UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESELACIONES PERIÓDICAS Y SUS GRUPOS DE SIMETRÍA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

AZAEL MORALES VILLAR

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

2005

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Azael Morales Villar

FECHA: 8-02-05

FIRMA: Azael Morales Villar

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Teselaciones Periódicas y sus grupos de Simetría."

realizado por Azael Morales Villar.

con número de cuenta 09960475-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez
Propietario	M. en C. María del Pilar Martínez Téllez
Propietario	Dra. María de la Paz Alvarez Scherer
Suplente	Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco
Suplente	Mat. Leobardo Fernández Román

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Dedico este trabajo a Dios

a papá y mamá

a mi hermano

a mis abuelos

a todos mis tíos

y a todos mis amigos

Agradezco a Paco por haber dirigido este trabajo
a mis amigos porque parte de esto es de ellos
a papá a y mamá, a mi hermano por su gran ayuda
y en especial a Dios

Índice General

Prefacio **vii**

Capítulo 1

Introducción **1**

1.1 Introducción 1
1.2 Isometrías del Plano Euclidiano 2

Capítulo 2

Grupos de Simetrías de Teselaciones Euclidianas **5**

2.1 Simetrías de Teselaciones Euclidianas 5
2.2 Como encontrar dominios fundamentales 10
2.3 Orbifolds 12
2.4 Una manera de nombrar a las Teselaciones 30
2.5 Lo que vale cada Teselación 36
2.6 ¿Cuántas formas hay de sumar 2? 39

Capítulo 3

Teselaciones en la esfera 44
3.1 Teselaciones en la esfera 44

Capítulo 4

Teselaciones en el plano hiperbólico 52
4.1 Teselaciones en el plano hiperbólico 52

Prefacio

Podemos decir que el ser humano empezó a crear teselaciones desde el momento en que se levantó el primer muro, al estar escogiendo y acomodando las piedras adecuadas para darle forma posteriormente fue perfeccionando cada vez más su manera de sus construcciones hasta convertirlas en todo un arte, como son las grandes pirámides, los mausoleos, grandes palacios, murallas, etc., pero siempre jugando un papel muy importante en estas las teselaciones.

Al pasar de los años las teselaciones estuvieron presentes también porque fueron utilizadas para darles lujo y majestuosidad a todas las construcciones, ya que hacían formidables figuras para adornar todas sus construcciones en general.

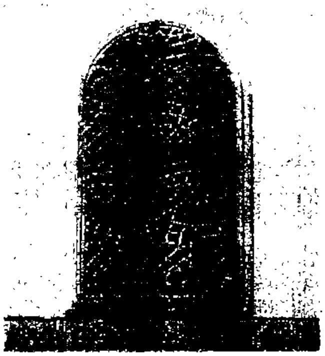


Figura I

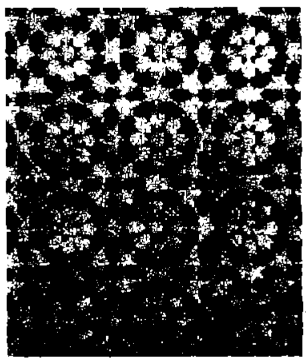


Figura II

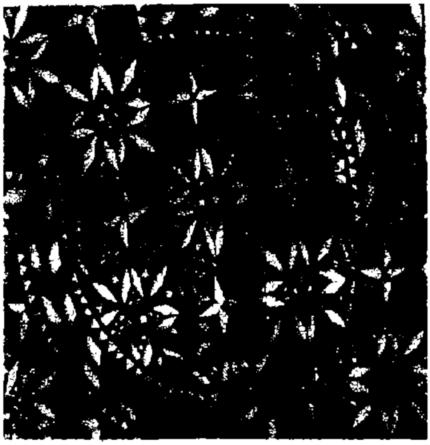


Figura III

Figura IV

Podemos asociar las teselaciones con muchas cosas que nos rodean. Seguramente en tu niñez, jugaste con teselaciones, al armar rompecabezas, las teselaciones son una parte importante de nuestras vidas, las vemos en todas partes: en los muros, en los tejados, en los tejidos, en los pisos, en las rejas, a cualquier lado que veas, seguramente existe una teselación.

Las teselaciones juegan un gran papel en la Naturaleza, por ejemplo en los panales de abejas, en las celdas formadas por células, en la corteza de los árboles, en algunos animales como en el caparazón de las tortugas, en la piel de los cocodrilos, en la piel de los tigres, leopardos, etc.

En todos los balones que se usan en diversos deportes, las teselaciones están presentes, como en un balón de fútbol, de basquetbol, de béisbol, o de lo que sea, seguramente ese balón, tiene una teselación.

Como te habrás dado cuenta, hay una infinidad de teselaciones y como en esta tesis se dará una clasificación de las teselaciones de acuerdo con la simetrías que tengan, solamente estudiaremos aquellas que tienen simetrías

Resulta que las simetrías de una teselación forman un grupo, al cual llamaremos **grupo de simetría de la teselación**, además a cada teselación le asociaremos un **dominio fundamental** y con ayuda de unas herramientas de Topología, de cada dominio fundamental obtendremos un **orbifold**, a estos obifolds la daremos un nombre y un valor que dependerá de unas características topológicas que tenga y el nombre es el que le dará su clasificación.

Todo esto se trabajará en el plano euclidiano, en la esfera y en el plano hiperbólico.

Este trabajo trata de ser un texto introductorio al estudio de las teselaciones visto desde el punto de vista de los orbifolds.

Introducción 1

1.1 Introducción.

Una teselación T, del plano es cualquier partición de éste en regiones t_1, t_2,...a las que llamaremos **teselas**, cada tesela debe ser topológicamente igual a un disco cerrado.

Existen teselaciones las cuales tienen teselas que son la misma, en la figura 1.1, las teselas son rectángulos y triángulos; entonces podríamos decir que esta teselación tiene dos clases de teselas. A cada clase se le llamará **tesela tipo**; entonces en el ejemplo tenemos dos teselas tipo

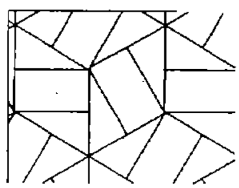


Figura 1.1

A continuación se darán unas definiciones necesarias:

Una **isometría de X** es una transformación f: $X \to X$ tal que $d(x,y) = d(f(x), f(y))$ $\forall\, x, y \in X$.

Con una isometría no se puede deformar el espacio, estirándolo, encogiéndolo, doblándolo, ni de ninguna manera que no sea tratando el espacio como si fuera un cuerpo rígido. Intuitivamente una isometría manda una figura (la que sea), en otra figura congruente.

Una simetría de $A \subseteq X$ es una isometría f tal que $f(A) = A$ como conjunto, no necesariamente punto a punto.

Entonces una **simetría de una teselación** $\mathcal{T}$, es una isometría f tal que $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

1.2 Isometrías del Plano Euclidiano.

Si tenemos dos figuras cualesquiera congruentes en el plano euclidiano, existe una única isometría del plano con la que podemos llevar una en la otra, y lo haremos de la siguiente manera:

Tomamos tres puntos *a*, *b* y *c*, en una de las figuras y los tres puntos equivalentes *a'*, *b'* y *c'*, en la otra figura y entonces podemos tener los siguientes casos

Caso 1.- Si los puntos que son equivalentes tienen la misma orientación y las líneas que los unen son paralelas. Entonces la simetría que lleva una en la otra es una traslación.

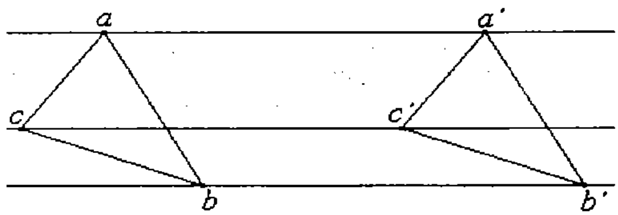


Figura 1.2

Caso 2.- Si los puntos que son equivalentes tienen la misma orientación y las líneas que los unen, no son paralelas. Entonces la simetría que lleva una en la otra es una rotación . El centro de la rotación que lleva una figura en la otra es el punto de intersección *p* de las mediatrices de los segmentos que unen a cualquier par de puntos equivalentes.

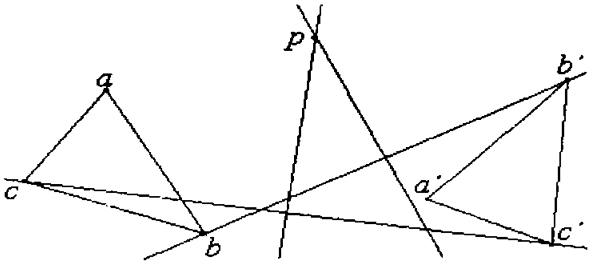


Figura 1.3

Caso 3.- Si los puntos equivalentes no tienen la misma orientación y las líneas que los unen son paralelas. Entonces la simetría que lleva una en la otra es una reflexión por la mediatriz del segmento que une a cualquier par de puntos equivalentes.

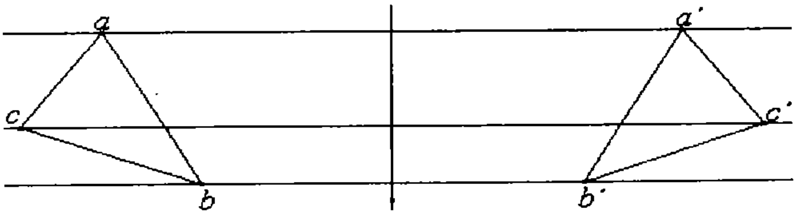


Figura 1.4.-

Caso 4.-Si los puntos equivalentes no tienen la misma orientación y las líneas que los unen no son paralelas. La simetría que lleva una en la otra es una reflexión paso.

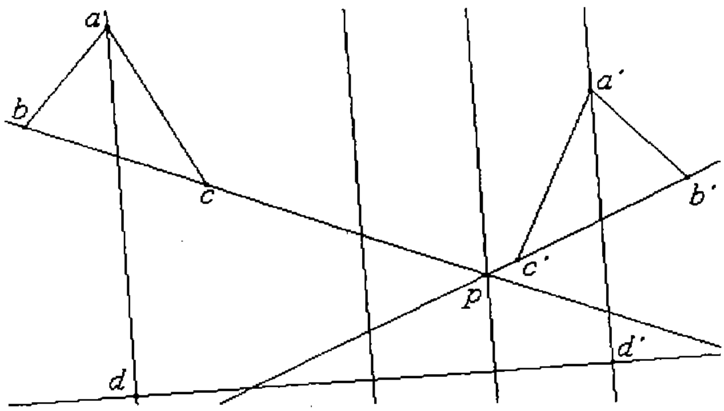


Figura 1.5.-

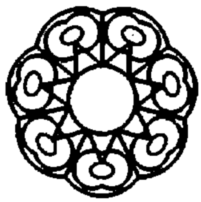
La construcción de la reflexión paso que manda una figura en la otra es la siguiente:
Prolongamos dos lados congruentes bc y $b'c'$ llamamos p, al punto de intersección, tomamos una bisectriz del ángulo que forman; trazamos una paralela a la bisectriz por a y otra por a', trazamos una perpendicular a esas paralelas y corta la paralela por a en d y a la paralela por a' en d', sacamos la mediatriz de dd' y sobre esta mediatriz, se hace la **reflexión paso**; que consiste en reflejar y luego trasladar en forma paralela a la reflexión.

Y como ya agotamos todas las posibilidades de tener tres puntos con sus congruentes; resulta que éstas son todas las simetrías del plano euclidiano.

Entonces, dada una teselación del plano euclidiano, las simetrías que puede tener son algunas de las anteriores.

2

Grupos de Simetrías de Teselaciones Euclidianas



2.1 Simetrías de Teselaciones Euclidianas.

El orden de una rotación es el número de veces que tenemos que aplicar la simetría para obtener la identidad. Si tenemos una rotación de un ángulo $2\pi/n$, n en los naturales, necesitaremos aplicar *n* veces la transformación para tener la identidad y entonces ésta será de orden *n*.
En una teselación no puede haber rotaciones de orden irracional, ya que los mosaicos se encimarían.

En ocasiones tenemos más de una línea de reflexión en un punto, es decir, dos o más líneas de reflexión se intersecan en un punto con un ángulo de $2\pi/2n = \pi/n$. Estos puntos se llamarán **puntos caleidoscópicos (kal).**

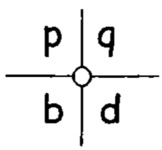


Figura 2.1.- Punto kal de orden 2.

Los puntos **kal** también tienen **orden** y este es el número de líneas de reflexión que se intersecan en el punto. En la figura 2.1, el orden del punto kal es dos.

Analicemos un ejemplo. Las simetrías que tiene un cuadrado son:

Una reflexión l_1 por la línea que une los puntos medios de sus lados verticales, una reflexión l_2 por la línea que une los puntos medios de sus lados horizontales; una reflexión l_3 por una de sus diagonales; por la otra diagonal también hay una línea de reflexión l_4; un punto kal de orden 4 en donde se cortan todas las reflexiones y una rotación que tiene como centro el punto kal. En una teselación, cuando una rotación esté en un punto kal, no se tomará en cuenta, porque se trata de un punto kal.

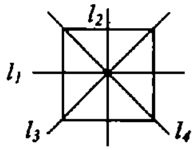


Figura 2.2

Tomemos entonces el cuadrado y formemos una teselación, pero antes nombremos las esquinas, el centro y los puntos medios, como muestra la figura 2.3a.

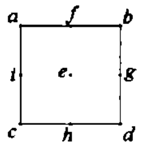


Figura 2.3a

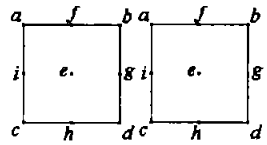


Figura 2.3b

Entonces si tomamos otro cuadrado y lo ponemos al lado, como muestra la figura 2.3b, se identifica el punto b del primer cuadrado con el punto a del segundo cuadrado, podemos decir que ese punto es a. Lo mismo sucede con el punto d del primer cuadrado y con el punto c del segundo; y podemos decir que ese punto es c. Igualmente con el punto g del primer cuadrado y con el punto i del segundo; y podemos decir que ese punto es i (Figura 2.3c).

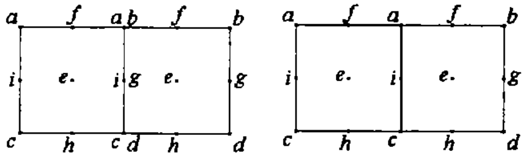


Figura 2.3c

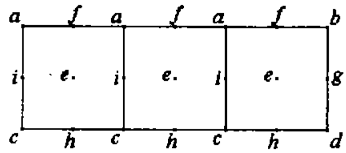


Figura 2.3d

Si ahora pegamos otro cuadrado al lado, pasará lo mismo: el punto b será a; el punto d será c y el punto g será i (Figura 2.3d).Y si hacemos una banda infinita, sólo tendremos puntos a arriba, puntos c abajo y todos los puntos medios de los lados verticales serán i

Pero como queremos una teselación del plano tenemos que pegarle a la banda otros cuadrados u otra banda como muestra la figura 2.3e.

