambian conforme cambia N , estos cambios aparecen tanto en los términos lineales como en los no lineales. La consecuencia simplemente es que las series de potencias en x convergen lento, puesto que hay que considerar valores de N más grandes.

Hasta el momento, las soluciones obtenidas utilizando este método se han comparado entre sí, con el fin de estudiar las propiedades de convergencia y explorar la posibilidad de encontrar un comportamiento asintótico para $N \rightarrow \infty$. Los resultados muestran que las soluciones para las funciones $\eta^{(N)}$ y $\varphi^{(N)}$ parecen ser una sucesión convergente, para $R_e < 1$, puesto que para $N > 10$ las soluciones con diferentes valores de N caen dentro de una región finita que, al parecer, las contiene a todas. Con respecto al comportamiento asintótico, simplemente se ha descrito, cualitativamente, que los cambios en los esfuerzos sobre el cilindro para valores consecutivos de N disminuyen, si N es grande; que es un buen indicador de convergencia. Sin embargo, al estudiar

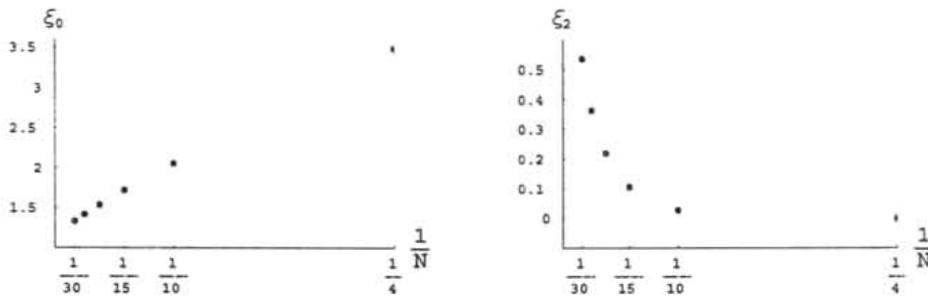


Figura 4.20: Gráficas de los dos primeros coeficientes de (4.33), como función de N^{-1} ; $\xi_j = -(\gamma_{01j} + \omega_{11j})$.

los coeficientes de las series en potencias de R_e , asociadas a los coeficientes de las expresiones (4.23) y (4.24), como función de N , se encuentra que no hay un comportamiento asintótico claro, salvo en el primer coeficiente. Este resultado se puede ver más claramente en la figura 4.20, en donde se grafican los coeficientes de la serie (4.33) como función del orden al que se truncan las

series en potencias de x . Aquí, se puede apreciar en la gráfica de la izquierda, que el comportamiento parece ser asintótico, puesto que se puede aproximar una curva y extrapolar para $N \rightarrow \infty$. En cambio, en la gráfica de la derecha, los coeficientes parecen crecer cuando $N \rightarrow \infty$. Para potencias mayores de R_e se observa un comportamiento similar al de la gráfica de la derecha de la figura 4.20. En principio, este resultado es poco alentador pues los coeficientes de las series de potencias de R_e , de orden $j > 0$, parecen ser funciones crecientes (decrecientes) de N . Esto no significa necesariamente que las sucesión de soluciones para los diferentes valores de N no converjan, sino que las series de potencias en el número de Reynolds no son una representación adecuada para R_e de orden uno. Puesto que, al estudiar directamente la sucesión de funciones $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$, como función de N , el comportamiento parece ser convergente dentro de un intervalo finito del número de Reynolds. Por lo tanto, es muy posible que si se utiliza otra representación, en vez de las series de potencias en R_e , se encuentre un comportamiento más regular en los coeficientes de Fourier, como función de N .

4 Estos resultados contra los demás

En esta parte, se discute cómo comparan los resultados expuestos anteriormente con los cálculos desarrollados a lo largo de los años usando diferentes métodos. En algunos casos, los resultados sólo se comparan de manera cualitativa, puesto que no se tienen los datos precisos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los resultados se comparan utilizando como referencia los trabajos experimentales [56, 57], la aproximación de Oseen [4, 5, 21], y los acoplamientos asintóticos [8, 15].

4.1 Navier-Stokes vs Oseen

Para comparar con los resultados que se obtienen a partir de la aproximación de Oseen, se resolvieron las ecuaciones en esta aproximación utilizando el presente método, ver apéndice B, de manera que se pueden comparar a cada orden en N .

Cuando se comparan las funciones $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$, para valores fijos de N , con las correspondientes a la aproximación de Oseen, dadas por las

expresiones

$$\varphi_o^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \zeta_{1l}^o(R_e) \cos(l\theta), \quad (4.34)$$

$$\eta_o^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^M \varepsilon_{0l}^o(R_e) \sin(l\theta), \quad (4.35)$$

se encuentra que las diferencias entre los resultados son pequeñas, cuando $R_e < 1$, como se puede ver en la figura (4.21). Cuando el número de Reynolds aumenta, las diferencias aumentan, sin embargo, se sabe que la aproximación de Oseen deja de ser válida en esos casos [2, 4]. En vista de que aún no se tiene un método iterativo eficiente para calcular los resultados, en el caso de usar las ecuaciones en la aproximación de Oseen, para valores grandes de N y M , sólo se considera el caso con $M = 3$ en ambos casos. Es importante

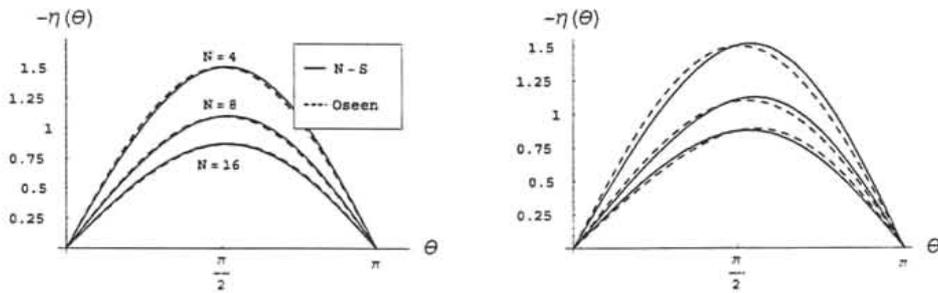


Figura 4.21: Gráficas de $\eta^{(N)}(\theta)$ y $\eta_o^{(N)}(\theta)$ para diferentes valores de N , con $R_e = 0.2$ (izquierda) y $R_e = 0.5$ (derecha).

notar, que aunque hay claras diferencias entre usar las ecuaciones de Navier-Stokes y las obtenidas usando la aproximación de Oseen, cuando $R_e = 0$, las ecuaciones coinciden, de manera que la convergencia en ambos casos es muy lenta. Por lo tanto, no es posible hasta este momento, encontrar los valores asintóticos en ninguno de los dos casos y en consecuencia, sólo es posible concluir que cuando $R_e \ll 1$ las ecuaciones contienen, aproximadamente, la misma información.

Por otro lado, los coeficientes ζ_{1l}^o y ε_{0l}^o , para valores fijos de M , se pueden calcular analíticamente, ya que el problema es lineal. El estudio de estos coeficientes, para los primeros valores de N y M , muestran que las soluciones

son cocientes de polinomios en R_e , cuyo grado depende del valor de N y M . Cuando se calculan sus correspondientes series de Taylor en R_e , se encuentra que tienen las mismas propiedades que las series (4.21) y (4.22), es decir, son de la forma

$$\varepsilon_{0l}^o(R_e) = \sum_{j=l-1}^{\infty} \gamma_{0lj}^o R_e^j, \quad (4.36)$$

$$\zeta_{1l}^o(R_e) = \sum_{j=l-1}^{\infty} \omega_{1lj}^o R_e^j, \quad (4.37)$$

para los que se satisface que

$$\gamma_{0lj}^o = \omega_{1lj}^o = 0,$$

si l y j son los dos pares (o impares). Por tanto, la forma de estos coeficientes sugiere buscar soluciones a las ecuaciones algebraicas no lineales (3.24) y (3.25) usando cocientes de polinomios en R_e . Como primera posibilidad se pueden construir los correspondientes aproximantes de Padè [59, 60], a partir de las expresiones (4.21) y (4.22). En este sentido, se espera que una vez que se han estudiado con más detalle la forma de los coeficientes ζ_{1l}^o y ε_{0l}^o , como función de N y M , éstos sugieran los órdenes adecuados para los aproximantes de Padè.

4.2 Otros cálculos

Después de haber estudiado las propiedades de convergencia de las soluciones encontradas a partir del presente método, la función de corriente se compara con los resultados obtenidos por Lamb [4, 5], a partir de la aproximación de Oseen, y por Kaplun [15] y Proudman & Pearson [8], que utilizaron el método de acoplamiento asintóticos. En la figura 4.22 se muestran las líneas de corriente obtenidas a partir de (4.32), para valores fijos de R_e , junto con los resultados obtenidos por Lamb [21] y por Kaplun [4]. Como se puede apreciar, las diferencias entre los tres resultados crecen lejos del cilindro, lo cual, era de esperarse tomando en cuenta que las series de potencias en x sólo son válidas para $x \ll 1$. Por otro lado, se ve que las diferencias también aumentan cuando R_e crece. Una de las características importantes que hay que notar es que, al parecer, las diferencias entre (4.32) y Kaplun son más pequeñas que en el caso de comparar con la expresión encontrada por Lamb.

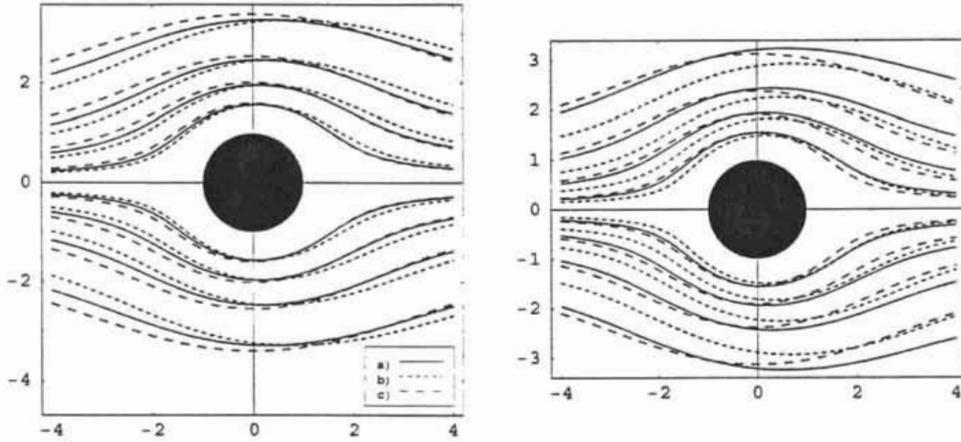


Figura 4.22: Gráficas de las líneas de corriente: (a) $N=30$, (b) Lamb (1911) y (c) Kaplun (1957), para $R_e = 0.2$ (izquierda) y $R_e = 0.4$ (derecha).

Este resultado muestra que la convergencia de las soluciones en serie propuestas va en la dirección adecuada, puesto que los resultados obtenidos a partir de los acoplamientos asintóticos representan una mejor aproximación al flujo, que la obtenida a partir de la aproximación de Oseen [4, 8].

Al analizar las diferencias entre los resultados para la función de corriente, en un rango más variado de valores de R_e menores que uno, los resultados muestran que si $R_e \ll 1$ o si $R_e \sim 1$ se observan las diferencias más grandes. Para visualizar con más claridad este hecho, en la figura 4.23 se muestra el coeficiente de arrastre (4.33), el resultado obtenido por Lamb [4, 5] y el resultado de Kaplun [4, 8, 15]. Aquí se ve con más claridad, que las diferencias más grandes están fuera del intervalo $0.2 < R_e < 0.7$. Sin embargo, tomando en cuenta los resultados mostrados en la gráfica de la figura 4.19, en donde se ve que conforme aumenta el valor de N , las curvas para el arrastre se van pegando cada vez más al eje de las ordenadas, de manera que a N grandes las diferencias para $R_e < 0.2$ decrecen. En otras palabras, los cambios en el coeficiente de arrastre, como función de N , parecen ir en la dirección adecuada. Puesto que, cuando $R_e \ll 1$, los resultados obtenidos a partir de (4.33), para N grandes, deben de ser consistentes con la aproximación de Oseen y los acoplamientos asintóticos. Para $R_e \sim 1$, se sabe que los resultados de

Lamb, Kaplun y Proudman & Pearson no son válidos [4, 8, 24]. El que el coeficiente de arrastre compare mejor con las otros métodos que las líneas de corriente, se debe a que el arrastre depende únicamente de $\eta^{(N)}(\theta)$ y $\varphi^{(N)}(\theta)$ que, además de ser los términos dominantes en los campos de velocidad y presión, son los coeficientes que convergen más rápido. En la figura 4.24 se

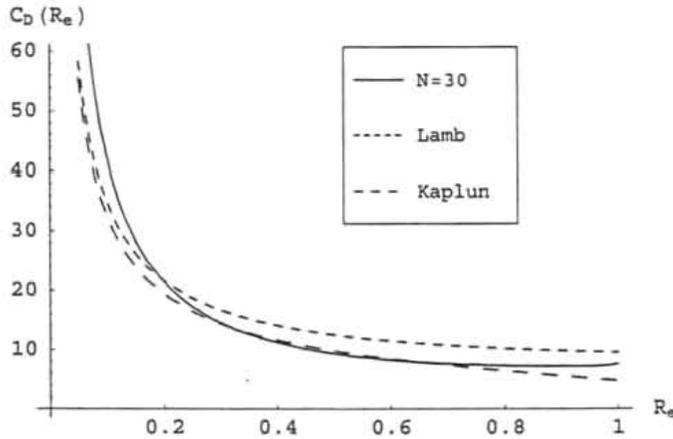


Figura 4.23: Comparación del coeficiente de arrastre, como función de R_e , obtenido usando el presente método, la aproximación de Oseen y los acoplamientos asintóticos.

muestran los resultados mostrados en la figura 4.23, junto con los resultados experimentales de Tritton [57] y de Huner & Hussey [56]. Claramente, cuando $R_e \ll 1$, los resultados de Lamb y Kaplun ajustan mejor con los resultados experimentales, aunque, el comportamiento de (4.33) como función de N , muestra que este resultado se puede mejorar tomando valores de N más grandes. Cuando R_e no es tan pequeño, pero menor que uno, la expresión (4.33) es la que parece ajustar mejor con los datos experimentales, sobre todo en la vecindad de $R_e = 1$. Kropinski et al [23], mediante un método híbrido numérico-analítico, encuentran una expresión para el coeficiente de arrastre, que representa una corrección a los resultados de Kaplun y Proudman & Pearson, que queda por debajo de los datos experimentales de Tritton, que es cualitativamente similar que en este caso. Hay que notar, que los datos experimentales de Huner & Hussey también se encuentran por debajo de los datos de Tritton, de manera que esas discrepancias se pueden deber a que los

cilindros no son infinitos [23] y a la precisión de los experimentos. Un poco más tarde, Keller & Ward [24], extendieron el procedimiento de Kropinski et al, sin embargo, como no se tiene los datos precisos de los resultados, sólo es posible decir que, cualitativamente, los resultados comparan satisfactoriamente. Evidentemente, cuando $R_e > 1$, el coeficiente de arrastre (4.33)

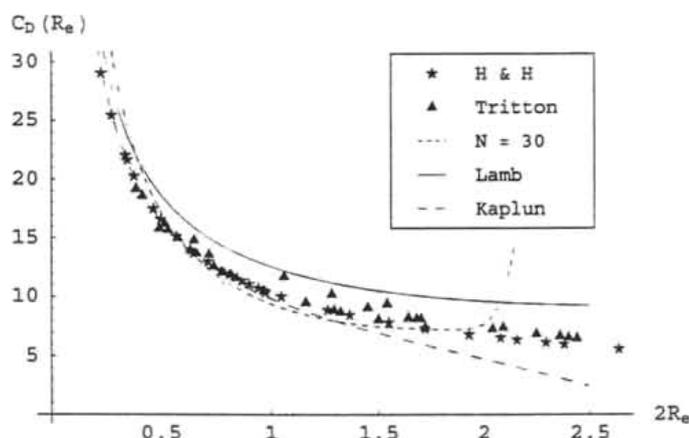


Figura 4.24: Comparación del coeficiente de arrastre, como función de R_e , obtenido a partir de los diferentes métodos y resultados experimentales.

con $N = 30$ diverge rápidamente. Cuando se analiza el comportamiento de (4.33) como función de N y para $R_e > 1$, se encuentra que, a partir de cierto valor de N , el coeficiente de arrastre crece (o decrece) rápidamente. Esto se debe, principalmente, a que las series truncadas de potencias en R_e , para los coeficientes de Fourier (4.22) y (4.21), no son válidas para $R_e > 1$.

A partir de un método pseudo-analítico de truncamiento de series, Underwood [17] obtiene resultados para el arrastre que son consistentes con los obtenidos aquí, al menos de manera cualitativa. Una de las ventajas del método propuesto por Underwood, es que en la vecindad de $R_e = 0$ la convergencia de las soluciones propuestas es más rápida, como función del orden al que se truncan las series. En este sentido, en 1969 Van Dyke [16] estudio una alternativa ligeramente diferente que Underwood, en la cual, se encuentra un comportamiento similar que en el presente caso, es decir, la convergencia para $R_e \ll 1$ es muy lenta. Por tanto, se cree que esta situación depende de la variable independiente en la que se hace el desarrollo en serie y del tipo

de desarrollo [17]. De manera que, aunque se cambie la representación en potencias de R_e en las expresiones (4.22) y (4.21), es necesario hacer cálculos para valores relativamente grandes de N para obtener resultados físicamente plausibles y para realizar los análisis de los valores asintóticos. La ventaja de encontrar una representación diferente para los coeficientes de Fourier, que converja más rápido, está en obtener resultados válidos en un intervalo más amplio del R_e .

