



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN



DISEÑO DE ALGORITMOS PARA ESTIMACIÓN ESPECTRAL BASADOS
EN LA DISTRIBUCIÓN TIEMPO FRECUENCIA DE BORN JORDAN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

P R E S E N T A
JUAN ANTONIO CONTRERAS ARVIZU
DIRECTOR.- M. EN C. ERNESTO RUBIO ACOSTA

m340758

ENERO 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo brindado por el Departamento de Ingeniería de Sistemas Computacionales y Automatización, DISCA, del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, IIMAS, de la UNAM.

Se agradece el apoyo brindado por el M. en C. Ernesto Rubio, Director de esta tesis, así como al Dr. Fabián Gacía Nocetti, Codirector, De igual forma al Dr. Julio Solano Jefe del DISCA, por permitirme participar en este proyecto de investigación, y a la Dr. Lucia Medina por revisar este trabajo.


Se agradece el apoyo brindado por los proyectos CONACYT (No. 37913-A) "Arquitecturas y algoritmos para el análisis de señales Dópler ultrasónicas de flujo sanguíneo" y del proyecto DGAPA (No.IN117999) "Arquitectura y algoritmos de alto desempeño para la generación y procesamiento de imágenes acústicas".

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: CONTRERAS REVIZU

JUAN ANTONIO

FECHA: 04 / FEBRERO / 2005

FIRMA: 

ÍNDICE

Portada
Agradecimientos
Índice

1. Introducción.....	1
1.1. Planteamiento del problema	
1.2. Estimación espectral	
1.3. Hipótesis	
1.4. Objetivos	
1.5. Contribuciones	
1.6. Descripción del contenido	
1.7. Justificación	
2. Generalidades.....	6
2.1. Introducción	
2.2. Señal	
2.3. Señal continua y discreta	
2.4. Señal estacionaria y no estacionaria	
2.5. Espectro	
2.6. Frecuencia	
2.7. Señal analítica	
2.8. Frecuencia instantánea, Frecuencia media pseudo instantánea y distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville	
2.9. Clase de Cohen de Distribución Tiempo Frecuencia	
2.10. Generalización de la frecuencia media pseudo instantánea	
2.11. Potencia media pseudo instantánea	
2.12. Ancho de banda espectral RMS	
2.13. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral	
2.14. Relación de potencia señal a ruido SNR	
3. Distribución de Born Jordan.....	18
3.1. Introducción	
3.2. Distribución continua	
3.3. Pseudo distribución	
3.4. Distribución discreta	
3.5. Análisis de la distribución	
3.6. Factor de peso de los términos de cruce	
3.7. Algoritmo eficiente	
3.8. Optimización del índice μ	
3.9. Complejidad Algorítmica	
3.9.1. Algoritmo sin simplificar	
3.9.2. Algoritmo eficiente	
3.10. Experimentos numéricos en MATLAB	
3.10.1 Experimento 1: Función seno	
3.10.2 Experimento 2: Función Fase cuadrática	

3.10.3	Experimento 3: Función impulso	
3.10.4	Experimento 4: Función Chirp o fase lineal	
4.	Determinación de parámetros óptimos	35
4.1.	Introducción	
4.2.	Señal Dópler Ultrasónica Simulada	
4.3.	Definición de parámetro óptimo y procedimiento para su cálculo	
4.3.1	Procedimiento	
4.3.2	Parámetro óptimo	
4.4.	Longitud de ventana de muestreo de 63 elementos	
4.4.1	Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
4.4.2	Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS	
4.4.3	Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
4.5.	Longitud de ventana de muestreo de 127 elementos	
4.5.1	Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
4.5.2	Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS	
4.5.3	Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
4.6.	Longitud de ventana de muestreo de 255 elementos	
4.6.1	Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
4.6.2	Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS	
4.6.3	Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
4.7.	Longitud de ventana de muestreo de 511 elementos	
4.7.1	Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
4.7.2	Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS	
4.7.3	Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
4.8.	Análisis del parámetro Alfa: Valores apropiados	
4.8.1	Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
4.8.2	Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS	
4.8.3	Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
4.9.	Análisis del parámetro Alfa: Valores no apropiados	
4.9.1	Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
4.9.2	Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS	
4.9.3	Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
5.	Análisis de Resultados: Parámetros Alfa óptimos	61
5.1.	Introducción	
5.2.	Parámetros Alfa óptimos para estimar la frecuencia instantánea	
5.3.	Parámetros Alfa óptimos para estimar el ancho de banda espectral	
5.4.	Parámetros Alfa óptimos para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda	
5.5.	Análisis del parámetro Alfa: Valores apropiados	
5.6.	Análisis del parámetro Alfa: Valores no apropiados	

5.7.	Comparación con la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville	
6.	Truncado de la Función de Autocorrelación	65
6.1.	Introducción	
6.2.	Truncado de la función de autocorrelación en la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan	
6.3.	Longitud de ventana de 63 elementos	
6.3.1	Estimación del ancho de banda espectral RMS	
6.3.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
6.4.	Longitud de ventana de 127 elementos	
6.4.1	Estimación del ancho de banda espectral RMS	
6.4.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
6.5.	Longitud de ventana de 255 elementos	
6.5.1	Estimación del ancho de banda espectral RMS	
6.5.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
6.6.	Longitud de ventana de 511 elementos	
6.6.1	Estimación del ancho de banda espectral RMS	
6.6.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
7.	Análisis de resultados: Truncado	82
7.1.	Introducción	
7.2.	Longitud de ventana de 63 elementos	
7.2.1	Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta	
7.2.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
7.3.	Longitud de ventana de 127 elementos	
7.3.1	Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta	
7.3.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
7.4.	Longitud de ventana de 255 elementos	
7.4.1	Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta	
7.4.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
7.5.	Longitud de ventana de 511 elementos	
7.5.1	Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta	
7.5.2	Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea	
8.	Conclusiones	87
8.1.	Introducción	
8.2.	Conclusiones generales	
8.3.	Conclusiones particulares	
8.3.1	Sobre la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan	
8.3.2	Sobre el algoritmo eficiente	
8.3.3	Sobre la señal Dópler ultrasónica simulada	
8.3.4	Sobre el procedimiento para calcular el parámetro óptimo	
8.3.5	Sobre los parámetros óptimos	
8.3.6	Sobre la comparación de la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville	
8.3.7	Sobre el truncado de la función de autocorrelación	
8.3.8	Sobre el incremento porcentual del error inducido por el índice de truncado	

8.4. Trabajo futuro	
Apéndice A.1 Bibliografía	96
Apéndice A.2 Formulas y desarrollo	98
Apéndice A.3 Publicación	105
Apéndice A.4 Programa en Matlab	109

1. INTRODUCCION

En este capítulo, se da una introducción a los métodos de estimación espectral, se describe el problema que se desea resolver, se plantea la hipótesis que se desea verificar y los objetivos que se pretenden alcanzar. Además, se mencionan las contribuciones obtenidas del desarrollo de este trabajo y, finalmente, se describe su contenido y su justificación.

1.1. Planteamiento del problema

Se requiere calcular la distribución de energía o espectro de una señal no estacionaria utilizando la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan.

El problema físico es el siguiente. Se necesita estimar el grado de obstrucción en una arteria o vena del cuerpo humano. La obstrucción se podría deber a la acumulación de colesterol en la pared de la arteria o vena. Esta obstrucción causa turbulencias en el flujo sanguíneo. Esta turbulencia se puede medir de forma indirecta a través de un método no invasivo, el cual se describe a continuación. Se hace incidir una onda ultrasónica sobre la arteria o vena. Esta onda ultrasónica se refleja debido al movimiento aleatorio de los diferentes glóbulos que componen el tejido sanguíneo. Posteriormente, se detecta la onda reflejada, la cual es una señal no estacionaria ultrasónica de tipo Dópler. Se calcula el espectro de esta señal. Por último, basándose en este espectro de la señal, se calcula la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS. La forma de las gráficas de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho del banda con respecto al tiempo, constituyen un indicador del grado de obstrucción de una arteria o vena. Cierta tipo de modelos de gráficas se asocian con patologías específicas debidas a la obstrucción de arterias o venas^{[12][18][19]}.

1.2. Estimación espectral

En este apartado se da una introducción a los siguientes métodos de estimación espectral: transformada de Fourier, transformada corta de Fourier, distribuciones tiempo frecuencia de Wigner Ville y de Born Jordan. Todos pertenecen a la clase de Cohen de distribuciones tiempo frecuencia.

El espectro o el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier, es el método clásico que se utiliza para representar la distribución de energía de una señal estacionaria en el dominio de la frecuencia.

El espectro de una señal $x(t)$ se define como:

$$S(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{EQ.1.1})$$

donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, la cual se define como:

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{EQ.1.2})$$

Esta representación en el dominio de la frecuencia se define sobre un intervalo infinito de tiempo, donde t representa el tiempo y f la frecuencia (note los límites de la integración con respecto al

tiempo). Consecuentemente, para una señal no estacionaria, la variación de su espectro con respecto al tiempo se oculta.

Una representación alternativa consiste en la utilización de la transformada corta de Fourier, la cual se evalúa aplicando una función ventana adecuada a la señal original $x(t)$ y calculando la transformada de Fourier. Esta se define como:

$$X_w(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau - t)x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{EQ.1.3})$$

donde $W(\tau)$ es una función ventana que satisface las condiciones $W(\tau) = 0$ para $|\tau| > T/2$ y $W(0) = 1$. Utilizando esta técnica, se puede obtener una aproximación del espectro de la señal en el punto medio del soporte de la función ventana a través de la siguiente expresión:

$$S_w(t, f) = |X_w(t, f)|^2 \quad (\text{EQ.1.4})$$

En este desarrollo se asume que la señal $x(t)$ es estacionaria durante el soporte de la función ventana.

Nótese que las resoluciones temporal y frecuencial de la transformada corta de Fourier son inversamente proporcionales. Ambas resoluciones dependen de la longitud de ventana. Si se incrementa la longitud de ventana entonces se incrementa la resolución frecuencial pero se disminuye la capacidad de ubicar los diferentes componentes frecuenciales en el tiempo; además se debilita el supuesto de la señal estacionaria. Contrariamente, si se disminuye la longitud de la ventana entonces se incrementa la capacidad de ubicar los diferentes componentes frecuenciales en el tiempo pero se disminuye la resolución frecuencial.

Otro método alternativo consiste en utilizar la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville, la cual es útil para representar la distribución de energía de la señal en el dominio del tiempo y la frecuencia simultáneamente. La distribución de Wigner Ville se define como:

$$WVD(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.1.5})$$

donde ω representa a la frecuencia angular.

La distribución de Wigner Ville no tiene la restricción de la resolución temporal y frecuencial inherente a la transformada corta de Fourier ya que no utiliza una ventana $W(t)$ para determinar la ubicación temporal. Además la distribución de Wigner Ville puede analizar señales no estacionarias.

Si bien la distribución de Wigner Ville estima el espectro de una señal correctamente en ausencia de ruido, su desempeño empeora a medida que éste aparece. La distribución de Wigner Ville pertenece a la clase de Cohen de distribuciones tiempo frecuencia. Otras distribuciones que pertenecen a esta Clase son las distribuciones de Choi Williams^[17] y de Bessel^[20]. En trabajos previos^[21] se han estudiado dichas distribuciones. Este trabajo amplía el anterior, realizando un estudio de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, la cual también pertenece a esta Clase.

1.3. Hipótesis

La distribución tiempo frecuencia de Born Jordan estima mejor el espectro de una señal Dópler ultrasónica en presencia de ruido, mejor que la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville.

1.4. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es desarrollar e implantar algoritmos secuenciales para técnicas de estimación espectral, en particular, para aquellas técnicas de estimación espectral basadas en distribuciones de tiempo frecuencia, concretamente, de Born Jordan.

Los objetivos específicos de este trabajo son:

- Diseño de algoritmos secuenciales para el cálculo de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, en los cuales se efectúen un menor número de operaciones que las que se efectuarían al calcular esta distribución a través de su definición.
- Implantación de los algoritmos secuenciales mencionados en el inciso anterior en una herramienta de cálculo computacional de alto desempeño (MATLAB).
- Evaluación práctica de los efectos que resultan de la variación del parámetro propio de la distribución, de la longitud de ventana de muestreo de la señal y de la relación señal a ruido, sobre la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y ancho de banda espectral RMS, utilizando un modelo de señal Dópler ultrasónica. Lo anterior permitirá encontrar los parámetros óptimos los cuales minimizan el error en las estimaciones espectrales.
- Evaluación práctica del truncado en la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada en el cálculo de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan. Lo anterior permite disminuir el número de operaciones implicadas en el cálculo de la estimación espectral, aunque incrementa el error dichas estimaciones.

1.5. Contribuciones

Se propone un algoritmo eficiente que calcula la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, la cual puede ser utilizada para implementar un sistema de flujometría Dópler en tiempo real.

Se proponen valores del parámetro Alfa de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, que minimizan el error en diversas estimaciones espectrales propias de señales Dópler Ultrasónicas.

Se propone un truncamiento en el cálculo de la función de autocorrelación de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, el cual está sujeto a un compromiso de error en la estimación espectral contra la velocidad del cálculo.

Esta tesis se elaboró como un libro de texto para apoyar tanto a los cursos como a los proyectos de investigación relacionados con el Análisis Tiempo Frecuencia de señales, por lo cual el análisis matemático se detalla en los apéndices.

Se publicó un artículo con el título "ESTIMACIÓN ESPECTRAL UTILIZANDO LA DISTRIBUCIÓN TIEMPO FRECUENCIA DE BORN JORDAN APLICADA A FLUJOMETRÍA DOPPLER", cuyos autores son Dr. Fabián García Noceti, Dr. Julio Solano G., M. en C. Ernesto Rubio Acosta, Juan Antonio Contreras Arvizu, presentado en el XXV Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica, de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Biomédica A.C. (SOMIB), celebrado del 6 al 8 de noviembre del 2002 en Monterrey, Nuevo León México.

La publicación se muestra en el Apéndice 3.

1.6. Descripción del contenido

En este capítulo, se plantea el problema y su contexto que motiva la elaboración de éste trabajo, así como la hipótesis, los objetivos y las contribuciones resultantes de la elaboración de este trabajo. Adicionalmente se da una introducción a algunos métodos de estimación espectral y se describe el contenido de cada capítulo.

En el capítulo 2 se definen los conceptos que se utilizan en el desarrollo de este trabajo. Tales conceptos son los de señal, señal continua y discreta, señal estacionaria y no estacionaria, señal analítica, espectro, frecuencia, frecuencia instantánea, frecuencia media pseudo instantánea, potencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral RMS, error en las estimaciones de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, relación de potencia señal a ruido y clase de Cohen de distribuciones tiempo frecuencia.

En el capítulo 3 se plantea la Distribución de Born Jordan a partir de la clase de distribuciones de tiempo frecuencia de Cohen. Posteriormente se desarrolla esta distribución para el caso discreto. Luego se transforma la distribución discreta obtenida en una expresión más adecuada para implantar un algoritmo eficiente que la calcule y se analiza su complejidad algorítmica. Finalmente se presentan ejemplos de la distribución de Born Jordan de algunas señales de interés académico.

En el capítulo 4 se construye la señal Dópler Ultrasónica utilizada en las simulaciones, la cual modela la velocidad media del flujo sanguíneo arterial en un corte transversal de la arteria carótida. También se presentan diversos experimentos numéricos realizados en Matlab para mostrar gráfica y cuantitativamente el comportamiento de la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler, al variar la longitud de ventana de muestreo, la relación de potencia señal a ruido, y el parámetro propio de la distribución. También se presentan criterios para la elección de los valores óptimos de dichos parámetros; es decir, aquellos que minimizan el error en las estimaciones espectrales.

En el capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos anteriormente. Fundamentalmente son los parámetros óptimos según la longitud de ventana de muestreo y la relación de potencia señal a ruido.

En el capítulo 6 se muestra el desempeño que tiene la distribución de Born Jordan para efectuar la estimación espectral cuando se trunca su función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada. El truncando en esta función disminuye el número de operaciones implicadas pero incrementa el error en la estimación. De aquí que exista un compromiso entre el truncado y el error. Se presentan diversos experimentos numéricos utilizando el parámetro óptimo y una longitud de ventana de muestreo, variando la relación de potencia señal a ruido así como el índice de truncado de la función de autocorrelación.

En el capítulo 7 se analizan los resultados obtenidos anteriormente. Fundamentalmente son los índices de truncado según la longitud de ventana de muestreo, la relación de potencia señal a ruido y el incremento porcentual en el error en las estimaciones espectrales.

En el capítulo 8 se presentan las conclusiones y perspectivas futuras de este trabajo.

En el Apéndice 1 se presenta la Bibliografía utilizada para el desarrollo de este trabajo. En el Apéndice 2 se presenta las formulas y desarrollo de ecuaciones del capítulo 3. En el Apéndice 3 se muestra la publicación presentada en el XXV Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica, de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Biomédica A.C. (SOMIB). Finalmente en el Apéndice 4 se muestra el programa que calcula la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan para Matlab.

1.7. Justificación

Esta tesis apoya el desarrollo del proyecto CONACYT (No. 37913-A) "Arquitecturas y algoritmos para el análisis de señales Dópler ultrasónicas de flujo sanguíneo" y del proyecto DGAPA (No.IN117999) "Arquitectura y algoritmos de alto desempeño para la generación y procesamiento de imágenes acústicas". Que dirigen; el Dr. Fabián García y el Dr. Julio Solano, y participa el M. en C. Ernesto Rubio, el cual se lleva a cabo en el Departamento de Ingeniería de Sistemas Computacionales y Automatización del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM.

2. GENERALIDADES

2.1. Introducción

En el presente capítulo se definen los conceptos que se utilizan en el desarrollo de este trabajo. Tales conceptos son los de señal, señal continua y discreta, señal estacionaria y no estacionaria, señal analítica, espectro, frecuencia, frecuencia instantánea, frecuencia media pseudo instantánea, potencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral RMS, error en las estimaciones de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, relación señal a ruido y clase de Cohen de distribuciones tiempo frecuencia.

2.2. Señal

Una señal se define como cualquier cantidad física que varía con el tiempo, el espacio, o cualquier otra variable o variables independientes.^{[1][2]}

En la gráfica de la Fig. 2.1 se muestra un ejemplo de una señal con una variable independiente. Se trata de una señal Dópler ultrasónica, donde el tiempo es la variable independiente.

Una descripción ilustrativa de lo que es una señal Dópler ultrasónica es que, si se pudiera escuchar dicha señal, tendría cambios graduales de tonos agudos a graves o viceversa. Obsérvese que en la gráfica de la Fig. 2.1, los tonos graves se relacionan con oscilaciones lentas y los tonos agudos con oscilaciones rápidas.

En la gráfica de la Fig. 2.2 se muestra un ejemplo de una señal con dos variables independientes. Se trata de una señal de distribución de potencia media pseudo instantánea donde las variables independientes son el tiempo y la frecuencia. La distribución de potencia media pseudo instantánea se definirá en el inciso 2.11.

Una descripción ilustrativa de una señal de distribución de potencia media pseudo instantánea de una señal Dópler ultrasónica sería el volumen que le correspondería a cada tono de la señal en cada instante de tiempo. Obsérvese que en la gráfica de la Fig. 2.2, un volumen alto se relaciona con las cúspides de mayor tamaño y un volumen bajo con las de menor tamaño.

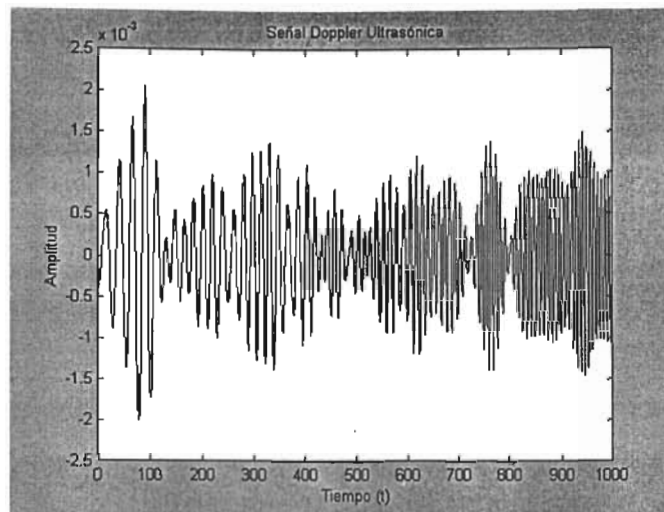


Fig. 2.1 Gráfica de una señal Dópler ultrasónica con una variable independiente: el tiempo.

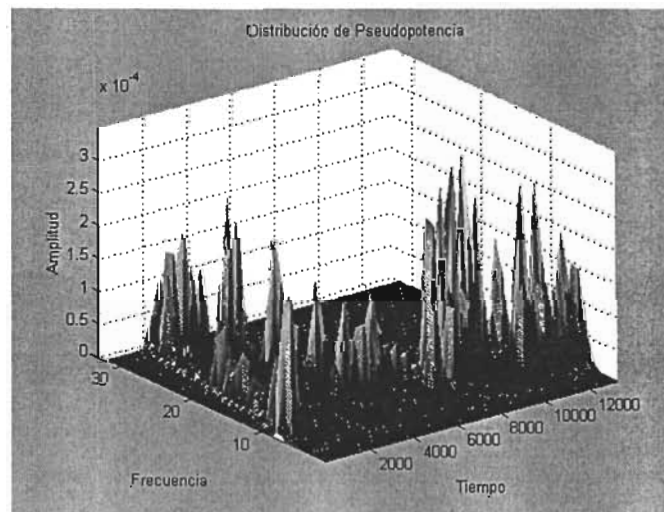


Fig.2.2 Gráfica de una señal de distribución de potencia media pseudo instantánea de una señal Dópler ultrasónica con dos variables independientes: el tiempo y la frecuencia.

2.3. Señal continua y señal discreta

Existen diversas clasificaciones para las señales. Las señales pueden ser continuas o discretas^{[1][2]}. Una señal continua está definida para todos los valores reales de la variable independiente y, una señal discreta está definida solamente para los valores enteros de la variable independiente, quizá todos ellos multiplicados por una misma constante real.

Nótese que el término continuo o discreto se refiere a la naturaleza de la variable independiente (dominio) y no a la naturaleza de la función matemática que representa a la señal (rango).

En la gráfica de la Fig. 2.3 se muestra un ejemplo de una señal continua, la cual es la señal sinusoidal $f(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$, donde el tiempo t es la variable independiente continua. Véase la ecuación (EQ.2.1)

En la gráfica de la Fig.2.4 se muestra un ejemplo de la misma señal pero discreta, es decir, considerando una variable independiente discreta.

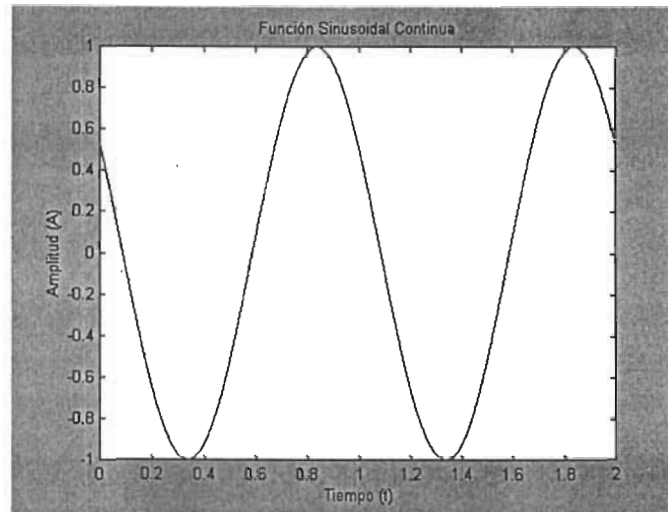


Fig. 2.3 Gráfica de una señal sinusoidal, con variable independiente continua tiempo con valores reales de 0 a 2.

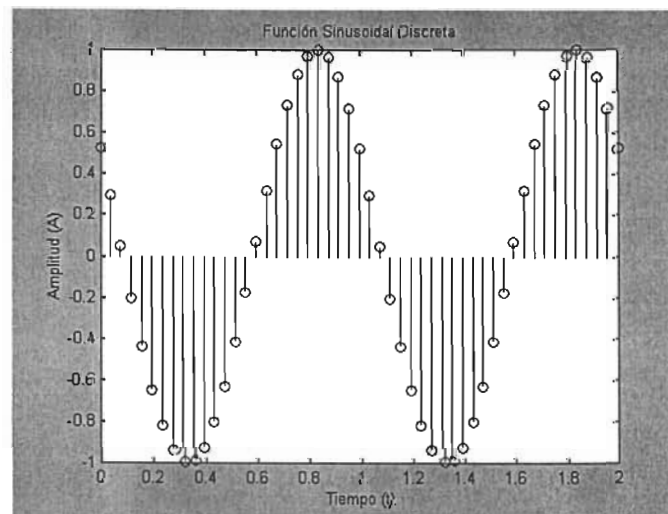


Fig.2.4 Gráfica de una señal sinusoidal, con variable independiente discreta tiempo con valores enteros de 0 a 50, multiplicados todos ellos por 0.04.

2.4. Señal estacionaria y señal no estacionaria

Una señal es estacionaria si sus características espectrales no se alteran con el transcurrir del tiempo, es decir, que su contenido frecuencial con respecto al tiempo es constante^{[1][2][9]}. Un ejemplo de señal estacionaria es una señal sinusoidal:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (\text{EQ.2.1})$$

donde A_0 es la amplitud, f_0 es la frecuencia y θ_0 es la fase de la señal, todos ellos constantes.

Por otro lado, una señal es no estacionaria si sus características espectrales no son constantes con respecto al tiempo, es decir, que su contenido frecuencial sí varía con respecto al tiempo^{[1][2][4][9]}. Un ejemplo de señal no estacionaria es una señal Chirp:

$$f(t) = A_0 \cos(2\pi(\alpha t + \beta)t + \theta_0) \quad (\text{EQ.2.2})$$

donde $f_0 = (\alpha t + \beta)$ es la frecuencia, claramente función lineal del tiempo. En la gráfica de la Fig. 2.5 se muestra una señal Chirp. Dicha señal inicia con una frecuencia baja, la cual aumenta proporcionalmente con el transcurrir del tiempo.

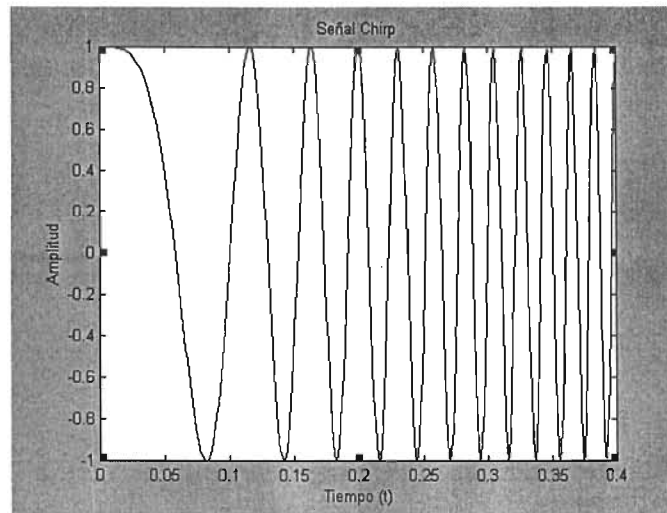


Fig. 2.5 Gráfica de la señal Chirp.

2.5. Espectro

El término espectro se usa para hacer referencia a la descripción de las frecuencias contenidas en la señal^{[1][2][9]}. El análisis espectral consiste en descomponer la señal en sus componentes sinusoidales, donde cada una tiene su propia frecuencia, amplitud, fase y ubicación temporal. De las componentes sinusoidales también es de particular interés conocer su energía y su potencia. El conjunto de estas componentes sinusoidales, junto con su descripción frecuencial y temporal, dan como resultado el espectro de la señal.

2.6. Frecuencia

La frecuencia se define como la cantidad de ciclos completos por unidad de tiempo, y está relacionada con un movimiento periódico llamado oscilación armónica, el cual se describe con una función sinusoidal^{[1][2]}. Un movimiento de oscilación armónica se describe matemáticamente por una función sinusoidal, ya sea real, ecuación (EQ.2.1), ó compleja:

$$f(t) = A_0 e^{j(2\pi f_0 t + \theta_0)} \tag{EQ.2.3}$$

En instrumentación, la amplitud se mide generalmente en volts [V], el tiempo en segundos [s], la frecuencia en Hertz [Hz], y la fase en radianes [rad]. En la gráfica de la Fig. 2.6 se muestra la ecuación (EQ.2.1), con una amplitud de 2 [V], un intervalo de tiempo de 0 a 2 [s], una frecuencia de 2 [Hz], y una fase de $\frac{3\pi}{2}$ [rad]. Además, en la misma gráfica se observa que el periodo de una señal sinusoidal, denotado por T y calculado por $T = f_0^{-1}$, es la duración de un ciclo completo; mientras que la frecuencia, denotada por f_0 y calculado por $f_0 = T^{-1}$, representa los ciclos contenidos en una unidad de tiempo.

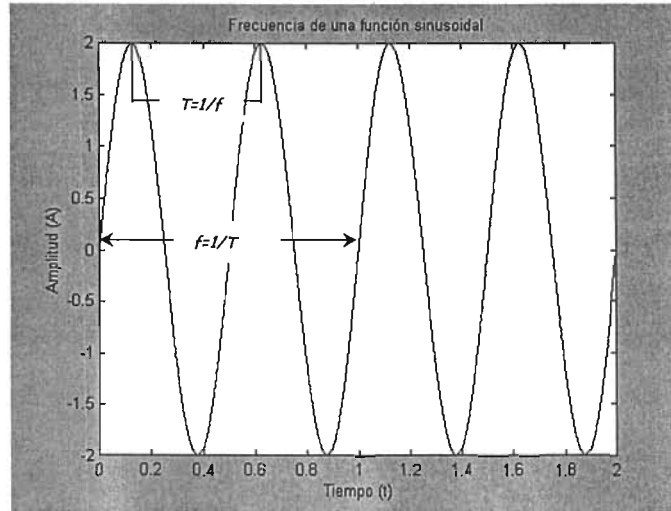


Fig.2.6 Periodo T y frecuencia f_0 de una señal sinusoidal.

