

01170



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

Estudio del problema de estimación y
control de una clase de reactores
químicos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
Maestro En Ingeniería

ÁREA: ELÉCTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

Jorge Díaz Salgado

ASESOR: DR. JESÚS ÁLVAREZ CALDERÓN

CO-ASESOR: DR. JAIME MORENO PÉREZ



México, D.F. 2005

m. 340702



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer:

- A Dios por darme vida y salud para terminar este trabajo.
- Al Dr. Jesús Álvarez por su paciencia y entusiasmo.
- Al Dr. Jaime Moreno por sus valiosos comentarios y aportaciones.
- Al Dr. Luis Álvarez por adoptarme en mi orfandad.
- A mi familia.
- A la Arq. A. Martínez por su enorme apoyo.
- A la UNAM, mi alma mater.
- Al CONACyT por proporcionarme una beca para cursar mis estudios de maestría.
- A todos mis amigos, compañeros y profesores de la maestría, por apoyarme y confiar en mi.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación | 1 |
| 1.2. Planteamiento técnico del problema | 2 |
| 1.3. Materiales y métodos | 3 |
| 1.4. Objetivos | 3 |
| 1.5. Organización del Trabajo | 4 |
| 2. Modelo matemático de la clase de reactores estudiados | 5 |
| 2.1. Consideraciones previas de modelado | 5 |
| 2.2. Ecuaciones del Modelo matemático de los reactores STR | 6 |
| 2.3. Ecuaciones del Modelo matemático de la clase de reactores estudiados | 8 |
| 2.4. Modelo matemático del reactor de prueba | 10 |
| 2.4.1. Análisis de estabilidad a lazo abierto del reactor de prueba | 12 |
| 2.5. Resumen | 15 |
| 3. Análisis de la observabilidad y detectabilidad de la clase de reactores estudiados | 17 |
| 3.1. Observabilidad | 18 |
| 3.2. Observabilidad Instantánea | 19 |
| 3.3. Observabilidad local | 19 |
| 3.4. Observabilidad linealizada (completa e instantánea) | 20 |
| 3.5. Detectabilidad | 26 |
| 3.6. Caracterización del modelo nominal del reactor | 26 |

| | |
|--|-----------|
| 3.7. Caracterización del modelo expandido. | 32 |
| 3.8. Resumen | 34 |
| 4. Diseño de observadores para la clase de reactores estudiados | 36 |
| 4.1. Observador Geométrico no lineal | 37 |
| 4.2. Filtro extendido de Kalman | 40 |
| 4.3. Observadores con estructura pasiva | 43 |
| 4.4. Observador asintótico | 48 |
| 4.5. Resumen | 50 |
| 5. Diseño del controlador MIMO por retroalimentación de estados | 52 |
| 5.1. Resumen | 54 |
| 6. Diseño de los controladores MIMO por retroalimentación de salidas | 55 |
| 6.1. Diseño del controlador por retroalimentación de salidas utilizando el estimador con estructura pasiva a lazo abierto | 55 |
| 6.2. Análisis matemático de estabilidad | 57 |
| 6.3. Diseño del controlador por retroalimentación de salidas utilizando el observador asintótico | 64 |
| 6.4. Comparación de los esquemas de observación-control | 67 |
| 6.5. Resumen | 67 |
| 7. Simulaciones de los observadores y los esquemas observador-controlador para el reactor de prueba | 69 |
| 7.1. Simulación de los observadores a lazo abierto | 70 |
| 7.1.1. Comportamiento de los observadores con ruido en la medición | 74 |
| 7.1.2. Comportamiento de los observadores con variación de los parámetros de velocidad de reacción | 76 |
| 7.1.3. Observaciones de los experimentos a lazo abierto | 76 |
| 7.2. Simulaciones del sistema con los esquemas de observación-control | 79 |
| 7.2.1. Comportamiento nominal del sistema a lazo cerrado. | 80 |

| | |
|--|-----------|
| 7.2.2. Comportamiento del sistema a lazo cerrado con ruido en la medición | 84 |
| 7.2.3. Comportamiento del sistema a lazo cerrado con variación de los parámetros de la velocidad de reacción | 84 |
| 7.2.4. Diagrama de fase del reactor con los esquemas de observación-control | 87 |
| 7.2.5. Observaciones de los experimentos a lazo cerrado | 88 |
| 7.3. Resumen | 88 |
| 8. Conclusiones | 91 |
| Referencias | 94 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 2.1. Casos de operación del reactor STR. | 8 |
| 2.2. Puntos de equilibrio del modelo del sistema. | 13 |
| 7.1. Tiempos de convergencia de observación de temperatura | 78 |
| 7.2. Tiempos de convergencia de observación de concentración | 78 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Diagrama esquemático del reactor STR. | 6 |
| 2.2. Gráfica de la velocidad de reacción vs la temperatura del reactor vs la concentración de producto. | 11 |
| 2.3. Gráfica del modelo isotérmico: concentración vs velocidad de reacción. | 11 |
| 2.4. Curva de generación y remoción de calor vs temperatura. | 13 |
| 2.5. Plano de fase a lazo abierto del reactor de prueba. | 15 |
| 3.1. Plano de fase mostrando región instantáneamente no observable. | 31 |
| 4.1. Esquema de observación en cascada. | 43 |
| 6.1. Interacción de los sistemas dinámicos de error. | 61 |
| 6.2. Sistemas dinámicos de error en cascada. | 61 |
| 7.1. Señal de excitación del sistema a lazo abierto. | 71 |
| 7.2. Plano de fase de la trayectoria a lazo abierto. | 71 |
| 7.3. Comportamiento nominal de los observadores de concentración. | 72 |
| 7.4. Comportamiento nominal del error de observación de concentración. | 73 |
| 7.5. Comportamiento nominal de la observación de temperatura. | 73 |
| 7.6. Comportamiento con ruido de los observadores de concentración. | 74 |
| 7.7. Comportamiento con ruido del error de observación de concentración. | 75 |
| 7.8. Comportamiento con ruido de la observación de temperatura. | 75 |
| 7.9. Comportamiento con variación de parámetros de los observadores de concentración. | 77 |