5 Conclusiones

Las soluciones propuestas para los campos de velocidad y presión, están compuestas de tres aproximaciones. Primero, se trunca a un orden N en el desarrollo en serie de potencias en x , de manera que se satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes a un orden x^{N-2} (por ser ecuaciones diferenciales de segundo orden). La segunda, proviene de truncar los desarrollos en series (4.17-4.19); las ecuaciones diferenciales para $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$ se satisfacen hasta M términos en serie de Fourier. La última, y probablemente las más inapropiada, es usar series truncadas en potencias en R_e , de manera que los sistemas de ecuaciones algebraicas, no lineales, se satisfacen hasta un orden M' en R_e .

Cuando N y M están fijas, las series en potencias de R_e representan buenas aproximaciones a la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas (3.24) y (3.25) para $0 \leq R_e < 1$. Para valores más grandes de R_e , esta representación muestra no ser la más conveniente, puesto que los coeficientes de Fourier crecen (decrecen) rápidamente en la vecindad de $R_e \sim 1$; sobre todo a N grandes. Este comportamiento se debe a que las series de potencias, para el término en serie de Fourier de orden l , tienen $l - 1$ raíces en $R_e = 0$. En el caso de $R_e < 1$, los coeficientes de las series de potencias son pequeños, para l grandes, y no contribuyen apreciablemente al comportamiento de los campos $\bar{u}^{(N)}(r, \theta; R_e)$ y $P^{*(N)}(r, \theta; R_e)$. Cuando el R_e se incrementa por encima de la unidad, estos términos empiezan a ser los dominantes. De los pocos casos que se pueden resolver analíticamente y numéricamente, se encontró que aunque las series en potencias (4.5) y (4.6) se aproximan bien a las soluciones de las ecuaciones (3.24) y (3.25), considerando sólo unos cuantos términos en los desarrollos, estas series parecen tener un radio de convergencia finito, pues al aumentar el orden al que se truncan (aumentar el valor de M'), los resultados no mejoran apreciablemente.

En el presente estudio, no se realizaron los cálculos para encontrar los radios de convergencia, pues el análisis cualitativo muestra que estas series no se comportan adecuadamente si $R_e \geq 1$, lo cual, sugiere un cambio en la representación para los coeficientes de Fourier; en vez de las potencias en R_e . De las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en la aproximación de Oseen, utilizando el método aquí propuesto⁵, los coeficientes de Fourier de las funciones $\varphi_o^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\eta_o^{(N)}(\theta; R_e)$ dan una idea del tipo de funciones que se podría utilizar como representación alternativa para los coeficientes $\zeta_{1l}(R_e)$ y $\varepsilon_{0l}(R_e)$. En vista de que las series de Taylor de los coeficientes de Fourier en este caso, tienen las mismas propiedades que los desarrollos (4.5) y (4.6). Los coeficientes de las series de potencias, en función de N , no presentan un comportamiento simple, como se puede apreciar en la figura 4.20. Para el término de orden $j > 0$ en serie de potencias de R_e , los coeficientes ω_{1lj} y γ_{0lj} parecen crecer cuando N aumenta. Este comportamiento puede estar relacionado con la no existencia de los desarrollos en serie de potencias en R_e de las soluciones para $N \rightarrow \infty$, puesto que los coeficientes ω_{1lj} y γ_{0lj} son las derivadas de orden j y con respecto a R_e , de las soluciones exactas a los sistemas de ecuaciones algebraicas para M fijo; son los coeficientes de sus respectivas series de Taylor al rededor de $R_e = 0$. Los coeficientes de las series de potencias en R_e para $j = 0$, son los únicos que presentan un comportamiento asintótico. El significado es, simplemente, que todos los coeficientes de Fourier existen y son regulares en $R_e = 0$, aunque, llevan a soluciones que no son uniformemente válidas lejos del cuerpo y en el límite cuando $N \rightarrow \infty$. Este resultado es bien conocido, puesto que se sabe que las series de potencias en R_e llevan a un problema singular en teoría de perturbaciones [3, 4, 8].

El resultado importante, es que el problema truncado a orden N en las series en potencias de x , y a orden M en las series de Fourier, parece ser soluble y, en vista que los desarrollos en serie de potencias existen para toda M' , las soluciones a las ecuaciones algebraicas, no lineales, son funciones regulares en la vecindad de $R_e = 0$. Este hecho permite hacer un análisis de la convergencia de las series de Fourier, puesto que los coeficientes ζ_{1l} y ε_{0l} decrecen conforme aumenta l , o en otras palabras, son series convergentes. Por lo tanto, se encontró que las series de Fourier resultan ser una representación adecuada para encontrar soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales (2.23) y (2.24). Es importante recalcar que todos estos análisis tienen

⁵Ver apéndice B para mayores detalles.

validez para $R_e < 1$, pues es donde las series de potencias se comportan adecuadamente. Los cálculos de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales (obtenidas al truncar a orden N) refuerzan este resultado, es decir, las series de Fourier convergen, relativamente rápido, a la solución de las ecuaciones (2.23) y (2.24). Entonces, el ejercicio de las potencias en R_e mostró que los sistemas de ecuaciones algebraicas, no lineales, parecen tener al menos una solución dentro de un intervalo finito de R_e . Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, obtenidas al truncar a orden N , resultan ser un problema regular en teoría de perturbaciones. Es importante notar que alguna otra representación de la dependencia en el R_e , diferente a una serie de potencias, no habría permitido un análisis suficientemente profundo de la convergencia de los otros dos desarrollos, debido a que el problema algebraico no lineal puede ser muy complicado.

Una vez que se fijan los valores del orden al que se truncan las series de Fourier (M) y las series de potencias (M'), se estudió el comportamiento como función de N . Como primer resultado, cuando N está fija, los coeficientes a_n , b_n y c_n , asociados con los campos de velocidad y presión, decrecen conforme el índice aumenta. El término dominante corresponde a los primeros valores de n , para los cuales estos coeficientes son diferentes de cero, como se puede apreciar en la figura 4.7. Esto quiere decir que las relaciones de recurrencia (2.20-2.22) son tales que al ser iteradas los coeficientes decrecen, lo cual, es un buen indicador de la convergencia de las series de potencias en x . Cuando el índice n es cercano al orden al que se truncan las series (N) los coeficientes parecen crecer, respecto a los anteriores inmediatos, sin embargo, este hecho parece ser una consecuencia de que las series sean truncadas. Es probable que, si se pudieran encontrar los valores asintóticos de los coeficientes de Fourier para $N \rightarrow \infty$, o se tengan expresiones para los esfuerzos sobre la superficie calculados con algún otro método, esta situación cambie, es decir, los cocientes entre coeficientes con índices sucesivos tiendan a cero, conforme el índice tiende a infinito.

El estudio de las funciones (4.23) y (4.24), como función del orden al que se truncan las series en x , muestra que a partir de cierto valor de N , las diferencias entre valores consecutivos de N son pequeñas, para $0 \leq R_e < 1$. En otras palabras, todas las curvas quedan contenidas en una misma región que se espera que contenga a la solución para $N \rightarrow \infty$. Este resultado muestra que, aunque los coeficientes de la series de potencias en R_e crecen (o decrecen) como función de N , las funciones $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$ presentan un comportamiento asintótico y parecen converger, aunque lentamente, como

se puede apreciar en las figuras 4.12 y 4.13. Esto es otro reflejo de que la aproximación más inconveniente está en usar la representación en potencias de R_e para los coeficientes de Fourier. Relativo a la lenta convergencia de las series de potencias en x , se debe notar que el cambio de representación en la dependencia en R_e puede ampliar el intervalo de valores que el número de Reynolds puede tomar; sin embargo, el valor de N se debe escoger relativamente grande. Esto se puede ver de una manera más clara en los resultados para el coeficiente de arrastre (figuras 4.19 y 4.23), en donde se ve que para N chicas, las aproximaciones para $R_e \sim 0$, son poco satisfactorias. La razón radica en que el problema a $R_e = 0$ no se puede resolver.

Al comparar los resultados obtenidos mediante el presente método con los obtenidos con otras metodologías, se encuentra que las soluciones halladas parecen converger a la solución del problema. Por un lado, los resultados para las líneas de corriente comparadas con los resultados al usar la aproximación de Oseen [5] y los resultados de Kaplun [15], reflejan que la expresión (4.32) compara mejor con los AEA, que con los resultados provenientes de la aproximación de Oseen, lo cual, es consistente con el hecho de que se ha sugerido que los AEA representan una mejor aproximación. Las diferencias entre los distintos cálculos se incrementan lejos del cilindro, debido a que ninguno de ellos es válido lejos del cuerpo. Uno de los aspectos interesantes, es las diferencias en la asimetría del flujo en cada aproximación, que están estrechamente relacionadas con cómo se consideran los términos no lineales en las ecuaciones aproximadas a resolver. En el presente método, la no linealidad del problema se incluye a través de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera. En cambio, los otros cálculos las incluyen, de manera aproximada, ya sea en la ecuación diferencial (aproximación de Oseen) o a través de las condiciones de frontera (AEA). En el caso del coeficiente de arrastre, figura 4.23, por un lado se ve que los resultados aquí obtenidos mejoran para $R_e \sim 0$ conforme se aumenta el orden al que se truncan las series en potencias de x . Para $0.2 < R_e < 1$, la expresión (4.33) parece dar mejores resultados que los demás cálculos, comparados con los datos experimentales de Tritton [57] y Hunner & Hussey [56]. Esto puede deberse a que, en este caso, la contribución de los términos no lineales se considera de manera sucesiva que mejora al aumentar el valor de N , a diferencia de los casos usando la aproximación de Oseen y los AEA.

Capítulo 5

El flujo alrededor de una esfera

De manera similar al caso del flujo alrededor del cilindro, en este capítulo se presenta el método propuesto para resolver las ecuaciones (2.44) y (2.45) para una N fija. En la primera parte, se describen los casos $N = 3$ y $N = 4$, junto con el caso $R_e = 0$ (solución de Stokes). Para valores mayores de N se buscan soluciones aproximadas usando como base de funciones los polinomios de Legendre. Esta elección está basada en la simetría del problema y en que estos polinomios son relativamente simples de manipular. De las propiedades de ortogonalidad de estas funciones, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas, que se resuelve aproximadamente proponiendo como soluciones series de potencias en R_e .

1 Los primeros órdenes

Con el fin de ilustrar el método propuesto, se resuelven detalladamente los casos $N = 3$ y $N = 4$, ya que se pueden resolver analíticamente. En el primer caso el sistema de ecuaciones a resolver resulta lineal, en cambio, para $N = 4$, las ecuaciones resultantes son no lineales.

1.1 El caso $N=3$ y la solución de Stokes

El sistema de ecuaciones para $N = 3$ está dado por (2.46) y (2.47), que pueden ser reescritas de la siguiente manera

$$\varphi'(\mu) = 3 \left(\eta(\mu) + \frac{\mu^2 + A_1}{\mu^2 - 1} \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] - 3(\eta(\mu) - \varphi'(\mu)) = 3, \quad (5.2)$$

donde A_1 es una constante, que proviene de haber integrado una vez la ecuación (2.46). Como los coeficientes b_n^1 deben ser finitos en $\mu = \pm 1$, entonces $A_1 = -1$. Al sustituir $\varphi'(\mu)$ en (5.2) se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] + 6\eta(\mu) = -6, \quad (5.3)$$

que es una ecuación inhomogénea de Gegenbauer [61]. La solución de esta ecuación es de la forma²

$$\eta(\mu) = A\mu - \frac{3}{2}, \quad (5.4)$$

por lo que, a partir de (5.1), se encuentra que

$$\varphi(\mu) = \frac{3}{2}A\mu^2 - \frac{3}{2}\mu + B, \quad (5.5)$$

donde A y B son constantes de integración. Para determinar los valores de estas constantes se utiliza la condición de frontera (2.6), que es de la forma

$$\sum_{n=0}^3 c_n(\mu) = 0,$$

que, después de haber escrito los coeficientes c_n en función de $\eta(\mu)$ y $\varphi(\mu)$, toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A^2\mu^2(1 - \mu^2)R_e + A \left(R_e\mu(1 - \mu^2) - 3\mu^2 + \frac{1}{2} \right) \\ + \frac{3}{4}R_e(1 - \mu^2) + B = 0. \end{aligned}$$

¹Debido al cambio $b_n(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2}\beta_n(\mu)$ los coeficientes β_n no deben crecer más rápido que $(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}}$.

²La solución a la ecuación homogénea es $C_1^{(\frac{3}{2})}(\mu) = \mu$, donde los $C_n^{(\alpha)}(\mu)$ son los polinomios ultrasféricos [61].

Claramente, aunque A y B sean cero, la condición anterior no se satisface exactamente. En otras palabras, la condición sobre el campo de presiones se satisface salvo una función de orden $O(R_e)$. En este punto, es importante resaltar que cuando R_e es diferente de cero, la condición (2.6) no se satisface debido a que la series en potencias de x son truncadas a un orden finito.

En el caso en que $R_e = 0$, es fácil demostrar por iteración directa de las relaciones de recurrencia (2.41-2.43), que las expresiones (5.4) y (5.5), con A y B iguales a cero, son tales que los coeficientes a_n y β_n son cero para $n > 3$ y los c_n se anulan a partir de $n = 3$ en adelante. De manera que las expresiones (5.4) y (5.5) son la solución, que satisface todas las condiciones de frontera, a las ecuaciones en la aproximación de Stokes; de hecho, dichas expresiones son la solución encontrada por Stokes escrita en la variables (x, μ) . Puesto que el caso $N = 3$ reproduce la solución de Stokes, este orden representa la primera aproximación físicamente plausible.

Cuando $N = 4$, las ecuaciones diferenciales a resolver están dadas por

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] + 3\eta(\mu) - 2\varphi'(\mu) \right) \right] = \mu, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{24} R_e (1 - \mu^2) \eta'(\mu) \eta(\mu) - \frac{2}{3} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\eta(\mu)] + \eta(\mu) \\ + \frac{1}{12} \frac{d^2}{d\mu^2} [(1 - \mu^2)\varphi'(\mu)] - \frac{3}{2} \varphi'(\mu) = -1, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde se puede ver que la segunda ecuación es no lineal, de manera que este caso representa la primera aproximación no lineal al problema. Sin embargo, se puede probar por sustitución directa, que la solución de Stokes, dada por la expresiones (5.4) y (5.5), es una solución a las ecuaciones anteriores. Es una curiosidad que esta solución anula el término no lineal en la ecuación (5.7), de manera que el campo de velocidades a este orden es también el de Stokes.

Tomado en cuenta que el hecho de truncar las series propuestas para el campo de velocidad y presión, restringe la validez de los resultados a valores tales que x sea pequeña (cerca de la esfera), conforme el valor de N aumenta, el rango de valores que x puede tomar también aumenta, de manera que la solución es aproximadamente válida cada vez más lejos del objeto. Por lo tanto, el que la solución para $N = 4$ sea el flujo de Stokes, simplemente refleja que tiene validez a distancias relativamente lejanas a la esfera.

2 Para los siguientes órdenes

Para valores mayores de N , no ha sido posible encontrar resultados analíticos para las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que estas ecuaciones crecen tanto en tamaño como en complejidad conforme se aumenta el valor de N . Por lo que para resolverlas, se buscaron soluciones en series en polinomios de Legendre. La razón principal de utilizar estos polinomios esta basada en la simetría esférica del problema.

Puesto que las expresiones (5.4) y (5.5) son la solución al problema para $R_e = 0$ y $N \rightarrow \infty$, se tiene que, para cualquier orden finito N , la solución al problema se puede escribir como

$$\varphi(\mu; R_e) = \varphi_s(\mu) + \tilde{\varphi}(\mu; R_e), \quad (5.8)$$

$$\eta(\mu; R_e) = \eta_s(\mu) + \tilde{\eta}(\mu; R_e), \quad (5.9)$$

donde

$$\varphi_s(\mu) = -\frac{3}{2}\mu, \quad (5.10)$$

$$\eta_s(\mu) = -\frac{3}{2}, \quad (5.11)$$

corresponden a la solución de Stokes. El que la solución a N fija se pueda escribir de esta manera, puede tener como consecuencia que las soluciones, para los campos de velocidad y presión, converjan más rápidamente que en el caso bidimensional. El resultado anterior es en realidad poco sorprendente, puesto que las expresiones anteriores son la solución exacta al problema con condiciones de frontera para $R_e = 0$.

Para buscar soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las correcciones a la solución de Stokes ($\varphi_N(\mu; R_e)$ y $\eta_N(\mu; R_e)$), se buscan soluciones usando desarrollos en serie de polinomios de Legendre. De manera que se proponen soluciones de la forma

$$\tilde{\varphi}(\mu; R_e) = \sum_{k=1}^M \tilde{\varepsilon}_{0k}(R_e) P_k(\mu), \quad (5.12)$$

$$\tilde{\eta}(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \tilde{\zeta}_{1k}(R_e) P_k(\mu), \quad (5.13)$$

$$\text{con } M \rightarrow \infty,$$

por razones de simplicidad, es más conveniente usar las expresiones

$$\varphi(\mu; R_e) = \sum_{k=1}^M \varepsilon_{0k}(R_e) P_k(\mu), \quad (5.14)$$

$$\eta(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \zeta_{1k}(R_e) P_k(\mu), \quad (5.15)$$

$$\text{con } M \rightarrow \infty,$$

de manera que las funciones $\varphi_s(\mu; R_e)$ y $\eta_s(\mu; R_e)$ quedan escritas en términos de los $P_k(\mu)$.