2.7. Señal Analítica

Una señal analítica se representa con una función compleja, cuya transformada de Fourier es cero para todas las frecuencias negativas.^{[1][9][13]}

A continuación se define el procedimiento para el cálculo de la señal analítica de una señal real por ser de utilidad en el cálculo de la distribución tiempo frecuencia. Es importante hacer mención que en este trabajo, todos los cálculos de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan se realizan utilizando siempre la señal analítica asociada a la señal real.

La señal analítica puede ser continua o discreta. El algoritmo para calcular la señal analítica de una señal real es:

Datos:

Para el caso continuo, $x(t)$ es una señal real continua; mientras que para el caso discreto, $x(n)$ es una señal real discreta de longitud N con $n = 0, \dots, N-1$.

Algoritmo:

1. Calcular la transformada de Fourier de la señal real.

Procedimiento:

La transformada de Fourier $X(f)$ de una señal $x(t)$ para el caso continuo es:

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{EQ.2.4})$$

La transformada de Fourier $X(k)$ de una señal $x(n)$ de longitud N para el caso discreto es:

$$X(k) = F[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{EQ.2.5})$$

2. Calcular la transformada de Fourier de la señal analítica.

Procedimiento:

La transformada de Fourier de la señal analítica $X_a(f)$ para el caso continuo es:

$$X_a(f) = \begin{cases} 2X(f) & , f > 0 \\ X(f) & , f = 0 \\ 0 & , f < 0 \end{cases} \quad (\text{EQ.2.6})$$

La transformada de Fourier de la señal analítica $X_a(k)$ de longitud N para el caso discreto es el siguiente. Si N es par:

$$X_a(k) = \begin{cases} 2X(k) & , k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(k) & , k = 0 \quad , k = N/2 \\ 0 & , k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{EQ.2.7a})$$

o bien, si N es impar:

$$X_a(k) = \begin{cases} 2X(k) & , k = 1, \dots, \frac{N-1}{2} \\ X(k) & , k = 0 \\ 0 & , k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{EQ.2.7b})$$

3. Calcular la transformada inversa de Fourier de la señal analítica, lo cual constituye precisamente la señal analítica.

Procedimiento:

La transformada inversa de Fourier de la señal analítica $x_a(t)$ para el caso continuo es:

$$x_a(t) = F^{-1}[X_a(f)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) e^{j2\pi ft} df \quad (\text{EQ.2.8})$$

La transformada inversa de Fourier de la señal analítica $x_a(n)$ de longitud N para el caso discreto es:

$$x_a(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (\text{EQ.2.9})$$

2.8. Frecuencia instantánea, frecuencia media pseudo instantánea y distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville

Sea una señal compleja, por ejemplo una señal analítica $x_a(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$, con amplitud $a(t)$ y fase $\phi(t)$ dependientes del tiempo. Entonces la frecuencia instantánea $f_i(t)$ se define como⁽⁴⁾:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\phi(t)] \quad (\text{EQ.2.10})$$

Sin embargo, esta definición no es útil para el cálculo de la frecuencia instantánea porque es muy sensible a la presencia del ruido en la señal. En su lugar se prefiere utilizar para su cálculo un método que emplea la distribución de Wigner Ville, el cual calcula el promedio de las frecuencias instantáneas en un periodo pequeño de tiempo, esto es, la frecuencia media pseudo instantánea (PIMF). A medida que el periodo tiende a un instante, la frecuencia media pseudo instantánea tiende a la frecuencia instantánea.

Este método consiste en lo siguiente. Primero se calcula la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville, la cual se define para el caso continuo como⁽⁶⁾:

$$WVD(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{EQ.2.11})$$

y para el caso discreto como⁽⁷⁾:

$$DVWD(n, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} x(n+\tau) x^*(n-\tau) e^{-j\frac{2\pi k\tau}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad n = -N+1, \dots, N-1 \quad (\text{EQ.2.12})$$

Luego se calcula la PIMF, la cual consiste en el centroide de la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville para un tiempo constante, y cuya expresión para el caso continuo es:

$$f_i(t) \approx PIMF(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f \bullet WVD(t, f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} WVD(t, f) df} \quad (\text{EQ.2.13})$$

y para el caso discreto es:

$$f_i(n) \approx PIMF(t) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} k \bullet WVD(n, k)}{\sum_{k=0}^{N-1} WVD(n, k)} \quad (\text{EQ.2.14})$$

Nótese que en una señal analítica las frecuencias negativas valen cero. En consecuencia^{(8)[10][11]}, para el caso continuo los límites de la integral en la ecuación (EQ.2.13) quedan como $\int_0^{\bullet}(\bullet)$; y para el caso

discreto los límites de la sumatoria en la ecuación (EQ.2.14) quedan como $\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}}(\bullet)$.

2.9. Clase de Cohen de Distribución Tiempo Frecuencia

La clase de Cohen de distribuciones tiempo frecuencia se puede plantear de la siguiente forma^{(13)[15]}. Primero, sea el Kernel de la Distribución Tiempo Frecuencia $\phi(\theta, \tau)$. El Kernel define las características de la distribución.

Segundo, sea en el Kernel del Dominio de la Autocorrelación, el cual se define como la transformada de Fourier del kernel de la distribución tiempo frecuencia:

$$\psi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta \quad (\text{EQ.2.15})$$

Tercero, sea la Función de Autocorrelación Instantánea de la señal $x(t)$, la cual se define como:

$$R_x(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (\text{EQ.2.16})$$

Cuarto, sea la Función de Autocorrelación Generalizada Indexada al Tiempo, la cual se define como:

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t - \mu, \tau) R_x(\mu, \tau) d\mu \quad (\text{EQ.2.17})$$

Si se sustituye la ecuación (EQ.2.16) en la ecuación (EQ.2.17) se obtiene:

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t - \mu, \tau) x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu \quad (\text{EQ.2.18})$$

Finalmente, la Clase de Cohen de las Distribuciones Tiempo Frecuencia con kernel $\phi(\theta, \tau)$ se define como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación generalizada indexada en el tiempo:

$$TFD(t, \omega; \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x'(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.2.19})$$

Cohen^{[3][13]} afirma que, todas las distribuciones tiempo frecuencia se pueden obtener de la ecuación (EQ.2.19). La ecuación (EQ.2.19) se puede discretizar para obtener la clase de Cohen de distribuciones tiempo frecuencia discretas $DTFD(n, k; \phi)$.

En la sección 2.8 se presentó un miembro de la clase de Cohen; la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville, cuyo kernel es $\phi(\theta, \tau) = 1$. En este trabajo se estudiará la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, la cual también es un miembro de esta clase, cuyo kernel es $\phi(\theta, \tau) = \frac{\sin(\alpha\theta\tau)}{\alpha\theta\tau}$.

2.10. Generalización de la frecuencia media pseudo instantánea

El procedimiento para calcular la PIMF se puede generalizar aplicando cualquier distribución de tiempo frecuencia de la clase de Cohen. Generalizando la ecuación (EQ.2.13), para el caso continuo se obtiene^{[8][10][11]}:

$$f_i(t) \approx PIMF(t) = \frac{\int_0^{\infty} f \cdot TFD(t, f) df}{\int_0^{\infty} TFD(t, f) df} \quad (\text{EQ.2.20})$$

y generalizando la ecuación (EQ.2.14) para el caso discreto se obtiene:

$$f_i(n) \approx PIMF(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} k \cdot DTFD(n, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} DTFD(n, k)} \quad (\text{EQ.2.21})$$

2.11. Potencia media pseudo instantánea

Experimentalmente se ha visto que la mejor aproximación del cálculo de la frecuencia instantánea se logra utilizando la distribución de potencia pseudo instantánea en lugar de la distribución tiempo frecuencia^{[8][10][11]}.

La distribución de potencia pseudo instantánea $PIPD(t, f)$ para el caso continuo se define como:

$$PIPD(t, f) = \begin{cases} TFD(t, f) & TFD(t, f) \geq 0 \\ 0 & TFD(t, f) < 0 \end{cases} \quad (\text{EQ.2.22})$$

mientras que para el caso discreto se define como:

$$PIPD(n, k) = \begin{cases} DTFD(n, k) & DTFD(n, k) \geq 0 \\ 0 & DTFD(n, k) < 0 \end{cases} \quad (\text{EQ.2.23})$$

Lo anterior se debe a que la potencia de cada componente de una señal, por motivos físicos, debe ser positiva. De aquí que se desprecien los términos negativos.

En consecuencia, con base en la ecuación (EQ.2.20) se redefine la PIMF para el caso continuo como:

$$PIMF(t) = \frac{\int_0^{\infty} f \cdot PIPD(t, f) df}{\int_0^{\infty} PIPD(t, f) df} \quad (EQ.2.24)$$

y con base en la ecuación (EQ.2.21) para el caso discreto como:

$$PIMF(n) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} k \cdot PIPD(n, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} PIPD(n, k)} \quad (EQ.2.25)$$

2.12. Ancho de Banda Espectral RMS

Otra estimación espectral relevante, además de la frecuencia, es el ancho de banda. El ancho de banda de una señal es una medida cuantitativa del rango de frecuencias en el que se concentra la distribución de energía o potencia^{[1][2]}.

El ancho de banda espectral RMS, $\hat{b}(t)$ (RMS -Root Mean Square- se entiende como el promedio cuadrático), es la estimación puntual del ancho de banda espectral RMS, para el caso continuo se define como^{[8][10][11]}:

$$\hat{b}(t) = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} (PIMF(t) - f)^2 \cdot PIPD(t, f) df}{\int_0^{\infty} PIPD(t, f) df}} \quad (EQ.2.26)$$

y para el caso discreto se define como:

$$\hat{b}(n) = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} (PIMF(n) - k)^2 \cdot PIPD(n, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} PIPD(n, k)}} \quad (EQ.2.27)$$

2.13. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS

Para calcular el error RMS en la estimación de la PIMF se utiliza la siguiente expresión^[11]:

$$PIMFerror_{RMS} = \sqrt{bias_{PIMF}^2 + std_{PIMF}^2} \quad (EQ.2.28)$$

donde $bias$ y std constituyen el promedio y la desviación estándar del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con respecto a sus valores teóricos. El bias se calcula con la siguiente expresión:

$$bias_{PIMF} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (PIMF(n) - f_{i|teórica}(n)) \quad (EQ.2.29)$$

donde m es el número de muestras, $PIMF(n)$ se calcula con la ecuación (EQ.2.25) y $f_{i|teórica}(n)$ es la frecuencia instantánea teórica de la señal. La desviación estandar se calcula con la siguiente expresión:

$$std_{PIMF} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} (PIMF(n) - f_{i|teórica}(n))^2} \quad (EQ.2.30)$$

Por otro lado el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS se calcula con la de la siguiente expresión:

$$\hat{b} error_{RMS} = \sqrt{bias_b^2 + std_b^2} \quad (EQ.2.31)$$

donde $bias$ y std constituyen el promedio y la desviación estándar del error en la estimación del ancho de banda espectral RMS con respecto a los valores teóricos. El bias se calcula con la siguiente expresión:

$$bias_b = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (\hat{b}(n) - \hat{b}_{teórica}(n)) \quad (EQ.2.32)$$

donde m es el número de muestras, $\hat{b}(n)$ es el ancho de banda espectral RMS calculado con la ecuación (EQ.2.27) y $\hat{b}_{teórica}(n)$ es el ancho de banda espectral RMS teórica de la señal. La desviación estandar se calcula con la siguiente expresión:

$$std_b = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} (\hat{b}(n) - \hat{b}_{teórica}(n))^2} \quad (EQ.2.33)$$

El error en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS se calcula en la siguiente expresión:

$$JOINerror_{RMS} = \sqrt{(PIMFerror_{RMS})^2 + (\hat{b} error_{RMS})^2} \quad (EQ.2.34)$$

2.14. Relación de potencia señal a ruido SNR

La relación señal a ruido SNR -*Signal Noise Ratio*- sirve para cuantificar la presencia de ruido en una señal.

La SNR expresada en decibeles para el caso discreto se define como^{(8)[10][11]}:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(i)}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} ruido^2(i)} \right) \quad (\text{EQ.2.35})$$

donde $x(n)$ es la señal y $ruido(n)$ es el ruido. La unidad física en la cual se mide la SNR son los decibeles (dB).

3. DISTRIBUCION BORN JORDAN

3.1. Introducción

En este capítulo se plantea la Distribución de Born Jordan a partir de la clase de distribuciones de tiempo frecuencia de Cohen. Posteriormente se desarrolla esta distribución para el caso discreto. Luego se transforma la distribución discreta obtenida en una expresión más adecuada para implantar un algoritmo eficiente que la calcule y se analiza su complejidad algorítmica. Finalmente se presentan ejemplos de la distribución de Born Jordan de algunas señales de interés académico.

Las expresiones relevantes en este capítulo son:

Distribución de Born Jordan

$$BJD(t, f) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Pseudo Distribución de Born Jordan

$$BJPD(t, f) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\tau_c}^{\tau_c} \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) W\left(\frac{\tau}{2}\right) W^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Distribución discreta de Born Jordan

$$DBJD(n, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha|\tau|}^{\alpha|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu + n + \tau) x^*(\mu + n - \tau)$$

Expresión eficiente de la distribución discreta de Born Jordan

$$DBJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-\alpha|\tau|, -N+1+|\tau|\}}^{\min\{\alpha|\tau|, N-1-|\tau|\}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu + \tau) x^*(\mu - \tau) \right] - 2|x(0)|^2$$

3.2. Distribución continua

Se plantea la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan a partir de la clase de distribución tiempo frecuencia de Cohen. Refiérase a la sección 2.9, Clase (Conjunto) de Cohen de Distribuciones Tiempo Frecuencia.

Primero, sea el kernel de la distribución de Born Jordan^{[13][14][15]}:

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{\sin(\alpha\theta\tau)}{\alpha\theta\tau} \tag{EQ.3.1}$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro de escala. En la gráfica de la Fig.3.1 se muestra la ecuación (EQ.3.1) en el dominio θ, τ para $\alpha = 1$.

Segundo, el kernel del dominio de la autocorrelación es:

$$\Psi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha\theta\tau)}{\alpha\theta\tau} e^{-j\theta t} d\theta \tag{EQ.3.2}$$

Entonces, si se integra la ecuación (EQ.3.2) se obtiene^(A2.1):

$$\Psi(t, \tau) = \frac{\pi}{\alpha\tau} P_{2\alpha\tau}(t) \quad (\text{EQ.3.3})$$

donde:

$$P_{2\alpha\tau}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \alpha\tau \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{EQ.3.3a})$$

es una función pulso rectangular simétrico unitario. En la gráfica de la Fig 3.2 se muestra la ecuación (EQ.3.3) en el dominio t, τ para $\alpha = 1$.

Tercero, la función de autocorrelación instantánea se define como:

$$R_x(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (\text{EQ.3.4})$$

Cuarto, la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada es:

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(t - \mu) d\mu \quad (\text{EQ.3.5})$$

donde

$$p_{2\alpha\tau}(t - \mu) = \begin{cases} 1 & |t - \mu| < \alpha\tau \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{EQ.3.5a})$$

Entonces, si se aplica la ecuación (EQ.3.5a) a los límites de la integral en la ecuación (EQ.3.5) se obtiene^(A2.2):

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\alpha\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu \quad (\text{EQ.3.6})$$

Finalmente, la distribución de tiempo frecuencia de Born Jordan es^(A2.3):

$$BJD(t, \omega) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.7})$$

Una expresión equivalente a la ecuación (EQ.3.7) es^(A2.4):

$$BJD(t, \omega) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.7a})$$

la cual está en función de la frecuencia angular ω , o bien, esa misma expresión en función de la frecuencia:

$$BJD(t, f) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.8})$$

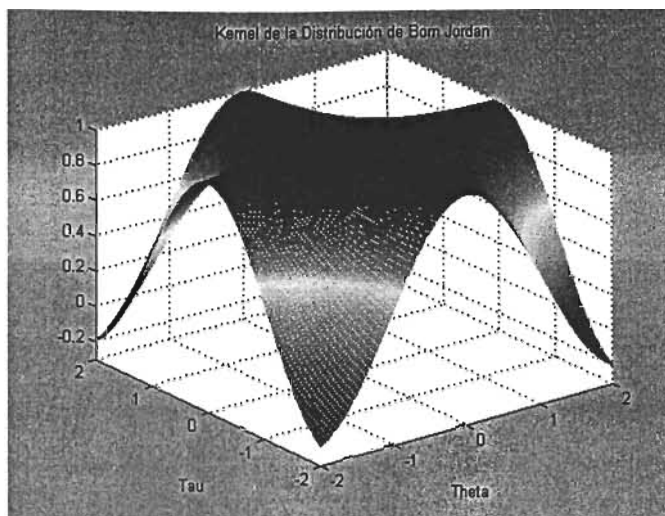


Fig.3.1 Kernel de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan en el dominio θ, τ para $\alpha = 1$.

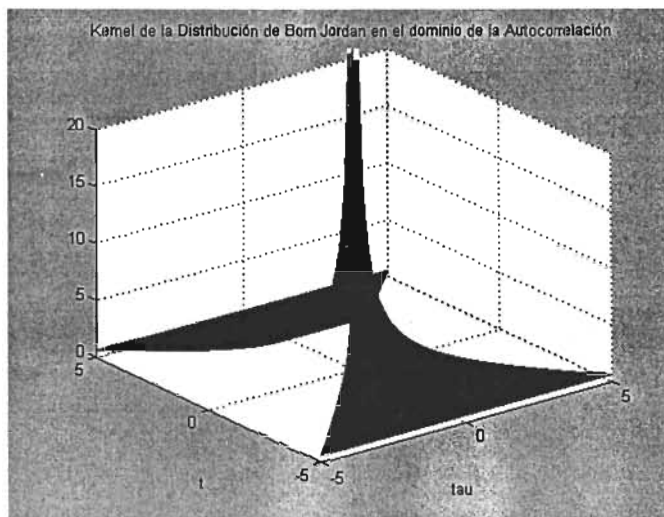


Fig.3.2 Kernel de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan en el dominio de la autocorrelación t, τ para $\alpha = 1$.

3.3. Pseudo distribución

Se desarrolla la pseudo distribución tiempo frecuencia^[16] de Born Jordan cuando se introduce una ventana $W(t)$ que multiplica a la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada $R_x'(t, \tau)$, es decir, a la ecuación (EQ.3.6)

Si se introduce una función ventana $W(t)$ que cumple con las propiedades de $W(t) = 0$, en $|t| > T_w/2$ y $W(0) = 1$, donde T_w es la duración, en la ecuación (EQ.3.8), entonces se obtiene:

$$BJPD(t, f) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\tau_w}^{\tau_w} \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu W\left(\frac{\tau}{2}\right) W^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.9})$$

3.4. Distribución discreta

Se desarrolla la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan discreta a partir de la pseudo distribución. Esto es, se discretiza^[7] en la ecuación (EQ.3.9).

Primero, si en la ecuación (EQ.3.9) se realizan los cambios de variable $\tau' = \tau/2$, $\mu' = \mu - t$, entonces se obtiene:

$$BJPD(t, f) = 2 \int_{-T_w/2}^{T_w/2} \frac{1}{4\alpha|\tau'|} \int_{\mu'-\alpha 2|\tau'|}^{\mu'+\alpha 2|\tau'|} x(\mu'+t+\tau') x^*(\mu'+t-\tau') d\mu' W(\tau') W^*(-\tau') e^{-j2\pi f(2\tau')} d\tau' \quad (\text{EQ.3.10})$$

Segundo, si en la ecuación (EQ.3.10) se discretiza la variable de frecuencia $f = k\Delta f$, donde $\Delta f = \frac{1}{L} = \frac{1}{2N-1} \approx \frac{1}{2N}$, siendo L el número de muestras por ventana, y se discretiza la variable tiempo $t = n\Delta T$, $\mu' = \mu\Delta T$ y $\tau' = \tau\Delta T$, entonces se obtiene:

$$DBJD(n\Delta T, k\Delta f) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \frac{1}{4\alpha|\tau\Delta T|} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} x(\mu\Delta T + n\Delta T + \tau\Delta T) \cdot x^*(\mu\Delta T + n\Delta T - \tau\Delta T) \Delta T \cdot W(\tau\Delta T) W^*(-\tau\Delta T) e^{-\frac{j4\pi k n \Delta T}{2N} \Delta T} \quad (\text{EQ.3.11})$$

Nótese que $L = 2N - 1$ es un número impar ya que los índices de la distribución discreta son simétricos con respecto a $n = 0$. Además con el objeto de poder calcular la distribución discreta de manera eficiente se requiere que $N = 2^p$ con $p \in \mathbb{N}$. De aquí que los valores típicos de L sean 63, 127, 255, 511.

Tercero, si en la ecuación (EQ.3.11) se normaliza el incremento en tiempo $\Delta T = 1$ y el incremento en frecuencia $\Delta f = 1$, entonces se obtiene:

$$DBJD(n, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \frac{1}{4\alpha|\tau|} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} x(\mu+n+\tau) x^*(\mu+n-\tau) W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \quad (\text{EQ.3.12})$$

Finalmente, la distribución tiempo frecuencia discreta de Born Jordan es:

$$DBJD(n, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+n+\tau) x^*(\mu+n-\tau) \quad (\text{EQ.3.13})$$

en donde, si $\tau = 0$, entonces la sumatoria respecto a μ es^(A2.5):

$$\sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+n+\tau) x^*(\mu+n-\tau) = x(n) x^*(n) \quad (\text{EQ.3.13a})$$

3.5. Análisis de la distribución

Se analiza el efecto del kernel^[17] en la distribución de Born Jordan ecuación (EQ.3.1) sobre la interacción (interferencia) entre los diferentes componentes sinusoidales de una señal.

Sea la señal multicomponente $x(t)$ la cual se puede representar como la suma de sus componentes sinusoidales complejas:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\omega_n t + \theta_n)} \quad (\text{EQ.3.14})$$

Si se sustituye la ecuación (EQ.3.14) en la ecuación (EQ.3.7), se obtiene:

$$BJD(t, \omega) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\omega_n(\mu + \frac{\tau}{2}) + \theta_n)} \sum_{m=1}^N A_m e^{-j(\omega_m(\mu - \frac{\tau}{2}) + \theta_m)} d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.15})$$

Reagrupando términos se obtiene:

$$BJD(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_n A_m e^{j(\theta_n - \theta_m)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\frac{\omega_n + \omega_m}{2})\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) e^{j(\omega_n - \omega_m)\mu} d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.16})$$

Si se aplica la propiedad asociativa de la suma en la ecuación (EQ.3.16), entonces se obtiene:

$$BJD(t, \omega) = BJD_{\text{auto}}(t, \omega) + BJD_{\text{cruce}}(t, \omega) \quad (\text{EQ.3.17})$$

donde, para el caso en el cual los índices de las sumatorias en la ecuación (EQ.3.16) son iguales, $n = m$, se tiene que:

$$BJD_{\text{auto}}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_n\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.18})$$

y para el caso en el cual los índices de las sumatorias en la ecuación (EQ.3.16) son diferentes, $n \neq m$, se tiene que:

$$BJD_{\text{cruce}}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ n \neq m}}^N A_n A_m e^{j(\theta_n - \theta_m)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\frac{\omega_n + \omega_m}{2})\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) e^{j(\omega_n - \omega_m)\mu} d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.19})$$

Primero se analizará la ecuación (EQ. 3.18) la cual constituye los auto-términos de la distribución tiempo frecuencia, esto es, de la distribución energética de cada componente de la señal. Luego se analizará la ecuación (EQ.3.19), la cual constituye los términos de cruce de la distribución tiempo frecuencia, esto es, de la distribución energética de la interacción de cada par de componentes diferentes de la señal.

Referente a la ecuación (EQ.3.18) o auto-términos, la integral con respecto a μ es^(A2.6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) d\mu = 2\pi \quad (\text{EQ.3.20})$$

Sustituyendo la ecuación (EQ.3.20) en la ecuación (EQ.3.18) se obtiene:

$$BJD_{\text{auto}}(t, \omega) = \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_n\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.21})$$

Si se integra la ecuación (EQ.3.21) se obtiene^(A2.7):

$$BJD_{\text{auto}}(t, \omega) = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n^2 \delta(\omega - \omega_n) \quad (\text{EQ.3.22})$$

Referente a la ecuación (EQ.3.19) o términos de cruce. Para integrar con respecto a μ se aplica la ecuación de Párseval^(A2.8), esto es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha\tau} P_{2\alpha}(\mu-t) \left[e^{j(\omega_n-\omega_m)\mu} \right] d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \left[\frac{\text{sen}(\alpha\tau\mu)}{(\alpha\tau\mu)} e^{-j\mu} \right] [\delta(\mu+(\omega_n-\omega_m))] d\mu \quad (\text{EQ.3.23})$$

Integrando la ecuación (EQ.3.23) se obtiene^(A2.9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \left[\frac{\text{sen}(\alpha\tau\mu)}{(\alpha\tau\mu)} e^{-j\mu} \right] [\delta(\mu+(\omega_n-\omega_m))] d\mu = 2\pi \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n-\omega_m))}{(\alpha\tau(\omega_n-\omega_m))} e^{j(\omega_n-\omega_m)} \quad (\text{EQ.3.24})$$

Si se sustituye la ecuación (EQ.3.24) en la ecuación (EQ.3.19) se obtiene:

$$BJD_{\text{cruce}}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m e^{j(\theta_n-\theta_m)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left(\frac{\omega_n+\omega_m}{2}\right)\tau} 2\pi \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n-\omega_m))}{(\alpha\tau(\omega_n-\omega_m))} e^{j(\omega_n-\omega_m)} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.25})$$

Reagrupando términos en la ecuación (EQ.3.25) se obtiene:

$$BJD_{\text{cruce}}(t, \omega) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m e^{j((\omega_n-\omega_m)t+\theta_n-\theta_m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n-\omega_m))}{(\alpha\tau(\omega_n-\omega_m))} e^{j\left(\frac{\omega_n+\omega_m}{2}\right)\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{EQ.3.26})$$

Si se integra la ecuación (EQ.3.26) se obtiene^(A2.10):

$$BJD_{\text{cruce}}(t, \omega) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m e^{j((\omega_n-\omega_m)t+\theta_n-\theta_m)} \frac{\pi}{\alpha(\omega_n-\omega_m)} P_{2\alpha(\omega_n-\omega_m)} \left(\omega - \frac{\omega_n+\omega_m}{2} \right) \quad (\text{EQ.3.27})$$

Puesto que la distribución es real, entonces:

$$BJD_{\text{cruce}}(t, \omega) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m \cos((\omega_n-\omega_m)t+\theta_n-\theta_m) \frac{\pi}{\alpha(\omega_n-\omega_m)} P_{2\alpha(\omega_n-\omega_m)} \left(\omega - \frac{\omega_n+\omega_m}{2} \right) \quad (\text{EQ.3.28})$$

Finalmente:

$$BJD(t, \omega) = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n^2 \delta(\omega - \omega_n) + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m \cos((\omega_n-\omega_m)t+\theta_n-\theta_m) \frac{\pi}{\alpha(\omega_n-\omega_m)} P_{2\alpha(\omega_n-\omega_m)} \left(\omega - \frac{\omega_n+\omega_m}{2} \right) \quad (\text{EQ.3.29})$$

3.6. Factor de peso de los términos de cruce

El factor de peso⁽¹⁷⁾ de los términos de cruce en la ecuación (EQ.3.29) se define como:

$$WF_{BJD} = \frac{\pi}{\alpha(\omega_n-\omega_m)} P_{2\alpha(\omega_n-\omega_m)} \left(\omega - \frac{\omega_n+\omega_m}{2} \right) \quad (\text{EQ.3.30})$$

el cual pondera al factor $A_n A_m \cos(\bullet)$. El término $A_n A_m$ constituye una energía de interferencia entre dos componentes sinusoidales diferentes de una señal. Mientras que el término $\cos(\bullet)$ indica que los términos de cruce son periódicos y que pueden ser positivos o negativos, en la gráfica Fig.3.3 se muestra la ecuación.

Para el caso de la distribución de Born Jordan, su factor de peso es una función pulso rectangular simétrico unitario que se extiende a lo largo de $-\alpha|\omega_n-\omega_m| < \omega - (\omega_n+\omega_m)/2 < \alpha|\omega_n-\omega_m|$.

Consecuentemente, se distribuye el término de cruce asociado a ω_n y ω_m a lo largo de un intervalo finito.

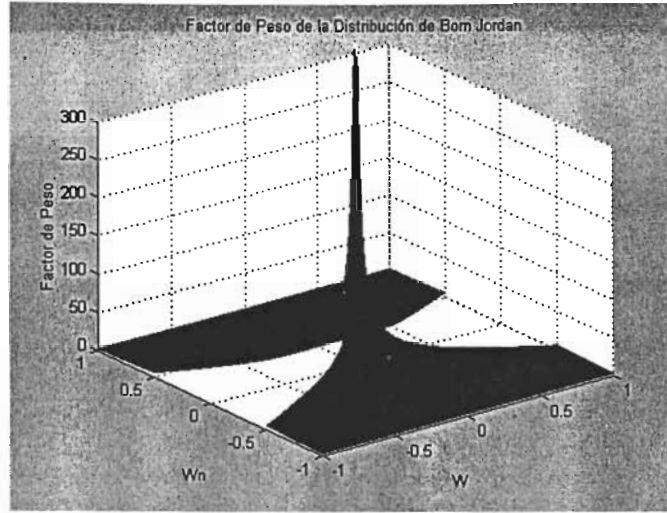


Fig.3.3 Factor de peso de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan.