| | |
|--|----|
| 7.10. Comportamiento con variación de parámetros del error de observación de concentración. | 77 |
| 7.11. Comportamiento con variación de parámetros de la observación de temperatura. | 78 |
| 7.12. Plano de fase de las trayectorias a lazo cerrado | 80 |
| 7.13. Comportamiento nominal del control de concentración. | 81 |
| 7.14. Comportamiento nominal del error de observación de concentración. . . | 82 |
| 7.15. Comportamiento nominal del control de temperatura. | 82 |
| 7.16. Comportamiento de la velocidad de reacción real y estimada con el observador con estructura pasiva a lazo abierto. | 83 |
| 7.17. Comportamiento de la velocidad de reacción real y estimada con el observador asintótico. | 83 |
| 7.18. Comportamiento con ruido del control de concentración. | 84 |
| 7.19. Comportamiento con ruido del error de observación de concentración. . | 85 |
| 7.20. Comportamiento con ruido del control de temperatura. | 85 |
| 7.21. Comportamiento con variación de parámetros del control de concentración | 86 |
| 7.22. Comportamiento con variación de parámetros del error de observación de concentración. | 87 |
| 7.23. Comportamiento con variación de parámetros del control de temperatura | 88 |
| 7.24. Plano de fase de regulación utilizando el control con el observador pasivo a lazo abierto. | 89 |
| 7.25. Plano de fase de regulación utilizando el control con el observador asintótico. | 89 |

Resumen

En el presente trabajo se realiza el control de temperatura y concentración de producto de una clase de reactores químicos a partir de la medición de la temperatura dentro del reactor. La clase de reactores químicos incluye aquellos que operan en forma continua y que presentan múltiples puntos de equilibrio posiblemente inestables a lazo abierto. Esta clase de reactores, además, se caracteriza por tener una velocidad de reacción no monótona e incierta. Se caracteriza la propiedad de observabilidad/detectabilidad de la clase de reactores químicos estudiados para encontrar bajo qué condiciones es posible observar los estados no medidos. A partir de este análisis se consideran cinco observadores no lineales que resuelven el problema de observación, dos de los cuales prueban ser inmunes al ruido en la medición y a los errores de modelado. Se diseñan dos controladores con estructura pasiva acoplados con dichos observadores. Los esquemas de observación y control se prueban para un reactor particular en forma simulada.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El control de reactores químicos se lleva a cabo generalmente por retroalimentación de estados, que son utilizados para determinar la entrada de control. Generalmente, algunos de los estados no pueden ser medidos en línea por razones prácticas y económicas, por lo que es necesario acoplar al control un observador que infiera el valor de estos estados a partir del modelo del sistema y mediciones en línea de otras variables del mismo, es decir un control por retroalimentación de salidas.

Las técnicas de observación lineal han sido modificadas y extrapoladas a sistemas no lineales obteniendo algunos resultados satisfactorios. En reactores químicos han sido ampliamente utilizados los observadores tipo Luenberger no lineal [32], basado en una forma de observabilidad instantánea, y el filtro extendido de Kalman [17] [39], basado en una propiedad de observabilidad integral. Estos estimadores se han utilizado conjuntamente con controladores basados en estimador.

Sin embargo estas técnicas de control y observación son fuertemente dependientes de los modelos matemáticos del sistema, que por lo general son altamente inciertos, especialmente las funciones de velocidad de reacción y de transferencia de calor [41]. Además, para cierto tipo de reactores, cuya velocidad de reacción es no monótona, el problema de observación se complica, pues aún teniendo un modelo matemático con mucha certidumbre, presentan una condición de observabilidad mal condicionada [26].

Esto ocurre porque el mapa de observabilidad pierde la independencia lineal de sus funciones en una región del espacio de estados.

Para resolver el problema de control de reactores se ha utilizado la teoría de control constructivo para el diseño de controladores con estructura pasiva [16] [18], cuya robustez minimiza la dependencia del modelo matemático y aumenta la tolerancia a errores. En los últimos años se ha extrapolado esta teoría para el diseño de estimadores con estructura pasiva, a modo de obtener una combinación de estimadores y controles pasivos [11][20]. Sin embargo hay una gran ausencia de métodos sistemáticos para abordar y solucionar el problema [40].

Aún así, el diseño de estimadores-controladores pasivos se ha utilizado con éxito en forma independiente para controlar globalmente reactores con funciones inciertas y controlar localmente reactores con velocidades de reacción no monótonas. En este trabajo se utiliza el enfoque constructivo para controlar un reactor con velocidad de reacción no monótona y desconocida.

1.2. Planteamiento técnico del problema

El problema que se plantea en este trabajo es un problema de control, ya que se busca diseñar un controlador que sea capaz de mantener la operación de una clase de reactores a una temperatura y concentración deseadas. Este problema de control, a su vez, genera un problema de observación ya que por razones prácticas y económicas en los reactores químicos resulta difícil la medición en línea de todos los estados del sistema, especialmente concentraciones de material. Por ello es necesario diseñar un observador que sea capaz de estimar los estados no medidos para que sean utilizados por el controlador como si fueran los estados verdaderos. El problema de observación se complica por el hecho de que el modelo de la clase de reactores estudiados incluye una función, dependiente de la temperatura y la concentración del material dentro del reactor, que tiene un comportamiento directamente proporcional a bajas concentraciones e inversamente proporcional a altas concentraciones, es decir, tiene un comportamiento no monótono. Esta función, llamada *velocidad de reacción*, al tener este comportamiento

to no monótono carece de la propiedad matemática de inyectividad, lo que significa que para un punto del rango de la función le corresponden dos puntos diferentes del dominio. Esta falta de inyectividad provoca que el modelo de la clase de reactores estudiados carezca de las propiedades de observabilidad local e instantánea, propiedades en las que se basan el diseño de algunos tipos de observadores y que la propiedad de observabilidad este mal condicionada, pues el mapa de observabilidad pierde la independencia lineal de sus funciones en una región del espacio de estados.