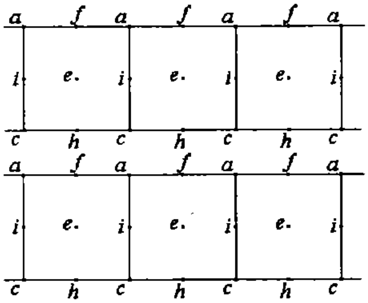


Figura 2.3e

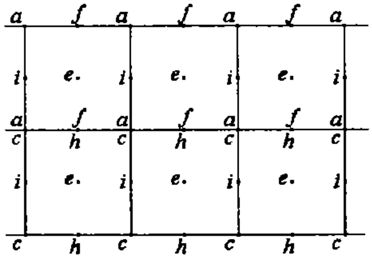


Figura 2.3f

Y tenemos que los puntos c de la primera banda se identifican con lo puntos a de la segunda banda entonces podemos decir que todos son a y los puntos h de la primera banda se identifican con los puntos f de la segunda banda entonces resulta que todos son f (figura 2.3g)

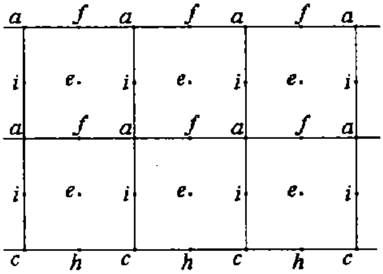


Figura 2.3g

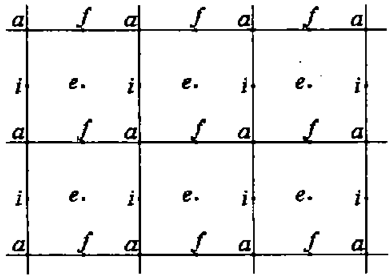


Figura 2.3h

Así de ésta manera llenamos el plano (figura 2.3h) y todos los puntos de las esquinas son a y todos los puntos medios son f o son i; todas estas identificaciones fueron por las traslaciones.
Ahora los puntos f y los puntos i se identifican por la rotación en el punto e si rotamos 90º, así que podemos pensar que todos los puntos medios son f (figura 2.3i)

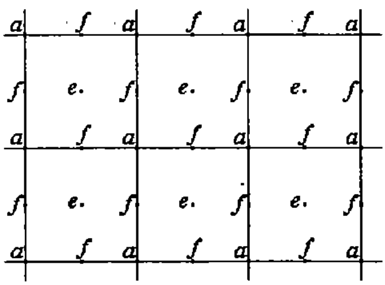


Figura 2.3i

A las líneas sobre las cuales hay reflexiones o reflexiones paso y a los puntos sobre los cuales hay rotaciones o son puntos kal, los llamaremos **elementos de simetría**.

Ya que tenemos esto, podemos decir que dos elementos de simetría de la teselación de la figura 2.3i están relacionadas si están sobre los "mismos" puntos; entonces todas las líneas de reflexión sobre los lados de los cuadrados están relacionadas, porque todas pasan por los puntos *a* y forman la clase c_1. Todas las líneas de reflexión en las líneas que pasan por los puntos *f* y por los puntos *e* están relacionadas y forman la clase c_2 y todas las líneas de reflexión que pasan por los puntos *a* y los puntos *e* están relacionadas y forman la clase c_3 y todas las líneas de reflexión paso están relacionadas porque todas pasan por los puntos *f*, formando la clase c_4. Los puntos kal sobre los puntos *a* forman las clase c_5, los puntos kal sobre los puntos *e* forman la clase c_6 y los puntos kal sobre los puntos *f* forman la clase c_7.

De manera natural podemos relacionar a las simetrías por sus elementos para formar clases, es decir, dos simetrías están relacionadas; si están relacionados sus elementos de simetría. De aquí podemos observar que si tomamos dos elementos de simetría de la misma clase existe alguna simetría en la teselación que "lleve una en la otra" es decir que lleve una línea de reflexión en otra línea de reflexión, o que lleve un punto de rotación en otro punto de rotación, etc.

En lo sucesivo cada vez que se hable de simetría, nos referiremos a la clase de la simetría de alguna teselación.

Las simetrías de una teselación forman un grupo, a este grupo se le llamará **"El grupo de Simetrías de la Teselación"**. Para que un conjunto forme un **grupo** debemos tener una operación binaria, que en este caso será la composición de las simetrías. La operación tiene que ser asociativa, tener elemento neutro y que cada elemento debe tener su inverso.

Primero veremos que la composición de simetrías es una simetría.

Sean f y g dos simetrías de T, entonces.

$f{:}X \rightarrow X \qquad g{:}X \rightarrow X$

$f(T) = T \qquad g(T) = T$

$$X \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} X \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{f(g)}$$

$$f(g(T)) = f(T) = T$$

Por lo tanto la composición de simetrías es una simetría.

La asociatividad se cumple para todas las funciones.

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

El elemento neutro es la identidad, ya que si f es una simetría de T entonces

$$f(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \qquad\qquad f(\mathrm{id}(\mathcal{T})) = f(\mathcal{T})$$

$$\mathrm{id}(f(\mathcal{T})) = f(\mathcal{T})$$

Sólo falta ver que cada simetría tenga su inversa.

La inversa de una traslación, será una traslación de igual magnitud, pero en sentido contrario: cambia ésta $\underset{a}{\rightarrow}$ por ésta $\underset{-a}{\leftarrow}$

La inversa de una rotación es otra rotación del mismo ángulo, pero en sentido contrario.

Figura 2.4.- Rotaciones en sentidos opuestos.

El inverso de la reflexión es ella misma, ya que si reflejamos dos veces en la misma línea tenemos la identidad, y por último para encontrar el inverso de la reflexión paso, (que es la combinación de una reflexión con una traslación), primero debemos hacer la inversa de la traslación y después la de la reflexión.

$$\text{paso} = \text{traslación}(\text{reflexión}(x)) \qquad \text{paso}^{-1} = \text{reflexión}(\text{traslación}^{-1}(x))$$

Por lo tanto las simetrías de una teselación forman un grupo.

Existen muchos tipos de teselaciones, pero las que estudiaremos aquí son las que tienen un número finito de teselas tipo y en cuyo grupo de simetrías hay dos traslaciones (en realidad hay muchas traslaciones, pero todas ellas se pueden generar tomando dos linealmente independientes, es decir no paralelas, porque estamos trabajando en un espacio de dos dimensiones). A este tipo de teselaciones se les llama **teselaciones periódicas.**

En lo sucesivo, cada vez que se mencione teselación, se estará hablando de teselación periódica.

Dada una teselación nos fijamos en sus simetrías y en la órbita de un punto. La **órbita** de un punto es el conjunto de puntos del espacio a los cuales podemos ir a dar bajo las simetrías de la teselación, partiendo del punto dado, es decir:

$$\mathrm{or}(x_0) = \{\, x \in X \mid \exists\, g \in G,\ g(x_0) = x \,\}$$ donde G es el grupo de simetrías de la teselación

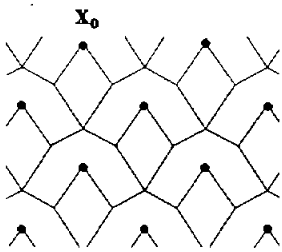


Figura 2.5.- Los puntos marcados son la órbita de x_0 bajo el grupo de simetría de la teselación.

El **dominio fundamental** de una teselación es una región en cuya cerradura, hay al menos un punto de cada órbita; en el interior de la región no puede haber más de un representante por cada órbita, si hay dos de la misma órbita están en la frontera, es decir, es la parte más chica del plano que con las simetrías del grupo genera la teselación. En una teselación hay muchas regiones que funcionan como dominios fundamentales, (aunque todas son equivalentes como conjunto), por ejemplo:

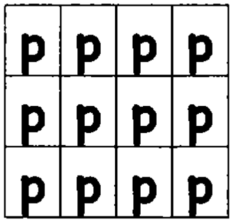


Figura 2.6.- Una tesela es $\boxed{\mathbf{p}}$ y es igual a una región que es un dominio fundamental.

Pero si tomamos la mitad de uno y la mitad de otro, (figura 2.7a), también se tiene un dominio fundamental; los dos cumplen con las condiciones para ser un dominio fundamental, de hecho, cualquier cuadrado sobre la banda del tamaño de la tesela es un dominio fundamental.(figura 2.7b).

a

b

Figura 2.7.- a) mitad de uno y mitad de otro. b) cuadrado del tamaño de un mosaico.

Dado un dominio fundamental y sus simetrías, tenemos toda la información de la teselación. Con estos dos elementos podemos generar la teselación completa, pegando dominios fundamentales de la forma que mandan las simetrías.

2.2 Cómo encontrar dominios fundamentales.

Lo primero que tenemos que observar es si en el grupo de simetrías de la teselación hay reflexiones, porque las reflexiones siempre marcan la frontera del dominio fundamental, ya que por cada punto de un lado de la línea de reflexión hay otro (su reflejado) del otro lado, y los dos pertenecen a la misma órbita bajo la reflexión. Entonces podemos considerar sólo un lado de la línea de reflexión.

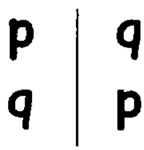


Figura 2.8.-Debemos considerar que se encuentra a un lado de la línea de reflexión.

Por lo anterior un punto kal no puede estar en el interior de un dominio fundamental, ya que es la intersección de las líneas de reflexión.

Un punto de rotación de orden *n* tampoco puede estar en el interior de un dominio fundamental, porque por cada punto que esté en cualquier vecindad de él, hay *n-1* copiasas de ese punto, y entonces los *n* puntos pertenecen a la misma órbita. Sólo nos quedamos con uno de ellos y no consideramos los otros *n-1*.

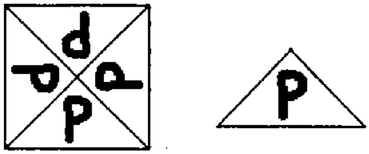


Figura 2.9.- Debemos tomar sólo una sección de la rotación.

Las líneas de reflexión paso, pueden estar en el interior de un dominio fundamental, debido a que reflejan y trasladan; y los puntos de la misma órbita por el paso, no están tan cerca (figura 2.15b).

El dominio fundamental no puede ser más largo (en esa dirección) que la magnitud de la traslación, ya que, en el interior, tendría más de un punto de la misma órbita, bajo la traslación, pero sí puede ser más corto que la traslación, ya que los puntos que no alcance a tomar bajo la traslación, los puede tomar por otras simetrías (figura 2.15b).

Si el vector de la traslación atraviesa una línea de reflexión, entonces el dominio fundamental no puede ser más largo (en la dirección de la traslación) que la mitad de la magnitud de la traslación, porque si no tendría a la línea de reflexión en el interior del dominio fundamental, y ya vimos que eso no puede pasar.

Los tamaños de los dominios fundamentales con respecto a las teselas pueden ser: más grandes, más chicos o coincidir. Por ejemplo: en una cuadrícula, donde las teselas son los cuadrados, la teselación tienen un punto kal de orden cuatro en el centro del cuadrado; entonces si busco un dominio fundamental dentro del cuadrado es a lo más un cuarto de cuadrado; de hecho el dominio fundamental es la mitad de eso, porque tiene una línea de reflexión.

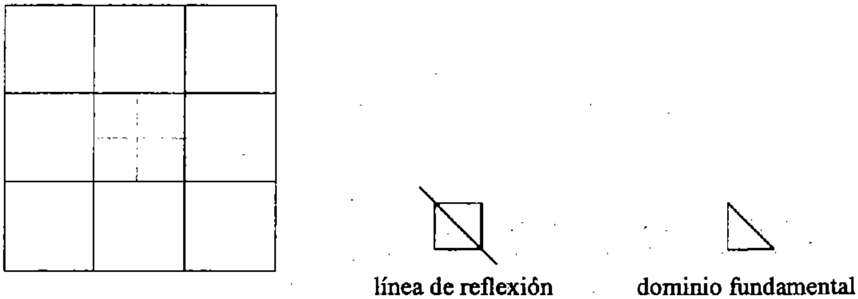


Figura 2.10.- El dominio fundamental puede ser más pequeño que la tesela.

Se puede dar el caso en que el dominio fundamental coincida con la tesela, en este caso la tesela no tiene simetrías en el interior, por ejemplo:

p	p	p	p
d	d	d	d
p	p	p	p

Figura 2.11.- La tesela es $\boxed{\mathbf{p}}$ y también es un dominio fundamental.

También puede pasar que los dominios fundamentales sean más grandes que cualquier tesela, por ejemplo:

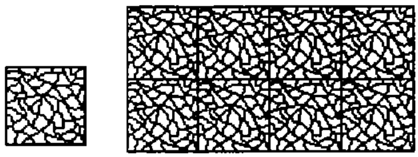


Figura 2.12

El cuadro pequeño es un dominio fundamental de la teselación y está formado por varias teselas.

2.3 Orbifolds.

En esta sección analizaremos los orbifolds de 17 ejemplos de diferentes teselaciones del plano euclidiano.

Cuando tengamos los dominios fundamentales, haremos las identificaciones de los puntos que son equivalentes bajo las simetrías, es decir, uniremos los puntos que pertenecen a la misma órbita. Como en el interior de cualquier dominio fundamental sólo hay un elemento de cada órbita, los "pegados" serán sobre la frontera, que es donde puede haber más de un elemento. A lo que resulta de estas identificaciones se les llama **orbifold** (esta palabra es una fusión entre órbita y manifold, que en inglés significa variedad) que es una variedad con puntos singulares (puntos de rotación y puntos kal).

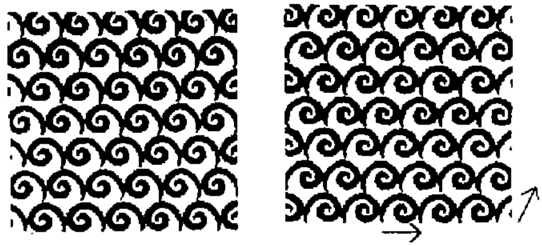


Figura 2.13.

Las únicas simetrías que tiene la teselación de la figura 2.13 son dos traslaciones.

Figura 2.13a.- Este es un dominio fundamental.