3.7. Algoritmo eficiente

El algoritmo eficiente⁽⁷⁾ calcula la ecuación (EQ.3.13) valuada en $n = 0$. Por consiguiente:

$$BJD(0, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau)e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) \quad (EQ.3.31)$$

Si se separa la ecuación (EQ.3.31) en dos sumatorias, una para los índices positivos de τ y otra para los índices negativos, se obtiene:

$$BJD(0, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{-1} W(\tau)W^*(-\tau)e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau)e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) \quad (EQ.3.32)$$

Si a la ecuación (EQ.3.32) se suma y se resta el término $2W(0)W^*(0)x(0)x^*(0)$, correspondiente al índice $\tau = 0$, se obtiene:

$$BJD(0, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^0 W(\tau)W^*(-\tau)e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau)e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) - 2W(0)W^*(0)x(0)x^*(0) \quad (EQ.3.33)$$

Obsérvese que $W(0) = 1$.

Si en la primera sumatoria de la ecuación (EQ.3.33) se cambia el índice τ por $-\tau$, se obtiene:

$$\begin{aligned} BJD(0, k) = & 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(-\tau) W^*(\tau) e^{\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|-\tau|} x(\mu-\tau) x^*(\mu+\tau) \\ & + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau) x^*(\mu-\tau) \\ & - 2x(0)x^*(0) \end{aligned} \quad (\text{EQ.3.34})$$

Si en la primera sumatoria de la ecuación (EQ.3.34) se aplica el operador conjugado complejo dos veces, se obtiene^(A2.11):

$$\begin{aligned} BJD(0, k) = & \left[2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(-\tau) W^*(\tau) e^{\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu-\tau) x^*(\mu+\tau) \right]^* \\ & + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau) x^*(\mu-\tau) \\ & - 2x(0)x^*(0) \end{aligned} \quad (\text{EQ.3.35})$$

Si en la primera sumatoria de la ecuación (EQ.3.35) se calcula uno de los operadores conjugados complejos, se obtiene^(A2.12):

$$\begin{aligned} BJD(0, k) = & \left[2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W^*(-\tau) W(\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x^*(\mu-\tau) x(\mu+\tau) \right]^* \\ & + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau) x^*(\mu-\tau) \\ & - 2x(0)x^*(0) \end{aligned} \quad (\text{EQ.3.36})$$

Entonces, reagrupando términos se tiene^(A2.13):

$$BJD(0, k) = 2\text{Real} \left[2 \sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2\tau}^{\alpha 2\tau} \frac{1}{4\alpha\tau} x(\mu+\tau) x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.3.37})$$

Donde $\text{Real}[\bullet]$ es el operador parte real de un número complejo. Finalmente se tiene:

$$BJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau) x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.3.38})$$

3.8. Optimización del índice μ

Los valores máximo y mínimo del índice μ para un valor determinado de τ , que no produce multiplicaciones triviales en la distribución de Born Jordan, son $\min\{2\alpha|\tau|, N-1-|\tau|\}$ y $\max\{-2\alpha|\tau|, -N+1+|\tau|\}$ respectivamente, donde $|\tau|$ significa el valor absoluto de τ . De este modo, la ecuación (EQ.3.38) se transforma a:

$$BJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-\alpha 2|\tau|, -N+1+|\tau|\}}^{\min\{\alpha 2|\tau|, N-1-|\tau|\}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau) x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.3.39})$$

Se ilustra el caso particular en el cual la longitud de ventana es $L=15$, esto es $N=8$, con un factor de peso $\alpha = 0.5$. Los elementos del vector x son:

Elemento	$x(-10)$	$x(-9)$	$x(-8)$	$x(-7)$	$x(-6)$	$x(-5)$	$x(-4)$	$x(-3)$	$x(-2)$	$x(-1)$
Valor	0	0	0	x_{-7}	x_{-6}	x_{-5}	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}

Elemento	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$
Valor	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	0	0	0

Nótese que los elementos no triviales del vector x van del índice -7 a 7 .

A continuación se desarrolla la sumatoria con respecto a μ . Primero, si $\tau=0$, se tiene:

	μ
	0
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(0)$

Si $\tau=1$, se tiene:

	μ		
	-1	0	1
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

Si $\tau=2$, se tiene:

	μ				
	-2	-1	0	1	2
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-4)$	$x^*(-3)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

Si $\tau=3$, se tiene:

	μ						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-6)$	$x^*(-5)$	$x^*(-4)$	$x^*(-3)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

Si $\tau=4$, se tiene:

	μ								
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-8)$	$x^*(-7)$	$x^*(-6)$	$x^*(-5)$	$x^*(-4)$	$x^*(-3)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

donde las celdas sombreadas representan multiplicaciones triviales cuyo resultados es cero.

Si $\tau=5$, se tiene:

	μ										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-10)$	$x^*(-9)$	$x^*(-8)$	$x^*(-7)$	$x^*(-6)$	$x^*(-5)$	$x^*(-4)$	$x^*(-3)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

Si $\tau = 6$, se tiene:

	μ					
	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-12)$	$x^*(-11)$	$x^*(-10)$	$x^*(-9)$	$x^*(-8)$	$x^*(-7)$

	μ						
	0	1	2	3	4	5	6
$x(\mu + \tau)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$	$x(11)$	$x(12)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-6)$	$x^*(-5)$	$x^*(-4)$	$x^*(-3)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

Finalmente si $\tau = 7$, se tiene:

	μ						
	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$x(\mu + \tau)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-14)$	$x^*(-13)$	$x^*(-12)$	$x^*(-11)$	$x^*(-10)$	$x^*(-9)$	$x^*(-8)$

	μ							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$x(\mu + \tau)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$	$x(10)$	$x(11)$	$x(12)$	$x(13)$	$x(14)$
$x^*(\mu - \tau)$	$x^*(-7)$	$x^*(-6)$	$x^*(-5)$	$x^*(-4)$	$x^*(-3)$	$x^*(-2)$	$x^*(-1)$	$x^*(0)$

Para cada valor de τ de 0 a 3, se observa que el valor máximo y mínimo del índice μ que no produce multiplicaciones triviales es $\alpha 2\tau$ y $-\alpha 2\tau$ respectivamente. Mientras que para cada valor de τ de 3 a 7, se observa que el valor máximo y mínimo del índice μ que no produce multiplicaciones triviales es $7 - |\tau|$ y $-7 + |\tau|$.

Generalizando el resultado. Si la longitud de la ventana es $L = 2N - 1$ entonces el valor inicial y final del índice μ para cada valor τ que no produce multiplicaciones triviales es $\max\{-\alpha 2|\tau|, -N + 1 + |\tau|\}$ y $\min\{\alpha 2|\tau|, N - 1 - |\tau|\}$ respectivamente. En la gráfica de la Fig. 3.4 se muestra el lugar geométrico descrito anteriormente.

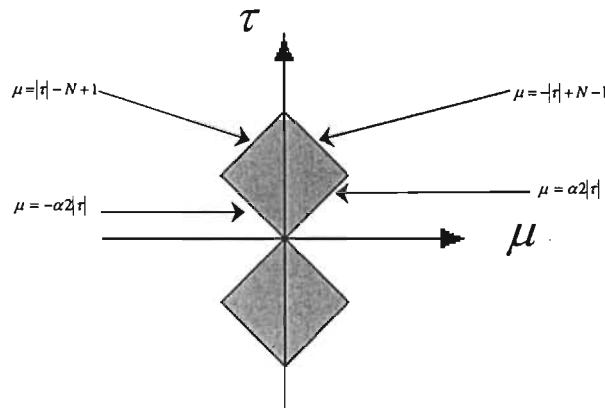


Fig. 3.4. Dominio de la función de auto-correlación generalizada indexada al tiempo que no produce multiplicaciones triviales.

3.9. Complejidad algorítmica

En este apartado se presenta el conteo de operaciones para la distribución discreta sin simplificar en la ecuación (EQ.3.38) y para el algoritmo eficiente en la ecuación (EQ.3.39). Se concluirá que el algoritmo sin simplificación realiza el doble de operaciones que el algoritmo eficiente, aunque ambos son de complejidad $O(N^3)$.

3.9.1 Algoritmo sin simplificar

El número de operaciones para calcular la distribución discreta sin simplificar en la ecuación (EQ.3.38) son^(A2.14):

$$\text{Productos: } 2N^3 + 4N^2 - N$$

$$\text{Sumas: } 2N^3 + 2N - 4N$$

3.9.2 Algoritmo eficiente

El número de operaciones para calcular el algoritmo eficiente en la ecuación (EQ.3.39) son^(A2.15):

$$\text{Productos: } N^3 + 3N^2 + 3N$$

$$\text{Sumas: } N^3$$

3.10. Experimentos Numéricos

En este apartado se presentan experimentos numéricos calculando la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan de diferentes funciones de interés académico, como son: sinusoidal, chirp, fase cuadrática e impulso. Se utiliza la ecuación (EQ.3.39).

3.10.1 Experimento 1: Función sinusoidal

En las gráficas de las Fig. 3.5 y 3.6 se muestra la distribución tiempo frecuencia de la función sinusoidal $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Se observa el comportamiento constante de la frecuencia con respecto al tiempo.

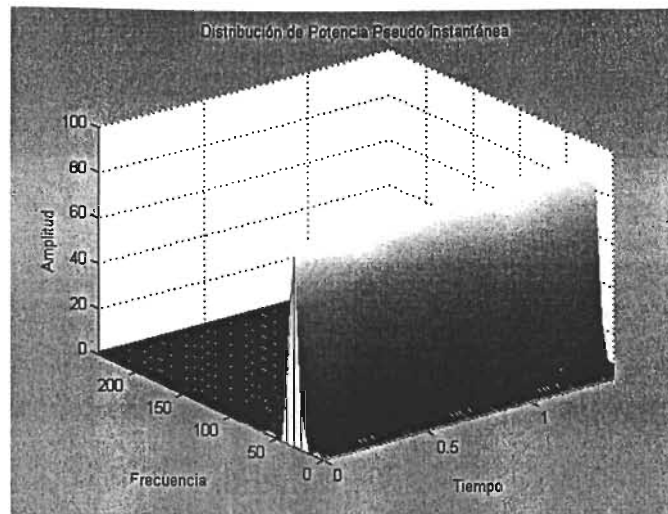


Fig. 3.5. Distribución tiempo frecuencia de la función sinusoidal.

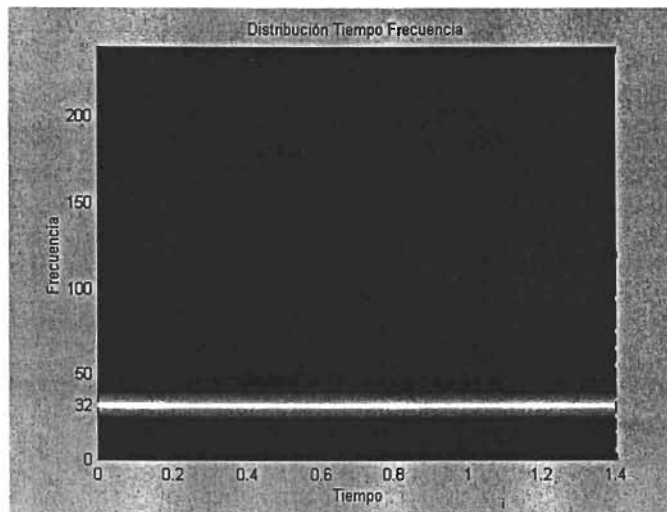


Fig. 3.6. Distribución tiempo frecuencia de la función sinusoidal.

En la gráfica de la Fig. 3.7 se muestra su frecuencia media pseudo instantánea, utilizando la ecuación (EQ.2.21). Nuevamente se observa, que esta frecuencia es constante con respecto al tiempo.

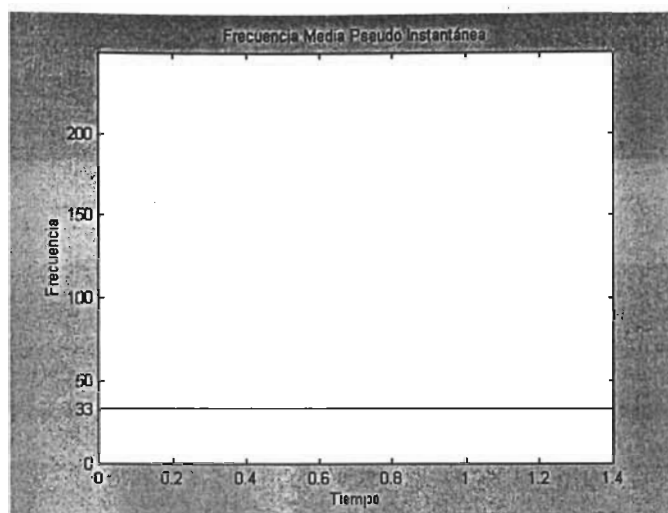


Fig. 3.7. Frecuencia media pseudo instantánea de la función sinusoidal.

3.10.2 Experimento 2. Función Chirp o fase lineal

En la gráfica de la Fig. 3.8 y 3.9 se muestra la gráfica de la distribución tiempo frecuencia de la función Chirp $f(t) = \cos(2\pi(\alpha t + \beta) t)$. Se observa que la frecuencia varía en forma lineal con respecto al tiempo, es decir, $f = \alpha t + \beta$.

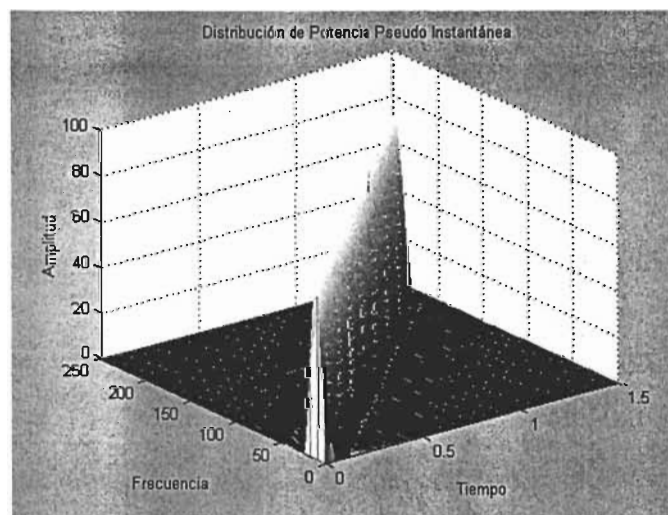


Fig. 3.8. Distribución de tiempo frecuencia de la función Chirp.

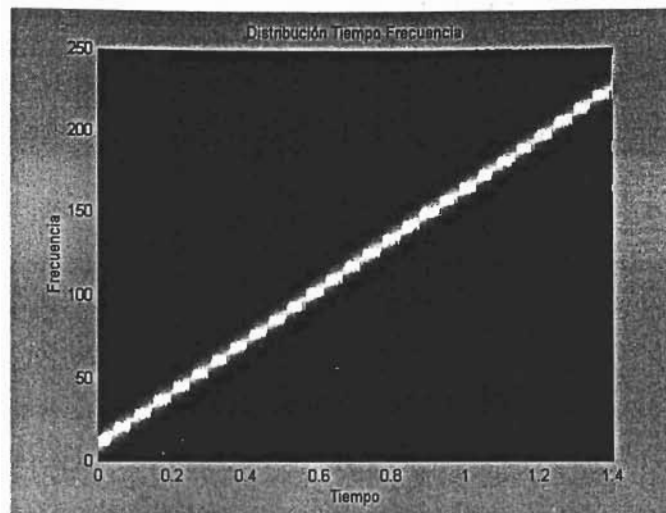


Fig. 3.9. Distribución de tiempo frecuencia de la función Chirp.

En la gráfica de la Fig.3.10 se muestra su frecuencia media pseudo instantánea. Nuevamente se observa, que esta frecuencia varía linealmente con respecto al tiempo.

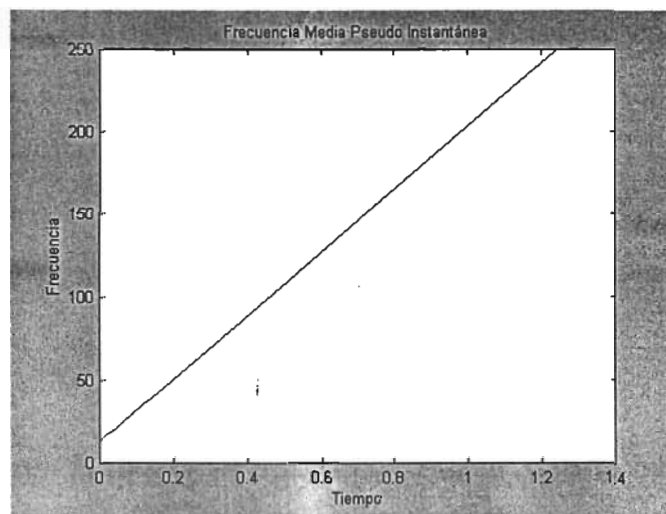


Fig. 3.10. Frecuencia media pseudo instantánea de una función Chirp.

3.10.3 Experimento 3: Función fase cuadrática

En la gráfica de la Fig. 3.11 y 3.12 se muestra la distribución tiempo frecuencia de la función fase cuadrática $f(t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + 1\right)t\right)$ donde la frecuencia varía cuadráticamente con respecto al tiempo, es decir, $f = \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + 1$.

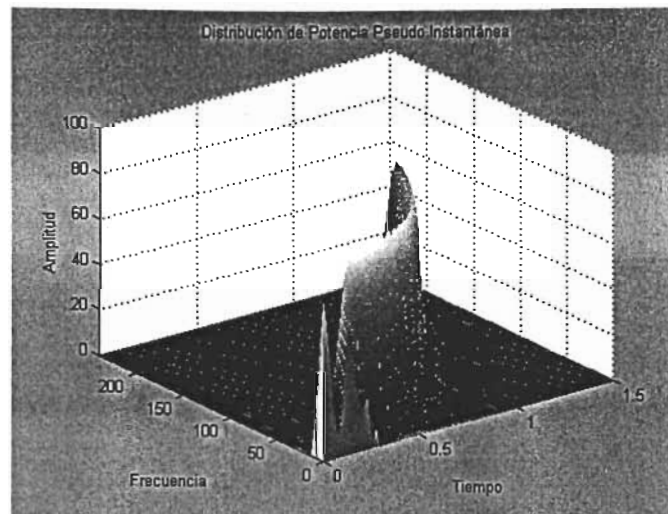


Fig. 3.11. Distribución tiempo frecuencia de la función fase cuadrática.

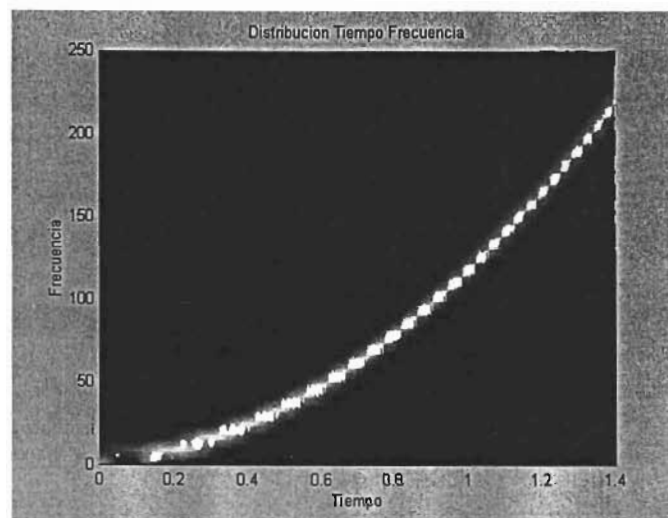


Fig. 3.12. Distribución tiempo frecuencia de la función fase cuadrática.

En la gráfica de la Fig.3.13 se muestra su frecuencia media pseudo instantánea. Nuevamente se observa, que esta frecuencia varía cuadráticamente con respecto al tiempo.

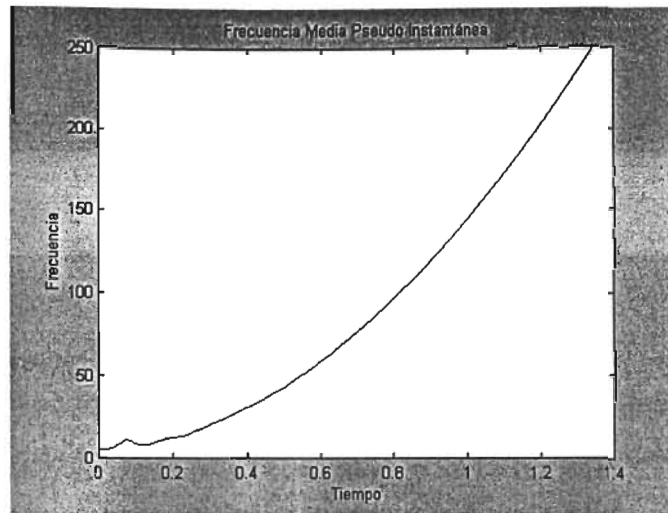


Fig. 3.13 Frecuencia media pseudo instantánea de la fase cuadrática

3.10.4 Experimento 4. Función impulso

En la gráfica de la Fig. 3.14 y 3.15 se muestra la distribución de tiempo frecuencia de un impulso $f(t)=\delta(t)$, el cual se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ \infty & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

en donde aparecen súbitamente todas las frecuencias en el instante de tiempo $t=0$.

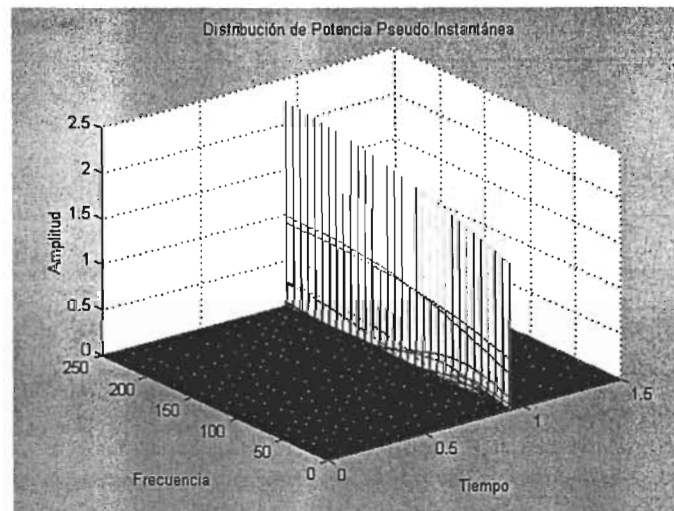


Fig. 3.14. Distribución tiempo frecuencia de la función impulso.

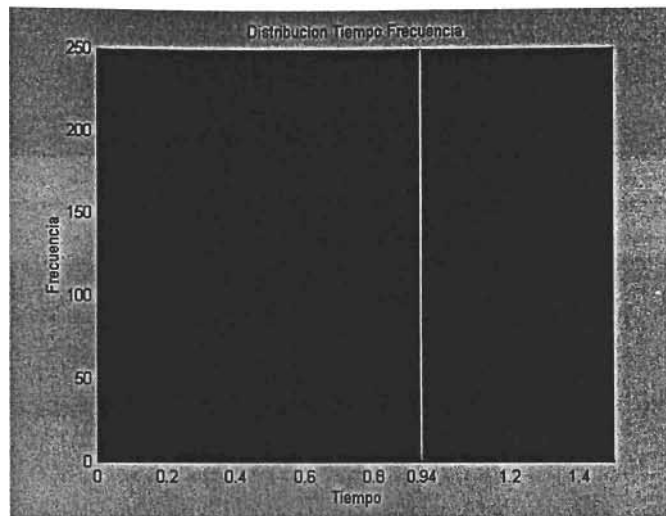


Fig. 3.15. Distribución tiempo frecuencia de la función impulso.

En la gráfica de la Fig.3.16 se muestra su frecuencia media pseudo instantánea. En este punto se observa que esta frecuencia tiende a ser infinita en el instante de tiempo $t=0$.

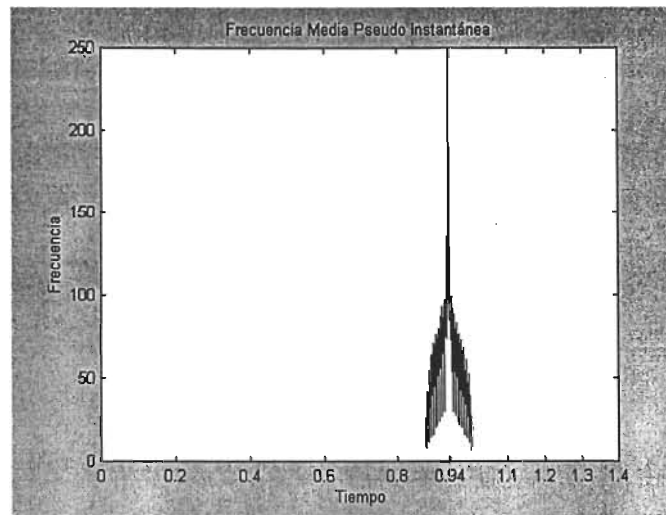


Fig. 3.16. Frecuencia media pseudo instantánea de la función impulso.

4. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS ÓPTIMOS

4.1. Introducción

En este capítulo se construye la señal Dópler Ultrasónica utilizada en las simulaciones y se presentan diversos experimentos numéricos realizados en Matlab para mostrar cualitativa y cuantitativamente el comportamiento de la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS de la señal, utilizando la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan al variar la longitud de ventana de muestreo, la relación de potencia señal a ruido (SNR), y el parámetro alfa propio de la distribución. También se presentan criterios para la elección del valor óptimo de este parámetro.

4.2. Señal Dópler Ultrasónica Simulada

El desempeño de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan se evaluará con una señal Dópler Ultrasónica simulada, cuya construcción se detalla en este inciso⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾.

Una señal Dópler no estacionaria se puede describir como:

$$x_{Doppler}(t) = A(t)e^{j\phi_a(t)}e^{j\phi_d(t)} \quad (\text{EQ.4.1})$$

donde $A(t)e^{j\phi_a(t)}$ es una función aleatoria de ancho de banda y $e^{j\phi_d(t)}$ es una función determinística de desplazamiento en frecuencia. El componente aleatorio de la señal $x_{Doppler}(t)$, el cual constituye el ancho de banda, es:

$$A(t)e^{j\phi_a(t)} = F^{-1}[G(f)N(f)] \quad (\text{EQ.4.2})$$

y el componente determinístico, el cual constituye el desplazamiento en frecuencia, es:

$$\phi_d(t) = 2\pi \int_0^t f_i(t) dt \quad (\text{EQ.4.3})$$

donde $F^{-1}[\]$ es el operador de la transformada inversa de Fourier, $N(f)$ es una variable aleatoria compleja con promedio cero, desviación estándar unitaria y distribución de probabilidad normal, $G(f)$ es la envolvente del espectro y $f_i(t)$ es la frecuencia media pseudo instantánea de la señal $x_{Doppler}(t)$.

En este trabajo, la función $G(f)$ es una función Gaussiana definida como:

$$G(f) = \sqrt{e^{-0.5\left(\frac{f}{b}\right)^2}} \quad (\text{EQ.4.4})$$

donde el ancho de banda espectral RMS es $b = 100$ (constante con respecto al tiempo). En la gráfica de la Fig. 4.1 se muestra la función $G(f)$.

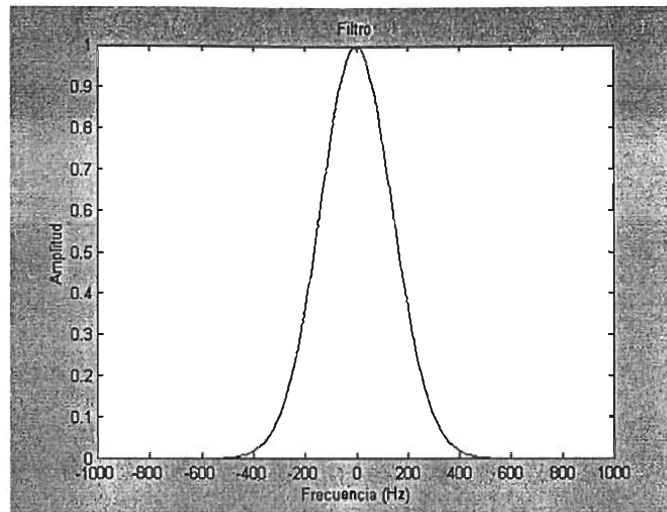


Fig.4.1 Gráfica de la función $G(f)$ con un ancho de banda espectral RMS $b = 100$.

En la gráfica de la Fig. 4.2 se muestra el ancho de banda espectral RMS de la señal $x_{Doppler}(t)$ y en la gráfica de la Fig. 4.3 se muestra la frecuencia media pseudo instantánea $f_i(t)$ de la misma señal.

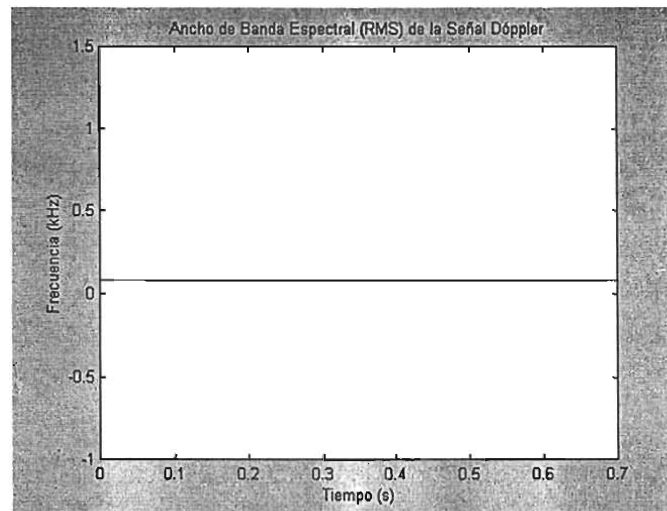


Fig. 4.2 Gráfica del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada $x_{Doppler}(t)$.