Además, en muchos casos prácticos la función velocidad de reacción es poco conocida, lo que complica el diseño del observador y del control pues se trabaja con un modelo incierto.

En este trabajo se busca diseñar un observador de estados capaz de funcionar correctamente a pesar de este problema de observabilidad y que acoplado con un control retroalimentado resuelva el problema de control aún con una velocidad de reacción desconocida.

1.3. Materiales y métodos

En este primer estudio los esquemas de control y observación son probados en forma simulada en un reactor de prueba utilizando la conocida paquetería de MATLAB (Simulink).

El método utilizado para el desarrollo de los esquemas es un método constructivo que incluye primeramente un análisis de la solubilidad del problema y a continuación una etapa de síntesis del observador/controlador.

1.4. Objetivos

Metodológicamente se plantean cuatro objetivos o puntos de análisis que son:

1. Identificar e interpretar las nociones y condiciones de observabilidad y detectabilidad de la clase de reactores estudiados.

2. Desarrollar un estimador de estados para la clase de reactores estudiados capaz

de funcionar correctamente a pesar de tener una velocidad de reacción no monótona.

3. Desarrollar un controlador basado en el estimador de estados propuesto que pueda ser utilizado en la clase de reactores estudiados y que permita el control a pesar de desconocer la velocidad de reacción.

4. Identificar e interpretar las condiciones de estabilidad de esta clase de reactores en lazo abierto y en lazo cerrado.

1.5. Organización del Trabajo

El trabajo está organizado del siguiente modo. En el segundo capítulo se hace una exposición detallada del modelo matemático de la clase de reactores estudiados y del reactor de prueba utilizado para las simulaciones. En el tercer capítulo se hace un análisis de la observabilidad y detectabilidad del modelo nominal del reactor de prueba y de un modelo expandido. El cuarto capítulo trata sobre el desarrollo de cinco estimadores de estado no lineales capaces de observar el estado no medido a pesar de la falta de inyectividad en el mapa de observación. En el capítulo siguiente se diseñan dos controladores por retroalimentación de estado basados en dos de los estimadores propuestos; además, se analiza la estabilidad del primer esquema en forma analítica. El último capítulo muestra los resultados de simulación de los observadores y los esquemas de observación-control aplicados al reactor de prueba.

Capítulo 2

Modelo matemático de la clase de reactores estudiados

En este capítulo se presenta a detalle el modelo matemático de la clase de reactores estudiados, los denominados STR (por sus siglas en inglés Stirred Tank Reactor) de reacción simple, y del reactor de prueba utilizado para el análisis y la simulación, un reactor catalítico CSTR (por sus siglas en inglés Continuous Stirred Tank Reactor). El modelo matemático de estos reactores considera una velocidad de reacción no monótona, debido a un efecto de inhibición en la reacción cuando la concentración es grande. Además debido al llamado *efecto gel* y a las condiciones de operación este tipo de reactores presenta múltiples puntos de equilibrio y todas las posibles trayectorias a lazo abierto sólo dependen de las condiciones iniciales y las entradas exógenas del sistema y siempre tenderán a uno de los puntos de equilibrio.

2.1. Consideraciones previas de modelado

El modelo dinámico de cualquier reactor está basado en el principio de conservación de materia y energía. El modelo tiene tantas ecuaciones diferenciales como ecuaciones de balance de conservación de energía y de materia se consideren [2].

El modelo genérico de los reactores STR de reacción simple, incluye cuatro ecuaciones diferenciales generadas a partir del balance de materia dentro del reactor, el

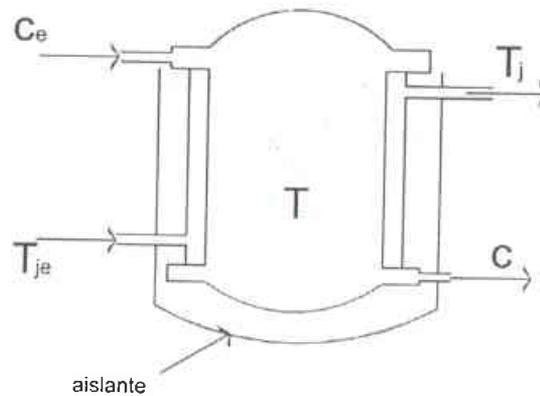


Figura 2.1: Diagrama esquemático del reactor STR.

balance de temperatura del reactor con sus alrededores, el balance de temperatura de la camisa de enfriamiento, y el balance de materia que entra y sale del reactor. Este modelo permite que el análisis sea simple y a la vez que los resultados puedan extrapolarse a sistemas más complejos donde se incluyan un mayor número de ecuaciones diferenciales. Otras ecuaciones de estado pueden incluirse si se trata de una reacción compuesta. Además, haciendo ciertas consideraciones, este modelo incorpora reactores que operan en forma continua, por *batch* y por *fed-batch* (por su nombre en inglés). De este modo los resultados pueden ser aplicados a una enorme cantidad de reactores poliméricos y catalíticos.

2.2. Ecuaciones del Modelo matemático de los reactores STR

Los denominados reactores STR (2.1) están formados básicamente por un tanque donde un reactante se alimenta con una concentración c_e cuyo contenido es continuamente mezclado en forma mecánica de tal modo que se puede considerar que la composición de los reactantes y la temperatura son uniformes dentro de él [2]. El producto obtenido después de la reacción tiene una concentración c . Cuando ocurre una reacción exotérmica y el calor generado no puede ser removido por el flujo de salida y/o disipado

en el medio ambiente, el reactor cuenta con una camisa de enfriamiento que rodea al tanque y que circula algún fluido que remueve este calor, generalmente con la ayuda de una bomba que obliga la circulación del refrigerante. Cabe señalar que en general la temperatura de entrada de la camisa T_{je} no es la misma que la temperatura de salida T_j . Sin embargo, si la circulación de refrigerante es lo suficientemente grande para tener una temperatura uniforme dentro de la camisa se puede despreciar la dinámica dentro de la camisa y tomar $T_{je} = T_j$.