Figura 2.13b

Figura 2.13c

Tomamos el dominio fundamental y pegamos sus lados en la dirección marcada en la figura 2.13b, ya que con la traslación podemos llegar de un lado del dominio fundamental al otro. Ahora pegamos sus otros dos lados, como se indica en la figura 2.13c, porque pertenecen a la misma órbita bajo la otra traslación. Entonces tenemos que pegar como se indica en la figura 2.13d. Pegando un par primero, lo que tenemos es un cilindro. Identificamos ahora los extremos del cilindro, como se indica en la figura 2.13e y queda un toro (fig. 2.13f).

Figura 2.13d

Figura 2.13e.

Figura 2.13f.- El orbifold es un toro

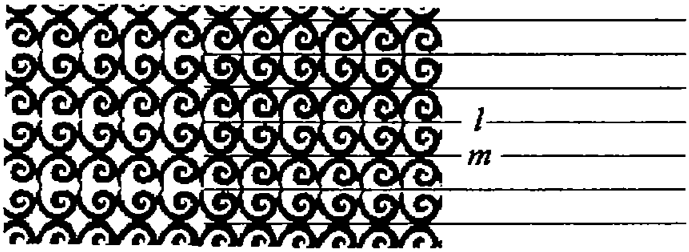


Figura 2.14

En la figura 2.14, tenemos dos reflexiones diferentes: (en las rectas *l* y *m).* Y como las reflexiones marcan la frontera de los dominios fundamentales, entonces el dominio fundamental debe estar entre las dos reflexiones; para acabar de determinarlo, nos fijamos en la traslación en dirección horizontal y tenemos un dominio fundamental (figura 2.14a).

Figura 2.14a.- Éste es un dominio fundamental

Figura 2.14b

Figura 2.14c.- Orbifold de la teselación

En el dominio fundamental de la figura 2.14b, sólo pegamos el par de lados marcados, que son equivalentes bajo la traslación, los otros lados no se pegan, sobre ellos hay líneas de reflexión y como ya habíamos visto, las líneas de reflexión, marcan la frontera del dominio fundamental y ahora vemos que como no se pegan, también son la frontera del orbifold. Entonces pegando, tenemos un cilindro. (figura 2.14c).

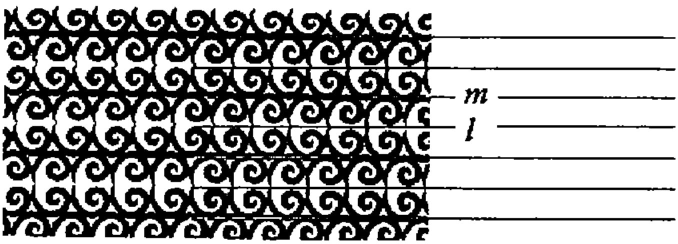


Figura 2.15

En la teselación de la figura 2.15 hay una reflexión en *l* y una reflexión paso en *m*; con la traslación podríamos generar un dominio fundamental. (figura 2.15a), pero para los pegados, no nos conviene porque es relativamente difícil de pegar; nos conviene más el dominio fundamental de la figura 2.15b, que está acotado por la reflexión y la traslación.

Figura 2.15a.- Este dominio fundamental es más difícil de pegar

Figura 2.15b.

En los lados horizontales del dominio fundamental de la figura 2.15b hay líneas de reflexión, entonces serán frontera tanto del dominio fundamental, como del orbifold. La identificación de los lados verticales no es en el mismo sentido (figura 2.15c) porque pertenecen a la misma órbita por la reflexión paso, que da como resultado una banda de Möbius (figura 2.15d)

Figura 2.15c.- Banda de Möbius sin pegar

Figura 2.15d.- Banda de Möbius orbifold de la teselación

Si queremos hacer el pegado del dominio fundamental de la figura 2.15a, por la traslación se pegan los dos lados verticales en la misma dirección. (figura 2.15e).
El lado de abajo no se pega porque es una reflexión, es frontera y el lado de arriba se pega consigo mismo por la reflexión paso (figura 2.15f).

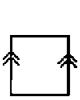


Figura 2.15e

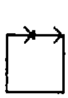


Figura 2.15f

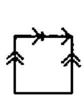


Figura 2.15g.

Los pegados quedan indicados como se muestra en la figura 2.15g, pero no se ve tan claro que es una banda de Möbius, sin embargo, sí lo es, ya que pegando los lados verticales, tenemos un cilindro (figura 2.15e), donde la parte de arriba se pega como un plano proyectivo (un plano proyectivo se obtiene al identificar los puntos diametralmente opuestos en un disco) y la parte de abajo no se pega. Entonces eso es un plano proyectivo con un agujero, (figura 2.15h), mismo que es una banda de Möbius.

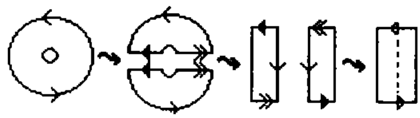


Figura 2.15h.- (a) Plano proyectivo con un agujero. (b) Cortamos el plano proyectivo. (c) Acomodamos las partes. (d) Tenemos una banda de Möbius

Otro ejemplo:

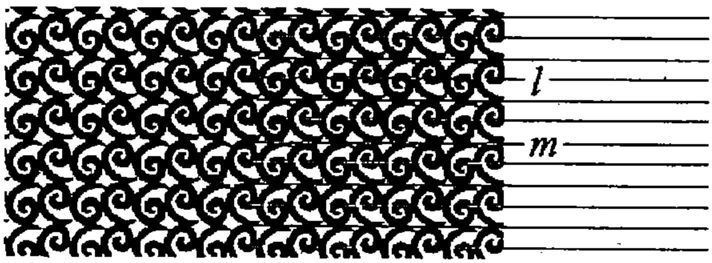


Figura 2.16.

La figura 2.16 tiene dos líneas de reflexión paso diferentes, l y m, entre dos reflexiones paso consecutivas de la clase de l está un dominio fundamental; sólo hay que acotarlo ahora horizontalmente (lo mismo se puede hacer con las reflexiones paso m), y lo acotamos con la traslación en ese sentido y obtenemos un dominio fundamental (figura 2.16a).

Figura 2.16a.- Un dominio fundamental

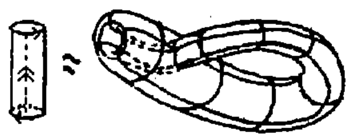


Figura 2.16b.- El orbifold es una botella de Klein

Tomamos un dominio fundamental que nos conviene (figura 2.16a), los lados verticales son equivalentes bajo la traslación, entonces pegándolos, tenemos un cilindro, ahora los lados horizontales son equivalentes bajo la reflexión paso que atraviesa por el centro del dominio fundamental, como ya habíamos visto en la figura 2.15c, las reflexiones paso se pegan cambiando el sentido, entonces tenemos la figura 2.16b que es una botella de Klein.
Una botella de Klein se obtiene pegando las orillas de un cilindro en sentido opuesto.

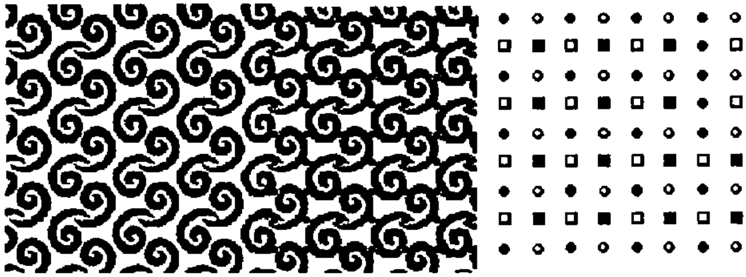


Figura 2.17

En la teselación de la figura 2.17 tenemos cuatro puntos de rotación de orden dos diferentes, los cuatro tienen que estar en la frontera del dominio fundamental, como ya habíamos visto. Ahora unimos los puntos de rotación con unas líneas, mismas que serán la frontera de nuestro dominio fundamental, sólo nos tenemos que fijar que tomemos un punto de cada órbita. Hay varias formas de unir los puntos, cada forma determinará un dominio fundamental. Esta es una de las formas en las que se puede unir y es uno de los dominios fundamentales. (figura 2.17a)

Figura 2.17a.- Un dominio fundamental

En el dominio fundamental de la figura 2.17a, hacemos las identificaciones doblando cada uno de los lados sobre sí mismo, esto es porque en cada lado hay un punto de rotación de orden dos y la rotación lleva a la línea sobre sí misma. Haciendo todos los pegados, da como resultado una esfera, (figura 2.17b) pero no es una esfera común y corriente, sino que es una esfera con cuatro puntos de rotación de orden dos (figura 2.17c).

Figura 2.17b. Esfera sin pegar

Figura 2.17c.- Esfera con cuatro puntos de rotación y orbifold de la teselación

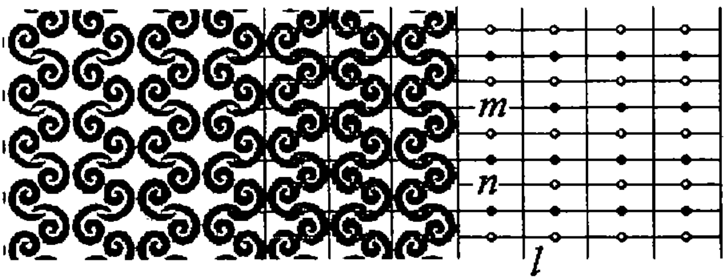


Figura 2.18

En esta teselación de la figura 2.18 tenemos dos puntos de rotación de orden dos, una reflexión en l (es la vertical) y dos reflexiones paso en m y n (son las horizontales).

En la franja que determinan las reflexiones, está un dominio fundamental y como los puntos de rotación están en la frontera, uniendo los puntos de rotación encontramos un dominio fundamental (figura 2.18a).

Figura 2.18a.- Un dominio fundamental

Por los puntos de rotación de orden dos se doblan sobre sí mismos los lados horizontales y queda como si fuera una "bolsita" (figura 2.18b). Los otros lados tienen la reflexión (no se pegan) y si ahora aplastamos la "bolsita" desde arriba, lo que tenemos es un disco con dos puntos de rotación. (figura 2.18c).

Figura 2.18b.

*Figura 2.18c.-E*s el orbifold

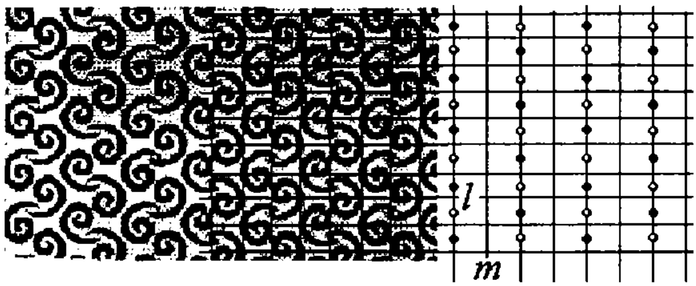


Figura 2.19

Esta teselación tiene dos puntos de rotación de orden dos y dos reflexiones paso en *l* y *m* si unimos los puntos de rotación determinaremos parte de la frontera del dominio fundamental y con la reflexión paso en *l* acotaremos los otros dos lados y obtendremos un dominio fundamental de esta teselación (figura 2.19a).

Figura 2.19a.- Un dominio fundamental

Como tenemos otra vez dos puntos de rotación de orden dos sobre dos de los lados del dominio fundamental, entonces esos lados se van a pegar sobre sí mismos doblándose y la reflexión paso por la línea que cruza al dominio fundamental por en medio (la horizontal) hace la identificación de los otros dos lados en sentido opuesto. Entonces pegando los lados por las rotaciones tenemos una "bolsita", que al aplastarla se convierte en un disco, y la orilla se pega uniendo antípodas, lo que tenemos es un plano proyectivo.
Entonces el orbifold es un proyectivo con dos puntos de rotación de orden dos. (figura 2.19b).

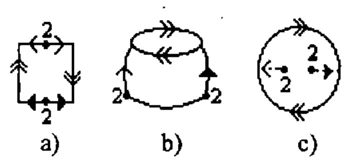


Figura 2.19b.- (a) dominio fundamental despegado. (b) una "bolsita". (c) el plano proyectivo con dos puntos de rotación que es el orbifold.

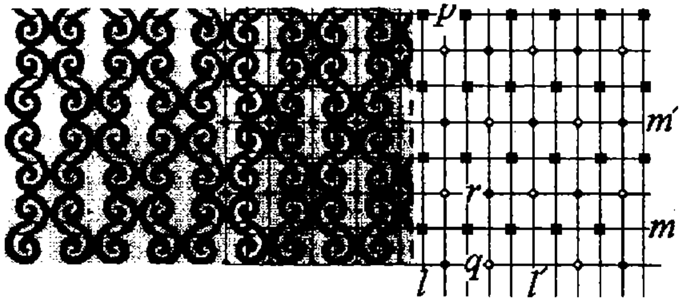


Figura 2.20

En esta teselación hay una rotación en p de orden dos, dos reflexiones paso en l y m, dos reflexiones en l' y m′ que se intersecan en dos puntos diferentes, en q y r, que son dos puntos kal de orden dos.

Con las reflexiones acotamos gran parte de lo que será un dominio fundamental y uniendo los puntos de rotación, determinamos el último lado de nuestro dominio fundamental. (figura 2.20a)

Figura 2.20a.-Un dominio fundamental

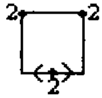


Figura 2.20b

El lado inferior del dominio fundamental se une consigo mismo por la rotación de orden dos. (figura 2.20b). dando como resultado la figura 2.20c, que si oprimimos desde arriba, queda un disco (figura 2.20d), En la frontera de este dominio fundamental tenemos puntos kal de orden dos.

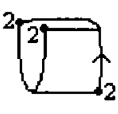


Figura 2.20c

Figura 2.20d.-El orbifold es un disco con dos puntos kal en la frontera.

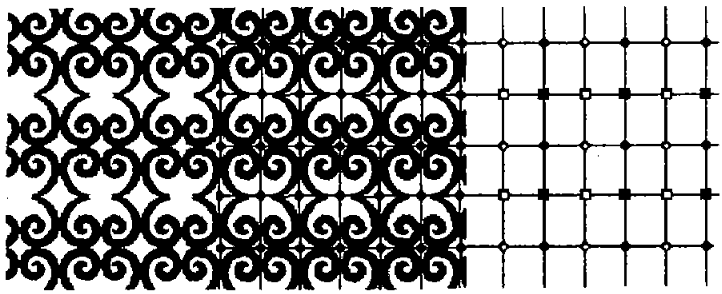


Figura 2.21

Ahora tenemos en la figura 2.21 cuatro líneas de reflexión que se intersecan en cuatro puntos diferentes, y cada uno es un punto kal de orden dos, con las cuatro reflexiones tenemos ya determinado un dominio fundamental (figura 2.21a).

Figura 2.21a.- Un dominio fundamental

En este caso las reflexiones sí nos determinaron toda la frontera de nuestro dominio fundamental, no hay nada que pegar, de modo que el orbifold es un disco que tiene cuatro puntos kal de orden dos en la frontera (figura 2.21b).