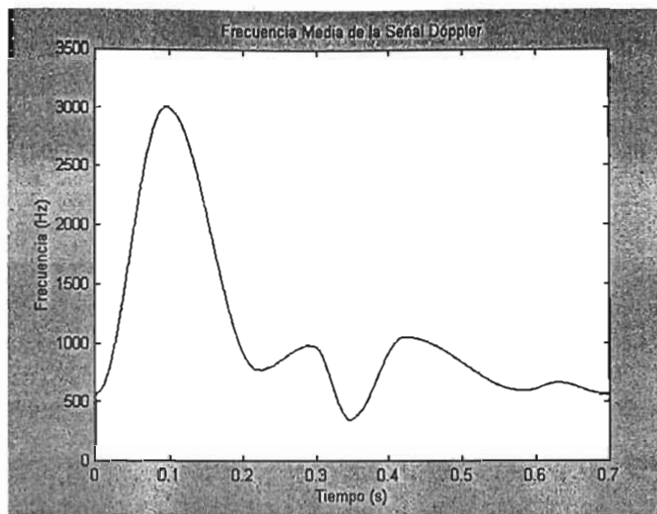


Fig. 4.3. Gráfica de la frecuencia media instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada $x_{Doppler}(t)$.

La duración de la señal es de 0.7 segundos y se muestra a una frecuencia de 19.2 KHz. Nótese que 13440 muestras es el producto de (19200hz por 0.7s).

4.3. Definición de parámetro óptimo y procedimiento para su cálculo

Se utiliza la señal Dópler simulada discreta $x_{Doppler}(t)$ calculada en la sección anterior, ecuación (EQ.4.1)^{[8][10][11]}.

4.3.1. Procedimiento

El procedimiento es el siguiente. Se toma la n-ésima ventana de muestreo de longitud $L = 2N - 1$ y se calcula su señal analítica, la cual constituye la señal $x(m)$ para $m = -N + 1, \dots, N - 1$. En la sección 2.7, Señal analítica, se muestra este procedimiento. Segundo, se estima la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan valuada en tiempo cero según la ecuación (EQ.3.39):

$$BJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau) e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-a\lfloor \tau \rfloor, -N+1+\lceil \tau \rceil\}}^{\min\{a\lfloor \tau \rfloor, N-1-\lceil \tau \rceil\}} \frac{1}{4a\lceil \tau \rceil} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.4.5})$$

para $k = 0, \dots, N - 1$.

Tercero, se calcula la potencia media pseudo instantanea valuada en cero según la ecuación (EQ.2.23):

$$PIPD(0, k) = \begin{cases} BJD(0, k) & BJD(0, k) \geq 0 \\ 0 & BJD(0, k) < 0 \end{cases} \quad (\text{EQ.4.6})$$

para $k = 0, \dots, N - 1$.

Cuarto, se estima la frecuencia media pseudo instantánea según la ecuación (EQ. 2.25):

$$PIMF(n) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} k \cdot PIPD(0, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} PIPD(0, k)} \quad (\text{EQ.4.7})$$

y el ancho de banda espectral RMS según la ecuación (EQ.2.27):

$$\hat{b}(n) = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} (PIMF(n) - k)^2 \cdot PIPD(0, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} PIPD(0, k)}} \quad (\text{EQ.4.8})$$

donde n representa el número consecutivo de la ventana procesada, es decir, para la primera $n = 1$, para la segunda $n = 2$ y así sucesivamente. Nótese que los resultados $PIPD(n)$ y $\hat{b}(n)$ corresponden al punto central de la ventana n -ésima procesada.

Se repite el procedimiento descrito previamente para todas las ventanas consecutivas de máximo traslape, es decir, para todas las ventanas consecutivas que comparten $L - 1$ elementos.

Finalmente, el resultado estimado se compara contra los valores teóricos y se calcula el error RMS de ambas estimaciones espectrales. En la sección 4.2, Señal Dópller ultrasónica, están los valores teóricos. En la sección 2.13, Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS, se muestran las ecuaciones utilizadas para estimar dicho error.

En las secciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se muestran los resultados obtenidos en los experimentos numéricos variando las longitudes de las ventanas de muestreo con $L = 63, 127, 255$ y 511 respectivamente, con una relación señal a ruido $SNR = 40, 30, 20, 10$ dB y con diversos valores del parámetro alfa.

4.3.2. Parámetro óptimo

El objetivo es encontrar el valor del parámetro Alfa propio de la distribución, ecuación (EQ.4.5), que minimiza el error de las estimaciones espectrales para cada pareja de valores L y SNR . Dicho valor se llamará *parámetro óptimo* de la distribución.

4.4. Longitud de ventana de muestreo de 63 elementos

En la gráfica de la Fig. 4.4 se muestra la Distribución Tiempo Frecuencia de Born Jordan, la frecuencia media pseudo instantánea (la línea continua muestra los valores teóricos y la otra los estimados), y el ancho de banda espectral RMS de la señal Dópller ultrasónica simulada, calculada para una longitud de ventana de muestreo de 63 elementos, sin ruido.

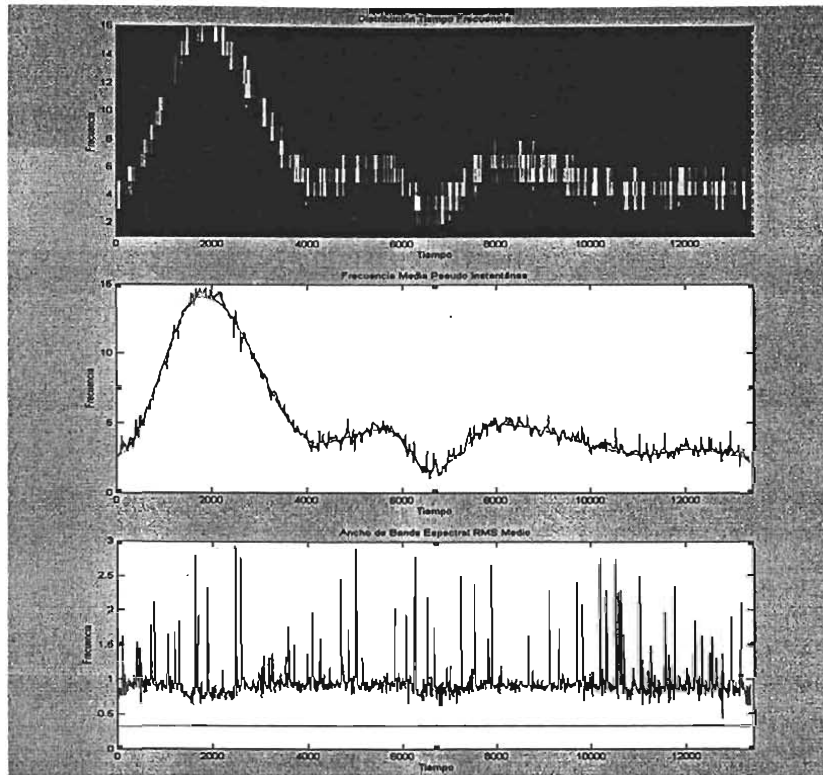


Fig. 4.4 Longitud de ventana de muestreo de 63 elementos sin ruido. a) Distribución Tiempo Frecuencia; b) Frecuencia media pseudo instantánea; c) Ancho de banda espectral RMS.

4.4.1. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la gráfica de la Fig. 4.5 se muestra el error RMS en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 3. Para las SNR de 20, 30 y 40dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 1.5.

En la sección 4.8, Análisis del parámetro Alfa, se explica la elección del rango de Alfa de 0.5 a 5.

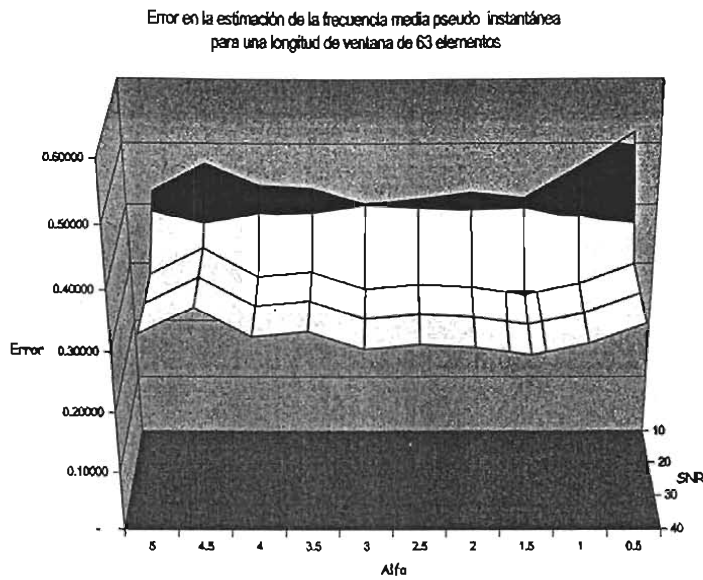


Fig. 4.5 Error RMS en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 63 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.1 se muestran los valores mínimos del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	0.4012	3
20	0.2957	1.5
30	0.2953	1.5
40	0.2952	1.5

Tb.4.1 Parámetro Alfa óptimo para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 63 elementos.

4.4.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS

En la gráfica de la Fig. 4.6 se muestra el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 0.5. Para las SNR de 20, 30 y 40 dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 1.

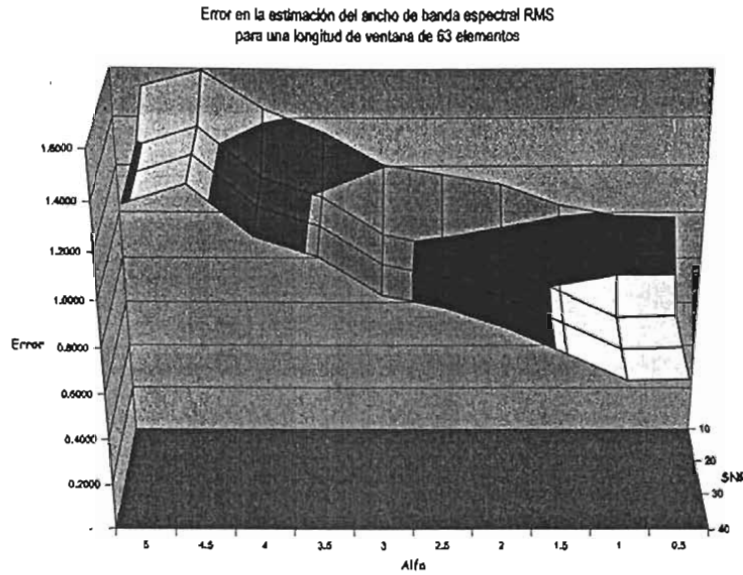


Fig. 4.6 Error RMS en la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 63 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.2 se muestran los valores mínimos del error en la estimación del ancho de banda espectral RMS, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	0.9782	0.5
20	0.6699	1
30	0.6648	1
40	0.6647	1

Tb.4.2. Parámetro Alfa óptimo para la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 63 elementos.

4.4.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda

En la gráfica de la Fig. 4.7 se muestra el error en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10, 20, 30 y 40 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 1.

Nótese, que el error del ancho de banda prevalece sobre el error de la frecuencia, haciendo que los parámetros Alfa calculados por la estimación del ancho de banda predominen.

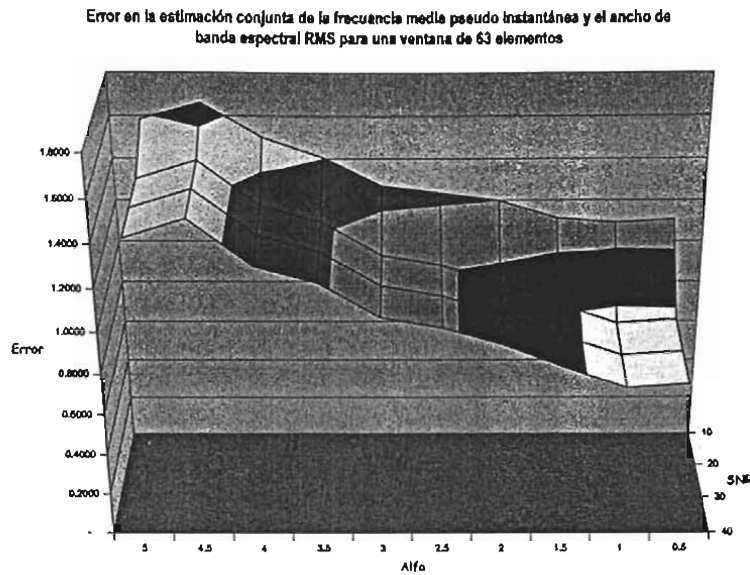


Fig. 4.7 Error RMS en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS, para una longitud de ventana de 63 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.3 se muestran los valores mínimos del error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	1.0914	1
20	0.7401	1
30	0.7353	1
40	0.7352	1

Tb.4.3 Parámetro Alfa óptimo para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda para una longitud de ventana de 63 elementos.

4.5. Longitud de ventana de muestreo de 127 elementos

En la gráfica de la Fig. 4.8 se muestra la Distribución Tiempo Frecuencia de Born Jordan, la frecuencia media pseudo instantánea (la línea continua muestra los valores teóricos y la otra los calculados), y el ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, calculada para una longitud de ventana de muestreo de 127 elementos, sin ruido.

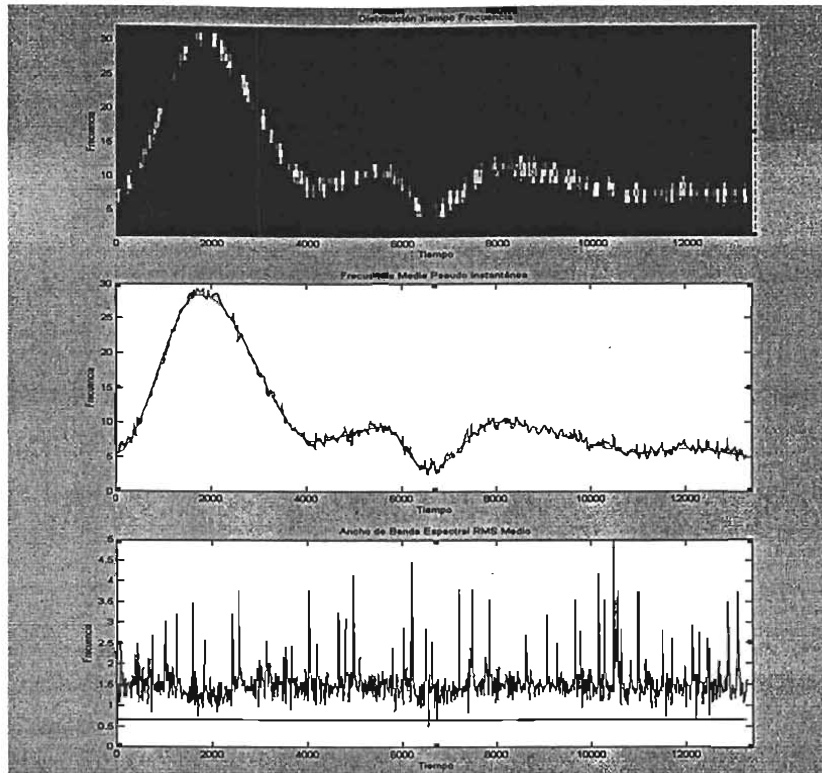


Fig. 4.8 Longitud de ventana de muestreo de 127 elementos sin ruido. a) Distribución Tiempo Frecuencia; b) Frecuencia media pseudo instantánea; c) Ancho de banda espectral RMS.

4.5.1. *Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea*

En la gráfica de la Fig. 4.9 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 2.5, para las SNR de 20, 30 y 40 dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 2.

Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 127 elementos

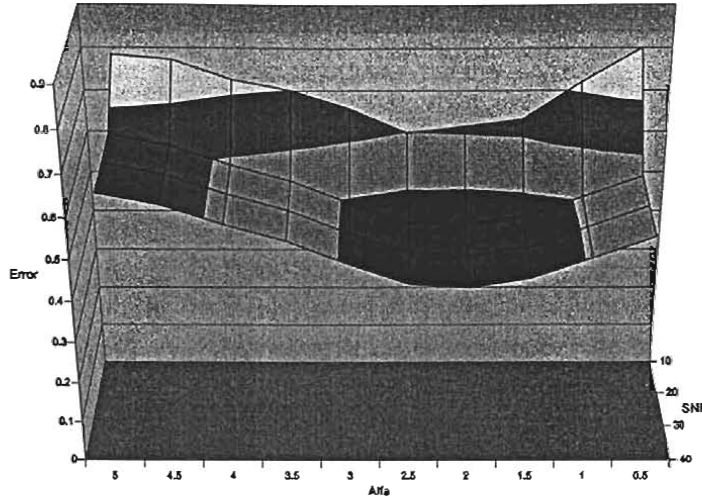


Fig. 4.9 Error RMS en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 127 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.4 se muestran los valores mínimos del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	0.5971	2.5
20	0.4361	2
30	0.4352	2
40	0.4351	2

Tb.4.4 Parámetro Alfa óptimo para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 127 elementos.

4.5.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS

En la gráfica de la Fig. 4.10 se muestra el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10, 20, 30 y 40 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo de 1.

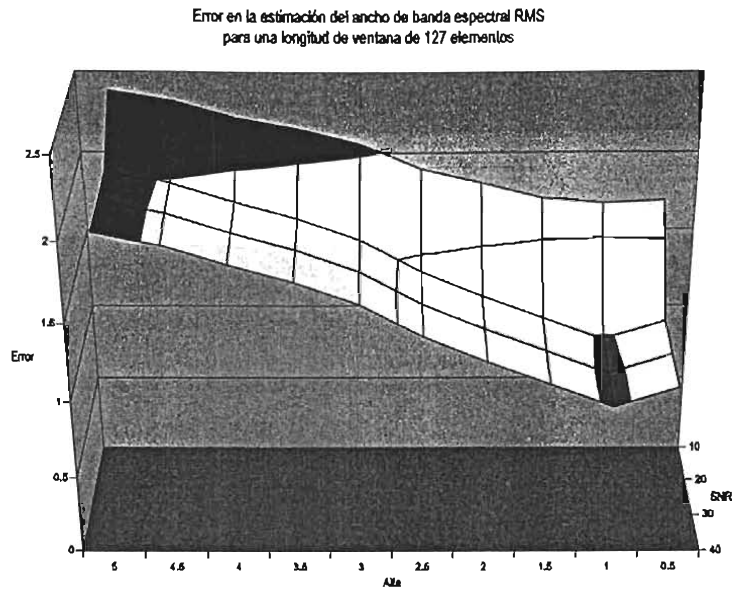


Fig. 4.10 Error RMS en la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 127 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.5 se muestran los valores mínimos del error en la estimación del ancho de banda espectral RMS, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	1.6751	1
20	0.9797	1
30	0.9688	1
40	0.9687	1

Tb.4.5. Parámetro Alfa óptimo para la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 127 elementos.

4.5.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda

En la gráfica de la Fig. 4.11 se muestra el error en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10, 20, 30 y 40 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 1

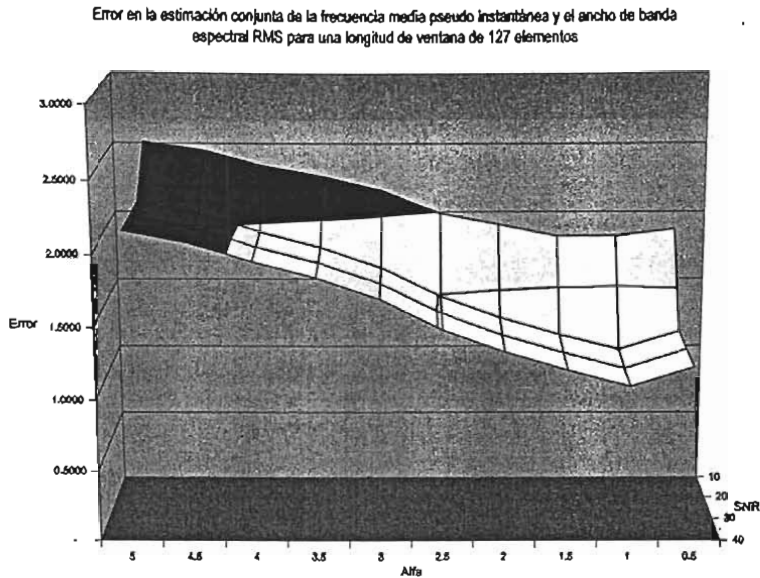


Fig. 4.11 Error RMS en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS, para una longitud de ventana de 127 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.6 se muestran los valores mínimos del error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	1.8211	1.5
20	1.1037	1
30	1.0928	1
40	1.0929	1

Tb.4.6 Parámetro Alfa óptimo para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda para una longitud de ventana de 127 elementos.

4.6. Longitud de ventana de muestreo de 255 elementos

En la gráfica de la Fig. 4.12 se muestra la Distribución Tiempo Frecuencia de Born Jordan, la frecuencia media pseudo instantánea (la línea continua muestra los valores teóricos y la otra los calculados), y el ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, calculada para una longitud de ventana de muestreo de 255 elementos, sin ruido.

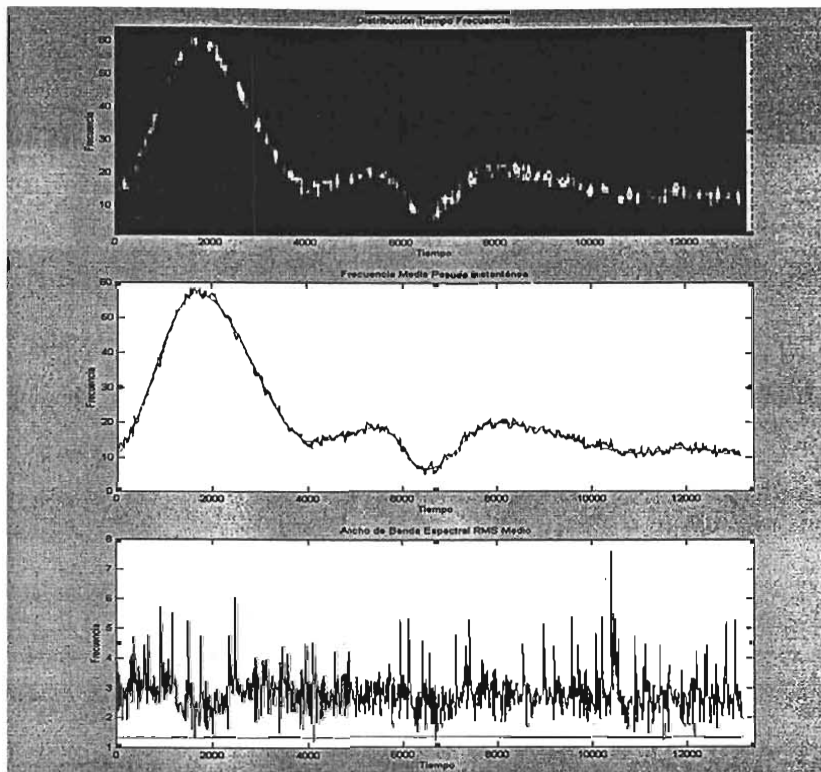


Fig. 4.12 Longitud de ventana de muestreo de 255 elementos sin ruido. a) Distribución Tiempo Frecuencia; b) Frecuencia media pseudo instantánea; c) Ancho de Banda Espectral RMS.

4.6.1. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la gráfica de la Fig. 4.13 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10, 20, 30 y 40 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 2.

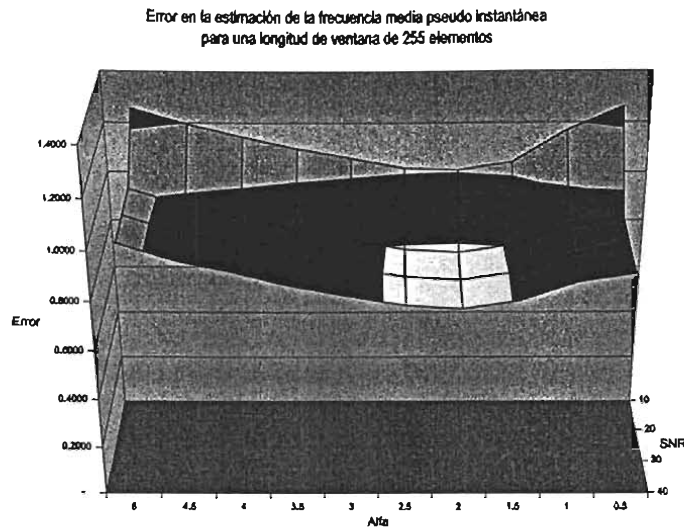


Fig. 4.13 Error RMS en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 255 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.7 se muestran los valores mínimos del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	1.0091	2
20	0.7734	2
30	0.7714	2
40	0.7714	2

Tb.4.7 Parámetro Alfa óptimo para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 255 elementos.

4.6.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS

En la gráfica de la Fig. 4.14 se muestra el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópller ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 0.5, para las SNR de 20, 30 y 40 dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 1.

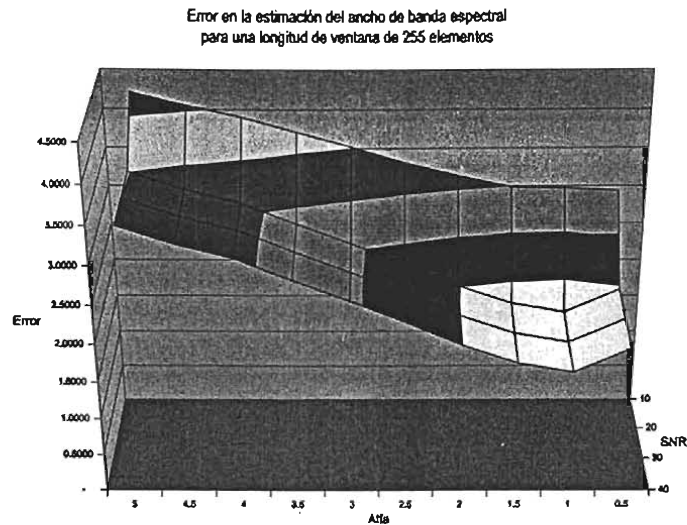


Fig. 4.14 Error RMS en la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 255 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.8 se muestran los valores mínimos del error en la estimación del ancho de banda espectral RMS, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error Mínimo	Alfa óptimo
10	2.9391	0.5
20	1.6575	1
30	1.6379	1
40	1.6378	1

Tb.4.8 Parámetro Alfa óptimo para la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 255 elementos.

4.6.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda

En la gráfica de la Fig. 4.15 se muestra el error en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 1.5, para las SNR de 20, 30 y 40 dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 1.

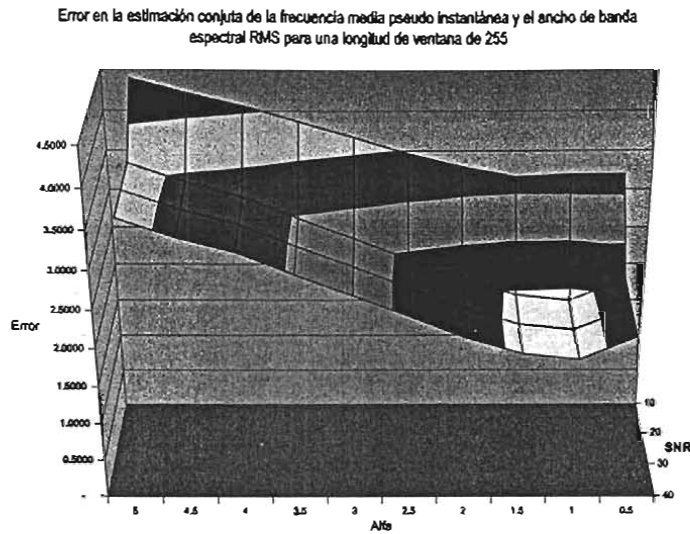


Fig. 4.15 Error RMS en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS, para una longitud de ventana de 255 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.9 se muestran los valores mínimos del error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	3.1637	1.5
20	1.8769	1
30	1.8587	1
40	1.8586	1

Tb.4.9 Parámetro Alfa óptimo para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda para una longitud de ventana de 255 elementos.

4.7. Longitud de ventana de muestreo de 511 elementos

En la gráfica de la Fig. 4.16 se muestra la Distribución Tiempo Frecuencia de Born Jordan, la frecuencia media pseudo instantánea (la línea continua muestra los valores teóricos y la otra los calculados) y el ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, calculada para una longitud de ventana de muestreo de 511 elementos, sin ruido.

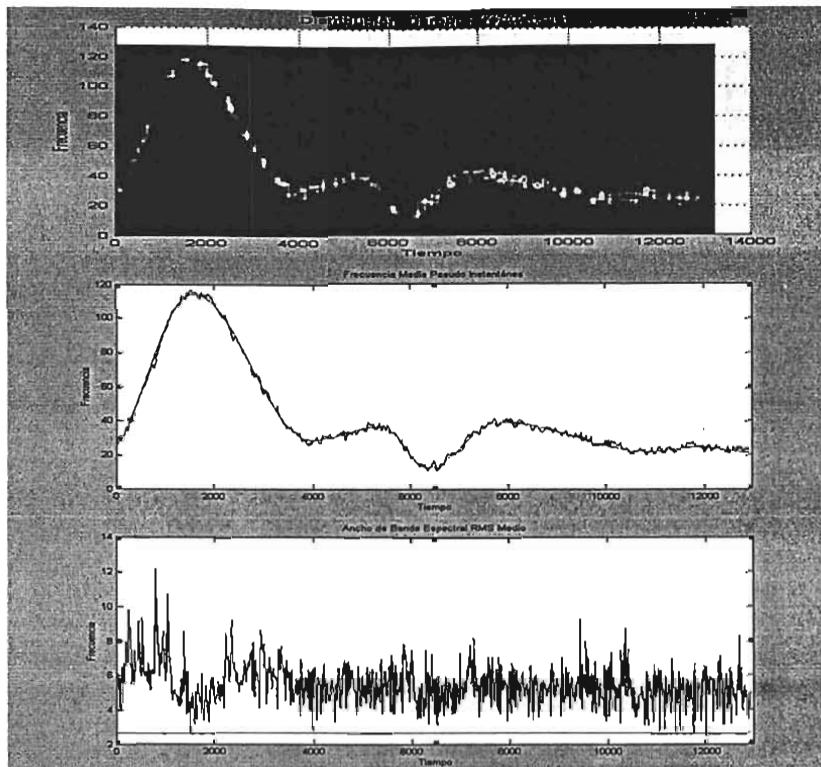


Fig. 4.16 Longitud de ventana de muestreo de 511 elementos sin ruido. a) Distribución Tiempo Frecuencia; b) Frecuencia media pseudo instantánea; c) Ancho de Banda Espectral RMS.