Cuando los desarrollos anteriores se sustituyen en las ecuaciones diferenciales (2.44) y (2.45), se obtienen relaciones algebraicas entre los coeficientes ε_{0k} y ζ_{1k} , con $k = 1 \dots M$, que se encuentran a partir de las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Debido a que en la práctica los desarrollos (5.14) y (5.15) deben truncarse, de otra manera se obtendría un sistema de ecuaciones algebraicas infinito, los coeficientes a_n , β_n y c_n se deben conocer al mismo grado de aproximación que en (5.14) y (5.15). De las relaciones de recurrencia (2.41-2.43) y las funciones independientes (5.14) y (5.15) se calculan los coeficientes a_n , b_n y c_n y sus series correspondientes en polinomios de Legendre [61], utilizando las fórmulas

$$\alpha_{nj}(R_e) = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 a_n(\mu; R_e) P_j(\mu) d\mu, \quad (5.16)$$

$$\zeta_{nj}(R_e) = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 \beta_n(\mu; R_e) P_j(\mu) d\mu, \quad (5.17)$$

$$\text{si } n > 1,$$

$$\varepsilon_{nj}(R_e) = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 c_n(\mu; R_e) P_j(\mu) d\mu, \quad (5.18)$$

$$\text{si } n > 0,$$

de manera que los desarrollos de los campos de velocidad y presión, quedan dados por

$$a_n(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \alpha_{nk}(R_e) P_k(\mu), \quad (5.19)$$

$$\beta_n(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \zeta_{nk}(R_e) P_k(\mu), \quad (5.20)$$

$$c_n(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \varepsilon_{nk}(R_e) P_k(\mu). \quad (5.21)$$

En este caso, así como en el problema bidimensional, se podría proceder al revés, es decir, en vez de calcular las integrales (5.16-5.18), las expresiones anteriores se pueden sustituir en las relaciones de recurrencia (2.41-2.43) y, a partir de las propiedades de ortogonalidad de los $P_k(\mu)$, se puede encontrar un nuevo conjunto de relaciones de recurrencia entre los coeficientes α_{nk} , ζ_{nk} y ε_{nk} . Sin embargo, en el caso tridimensional, estas relaciones de recurrencia no se han calculado. Hasta el momento, el cálculo se ha realizado a partir de (5.16-5.18) con el fin de estudiar propiedades de convergencia de este tipo de soluciones.

Si se sustituyen las expresiones (5.19-5.21) en las condiciones (2.44) y (2.45), y después de multiplicar por $P_{k'}(\mu)$ e integrarlas entre $\mu = -1$ y $\mu = 1$, se obtienen la expresiones

$$\sum_{n=1}^N \alpha_{nk}(R_e) = \delta_{1k}, \quad (5.22)$$

$$\sum_{n=1}^N \zeta_{nk}(R_e) = -\delta_{0k}, \quad (5.23)$$

donde $k = 0, \dots, M$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Claramente, los coeficientes de los desarrollos (5.19-5.21) son funciones de los coeficientes independientes ζ_{1k} y ε_{0k} , de manera que las expresiones anteriores representan un sistema completo de $2M$ ecuaciones algebraicas no lineales. En este caso, las ecuaciones también se resolvieron proponiendo soluciones en potencias del número de Reynolds, es decir,

$$\zeta_{1k}(R_e) = \sum_{i=0}^{M'} \omega_{1kj} R_e^j, \quad (5.24)$$

$$\varepsilon_{0k}(R_e) = \sum_{i=0}^{M'} \gamma_{0kj} R_e^j, \quad (5.25)$$

donde los coeficientes ω_{1kj} y γ_{0kj} son constantes. Así, el sistema de ecuaciones algebraicas, no lineales, se transforma en un conjunto de M' sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. En otras palabras, a cada orden en R_e , se debe resolver un sistema completo de ecuaciones algebraicas lineales con $2M$ incógnitas, de tal manera que el orden $k+1$ sólo depende de los k órdenes anteriores. Evidentemente, el orden cero en el número de Reynolds corresponde a la solución de Stokes, por lo que

$$\gamma_{010} = -\frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned}\omega_{100} &= -\frac{3}{2}, \\ \gamma_{0k0} &= 0 \text{ y} \\ \omega_{1k0} &= 0 \text{ si } k > 0.\end{aligned}$$

Resultados preliminares para los primeros valores de N y M , muestran que los coeficientes de las series de potencias en R_e satisfacen que

$$\gamma_{0kj} = 0 \text{ y} \quad (5.26)$$

$$\omega_{1kj} = 0 \text{ si } k - j > 1, \quad (5.27)$$

o, en otras palabras, los desarrollos en potencias de R_e se pueden escribir como

$$\zeta_{1k}(R_e) = \sum_{i=k}^{M'} \omega_{1kj} R_e^j, \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_{0k}(R_e) = \sum_{i=k-1}^{M'} \gamma_{0kj} R_e^j, \quad (5.29)$$

$$\text{donde } k = 1, \dots, M,$$

que, como se mostró en la sección 1.1 del capítulo 4 para el caso bidimensional, tiene como consecuencia que los coeficientes son funciones que crecen (decrecen) rápidamente. Los coeficientes ζ_{1k} y ε_{0k} tienen k y $k - 1$ raíces múltiples en $R_e = 0$, respectivamente. Ahora bien, para valores grandes de k y cercanos a M , los coeficientes tienen la mayoría de sus raíces en $R_e = 0$, por lo tanto, son funciones que crecen muy rápido, aún para valores pequeños del R_e .

Para realizar los cálculos, se desarrolló una rutina en el programa Mathematica 4.0. Básicamente, lo que se hace es que a partir de proponer a las soluciones como

$$\varphi^{(N)}(\mu; R_e) = \sum_{k=1}^M \varepsilon_{0k} P_k(\mu), \quad (5.30)$$

$$\eta^{(N)}(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \zeta_{1k} P_k(\mu), \quad (5.31)$$

donde el superíndice N se incluye para denotar el orden al que se truncan las series en potencias de x . Se iteran las relaciones de recurrencia (2.41-2.43) y se obtienen los coeficientes a_n , β_n y c_n hasta un cierto valor N .

Puesto que el número de términos en estos coeficientes crece rápidamente conforme N crece, no ha sido posible utilizar valores de N demasiado grandes, comparado con los valores máximos calculados en el caso del cilindro. A partir de las expresiones (5.16-5.18) se obtienen los desarrollos (5.19-5.21), en función de los coeficientes independientes ε_{0k} y ζ_{1k} , y después se encuentran los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, utilizando las expresiones (5.22) y (5.23), que se puede denotar de la siguiente manera

$$F_k(\varepsilon_{01}, \dots, \varepsilon_{0k}, \zeta_{10}, \dots, \zeta_{0k}) = \delta_{1k}, \quad (5.32)$$

$$G_k(\varepsilon_{01}, \dots, \varepsilon_{0k}, \zeta_{10}, \dots, \zeta_{0k}) = -\delta_{0k}, \quad (5.33)$$

donde $k = 1, \dots, M$ y, en el caso general, las funciones F_k y G_k son funciones no lineales de sus argumentos, cuyo grado depende de N .

El siguiente paso consiste en construir los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, a partir de la sustitución de las expresiones (5.24) y (5.25) en el sistema de ecuaciones (5.32) y (5.33) y coleccionando términos con iguales potencias de R_e . Hasta el momento, no se ha considerado dentro de la rutina el que los coeficientes tienen la forma (5.28) y (5.29), puesto que es un poco tedioso hacer el conteo del número de ecuaciones y de variables para cada orden en R_e de forma iterativa. Evidentemente, si no se consideran los primeros términos en las expansiones en potencias de R_e , que se sabe son cero, el número de ecuaciones decrece. Sin embargo, sólo los sistemas de ecuaciones correspondientes a los primeros órdenes en R_e , que de hecho son los más sencillos de calcular, contienen un número relevantemente menor de incógnitas.

Por otro lado, de los primeros resultados se encuentra que los coeficientes de las series (5.24) y (5.25) satisfacen que $\omega_{1kj} = 0$ si k es par (impar) y j es impar (par) y que $\gamma_{0kj} = 0$ si k y j son los dos pares (o los dos impares). En otras palabras, dependiendo de la paridad de k , los coeficientes $\zeta_{1k}(R_e)$ y $\varepsilon_{0k}(R_e)$ sólo contienen potencias pares o impares en R_e . La rutina realizada sí incluye este último hecho, lo cual, reduce en la mitad el número de incógnitas en los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

2.1 Las propiedades del flujo

Las expresiones para las soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, son de la forma

$$\varphi^{(N)}(\mu; R_e) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=k-1}^{M'} \gamma_{0kj} R_e^j P_k(\mu), \quad (5.34)$$

$$\eta^{(N)}(\mu; R_e) = \sum_{k=0}^M \sum_{j=k}^{M'} \omega_{1kj} R_e^j P_k(\mu), \quad (5.35)$$

con las condiciones

$$\omega_{1kj} = \gamma_{0,k+1,j} = 0, \quad (5.36)$$

$$\omega_{1jk} = \gamma_{0,j,k+1} = 0, \quad (5.37)$$

si k es par y j es impar y también se anulan siempre que $k - j > 1$. A partir de haber calculado los coeficientes de las series en polinomios de Legendre para los coeficientes a_n , β_n y c_n , en función de los coeficientes independientes $\zeta_{1k}(R_e)$ y $\varepsilon_{0k}(R_e)$, se encuentra que los desarrollos para los campos de velocidad y presión son de la forma

$$u_x^{(N)}(x, \mu; R_e) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=k-1}^{M'} \nu_{nlj} R_e^j \right) P_k(\mu) x^n, \quad (5.38)$$

$$u_\mu^{(N)}(x, \mu; R_e) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^M \left(\sum_{j=k}^{M'} \omega_{nlj} R_e^j \right) P_k(\mu) x^n, \quad (5.39)$$

$$P^{*(N)}(x, \mu; R_e) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^M \left(\sum_{j=k-1}^{M'} \gamma_{nlj} R_e^j \right) P_k(\mu) x^n, \quad (5.40)$$

con las condiciones

$$\nu_{n,k+1,j} = \omega_{nkj} = \gamma_{n,k+1,j} = 0, \quad (5.41)$$

$$\nu_{n,j,k+1} = \omega_{nj k} = \gamma_{n,j,k+1} = 0, \quad (5.42)$$

si k es par y j es impar y se anulan cuando $k - j > 1$; para toda n .

De la expresión (2.49) y sustituyendo los coeficientes a_n por sus expansiones en serie de Legendre y potencias de R_e , se obtiene que la función de corriente

es de la forma

$$\psi^{(N)}(x, \mu; R_e) = \sum_{n=2}^N \frac{x^n}{(1-x)^2} \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=k-1}^{M'} \frac{\nu_{nkj} R_e^j}{2k+1} \right) (P_{k+1}(\mu) - P_{k-1}(\mu)), \quad (5.43)$$

en el caso en el que $R_e = 0$, la expresión anterior se reduce a la expresión (1.41). Para el coeficiente de arrastre, de la expresiones (2.51), (5.34) y (5.35) se obtiene

$$C_D^{(N)} = \frac{6\pi}{R_e} - \frac{4\pi}{3R_e} \sum_{j=2}^{M'} (2\omega_{10j} - \frac{2}{5}\omega_{12j} + \gamma_{01j}) R_e^j, \quad (5.44)$$

donde el primer término corresponde a la ley de Stokes. Hay que notar que los únicos coeficientes que contribuyen a (5.44) involucran sólo los tres primeros polinomios de Legendre, para $k = 0, 1, 2$, de manera que, aunque al cambiar los valores de N y M los valores de los coeficientes en $C_D(R_e)$ cambian, lo anterior indica que M se debe escoger tal que $M \geq 2$.

3 Los primeros valores de N

Se describen los resultados para los desarrollos de los campos $\bar{u}^{(N)}(x, \mu; R_e)$ y $P^{*(N)}(x, \mu; R_e)$. Los valores máximos utilizados para N , M y M' fueron de 9, 10 y 20 respectivamente. Debido a que el número de términos, en los coeficientes a_n , β_n y c_n , crece rápidamente conforme N , M y M' aumentan, la rutina que realiza los cálculos satura rápidamente la memoria RAM de la computadora. Una primera alternativa es usar computadoras con más memoria RAM, aunque, debido a que el número de términos aumenta de forma no lineal, no es posible aumentar mucho los valores de N , M y M' . Una siguiente alternativa, es que a partir de las expresiones (5.19-5.21) y las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, se encuentren relaciones de recurrencia para los coeficientes α_{nk} , ζ_{nk} y ε_{nk} , que sería más eficiente desde el punto de vista computacional.

3.1 Las series en potencias de R_e

El análisis de las series de potencias, en este caso, es muy parecido al caso bidimensional, puesto que la forma general de los desarrollos para los coeficientes ε_{0k} y ζ_{1k} es similar; están compuestos de potencias pares o impares, dependiendo de la paridad de k en los $P_k(\mu)$, y tienen k y $k - 1$ raíces en

$R_e = 0$, respectivamente. Por lo tanto, los desarrollos (5.28) y (5.29), truncados a orden $M' < M$, son equivalentes a la solución, a orden M' en R_e , al problema en el límite cuando $M \rightarrow \infty$. Esta forma de truncar es equivalente a haber escogido M y M' tales que $M' = M - 1$. De manera similar al caso bidimensional, esta no es la forma más adecuada de truncar las series de Legendre y las de potencias de R_e , puesto que los últimos coeficientes de Legendre crecen muy rápido, aún para valores chicos de R_e . Por lo que parece ser más conveniente escoger $M \ll M'$.

El estudio de las series en potencias muestra que el problema truncado a N y M fijas parece ser soluble en un intervalo finito de valores de R_e . Es importante aclarar que no se ha demostrado formalmente que los sistemas de ecuaciones algebraicas (5.22) y (5.23) siempre tengan solución, para cualesquiera valores de N y M . Sin embargo, hasta los casos analizados, estas ecuaciones parecen poderse resolver a cada paso, cuando se usan como soluciones potencias en R_e . Así como en el caso bidimensional, estas series en potencias son la serie de Taylor de una solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Hasta el momento, no se ha estudiado con suficiente detalle el problema algebraico no lineal, sino que se supuso, en base a los resultados encontrados en el caso del cilindro, que el hecho de que los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales tengan solución a cada paso, significa que las ecuaciones (5.22) y (5.23) tienen, al menos, una solución.

En vista de que los resultados obtenidos para las series de potencias (5.28) y (5.29) tiene las mismas desventajas encontradas en el problema bidimensional, no resulta muy útil hacer cálculos para valores de M' muy grandes, puesto que la convergencia de las soluciones es muy lenta y sólo se puede asegurar en un intervalo finito y pequeño del número de Reynolds. La utilidad de realizar este ejercicio, para tres dimensiones, es que permite estudiar propiedades de las soluciones de los sistemas de ecuaciones (5.22) y (5.23). De manera que se puedan construir soluciones usando alguna representación alternativa que, para números de Reynolds pequeños, sea consistente con los resultados obtenidos usando series de potencias en R_e . Además de que permite hacer un análisis de las propiedades de convergencia de las series en polinomios de Legendre.

Cuando cambia N

Para valores fijos³ de M y M' , los resultados muestran que, a nivel de las series de potencias en R_e , la convergencia parece ser lenta y restringida a un intervalo pequeño del R_e . Cuando se analizan los coeficientes γ_{0kj} y ω_{1kj} como función de N , no se observa un comportamiento asintótico claro, como se puede ver en las figuras 5.1 y 5.2. De las primeras dos gráficas se ve que

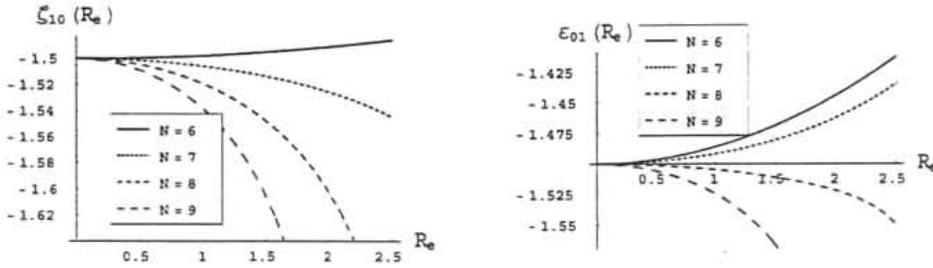


Figura 5.1: Gráficas de los coeficientes ζ_{10} y ϵ_{01} , como función de R_e , para diferentes valores de N .

las diferencias entre las curvas, que corresponden a diferentes valores de N , crecen rápidamente, conforme R_e aumenta. Los valores de los coeficientes de las series de potencias (5.28) y (5.29), para los diferentes valores de N , muestran un comportamiento creciente (decreciente), como se puede apreciar en las gráficas de la figura 5.2. Evidentemente, el orden cero es el mismo para cualquier valor de N , puesto que representa a la solución de Stokes. El comportamiento de los coeficientes de las series de potencias en R_e , como función de N , no parecen dar mucha información para el caso $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, cuando N y M están fijas, el estudio de algunos casos sencillos de los sistemas de ecuaciones algebraicas, no lineales, muestra que las series de potencias (5.28) y (5.29) coinciden con el desarrollo en serie de potencias de una solución del sistema de ecuaciones (5.22) y (5.23). Por lo tanto, parece que existe al menos una solución al problema algebraico. Más adelante, al comparar con cálculos realizados a lo largo de los años, se encuentra que esta solución es físicamente plausible.