Tomando en cuenta estas consideraciones el modelo matemático genérico de los reactores STR es el siguiente [3]:

$$\dot{c} = -\rho(c, T) + \frac{q_e}{V}(c_e - c) \quad (2.2.1)$$

$$\dot{T} = \beta\rho(c, T) + \frac{q_e}{V}(T_e - T) - \delta(T - T_j)$$

$$\dot{T}_j = \delta(T - T_j) - U_a(T_j - T_a) + Q_j \quad (2.2.2)$$

$$\dot{V} = q_e - q$$

Donde:

c : concentración del producto

T : temperatura dentro del reactor

T_j : temperatura de la camisa de enfriamiento

V : volumen del reactor

$\rho(c, T)$: velocidad de reacción

c_e : concentración del material de entrada

T_e : temperatura del material de entrada

T_a : temperatura ambiente

q : flujo de salida del reactor

q_e : flujo de entrada del reactor

U_a : calor intercambiado con el medio ambiente

Q_j : calor removido por el refrigerante

β : calor generado por la reacción

δ : calor intercambiado con la camisa

El reactor STR puede ser operado en tres formas distintas: continua, en *batch* y en *fed-batch* [12]. En la forma de operación continua el reactor se mantiene con un volumen de material constante gracias a que se alimenta y vacía la misma cantidad de material, es decir, que el flujo de entrada es igual al de salida. En esta forma el reactor puede trabajar un tiempo indefinido. En operación en *batch*, el reactor se trabaja también con un volumen constante pero no hay ni entrada ni salida de material mientras dura la reacción. Una vez que se consumen los reactantes se acaba la operación. En la operación en *fed-batch* un reactante se encuentra inicialmente dentro del reactor y el otro se añade continuamente al reactor hasta que se logra la composición deseada del producto. El volumen de material se incrementa conforme transcurre el tiempo, ya que no hay flujo de salida. El modelo de los reactores STR (2.2.1) incluye los tres casos de operación [8] haciendo las consideraciones que aparecen en la Tabla 2.1.

| | | | |
|-----------|---------------|---------------|---------------------|
| continua | $q_e = q$ | $V = \bar{V}$ | $t \in [0, \infty)$ |
| batch | $q_e = q = 0$ | $V = V_0$ | $t \in [0, t_f)$ |
| fed-batch | $q = 0$ | $V = V(t)$ | $t \in [0, t_f)$ |

Tabla 2.1: Casos de operación del reactor STR.

2.3. Ecuaciones del Modelo matemático de la clase de reactores estudiados

La clase de reactores estudiados pertenecen a los STR y son los denominados CSTR (por sus siglas en inglés Continuous Stirred Tank Reactor) de reacción simple, es decir, un STR que opera en forma continua. Por esta razón el volumen dentro del reactor siempre es constante e igual a \bar{V} , el flujo de entrada es igual al de salida $q_e = q$ y con

ello $\dot{V} = 0$. Por otro lado, como se muestra en [18], la dinámica en la camisa de enfriamiento se puede controlar en forma desacoplada (a través de un control secundario) manipulando el calor removido por el refrigerante Q_j . Por esta razón es posible estudiar el comportamiento del sistema en el plano de fase considerando la temperatura de la camisa T_j como la entrada de un control primario del sistema y tener el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned}\dot{c} &= -\rho(c, T) + \theta(c_c - c) \\ \dot{T} &= \beta\rho(c, T) + \theta(T_c - T) - \delta(T - T_j)\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

donde el cociente $\frac{q_c}{V}$ se ha sustituido por la tasa de dilución del reactor θ , ya que para este caso sólo es función del flujo de entrada (o de salida) $\theta = \frac{q_c}{V} = \frac{q}{V}$.

El modelo de la clase de reactores estudiados en variables de estado, siendo los estados $x_1 = c$, $x_2 = T$, las entradas exógenas $d_1 = c_c$, $d_2 = T_c$, las entradas de control $u_j = T_j$, $u_q = \theta$, las variables medidas y y las salidas reguladas z es:

$$\dot{x}_1 = -\rho(x_1, x_2) + u_q(d_1 - x_1) \quad (2.3.2)$$

$$\dot{x}_2 = \beta\rho(x_1, x_2) + u_q(d_2 - x_2) - \delta(x_2 - u_j)$$

$$y = x_2$$

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3.3)$$

En forma compacta

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (2.3.4)$$

$$y = h(x)$$

$$z = g(x). \quad (2.3.5)$$

El modelo de la clase de reactores estudiados también puede escribirse en la forma afín en las entradas (2.3.6).

$$\dot{x} = f(x, d) + \sum_{i=1}^m g_i(x, d)u_i \quad (2.3.6)$$

$$y = h(x)$$

$$z = g(x). \quad (2.3.7)$$

2.4. Modelo matemático del reactor de prueba

El modelo matemático del reactor de prueba es un reactor catalítico CSTR tomado de [2] y con una velocidad de reacción propuesta por [17]. Este modelo considera que el calor generado por la reacción y el calor intercambiado con la camisa de enfriamiento $[\beta, \delta]$ son constantes y por ende pueden ser considerados como parámetros del sistema

$$\beta = 200 \left[\frac{K \cdot L}{mol} \right]$$

$$\delta = 1 \left[\frac{1}{\text{mín}} \right].$$

La velocidad de reacción no monótona $\rho(c, T)$ que ocurre en el reactor de prueba se produce por un efecto de inhibición en la reacción cuando la concentración del reactante es grande [4]. El modelo de esta velocidad no monótona fue obtenido para un reactor de polimerización [17] mediante el procedimiento de Langmuir-Hinshelwood y es el siguiente:

$$\rho(c, T) = \frac{cke^{-\left(\frac{\gamma}{T}\right)} \left[\frac{mol}{L \cdot \text{mín}} \right]}{(1 + \sigma c)^2} \quad (2.4.1)$$

donde

$k = e^{25}$: factor de frecuencia de colisiones moleculares

$\gamma = 10000$: $\frac{\text{energía de activación de la reacción}}{\text{constante universal de los gases}}$

$\sigma = 3$: constante de absorción

El comportamiento no monótono de esta velocidad de reacción puede visualizarse en las Figuras 2.2 y 2.3 donde se muestra la gráfica en tres dimensiones de la superficie formada por la velocidad de reacción vs la temperatura del reactor vs la concentración de producto, y la gráfica del modelo isotérmico donde para tres temperaturas fijas se muestran las curvas de concentración vs velocidad de reacción, respectivamente.