4.7.1. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la gráfica de la Fig. 4.17 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10, 20, 30 y 40 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 1.5.

Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 511 elementos

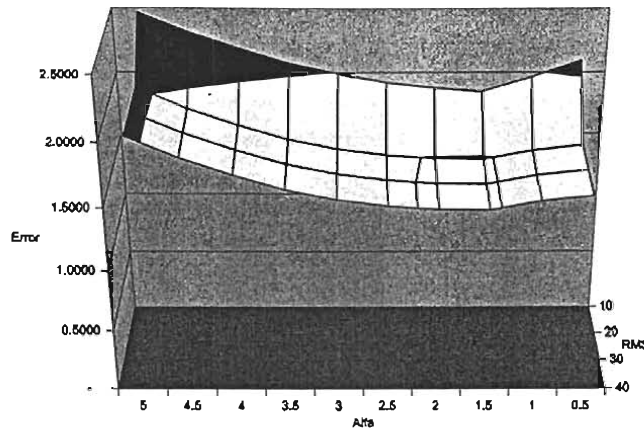


Fig. 4.17 Error RMS en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 511 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.10 se muestran los valores mínimos del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	1.8492	1.5
20	1.4861	1.5
30	1.4837	1.5
40	1.4837	1.5

Tb.4.10 Parámetro Alfa óptimo para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 511 elementos.

4.7.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS

En la gráfica de la Fig. 4.18 se muestra el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópller ultrasónica simulada, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 0.5, para las SNR de 20, 30 y 40 dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 1.

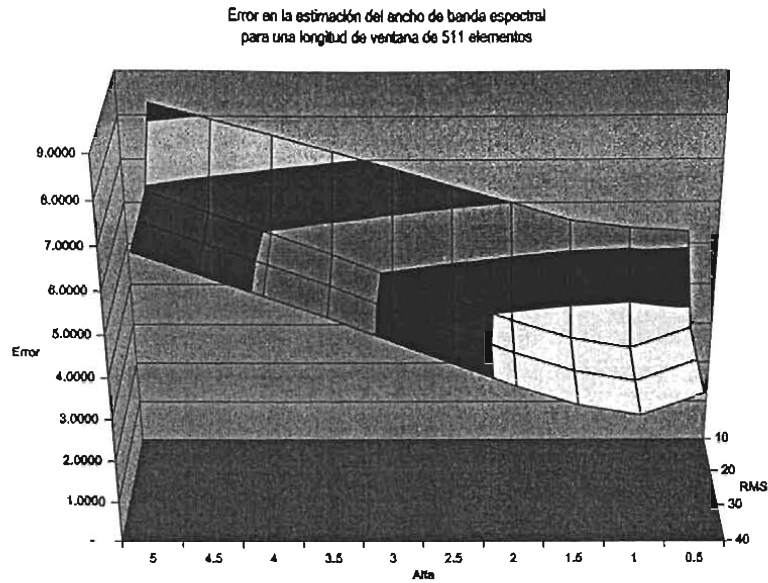


Fig. 4.18 Error RMS en la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 511 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.11 se muestran los valores mínimos del error en la estimación del ancho de banda espectral RMS, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error Mínimo	Alfa óptimo
10	5.2914	0.5
20	3.1418	1
30	3.1130	1
40	3.1128	1

Tb.4.11. Parámetro Alfa óptimo para la estimación del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 511 elementos.

4.7.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda

En la gráfica de la Fig. 4.19 se muestra el error en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

El error RMS mínimo considerando una relación señal a ruido (SNR) de 10 dB, se obtiene con el parámetro Alfa óptimo igual a 0.5, para las SNR de 20, 30 y 40 dB, el parámetro Alfa óptimo correspondiente es 1.

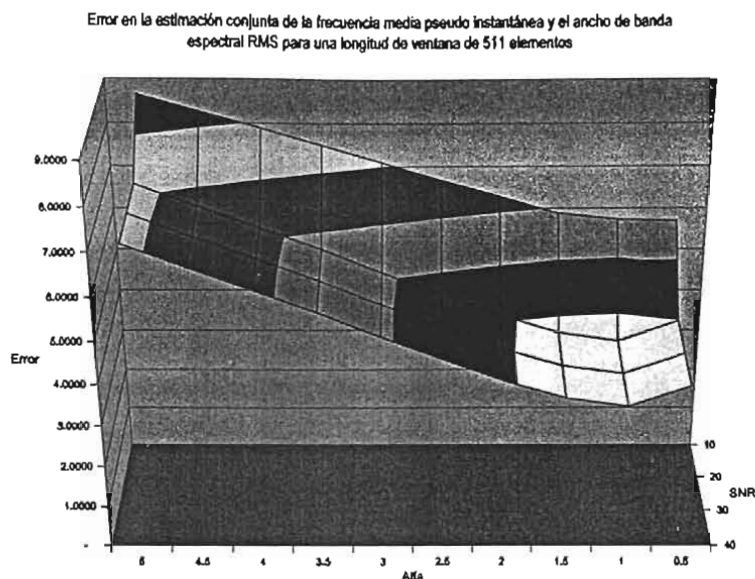


Fig. 4.19 Error RMS en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral RMS, para una longitud de ventana de 511 elementos, para una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB y un parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

En la tabla Tb.4.12 se muestran los valores mínimos del error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, así como el valor del parámetro Alfa óptimo asociado para cada SNR.

SNR	Error mínimo	Alfa óptimo
10	5.6913	0.5
20	3.5064	1
30	3.4796	1
40	3.4795	1

Tb.4.12 Parámetro Alfa óptimo para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda para una longitud de ventana de 511 elementos.

4.8. Análisis del parámetro Alfa: Valores apropiados

En esta sección, nuevamente se analiza la señal Dópler Ultrasónica simulada, a la cual se le aplica la distribución de tiempo frecuencia de Born Jordan, pero ahora variando el parámetro Alfa en un rango de valores de 0.5 a 100.

Obsérvese que en la expresión discreta de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan valuada en $n = 0$, ecuación (EQ.4.5), los valores de las cotas del índice de la sumatoria interna, es decir, con respecto a μ , deben ser enteros. De aquí que los valores apropiados para el parámetro Alfa sean múltiplos enteros positivos de 0.5, esto es:

$$Alfa = 0.5n \text{ con } n \in \text{Naturales} \tag{EQ.4.9}$$

4.8.1. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la gráfica de la Fig. 4.20 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, con una longitud de ventana de 127 elementos y variando apropiadamente el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 100.

Nótese que los errores mínimos obtenidos en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea considerando una SNR de 10, 20, 30, 40 dB, se obtienen utilizando el parámetro Alfa comprendido en un rango de 0.5 a 5.

También obsérvese que a medida que aumenta el valor del parámetro Alfa, el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea también va aumentando. El comportamiento para otras longitudes de ventana es similar.

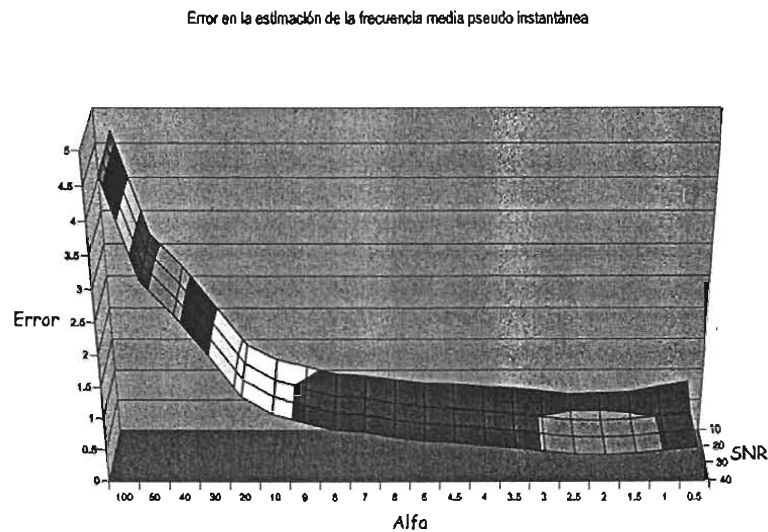


Fig. 4.20 Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea variando el parámetro Alfa desde 0.5 a 100 (valores apropiados) con una relación señal a ruido de 10, 20, 30 y 40 dB.

4.8.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS

En la gráfica de la Fig. 4.21 se muestra el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, con una longitud de ventana de 127 elementos y variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 100.

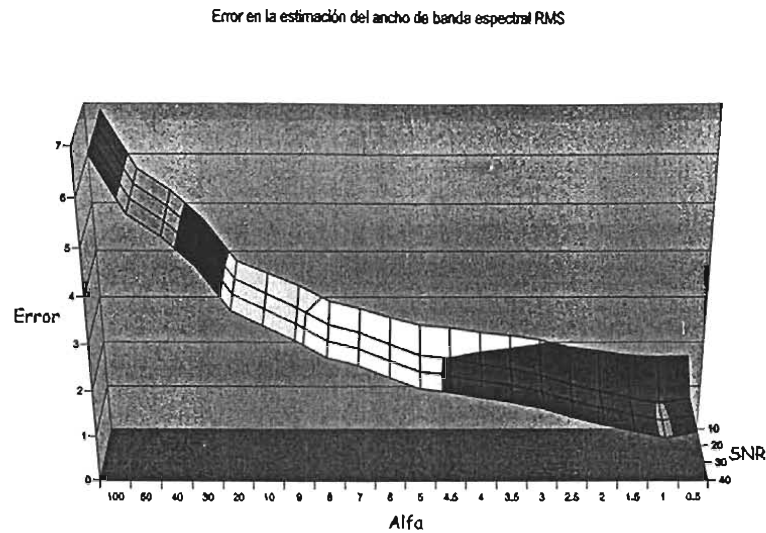


Fig. 4.21 Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS variando el parámetro Alfa desde 0.5 a 100 (valores apropiados) con una relación señal a ruido de 10, 20, 30 y 40 dB.

Nótese que los errores mínimos obtenidos en la estimación del ancho de banda considerando una SNR de 10, 20, 30, 40 dB, se obtienen utilizando el parámetro Alfa comprendido en un rango de 0.5 a 5.

También obsérvese que a medida que aumenta el valor del parámetro Alfa, el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS también va aumentando. El comportamiento para otras longitudes de ventana es similar.

4.8.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda

En la gráfica de la Fig. 4.22 se muestra el error en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, con una longitud de ventana de 127 elementos y variando el parámetro Alfa desde 0.5 hasta 5.

Nótese que el error mínimo obtenido de la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda considerando una SNR de 10, 20, 30 y 40 dB, se obtienen utilizando el parámetro Alfa comprendido en un rango de 0.5 a 5.

También obsérvese que a medida que aumenta el parámetro Alfa, el error en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda, también va aumentando. El comportamiento para otras longitudes de ventana es similar.

Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda

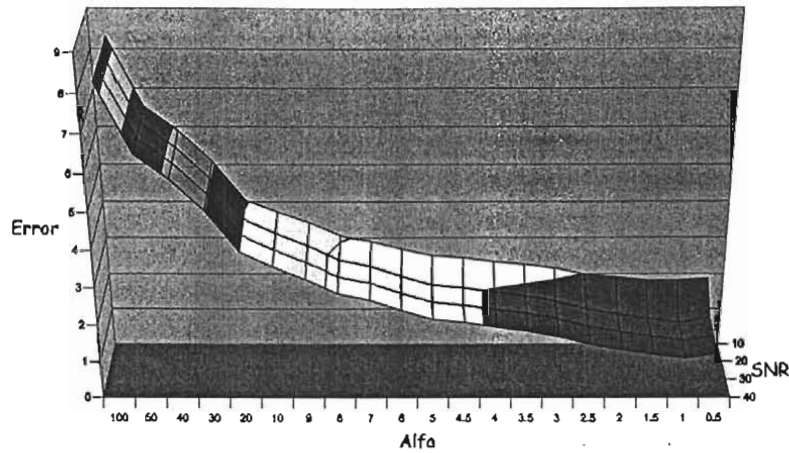


Fig. 4.22 Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda variando el parámetro Alfa desde 0.5 a 100 (valores apropiados) con una relación señal a ruido de 10, 20, 30 y 40 dB.

4.9. Análisis del parámetro Alfa: Valores no apropiados

En esta sección, nuevamente se analiza la señal Dópler Ultrasónica simulada, a la cual se le aplica la distribución de tiempo frecuencia de Born Jordan, variando el parámetro Alfa en un rango de valores de 0.5 a 2.5.

En contraposición a los valores apropiados, los valores no apropiados son aquellos que no generan valores enteros en las cotas del índice de la sumatoria interna, es decir, con respecto a μ , en la ecuación (EQ.4.5).

4.9.1. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En las gráficas de la Fig. 4.23 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, con una longitud de ventana de 127 y variando no apropiadamente el parámetro Alfa en un rango de 0.5 a 2.5 con incrementos de 0.1.

Los errores máximos obtenidos son para valores no apropiados de Alfa, en particular para 1.4, 1.6 2.1 y 2.4. En general los errores mínimos se obtienen para valores apropiados de Alfa; por ejemplo, 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.5.

Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

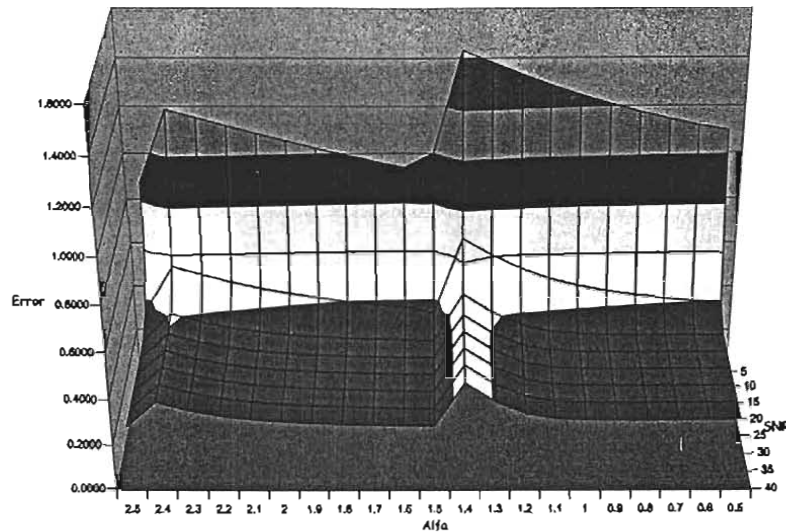


Fig. 4.23 Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea variando no apropiadamente el parámetro Alfa de 0.5 a 2.5 con una relación señal a ruido de 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 40 dB.

4.9.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS

En las gráficas de la Fig. 4.24 se muestra el error en la estimación del ancho de banda espectral RMS de la señal Dópler ultrasónica simulada, con una longitud de ventana de 127 y variando no apropiadamente el parámetro Alfa en un rango de 0.5 a 2.5 con incrementos de 0.1.

Los errores máximos obtenidos son para valores no apropiados de Alfa, en particular para 1.4, 1.6, 2.1 y 2.4. En general los errores mínimos se obtienen para valores apropiados de Alfa por ejemplo, 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.5.

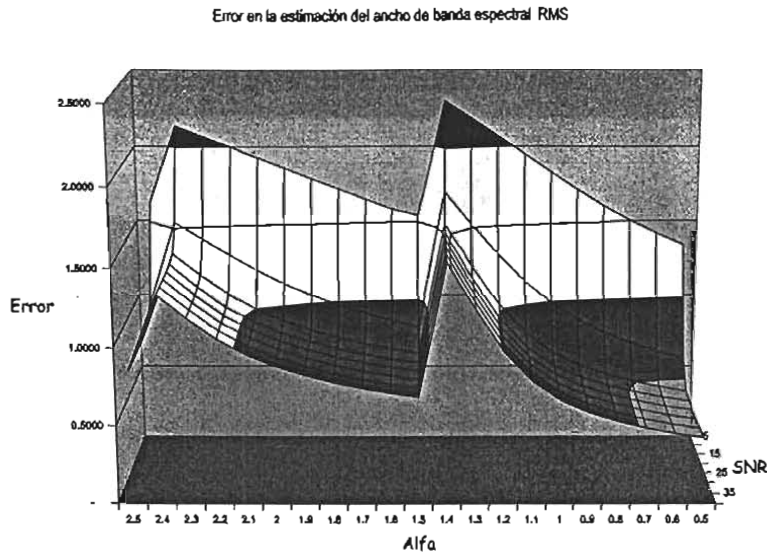


Fig. 4.24 Error en la estimación del ancho de banda espectral RMS variando no apropiadamente el parámetro Alfa de 0.5 a 2.5 con una relación señal a ruido de 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 40 dB.

4.9.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda

En las gráficas de la Fig. 4.25 se muestra el error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda espectral RMS, con una longitud de ventana de 127 elementos y variando no apropiadamente el parámetro Alfa en un rango de 0.5 a 2.5 con incrementos de 0.1.

Los errores máximos obtenidos son para valores no apropiados de Alfa, en particular para 1.4, 1.6, 2.1 y 2.4. En general los errores mínimos se obtienen para valores apropiados de Alfa por ejemplo, 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.5.

Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda

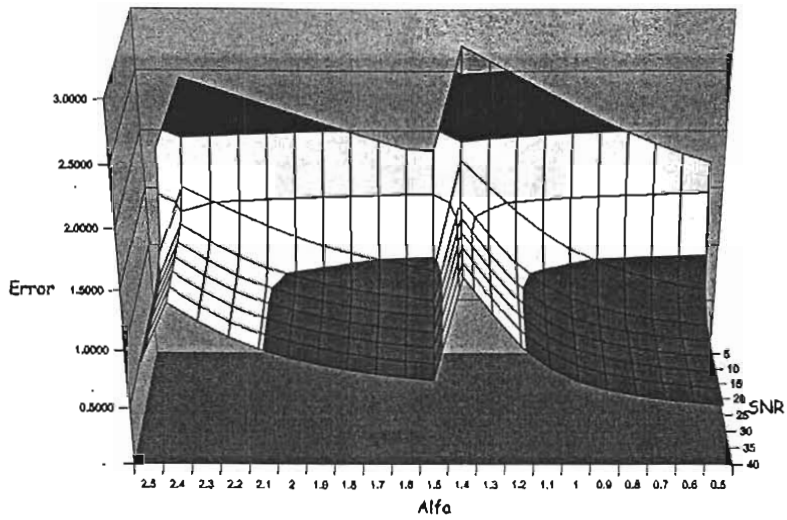


Fig. 4.25 Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda variando no apropiadamente el parámetro Alfa de 0.5 a 2.5 con una relación señal a ruido de 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 40 dB.

5. ANALISIS DE RESULTADOS: PARÁMETROS ALFA ÓPTIMOS

5.1. Introducción

En este capítulo se analizan los valores óptimos del parámetro Alfa, que se obtienen de aplicar la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan a la señal Dópler Ultrasónica simulada, para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, variando la longitud de la ventana de muestreo y cambiando la relación de potencia señal a ruido. Los resultados detallados están en el capítulo 4, Determinación de parámetros óptimos. Estos resultados se utilizan en el desarrollo del capítulo 6, Truncado de la función de autocorrelación. También se realiza una comparación de los resultados obtenidos con la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville.

5.2. Parámetros Alfa óptimos para estimar la frecuencia instantánea

En la tabla Tb.5.1 se muestran los valores mínimos de los errores obtenidos en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea.

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	0.4012	0.5971	1.0091	1.8492
20	0.2957	0.4361	0.7734	1.4861
30	0.2953	0.4352	0.7714	1.4837
40	0.2952	0.4351	0.7714	1.4837

Tb.5.1. Valores mínimos de los errores en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea.

En la tabla Tb.5.2, se muestran los valores del parámetro Alfa, los cuales se denominan óptimos, asociados al error mínimo en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea.

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	3	2.5	2	1.5
20	1.5	2	2	1.5
30	1.5	2	2	1.5
40	1.5	2	2	1.5

Tb.5.2. Parámetros Alfa óptimos asociados al error mínimo en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea.

5.3. Parámetros Alfa óptimos para estimar el ancho de banda espectral

En la tabla Tb.5.3 se muestran los valores mínimos de los errores obtenidos en la estimación del ancho de banda espectral.

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	0.9782	1.6751	2.9391	5.2914
20	0.6699	0.9797	1.6575	3.1418
30	0.6648	0.9688	1.6379	3.1130
40	0.6647	0.9687	1.6378	3.1128

Tb.5.3. Valores mínimos de los errores en la estimación del ancho de banda espectral.

En la tabla Tb.5.4, se muestran los valores del parámetro Alfa, los cuales se denominan óptimos, asociados al error mínimo en la estimación del ancho de banda espectral.

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	0.5	1	0.5	0.5
20	1	1	1	1
30	1	1	1	1
40	1	1	1	1

Tb.5.4. Parámetros Alfa óptimos asociados al error mínimo en la estimación del ancho de banda espectral.

5.4. Parámetros Alfa óptimos para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda

En la tabla Tb.5.5 se muestran los valores mínimos de los errores obtenidos en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda.

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	1.0914	1.8211	3.1637	5.6913
20	0.7401	1.1037	1.8769	3.5064
30	0.7353	1.0928	1.8587	3.4796
40	0.7352	1.0929	1.8586	3.4795

Tb.5.5. Valores mínimos de los errores en la estimación conjunta de la frecuencia instantánea y el ancho de banda espectral.

En la tabla Tb.5.6, se muestran los valores del parámetro Alfa, los cuales se denominan óptimos, asociados al error mínimo en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda.

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	1	1.5	1.5	0.5
20	1	1	1	1
30	1	1	1	1
40	1	1	1	1

Tb.5.6. Parámetros Alfa óptimos asociados al error mínimo en la estimación conjunta de la frecuencia media pseudo instantánea y el ancho de banda espectral.

5.5. Análisis del parámetro Alfa: Valores apropiados

Los valores apropiados del parámetro Alfa son aquellos que generan cotas enteras en la sumatoria con respecto a μ de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan (EQ.3.39). Estos valores de Alfa son múltiplos enteros positivos de 0.5; por ejemplo: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ...

5.6. Análisis del parámetro Alfa: Valores no apropiados

Los valores no apropiados del parámetro Alfa son aquellos que no generan cotas enteras en la sumatoria con respecto a μ de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan (EQ.3.39). Estos valores de Alfa no son múltiplos enteros positivos de 0.5; por ejemplo: 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.1, ...

5.7. Comparación con la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville

En la tabla Tb.5.7, se muestran los errores mínimos en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea utilizando las distribuciones de Wigner Ville y Born Jordan.

Frecuencia media pseudo instantánea					
Wigner Ville ^[21]			Born Jordan		
SNR			SNR		
40	20	10	40	20	10
0.1163	0.1706	1.0671	0.2952	0.2957	0.4012
0.2446	0.3709	3.6001	0.4351	0.4361	0.5971
0.5327	0.9034	12.0298	0.7714	0.7734	1.0091
1.2054	2.2556	42.8700	1.4837	1.4861	1.8492

Tabla 5.7. Comparación de la estimación del error mínimo de la frecuencia media pseudo instantánea de las distribuciones de Wigner Ville y Born Jordan.

En la tabla Tb.5.8, se muestran los errores mínimos para el ancho de banda espectral RMS.

Ancho de banda espectral RMS

Wigner Ville^[21]			Born Jordan		
SNR			SNR		
40	20	10	40	20	10
0.3386	0.7247	2.0660	0.6647	0.6699	0.9782
0.2817	1.5724	5.2787	0.9687	0.9797	1.6751
0.2992	3.8202	13.9502	1.6378	1.6575	2.9391
0.4748	10.1819	42.0300	3.1128	3.1418	5.2914

Tabla 5.8. Comparación de la estimación del error mínimo del ancho de banda espectral RMS de las distribuciones de Wigner Ville y Born Jordan

En la tabla Tb.5.9, se muestran los errores mínimos para la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda.

Estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda

Wigner Ville^[21]			Born Jordan		
SNR			SNR		
40	20	10	40	20	10
0.3580	0.7446	2.3253	0.7352	0.7401	1.0914
0.3731	1.6156	6.3895	1.0929	1.1037	1.8211
0.6110	3.9256	18.4207	1.8586	1.8769	3.1637
1.2955	10.4288	60.0363	3.4795	3.5064	5.6913

Tabla 5.9. Comparación del error mínimo en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda de las distribuciones de Wigner Ville y Born Jordan.

Los valores remarcados corresponden a los valores mínimos en la comparación. Nótese que la distribución de Born Jordan estima mejor que la distribución de Wigner Ville la frecuencia media pseudo instantánea de una señal en presencia de ruido. Lo mismo ocurre con el ancho de banda y con la estimación conjunta.

6. TRUNCADO DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION

6.1. Introducción

En este capítulo se muestra el desempeño que tiene la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan para efectuar la estimación espectral cuando se trunca su función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada. El fundamento físico del truncado consiste en desprestigiar los términos de cruce provocados por componentes frecuenciales distantes en el tiempo o en la frecuencia, cuyo valor debería tender a cero. El truncado en la función disminuye el número de operaciones implicadas pero incrementa el error en la estimación. De aquí que exista un compromiso entre el truncado y el error. Se presentan diversos experimentos numéricos utilizando el parámetro Alfa óptimo, variando la longitud de ventana de muestreo, la relación de potencia señal a ruido y el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.2. Truncado de la función de autocorrelación en la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan

En la siguiente ecuación se muestra la expresión discreta eficiente que calcula la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, ecuación (EQ.3.39), con un índice de truncado en la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada (sumatoria interna con respecto a μ):

$$BJD(0, k, IT) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau) e^{\frac{j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-IT, -\alpha 2|\tau|, -N+1+|\tau|\}}^{\min\{IT, \alpha 2|\tau|, N-1-|\tau|\}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.6.1})$$

Obsérvese que los valores de las cotas de la sumatoria interna con respecto a μ tienen un índice de truncado IT , el cual puede tomar valores desde 0 hasta $N-1$, ya que para valores mayores a $N-1$ no existe ningún truncado efectivo, porque se excede la longitud de la señal. Nótese que $IT = 0$ corresponde al máximo truncado; mientras que $IT = N - 1$, sin truncado.

El fundamento físico del truncado consiste en desprestigiar los términos de cruce provocados por componentes frecuenciales distantes en el tiempo o en la frecuencia, cuyo valor debería tender a cero.

Nótese que el truncado introduce un error en la estimación, pero disminuye el número de operaciones. De esta forma se establece un compromiso de rapidez de cálculo contra el error en la estimación espectral: "A mayor rapidez de cálculo (mayor truncamiento), mayor error (controlado) en la estimación espectral". Es decir el truncado implica desprestigiar términos, consecuentemente se disminuye el número de operaciones pero se pierde la exactitud, a cambio de que se gane un menor tiempo de cálculo.

6.3. Longitud de ventana de 63 elementos

Para una longitud de ventana de muestreo de 63 elementos el índice de truncado IT puede tomar valores desde 0 hasta 31. $IT = 0$ corresponde al máximo truncado; mientras que $IT = 31$, sin truncado.

6.3.1. Estimación del ancho de banda espectral RMS

De la tabla (Tb.5.4) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 1, para estimar el ancho de banda espectral. En la gráfica de la Fig. 6.1 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea para una longitud de ventana de 63 elementos

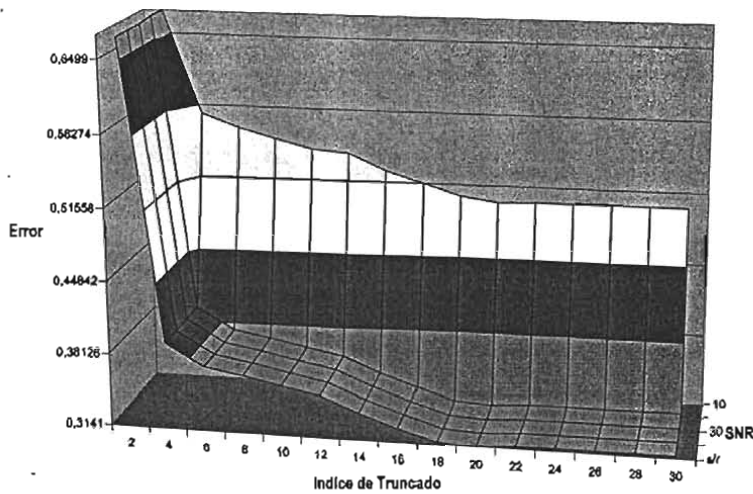


Fig.6.1. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.2 y Fig. 6.3 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda, respectivamente.