³Los valores calculados se hicieron de manera que $M' = 2M$.

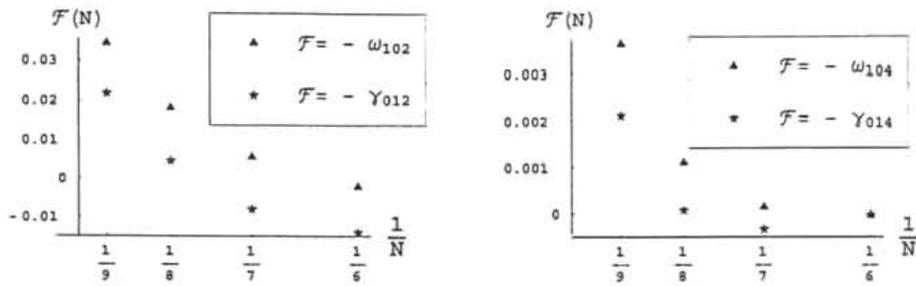


Figura 5.2: Gráficas de los coeficientes ω_{10l} y γ_{01l} , como función de N , para $l = 2$ (izq.) y $l = 4$ (der.).

4 Las series en polinomios de Legendre

Una vez que se han estudiado las soluciones en potencias de R_e , se estudian las propiedades de convergencia de las soluciones como función del número (M) de términos considerados en las series en polinomios de Legendre. Para valores de N y M' fijos, se realizó el cálculo para valores diferentes de M . Cabe mencionar que una de las ventajas de utilizar la representación en series de potencias, que es la más sencilla, es que permiten hacer un análisis de las propiedades de convergencia de las series en polinomios de Legendre.

Los resultados encontrados muestran que las diferencias entre las soluciones, truncadas a diferentes valores de M , son pequeñas cuando $M \geq 5$, como se puede apreciar en la figura 5.3, donde se muestran dos de los coeficientes b_n truncados a diferentes valores de M . Claramente, las diferencias apreciables aparecen entre $M = 3$ y las otras dos curvas, que prácticamente están colapsadas en una sola. Las diferencias entre $M = 5$ y $M = 10$ se mantienen pequeñas para un intervalo bastante amplio del número de Reynolds. Es importante señalar que para los valores de R_e , en donde los desarrollos en series de potencias del número de Reynolds se suponen válidos, las diferencias entre los distintos valores del orden al que se truncan las series en polinomios de Legendre, son pequeñas a partir de $M = 3$ y en adelante. Por lo tanto, los resultados muestran que las series en polinomios de Legendre convergen más rápido que los polinomios en potencias de R_e , así que resultan una base adecuada para encontrar soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, obtenidas al truncar a una N finita.

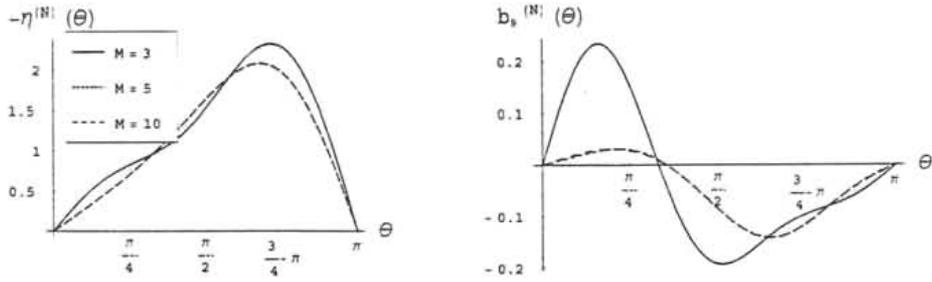


Figura 5.3: Gráficas de los coeficientes $b_1(\theta)$ ($\equiv \eta^{(N)}(\theta)$) y $b_9(\theta)$, para diferentes valores de M ; con $N = 9$, $M' = 20$ y $R_e = 2$.

5 Las soluciones como función de N

Ya que se tiene un criterio para truncar tanto las series en potencias en R_e como las series en polinomios de Legendre, se estudia el comportamiento de las soluciones como función del orden (N) al que se truncan las series en potencias de x . En la sección anterior se encontró que a partir de $M = 5$ las series (5.19-5.21) han obtenido prácticamente su valor asintótico, de manera que parece ser suficiente hacer los cálculos con $M = 5$. Para el caso de las series de potencias, que resultan series que convergen muy lentamente y cuyo radio de convergencia parece ser pequeño, se escogió $M' = 20$, lo cual, no requiere demasiado tiempo de cómputo.

En la figura 5.4 se muestran las expresiones (5.34) y (5.35) para diferentes valores de N y para $R_e = 1$. Para valores menores de R_e , las diferencias entre las curvas decrecen y se hacen cada vez más simétricas, conforme $R_e \rightarrow 0$. Una de las características interesantes que se observan en estas gráficas, es que conforme se aumenta el valor de N , las curvas tienden a ser más asimétricas, aunque, los cambios van disminuyendo a N grandes. Por lo que se obtienen dos resultados importantes: que las series parecen ser convergentes, al menos en un intervalo finito de R_e , en donde las series en potencias del número de Reynolds se comportan bien, y que conforme aumenta N , la asimetría entre aguas arriba y aguas abajo aumenta. De manera que conforme se mejora la aproximación para el término no lineal en la ecuación de momento, el flujo tiende a ser más asimétrico. Hay que notar que, hasta este momento, los resultados muestran de forma cualitativa que las series (5.38-5.40) convergen

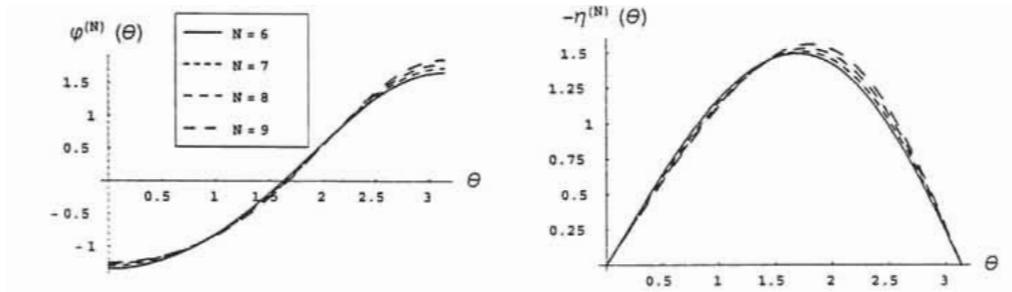


Figura 5.4: Gráficas de las funciones independientes $\varphi^{(N)}(\theta)$ y $\eta^{(N)}(\theta)$, para diferentes valores de N ; con $R_e = 1$.

lentamente, pero no se puede saber aún si convergen a la solución. Para ello, los resultados se comparan más adelante con aquellos obtenidos usando otras metodologías.

Cuando el número de Reynolds toma valores mayores a uno, las diferencias entre distintos valores de N aumentan, así que la convergencia de las soluciones no se puede asegurar. En la figura 5.5 se muestra el caso con $R_e = 2$, donde se puede apreciar que, conforme aumenta el valor de N , las diferencias entre valores consecutivos de N se incrementan. Debido a que las series

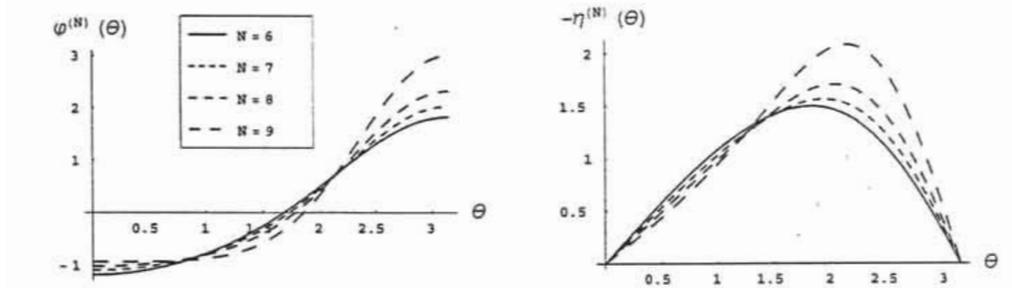


Figura 5.5: Gráficas las funciones independientes $\varphi^{(N)}(\theta)$ y $\eta^{(N)}(\theta)$, para diferentes valores de N ; con $R_e = 2$.

en potencias parecen no ser convergentes para R_e mayores que la unidad, el resultado observado al aumentar el número de Reynolds no es muy sorprendente, ya que se sabe que las potencias no son una representación conveniente

para números de Reynolds de orden uno.

5.1 El arrastre y las líneas de corriente

En la figura 5.6 se muestra el coeficiente de arrastre como función de R_e ; para diferentes valores de N . Como en este caso si hay solución para $R_e = 0$, todas las curvas son prácticamente iguales cuando R_e es pequeño. Cuando el R_e se aumenta por encima de la unidad, las diferencias empiezan a hacerse más grandes. Claramente, se observa que para N grandes, el coeficiente de

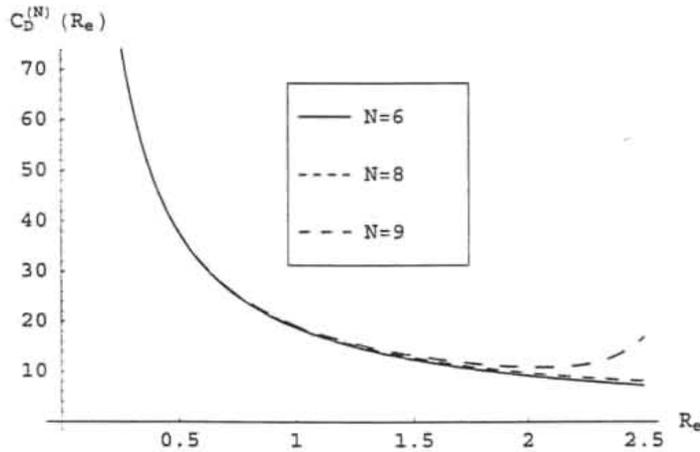


Figura 5.6: El coeficiente de arrastre como función de R_e , para diferentes valores de N .

arrastre diverge rápidamente para $R_e > 2$ y del comportamiento observado en el caso del cilindro (sección 4.2), se puede prever que la convergencia sólo se puede asegurar para $R_e < 1$. Si se analiza el comportamiento asintótico de los coeficientes de cada potencia en R_e , en la expresión (5.44), como función de N se encuentran resultados muy similares a los mostrados en la figura 5.2. La razón por la que las diferencias en el arrastre aparecen a valores más grandes de R_e , que en el caso de cualquier otra característica del flujo (como las líneas de corriente, la presión, etc.), se debe a que sólo depende de los primeros coeficientes de las series en polinomios de Legendre para $\varphi^{(N)}(\mu; R_e)$ y $\eta^{(N)}(\mu; R_e)$, que son los que convergen más rápido.

En el caso de las líneas de corriente, las figuras 5.7 y 5.8, muestran los resultados para dos valores de N . En la primera figura, cuando $R_e = 1$,

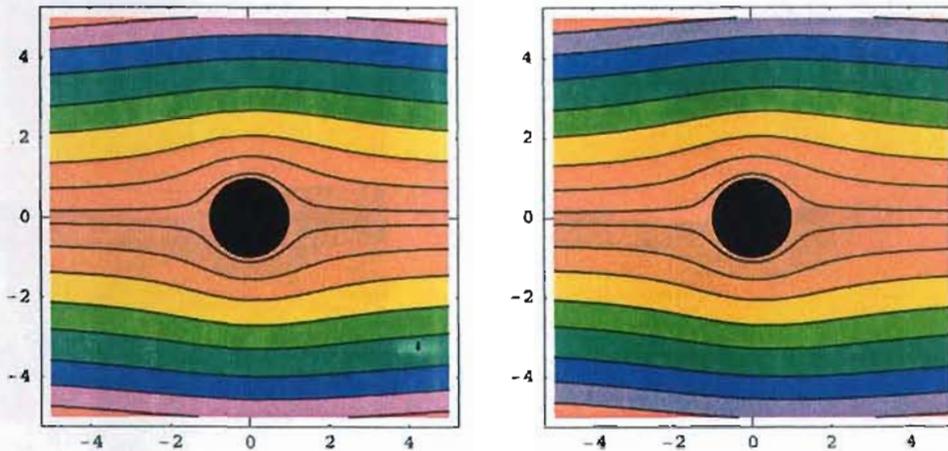


Figura 5.7: Líneas de corriente para $R_e = 1$ con dos valores diferentes de N : $N = 6$ izquierda y $N = 9$ derecha.

las diferencias entre las dos gráficas es muy pequeña, sobre todo cerca del objeto. Como la solución para $R_e = 0$ es simétrica, respecto aguas arriba y aguas abajo, conforme el R_e tiende a cero las líneas de corriente se hacen más simétricas. Es importante señalar, que en este caso la asimetría para $R_e < 1$ es muy pequeña y prácticamente imperceptible a simple vista, a diferencia del cilindro en el que la contribución simétrica no representa una buena aproximación a las propiedades del flujo, puesto que no hay solución a $R_e = 0$. Cuando el número de Reynolds es aumentado por encima de la unidad, las curvas se hacen más asimétricas conforme se aumenta el valor de N . Aunque este resultado ya se había encontrado del análisis de la sección anterior, hay que notar que las diferencias entre las dos gráficas de la figura (5.8) son más pronunciadas lejos de la esfera. En cambio, cerca del objeto las diferencias son, a simple vista, casi imperceptibles.

A pesar de que los resultados obtenidos en este caso, son similares al caso bidimensional, es importante señalar las diferencias más notorias. Por un lado, cuando el R_e es pequeño, las líneas de corriente son prácticamente simétricas, a diferencia del cilindro, para el cual, la asimetría es más pronun-

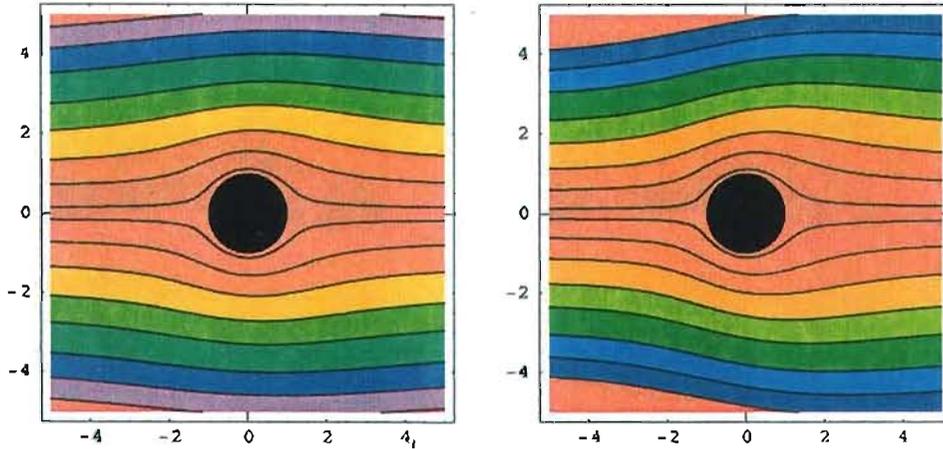


Figura 5.8: Líneas de corriente para $R_e = 2$ con dos valores diferentes de N : $N = 6$ izquierda y $N = 9$ derecha.

ciada. Por el otro lado, en 3D las diferencias cerca de la esfera son pequeñas, aún para R_e relativamente mayor que uno, y se hacen más pronunciadas conforme la distancia al cuerpo aumenta. En el caso del cilindro las diferencias son apreciables en todo el dominio. La razón tiene dos fuentes, una es evidentemente que la solución a $R_e = 0$ existe y, además, representa una buena aproximación a la solución cerca de la esfera. La otra, es que en este caso, cuando R_e es menor que uno, la contribución de los términos no lineales en las ecuaciones diferenciales ordinarias, a cada orden en N , contienen aproximadamente la misma información en la vecindad del cuerpo.

6 Cómo se ve contra otros cálculos

Análogamente al caso del cilindro, una forma de estimar hasta que números de Reynolds los desarrollos (5.38-5.40) son válidos y si, para valores grandes de N , convergen o no a la solución del problema, es a través de comparar con resultados obtenidos a lo largo de los años.