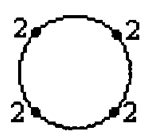


Figura 2.21b.- El orbifold es un disco con cuatro puntos kal.

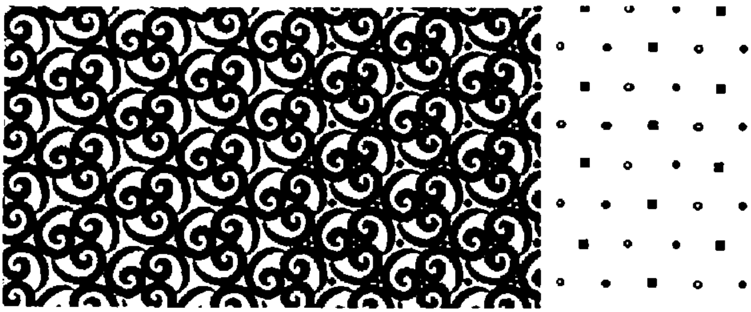


Figura 2.22

Las simetrías que tiene la teselación de la figura 2.22, son tres rotaciones de orden tres.
Para obtener nuestro dominio fundamental sólo tenemos que unir los puntos de rotación (de una de tantas formas) para marcar la frontera. (figura 2.22a).

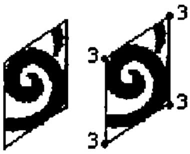


Figura 2.22a.- Un dominio fundamental

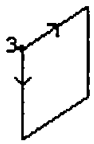


Figura 2.22b.- Pegamos estos lados por la rotación de orden tres

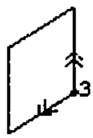


Figura 2.22c.- Pegamos estos lados por la otra rotación de orden tres

Pegando todos los lados tenemos una esfera (figura 2.22d) y el orbifold es una esfera con tres puntos de rotación de orden tres (figura 2.22e). (Notando que dos puntos de rotación en el dominio fundamental son el mismo, bajo las otras rotaciones, por eso sólo quedan tres en la esfera).

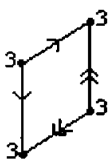


Figura 2.22d.- El orbifold despegado

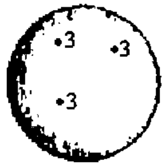


Figura 2.22e.- El orbifold

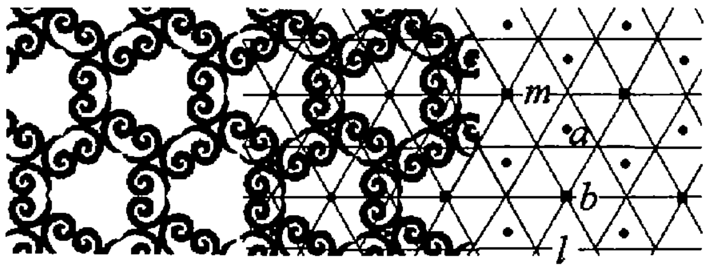


Figura 2.23

En la teselación de la figura 2.23 tenemos una rotación en a de orden tres, una reflexión paso en l una rotación en m y un punto kal en b de orden tres a pesar de que sólo hay una reflexión; esto es porque con la rotación, la línea de reflexión, también se rota y se interseca con otra (que es equivalente bajo la rotación).

Ahora del triángulo que determina la reflexión (figura 2.23), como tiene en el centro un punto de rotación de orden tres, nos tomamos la tercera parte de ese triángulo y ese será nuestro dominio fundamental. La figura 2.23a es una forma de partir el triángulo en tres, pero hay una infinidad de formas de hacerlo. (figura 2.23b).

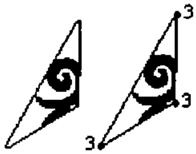


Figura 2.23a.-. Un dominio fundamental

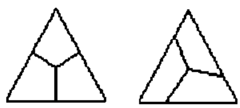


Figura 2.23b.- Otras formas de tomar un tercio de un triángulo.

Aquí observamos que como la teselación tiene reflexión, entonces este dominio fundamental tiene frontera (figura 2.23a). Hacemos las identificaciones por la rotación y en la variedad se pegan los dos puntos kal que tiene este dominio fundamental (figura 2.23c)
Queda entonces un disco con un punto de rotación de orden tres (que debe ir en el interior) y un punto kal de orden tres. (figura 2.23d).

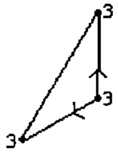


Figura 2.23c.- Los dos puntos kal, son equivalentes, bajo la rotación

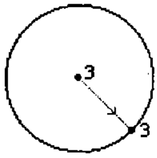


Figura 2.23d.- El orbifold es un disco con un punto kal y un punto de rotación, ambos de orden tres

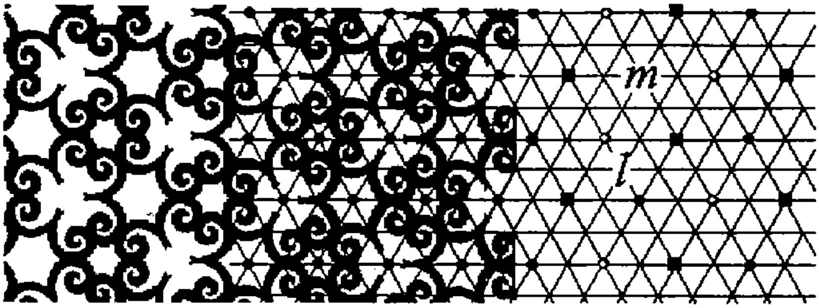


Figura 2.24

En la teselación de la figura 2.24 hay una reflexión paso en *l*, una reflexión en *m* y tres puntos kal de orden tres, con la reflexión tenemos totalmente determinada la frontera de nuestro dominio fundamental (figura 2.24a).

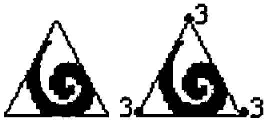


Figura 2.24a.- Un dominio fundamental

Aquí como en el ejemplo de la figura 2.21, la frontera del dominio fundamental quedó totalmente determinada por las reflexiones, no hay nada que pegar, entonces el orbifold es un disco con tres puntos kal de orden tres. (figura 2.24b).

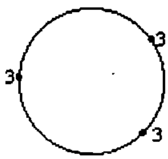


Figura 2.24b.- El orbifold

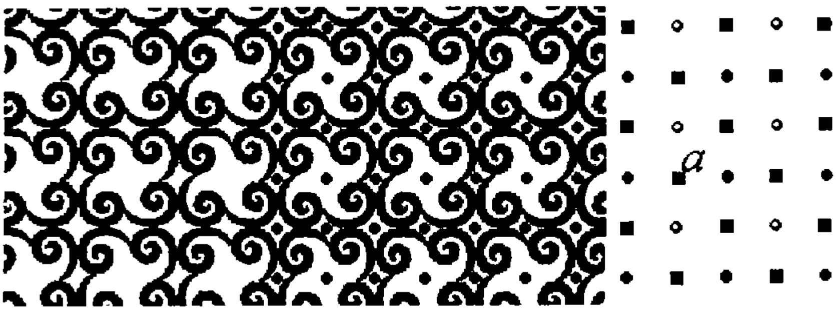


Figura 2.25

En la teselación de la figura 2.25 tiene un punto de rotación en *a* de orden dos y dos puntos de rotación diferentes de orden cuatro.

Uniendo los puntos de rotación para determinar la frontera del dominio fundamental, obtenemos un cuadrado, que es uno de los dominios fundamentales de esta teselación. (figura 2.25a).

Figura 2.25a.- Un dominio fundamental

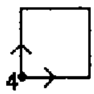


Figura 2.25b.- Pegado por una rotación de orden cuatro

Por una de las rotaciones de orden cuatro, se pegan dos de los lados, como se muestra en la figura 2.25b y por la otra rotación de orden cuatro, se pegan los otros dos lados. (figura 2.25c). Entonces el pegado total tiene que ser como lo muestra la figura 2.25d y los dos puntos de rotación de orden dos, son equivalentes.

Haciendo todos los pegados queda una esfera con tres puntos de rotación: dos de orden cuatro y uno de orden dos, que es el orbifold (figura 2.25e).

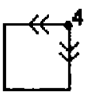


Figura 2.25c.- Pegado por la otra rotación de orden cuatro

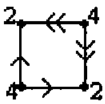


Figura 2.25d.- Esfera sin pegar

Figura 2.25e.- El orbifold

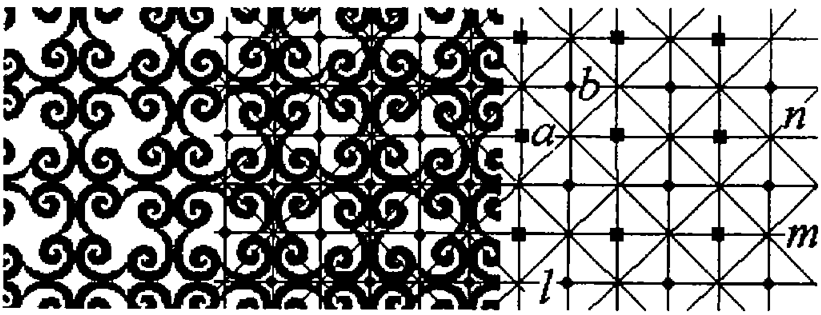


Figura 2.26

La teselación de la figura 2.26 tiene un punto de rotación en *a* de orden cuatro, una reflexión en *l*, dos reflexiones paso en *m* y *n* y un punto kal en *b* de orden dos.

Con las reflexiones determinamos un cuadrado que tiene un punto de rotación de orden cuatro en el centro, entonces podemos tomar la cuarta parte del cuadrado que queramos y tendremos un dominio fundamental (figura 2.26a).

Figura 2.26a.- Un dominio fundamental

Sólo pegamos el dominio fundamental por la rotación de orden cuatro (figura 2.26b), los otros dos lados tienen reflexión y por lo tanto no se pueden pegar .Entonces queda un disco con su punto de rotación de orden cuatro y su punto kal de orden dos, que es el orbifold (figura 2.26c).

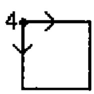


Figura 2.26b.- Tenemos que pegar la rotación de orden cuatro

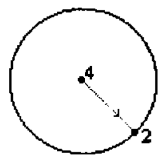


Figura 2.26c.- El orbifold

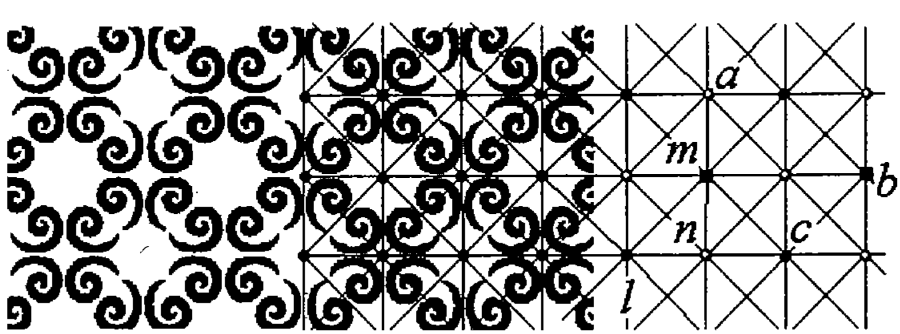


Figura 2.27

La teselación de la figura 2.27 tiene dos líneas de reflexión en *l* y *m*, que forman tres puntos kal: uno de orden dos que está en *a;* y dos de orden tres que están en *b* y *c*. También tiene una reflexión paso en *n*.

Con las reflexiones queda totalmente determinado el dominio fundamental (figura 2.27a).

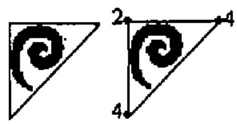


Figura 2.27a.- Un dominio fundamental

Como en toda la frontera del dominio fundamental hay reflexiones, entonces no se pega nada y el orbifold es un disco con tres puntos kal; dos de orden cuatro y uno de orden dos (figura 2.27b).

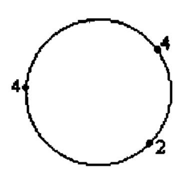


Figura 2.27b.- El orbifold

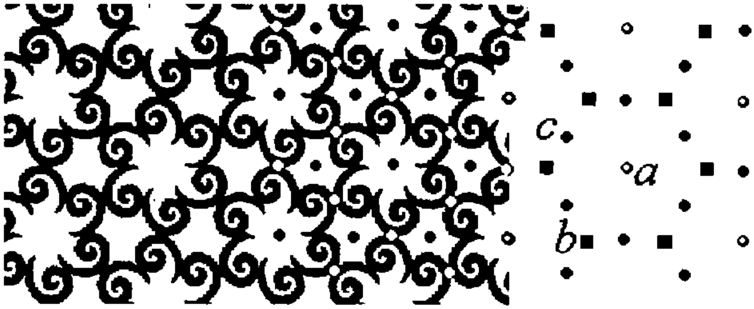


Figura 2.28

En la teselación de la figura2.28 tenemos tres puntos de rotación: en *a* que es de orden seis, en *b* que es de orden tres y en *c* que es de orden dos.

Para obtener un dominio fundamental, únicamente unimos los puntos de rotación. (figura 2.28a)

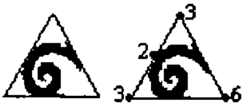


Figura 2.28a .- Un dominio fundamental

Figura 2.28b.- Pegado por la rotación de orden dos

Ahora pegamos los lados del dominio fundamental con las rotaciones que tiene, por la rotación de orden dos pegamos el lado que indica la figura 2.28b consigo mismo y por la rotación de orden seis pegamos los otros dos lados, como muestra la figura 2.28c. Los dos puntos de orden tres son equivalentes bajo las rotaciones.

Pegando todo (figura 2.28d) tenemos una esfera con tres puntos de rotación de órdenes seis, tres y dos (figura 2.28e).

Figura 2.28c.- Pegado por la rotación de orden seis

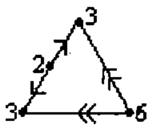


Figura 2.28d.