Error en la estimación del ancho de banda espectral para una longitud de ventana de 63 elementos

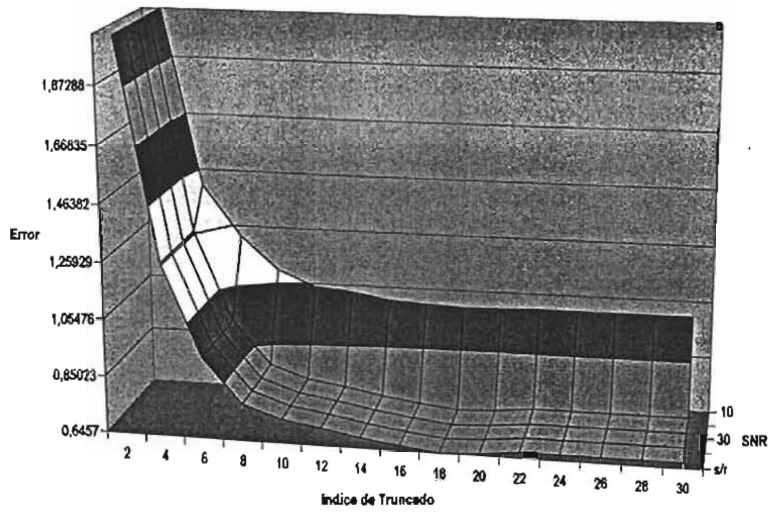


Fig.6.2. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda para una longitud de ventana de 63 elementos

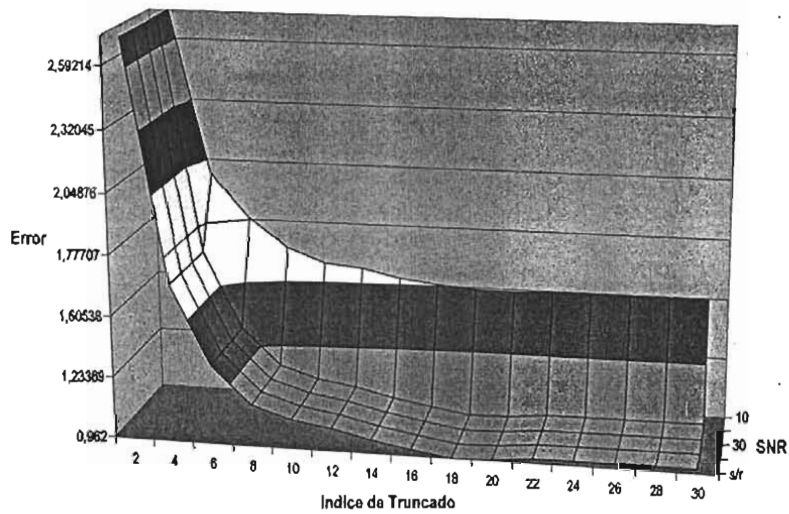


Fig.6.3. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.3.2. Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

De la tabla (Tb.5.2) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 1.5, para estimar la frecuencia media pseudo instantánea. En la gráfica de la Fig. 6.4 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos valores de SNR.

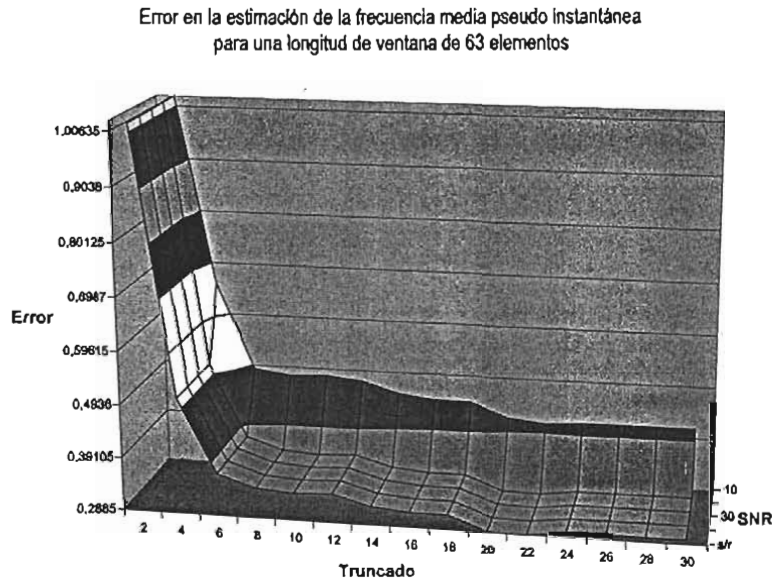


Fig.6.4. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 1.5, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.5 y Fig. 6.6 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda, respectivamente.

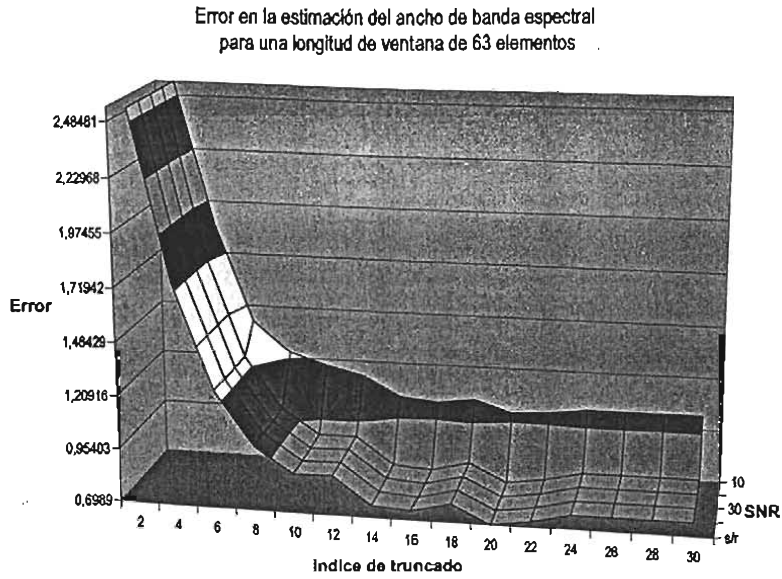


Fig.6.5. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 1.5, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

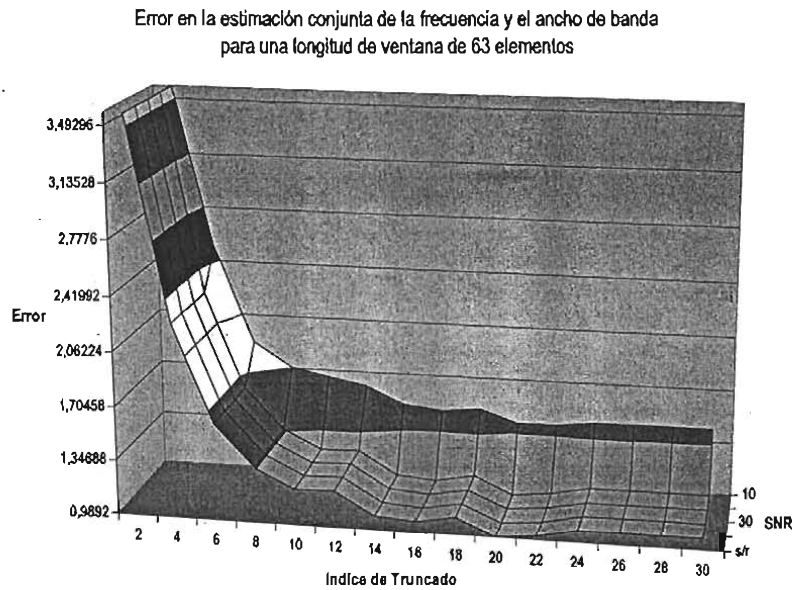


Fig.6.6. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 1.5, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.4. Longitud de ventana de 127 elementos

Para una longitud de ventana de muestreo de 127 elementos el índice de truncado IT puede tomar valores desde 0 hasta 63. $IT = 0$ corresponde al máximo truncado; mientras que $IT = 63$, sin truncado.

6.4.1. Estimación del ancho de banda espectral

De la tabla (Tb.5.4) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 1, para estimar el ancho de banda espectral. En la gráfica de la Fig. 6.7 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

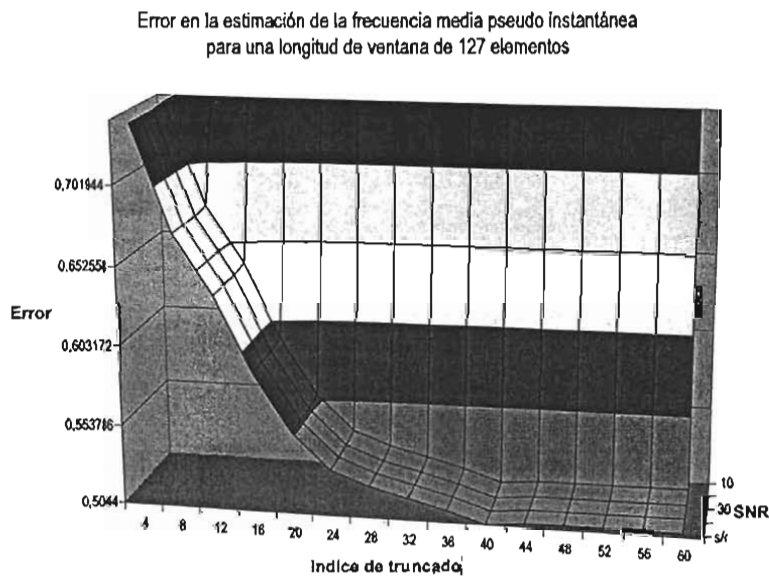


Fig.6.7. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.8 y Fig. 6.9 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda, respectivamente.

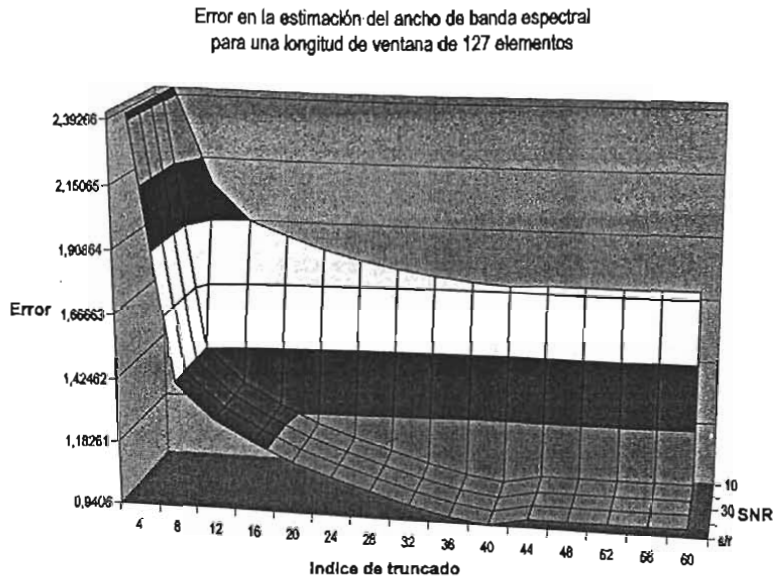


Fig. 6.8. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

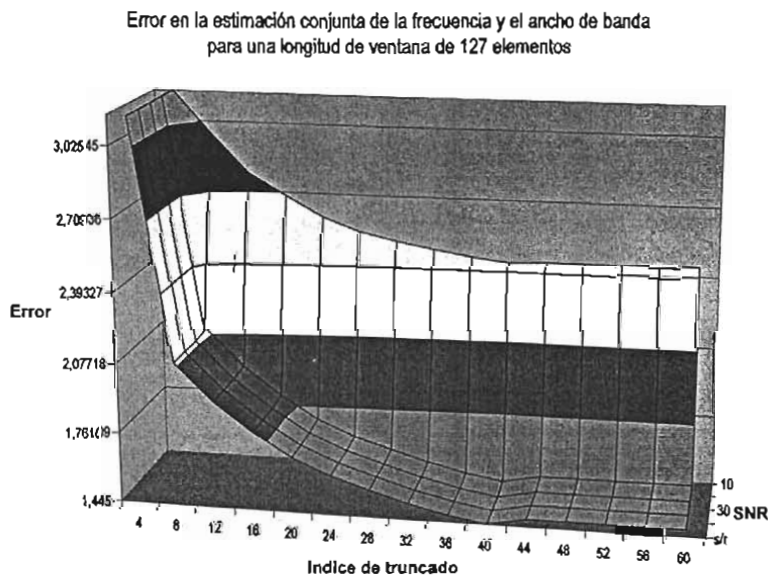


Fig. 6.9. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.4.2. Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

De la tabla (Tb.5.2) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 2, para estimar la frecuencia media pseudo instantánea. En la gráfica de la Fig. 6.10 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

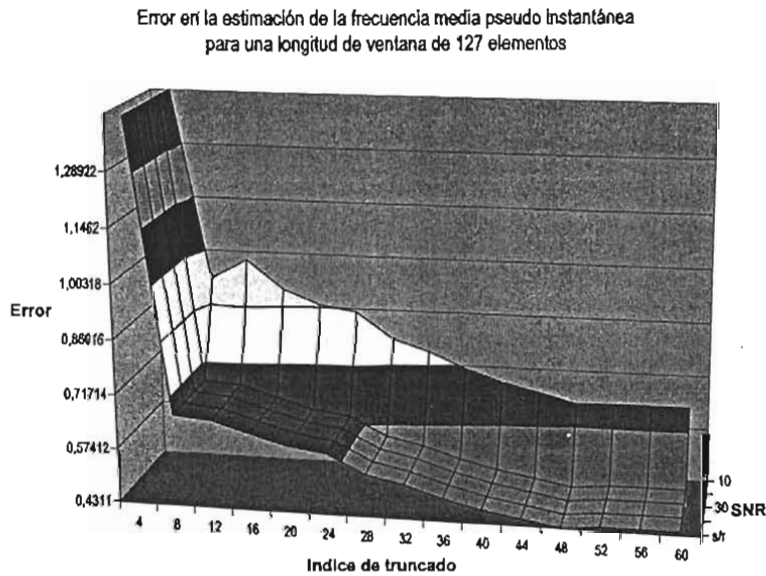


Fig.6.10. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 2, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.11 y Fig. 6.12 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y del ancho de banda, respectivamente.

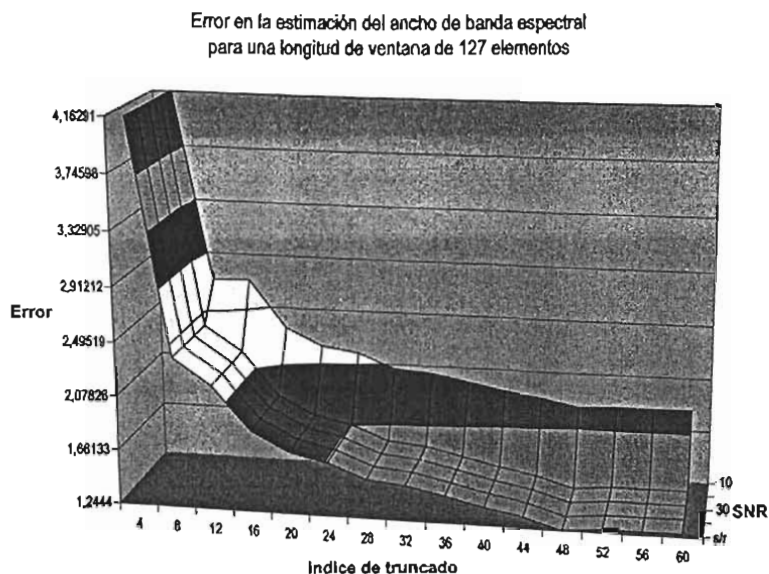


Fig. 6.11. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 2, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

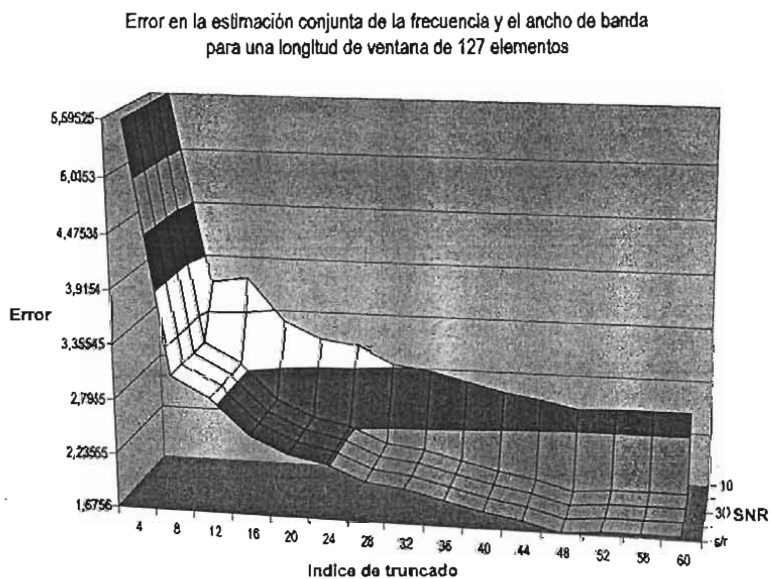


Fig. 6.12. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 2, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.5. Longitud de ventana de 255

Para una longitud de ventana de muestreo de 255 elementos el índice de truncado IT puede tomar valores desde 0 hasta 127. $IT = 0$ corresponde al máximo truncado; mientras que $IT = 127$ sin truncado.

6.5.1. Estimación del ancho de banda espectral

De la tabla (Tb.5.4) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 1, para estimar el ancho de banda espectral. En la gráfica de la Fig. 6.13 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

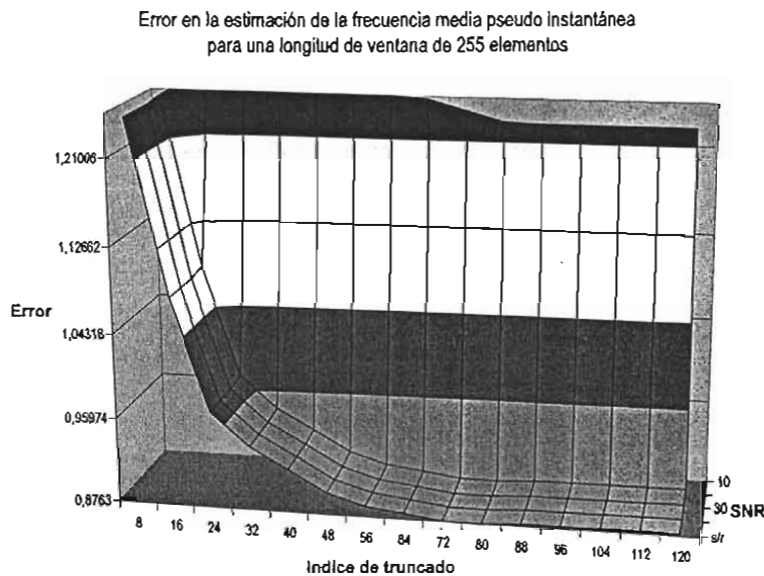


Fig.6.13. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.14 y Fig. 6.15 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, respectivamente.

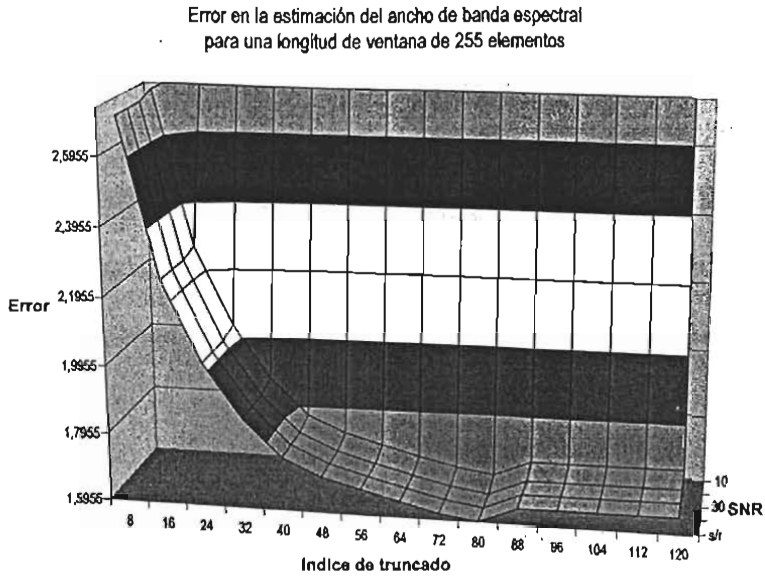


Fig. 6.14. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

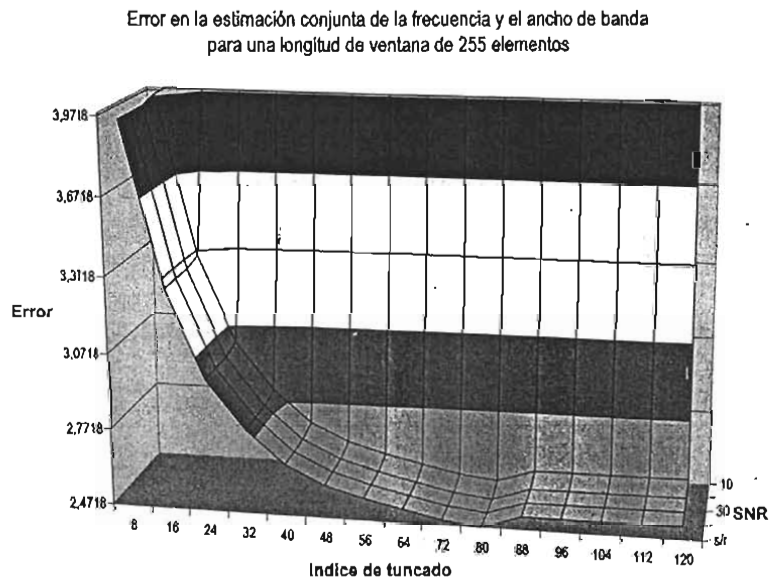


Fig. 6.15. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 1 y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.5.2. Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

De la tabla (Tb.5.2) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 2, para estimar la frecuencia media pseudo instantánea. En la gráfica de la Fig. 6.16 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

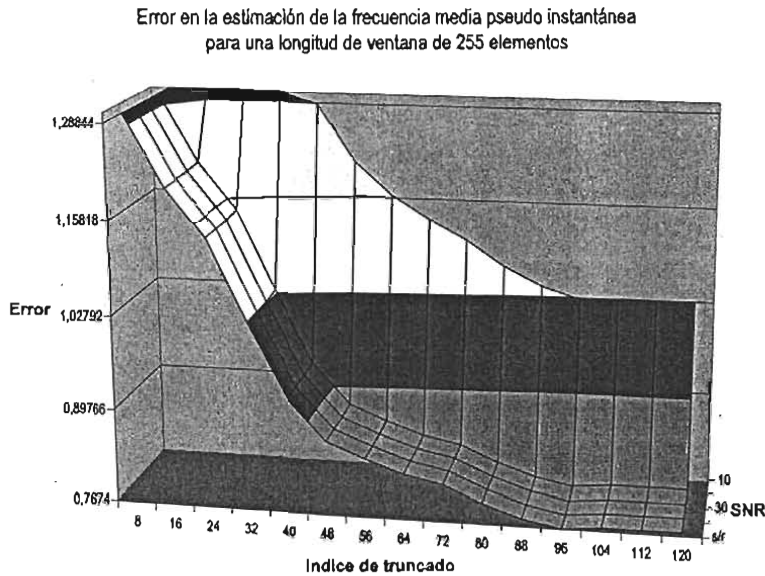


Fig.6.16. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 2, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.17 y Fig. 6.18 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, respectivamente.

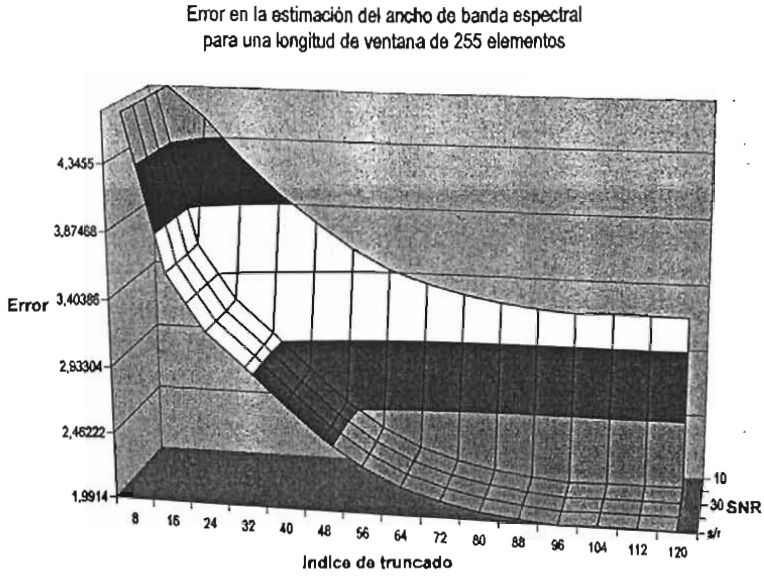


Fig. 6.17. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 2, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

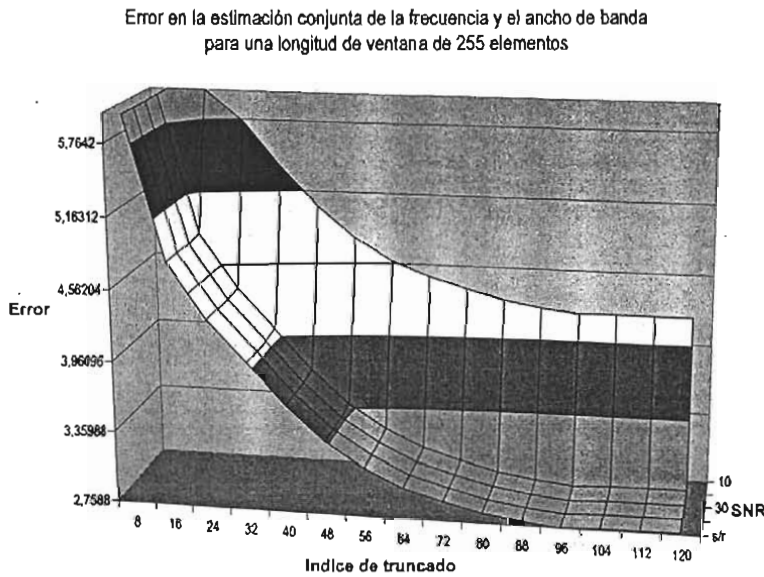


Fig. 6.18. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 2 y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.6. Longitud de ventana de 511 elementos

Para una longitud de ventana de muestreo de 511 elementos el índice de truncado IT puede tomar valores desde 0 hasta 255. $IT = 0$ corresponde al máximo truncado; mientras que $IT = 255$ sin truncado.

6.6.1. Estimación del ancho de banda espectral

De la tabla (Tb.5.4) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 1, para estimar el ancho de banda espectral. En la gráfica de la Fig. 6.19 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

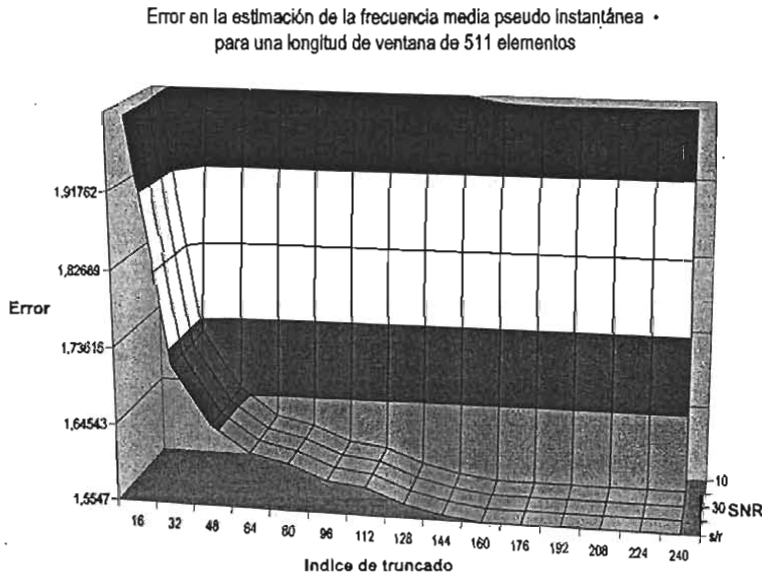
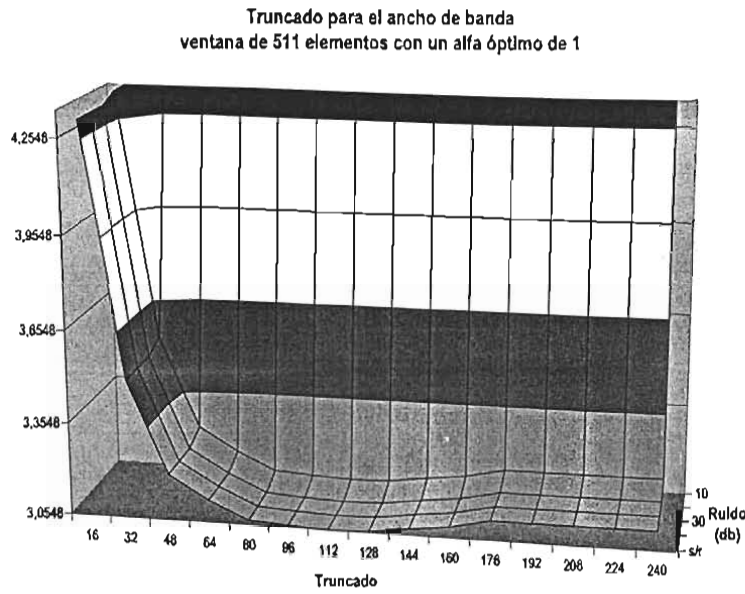


Fig.6.19. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.20 y Fig. 6.21 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, respectivamente.



ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Fig. 6.20. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 1, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

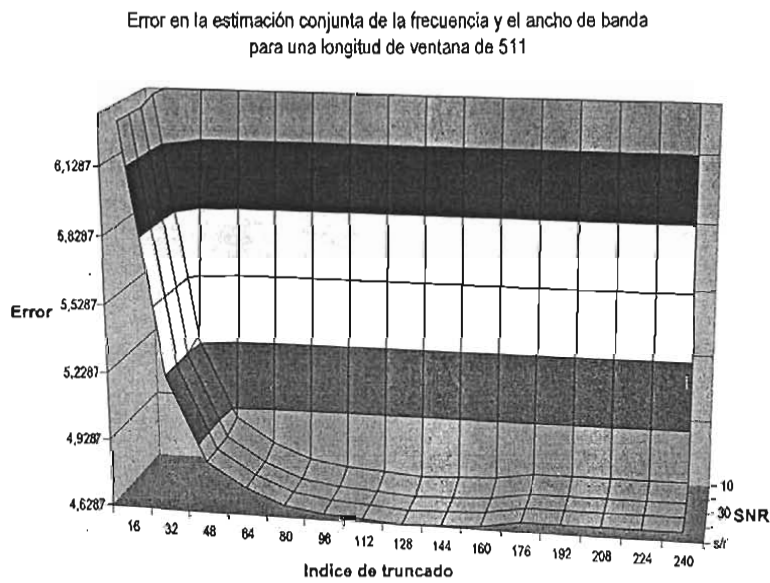


Fig. 6.21. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 1 y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

6.6.2. Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la tabla (Tb.5.2) se obtiene el parámetro Alfa óptimo de 1.5, para estimar la frecuencia media pseudo instantánea. En la gráfica de la Fig. 6.22 se muestra el error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada, variando el índice de truncado de la función de autocorrelación, para diversos niveles de SNR.