En las figuras 5.9 y 5.10 se muestra el coeficiente de arrastre (5.44), como función de R_e , junto con los resultados obtenidos a partir de la aproximación de Oseen [3, 4], el método de acoplamiento asintótico [8, 43], el resultado

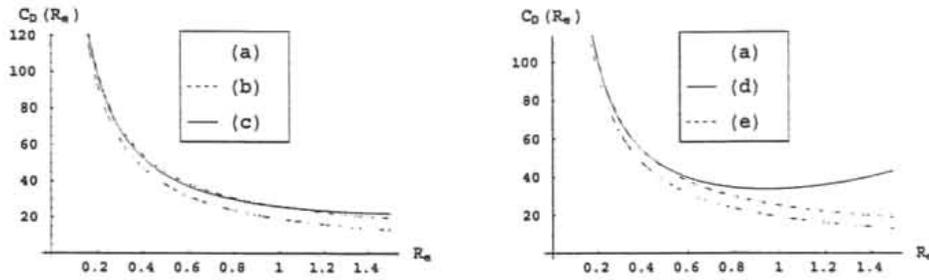


Figura 5.9: Comparación de los resultados para el coeficiente de arrastre: a) $N = 9$, b) Oseen, c) Proudman & Pearson, d) Chester & Breach y e) Goldstein.

usando el método homotópico [44] y un ajuste que proviene de resultados experimentales [50, 62]. En estas figuras, se puede ver que, prácticamente en todo el intervalo, los resultados para $N = 9$ están por debajo de todos los demás. Evidentemente, todas las curvas son muy parecidas en la vecindad $R_e = 0$, pues el término dominante en esa región corresponde a la ley de Stokes. Para $R_e < 0.5$, que es donde los AEA se suponen válidos, las diferencias son pequeñas (ver figura 5.9); para R_e mayores las diferencias aumentan. En la gráfica de la izquierda, de la figura 5.10, al comparar con los resultados de Clift *et. al.* [50, 62], se observa que van por debajo de los resultados de Proudman & Pearson [8], para $R_e > 1$, de manera que las diferencias con la expresión (5.44) disminuyen. Al comparar los resultados de Liao [44] de sexto y décimo orden de aproximación⁴, en la gráfica de la derecha de la figura 5.10, se ve que las diferencias son mínimas, relativo a la comparación con los demás resultados. Es importante notar que en el método propuesto por Liao [44, 45], se encuentra el mismo comportamiento observado en la figura 5.6. Las curvas para el orden mayor tienen la misma tendendencia, es decir, incrementan su valor de manera que se van acercando al resultado de Clift *et. al.* En la figura 5.11 se muestran los resultados para $N = 9$ y los resultados de Dennis & Walker [19], que usaron un método de truncamiento de series. En este caso, los resultados también caen por debajo de los reportados por estos autores.

⁴Para más detalles del significado del orden de aproximación en el método de Liao ver la sección 2 y/o la referencia [44].

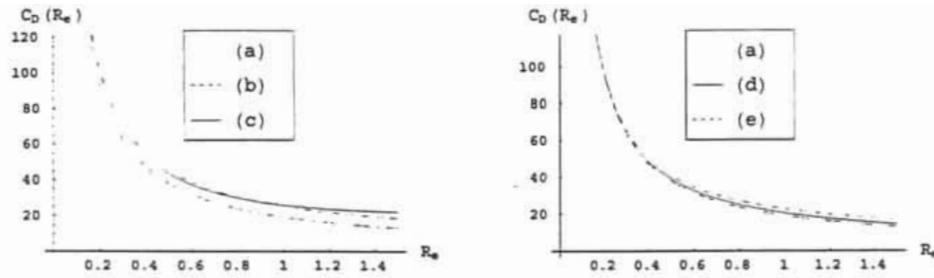


Figura 5.10: Comparación de los resultados para el coeficiente de arrastre: a) $N = 9$, b) Clift *et. al.*, c) Proudman & Pearson, d) Liao (sexto orden) y e) Liao (décimo orden).

Estos resultados muestran que, aunque en el caso tridimensional sí hay solución cuando $R_e = 0$, la convergencia de las soluciones encontradas, como función de N , es lenta. Aunque es importante tener en cuenta que, en la actualidad, es posible realizar cálculos largos y complicados utilizando a las computadoras con los algoritmos adecuados. En la gráfica 5.6, de la sección anterior, se puede notar que la tendencia de las curvas, al aumentar el valor de N , va acercándose lentamente a los resultados reportados en la literatura. Cabe resaltar que se esperaba que el caso de la esfera convergiera más rápido que el caso del cilindro, sin embargo, todo indica que las series en potencias de x deben truncarse a N más grandes, de manera que el problema aproximado tenga la información suficiente, sobretodo para $R_e > 0.5$. Entonces, por un lado se tiene una convergencia muy lenta para las series de potencias en R_e y, por el otro lado se observa que la convergencia como función del orden al que se truncan las series de potencias de x , también es lenta. De los análisis de las secciones anteriores, se encontró que las series de potencias en R_e representan buenas aproximaciones para $0 \leq R_e < 1$. De manera que para mejorar los resultados del coeficiente de arrastre es conveniente hacer cálculos para valores de N más grandes o, al cambiar la representación en potencias de R_e , encontrar los comportamientos asintóticos para $N \rightarrow \infty$.

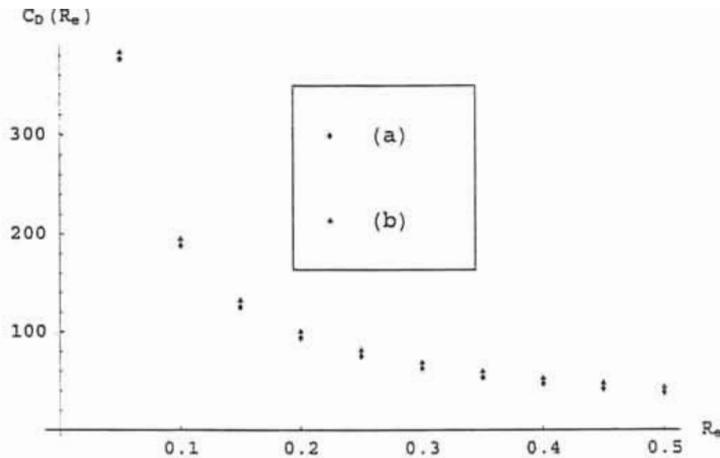


Figura 5.11: Comparación de los resultados para el coeficiente de arrastre: a) $N = 9$ y b) Dennis & Walker.

7 Conclusiones

Aunque en este caso muchas de las conclusiones simplemente se pueden copiar del caso del cilindro, es importante hacer claras las diferencias. Las soluciones propuestas para los campos $\vec{u}^{(N)}(x, \theta; R_e)$ y $P^{*(N)}(x, \theta; R_e)$, contienen tres aproximaciones. Primero se truncan (a un orden N) las series en potencias de x , de manera que las ecuaciones de Navier-Stokes se transforman en un conjunto de tres relaciones de recurrencia y las condiciones de frontera, en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, para dos funciones de θ y R_e . Estas funciones resultan ser las componentes del tensor de esfuerzos, calculadas sobre la superficie de la esfera. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales se buscan proponiendo series truncadas (a orden M) en polinomios de Legendre, así que el problema se reduce a un sistema completo de $2M$ ecuaciones algebraicas no lineales. En vista de la complejidad de estas ecuaciones, se resuelven usando una representación en series en potencias de R_e , que, del estudio del problema bidimensional, se sabe que no es la elección más apropiada, pero permite hacer un estudio de la convergencia de los primeros dos desarrollos. De esta manera, el problema algebraico no lineal se reduce a resolver, a cada orden en R_e , un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Una de las principales diferencias con el flujo en 2D, es que la solución cuando

$R_e = 0$ existe; solución de Stokes. Por lo que los problemas de convergencia de las series en potencias de x , para $R_e \ll 1$, se reducen. Hay que recalcar que aunque la convergencia de estas series es más rápida en esa región, con respecto a los resultados obtenidos para el cilindro (ver figuras 4.19 y 5.6), sigue siendo lenta, puesto que, para los valores de N hasta ahora considerados, aún se observan diferencias al comparar con los resultados de los AEA [8, 43].

Cuando N y M están fijas, las series de potencias en R_e para los coeficientes en polinomios de Legendre parecen ser convergentes en $0 \leq R_e < 1$; todo indica que los radios de convergencia son finitos y pequeños. Pues al aumentar el número de términos en los desarrollos (5.28) y (5.29), los resultados no mejoran apreciablemente, para $R_e > 1$. Aunque las series de potencias están restringidas a un intervalo pequeño del R_e , el hecho de que se puedan calcular para valores arbitrarios de M' , muestra que la ecuaciones algebraicas (5.22) y (5.23) tienen al menos una solución. En otras palabras, existe una solución para los coeficientes de Fourier $\varepsilon_{0l}(R_e)$ y $\zeta_{1l}(R_e)$ tal que sus respectivas series de Taylor están dadas por los desarrollos (5.28) y (5.29). Por lo tanto, todo indica que el problema a N y M fijas, es soluble y regular en el número de Reynolds. Evidentemente, estos sistemas de ecuaciones tienen varias soluciones, dependiendo del grado de no linealidad que tengan dadas N y M . Los resultados encontrados muestran que las series de potencias en R_e , son los desarrollos de una solución físicamente plausible.

El siguiente paso, es el estudio de las soluciones para diferentes valores de M , que se escoge tal que $M \ll M'$. En este caso, se encuentra que las series en polinomios de Legendre convergen más rápido que las series de potencias en R_e . Al aumentar M en las series (5.30) y (5.31), por un lado, se obtienen aproximaciones a un orden mayor, pues se consideran más términos en los desarrollos en serie. Por otro lado, debido a la naturaleza no lineal del problema, los primeros órdenes cambian al cambiar el valor de M . Los coeficientes (de orden l), de estos desarrollos, se hacen más pequeños conforme l se acerca a M , así que parecen ser series convergentes. Las diferencias entre los coeficientes (de orden $l < M$), para valores consecutivos de M , resultan ser pequeñas para $M > 4$. Hay que notar que, a N fija, el intervalo de valores del R_e en el que estas diferencias son pequeñas, puede ser relativamente grande dependiendo del valor de N . Por lo tanto, las series en polinomios de Legendre resultan ser una representación adecuada para las soluciones de las ecuaciones (2.44) y (2.45). Este resultado tiene varias ventajas, entre ellas, dado que las ecuaciones diferenciales pueden ser muy grandes y muy com-

plicadas, puede ser más sencillo trabajar con ecuaciones para los coeficientes de los desarrollos en serie de Legendre, que con las ecuaciones diferenciales directamente. Además, si M es pequeño, los sistemas de ecuaciones que hay que resolver son más simples.

Cuando se incrementa el valor de N , con M fija, el valor absoluto de los coeficientes de las series de potencias en R_e presentan un comportamiento creciente, como se muestra en la figura 5.2. En el fondo, este resultado es bien conocido, puesto que en el límite cuando $N \rightarrow \infty$, el problema aproximado tiende al original que se sabe es singular en el número de Reynolds. El hecho de que no sea fácil encontrar el comportamiento asintótico, parece ser una consecuencia del uso de series de potencias en R_e . Puesto que el comportamiento observado en los coeficientes ω_{1kj} y γ_{0kj} , como función de N , puede estar reflejando que las derivadas de la solución de las ecuaciones algebraicas, no lineales, crecen sin límite cuando $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, el comportamiento de las funciones $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$, como función de N , muestra que estas series parecen ser convergentes cuando el R_e es pequeño. De hecho, conforme se aumenta el valor al que se truncan las series de potencias en x , las diferencias entre las curvas, para el orden N y el $N+1$, decrecen conforme N aumenta, como se puede ver en las gráficas de la figura 5.4.

Es de resaltar que, aunque se cambie la representación para las soluciones a las ecuaciones algebraicas no lineales, la convergencia de las soluciones como función de N sigue siendo lenta. Cuando las series en potencias de x se truncan, las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de frontera se aproximan por las ecuaciones diferenciales (2.44) y (2.45). Por lo que tienen validez para cierto intervalo del R_e , que depende del valor de N . En primera instancia, se podría decir que los términos despreciados en las ecuaciones de Navier-Stokes a N fija, que son de orden x^{N+1} suponiendo que se conocen $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$ exactas, son pequeños en todo el dominio; si N es grande. El problema de la lenta convergencia en las series de potencias de x , para los campos de velocidad y presión, surge debido a que sus coeficientes cambian con N , lo cual, tiene varias fuentes. Por un lado, la transformación propuesta para la coordenada radial. Cuando las series de potencias de x se escriben en términos de la distancia a la esfera (r), cada nuevo término calculado incluye correcciones a todas las potencias de r^{-n} , desde cero hasta $n = N$. Por otro lado, está el forzar las condiciones de frontera a satisfacerse para toda N , pues esto obliga a que las dos funciones independientes cambien. Al final, la consecuencia es que N se debe escoger grande o, a partir de una mejor

propuesta para encontrar soluciones para las ecuaciones algebraicas (5.22) y (5.23), encontrar los valores asintóticos de los coeficientes de los desarrollos en polinomios de Legendre para $N \rightarrow \infty$.

Por la complejidad de los desarrollos (5.38-5.40) no ha sido posible demostrar su convergencia. Cualitativamente, los resultados muestran que estos desarrollos convergen en un intervalo pequeño del R_e . Al comparar con los cálculos realizados a lo largo de los años, parece ser que convergen a la solución. Las soluciones aproximadas, obtenidas con el presente método, parecen diferir de los otros cálculos, aún para $R_e \ll 1$. En esta región, los resultados de los AEA se dice son válidos [43] y consistentes con experimentos [62] y otros cálculos numéricos [50]. Sin embargo, los cambios en los desarrollos (5.38-5.40) parecen ir en la dirección adecuada. Por ejemplo, en el caso del coeficiente de arrastre, conforme aumenta N , la expresión (5.44) parece acercarse a los resultados usando AEA [4, 8, 43], truncamiento de series [19] y un ajuste experimental [62]. Es interesante la similitud entre la expresión aproximada del coeficiente de arrastre (5.44) y el resultado obtenido por Liao [44], como se muestra en la gráfica de la derecha en la figura 5.9. Por una lado, las diferencias son más pequeñas que al comparar con los otros resultados y, por el otro lado, la forma en que se presenta la convergencia de los diferentes órdenes de aproximación, en ambos métodos. En su trabajo, Liao [44] reporta que sus resultados son consistentes con los AEA y resultados experimentales, aunque, sus gráficas están reportadas en escala logarítmica y para un intervalo mayor del R_e . Por lo que, a esa escala, las diferencias con los cálculos previos [8, 43, 62] no son apreciables.

Capítulo 6

Conclusiones generales y perspectivas

1 Aspectos generales del método

El problema que se estudia, en 2 y 3D, se sabe que es un problema singular en teoría de perturbaciones, cuando el número de Reynolds es pequeño, y que la singularidad está localizada a una distancia infinita del cuerpo. Así que se propone el cambio de variable (2.1), de tal manera que la nueva coordenada radial toma valores entre 0 y 1. Una de sus cualidades es que el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (2.2-2.6), queda definido en un dominio finito. Por otra parte, el hecho de que la nueva variable (x) esté definida en un intervalo finito, permite hacer desarrollos en series de potencias de x , para los campos de velocidad y presión, válidos en una región suficientemente amplia del dominio. Al truncarse a cierta N , la validez se restringe a $x \ll 1$. Es importante tener en cuenta que, en términos de la distancia al cuerpo (r), x pequeña significa que se está a unos cuantos radios del objeto, lo cual, es una de las razones de la lenta convergencia de los desarrollos (2.7-2.9).

Al proponer a las soluciones como desarrollos en potencias de x , las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a un conjunto de tres relaciones de recurrencia entre sus coeficientes, de los cuales sólo dos son independientes. Las condiciones de frontera resultan en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de orden y grado infinitos, para los coeficientes independientes $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$; éstos son las componentes normales y tangenciales del tensor de esfuerzos, respectivamente, calculadas sobre la superficie (S) del

cuerpo¹. Por lo tanto, si se conocen $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$, todas las características del flujo se pueden calcular en función de estas dos cantidades y sus derivadas. Entonces, si por algún método se calculan $\varphi(\theta; R_e)$ y $\eta(\theta; R_e)$, que satisfacen las condiciones (2.10-2.12), el presente método proporciona un procedimiento iterativo para calcular, con un buen grado de aproximación, los campos de velocidad y presión, la función de corriente, el coeficiente de arrastre, etc. La convergencia lenta de las series en potencias en x se debe a que las condiciones de frontera (2.10) y (2.11) son forzadas a satisfacerse para toda N , de manera que los esfuerzos sobre la superficie del objeto cambian. Uno de los resultados importantes del análisis de convergencia, como función de N , es que los primeros coeficientes de los desarrollos (2.7-2.9) son los dominantes, así que, si los esfuerzos sobre la superficie S son conocidos, sólo es necesario calcular unos cuantos términos en los desarrollos para conseguir resultados, para todas las cantidades, con un buen grado de aproximación. Para tener un problema finito y soluble, los desarrollos para los campos (2.7-2.9) se truncan. Entonces, para cada valor de N , se deben resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, cuyo orden y grado dependen de N . Al aumentar N , los resultados se acercan uniformemente a los cálculos realizados en trabajos anteriores; teóricos [8, 15, 17, 19, 43, 44] y experimentales [56, 57, 62]. Por lo que el problema truncado a N resulta ser una aproximación uniforme a las ecuaciones de Navier-Stokes. Hasta este punto, no parece ser necesario hacer ninguna hipótesis sobre el tamaño del R_e , sin embargo, como el término no lineal en la ecuación de conservación de momento está modulado por el R_e , hay una relación intrínseca entre su tamaño y el orden al que se truncan la series de potencias de x . Desgraciadamente, hasta este momento, no se tiene un mecanismo para cuantificar dicha relación, pues aunque en principio se sabe que se desprecian términos de orden x^{N+1} , al forzar las condiciones de frontera a satisfacerse para toda N , las funciones $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$ cambian, así como todos los demás coeficientes de los desarrollos (2.7-2.9). Estos cambios disminuyen, lentamente, conforme $N \rightarrow \infty$ y para $0 \leq R_e < 1^2$.

Entonces, para obtener buenas aproximaciones a las características del flujo, es necesario resolver para valores grandes de N , aún cuando el R_e es pequeño. Cuando N es relativamente grande (mayor que 10) en cualquier caso, 2 o 3D,

¹En 3D, los esfuerzos tangenciales tienen un factor adicional de $\sin \theta$.