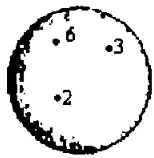


Figura 2.28e.- El orbifold

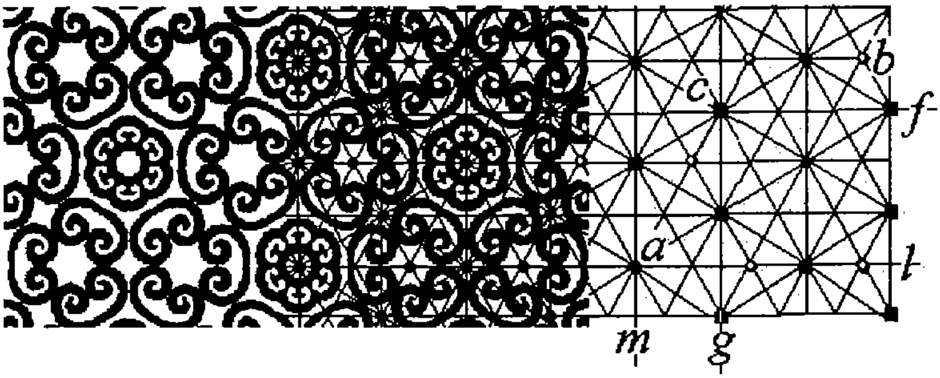


Figura 2.29

Ahora tenemos en la teselación de la figura 2.29 dos líneas de reflexión en *l* y *m*, que forman tres puntos kal: en *a* que es de orden seis, en *b* que es de orden tres y en *c* que es de orden dos. Además tiene dos líneas de reflexión paso en *f* y *g*.

El dominio fundamental queda totalmente determinado por las líneas de reflexión. (figura 2.29a)

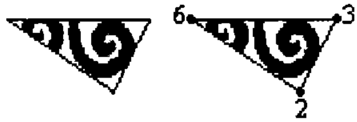


Figura 2.29a.- Un dominio fundamental

Otra vez las reflexiones no dejan pegar nada y el orbifold es un disco con sus tres puntos kal de órdenes seis, tres y dos. (figura 2.29b).

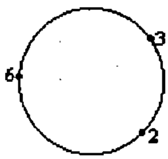


Figura 2.29b.- El orbifold

2.4 Una manera de nombrar a las teselaciones.

Ahora que a cada una de nuestras teselaciones le hemos asociado un orbifold, vamos a darles un nombre dependiendo de las características que tiene el orbifold. Todos los orbifolds son una esfera con algunas alteraciones, por ejemplo: un toro es una esfera con un asa; un cilindro es una esfera con dos fronteras (es decir dos hoyos); un plano proyectivo es una esfera con un hoyo, el cual está identificado por sus antípodas; a un hoyo identificado por sus antípodas, lo llamaremos "torcedura"; una banda de Möbius es una esfera con dos hoyos y uno de ellos está identificado por sus antípodas, etc. También pueden tener puntos de rotación, puntos kal. Estas características son lo que les va a dar su nombre.

- Por cada asa, pondremos **o** .
- Por cada torcedura que tenga el orbifold, pondremos **x** .
- Por cada frontera que tenga el orbifold, pondremos un *, que es equivalente a una línea de reflexión.
- Si tiene un punto de rotación de orden *n*, pondremos una **n**.
- Y por cada punto kal de orden *n*, pondremos ***n**.

Así que con estas instrucciones podemos nombrar a cada una de nuestras teselaciones.

- El orbifold de la teselación de la figura 2.13, es una esfera con una asa (un toro). (figura 2.30). Así que esta teselación se llama **o**.

Figura 2.13

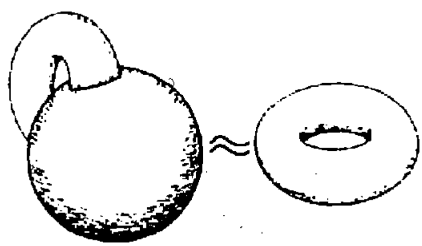


Figura 2.30.- Un toro **o**

- El segundo orbifold (figura 2.14), es una esfera con dos fronteras (dos hoyos), entonces marcamos un * por cada frontera. (figura 2.31), entonces la teselación se llama **.

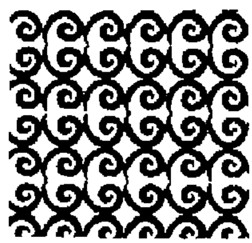


Figura 2.14

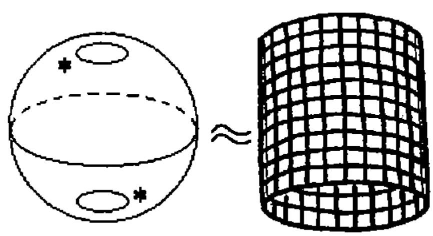


Figura 2.31.- Un cilindro **

* El orbifold de la teselación de la figura 2.15 es una esfera con una torcedura y una frontera; (es una banda de Möbius). La esfera con una torcedura es un plano proyectivo y con el hoyo (la frontera), se hace un plano proyectivo con un hoyo. Eso ya es una banda de Möbius, porque una banda de Möbius, pegada por la frontera con un disco, produce un plano proyectivo, ese disco es el hoyo. (ver figura 2.15h) Entonces le corresponde una x por la torcedura y un * por la frontera; por lo tanto el nombre completo de la teselación es: **x*** (figura 2.32).

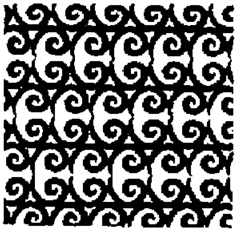


Figura 2.15

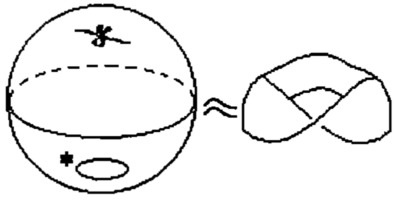


Figura 2.32.- Banda de Möbius **x***

* Como vimos en el ejemplo anterior, una esfera con un hoyo y una torcedura es una banda de Möbius, entonces si tomamos la esfera y la dividimos en dos y a cada mitad le ponemos una torcedura, cada mitad será una banda de Möbius, ya que es una torcedura con una frontera. (figura 2.33) Y si pegamos dos bandas de Möbius por la frontera nos da una botella de Klein, así que una esfera con dos torceduras es una botella de Klein, y le toca una x por cada torcedura; entonces el nombre completo de la teselación de la figura 2.16 es: **xx**. (Figura 2.34).

Figura 2.16

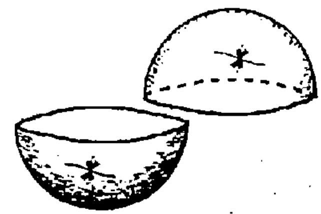


Figura 2.33

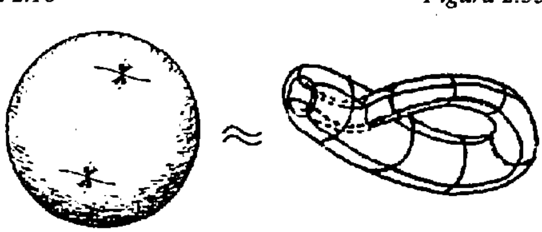


Figura 2.34.- Botella de Klein **xx**.

- El orbifold de la teselación de la figura 2.17, es una esfera con cuatro puntos de rotación de orden dos, entonces ponemos un 2 por cada punto de rotación de orden dos, por lo tanto el nombre completo de la teselación es; **2222**. (figura 2.35).

Figura 2.17

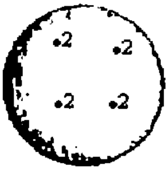


Figura 2.35.- Esfera con cuatro puntos de rotación **2222**

- El orbifold que le toca a la teselación de la figura 2.18, es una esfera con una frontera (un disco), con dos puntos de rotación de orden dos; como tiene una frontera, ponemos un * y por los puntos de rotación, ponemos 22, así que el nombre completo de la teselación es **22***. (figura 2.36).

Figura 2.18

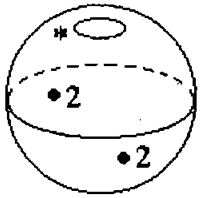


Figura 2.36.- Disco con dos puntos de rotación de orden dos **22***.

- El orbifold que le corresponde a la figura 2.19, es una esfera con una torcedura (un plano proyectivo), con dos puntos de rotación de orden dos; así que a la teselación le toca x, por la torcedura y 22 por los dos puntos de rotación de orden dos; así que el nombre de esta teselación es **22x**. (figura 2.37).

Figura 2.19

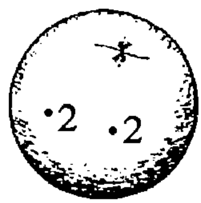


Figura 2.37.- Plano proyectivo con dos puntos de rotación de orden dos **22x**.

- Como el orbifold que le asociamos a la teselación de la figura 2.20 es un disco, (una esfera con una frontera), con dos puntos kal de orden dos, colocamos * por la frontera y *2 por cada punto kal y por el punto de rotación de orden dos, ponemos un 2; entonces queda 2**2*2, pero como no tiene más que una frontera, en la que viven todos los puntos kal "factorizamos" los asteriscos y el nombre de la teselación es **2*22**. (Figura 2.38).

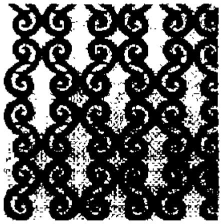


Figura 2.20

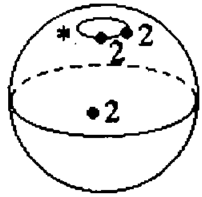


Figura 2.38.- Disco con dos puntos kal de orden dos y un punto de rotación de orden dos **2*22**

- El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.21, es una esfera con un hoyo (un disco) con cuatro puntos kal de orden dos, así que escribimos *2 por cada punto kal y * por la frontera, entonces queda **2*2*2*2 e igual que en el anterior es un disco, tiene sólo una frontera, por lo tanto todos viven en la misma frontera y es entonces que podemos "factorizar" los asteriscos y el nombre de la teselación es ***2222**. (figura 2.39).

Figura 2.21

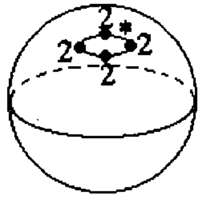


Figura 2.39.- Disco con cuatro puntos kal de orden dos ***2222**.

- El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.22, es una esfera con tres puntos de rotación de orden tres, entonces escribimos un 3 por cada rotación y el nombre completo de la teselación es **333**. (figura 2.40).

Figura 2.22

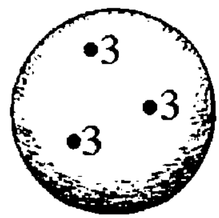


Figura 2.40.- Esfera con tres puntos de rotación de orden tres **333**.

• El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.23, es una esfera con una frontera, entonces apuntamos *, un punto de rotación de orden tres, escribimos 3, un punto kal de orden tres, escribimos *3; entonces el nombre de la teselación es **3*3**. (ya "factorizado" el asterisco). (figura 2.41).

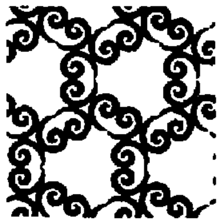


Figura 2.23

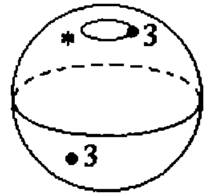


Figura 2.41.- Disco con un punto de rotación de orden tres y un punto kal de orden tres **3*3.**

• El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.24, es una esfera con una frontera, marcamos * por la frontera también tiene tres puntos kal de orden tres, ponemos *3 por cada uno; quedando entonces el nombre completo de la teselación ***333**. (figura 2.42).

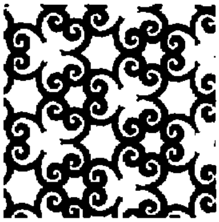


Figura 2.24

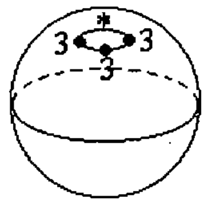


Figura 2.42.- Disco con tres puntos kal de orden tres ***333.**

• El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.25, es una esfera con tres puntos de rotación; uno de orden dos, lo marcamos 2, y dos de orden cuatro, los marcamos 44; entonces el nombre completo de la teselación es **442**. (figura 2.43).

Figura 2.25

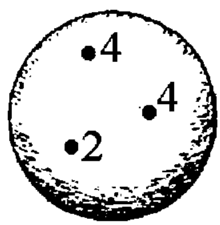


Figura 2.43.- Esfera con dos puntos de rotación de orden cuatro y uno de orden dos. **442**

- El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.26, es una esfera con una frontera (un disco), ponemos * por la frontera, un punto kal de orden dos, lo marcamos *2 y uno de rotación de orden cuatro; entonces el nombre de la teselación es **4*2**. (figura 2.44).

Figura 2.26

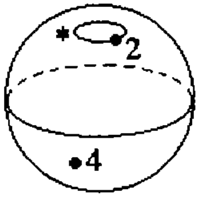


Figura 2.44.- Disco con un punto de rotación de orden cuatro y un punto kal de orden dos **4*2**.

- El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.27, es una esfera con una frontera, marcamos *, dos puntos kal de orden cuatro, marcamos *44 y un punto kal de orden dos; entonces se llama esta teselación ***442**. (figura 2.45).

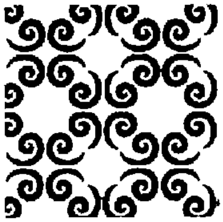


Figura 2.27

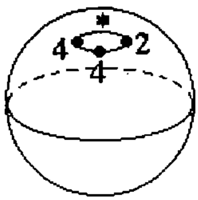


Figura 2.45.- Disco con dos puntos kal de orden cuatro y un punto kal de orden dos ***442**.

- El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.28, es una esfera con tres puntos de rotación; uno de orden dos, otro de orden tres y el último de orden seis. Así que se llama a esta teselación **632** (figura 2.46).

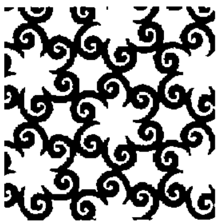


Figura 2.28

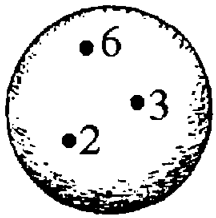


Figura 2.46.- Esfera con tres puntos de rotación de órdenes tres, seis y dos **632**.

- El orbifold que le corresponde a la teselación de la figura 2.29, es una esfera con una frontera, ponemos * y tres puntos kal de órdenes tres, seis y dos; entonces se le da el nombre a esta teselación de ***632**. (figura 2.47).

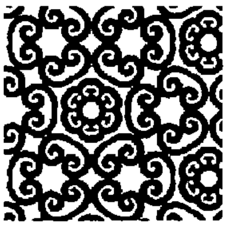


Figura 2.29

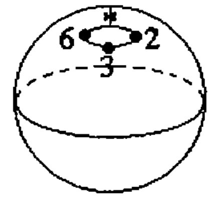


Figura 2.47.- Disco con tres puntos kal de órdenes seis, tres y dos ***632**

2.5 Lo que vale cada teselación

Hasta ahora, a cada teselación le hemos asignado un orbifold y un nombre (que se compone por los símbolos *o, *, x, n, *m*) que depende de las asas, fronteras, torceduras, puntos de rotación y puntos kal que tenga el orbifold.