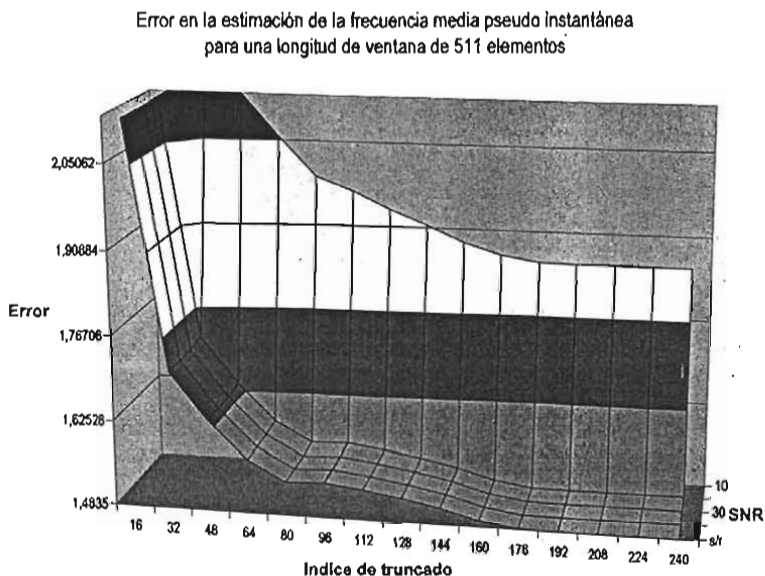


Fig.6.22. Error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea con un factor de peso Alfa óptimo de 1.5, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

De igual forma, en las gráficas de las Fig. 6.23 y Fig. 6.24 se muestran el error en la estimación del ancho de banda espectral y en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda, respectivamente.

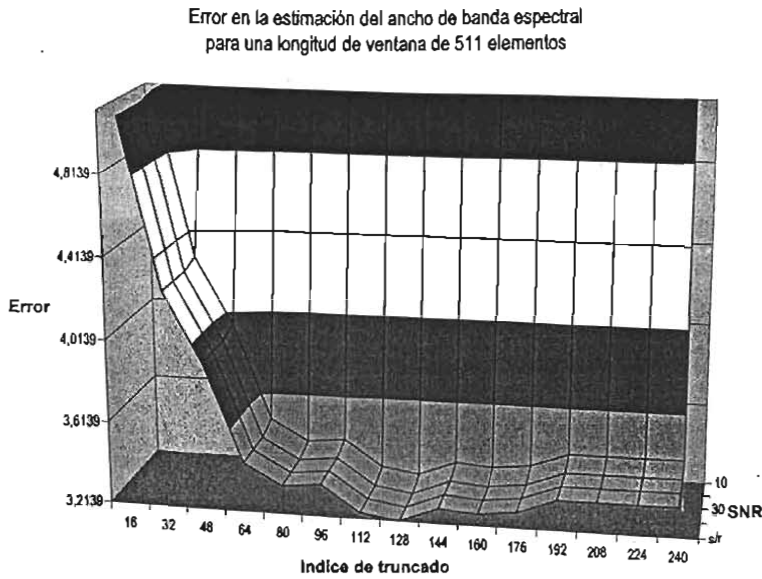


Fig. 6.23. Error en la estimación del ancho de banda espectral con un factor de peso Alfa óptimo de 1.5, y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

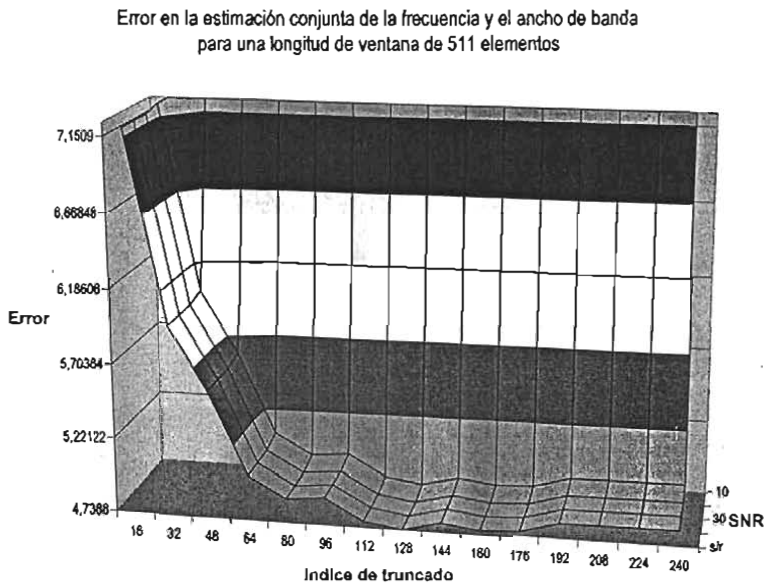


Fig. 6.24. Error en la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda con un factor de peso Alfa óptimo de 1.5 y variando el índice de truncado de la función de autocorrelación.

7. ANALISIS DE RESULTADOS: TRUNCADO

7.1 Introducción

En este capítulo se analizan los incrementos porcentuales del error para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral RMS y la estimación conjunta, variando el truncado en la función de autocorrelación, la longitud de ventana de muestreo y cambiando la relación de potencia señal a ruido. Los resultados se detallan en el capítulo 6, Truncado en la función de autocorrelación.

7.2 Longitud de ventana de 63 elementos

7.2.1 Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta

En la tabla Tb.7.1 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 31).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 1.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	22	18	18	18	16	16
	Ancho de banda	22	22	20	14	14	14
	Estimación conjunta	22	22	16	16	14	14

Tb.7.1. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 1.

7.2.2 Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la tabla Tb.7.2 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 31).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 1.5.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	24	24	24	20	20	20
	Ancho de banda	24	24	24	24	24	24
	Estimación conjunta	24	24	24	24	24	22

Tb.7.2. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 1.5.

7.3 Longitud de ventana de 127 elementos

7.3.1 Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta

En la tabla Tb.7.3 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 63).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 1.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	44	44	44	32	32	32
	Ancho de banda	40	36	32	32	28	24
	Estimación conjunta	44	44	36	32	32	32

Tb.7.3. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 1.

7.3.2 Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la tabla Tb.7.4 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 63).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 2.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de Truncado, IT	Frecuencia instantánea	52	52	48	48	48	44
	Ancho de banda	52	52	44	44	44	44
	Estimación conjunta	52	52	48	48	44	44

Tb.7.4. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 2.

7.4 Longitud de ventana de 255 elementos

7.4.1 Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta

En la tabla Tb.7.5 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 127).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 1.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	88	88	88	56	48	48
	Ancho de banda	64	56	48	48	48	40
	Estimación conjunta	88	88	80	48	48	48

Tb.7.5. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 1.

7.4.2 Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la tabla Tb.7.6 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 127).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 2.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	96	88	88	80	80	72
	Ancho de banda	104	88	88	80	80	80
	Estimación conjunta	96	88	88	80	80	80

Tb.7.6. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 2.

7.5 Longitud de ventana de 511 elementos

7.5.1 Estimación del ancho de banda y la estimación conjunta

En la tabla Tb.7.7 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT), con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 225).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 1.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	176	144	64	48	48	48
	Ancho de banda	144	128	96	96	64	64
	Estimación conjunta	176	80	64	64	48	48

Tb.7.7. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 1.

7.5.2 Estimación de la frecuencia media pseudo instantánea

En la tabla Tb.7.8 se muestra el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación (IT); con respecto a los errores obtenidos sin truncado (IT = 255).

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Se considera el parámetro Alfa óptimo de 1.5.

Incremento porcentual del error		0%	1%	2%	3%	4%	5%
Indice de truncado, IT	Frecuencia instantánea	192	192	176	144	64	64
	Ancho de banda	176	160	144	112	80	80
	Estimación conjunta	192	176	80	80	64	64

Tb.7.8. Tabla del incremento porcentual del error en la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea, el ancho de banda espectral y la estimación conjunta, con un truncado en la función de autocorrelación y un parámetro óptimo de 1.

8. CONCLUSIONES

8.1. Introducción

En este capítulo se presentan las conclusiones y perspectivas futuras de este trabajo. Las conclusiones se agrupan de la forma siguiente: sobre la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, sobre el algoritmo eficiente, sobre la señal Dópler simulada, sobre el procedimiento para calcular el parámetro óptimo, sobre los parámetros óptimos de alfa óptimos, sobre la comparación con la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville, sobre el truncado de la función de autocorrelación, sobre el incremento porcentual del error inducido por el índice de truncado.

Este trabajo en la medida de lo posible es auto contenido. En el capítulo 2 se desarrollan conceptos necesarios para la familiarización y su fácil comprensión. Además este trabajo se elaboró como un libro de texto, así que se incluyen todos los detalles del desarrollo en los apéndices.

8.2. Conclusiones generales

En término general se desarrollo e implanto un algoritmo secuencial para técnicas de estimación espectral, basado en la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan. A continuación se especifican las conclusiones.

Se diseño un algoritmo secuencial para el cálculo de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, el cual efectúa aproximadamente la mitad de operaciones que las que se efectuarían al calcular ésta distribución a través de su definición, ver la ecuación (EQ.8.12).

Se implanto el algoritmo secuencial mencionado en el inciso anterior en una herramienta de cálculo computacional de alto desempeño (MATLAB).

Se realizó una evaluación práctica de los efectos que resultan de la variación del parámetro propio de la distribución, con respecto a la longitud de ventana de muestreo y de la relación señal a ruido, sobre la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea y del ancho de banda espectral RMS, utilizando un modelo de señal Dópler ultrasónica. Lo anterior permitió encontrar los parámetros óptimos los cuales minimizan el error en las estimaciones espectrales; los resultado de los parámetros óptimos se muestran en las tablas (Tb.8.1, Tb.8.2, Tb.8.3).

Se realizó una evaluación práctica del truncado en la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada, en el cálculo de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan. Lo anterior permitió disminuir aún más el número de operaciones implicadas en el cálculo de la estimación espectral, aunque se incrementa el error de dichas estimaciones; en la ecuación (EQ.8.12) se muestra el truncado y en las tablas (Tb.8.4, Tb.8.5, Tb.8.6, Tb.8.7) los resultados de dicho truncado.

Por último se observo que la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan estima mejor el espectro de una señal Dópler ultrasónica en presencia de ruido, mejor que la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville. La comparación se muestra en la gráfica de la Fig. 8.6.

8.3. Conclusiones específicas

8.3.1 Sobre la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan

La distribución tiempo frecuencia de Born Jordan continua es, ecuación (EQ.3.8):

$$BJD(t, f) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (EQ.8.1)$$

Al agregar una función ventana tal que $W(t) = 0$, en $|t| > T_W/2$ y $W(0) = 1$, que multiplique a la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada, se obtiene la pseudo distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, ecuación (EQ.3.9):

$$BJD(t, f) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-T_W}^{T_W} \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu W\left(\frac{\tau}{2}\right) W^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (EQ.8.2)$$

Al discretizar la pseudo distribución se obtiene la distribución tiempo frecuencia discreta de Born Jordan, ecuación (EQ.3.13):

$$BJD(n, k) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-j2\pi k\tau} \sum_{\mu=-\alpha|\tau|}^{\alpha|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+n+\tau) x^*(\mu+n-\tau) \quad (EQ.8.3)$$

Para analizar el desempeño de la ecuación (EQ.8.1), se sustituye en ésta la señal $x(t)$ definida por la ecuación (EQ.3.14):

$$x(t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\omega_n t + \theta_n)} \quad (EQ.8.4)$$

Entonces la distribución continua se puede descomponer en 2 términos:

$$BJD(t, \omega) = BJD_{auto}(t, \omega) + BJD_{cruce}(t, \omega) \quad (EQ.8.5)$$

En donde los auto-términos son, ecuación (EQ.3.22):

$$BJD_{auto}(t, \omega) = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n^2 \delta(\omega - \omega_n) \quad (EQ.8.6)$$

los cuales representan la distribución energética de cada componente sinusoidal complejo de la señal, ecuación (EQ.8.4), y que son siempre positivos. Mientras que los términos de cruce son, ecuación (EQ.3.28):

$$BJD_{cruce}(t, \omega) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m \cos((\omega_n - \omega_m)t + \theta_n - \theta_m) \frac{\pi}{\alpha(\omega_n - \omega_m)} P_{2\alpha(\omega_n - \omega_m)}\left(\omega - \frac{\omega_n + \omega_m}{2}\right) \quad (EQ.8.7)$$

los cuales representan la distribución energética de la interacción de cada par de componentes sinusoidales complejos diferentes de la señal, ecuación (EQ.8.4) y que los términos de cruce son periódicos y que pueden ser positivos o negativos.

Con base en la ecuación (EQ.8.7), el factor de peso de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan se define como, ecuación (EQ.3.30):

$$WF_{BJD}(\omega, \omega_n, \omega_m) = \frac{\pi}{\alpha(\omega_n - \omega_m)} P_{2\alpha(\omega_n - \omega_m)} \left(\omega - \frac{\omega_n + \omega_m}{2} \right) \quad (\text{EQ.8.8})$$

el cual multiplica al factor $A_n A_m \cos(\bullet)$, esto es, ponderada los términos de cruce.

Para el caso de la distribución de Born Jordan, su factor de peso es una función pulso rectangular simétrico unitario que se extiende a lo largo de $-\alpha|\omega_n - \omega_m| < \omega + (\omega_n + \omega_m)/2 < \alpha|\omega_n - \omega_m|$. Consecuentemente, se distribuye el término de cruce asociado a ω_n y ω_m a lo largo de un intervalo finito.

8.3.2 Sobre el algoritmo eficiente

Primero se simplifica la distribución tiempo frecuencia discreta de Born Jordan valuada en $n=0$, ecuación (EQ.8.3) utilizando la siguiente expresiones:

$$\sum_{\tau=-N+1}^{N-1} f(\tau) = \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) + \sum_{\tau=-N+1}^0 f(\tau) - f(0) = \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) + \sum_{\tau=0}^{N-1} f(-\tau) - f(0) = \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) + \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} f^*(-\tau) \right]^* - f(0) \quad (\text{EQ.8.9})$$

Luego se demuestra que:

$$f^*(-\tau) = f(\tau) \quad (\text{EQ.8.10})$$

Finalmente aplicando la propiedad de los números complejos, $Z + Z^* = 2\text{Real}[Z]$, se obtiene la ecuación (EQ.3.38):

$$BJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{\frac{-j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=-\alpha 2|\tau|}^{\alpha 2|\tau|} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu + \tau) x^*(\mu - \tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.8.11})$$

donde $\text{Real}[\bullet]$ es el operador parte real de un número complejo.

Ahora bien, si se eliminan las multiplicaciones triviales en la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada, entonces se optimiza el índice μ , el cual va de $\max\{-2\alpha|\tau|, -N+1+|\tau|\}$ hasta $\min\{2\alpha|\tau|, N-1-|\tau|\}$, ecuación (EQ.3.38):

$$BJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{\frac{j2\pi k \tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-\alpha 2|\tau|, -N+1+|\tau|\}}^{\min\{\alpha 2|\tau|, N-1-|\tau|\}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu + \tau) x^*(\mu - \tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.8.12})$$

La expresión anterior constituye el algoritmo eficiente.

El número de operaciones para calcular la distribución discreta sin simplificar, ecuación (EQ.8.11) es:

$$\text{Productos: } 2N^3 + 4N^2 - N$$

$$\text{Sumas: } 2N^3 + 2N - 4N$$

mientras que el número de operaciones para calcular el algoritmo eficiente, ecuación (EQ.8.12) es:

$$\text{Productos: } N^3 + 3N^2 + 3N$$

$$\text{Sumas: } N^3$$

Nótese que el algoritmo sin simplificación aproximadamente realiza el doble de operaciones que el algoritmo eficiente, aunque ambos son de complejidad $O(N^3)$.

8.3.3 Sobre la señal Dópler ultrasónica simulada

En la sección 4.2, Señal Dópler Ultrasónica Simulada se muestra el procedimiento para simular una señal Dópler ultrasónica que modela la velocidad media del flujo sanguíneo en un corte transversal de la arteria carótida. Su frecuencia media pseudo instantánea se muestra en la gráfica de la Fig. 8.3 y su ancho de banda es $b = 100$ Hz.

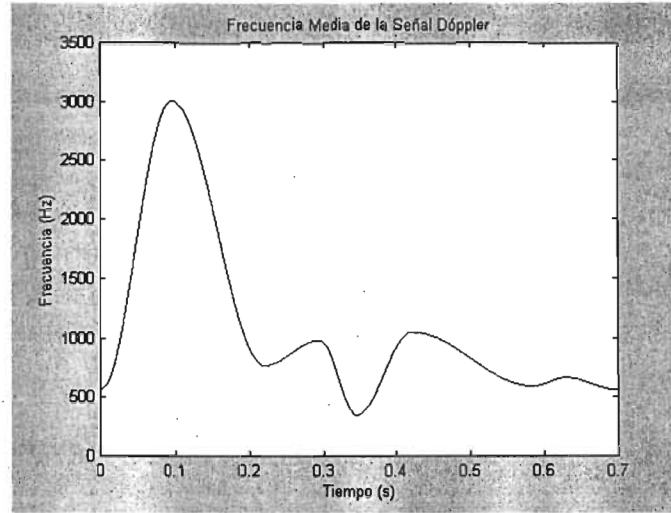


Fig. 8.3. Gráfica de la frecuencia media instantánea de la señal Dópler ultrasónica simulada $x_{Doppler}(t)$.

8.3.4 Sobre el procedimiento para calcular el parámetro óptimo

El parámetro óptimo es el valor del parámetro propio de la distribución que minimiza el error de las estimaciones espectrales. Este parámetro óptimo se define para cada pareja de valores longitud de ventana de muestreo y relación señal a ruido.

En el procedimiento para calcular el parámetro óptimo se utiliza la señal Dópler simulada discreta $x_{Doppler}(t)$ mostrada anteriormente.

Primero se toma una ventana de muestreo de longitud $L = 2N - 1$ y se calcula su señal analítica, la cual constituye la señal $x(m)$ para $m = -N + 1, \dots, N - 1$. Segundo, se estima la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan valuada en tiempo cero según la ecuación (EQ.3.39):

$$BJD(0, k) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau) e^{\frac{-j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-\alpha 2|\tau|, -N+1+|\tau|\}}^{\min\{\alpha 2|\tau|, N-1-|\tau|\}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.8.13})$$

Tercero, se calcula la potencia media pseudo instantánea, ecuación (EQ.2.23), valuada en cero según la ecuación:

$$PIPD(0, k) = \begin{cases} BJD(0, k) & BJD(0, k) \geq 0 \\ 0 & BJD(0, k) < 0 \end{cases} \quad (\text{EQ.8.14})$$

Cuarto, se estima la frecuencia media pseudo instantánea (EQ.2.25) según la ecuación:

$$PIMF(n) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} k \cdot PIPD(0, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} PIPD(0, k)} \tag{EQ.8.15}$$

y el ancho de de banda espectral RMS (EQ.2.27) según la ecuación:

$$\hat{b}(n) = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (PIMF(n) - k)^2 \cdot PIPD(0, k)}{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} PIPD(0, k)}} \tag{EQ.8.16}$$

donde n representa el número consecutivo de la ventana procesada. Esto es, para la primera $n = 1$, para la segunda $n = 2$ y así sucesivamente. Nótese que los resultados $PIPD(n)$ y $\hat{b}(n)$ corresponden al punto central de la ventana n-ésima procesada.

Una estimación puntual es la estimación de un parámetro (que describe una población), que da por resultado un solo valor. Para el caso del $PIMF(n)$ estima un solo valor de frecuencia instantánea para una ventana de muestreo (población). Para el caso de $\hat{b}(n)$ estima un solo valor del ancho de banda espectral RMS para una ventana de muestreo (población).

También obsérvese que en la expresión discreta de la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan valuada en $n = 0$, ecuación (EQ.8.13), los valores de las cotas del índice de la sumatoria interna, con respecto a μ , deben ser enteros. De aquí que los valores apropiados para el parámetro Alfa sean múltiplos enteros positivos de 0.5, esto es:

$$Alfa = 0.5n \text{ con } n \in \text{Naturales} \tag{EQ.8.17}$$

En contraposición, los valores no apropiados son aquellos que no generan valores enteros en las cotas del índice de la sumatoria interna, con respecto a μ .

A continuación se muestran la gráfica Fig.8.4 de la frecuencia media pseudo instantánea de la señal utilizando una longitud de ventana de muestreo de 511 elementos (la línea continua muestra los valores teóricos y la otra los estimados):

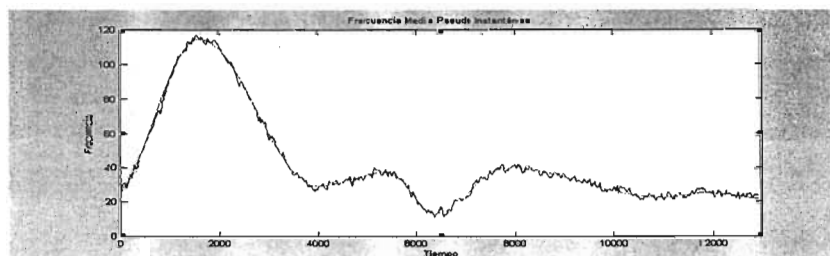


Fig.8.4. Gráfica de la frecuencia media pseudo instantánea con una longitud de venta de 511 elementos.

En la gráfica Fig.8.5 se muestra el ancho de banda espectral RMS utilizando una longitud de ventana de muestreo de 511 elementos:

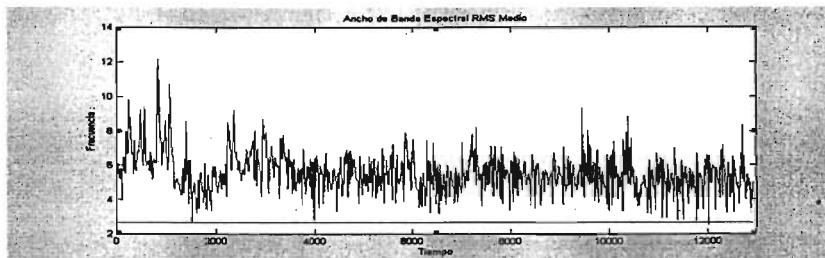


Fig.8.5. Gráfica del ancho de banda espectral RMS para una longitud de ventana de 511 elementos.

Las estimaciones espectrales para las otras longitudes de ventana son similares.

8.3.5 Sobre los parámetros óptimos

Recuérdese que el parámetro óptimo es el valor propio de la distribución que minimiza el error de las estimaciones espectrales. Los parámetros óptimos Alfa según la longitud de ventana de muestreo y la relación señal a ruido se muestran a continuación.

Para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea (Tb.5.2) se tiene que:

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	3	2.5	2	1.5
20	1.5	2	2	1.5
30	1.5	2	2	1.5
40	1.5	2	2	1.5

Tb.8.1. Parámetros óptimos para la estimación de la frecuencia media pseudo instantánea.

Para el ancho de banda espectral RMS (Tb.5.4) se tiene que:

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	0.5	1	0.5	0.5
20	1	1	1	1
30	1	1	1	1
40	1	1	1	1

Tb.8.2. Parámetros óptimos para la estimación del ancho de banda espectral.

Y para la estimación conjunta de la frecuencia y el ancho de banda (Tb.5.6) se tiene que:

SNR	Longitud de Ventana			
	63	127	255	511
10	1	1.5	1.5	0.5
20	1	1	1	1
30	1	1	1	1
40	1	1	1	1

Tb.8.3. Parámetros óptimos para la estimación conjunta.

8.3.6 Sobre la comparación con la distribución tiempo frecuencia de Wigner Ville

En las gráficas de la Fig.8.6 se muestran los errores mínimos en la estimación de la frecuencia y del ancho de banda para las distribuciones de Wigner Ville, ecuación (EQ.2.11), y Born Jordan con un SNR de 20 dB.

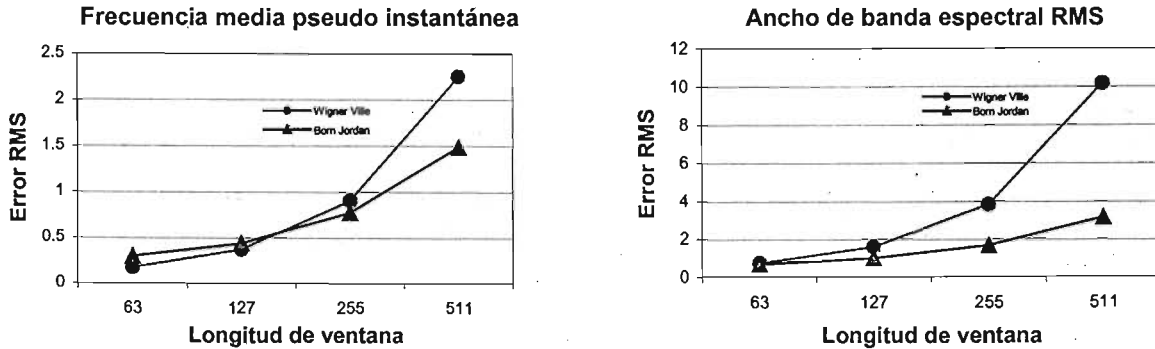


Fig.8.6. Gráficas del error RMS en la estimación de la frecuencia y el ancho de banda con las distribuciones de Wigner Ville y Born Jordan con un SNR de 20 dB.

Nótese que la distribución de Born Jordan estima mejor que la distribución de Wigner Ville la frecuencia media pseudo instantánea de una señal en presencia de ruido. Lo mismo ocurre con el ancho de banda.

8.3.7 Sobre el truncado de la función de autocorrelación

La siguiente ecuación muestra la expresión discreta eficiente que calcula la distribución tiempo frecuencia de Born Jordan, con un índice de truncado en la función de autocorrelación indexada al tiempo generalizada, ecuación (EQ.6.1):

$$BJD(0, k, IT) = 4\text{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau)W^*(-\tau) e^{\frac{j2\pi k\tau}{N}} \sum_{\mu=\max\{-IT, -\alpha 2|\tau|, -N+1+|\tau|\}}^{\min\{IT, \alpha 2|\tau|, N-1-|\tau|\}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} x(\mu+\tau)x^*(\mu-\tau) \right] - 2|x(0)|^2 \quad (\text{EQ.8.18})$$

Los valores de las cotas de la sumatoria interna con respecto a μ tienen un índice de truncado IT , el cual puede tomar valores desde 0 hasta $N-1$, ya que para valores mayores a $N-1$ no existe ningún truncado efectivo. $IT = 0$ corresponde al máximo truncado; mientras que $IT = N - 1$, sin truncado.

El truncado introduce un error en la estimación, pero disminuye el número de operaciones. De esta forma se establece un compromiso de rapidez de cálculo contra el error en la estimación espectral: "A mayor rapidez de cálculo (mayor truncamiento), mayor error (incremento controlado) en la estimación espectral".

8.3.8 Sobre el incremento porcentual del error inducido por el índice de truncado

En la tabla se muestran el incremento porcentual del error en las estimaciones espectrales debido al truncado de la función de autocorrelación IT , con respecto a los errores obtenidos sin truncado.

Las estimaciones espectrales son, la frecuencia media pseudo instantánea, ancho de banda espectral y estimación conjunta. Para una longitud de ventana de muestreo $L = 63$ se tiene:

Incremento porcentual del error	Alfa	0%	1%	2%	3%	4%	5%
Frecuencia instantánea	$\alpha = 1.5$	$IT=24$	24	24	20	20	20
Ancho de banda	$\alpha = 1$	22	22	20	14	14	14
Estimación conjunta	$\alpha = 1$	22	22	16	16	14	14

Tb.8.4. Índice de truncado y su incremento porcentual del error asociado, para $L=63$.

Para una longitud de ventana de muestreo $L = 127$ se tiene:

Incremento porcentual del error	Alfa	0%	1%	2%	3%	4%	5%
Frecuencia instantánea	$\alpha = 2$	$IT=52$	52	48	48	48	44
Ancho de banda	$\alpha = 1$	40	36	32	32	28	24
Estimación conjunta	$\alpha = 1$	44	44	36	32	32	32

Tb.8.5. Índice de truncado y su incremento porcentual del error asociado, para $L=127$.

Para una longitud de ventana de muestreo $L = 255$ se tiene:

Incremento porcentual del error	Alfa	0%	1%	2%	3%	4%	5%
Frecuencia instantánea	$\alpha = 2$	$IT=96$	88	88	80	80	72
Ancho de banda	$\alpha = 1$	64	56	48	48	48	40
Estimación conjunta	$\alpha = 1$	88	88	80	48	48	48

Tb.8.6. Índice de truncado y su incremento porcentual del error asociado, para $L=255$.

Para una longitud de ventana de muestreo $L = 511$ se tiene:

Incremento porcentual del error	Alfa	0%	1%	2%	3%	4%	5%
Frecuencia instantánea	$\alpha = 1.5$	IT=192	192	176	144	64	64
Ancho de banda	$\alpha = 1$	144	128	96	96	64	64
Estimación conjunta	$\alpha = 1$	176	80	64	64	48	48

Tb.8.7. Índice de truncado y su incremento porcentual del error asociado, para L=511.

8.4. Trabajo futuro

La distribución de Zhao-Atlas-Marks⁽²²⁾ también pertenece a las distribuciones tiempo frecuencia de la Clase de Cohen. La distribución continua se define como:

$$ZAMD(t, f) = \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{t-|\tau|}^{t+|\tau|} g(\tau) \int_{t-|\tau|}^{t+|\tau|} x^* \left(\mu - \frac{\tau}{2} \right) x \left(\mu + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j2\pi f\tau} dud\tau \quad (EQ.8.19)$$

y su kernel es:

$$\phi(\theta, \tau) = g(\tau) |\tau| \frac{\sin \alpha\theta\tau}{\alpha\theta\tau} \quad (EQ.8.20)$$

donde $g(\tau)$ es una función de filtrado y $\alpha > 0$ es un parámetro de escala. Nótese que si se define $g(\tau) = \frac{1}{|\tau|}$, entonces se obtiene:

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{1}{|\tau|} |\tau| \frac{\sin \alpha\theta\tau}{\alpha\theta\tau} = \frac{\sin \alpha\theta\tau}{\alpha\theta\tau}$$

Este kernel corresponde a la distribución de Born Jordan. De aquí que la distribución de Born Jordan sea un caso particular de la distribución Zhao-Atlas-Marks. Se propone ampliar este trabajo de investigación para el caso general, es decir, la distribución de Zhao-Atlas-Marks.