²En 2D el R_e debe ser estrictamente mayor que cero, ya que el problema a $R_e = 0$ y $N \rightarrow \infty$ no se puede resolver.

las ecuaciones diferenciales resultantes son largas y muy complicadas. Así que resulta conveniente buscar soluciones como desarrollos en series truncadas de funciones ortogonales, es decir,

$$\varphi^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \varepsilon_{0l}(R_e) \mathcal{F}_l(\theta), \quad (6.1)$$

$$\eta^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \zeta_{1l}(R_e) \mathcal{F}_l(\theta), \quad (6.2)$$

donde $\mathcal{F}_l(\theta)$ son un conjunto de funciones ortonormales. A partir de las propiedades de ortogonalidad, el problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias se reduce a un sistema completo de ecuaciones algebraicas no lineales. La principal ventaja de este procedimiento, es que las relaciones de recurrencia entre los coeficientes de (2.7-2.9), que involucran funciones de la variable angular y del R_e , se pueden reescribir en términos de otras relaciones recurrentes entre funciones del R_e , nada más. Estas últimas se pueden iterar para valores más grandes de N . El tamaño del sistema de ecuaciones algebraicas depende del número M de términos considerados en los desarrollos en la base ortogonal y, tomando en cuenta que son ecuaciones no lineales, el estudio de sus soluciones resulta complicado en el caso general. La alternativa más simple, es buscar soluciones proponiendo series de potencias del R_e .

El primer resultado que salta a la vista, es que la representación en potencias de R_e no es adecuada para $R_e \geq 1$. Al estudiar el comportamiento de los coeficientes de los desarrollos (6.1) y (6.2), a R_e fijo, se observa que crecen conforme N crece. Por lo tanto, esta representación no presenta información clara acerca del comportamiento asintótico de estas funciones, cuando $N \rightarrow \infty$. El resultado importante es que las series de potencias en R_e muestran que, hasta los casos analizados, los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, tienen al menos una solución físicamente plausible y que el problema truncado es regular, pues las series en potencias de R_e se pueden encontrar a orden arbitrario. Además, cuando el $R_e < 1$, estos desarrollos resultan buenas aproximaciones a las soluciones de los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales. Entonces, la convergencia lenta en los dobles desarrollos en serie, para las coordenadas radial y angular, de los campos de velocidad y presión, tienen dos fuentes. El truncar las series de potencias en x , ya que para los primeros valores de N y a $R_e < 1$, los resultados obtenidos quedan lejos de los reportados por otros autores, cuyos resultados son válidos para esos

valores del R_e . Para $R_e \geq 1$ y a N grande, el problema está en las series de potencias del R_e , ya que parecen tener un radio de convergencia finito y pequeño. Aunque los radios de convergencia no se han calculado, se encuentra que al aumentar el número de términos en las series de potencias del R_e , los resultados no mejoran apreciablemente, para R_e de orden uno.

Los resultados más importantes encontrados en este estudio se pueden resumir en que se tienen expresiones para los campos de velocidad y presión, que parecen converger, lentamente, a los resultados reportados a lo largo de los años. En primera instancia, una de las desventajas del presente método, es que la presión no satisface la condición de frontera en el infinito para ningún valor de N . Sin embargo, esta situación es una consecuencia de truncar las series en potencias de x , pues aunque el campo de velocidad es uniforme en $x = 1$ ($r \rightarrow \infty$) su validez está restringida a $x \ll 1$. El forzar las condiciones (2.10) y (2.11) a satisfacerse para toda N , es un truco que permite encontrar formas aproximadas de los esfuerzos calculados sobre la superficie del cuerpo. Al comparar los resultados aquí obtenidos con otras metodologías, se encuentra que, al cambiar el valor de N , las funciones $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$ parecen ser convergentes al valor del tensor de esfuerzos, en la superficie del objeto, que es solución al problema para $N \rightarrow \infty$. La condición para el campo de presión se satisface para las soluciones del problema en el límite $N \rightarrow \infty$.

Es importante recalcar que los resultados encontrados dentro del análisis de convergencia de los primeros dos desarrollos, fue posible gracias al uso de la representación en serie de potencias del R_e . Esto se debe a que fue relativamente fácil, desde el punto de vista algebraico, realizar un método iterativo y encontrar resultados para una amplio rango de valores de N y M .

2 Las diferencias entre 2D y 3D.

Matemáticamente, las diferencias entre el flujo en 2 y 3D, se traducen en una simetría diferente en las ecuaciones de movimiento (2.2-2.6). En el caso de la esfera, el problema es más complicado, pues los coeficientes de las ecuaciones (2.34-2.36) son funciones de θ y de x . En el caso del cilindro, son funciones sólo de x . Este hecho se ve reflejado en las relaciones de recurrencia para los coeficientes de los desarrollos (2.7-2.9) y, por lo tanto, en las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer $\varphi^{(N)}(\theta; R_e)$ y $\eta^{(N)}(\theta; R_e)$ a cada orden N . En el caso bidimensional, se deben resolver ecuaciones

diferenciales, no lineales, con coeficientes constantes. En cambio, en tres dimensiones, los coeficientes de las ecuaciones diferenciales (2.44) y (2.45) son funciones de la variable de integración ($\mu = \cos \theta$). La consecuencia es que en el caso de la esfera, el número de términos en cada ecuación crece mucho más rápido que en el caso del cilindro, como se muestra en el apéndice A. Por ello, en la práctica, el problema truncado a orden N es mucho más difícil de encontrar en 3D, cuando N es grande. En este trabajo, el valor máximo de N utilizado para el cilindro, es tres veces mayor que la N máxima considerada en el caso de la esfera.

En 2D el problema de resolver relaciones de recurrencia entre los coeficientes que son funciones de la variable angular y del R_e (las expresiones (2.20-2.22)), se redujo a relaciones de recurrencia entre números, nada más. Claramente, es posible hacer lo mismo para el caso en 3D con las expresiones (2.41-2.43), sin embargo, este caso es más complicado y aún no se han realizado los cálculos correspondientes. La razón por la que se estudió con mayor detalle el caso bidimensional, es que las ecuaciones resultantes al truncar a orden N son más simples, y se pueden analizar las propiedades de las series en potencias de x . De este estudio, se encontró que los desarrollos en potencias de R_e no son una representación adecuada para $R_e \geq 1$, por lo que, en el caso tridimensional, no parece ser un camino recomendable para mejorar la aproximación. Los pocos cálculos realizados en esa dirección, son simplemente para identificar propiedades generales de los desarrollos (2.7-2.9), en ambos casos 2 y 3D.

Otra de las claras diferencias encontradas es el caso $R_e = 0$, que simplemente refleja el hecho, bien conocido, que las ecuaciones de Stokes en 2D no se pueden resolver. Lo cual, en este caso, tiene como consecuencia que los primeros valores de N , representan pobres aproximaciones para $R_e \ll 1$. Como en 3D la solución para $R_e = 0$ sí se puede encontrar, el caso de la esfera converge más rápido cuando el R_e es muy pequeño, aunque, todo indica que la convergencia, en función del orden al que se truncan las series de potencias, sigue siendo lenta. El problema en 2D es que en el límite cuando $R_e \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, el campo de velocidades es uniforme en el infinito pero la presión, en esa región, crece con N y se hace infinita cuando $N \rightarrow \infty$. Este problema se sabe que es una consecuencia de las series de potencias en R_e . Si se utiliza una representación alternativa, que reproduzca las propiedades de las soluciones a los sistemas de ecuaciones algebraicas (3.24) y (3.25), al tomar el límite $R_e \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, es posible obtener una solución consistente con las ecuaciones de movimiento y las condiciones a la frontera.

3 Perspectivas

Uno de los aspectos evidentes del método propuesto es que, dado que las series en potencias de x convergen lentamente, los cálculos necesarios para obtener resultados pueden ser muy largos y tediosos, pues hay que tomar valores de N grandes. En principio, para calcular el problema a un orden N , sólo es necesario iterar las relaciones de recurrencia (2.20-2.22) para 2D o (2.41-2.43) en 3D, encontrar los coeficientes de los desarrollos (2.7-2.9) y resolver las ecuaciones diferenciales resultantes. Debido a la no linealidad de las ecuaciones de movimiento, el número de términos en cada ecuación crece rápidamente. Los cálculos, evidentemente, se tienen que realizar usando una computadora y programas capaces de hacer cálculos en forma simbólica, en este caso Mathematica 4. Entonces, por un lado, las ecuaciones resultantes pueden ser muy largas y complicadas y es difícil estudiarlas analíticamente. Por el otro lado, puesto que el cálculo y el retener en la memoria de la computadora los resultados de cada iteración de las relaciones de recurrencia, la memoria RAM de la computadora se satura rápidamente. Por lo tanto, a partir de cierto valor de N no es posible plantear el problema; en el caso del cilindro el problema se puede calcular hasta $N = 20$ y para la esfera hasta $N = 10$, aproximadamente. Así que resulta más conveniente desarrollar los coeficientes de (2.7-2.9) en series de funciones ortogonales, que se denotan de la siguiente manera:

$$a_n(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \alpha_{nl}(R_e) \mathcal{F}_l(\theta), \quad (6.3)$$

$$b_n(\theta; R_e) = W_D(\theta) \sum_{l=0}^M \zeta_{nl}(R_e) \mathcal{F}_l(\theta), \quad (6.4)$$

$$c_n(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \varepsilon_{nl}(R_e) \mathcal{F}_l(\theta), \quad (6.5)$$

donde D es la dimensión, $W_2 = 1$, $W_3 = \sin \theta$ y $\mathcal{F}_l(\theta)$ es un conjunto de funciones ortonormales. De los desarrollos anteriores y propiedades de ortogonalidad, se pueden encontrar nuevas relaciones de recurrencia para los coeficientes α_{nl} , ζ_{nl} y ε_{nl} . De manera que se calculan directamente las ecuaciones algebraicas, no lineales, sin pasar por las ecuaciones diferenciales ordinarias. En el flujo alrededor de un cilindro, se obtuvieron las relaciones de recurrencia para los coeficientes de (6.3-6.5), y se encontró que tienen la

ventaja de poderse iterar para valores más grandes de N . Entonces, para poder obtener resultados a N grandes, en el caso del flujo alrededor de una esfera, parece ser conveniente realizar un cálculo análogo.

Ya que se tiene una forma iterativa de construir el problema algebraico, se requiere un procedimiento iterativo para resolverlo. En este trabajo se utilizaron desarrollos en potencias de R_e para los coeficientes de los desarrollos (6.3-6.5). La principal ventaja, que se estudió ampliamente en 2D, es que se pueden encontrar relaciones de recurrencia entre números puros, así que se pueden hacer cálculos para N relativamente grandes. Sin embargo, las series de potencias en R_e convergen lentamente, sobretodo a N grandes y para $R_e > 1$, y no resulta una representación adecuada. El hecho importante, que es usar una nueva representación, es que ésta permita construir relaciones de recurrencia entre coeficientes numéricos, pues tienen la ventaja de poderse iterar para valores más grandes de N . Por ejemplo, con las relaciones (3.34-3.36), en el caso en 2D, se pueden encontrar resultados para $3 \leq N \leq 30$.

Un primera alternativa, es proponer soluciones como cocientes de polinomios en el R_e para los coeficientes de los desarrollos (6.1) y (6.2). Para un valor fijo de N y M , se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, que se denotan simbólicamente de la siguiente manera

$$F_l(\varepsilon_{0l}, \zeta_{11}, \dots, \varepsilon_{0M}, \zeta_{1M}) = A_l, \quad (6.6)$$

donde $l = 1, \dots, 2M$ y A_l constantes. La idea es proponer a las soluciones la siguiente forma:

$$\varepsilon_{0l} = \frac{p_l(R_e)}{q_l(R_e)}, \quad (6.7)$$

$$\zeta_{1l} = \frac{\tilde{p}_l(R_e)}{\tilde{q}_l(R_e)}, \quad (6.8)$$

con

$$\begin{Bmatrix} p_l(R_e) \\ p_l(\tilde{R}_e) \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^m \begin{Bmatrix} p_{lj} \\ \tilde{p}_{lj} \end{Bmatrix} R_e^j \quad (6.9)$$

$$\begin{Bmatrix} q_l(R_e) \\ q_l(\tilde{R}_e) \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{m'} \begin{Bmatrix} q_{lj} \\ \tilde{q}_{lj} \end{Bmatrix} R_e^j. \quad (6.10)$$

Los límites en las sumas de las expresiones anteriores, dependen de l , N y M . Al sustituir los coeficientes (6.7) y (6.8) en las ecuaciones algebraicas,

se debe encontrar una manera consistente de obtener sistemas completos de ecuaciones algebraicas entre los coeficientes en (6.9) y (6.10). En el caso que se tenían soluciones en series de potencias de R_e , el conjunto de ecuaciones proviene de satisfacer las ecuaciones (6.6) a cada orden en R_e^n . De donde se conocen propiedades generales de los desarrollos, en serie de potencias, de los coeficientes $\varepsilon_{0l}(R_e)$ y $\zeta_{1l}(R_e)$ alrededor de $R_e = 0$. Esto puede dar información adicional sobre los coeficientes de los desarrollos (6.9) y (6.10). Esta información se puede obtener a partir de estudiar las propiedades de los aproximantes de Padé [59, 60], que se construyen a partir de las series de potencias en R_e . Para construir las ecuaciones algebraicas para los coeficientes de los desarrollos (6.9) y (6.10), la idea es quitar los denominadores de las ecuaciones algebraicas (6.6) y coleccionar potencias en el R_e . El número de ecuaciones depende de los límites (m, m') en las sumas en las expresiones (6.9) y (6.10) y del grado de las ecuaciones algebraicas. Por lo tanto, de las propiedades de los aproximantes de Padé y escogiendo adecuadamente m y m' , es posible encontrar sistemas de ecuaciones completos para los coeficientes de los desarrollos (6.9) y (6.10).

Este procedimiento está basado en los resultados obtenidos al estudiar el flujo alrededor del cilindro en la aproximación de Oseen, utilizando el presente método (ver apéndice B). En este caso, las soluciones son de la forma (6.9) y (6.10), y se encuentra que, a N y M fijas, $q(R_e) = \tilde{q}(R_e)$ y m' es constante. Además, los coeficientes a l fija, tienen $l - 1$ raíces en $R_e = 0$ y sus series de Taylor tienen las mismas propiedades de paridad que las encontradas en el caso no lineal, lo cual, se puede utilizar como punto de partida para hacer estudios preliminares del caso no lineal. Uno de los inconvenientes es que, dado que estas expresiones son aproximaciones, no parece fácil determinar a qué grado reproducen las propiedades algebraicas de las soluciones del problema a N y M fijas.

Otra posibilidad es introducir un parámetro en la base ortogonal, que ayude a aumentar la velocidad de convergencia de las series en potencias en R_e , es decir, proponer como solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para N fija, desarrollos en funciones ortonormales de la siguiente forma:

$$\varphi^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \varepsilon_{0l}(R_e) \mathcal{F}_l(h(R_e), \theta), \quad (6.11)$$

$$\eta^{(N)}(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^M \zeta_{1l}(R_e) \mathcal{F}_l(h(R_e), \theta). \quad (6.12)$$

Como las funciones $\mathcal{F}_i(h, \theta)$ son ortogonales, deben satisfacer la condición

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \mathcal{F}_i(h, \theta) \mathcal{F}_j(h, \theta) d\theta = \delta_{ij}, \quad (6.13)$$

Los límites de integración dependen del conjunto de funciones que se utilizan, su condición de ortogonalidad y del parámetro $h(R_e)$. Claramente, el punto principal es construir las funciones $\mathcal{F}_i(h, \theta)$, a partir de las funciones trigonométricas y los polinomios de Legendre, para 2 y 3D respectivamente. A partir de las expresiones (6.11) y (6.12), de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de la condición (6.13), se construye un sistema de ecuaciones algebraicas para los coeficientes ε_{0l} y ζ_{1l} , que en este caso dependen del R_e y de $h(R_e)$. La idea principal de este procedimiento, es estudiar la libertad adicional de escoger el parámetro $h(R_e)$ y, después, estudiar las ecuaciones resultantes para un valor fijo de h ; utilizando series en potencias del R_e .

Apéndice A

Detalles algebraicos

1 La transformación de coordenadas

En esta sección se presentan los detalles para realizar la transformación en la coordenada radial dada por

$$x = 1 - \frac{1}{r}, \quad (\text{A.1})$$

que, como sólo afecta la distancia al objeto, tiene las mismas propiedades en 2 y 3D. La primera derivada parcial respecto a r sigue la siguiente regla de transformación

$$\frac{\partial}{\partial r} = (1 - x)^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{A.2})$$

mientras que las derivadas parciales respecto a las demás variables permanecen inalteradas.

1.1 Coordenadas cilíndricas

Los operadores diferenciales, necesarios para escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , son

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}, \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \end{aligned}$$

donde $f = f(r, \theta)$. Cuando se hace el cambio de variable (A.1) y se utiliza la regla de transformación (A.2) los operadores diferenciales en las coordenadas (x, θ, z) son

$$\begin{aligned}\nabla_a f &= (1-x)^2 \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}, \\ \nabla_a^2 f &= (1-x)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x) \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right],\end{aligned}$$

donde $f = f(x, \theta)$. A partir de las expresiones anteriores, junto con las ecuaciones diferenciales (2.2) y (2.3), se obtiene el sistema de ecuaciones dado por (2.13-2.15).