Lo que vamos a hacer ahora, es darle un valor a cada símbolo y así sumando los símbolos del nombre de una teselación dada, tendremos el valor de la teselación; la manera de asignar el valor digamos a α, (donde α puede ser o, *, x, n, *m) es la siguiente:

Valor de $\alpha = \chi(S^2) - \chi(S^2 + \alpha)$ donde $\chi(x)$ es el número de Euler de x y $S^2 + \alpha$ es una esfera con un asa o una torcedura etc.

Pero antes necesitamos unas definiciones:

Una **celda** es topológicamente igual a un polígono y una **división en celdas** es lo que se obtiene al dividir una superficie en celdas; es como cubrir con una red de varios polígonos la superficie. A los cruces de la red se les llama **vértices**, las líneas entre los vértices se llaman **aristas** y los polígonos que forman la red se les llama **caras**. Y el número de Euler es:

$$\chi(x) = v - e + f$$

donde v es el número de vértices, e es el número de aristas y f es el número de caras en una división en celdas de x.

A continuación obtendremos el valor que tiene un asa, una frontera, una torcedura, un punto de rotación y un punto kal:

Sabemos que para cualquier división en celdas de la esfera tenemos que $\chi(S^2) = 2$ y $S^2 + o$, que es un toro y como $\chi(T^2) = 0$; entonces $\chi(S^2 + o) = 0$; y el valor de un asa es: $\chi(S^2) - \chi(S^2 + o) = 2 - 0 = 2$.

Ahora $S^2 + *$, esfera con una frontera, es un disco y como $\chi(D^2) = 1$; entonces el valor de una frontera es $\chi(S^2) - \chi(S^2 + *) = 2-1 = 1$.
Ya sabemos que $S^2 + x$, es un plano proyectivo y $\chi(P^2) = 1$; por lo que tenemos que el valor de una torcedura es $\chi(S^2) - \chi(S^2 + x) = 2-1 = 1$.

Ya sólo nos falta calcular el valor de un punto de rotación de orden n r_n y el de un punto kal de orden m k_m. Para esto, debemos calcular primero $\chi(S^2 + r_n)$ y $\chi(S^2 + k_m)$, que no es propiamente la característica de Euler normal, ya que no son variedades, sino que $S^2 + r_n$ y $S^2 + k_m$ son orbifolds, pero lo vamos a calcular de la misma manera v – e +f de una división en celdas dada, sólo hay que tener cuidado en como afecta el punto de rotación y el punto kal.

Para saber cuánto vale un punto de rotación r_n que es de orden n, tenemos que calcular:
$\chi(S^2) - \chi(S^2 + r_n)$, como ya sabemos que $\chi(S^2) = 2$, nos falta saber $\chi(S^2 + r_n)$ y lo haremos de la siguiente manera:

Tomamos una esfera y una división en celdas de ésta, observamos que la diferencia entre S^2 y $S^2 + r_n$ es un punto; entonces de la esfera con su división en celdas escogemos un vértice cualquiera, lo quitamos, y en su lugar colocamos un punto r_n. Entonces en la cuenta de los vértices para la característica de Euler, restamos 1, porque quitamos un vértice y añadimos un valor a;

$$\chi(S^2 + r_n) = v' - e' + f'. \qquad v' = v - 1 + a.$$

Para saber cuánto vale a recordaremos que r_n es un punto de rotación de orden n (figura 2.48)

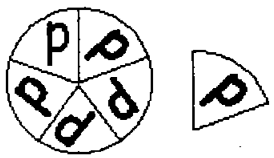


Figura 2.48

Si tomamos cualquier vecindad pequeña del punto vamos a encontrar que cada punto se repite n veces; entonces para no contar muchas veces el mismo punto, tomamos 1/n parte; y como cada vértice vale 1, entonces el valor de a = 1/n

$$v' = v-1 + 1/n = v + (1-n)/n.$$

Otros puntos que pudieran ser candidatos a tener un valor distinto, pudieran ser los que están en el dominio fundamental cerca de la rotación, pero como para esos puntos existe una vecindad, la cual no tiene puntos repetidos, entonces su valor no cambia.
Así que al momento de contar para obtener la característica de Euler, sólo se ven afectados los vértices; por lo tanto

$$\begin{aligned}\chi(S^2 + r_n) &= v + (1-n)/n - e + f \\ &= v - e + f + (1-n)/n. \\ &= 2 + (1-n)/n.\end{aligned}$$

Entonces $\chi(S^2) - \chi(S^2 + r_n) = 2 - 2 + (n-1)/n = (n-1)/n$.
De lo que concluimos que un punto de rotación r_n que es de orden n, vale (n-1)/n.

Ahora para obtener el valor de un punto kal de orden m k_m, el procedimiento es parecido.
Los puntos kal viven en fronteras (ya que son la intersección de líneas de reflexión). Entonces tenemos que considerar una esfera con una frontera y un punto kal; en realidad es un disco con un punto kal

$$\chi (S^2 + * + k_m) = \chi (D^2 + k_m)$$

Y como sabemos que las fronteras valen 1; a su resultado le restamos 1 y ese será el valor del k_m.
Entonces tomamos un disco y como con cualquier división en celdas del disco tenemos que $\chi (D^2) = 1$; entonces tomamos una división en celdas que nos facilite hacer la cuenta con el punto kal. (figura 2.49).

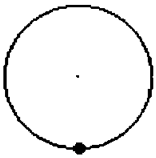


Figura 2.49.- División en celdas

Figura 2.50.- Es un k_3 y hay 6 copias

Esa división tiene un vértice, una arista y una cara; ahora ese vértice lo cambiamos por un punto kal de orden m y como para cualquier vecindad, por muy pequeña que sea del punto kal, tenemos que cada punto se repite 2m veces. (figura 2.50); entonces para no contar muchas veces el mismo punto, tomamos 1/2m parte de su valor original; entonces tenemos que $v = 1/2m$.

Para la arista, como vive en la frontera, vale la mitad ya que para toda vecindad de los puntos en la línea de reflexión (que es la frontera del disco) los puntos se repiten dos veces. (figura 2.51); entonces $e = 1/2$.

Por último, la única cara no se ve afectada, ya que está en el interior y los puntos del interior tienen vecindades en las cuales no se repite ningún punto. (figura 2.52); entonces $f = 1$

Figura 2.51.- Los puntos se repiten por la reflexión

Figura 2.52.- No hay puntos repetidos

Por lo tanto

$$\chi (D^2 + k_m) = v - e + f = 1/2m - 1/2 + 1 = (1+m)/2m \qquad y$$
$$\chi (S^2) - \chi (D^2 + k_m) = 2 - (1+m)/2m = (4m -1-m)/2m = (3m -1)/2m =$$
$$= 2m/2m + (m-1)/2m = 1+ (m-1)/2m$$

que es el valor de una frontera con un punto kal de orden n y como ya vimos que cada frontera vale 1; entonces podemos concluir que k_m vale $(m-1)/2m$.

2.6 ¿Cuántas formas hay de sumar 2?

Acordémonos que...

asa	o → 2		r_n	n → n-1/n
frontera	* → 1			
torcedura	x → 1		k_m	*m → m-1/2m

Y observemos que...

Orbifold	Nombre	Valor
esfera con un asa, toro	o	2
esfera con dos fronteras, cilindro	**	1 + 1 = 2
esfera con una frontera y una torcedura, banda de Möbius	x*	1 + 1 = 2
esfera con dos torceduras, botella de Klein	xx	1 + 1 = 2
esfera con cuatro r_2	2222	1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 2
esfera con dos r_2 y una frontera	22*	1/2 + 1/2 + 1= 2
esfera con dos r_2 y una torcedura, Proyectivo con dos r_2	22x	1/2 + 1/2 + 1= 2
esfera con un r_2, una frontera y dos k_2	2*22	1/2 + 1 + 1/4 + 1/4 = 2
esfera con una frontera y cuatro k_2	*2222	1 + 1/4 + 1/4 + 1/4+ 1/4= 2
esfera con tres r_3	333	2/3 + 2/3 + 2/3 = 2
esfera con un r_3, una frontera y un k_3	3*3	2/3 + 1 + 2/6 = 2
esfera con una frontera y tres k_3	*333	1 + 2/6 +2/6 +2/6 = 2
esfera con dos r_4, y un r_2	442	3/4 +3/4 +1/2 = 2
esfera con un r_4, una frontera y un k_2	4*2	3/4 + 1 + 1/4 = 2
esfera con una frontera, dos k_4, y un k_2	*442	1 + 3/8 + 3/8+ 1/4 = 2
esfera con un r_6, un r_3 y un r_2	632	5/6 + 2/3 + 1/2 = 2
esfera con una frontera, un k_6, un k_3 y un k_2	*632	1 + 5/12 + 2/6 + 1/4 = 2

Unas herramientas.

En una teselación euclidiana no pueden haber puntos de rotación de orden 5.

Supongamos que tenemos una rotación r_5 de orden 5 entre las simetrías de una teselación, entonces hay una infinidad de copias de r_5 . Tomamos un r_5', tal que sea el más cercano a r_5. Rotamos 72° a r_5' desde r_5 y tenemos a r_5'' que vive en la misma órbita de r_5'(y de r_5). Ahora desde r_5'' rotamos 72° a r_5' y da r_5''', que también es un punto de rotación de orden 5 y vive en la misma órbita de todos los anteriores, pero este punto está más cerca de r_5 que los otros. (figura 2.53), por lo tanto no hay puntos de rotación de orden 5 en una teselación euclidiana.

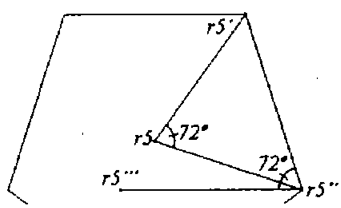


Figura 2.53

En una teselación euclidiana no pueden haber puntos de rotación de orden n, $n \geq 7$.

Supongamos que existe un punto de rotación de orden n, $n \geq 7$ r_n, en una teselación, tomamos un r_n' que sea el más cercano a r_n (figura 2.52). Ahora a partir de r_n', rotamos a r_n, un ángulo $\pi/n = \alpha$ y obtenemos a r_n''. Observamos que $\alpha < 60°$. Por lo tanto r_n'', está más cerca de r_n, que r_n', lo que es una contradicción, entonces no hay puntos de rotación de orden n, $n \geq 7$ en una teselación euclidiana.

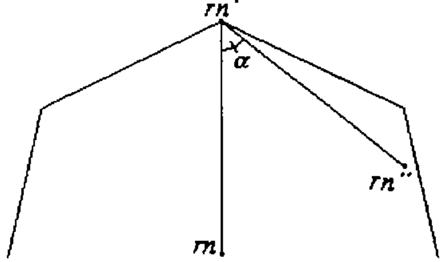


Figura 2.52

El valor de todos los ejemplos que hemos visto es 2. Veamos si éstas son todas las formas de sumar 2, es decir, si tomamos todas las combinaciones de símbolos para sumar 2, y como vimos que rotaciones sólo podemos tener de órdenes 2, 3, 4 y 6 y puntos kal de órdenes 2, 3, 4 y 6 (a los puntos kal de órdenes 5 y n, $n \geq 7$ no los consideramos porque generan rotaciones de órdenes 5 y n, $n \geq 7$, respectivamente) entonces podemos ver el problema como todas las formas de sumar 2 con los siguientes números:

o	x,*	r_2	r_3	r_4	r_6	k_2	k_3	k_4	k_6
2	1	1/2	2/3	3/4	5/6	1/4	1/3	3/8	5/12

Con la condición de que para usar los últimos cuatro (que corresponden a puntos kal), antes debemos usar un uno para la frontera donde van a vivir.

2 equivale a o

1+...

1+1= 2 equivale a xx, x*, **

1+1/2+...

1+1/2+1/2 = 2 equivale a x22, 22*	
1+1/2+2/3 = 13/6 > 2	
1+1/2+3/4 = 9/4 > 2	
1+1/2+5/6 = 7/3 > 2	
1+1/2+1/4+1/4 = 2 equivale a 2*22	
1+1/2+1/3 = 11/6	el 1/6 que le falta nadie se lo puede dar.
1+1/2+3/8 = 15/8	el 1/8 que le falta nadie se lo puede dar.
1+1/2+5/12 = 23/12	el 1/12 que le falta nadie se lo puede dar.

1+2/3 +...

1+2/3+2/3 = 7/3 > 2 1+2/3+3/4 = 29/12 > 2 1+2/3+5/6 = 5/2 > 2 1+2/3+1/4 = 23/12 1+2/3+1/3 = 2 equivale a 3*3 1+2/3+3/8 = 49/24 > 2 1+2/3+5/12 = 25/12 > 2	el 1/12 que le falta nadie se lo puede dar

1+3/4 +...

1+3/4+3/4 = 5/2 > 2 1+3/4+5/6 = 31/12 > 2 1+3/4+1/4 = 2 equivale a 4*2 1+3/4+1/3 = 25/12 > 2 1+3/4+3/8 = 17/8 > 2 1+3/4+5/12 = 13/6 > 2

1+5/6 +...

1+5/6 +5/6 > 2 1+5/6 + 1/4 = 25/12 > 2 1+5/6 + 1/3 = 13/6 > 2 1+5/6 + 3/8 = 53/24 > 2 1+5/6 + 5/12 = 9/4 > 2

1+1/4 +...

1+1/4 + 1/4 = 3/2	El 1/2 que le falta (como nos hemos estado acabando las opciones), sólo se lo puede dar 1/4 +1/4, ya que con k_3, k_4, y k_6. (que son nuestras opciones), no podemos hacerlo.
1+1/4 +1/4 + 1/4 +1/4 = 2 equivale a *2222	Estas son todas las posibilidades de poner 1+1/4 + 1/4 + ...
1+1/4 + 1/3 = 19/12 1+1/4 + 1/3 + 5/12 = 2 equivale a *236	Los 5/12 que faltan, sólo se los puede dar un k_6, ya que con k_3 y k_4, no podemos.
1+1/4 + 3/8 = 13/8 1+1/4 +3/8 + 3/8 = 2 equivale a *244	Los 3/8 que le faltan, sólo se los puede dar un k_4, ya que con un k_6, no podemos.
1+1/4 + 5/12 = 5/3 1+1/4 + 5/12 + 1/3 = 2 equivale a *263	Le falta 1/3 que se lo da un k_3. Que ya lo teníamos.

1+1/3+ ...

1+1/3 + 1/3 = 5/3 1+1/3 + 1/3 + 1/3 = 2 equivale a *333	El 1/3 que le falta, se lo va a dar un k_3, ya que k_4, y k_6, no pueden.
1+1/3 + 3/8 = 41/24 1+1/3 + 3/8 + 3/8 = 25/12 > 2 1+1/3 +3/8 + 5/12 = 17/8 >2	Le faltan 7/24 para sumar 2, que como hemos terminado con las opciones debería de obtenerlo de un k_4 o un k_6, lo cual no sucede.
1+1/3 + 5/12 = 7/4 1+1/3 + 5/12 + 1/4 = 2 equivale a *362	El 1/4 que le falta, se lo da un k_2, que como ya habíamos agotado las posibilidades, se repite.