Se puede observar que para cada valor de temperatura existe un máximo en la velocidad de reacción. También se observa cómo, para una velocidad de reacción y temperatura específicas, existen dos valores posibles de concentración debido a que la función no es inyectiva para esta variable.

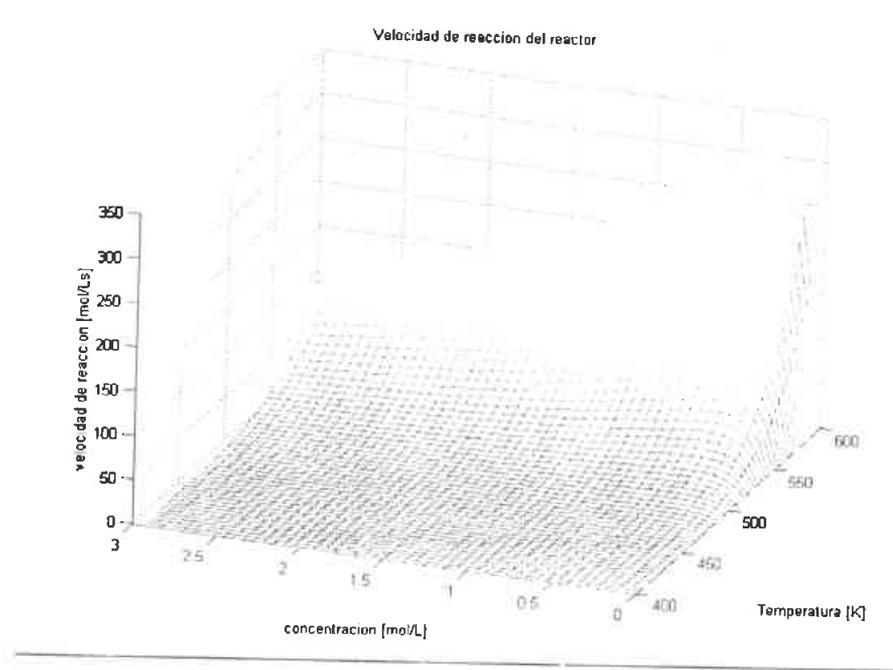


Figura 2.2: Gráfica de la velocidad de reacción vs la temperatura del reactor vs la concentración de producto.

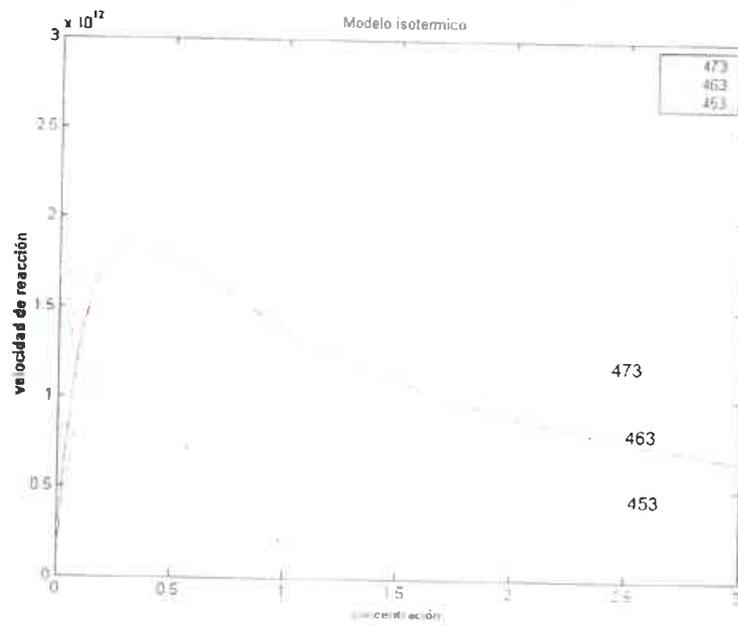


Figura 2.3: Gráfica del modelo isotérmico: concentración vs velocidad de reacción.

2.4.1. Análisis de estabilidad a lazo abierto del reactor de prueba

En esta sección se determina analíticamente la estabilidad del reactor de prueba a lazo abierto. Este análisis permite determinar los puntos de equilibrio del reactor y la estabilidad o inestabilidad de los mismos. Los puntos de equilibrio se definen del siguiente modo:

Definición 2.4.1 [22] *Si el estado inicial de un sistema es igual a x_{eq} y el sistema permanece ahí para todo tiempo futuro, el estado x_{eq} es un punto de equilibrio.*

Los puntos de equilibrio se encuentran de la ecuación (2.3.4) para una entrada exógena y una entrada de control en particular d_0 y u_0 determinando el valor de los estados para los cuales se cumple que:

$$f(x, u_0, d_0) = 0 \quad (2.4.2)$$

Los valores de la entrada exógena y de control para encontrar los puntos de equilibrio son [24]:

$$d_1 = 1 \left[\frac{\text{mol}}{L} \right]$$

$$d_2 = 370 [K]$$

$$u_j = 370 [K]$$

$$u_q = 1 \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$$

Resolviendo (2.4.2) se encuentran tres puntos de equilibrio. Para determinar si los puntos son estables o inestables en forma local, se utiliza el primer método de Lyapunov [22]. A partir de la linealización del sistema (2.3.4), y despreciando los términos de orden superior (T.O.S.), se obtiene la matriz de estados y los eigenvalores para cada punto de equilibrio.

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_{eq}} x + T.O.S.$$

Los resultados aparecen resumidos en la Tabla 2.2 e indican que para estas condiciones de operación existen dos puntos de equilibrio estables y un punto de equilibrio inestable.

| | Pto. 1 | Pto. 2 | Pto. 3 |
|-----------------------|---------|-----------|---------|
| concentración [mol/L] | 0.991 | 0.338 | 0.032 |
| temperatura [K] | 370.88 | 436.14 | 466.73 |
| eigenvalores | -0.994 | -1.002 | -16.152 |
| | -1.872 | 4.9702 | -2.6165 |
| condición local | estable | inestable | estable |

Tabla 2.2: Puntos de equilibrio del modelo del sistema.