A.1. BIBLIOGRAFIA

- [1]. Oppenheim A.V., Schafer R.W., Buck J.R. "Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto". Prentice Hall. Segunda Edición, 2000.
- [2]. Proakis J.G., Manolakis D.G. "Tratamiento digital de señales. Principios, algoritmos y aplicaciones". Prentice Hall. Tercera Edición, 1998.
- [3]. Oppenheim A.V., Willsky A.S., Young I.T.. "Signals and Systems". 1983.
- [4]. Boashash B. "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal Part 1: Fundamentals". Proceedings of IEEE. Vol. 80 No. 4. P.P. 520-538. April 1992.
- [5]. Boashash B. "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal Part 2: Algorithms and Application". Proceedings of IEEE. Vol. 80 No. 4. P.P. 540-568. April 1992.
- [6]. Martin W., Flandrin P. "Wigner-Ville Spectral Analysis of Nonstationary Processes". IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing. Vol. ASSP-33. No. 6. P.P. 1461-1470. December 1985.
- [7]. Boashash B. "An Efficient Real-Time Implementation of the Wigner-Ville Distribution". IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing. ASSP-35. No. 11. P.P. 1611-1618. November 1987.
- [8]. Fan L., Evans D. "Extracting Instantaneous Mean Frequency Information from Doppler Signal Using the Wigner Distribution Function". Ultrasound in Med. & Biol. Vol. 20. No. 5 P.P. 429-443. 1994.
- [9]. Papoulis A. "Signal Analysis". McGraw Hill. 1985.
- [10]. Fan L., Evans D. "A Real-Time and Fine Resolution Analyzer Used to Estimate the Instantaneous Energy Distribution of Doppler Signals". Ultrasound in Med. & Biol. Vol. 20. No. 5 P.P. 445-454. 1994.
- [11]. Cardoso J., Ruano G., Fish P. "Nonstationary Broadening Reduction in Pulsed Doppler Spectrum Measurements Using Time-Frequency Estimators". IEEE Transactions on Biomedical Engineering. Vol. 43. No. 12. P.P. 1176-1186. December 1996.
- [12]. Fish P. "Physics and Instrumentation of Diagnostic Medical Ultrasound". Reino Unido. John Wiley & Sons. 1990.
- [13]. Cohen L. "Time-Frequency Analysis". New Jersey. Prentice-Hall PTR. 1995
- [14]. Woods J., Buda A., Barry D. "Time-Frequency Transforms: A New Approach to first Heart Sound Frequency Dynamics". IEEE Transactions on Biomedical Engineering. Vol. 39. No. 7. P.P. 730-740. July 1992.
- [15]. Cohen L. "Time-Frequency Distributions-A Reviews". Proceedings of the IEEE. Vol. 77. No. 7. P.P. 941-981. July 1989.
- [16]. Zeira A., Zeira E., Holland S. "Pseudo-Wigner Distribution for Analysis of Pulsed Doppler Ultrasound". IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol. 41. No. 3. P.P. 346-352. May 1994.
- [17]. Choi H., Williams W. "Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels". IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 37. No. 6. P.P. 862-871. June 1989.
- [18]. Jensen J. A. "Estimation of Blood Velocities Using Ultrasound a Signal Processing Approach" Cambridge University Press, Primera Edición, 1996.

- [19]. Evans H. D., McDiken W.N. "Doppler Ultrasound, Physics, Instrumentation and Signal Processing" Wiley, Segunda Edición.
- [20]. Guo Z., Durand L, Lee H. "The Time-Frequency Distributions of Nonstationary Signals Based on a Bessel Kernel". IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 42. No. 7. p.p. 1700-1707. July 1994.
- [21]. Rubio E. "Diseño e Implementación de Algoritmos Paralelos para Métodos de Estimación Espectral". Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Computación. Mexico D.F. Noviembre 2000.
- [22]. Zhao Y., Atlas L.E., Marks R. J. "The use of cone-shaped kernels for generalized time frequency representations of nonstationary signals". IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing. Vol. 38. p.p. 1084-1091. 1990.
- [23]. Mendenhall W., Scheaffer R. L., Wackerly D. "Estadística Matemática con Aplicaciones". Grupo Editorial Iberoamericana. Tercera Edición, 1992.

A.2. FORMULAS Y DESARROLLO

Entrada A2.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha\theta\tau)}{\alpha\theta\tau} e^{-j\theta} d\theta = \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(t) \quad \text{donde:}$$

$$\frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha\tau} & |t| < \alpha\tau \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Transformada de Fourier

$$\frac{\sin(at)}{\pi} \xrightarrow{f} p_{2a}(\omega) \quad \text{donde:}$$

$$p_{2a}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Entrada A2.2

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha\tau} P_{2\alpha\tau}(t - \mu) d\mu$$

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\alpha\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu$$

Por definición

$$R'_x(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t, \tau) \psi(t - \mu, \tau) d\mu$$

Redefiniendo límites de la integral

$$\begin{aligned} &|t - \mu| < \alpha\tau \\ &-\alpha\tau < t - \mu < \alpha\tau \\ &t - \alpha\tau < -\mu < -t + \alpha\tau \\ &t + \alpha\tau > \mu > t - \alpha\tau \\ &t - \alpha\tau < \mu < t + \alpha\tau \end{aligned}$$

Entrada A2.3

$$BJD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\alpha\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Por definición

$$TFD(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R'_x(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Entrada A2.4

Sean $\bullet \frac{1}{\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} \bullet$ los términos de interés de la ecuación

(EQ.3.7).

Si $\tau \geq 0$ entonces $\tau' = |\tau|$ luego:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} \bullet = \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} \bullet$$

Si $\tau < 0$ entonces $\tau' = -|\tau|$ luego:

$$\bullet \frac{1}{\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} \bullet = \bullet \frac{1}{-|\tau|} \int_{t+\alpha|\tau|}^{t-\alpha|\tau|} \bullet = \bullet \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} \bullet$$

$$\int_a^b \bullet = - \int_b^a \bullet$$

Finalmente:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} \bullet = \frac{1}{|\tau|} \int_{t-\alpha|\tau|}^{t+\alpha|\tau|} \bullet$$

Entrada A2.5

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu = 0$$

Existe una indeterminación cuando $\tau \rightarrow 0$

$$\int_t^t \bullet = 0$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} BJD(t, \omega) &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) \left[\frac{1}{2\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(t - \mu) \right] d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu) x^*(\mu) \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(t - \mu) \right] d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu) x^*(\mu) \delta(t - \mu) d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu) x^*(\mu) \delta(\mu - t) d\mu \\ &= x(t) x^*(t) \end{aligned}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [\bullet] = \delta(t - \mu)$$

Función par $\delta(t) = \delta(-t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Entrada A2.6

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) d\mu$$

donde:

$$p_{2\alpha\tau}(\mu - t) = \begin{cases} 1 & |\mu - t| < \alpha\tau \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Resolviendo la desigualdad de del valor absoluto:

$$|\mu - t| < \alpha\tau$$

$$-\alpha\tau < \mu - t < \alpha\tau$$

$$t - \alpha\tau < \mu < t + \alpha\tau$$

Incorporándolo a los límites de la integración:

$$\int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} \frac{\pi}{\alpha\tau} d\mu = \frac{\pi}{\alpha\tau} \int_{t-\alpha\tau}^{t+\alpha\tau} d\mu = \frac{\pi}{\alpha\tau} ((t + \alpha\tau) - (t - \alpha\tau)) = 2\pi$$

Entrada A2.7

$$BJD_{auto}(t, \omega) = \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_n \tau} e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$BJD_{auto}(t, \omega) = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n^2 \delta(\omega - \omega_n)$$

Transformada de Fourier:

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Entrada A2.8

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu - t) \right] \left[e^{j(\omega_n - \omega_n)\mu} \right] d\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2 \operatorname{sen}(\alpha\tau\mu)}{\alpha\tau\mu} e^{-j\mu} \right] \left[\delta(\mu + (\omega_n - \omega_n)) \right] d\mu \end{aligned}$$

Ecuación de Párseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) G(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) g(\mu) d\mu$$

donde $f(\mu) \xrightarrow{F} F(\mu)$ y $g(\mu) \xrightarrow{F} G(\mu)$

Ya que para el primer término se tiene:

$$\frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha\tau}(\mu) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{\alpha\tau} \frac{2 \operatorname{sen}(\alpha\tau\mu)}{\mu}$$

Transformada de Fourier

$$p_{2\alpha\tau}(t) \xrightarrow{F} 2 \frac{\operatorname{sen}(\alpha\tau)}{t}$$

$$\frac{\pi}{\alpha\tau} p_{2\alpha}(\mu - t) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{\alpha\tau} \frac{2\text{sen}(\alpha\tau\mu)}{(\mu)} e^{-j\mu}$$

Propiedad de corrimiento en tiempo de la Transformada de Fourier

$$f(t - t_0) \xrightarrow{F} F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Mientras que para el segundo término se tiene:

$$e^{j(\omega_n - \omega_m)\mu} \xrightarrow{F^{-1}} \delta(\mu + (\omega_n - \omega_m))$$

Transformada de Fourier:

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}$$

por tanto

$$e^{-j\omega t_0} \xrightarrow{F^{-1}} \delta(t - t_0)$$

Entrada A2.9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \left[\frac{\text{sen}(\alpha\tau\mu)}{(\alpha\tau\mu)} e^{-j\mu} \right] [\delta(\mu + (\omega_n - \omega_m))] d\mu = 2\pi \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))}{(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))} e^{j(\omega_n - \omega_m)}$$

Propiedad del impulso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0)$$

Entrada A2.10

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))}{(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha(\omega_n - \omega_m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))}{\pi\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha(\omega_n - \omega_m)} p_{2\alpha(\omega_n - \omega_m)}(\omega)$$

Transformada de Fourier:

$$\frac{\text{sen}(at)}{\pi t} \xrightarrow{F} p_{2a}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))}{(\alpha\tau(\omega_n - \omega_m))} e^{j\left(\frac{\omega_n + \omega_m}{2}\right)\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\pi}{\alpha(\omega_n - \omega_m)} p_{2\alpha(\omega_n - \omega_m)}\left(\omega - \frac{\omega_n + \omega_m}{2}\right)$$

Propiedad de corrimiento en la frecuencia de la transformada de Fourier:

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{F} F(\omega - \omega_0)$$

Entrada A2.11

$$Z \in C \Rightarrow Z^{**} = Z$$

Entrada A2.12

$$a, b \in C \Rightarrow (a + b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = a^* b^*$$

Entrada A2.13

$$Z \in C \Rightarrow Z + Z^* = 2\text{Real}[Z]$$

$$Z \in C \Rightarrow |Z|^2 = (Z)(Z^*)$$

Entrada A2.14

Algoritmo sin simplificar

1 producto y 0 sumas

$$(\triangleleft) = x(\mu + n + \tau)x^*(\mu + n - \tau)$$

Se calcula los productos y las sumas de la primera sumatoria con respecto a μ :

$$(\otimes) = \sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (\triangleleft)$$

productos

$$\sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (1) = (N-1-|\tau| - (-N+1+|\tau|) + 1) = N-1-|\tau| + N-1-|\tau| + 1 = 2N-2|\tau|-1$$

sumas

$$\sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (0) = (N-1-|\tau| - (-N+1+|\tau|) + 1) - 1 = N-1-|\tau| + N-1-|\tau| + 1 - 1 = 2N-2|\tau|-2$$

Se calcula los productos y las sumas siguientes:

$$(\diamond) = W(\tau)W^*(\tau)e^{-\frac{j2\pi k\tau}{N}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} \sum (\otimes)$$

productos

$$(2N-2|\tau|-1) + 3 = 2N-2|\tau| + 2$$

sumas

$$(2N-2|\tau|-2) + 0 = 2N-2|\tau|-2$$

Se calculan los productos y sumas de la segunda sumatoria:

$$(*) = \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (\diamond)$$

productos

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (2N - 2|\tau| + 2) &= 2N \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) - 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} |\tau| + 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) = \\ &= 2N \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} |\tau| - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} |\tau| + 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) = \\ &2N(N-1 - (-N+1) + 1) - 2 \left(\frac{(N-1)(N)}{2} \right) - 2 \left(\frac{(N-1)(N)}{2} \right) + 2(N-1 - (-N+1) + 1) = \\ &= 2N^2 - 2N + 2N^2 - N^2 + N - N^2 + N + 2N - 2 + 2N = 2N^2 + 4N - 2 \end{aligned}$$

sumas

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (2N - 2|\tau| - 2) + (N-1 - (-N+1) + 1) - 1 &= 2N \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) - 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} |\tau| + 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) - 2N - 2 = \\ &= 2N \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} |\tau| - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} |\tau| + 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (1) + 2N - 2 = \\ &2N(N-1 - (-N+1) + 1) - 2 \left(\frac{(N-1)(N)}{2} \right) - 2 \left(\frac{(N-1)(N)}{2} \right) - 2(N-1 - (-N+1) + 1) + 2N - 2 = \\ &= 2N^2 - 2N + 2N^2 - N^2 + N - N^2 + N - 2N - 2 + 2N + 2N - 2 = 2N^2 + 2N - 4 \end{aligned}$$

Se realizan los últimos productos y sumas:

productos

$$2N^2 + 4N - 2 + 1 = 2N^2 + 4N - 1$$

sumas

$$2N^2 + 2N - 4$$

Para toda k (existen N)

productos

$$N(2N^2 + 4N - 1) = 2N^3 + 4N^2 - N$$

sumas

$$N(2N^2 + 2N - 4) = 2N^3 + 2N^2 - 4N$$

Entrada A2.15

Algoritmo eficiente

$$(\triangleleft) = x(\mu + \tau)x^*(\mu - \tau) \quad 1 \text{ producto y } 0 \text{ sumas}$$

Se calcula los productos y las sumas de la primera sumatoria con respecto a μ :

$$(\otimes) = \sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (\triangleleft)$$

productos

$$\sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (1)(N-1-|\tau| - (-N+1+|\tau|) + 1) = N-1-|\tau| + N-1-|\tau| + 1 = 2N-2|\tau|-1$$

sumas

$$\sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (0)(N-1-|\tau| - (-N+1+|\tau|) + 1) - 1 = N-1-|\tau| + N-1-|\tau| + 1 - 1 = 2N-2|\tau|-2$$

Se calcula los productos y las sumas siguientes:

$$(\diamond) = W(\tau)W^*(\tau)e^{\frac{j2\pi k\tau}{N}} \frac{1}{4\alpha|\tau|} \sum (\otimes)$$

productos

$$(2N-2|\tau|-1) + 3 = 2N-2|\tau| + 2$$

sumas

$$(2N-2|\tau|-2) + 0 = 2N-2|\tau| - 2$$

Se calculan los productos y sumas de la segunda sumatoria:

$$(*) = \sum_{\mu=-N+1+|\tau|}^{N-1-|\tau|} (\diamond)$$

producto

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{N-1} (2N - 2|\tau| + 2) &= 2N \sum_{\tau=0}^{N-1} (1) - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} |\tau| + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} (1) = \\ &= 2N(N) - 2 \left(\frac{(N-1)(N)}{2} \right) + 2(N) = 2N^2 - N^2 + N + 2N = N^2 + 3N \end{aligned}$$

Sumas

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{N-1} (2N - 2|\tau| - 2) &= 2N \sum_{\tau=0}^{N-1} (1) - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} |\tau| - 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} (1) = \\ 2N(N) - 2(N) - 2 \left(\frac{(N-1)(N-1+1)}{2} \right) &= 2N^2 + 2N - N^2 + N = N^2 - 1 \end{aligned}$$

Se realizan los últimos productos y sumas:

productos

$$N^2 + 3N + 1 + 1 + 1 = N^2 + 3N + 3$$

sumas

$$N^2 - 1 + 1 = N^2$$

Para toda k (existen N)

productos

$$N(N^2 + 3N + 3) = N^3 + 3N^2 + 3N$$

sumas

$$N(N^2) = N^3$$

Nótese que el algoritmo sin simplificación realiza el doble de operaciones que el algoritmo eficiente, y que ambos son de complejidad $O(N^3)$.

A.3. PUBLICACIÓN

Los resultados de este trabajo contribuyeron en la elaboración del artículo con el título "ESTIMACIÓN ESPECTRAL UTILIZANDO LA DISTRIBUCIÓN TIEMPO FRECUENCIA DE BORN JORDAN APLICADA A FLUJOMETRÍA DOPPLER", cuyos autores son García N.F., Solano G.J., Rubio A.E., Contreras A.J.A. presentado en las memorias del XXV Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica, de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Biomédica A.C. (SOMIB), celebrado del 6 al 8 de noviembre del 2002 en Monterrey, Nuevo León México.

Se anexa la publicación.

ESTIMACIÓN ESPECTRAL UTILIZANDO LA DISTRIBUCIÓN TIEMPO FRECUENCIA DE BORN JORDAN APLICADA A FLUJOMETRÍA DOPPLER

García N.F.^(*), Solano G.J., Rubio A.E., Contreras A.J.A.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM
Apdo. Postal 20-726, Admón. No. 20. Delegación Álvaro Obregón. C.P. 01000. México, D.F.
fabian@uxdea4.iimas.unam.mx^(*)

Palabras clave: Distribución Tiempo Frecuencia, Estimación Espectral, Ultrasonido Dópler.

INTRODUCCIÓN

Una aplicación de flujometría Dópler es la estimación de la velocidad promedio del flujo sanguíneo arterial. Se sabe que esa velocidad es proporcional a la frecuencia instantánea de una señal Dópler ultrasónica que se refleja cuando se hace incidir una señal ultrasónica de frecuencia conocida sobre el flujo sanguíneo arterial. Existen diversos métodos para determinar la frecuencia instantánea. Tradicionalmente se han utilizado métodos que requieren de la transformada de Fourier y que suponen la estacionalidad de la señal [1]. Sin embargo, en este caso no se satisface el último supuesto ya que la sangre es un fluido (tejido) no homogéneo, no Newtoniano y que circula de forma pulsátil en arterias o venas viscoelásticas.

Como una alternativa para calcular la frecuencia instantánea, se pueden emplear métodos que requieren de las distribuciones tiempo frecuencia, los cuales se aplican a señales no estacionarias [2]. En este trabajo se expone la distribución de Born Jordan [3].

Uno de los problemas cuando se aplican las distribuciones tiempo frecuencia es la determinación de los valores de sus parámetros, los cuales dependen de la señal en estudio. Otro de los principales obstáculos en el cálculo de las distribuciones tiempo frecuencia es la cantidad de operaciones que están involucradas ya que, generalmente, los sistemas digitales que las calculan deben proporcionar una respuesta en tiempo real.

ANTECEDENTES

La expresión discreta eficiente que calcula la distribución de Born Jordan [4], la cual se aplica a una señal *analítica* discreta de longitud $L = 2N - 1$ con $N = 2^p$, es:

$$DBJD(n = 0, k, TI) = 4 \operatorname{Real} \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} W(\tau) W^*(-\tau) e^{-j \frac{2\pi k \tau}{N}} \right] \cdot \left(\frac{1}{4\alpha|\tau|} \sum_{\mu=\max\{-2\alpha|\tau|, -N+1+\tau, -n\}}^{\min\{2\alpha|\tau|, N-1+\tau, TI\}} x(\mu + \tau) x^*(\mu - \tau) \right) - 2|x(0)|^2 \quad (1)$$

donde n es el tiempo discreto normalizado, $k = 0, \dots, N-1$ es la frecuencia discreta normalizada, $\alpha > 0$ es un parámetro y $TI \in \{1, \dots, N-1\}$ es el índice de truncado de la función de autocorrelación. No se realiza truncado alguno si $TI = N-1$. El máximo truncado posible corresponde a $TI = 1$. Nótese que el truncado provoca un error en la estimación espectral pero reduce el tiempo y el número de operaciones requeridos para el cálculo de la distribución.

Un estimador [5] de la frecuencia instantánea es la frecuencia media pseudo instantánea, *PIMF*, la cual se define como:

$$PIMF = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} k \cdot PIPD(0, k)}{\sum_{k=0}^{N-1} PIPD(0, k)} \quad (2)$$

donde *PIPD* es la Distribución de Potencia Pseudo Instantánea, la cual se define como:

$$PIPD(0, k) = \begin{cases} DBJD(0, k) & DBJD(0, k) \geq 0 \\ 0 & DBJD(0, k) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

MÉTODO

La señal considerada es una señal Dópler ultrasónica que describe la velocidad promedio típica del flujo sanguíneo en la arteria carótida [5]. La gráfica de su frecuencia instantánea teórica se muestra en la figura 1.

Considérese el siguiente experimento. Primero se toma una muestra a 19.2kHz de 0.7s de la señal considerada. Segundo, para cada ventana consecutiva de longitud L se calcula la *PIMF* con las expresiones (1), (2) y

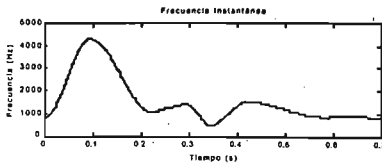


Figura 1: Frecuencia instantánea de la señal Dópler ultrasónica considerada.

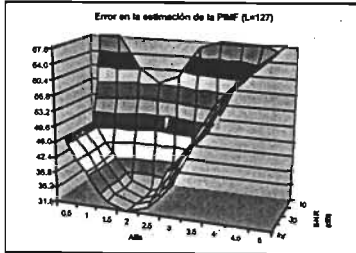


Figura 2. Función de Error en la estimación de la PIMF respecto al parámetro α para $L=127$.

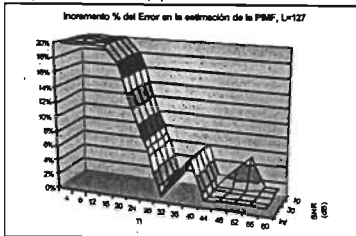


Figura 3. Función de Incremento Porcentual del Error en la estimación de la PIMF respecto al índice de truncado IT , para $L=127$.

(3) considerando $IT = N - 1$. Tercero, se calcula el error RMS de la estimación espectral. Este experimento se realiza considerando parámetros $\alpha = 0.5, 1, \dots, 5$, longitudes de ventana $L = 63, 127, 255$, y relaciones señal a ruido $SNR = \infty, 40, 30, 20, 10$ dB. De esta forma se construye la Función de Error en la estimación de la PIMF respecto al parámetro α . La gráfica para $L=127$ se muestra en la figura 2. Obsérvese que la función de error tiene un valor mínimo en cada nivel de SNR . A los valores del parámetro α que les corresponden esos valores mínimos en el error de la estimación espectral se les denomina Parámetros Óptimos.

Luego, considerando los parámetros óptimos, se construye la Función de Incremento Porcentual del Error en la estimación de la PIMF respecto al índice de truncado IT , considerando $IT = 1, \dots, N - 1$, así como $L = 63, 127, 255$ y $SNR = \infty, 40, 30, 20, 10$ dB. Los errores de referencia ($\Delta Error = 0\%$) son aquellos obtenidos sin truncado ($IT = N - 1$). La gráfica para $L=127$ se muestra en la figura 3.

RESULTADOS

En la tabla 1 se muestran los parámetros óptimos α propios de la estimación de la PIMF, correspondientes a cada longitud de ventana L (para cualquier nivel de SNR). En la tabla 2 se muestran los índices de truncado IT propios de un cierto incremento porcentual del error en la estimación de la PIMF.

L=63	L=127	L=255
$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=2$

Tabla 1. Parámetros óptimos α para la estimación de la PIMF.

	Sin Truncado	$\Delta Error = 1\%$	$\Delta Error = 3\%$	$\Delta Error = 5\%$
L=63	$IT=31$	$IT=20$	$IT=16$	$IT=16$
L=127	$IT=63$	$IT=44$	$IT=44$	$IT=44$
L=255	$IT=127$	$IT=88$	$IT=56$	$IT=48$

Tabla 2. Índices de truncado IT para ciertos $\Delta\%$ del error en la estimación de la PIMF.

CONCLUSIONES

En este trabajo se considera una señal Dópler ultrasónica asociada a la velocidad promedio del flujo sanguíneo en la arteria Carótida. Además, se propone una expresión discreta eficiente para el cálculo de la distribución de Born Jordan (Ecuación 1). También se proponen parámetros óptimos para la estimación de la PIMF (Tabla 1); los parámetros óptimos minimizan el error en la estimación espectral. Finalmente, se proponen índices de truncado asociados a ciertos incrementos porcentuales del error en la estimación espectral (Tabla 2).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Fish P. (1990) Physics and Instrumentation of Diagnostic Medical Ultrasound. John Wiley & Sons.
- [2] Boashash B. Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal Part1: Fundamentals. Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 4, April 1992, p.p. 520-538.
- [3] Cohen L. Time-Frequency Distributions: A Review. Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 7, July 1989, p.p. 941-981.
- [4] García N. F., et al. Cómputo paralelo en distribuciones tiempo frecuencia para instrumentación Dópler ultrasónica en flujo sanguíneo. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, Vol. 22, No. 1, Marzo 2001, p.p.12-19.
- [5] Cardoso J. C. S., et al. Nonstationary Broadening Reduction in Pulsed Doppler

Spectrum Measurements Using Time-Frequency Estimators. IEEE Transactions on Biomedical

Engineering. Vol. 43, No. 12, December 1996, p.p. 1176-1186.

A.4. PROGRAMA EN MATLAB

```

%*****
%PROGRAMA QUE CALCULA LA DISTRIBUCION TIEMPO FRECUENCIA DE BORN JORDAN
%Elaborado por: Juan Antonio Contreras Arvizu
%UNAM-IIMAS-DISCA
%9 DE JUNIO DE 2003
%*****

%Señal Doppler
si = input('Quieres la señal con ruido \n 1.(Si) \n 2.(No)\n' );
if si == 1
    %Carga la señal Dóppler y le agrega ruido
    load dopplers;    %s1 = load (Dopplers)
    lo = size(s1);
    snr = input('Introduzca la SNR \n SNR = ');
    %Generación de números aleatorios complejos con distribución normal,
    promedio 0.0 y varianza de 1.0, ruido blanco
    aleat = randn(lo) + randn(lo)*1j;
    normaleat = abs(aleat);
    fft ruido = aleat ./ normaleat;
    ruido = real(iff(fft ruido));
    %Se escala el ruido según SNR
    pwruido = sqrt(sum((ruido).^2) / length(s1));
    pwsig = sqrt(sum((s1).^2) / length(s1));
    pwruidobj = pwsig / (10 ^ (snr/10));
    factor = pwruidobj / pwruido;
    %Se agrega ruido a la señal
    sr = s1 + factor * ruido;
else
    %Carga la señal Dóppler sin ruido
    load dopplers;    %s1 = load (Dopplers)
    sr = s1;
end
%Determinación de la longitud de la ventana de muestreo, el factor de peso
alfa y el índice de truncado
L = input('Introduzca el tamaño de la ventana \n L = ');
alfa = input('Introduzca el factor alfa \n Alfa = ');
trunc = input('Introduzca el truncado \n Truncado = ');
N = ( L+1 ) / 2;
long = (length(s1))-N;
%Calculo de las constantes propias de la distribución de Born Jordan
c = 1 ./ (4*alfa*(1 : N-1));
%Cálculo de la ventana de Hanning
h = hanning( L )';
w = h(1:L) .* conj ( h ( L:-1:1) );
%Inicialización de las matrices
bjd = zeros(long, N); %Distribución tiempo frecuencia
pbjd = zeros(long , (N/2)); %Pseudo Distribución de Potencia Instantánea
%Inicia el cálculo de distribución de Born Jordan
for t = 1 : long-N    %Para cada ventana de muestreo
    fait = [];
    x = sr(t : (t + L-1));
    x=[x,0];
    %Se calcula la transformada de Hilbert de la señal
    xa = hilbert(x);
end

```

```

%Se agrega Padding con ceros en los extremos de la señal
xae = [ zeros(1, N) xa zeros(1, N)];
%Se calcula la función de autocorrelación
xa0 = xae(2*N) * conj(xae(2*N));
for T = 1 : N-1;
    limit = 2 * alfa * abs(T);
    if trunc < limit
        M = -trunc : trunc;
    else
        M = -limit : limit;
    end
    fait(T) = sum(xae(M+T+2*N-1).*conj(xae(M-T+2*N-1)))*c(T);
end
%Se agrega el valor de x(0) en el vector y se multiplica por la ventana de
Hanning
fait = [xa0, fait].* w(N:L);
%Se calcula la distribución de Born Jordan
bjd(t, 1:N)=4*real(fft(fait))-2*abs(xa0);
%Se eliminan los valores negativos y las frecuencias negativas de la
distribución de Born Jordan
for i = 1 : (N/2);
    if bjd(t, i) >= 0
        pbjd(t, i) = bjd(t, i);
    end
end
%Se calcula la frecuencia instantánea
fi(t,:) = sum((0:N/2-1).*pbjd(t,:))/sum(pbjd(t,:));
%Se calcula el ancho de banda espectral
bi(t,:) = sqrt(sum((fi(t,:)-(0:N/2-1)).^2 .* pbjd(t,:))/sum(pbjd(t,:)));
end
%Se calculan los errores RMS respecto a los valores teóricos
%Valor teórico del ancho de banda RMS = 100
errorbi = sqrt((mean(bi - 100/(19200/L))^2 + (std(bi - 100/(19200/L))^2));
load f; %Valor teórico de la frecuencia instantánea
errorfi = sqrt((mean(fi' - f(N : (length(f))-N-1)/(19200/L))^2 +
    (std(fi' - f(N : (length(f))-N-1) / (19200/L))^2) );

```