1+3/8 + ...

1+3/8 + 3/8 = 7/4 1+3/8+ 3/8 + 1/4 = 2 equivale a *442	El 1/4 que le falta, se lo va a dar un k_2, (éste está repetido).
1+3/8+ 5/12 = 43/24	Le faltan 5/24 para sumar 2, y nadie se los puede dar.

1+5/12 + ...

1+5/12 + 5/12 = 11/6	Y nadie le puede dar el 1/6 que le falta.

Con éste último terminamos con todas las posibilidades de tener no sólo 1 + 5/12 + ..., sino que también de tener 1+ ... Entonces, ya tampoco podemos usar puntos kal, porque ellos requieren de un 1 para poder estar.

Entonces vamos a ver nuestras opciones, pero ya sólo con 1/2, 2/3, 3/4 y 5/6.

1/2 + ...

1/2 + 1/2 +...

1/2+ 1/2+ 1/2 = 3/2	El 1/2 sólo se le puede dar un r_2.
1/2+ 1/2+ 1/2 +1/2 = 2 equivale a 2222	
1/2+ 1/2+ 2/3 = 5/3	El 1/3 que le falta, nadie se lo puede dar.
1/2+ 1/2+ 3/4 = 7/4	El 1/4. idem.
1/2+ 1/2+ 5/6 = 11/6	El 1/6. idem.

1/2+ 2/3 + ...

1/2+ 2/3+ 2/3 = 11/6	El 1/6. idem.
1/2+ 2/3+ 3/4 = 23/12	El 1/12. idem.
1/2+ 2/3+ 5/6 = 2 equivale a 236	Uno de nuestros ejemplos

1/2 + 3/4 +...

1/2+ 3/4+ 3/4 = 2 equivale a 244
1/2+ 3/4+ 5/6 = 25/12 > 2

1/2 + 5/6 +...

1/2+ 5/6+ 5/6 = 13/6 > 2

2/3 + ...

2/3 + 2/3 = 4/3	Y los 2/3 que le faltan se los va a dar un r_3.
2/3 + 2/3 + 2/3 = 2 equivale a 333	
2/3 + 3/4 = 17/12	Los 7/12 que le faltan se los debería de dar un r_4 o
2/3 + 3/4 + 3/4 = 13/6 > 2	un r_6, lo cual no sucede.
2/3 + 3/4 + 5/6 = 9/4 > 2	
2/3 +5/6 = 3/2	El 1/2 que le falta se los da un r_2. (por lo tanto, se
2/3 + 5/6 + 1/2 = 2 equivale a 362	repite).

3/4 + ...

3/4 + 3/4 = 3/2	El 1/2 que le falta se los da un r_2, entonces, se
3/4 + 3/4 + 1/2 = 2 equivale a 442	repite.
3/4 + 5/6 = 19/12	
	Los 5/12 que le faltan nadie se los puede dar.

5/6+ ...

5/6 + 5/6 = 5/3	El 1/3 que le falta nadie se lo puede dar.

Con esto hemos terminado con todas las opciones de las combinaciones de símbolos (de simetrías), para que sumen 2, y vimos que los ejemplos que teníamos desde el principio, que son 17; son todos los que suman 2.

Teorema:
Las teselaciones del plano euclidiano, cuyo nombre vale 2, son 17.*

*No se dio una demostración de este Teorema, sólo se ilustró mediante ejemplos.
Una demostración de este Teorema se encuentra en *The orbifold Notation for Surface Groups*, In: M.W. Liebeck and J. Saxl (eds.): *Groups Combinatorics and Geometry*, Proceedings of the L.M.S. Durham Symposium, July 5-15, Durham, U.K., 1990, L.M.S. Lecture Notes Ser. 165, Cambridge University Press, Cambridge, 438-447, 1992.

3

Teselaciones en la esfera

3.1 Teselaciones en la esfera.

Veamos qué pasa con las teselaciones sobre la esfera.

Podemos pensar a los sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, e icosaedro) como teselaciones en la esfera, sólo hay que "inflarlos" para que tomen la forma de esfera.

Por ejemplo: Si tomamos el cubo y lo "inflamos" queda la esfera dividida en seis "cuadrados" iguales, que es la teselación que tiene un balón de voleibol, tal vez la teselación más conocida sobre la esfera es la que tiene el balón de fútbol que está formada por pentágonos, rodeados de hexágonos.

Analizaremos a continuación estos ejemplos:

Tetraedro

Tiene un k_3 en el centro del triángulo, otro k_3 (diferente) en el vértice, un k_2 a la mitad de la arista y una reflexión paso por los k_2. (figura 3.1). Uniendo los tres puntos kal, tenemos el dominio fundamental que es 1/6 de la cara y el orbifold es un disco. Entonces concluimos que se llama *332 y su valor es $1+ 1/3 + 1/3 + 1/4 = 23/12 < 2$

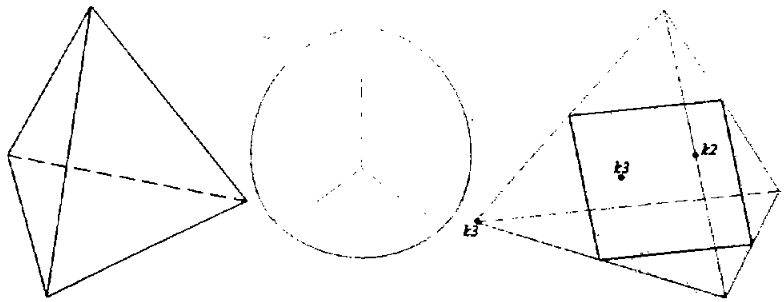


Figura 3.1

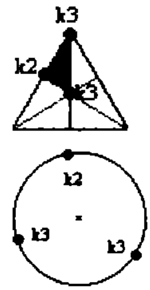


Figura 3.2

Cubo

Tiene un k_4 en el centro de la cara (del cuadrado), un k_3 en el vértice, un k_2 a la mitad de la arista y una reflexión paso por los k_2. (figura 3.3). El dominio fundamental lo obtenemos uniendo los puntos kal que es 1/8 de la cara, el orbifold es un disco. Así que su nombre es: *432 y su valor es $1+ 3/8 + 1/3 + 1/4 = 47/24 < 2$.

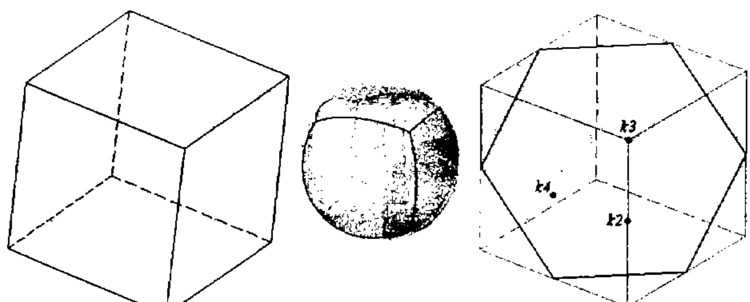


Figura 3.3

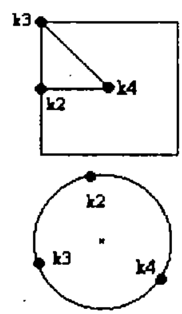


Figura 3.4

Octaedro

Tiene un k_4 en el vértice, un k_3 en el centro de la cara, un k_2 a la mitad de la arista y una reflexión paso por los puntos medios de las aristas (figura 3.5). Uniendo los tres puntos kal, tenemos el dominio fundamental que es 1/6 de la cara y el orbifold es un disco. Entonces concluimos que se llama *432 igual que el cubo, esto pasa porque ambos tienen las mismas simetrías; si al cubo y al octaedro, ya en la esfera, les marcamos todas sus simetrías, se harían indistinguibles

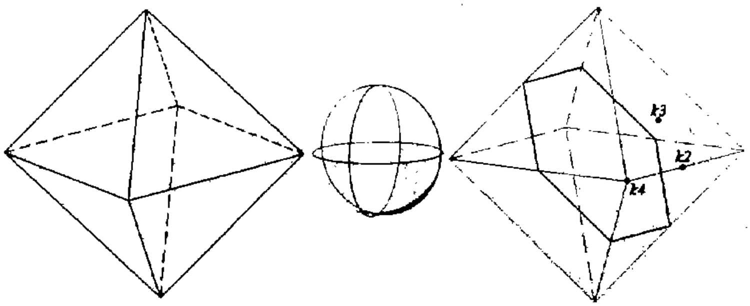


Figura 3.5

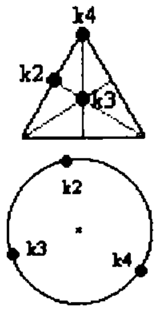


Figura 3.6

Dodecaedro

Tiene un k_5 en el centro de la cara, un k_3 en el vértice, un k_2 a la mitad de la arista y dos reflexiones paso. (figura 3.7). Uniendo los puntos kal, tenemos el dominio fundamental que es 1/10 de la cara y el orbifold es un disco.
Y su nombre es *532 y su valor es $1 + 4/10 + 1/3 + 1/4 = 119/60 < 2$

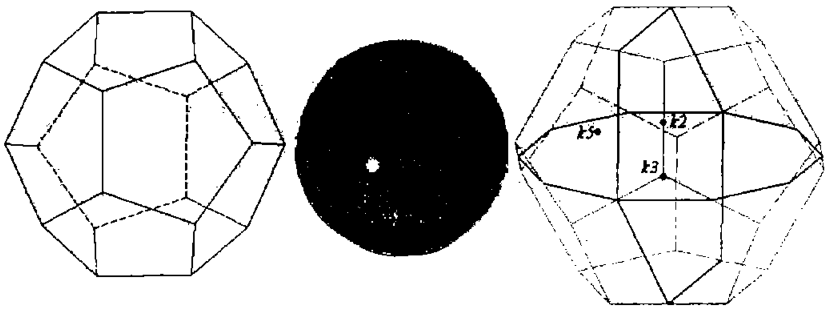


Figura 3.7

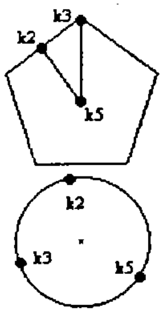


Figura 3.8

Icosaedro

Tiene un k_5 en el vértice, un k_3 en el centro de la cara, un k_2 a la mitad de la arista y dos reflexiones paso. (figura 3.8). Como tiene las mismas simetrías que el dodecaedro, entonces también es un *532.

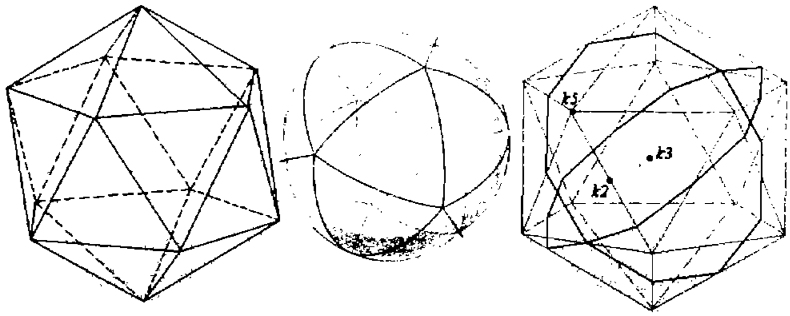


Figura 3.8

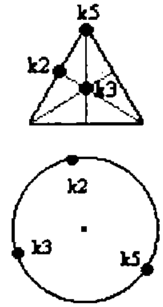


Figura 3.9

Balón de Fútbol

En el centro del pentágono hay un k_5, en el centro del hexágono, un k_3, un k_2 a la mitad de la arista entre dos hexágonos y dos reflexiones pasos. Al unir los tres puntos kal, tenemos el dominio fundamental y el orbifold es un disco. Entonces tenemos otra vez *532

Esto significa que si en un dodecaedro, en un icosaedro y en un balón de fútbol, marcamos todas sus simetrías y todas las líneas que forman la teselación de un solo color, serían indistinguibles, uno del otro.

Veamos ahora otros ejemplos de teselaciones en la esfera, generándolos a partir de los frisos.
Se sabe que el número de grupos de simetrías de teselaciones con una traslación en el plano euclidiano (los llamados frisos) son siete* y con cada uno de ellos podemos generar una teselación para la esfera.

Tomamos un friso, entonces tengo teselada una banda infinita, cortamos la banda de modo que los extremos pertenezcan a la misma órbita bajo sus simetrías. (figura 3.10); pegamos los extremos para tener un cilindro teselado. (figura 3.11). Ahora podemos deformar el cilindro para que se parezca a una esfera (figura 3.12).

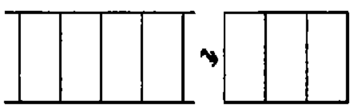


Figura 3.10

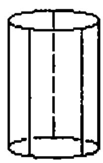


Figura 3.11

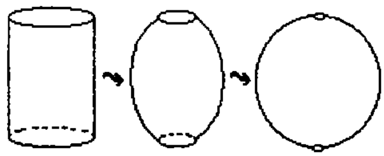


Figura 3.12

*Una referencia está en *Tilings and Partterns* Grunbaum, Branko New York: W.H. Freeman, C 1987

De manera que le faltan dos puntos para ser una esfera y resulta que esos puntos se los podemos poner con un k_n o un r_n y *n* será el número de dominios fundamentales del grupo original que tenga la banda cortada.

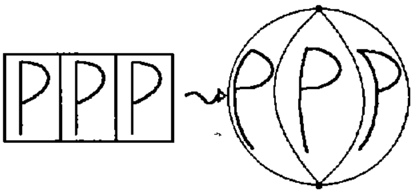


Figura 3.13

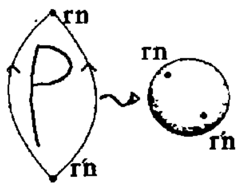


Figura 3.14

En la figura 3.13, se pusieron dos r_n, el dominio fundamental es un gajo y el orbifold una esfera con dos r_n, entonces se llama nn y su valor es (n-1)/n + (n-1)/n = 2- 2/n < 2.

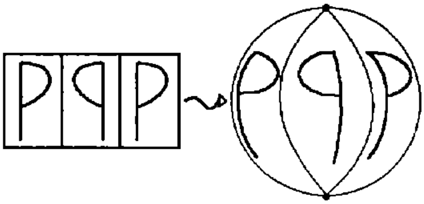


Figura 3.15

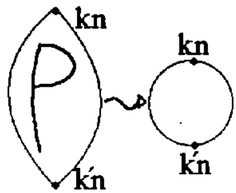


Figura 3.16

En la figura 3.15, las líneas de reflexión en la banda, al hacer la esfera, se juntaron en el polo norte y sur, por lo que tenemos dos k_n; el dominio fundamental es un gajo y el orbifold es un disco con dos k_n, su nombre es *nn y su valor es (n-1)/2n + (n-1)/2n = 2- 1/n < 2.