Físicamente, se pueden interpretar estos puntos de equilibrio por medio de la Figura 2.4 donde se gráfica la curva de generación del calor y la curva de remoción de calor del sistema vs temperatura, que se obtiene de la ecuación dinámica de la temperatura haciendo la variación de la temperatura igual a cero [24]. Los puntos de equilibrio ocurren en las temperaturas donde ambas curvas se intersecan, esto es cuando el calor generado es exactamente igual al calor removido. El comportamiento de la trayectoria

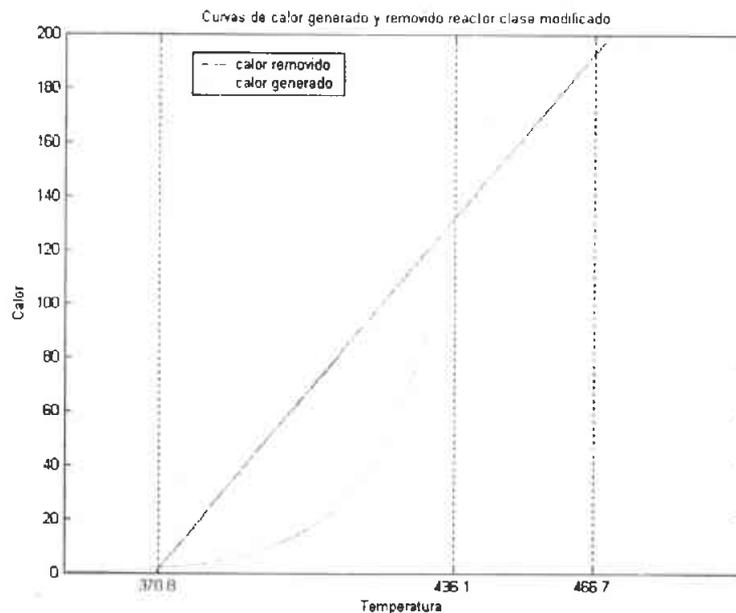


Figura 2.4: Curva de generación y remoción de calor vs temperatura.

de estados queda determinado por la multiplicidad de puntos de equilibrio [17]. Si se considera para el reactor de prueba (2.3.4) que las funciones f y h son suaves y que la entrada $u(t), d(t)$ es continua a pedazos, las trayectorias de estado a lazo abierto pueden ser estables o inestables y dependen de la pareja del estado inicial y la entrada del sistema: $(x_0, u(t), d(t))$. Cuando la entrada $u(t), d(t)$ es constante, el comportamiento de la trayectoria se debe únicamente a las condiciones iniciales del sistema. En el trabajo [33] se determinó que el sistema (2.3.2) es entrada-estado estable, por lo tanto con una entrada acotada, todas las posibles trayectorias de estado pueden ser acotadas en un conjunto invariante. Dadas las consideraciones físicas es posible acotar las entradas exógenas del sistema del siguiente modo:

$$0 < d_1 < \infty$$

$$0 < d_2 < \infty.$$

Esta condición aunada con la característica de la velocidad de reacción $\rho(0, T) = 0$ provoca que ésta se pueda acotar con un valor máximo:

$$0 < \rho(c, T) < \rho^*$$

Considerando que las entradas exógenas son constantes $d_1 = 1$, $d_2 = 370$ y que las entradas de control se acotan, por condiciones físicas, del siguiente modo:

$$u_j = [283.15, 400]$$

$$u_q = [0.01, 2]$$

se puede definir un conjunto invariante \bar{X} que queda determinado como [33]:

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq c_e, x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}\} \quad (2.4.3)$$

donde

$$x_2^{\max} = \max[T_e, u_j] + \beta = 600$$

$$x_2^{\min} = \min[T_e, u_j] = 283.15.$$

Cualquier trayectoria que comience dentro del conjunto invariante \bar{X} se mantendrá siempre dentro de él y tenderá hacia un punto de equilibrio [33]. En la Figura 2.5

se muestra el plano de fase del reactor a lazo abierto. Se pueden distinguir los tres puntos de equilibrio del reactor P1, P2 y P3, donde P2 es el punto inestable. El plano de fase queda dividido por la separatriz formada por las trayectorias que se dirigen hacia P2. Cualquier trayectoria que comience por arriba de la separatriz tenderá hacia P3 y cualquiera que este por debajo tenderá hacia P1. Cabe señalar que en la práctica resulta casi imposible lograr que el reactor siga la trayectoria hacia P2 o incluso que se mantenga en este punto inestable, ya que cualquier pequeña perturbación obliga a la trayectoria a tender hacia P1 o P3.

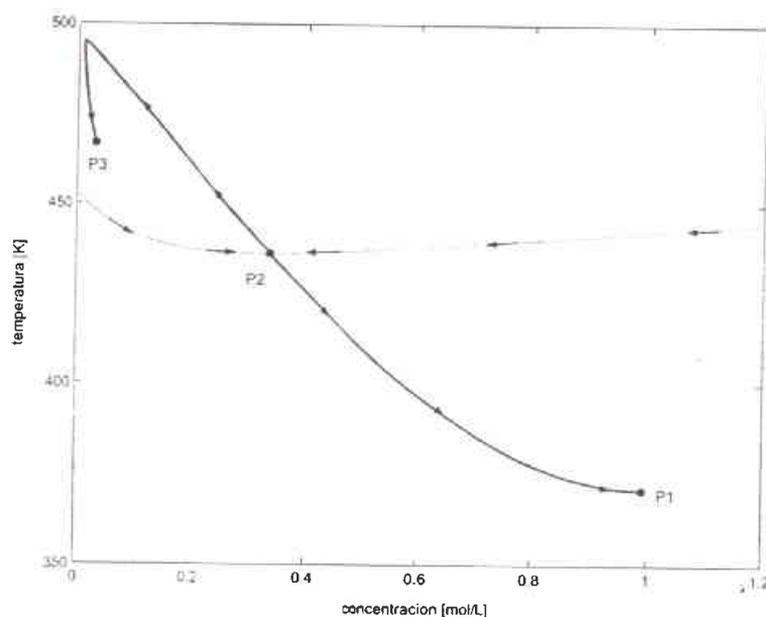


Figura 2.5: Plano de fase a lazo abierto del reactor de prueba.