1.2 Coordenadas esféricas

En el caso de usar las coordenadas esféricas (r, θ, φ) , los operadores diferenciales, aplicados a una función de la forma $f = f(r, \theta)$, están dados por

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}, \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right),\end{aligned}$$

entonces, al hacer el cambio de variable (A.1), los operadores diferenciales en las nuevas coordenadas (x, θ, φ) toman la forma

$$\begin{aligned}\nabla_a f &= (1-x)^2 \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}, \\ \nabla_a^2 f &= (1-x)^2 \left[(1-x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right].\end{aligned}$$

De manera similar al caso del cilindro, al sustituir las expresiones anteriores en (2.2) y (2.3), se obtienen las ecuaciones de movimiento para el caso tridimensional, dadas por (2.34-2.36).

1.3 Las relaciones de recurrencia para a_n , b_n y c_n

Cuando los desarrollos

$$u_r(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta; R_e) x^n, \quad (\text{A.3})$$

$$u_\theta(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta; R_e) x^n, \quad (\text{A.4})$$

$$P^*(x, \theta; R_e) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta; R_e) x^n. \quad (\text{A.5})$$

se sustituyen, por ejemplo, en la ecuación (2.15) que corresponde a la ecuación de continuidad, y se coleccionan potencias de x , se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n + b'_n) x^n = 0, \quad (\text{A.6})$$

por lo tanto

$$(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n + b'_n = 0. \quad (\text{A.7})$$

Reacomodando términos en la expresión anterior, se encuentra el coeficiente a_{n+1} en función de los coeficientes anteriores a_n y b_n , que mediante una transformación en el índice corresponde a la relación de recurrencia (2.20).

Para el caso de las dos componentes de la ecuación de momento, el análisis es análogo que en el caso anterior. Sin embargo, debido a que las ecuaciones son no lineales, se tienen términos como productos de series infinitas. Por ejemplo, al sustituir los desarrollos para los campos en la ecuación (2.14) se obtienen términos de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m x^{n+m}. \quad (\text{A.8})$$

Este tipo de términos se pueden escribir como producto de una suma infinita por una finita, simplemente reordenando la suma de manera que el polinomio quede ordenado en potencias de x , de la menor a la mayor. Para ello, se hace el cambio $n = n' - m$ con lo que se obtiene

$$\sum_{n'=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n'} a_{n'-m} b_m x^{n'}. \quad (\text{A.9})$$

Una vez que se han reescrito los términos no lineales, como en el caso anterior, la componente angular de la ecuación de momento queda como

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_e \sum_{m=1}^{n-1} b_m (b'_{n-m} - (m-1)a_{n-m} + m a_{n-p+1}) \right. \\ & - b''_n + b''_{n-1} + (n+1)(n+2)b_{n+2} + (3n+1)(n+1)b_{n+1} \\ & \left. - (3n^2 - n - 1)b_n + n(n-2)b_{n-1} - 2(a'_n - a'_{n-1}) \right) x^n = 0, \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

N	2D		3D	
	ec. (2.23)	ec. (2.24)	ec. (2.44)	ec. (2.45)
4	3 (1)	5 (2)	11 (1)	10 (2)
5	6 (2)	7 (2)	24 (2)	19 (2)
6	9 (2)	12 (2)	45 (2)	39 (2)
7	16 (2)	19 (3)	83 (2)	72 (3)
8	25 (3)	29 (3)	145 (3)	130 (3)
9	39 (3)	42 (3)	250 (3)	213 (3)
10	56 (3)	66 (4)	394 (3)	372 (4)

Tabla A.1: Número de términos en las ecuaciones diferenciales ordinarias, como función de N . El número entre paréntesis es el grado de la ecuación.

entonces, para que la ecuación anterior se satisfaga, cada coeficiente debe ser cero. De manera análoga al caso de la ecuación de continuidad, reareglando términos y haciendo una traslación en el índice, se obtiene la relación de recurrencia (2.21). Para la componente radial de la ecuación de momento, ec. (2.14), las cosas se desarrollan de forma similar. Los ejemplos anteriores, corresponden al caso del flujo alrededor del cilindro. En el caso de la esfera, el procedimiento es análogo.

2 Los cálculos

La principal diferencia entre el problema en 2D y en 3D, resalta al iterar las relaciones de recurrencia en cada caso. Cuando se comparan las ecuaciones diferenciales ordinarias, para diferentes valores de N (ver tabla A.1), se encuentra que, conforme aumenta N , el número de términos en cada ecuación aumenta rápidamente. Al comparar, a N fija, el caso en 2D con el de 3D, también se ve que en 3D el número de términos crece mucho más rápido. Esto se debe a que, en 3D, los coeficientes de las ecuaciones diferenciales (2.44) y (2.45) no son constantes y, conforme se aumenta N , cambian; crecen en tamaño y se hacen más complicados. A causa de la velocidad a la que crece el número de términos, en las ecuaciones diferenciales que hay que resolver, las restricciones computacionales se hacen notar rápidamente; en cualquiera de los dos casos. Es por esto que es necesario encontrar alternativas para evitar construir las ecuaciones diferenciales directamente, como lo son estudiar las

propiedades de los desarrollos de las soluciones en alguna base de funciones ortonormales.

Los valores entre paréntesis en la tabla A.1, muestran el grado de cada ecuación diferencial. En el caso en que $N = 3$, las ecuaciones diferenciales son lineales. Para $N = 5$ y $N = 6$, por ejemplo, se tiene que las dos ecuaciones diferenciales contienen términos cuadráticos. Para $N = 8$ y $N = 9$, las ecuaciones son de tercer grado, etc. En el caso del cilindro, en donde se pueden encontrar las ecuaciones para valores más grandes de N , se observa el mismo patrón.

Apéndice B

La aproximación de Oseen

El método de truncamiento de series se aplica a las ecuaciones de movimiento en la aproximación de Oseen, para el problema en 2D. Como las ecuaciones diferenciales parciales en este caso son lineales, muchos de los cálculos se pueden hacer analíticamente y así estudiar algunas propiedades de las soluciones. Desgraciadamente, aunque el problema es lineal, resulta que es suficientemente complicado y no ha sido posible hacer cálculos para valores grandes del orden al que se truncan las series de potencias en x . Sin embargo, el conjunto de ecuaciones algebraicas que se deben resolver, para los coeficientes de Fourier, presentan soluciones en cocientes de polinomios del R_e , lo cual puede utilizarse como punto de partida para proponer una nueva representación para los coeficientes de los desarrollos (3.16) y (3.17), para el caso no lineal.

1 Las ecuaciones linealizadas de Oseen

Cuando se utilizan las ecuaciones de Oseen, en vez de las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones de movimiento, en términos de las variables (x, θ) , son

$$\begin{aligned} R_e \left((1-x) \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \sin \theta u_\theta \right) &= -(1-x) \frac{\partial P}{\partial x} \\ &+ (1-x)^3 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + (1-x) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - (1-x)^2 \frac{\partial u_r}{\partial x} \\ &- 2(1-x) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1-x) u_r, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$R_e \left((1-x) \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \sin \theta u_r \right) = -\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + (1-x)^3 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + (1-x) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - (1-x)^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \\ + 2(1-x) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - (1-x) u_\theta, \quad (\text{B.2})$$

$$(1-x) \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r = 0. \quad (\text{B.3})$$

Quando se sustituyen los desarrollos (2.7-2.9), para los campos de velocidad y presión, en las ecuaciones anteriores y después de haber coleccionado términos con la misma potencia de x , se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$a_n = \frac{1}{n} \left((n-2)a_{n-1} - b'_{n-1} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$b_n = \frac{1}{n(n-1)} \left(R_e \left((n-1)b_{n-1} - (n-2)b_{n-2} \right) \cos \theta - R_e(b'_{n-2} - a_{n-2}) \sin \theta - 2a'_{n-2} + 2a'_{n-3} - b''_{n-2} + b''_{n-3} + (3n-5)(n-1)b_{n-1} - (3n^2 - 13n + 13)b_{n-2} + (n-2)(n-4)b_{n-3} + c'_{n-2} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$c_n = \frac{1}{n} \left(R_e \left((n-1)a_{n-1} - na_n \right) \cos \theta + R_e(a'_{n-1} - b_{n-1}) \sin \theta + a''_{n-1} - a''_{n-2} + n(n+1)a_{n+1} - n(3n-2)a_n + (3n^2 - 7n + 3)a_{n-1} - (n-1)(n-3)a_{n-2} - 2b'_{n-1} + 2b'_{n-2} + (n-1)c_{n-1} \right). \quad (\text{B.6})$$

donde las primas representan derivadas con respecto a θ . Las condiciones a la frontera, en el lenguaje de los coeficientes a_n , b_n y c_n , están dadas por las expresiones (2.23) y (2.24). De manera análoga al caso no lineal, estas relaciones de recurrencia tienen dos coeficientes independientes, $c_0(\theta)$ y $b_1(\theta)$ ¹. Por lo tanto, en este caso; las condiciones de frontera resultan en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, cuyos coeficientes son funciones de θ y de R_e .

Por ejemplo si se toma el caso $N = 3$, las ecuaciones (2.23) y (2.24) toman la forma

$$R_e \sin \theta \eta_o(\theta) - (5 + R_e \cos \theta) \eta'_o(\theta) - \varphi''_o(\theta) = 6 \cos \theta, \quad (\text{B.7})$$

¹De igual forma que se hizo en el caso no lineal, estos coeficientes se renombran como $\varphi_o(\theta)$ y $\eta_o(\theta)$ respectivamente.

$$(12 + 7R_e \cos \theta + R_e^2 \cos^2 \theta) \eta_o(\theta) - R_e \sin \theta \eta_o'(\theta) - 2\eta_o''(\theta) + (7 + R_e \cos \theta) \varphi_o'(\theta) = -6 \sin \theta. \quad (\text{B.8})$$

Al comparar las ecuaciones anteriores con las obtenidas en el caso no lineal, es claro que en el caso de Oseen, los sistemas de ecuaciones diferenciales (2.23) y (2.24) contienen al número de Reynolds para toda $N > 1$, a diferencia del caso no lineal, donde la dependencia en R_e sucede a partir de $N = 4$; que es el primer problema no lineal. Sin embargo, cuando $R_e = 0$ los sistemas de ecuaciones en los dos casos coinciden. Si $N = 4$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$2\eta_o^{(3)}(\theta) + R_e \sin \theta \eta_o''(\theta) + 2R_e (5 + R_e \cos \theta) \sin \theta \eta_o(\theta) - (27 + 9R_e \cos \theta + R_e^2 \cos^2 \theta) \eta_o'(\theta) + R_e \sin \theta \varphi_o'(\theta) - (10 + R_e \cos \theta) \varphi_o'(\theta) = 24 \cos \theta, \quad (\text{B.9})$$

$$(60 + 49R_e \cos \theta + 13R_e^2 \cos^2 \theta + R_e^3 \cos^3 \theta + R^2 \sin^2 \theta) \eta_o(\theta) - R_e (11 + 2R_e \cos \theta) \sin \theta \eta_o'(\theta) + \varphi_o'(\theta) + 13R_e \cos \theta \varphi_o'(\theta) + R_e^2 \cos^2 \theta \varphi_o'(\theta) - 20\eta_o''(\theta) - 3R_e \cos \theta \eta_o''(\theta) - R_e \sin \theta \varphi_o''(\theta) - 2\varphi_o^{(3)}(\theta) = -24 \sin \theta. \quad (\text{B.10})$$

Análogamente al caso no lineal, cuando se incrementa N , el orden de las ecuaciones diferenciales se incrementa como $N - 1$. Aunque el problema es lineal para toda N , las ecuaciones diferenciales aumentan en tamaño y complejidad, por lo que son difíciles de encontrar. El número de términos en cada ecuación crece más rápido que en el caso no lineal, debido a que en este caso los coeficientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias no son constantes.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se resuelven usando series de Fourier, de manera que se proponen soluciones de las forma

$$a_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{nl}(R_e) \cos(l\theta), \quad (\text{B.11})$$

$$b_n(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_{nl}(R_e) \sin(l\theta), \quad (\text{B.12})$$

$$c_n(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{nl}(R_e) \cos(l\theta), \quad (\text{B.13})$$

que, después de haberse sustituido en las relaciones de recurrencia (B.4-B.6), se obtiene un nuevo conjunto de relaciones entre los coeficientes α_{nl} , ζ_{nl} y ε_{nl}

que se escriben a continuación:

$$\alpha_{nl} = \frac{1}{n} ((n-2)\alpha_{n-1,l} - l\zeta_{n-1,l}), \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{nl} = \frac{1}{n(n-1)} & \left(\frac{1}{2} R_e ((n-1)(\zeta_{n-1,l+1} + \zeta_{n-1,l-1}) - (n+l-3)\zeta_{n-2,l-1} \right. \\ & - (n-l-3)\zeta_{n-2,l+1} + \alpha_{n-2,l-1} - \alpha_{n-2,l+1}) + 2l(\alpha_{n-2,l} - \alpha_{n-3,l}) \\ & + l^2(\zeta_{n-2,l} - \zeta_{n-3,l}) + (3n-5)(n-1)\zeta_{n-1,l} - (3n^2 - 13n + 13)\zeta_{n-2,l} \\ & \left. (n-2)(n-4)\zeta_{n-3,l} - l\varepsilon_{n-2,l} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nl} = \frac{1}{n} & \left(\frac{1}{2} R_e ((n-l-2)\alpha_{n-1,l+1} + (n+l-2)\alpha_{n-1,l-1} \right. \\ & - n(\alpha_{n,l+1} + \alpha_{n,l-1}) + \zeta_{n-1,p+1} - \zeta_{n-1,l-1}) \\ & - l^2(\alpha_{n-1,l} - \alpha_{n-2,l}) + n(n+1)\alpha_{n+1,p} - n(3n-2)\alpha_{nl} \\ & + (3n^2 - 7n + 3)\alpha_{n-1,l} - (n-1)(n-3)\alpha_{n-2,l} \\ & \left. - 2l(\zeta_{n-1,l} - \zeta_{n-2,l}) + (n-1)\varepsilon_{n-1,l} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Para determinar el número de coeficientes independientes, asociados con las relaciones de recurrencia anteriores, hay que tomar en cuenta que las relaciones de recurrencia (B.4-B.6) tienen dos coeficientes independientes que son funciones del ángulo y de R_e , a saber $\varphi_o(\theta; R_e)$ y $\eta_o(\theta; R_e)$, y sus desarrollos en serie de Fourier son de la forma

$$\varphi_o(\theta; R_e) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{0l}(R_e) \cos(l\theta), \quad (\text{B.17})$$

$$\eta_o(\theta; R_e) = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_{1l}(R_e) \sin(l\theta), \quad (\text{B.18})$$

por lo que, para las nuevas relaciones de recurrencia, los coeficientes independientes son ε_{0l} y ζ_{1l} , para $l = 1, \dots$. Las condiciones a la frontera, dadas por las ecuaciones (2.23) y (2.24), en términos de los coeficientes de Fourier resultan en las siguientes expresiones

$$\sum_{n=1}^N \alpha_{nk} = \delta_{1k}, \quad (\text{B.19})$$

$$\sum_{n=1}^N \zeta_{nk} = -\delta_{1k}. \quad (\text{B.20})$$

Cuando los coeficientes α_{nk} y ζ_{nk} se escriben en función de los coeficientes independientes, las expresiones anteriores resultan, para N fija, en un sistema

infinito de ecuaciones algebraicas lineales, para los coeficientes desconocidos ε_{0k} y ζ_{1k} . En la práctica, las series de Fourier se deben truncar para tener sistemas de ecuaciones finitos.

Aquí, es importante notar que, en las relaciones de recurrencia (B.14-B.16), los coeficientes no sólo dependen de coeficientes anteriores, sino también de coeficientes posteriores. En otras palabras, los coeficientes con subíndices (nk) pueden depender de coeficientes con $(n-j, k-1)$ y $(n-j, k+1)$, con $j \leq n$. Por lo que, si las series de Fourier se truncan a cierta M , es necesario suponer que los coeficientes ε_{0k} y ζ_{1k} , para $k > M$, son cero. De otra manera, no es posible encontrar un sistema de ecuaciones completo, es decir, que el número de ecuaciones equipare al número de incógnitas.

Para ejemplificar el hecho anterior, en el caso de $N = 3$, las primeras ecuaciones algebraicas son

$$-R_e \zeta_{12} + 2(\varepsilon_{01} - 5\zeta_{11}) = 12, \quad (\text{B.21})$$

$$-10 \zeta_{12} - R_e (\zeta_{11} + \zeta_{13}) + 4\varepsilon_{02} = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$R_e^2 (2\zeta_{11} + \zeta_{13}) + 4(14\zeta_{11} - 7\varepsilon_{01}) \\ + R_e (18\zeta_{12} - 4\varepsilon_{02}) = -24, \quad (\text{B.23})$$

$$80\zeta_{12} + R_e^2 (2\zeta_{12} + \zeta_{14}) - 56\varepsilon_{02} \\ + 2R_e (6\zeta_{11} + 10\zeta_{13} - \varepsilon_{01} - 3\varepsilon_{03}) = 0, \quad (\text{B.24})$$

que resultan al truncar en $M = 2$ las expresiones (B.11) y (B.12). Claramente las ecuaciones anteriores tienen más incógnitas que ecuaciones, de manera que para resolverlas hay que hacer suposiciones adicionales sobre los coeficientes con $k > 2$. Si se calculan más condiciones, a partir de (B.19) y (B.20), para valores de k mayores, el número de ecuaciones se incrementa, así como el número de incógnitas. Por lo tanto, la única manera de resolverlo, es suponer que, si las series (B.11) y (B.12) se truncan a un orden M , los coeficientes de Fourier para $k > M$ son cero. Es de resaltar que en el caso no lineal, esto no es necesario, pues las relaciones de recurrencia para los coeficientes de Fourier sólo dependen de coeficientes anteriores.