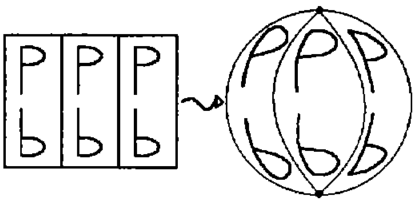


Figura 3.17

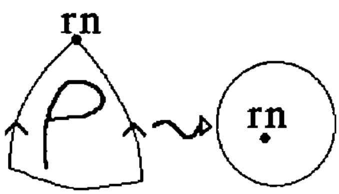


Figura 3.18

Tiene un punto de rotación, ya que por la línea de reflexión que tiene en el ecuador, el polo norte y sur, son el mismo, figura 3.17, su dominio fundamental es la mitad de un gajo y el orbifold es un disco con un r_n y su nombre es n* y su valor es (n-1)/n + 1 = 2- 1/n < 2.

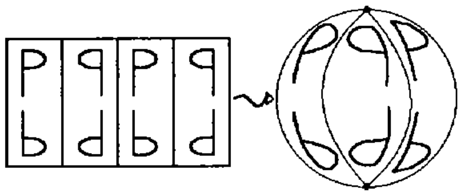


Figura 3.19

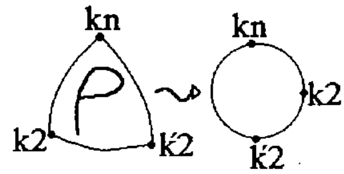


Figura 3.20

En la figura 3.19, las líneas de reflexión se juntan en el polo norte y el sur, que son el mismo por la otra reflexión, la del ecuador y forman un k_n y los dos k_2, que estaban en la banda se preservan en la esfera. El dominio fundamental es medio gajo y el orbifold es un disco con tres puntos kal, su nombre es *22n y su valor es 1 + 1/4 +1/4 + (n-1)/2n = 2-1/2n < 2.

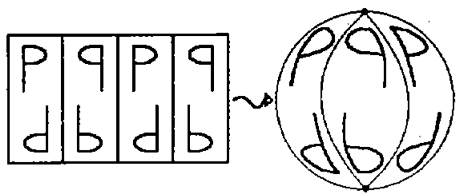


Figura 3.21

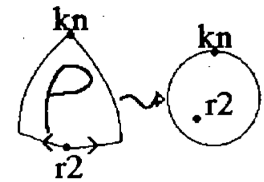


Figura 3.22

En la figura 3.21, las líneas de reflexión se juntan al formar la esfera en el polo norte, que con el r_2, que tenía desde la banda, es el mismo que el polo sur, el dominio fundamental es medio gajo, el orbifold es un disco con un k_n, y un r_2, su nombre es 2*n y su valor es:
1/2 + 1 + (n-1)/2n = 2- 1/2n < 2.

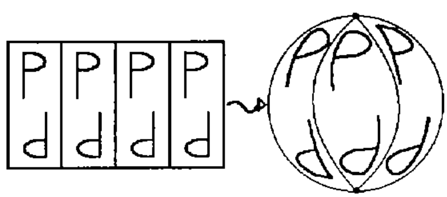


Figura 3.23

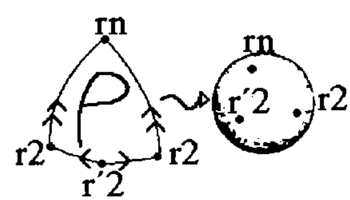


Figura 3.24

Los dos r_2 que están en la banda, se heredan a la esfera y con esas rotaciones el polo norte y el sur, son el mismo que es un r_n. (figura 3.23). El dominio fundamental es medio gajo y el orbifold es una esfera con dos r_2 y un r_n, se llama 22n y su valor es 1/2 + 1/2 + (n-1)/n = 2- 1/n < 2.

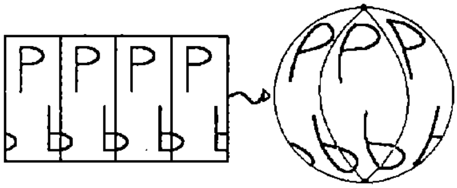


Figura 3.25

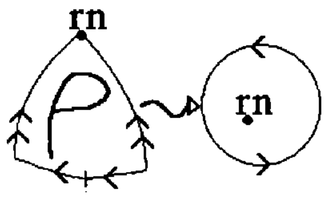


Figura 3.26

En la banda, hay una reflexión paso que se hereda a la esfera que hace que el polo norte y el sur, sean el mismo, que es un r_n. (figura 3.25). El dominio fundamental es medio gajo y el orbifold es un plano proyectivo con un r_n, su nombre es nx y su valor es $(n-1)/n + 1 = 2- 1/n < 2$.

Hay más teselaciones de la esfera que podemos deducir de las que ya tenemos; si tomamos un tetraedro que es un *332 y a cada cara la dividimos en tres y la "marcamos" (figura 3.27), tenemos un 332 y su valor es $2/3 + 2/3 + 1/2 = 11/6 < 2$.

Del cubo que es un *432 dividiendo cada cara en cuatro y "marcándola" (figura 3.28), tenemos un 432 y su valor es $3/4 + 2/3 + 1/2 = 23/12 < 2$.

Y del dodecaedro que es *532 las caras las dividimos en cinco y las "marcamos" (figura 3.29), tenemos un 532 y su valor es $4/5 + 2/3 + 1/2 = 59/30 < 2$.

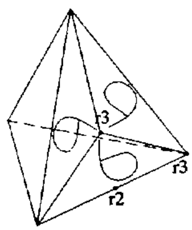


Figura 3.27

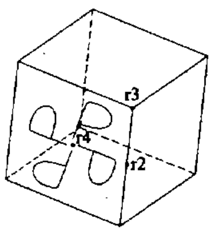


Figura 3.28

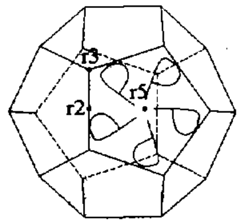


Figura 3.29

Otra teselación de la esfera es 3*2 y su valor es $2/3 + 1 + 1/4 = 23/12 < 2$. (figura 3.30).

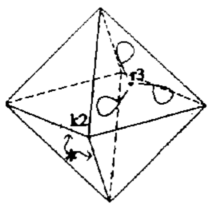


Figura 3.30.- Las aristas son líneas de reflexión.

Y por último las tres más sencillas:

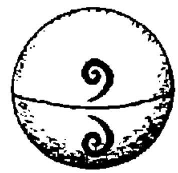


Figura 3.31.- * y su valor es 1

Figura 3.32.- x y su valor es 1

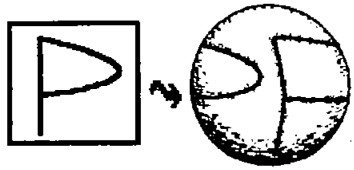


Figura 3.33.- No tiene simetrías y vale cero

nombre	valor
---	0
*	1
x	1
*332	23/12
*432	47/24
*532	119/60
332	11/6
432	23/12
532	59/30
3*2	23/12

nombre	valor
nx	2 – 1/n
2nn	2 – 1/n
nn	2 – 2/n
*nn	2 – 1/n
n*	2 – 1/n
*22n	2 – 1/2n
2*n	2 – 1/2n

Estos son todos los grupos de simetrías sobre la esfera (ésto no lo demostraré) y todos valen menos que dos.

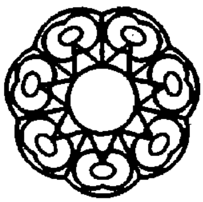
Teorema*

Las teselaciones sobre la esfera valen menos que dos y son diecisiete (si contamos cada familia generada por los frisos como uno).

* Una demostración de este Teorema se encuentra en *The orbifold Notation for Surface Groups*, In: M.W. Liebeck and J. Saxl (eds.): *Groups Combinatorics and Geometry*, Proceedings of the L.M.S. Durham Symposium, July 5-15, Durham, U.K., 1990, L.M.S. Lecture Notes Ser. 165, Cambridge University Press, Cambridge, 438-447, 1992.

Teselaciones en el plano hiperbólico

4



4.1 Teselaciones en el plano hiperbólico.

Por último vemos unos ejemplos de teselaciones de plano hiperbólico.

Como en el plano hiperbólico "hay más espacio" que en el euclidiano entonces podemos tener más líneas de reflexión (lo que genera puntos kal de orden mayor) o rotaciones de orden mayor. Esto sugiere que el valor de los grupos de simetría será mayor que el valor de los euclidianos, para entenderlo mejor analicemos unos cuantos ejemplos.

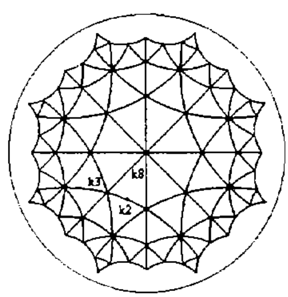


*Figura 4.1.-**238

La teselación de la figura 4.1 tiene un k_2, un k_6 y un k_8 y una reflexión paso por los k_2, uniendo los puntos kal tenemos el dominio fundamental y como el orbifold es un disco, entonces se llama *238 y su valor es 1 + 1/4 + 1/3 + 7/16 = 97/48 > 2.

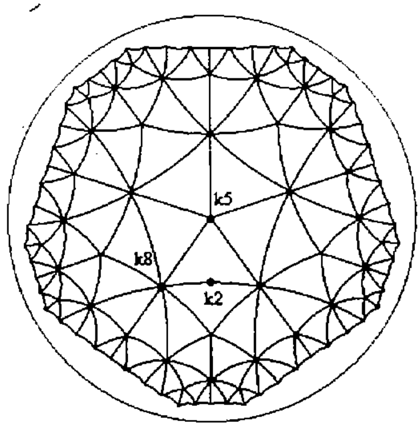


Figura 4.2.-*852

La teselación de la figura 4.2 tiene un k_2, un k_5 y un k_8 y una reflexión paso por los k_2, uniendo los puntos kal tenemos el dominio fundamental y como el orbifold es un disco, entonces se llama *258 y su valor es 1 + 1/4 + 4/10 + 7/16 = 167/80 > 2.

En el plano hiperbólico existen triángulos "infinitos" (como el de la figura 4.3) donde todos sus ángulos son cero y con éste podemos generar una teselación reflejándolo en sus lados (figura 4.4), éste tiene un k_3 en el centro del triángulo, un k_2 en el punto medio del triángulo, y un k_∞ en el "vértice" del triángulo. El dominio fundamental es 1/6 del triángulo y como el orbifold es un disco se llama *23 ∞ y su valor es $1 + 1/4 + 1/3 + \lim_{n \to \infty} (n-1)/2n = 25/12 > 2$.

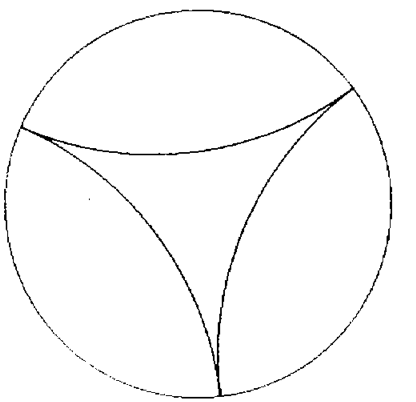


Figura 4.3.-Sus "ángulos" miden cero

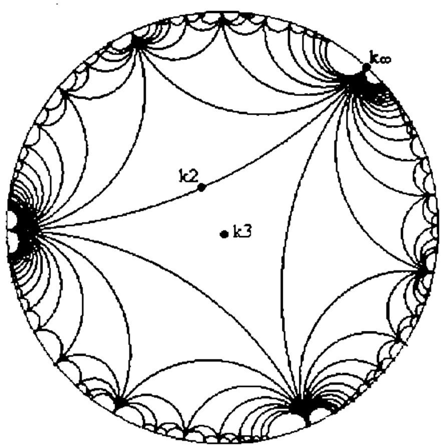
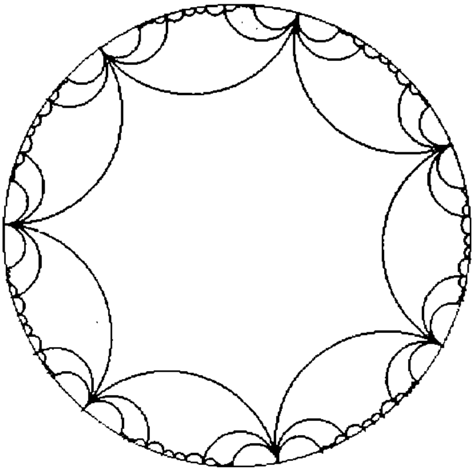


Figura 4.4.-Teselación a partir del triángulo

En realidad podemos tener cualquier polígono regular con todos sus "ángulos" midiendo cero y con éste generar una teselación, reflejándolo sobre sus lados como lo hicimos con el triángulo. Entonces tendríamos un k_{2n}, en el centro del polígono, un k_2, en el punto medio del lado y un k_∞ en el vértice del polígono. El dominio fundamental sería 1/2n parte del polígono, el orbifold sería un disco, su nombre: *2 2n ∞ y su valor es $1 + 1/4 + (2n - 1)/4n + \lim_{n \to \infty} (n-1)/2n = 9/4 - 1/4n$ y como $n \geq 3 \Rightarrow 9/4 - 1/4n > 2$



Lo que quiero mostrar con estos ejemplos es que el siguiente teorema vale

Teorema*
El valor de las teselaciones sobre el plano hiperbólico es mayor que dos.

Resumiendo podemos decir que las teselaciones sobre la esfera valen menor que dos, las euclidianas valen dos y las hiperbólicas valen mayor que dos.

*Una demostración de este Teorema se encuentra en *The orbifold Notation for Surface Groups*, In: M.W. Liebeck and J. Saxl (eds.): *Groups Combinatorics and Geometry*, Proceedings of the L.M.S. Durham Symposium, July 5-15, Durham, U.K., 1990, L.M.S. Lecture Notes Ser. 165, Cambridge University Press, Cambridge, 438-447, 1992.

Bibliografía

[1] *Tilings and Partterns*. Grunbaum, Branko New York: W.H. Freeman, C 1987.

[2] *La Forma del Espacio*. Jeffrey R. Weeks.- Serie: Textos, Vínculos Matemáticos No. 225, 1999. Taller de Publicaciones de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

[3] Notas de Clase. Chaim Goodman-Strauss.