2.5. Resumen

En este capítulo se presentó a detalle el modelo matemático de la clase de reactores estudiados y del reactor de prueba utilizado para el análisis y la simulación. La clase de reactores estudiados son los denominados STR de reacción simple. En esta clase de reactores, donde se considera agitación uniforme, ocurre una reacción exotérmica y el calor generado es removido por medio de una camisa de enfriamiento, cuya dinámica se

desprecia al considerar una temperatura uniforme dentro de la camisa. En particular el reactor de prueba utilizado es un CSTR, es decir un STR operado en forma continua por lo que el volumen de material dentro del reactor permanece constante y con ello el modelo en variables de estado se reduce solo a dos estados: la concentración del producto y la temperatura dentro del reactor. El modelo matemático considera una velocidad de reacción no monótona debido a un efecto de inhibición en la reacción cuando la concentración es grande. Las condiciones de operación del reactor de prueba a lazo abierto son tales que presenta tres puntos de equilibrio, dos de los cuales son estables y uno inestable. Dado el principio de conservación de materia y energía todas las posibles trayectorias de estado pueden ser acotadas en un conjunto invariante. Por esta razón en lazo abierto todas las posibles trayectorias solo dependerán de las condiciones iniciales del sistema y siempre que las entradas del sistema estén acotadas tenderán a uno de los puntos de equilibrio.

Capítulo 3

Análisis de la observabilidad y detectabilidad de la clase de reactores estudiados

En este capítulo se caracteriza la propiedad de observabilidad y detectabilidad de la clase de reactores estudiados de acuerdo a varias definiciones de observabilidad y detectabilidad pertinentes y existentes.

Ya que la observabilidad y detectabilidad son propiedades estructurales del modelo matemático de un sistema [11], y no del propio sistema, en este capítulo se explota la idea de utilizar para el estimador de estados un modelo matemático con características que beneficien y faciliten el trabajo de éste. Por esta razón la caracterización se hace para dos modelos que representan la clase de reactores estudiados. El primer modelo (2.3.2) es el visto en el capítulo anterior y consta de dos estados. Este modelo, al que se denomina nominal, presenta un mapa de observabilidad mal condicionado en una región de operación del espacio de estados. El segundo modelo se determinó basándose en el trabajo de [11] y es un modelo expandido, pues cuenta con un estado adicional: el valor instantáneo de la velocidad de reacción. Este modelo tiene una estructura que elimina el mal condicionamiento del mapa de observabilidad para una parte de la dinámica del reactor.

3.1. Observabilidad

La propiedad de observabilidad es esencial para el diseño de observadores de sistemas no lineales [25]. Existen diferentes definiciones de observabilidad para sistemas no lineales [15], [36] sin embargo aquí sólo se considerarán algunas de ellas. Los observadores de estado de sistemas no lineales están basados en estas diferentes definiciones o tipos de observabilidad. Si se intenta diseñar un observador de estados para este tipo de sistemas primero se debe verificar que éste cumpla la definición en la que está basado el observador. Para un sistema no lineal la definición genérica de observabilidad se basa en el concepto de indistinguibilidad de dos estados [28].

Definición 3.1.1 [28] *Dos estados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son indistinguibles para el sistema no lineal (2.3.6) si para toda función de entrada $u_{[0,t]}$ para la que exista solución de (2.3.4) las funciones de salida son exactamente iguales $y(\mathbf{x}_1, u) = y(\mathbf{x}_2, u)$. Se dice que el sistema (2.3.6) es observable si la indistinguibilidad de cualquier pareja de estados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ implica que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.*

Dicho de otra manera, si existe al menos una función de entrada para cada pareja de estados iniciales que permita distinguirlos mediante la observación de su salida entonces el sistema es observable.

Otra definición útil es la de observabilidad completa u observabilidad para toda entrada, que permite definir las *entradas malas*.

Definición 3.1.2 [29] *El sistema no lineal (2.3.6) es completamente observable (u observable para toda entrada) si cualquier función de entrada en un intervalo $u_{[0,t]} \in C^\infty$ cumple:*

Existe un $t \geq 0$ tal que $h(\check{\mathbf{x}}_1) \neq h(\check{\mathbf{x}}_2)$, para todo $\check{\mathbf{x}}_1, \check{\mathbf{x}}_2$ que pertenezca a D , y $\check{\mathbf{x}}_1 \neq \check{\mathbf{x}}_2$

A las funciones de entrada que hacen que el sistema no sea completamente observable se les llama *entradas malas*.

3.2. Observabilidad Instantánea

La observabilidad instantánea implica que para cada instante de tiempo es posible reconstruir el estado del sistema a través del mapa de observabilidad no lineal $\phi(x, u, d)$. Éste se construye tomando la salida y $n - 1$ de sus derivadas direccionales del modo siguiente :

$$\phi(x, u, d) = \begin{bmatrix} L_f^0 h(x) \\ L_f^1 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

donde $L_f^i h(x)$ es la i -ésima derivada direccional del campo escalar $h(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$ que cumple:

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f^i h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f + \frac{\partial h(x)}{\partial t} \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$L_f^{i+1} h(x) = L_f (L_f^i h(x)) \quad (3.2.2)$$

Si el mapa $\phi(x, u, d)$ es invertible para los estados x entonces el sistema es observable.

3.3. Observabilidad local

La observabilidad local es una propiedad basada en la matriz de observabilidad no lineal O_{NL} . Ésta se forma encontrando el Jacobiano del mapa de observabilidad $\phi(c, T)$.

$$O_{NL} = \frac{\partial \phi(c, T)}{\partial (c, T)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial c} & \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial c} & \frac{\partial \phi_2}{\partial T} \end{bmatrix}$$

Si la matriz de observabilidad tiene rango completo entonces el sistema es localmente observable. Esto significa que el mapa de observabilidad es un difeomorfismo local.