1.1 Algunos resultados generales

Cuando las series de Fourier para los coeficientes a_n , b_n y c_n son truncadas a orden M , se obtiene un sistema de $2M$ ecuaciones algebraicas para los coeficientes ε_{0k} y ζ_{1k} ; con $k = 1, \dots, M$. En vista que en este caso las

ecuaciones algebraicas son lineales, se pueden resolver analíticamente. Sin embargo, debido al creciente tamaño de las ecuaciones con N , en la práctica, sólo se han podido obtener resultados hasta $M = 4$ y $N = 10^2$.

Los resultados para los primeros valores de N , muestran que los coeficientes son funciones de la forma

$$\varepsilon_{0k} = \frac{f_{0k}(R_e)}{g(R_e)}, \quad (\text{B.25})$$

$$\zeta_{1k} = \frac{f_{1k}(R_e)}{g(R_e)}, \quad (\text{B.26})$$

donde

$$f_{ik}(R_e) = R_e^{k-1} \sum_{j=0}^{\mathcal{M}} \xi_{ikj} R_e^{2j}, \quad (\text{B.27})$$

$$g(R_e) = \sum_{j=0}^{\mathcal{M}'} \lambda_j R_e^{2j}, \quad (\text{B.28})$$

con $i = 0, 1$ y $k = 1, \dots, M$. Los límites superiores en las sumas anteriores, \mathcal{M} y \mathcal{M}' , son funciones de N , M y el índice k . Aunque estas dependencias no se han podido encontrar de forma general, resulta que los coeficientes de las series de Fourier (B.17) y (B.18) de orden k , tienen $k - 1$ raíces en $R_e = 0$. Cuando se calculan los desarrollos en serie de Taylor de los coeficientes (B.25) y (B.26) se encuentra que tienen las mismas propiedades que los desarrollos (4.5) y (4.6) para el caso no lineal. En otras palabras, están compuestos de potencias pares o impares, dependiendo del valor de k , y tienen $k - 1$ raíces en $R_e = 0$.

Como se mencionó con anterioridad, las expresiones en este caso crecen más rápido que en el caso no lineal. Lo cual se debe a que los coeficientes en las ecuaciones diferenciales ordinarias no son constantes, de manera que al cambiar el orden al que se truncan (N) las series en potencias de x , el número de términos en cada ecuación crece rápidamente conforme N crece. Por ejemplo, para $N = 4$, la ecuación más larga, para el caso no lineal, contiene 6 términos. En cambio, al usar las ecuaciones linealizadas de Oseen, la ecuación más larga contiene 15 términos. Por lo que los resultados expuestos arriba se han basado en los pocos cálculos que se han podido realizar.

²En este caso, los cálculos también se realizaron usando Mathematica 4.0.

Apéndice C

Soluciones numéricas

1 El método de disparo

En esta sección se describe el método numérico utilizado para resolver las ecuaciones (2.23) y (2.24)¹. Con el fin de describir el método con detalle, se toma como ejemplo el caso $N = 4$ y finalmente se discute el caso general.

Entonces, se busca resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$-\frac{5}{12}\phi'(\theta) + \frac{1}{12}\eta'''(\theta) - \frac{27}{24}\eta'(\theta) = \cos \theta, \quad (\text{C.1})$$

$$-\frac{1}{12}\phi''(\theta) + \frac{47}{24}\phi(\theta) - \frac{5}{6}\eta''(\theta) + \frac{15}{6}\eta(\theta) + \frac{R_e}{24}\eta(\theta)\eta'(\theta) = -\sin \theta, \quad (\text{C.2})$$

donde $\phi(\theta) = \varphi'(\theta)$, con las condiciones de frontera

$$\{\eta(0), \eta(\pi), \eta''(0)\} = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\{\phi(0), \phi(\pi)\} = 0. \quad (\text{C.4})$$

La idea fundamental del método utilizado, es transformar el problema de condiciones de frontera, a un problema con condiciones iniciales [20]. El conjunto de valores iniciales necesarios para resolver las ecuaciones (C.1) y (C.2) es de la forma

$$\{\eta(0), \eta''(0), \phi(0)\} = 0,$$

¹Este método fue propuesto originalmente por R. Soto y R. Peralta [20].

$$\begin{aligned}\eta'(0) &= x. \\ \phi'(0) &= y.\end{aligned}$$

donde x y y son constantes. Si las ecuaciones diferenciales se resuelven para valores arbitrarios de x y de y , se tiene, en el caso más general, que

$$\begin{aligned}\eta(\pi) &= F_1(x, y), \\ \phi(\pi) &= F_2(x, y),\end{aligned}$$

por tanto, para recuperar las condiciones de frontera (C.3) y (C.4), es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$F_1(a, b) = 0, \quad (C.5)$$

$$F_2(a, b) = 0. \quad (C.6)$$

Las ecuaciones anteriores se resuelven, para a y b , usando el método del gradiente iterativo, en el cual el término de la $(n+1)$ -ésima iteración está dado por

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n - [\text{grad}\vec{H}(\vec{r}_n)]^{-1}\vec{H}(\vec{r}_n), \quad (C.7)$$

donde

$$\begin{aligned}\vec{r}_n &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \\ \vec{H}(\vec{r}_n) &= \begin{pmatrix} F_1(x_n, y_n) \\ F_2(x_n, y_n) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y

$$\text{grad}\vec{H}(\vec{r}_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (C.8)$$

Entonces, a partir de integrar las ecuaciones (C.1) y (C.2), para un conjunto de condiciones iniciales r_j , se calculan \vec{H} , $\text{grad}\vec{H}$ y, a partir de (C.7), se obtiene un nuevo conjunto de condiciones iniciales r_{j+1} . La convergencia del método depende de la condición inicial, de la precisión en el cálculo de $\text{grad}\vec{H}$ y de la no linealidad de las ecuaciones. Para escoger las condiciones iniciales, se utilizan las expresiones (4.7-4.8), ya que éstas representan soluciones aproximadas a las ecuaciones (2.23) y (2.24). Una vez que se han encontrado las

condiciones iniciales correspondientes, que reproducen aproximadamente las condiciones de frontera, para un R_e fijo, se procede a integrar las ecuaciones (2.23) y (2.24). Para el caso de N arbitraria, la diferencia es que el número de condiciones iniciales por determinar aumenta con N , así como el grado de las ecuaciones diferenciales.

1.1 Los resultados

La integración en todos los casos, se realizó usando Mathematica 4.0. Claramente, el inconveniente es que es una caja negra y no es posible saber que hace exactamente. Sin embargo, los resultados obtenidos permiten comparar los resultados obtenidos con el método analítico; para R_e pequeños. La razón principal de utilizar Mathematica, es por la simplicidad para manejar las expresiones, puesto que cuando N crece, el álgebra involucrada y el tamaño de las expresiones crece, de manera que el simple manejo y la escritura de las ecuaciones diferenciales es difícil.

Se obtuvieron resultados para N hasta de 9, con diferentes valores de R_e . En los primeros casos, las ecuaciones se pueden integrar para valores relativamente grandes de R_e . Por ejemplo, para $N = 4$, el problema se puede resolver hasta $R_e = 30$. Las diferencias entre las soluciones numéricas y los desarrollos (4.7) y (4.8) son pequeñas para $0.1 < R_e \sim 15^2$. Conforme el valor de N aumenta, el intervalo de valores del R_e disminuye rápidamente. En la figura C.1, se muestran las diferencias entre la expresión (4.8) y los resultados numéricos; para diferentes valores de N y del R_e . Por un lado, se ve que las diferencias son pequeñas, sobre todo cuando el R_e es chico. Por lo que se puede decir que las expresiones (4.7) y (4.8) representan buenas aproximaciones a las soluciones de las ecuaciones (2.23) y (2.24). Cuando R_e o N crecen, las diferencias entre los cálculos analíticos y numéricos aumentan. El método numérico utilizado, requiere una condición inicial, en principio arbitraria, para encontrar las condiciones iniciales que reproducen el problema que hay que resolver. Debido a la no linealidad de las ecuaciones diferenciales, sobre todo a N grande, el problema parece tener sensibilidad en las condiciones iniciales. En los casos que se han podido analizar, $4 \leq N \leq 9$ y $0 < R_e \leq 3$, el problema se puede resolver para condiciones arbitrarias, pero el método del gradiente iterativo parece no converger desde el punto

²Para $R_e = 15$ la diferencia máxima, entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, es un orden de magnitud menor que el valor máximo de (4.7) o (4.8).

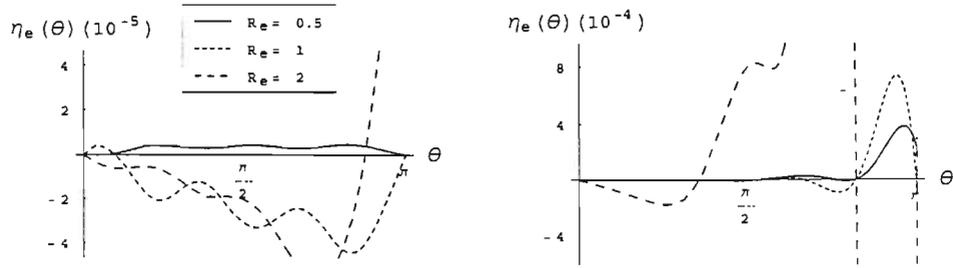


Figura C.1: Diferencias entre la expresión (4.8) y los resultados numéricos: $N = 5$ (izquierda) y $N = 6$ (derecha).

de vista numérico. Puesto que, al cambiar la adivinanza inicial, el resultado en el extremo del intervalo, $\theta = \pi$, varía rápido; por tanto, las condiciones de frontera no se recuperan con un buen grado de aproximación; sobre todo a $Re > 1$. Además, cabe mencionar que las ecuaciones diferenciales a resolver pueden tener bifurcaciones al cambiar el número de Reynolds, lo cual, también puede influir en la convergencia del método del gradiente iterativo.

Bibliografía

- [1] M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Parabolic Press, 1988.
- [2] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Mecánica de Fluidos*. Reverté, 1991.
- [3] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1994.
- [4] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Parabolic Press, 1975.
- [5] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover Publications, New York, 6th edition, 1945.
- [6] G. G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9(II):8, 1851.
- [7] I. G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids*. Mc Graw Hill, 2nd edition, 1993.
- [8] I. Proudman and J. R. A. Pearson. Expansion at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2:237, 1957.
- [9] C. W. Oseen. Ueber die Stokes'sche formel, und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik. *Ark. Mat. Astronom. Fys.*, 6(29), 1910.
- [10] S. Goldstein. The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 123:225, 1929.
- [11] S. Goldstein. On the two-dimensional steady flow of a viscous fluid behind a solid body.-I. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 142:545, 1933.

- [12] S. Tomotika and T. Aoi. The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 3:140, 1950.
- [13] S. Kaplun and P. A. Lagerstrom. Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers. *J. Math. Mech.*, 6:585, 1957.
- [14] P. A. Lagerstrom and J. D. Cole. Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations. *J. Rat. Mech. Anal.*, 4:817, 1955.
- [15] S. Kaplun. Low Reynolds number flow past a circular cylinder. *J. Math. Mech.*, 6:595, 1957.
- [16] M. Van Dyke. The circle at low Reynolds number as a test of the method of series truncation. In *Proc. 11th. Int. Cong. Appl. Mech.*, page 1165, Munich, 1964.
- [17] R. L. Underwood. Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 37(1):95, 1969.
- [18] F. Nieustadt and H. B. Keller. Viscous flow past circular cylinders. *Computers & Fluids*, 1:59, 1973.
- [19] S. C. R. Dennis and J. D. A. Walker. Calculations of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 48(4):771, 1971.
- [20] R. Soto and R. Peralta-Fabi. A power series solution to the Navier-Stokes equations for an incompressible viscous flow past a circular cylinder. Internal Report UAM-I-F82001, 1981.
- [21] L. Rosenhead. *Laminar Boundary Layers*. Oxford University Press, London and New York, 1963.
- [22] L. A. Skinner. Generalized expansions for slow flow past a cylinder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 28:333, 1975.
- [23] M. C. A. Kropinski, M. J. Ward, and J. B. Keller. A hybrid asymptotic-numerical method for low Reynolds number flows past a cylindrical body. *SIAM J. Appl. Math.*, 55(6):1484, 1995.

- [24] J. B. Keller and M. J. Ward. Asymptotics beyond all orders for a low Reynolds number flow. *J. Eng. Math.*, 30:253, 1996.
- [25] R. L. Underwood. *The viscous incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds number*. PhD thesis, Stanford University, 1968.
- [26] S. C. R. Dennis and G. Z. Chang. Numerical integration of the Navier-Stokes equations for steady two-dimensional flow. *Phys. Fluids Suppl. II*, 12:88, 1969.
- [27] A. Thom. The flow past a circular cylinders at low speeds. *Proc. Roy. Soc. A*, 141:651, 1933.
- [28] A. E. Hamielec and J. D. Raal. Numerical studies of viscous flow around circular cylinders. *Phys. Fluids*, 12(1):11, 1969.
- [29] B. Fornberg. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 98(4):819, 1980.
- [30] Y. Takaisi. Numerical studies of a viscous liquid past a circular cylinder. *Phys. Fluids Suppl. II*, 12:86, 1969.
- [31] M. Kawaguti and P. Jain. Numerical study of a viscous flow past a circular cylinder. *J. Phys. Soc. Japan*, 21(10):2055, 1966.
- [32] E. M. Saiki and S. Biringen. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of a virtual boundary method. *J. Comput. Phys.*, 123:450, 1996.
- [33] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J. Caltagirone. Fictitious domain approach for the numerical modeling of Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34:651, 2000.
- [34] S. C. R. Dennis and G. Chang. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 100. *J. Fluid Mech.*, 42(3):471, 1970.
- [35] H. B. Keller and H. Takami. Numerical studies of the steady viscous flow about cylinders. In D. Greenspan, editor, *Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations*, Proc. of an Advanced Symp., page 115. Wiley, 1966.

- [36] P. M. Gresho, R. Chan, R. Lee, and C. Upson. A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. Part 2: Applications. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4:619, 1984.
- [37] M. S. Engelman and M. Jamina. Transient flow past a circular cylinder: A Benchmark solution. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 11:985, 1990.
- [38] G. E. Karniadakis and G. S. Triantafyllou. Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects. *J. Fluid Mech.*, 238:1, 1992.
- [39] C. S. Peskin. *J. Comput. Phys.*, 25:252, 1977.
- [40] D. Goldstein, R. Handler, and L. Siriovich. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *J. Comput. Phys.*, 105:354, 1993.
- [41] G. Zhaoli, S. Baochang, and W. Nengchao. Lattice BGK model for the incompressible Navier-Stokes equation. *J. Copm. Phys.*, 165:288, 2000.
- [42] X. He and G. Doolen. Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: flow around a circular cylinder. *J. Copm. Phys.*, 134:306, 1997.
- [43] W. Chester and D. R. Breach. On the flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 37(4):751, 1969.
- [44] S. J. Liao. An analytic approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 37:1, 2002.
- [45] S. J. Liao. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters: an application in fluid mechanics. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 32:815, 1997.
- [46] A. E. Hamielec and A. I. Johnson. Viscous flow around fluid spheres at intermediate Reynolds numbers. *Can. J. Chem. Engng.*, 40:41, 1962.
- [47] A. E. Hamielec, S. H. Storey, and J. M. Whitehead. Viscous flow around fluid spheres at intermediate Reynolds numbers (II). *Can. J. Chem. Engng.*, 41:246, 1962.

- [48] V. Kalro and T. Tezduyar. 3D computation of unsteady flow past a sphere with a parallel finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 151:267, 1998.
- [49] S. Lee. A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers. *Computers & Fluids*, 29:639, 2000.
- [50] K. A. Cliffe and D. A. Lever. A comparison of finite-element methods for solving flow past a sphere. *J. Comput. Phys.*, 62:321, 1986.
- [51] W.-Z. Shen and T.-P. Loc. Numerical method for unsteady 3D Navier-Stokes equations in velocity-vorticity form. *Computers & Fluids*, 26(2):193, 1997.
- [52] H. R. Pruppacher, B. P. Le Clair, and A. E. Hamielec. Some realtions between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low and intermediate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 44(4):781, 1970.
- [53] H. D. Nguyen and J. N. Chung. A Chebyshev-Legendre spectral method for the transient solutions of flow past a solid sphere. *J. Comput. Phys.*, 104:303, 1993.
- [54] R. Mittal. A Fourier-Chebyshev spectral collocation method for simulating flow past spheres and spheroids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 30:921, 1999.
- [55] T. A. Johnson and V. C. Patel. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.*, 378:19, 1999.
- [56] B. Huner and R. G. Hussey. Cylinder drag at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 20(8):1211, 1977.
- [57] D. J. Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6:547, 1959.
- [58] F. Mandujano and R. Peralta-Fabi. On the viscous steady flow around a circular cylinder. *Rev. Mex. Fis.*, Aceptado en noviembre, 2004.
- [59] C. M. Bender and S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods For Scientists and Engineers*. Springer-Verlag, 1999.

- [60] P. Plaschko and K. Brod. *Höhere Mathematische Methoden für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, 1989.
- [61] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 4th edition, 1995.
- [62] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, New York, 1978.