3.4. Observabilidad linealizada (completa e instantánea)

La observabilidad linealizada está basada en la linealización del modelo del sistema alrededor de una trayectoria del estado $\tilde{x}(t)$ (o incluso un punto de operación) definida por una entrada particular del sistema $\tilde{u}(t)$ y la condición inicial del estado $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= f(\tilde{x}, \tilde{u}) \\ \tilde{y} &= h(\tilde{x})\end{aligned}$$

Si el modelo linealizado cumple una clase de observabilidad entonces se dice que el sistema no lineal tiene este tipo de observabilidad alrededor de la trayectoria (o del punto de operación). Dado el carácter local de la linealización del sistema cualquier tipo de observabilidad linealizada sólo se garantiza localmente. Para obtener la linealización del sistema no lineal (2.3.4) se propone un sistema aproximado con estado $\chi(t)$, salida $\psi(t)$ y condición inicial $\chi(0) = \chi_0$ el cual tiene la misma entrada $\tilde{u}(t)$ que el sistema original.

$$\begin{aligned}\dot{\chi}(t) &= f(\chi, \tilde{u}) \\ \psi(t) &= h(\chi)\end{aligned}$$

definiendo el error entre ambas trayectorias y ambas salidas

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{x}(t) - \chi(t) \\ \tilde{y} &= \tilde{y}(t) - \psi(t)\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

se obtiene el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{\tilde{x}}(t) - \dot{\chi}(t) = f(\tilde{x}, \tilde{u}) - f(\chi, \tilde{u}) = f(\chi + \tilde{x}, \tilde{u}) - f(\chi, \tilde{u}) \\ \tilde{y} &= h(\tilde{x}) - h(\chi) = h(\chi + \tilde{x}) - h(\chi).\end{aligned}$$

Haciendo la linealización del sistema y desarrollando las funciones en serie de Taylor, despreciando términos de orden superior se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \left(\frac{\partial f(\chi, \tilde{u})}{\partial x} \right)_{\chi=\tilde{x}(t)} \tilde{x} \\ \tilde{y} &= \left(\frac{\partial h(\chi)}{\partial x} \right)_{\chi=\tilde{x}(t)} \tilde{x}.\end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f(\chi, \tilde{u})}{\partial x} \right)_{\chi=\tilde{x}(t)} &= A(t) \\ \left(\frac{\partial h(\chi)}{\partial x} \right)_{\chi=\tilde{x}(t)} &= C(t)\end{aligned}$$

se tiene el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A(t)\tilde{x} \\ \tilde{y} &= C(t)\tilde{x}.\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

La solución de este sistema linealizado variante con el tiempo (3.4.2) esta dada por:

$$\tilde{x} = \Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0)$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados [30]. Sustituyendo este valor en la ecuación de salida de (3.4.2) se obtiene

$$\tilde{y} = C(t)\Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0).\tag{3.4.3}$$

Esta ecuación algebraica representa un sistema con n incógnitas que corresponden a las componentes del estado inicial del sistema $\tilde{x}(t_0)$. Si la función matricial $C(t)\Phi(t, t_0)$ tiene n funciones linealmente independientes entonces es posible determinar completa y unívocamente el estado inicial del sistema. Por esta razón la observabilidad para un sistema lineal variante en el tiempo esta dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1 [30] *La ecuación dinámica lineal variante en el tiempo (3.4.1) es observable en t_0 si y solo si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ en el que las n columnas de la función matricial $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)$ de dimensión $m \times n$ sean linealmente independientes en $[t_0, t_1]$.*

La independencia lineal de un conjunto de funciones es una propiedad asociada con un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, es decir, las funciones pueden ser linealmente dependientes o independientes supeditadas al intervalo de tiempo considerado. Una forma de probar la independencia lineal de un conjunto de funciones en un intervalo de tiempo es utilizando el siguiente teorema:

Teorema 3.4.2 [30] Sea f_i desde $i = 1, 2, \dots, n$, funciones continuas de dimensión $1 \times m$ definidas en $[t_0, t_1]$. Sea F la matriz de dimensión $n \times m$ formada por las f_i filas. Defínase la matriz de dimensión $n \times n$:

$$W(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} F(t)F^T(t) dt$$

Las funciones f_i son linealmente independientes entre sí en $[t_0, t_1]$ si y solo si $W(t_0, t_1)$ es no singular.

Para utilizar este teorema se multiplica ambos lados de (3.4.3) por $\Phi^T(t, t_0)C^T(t)$ y se integra en el intervalo de interés.

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)\tilde{y}(t)dt = \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt \right] \tilde{x}(t_0)$$

El lado izquierdo de esta igualdad es una integral definida que siempre puede ser evaluada. Definiendo la matriz entre corchetes como:

$$W_O(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt \quad (3.4.4)$$

Si el sistema es observable utilizando el teorema con $F^T(t) = C(t)\Phi(t, t_0)$ resulta que $W_O(t_0, t_1)$ es invertible y es posible encontrar una solución única para $\tilde{x}(t_0)$, dada por:

$$W_O^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)C^T\tilde{y}(t)dt = \tilde{x}(t_0)$$

La función matricial $W_O(t_0, t_1)$ es conocida como matriz de observabilidad de primer tipo (o Grammiano de observabilidad) y se utiliza para determinar la observabilidad de un sistema lineal variante en el tiempo en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$:

Teorema 3.4.3 [27] *El sistema (3.4.2) es observable en el intervalo $[t_0, t_1]$ si y sólo si la función matricial $W_O(t_0, t)$ definida en (3.4.4) es no singular.*

A este tipo de observabilidad se le conoce como observabilidad completa en el intervalo $[t_0, t_1]$, ya que no sólo es posible determinar el estado inicial $\tilde{x}(t_0)$ sino cualquier otro estado dentro del intervalo. Si la linealización del sistema no lineal alrededor de una trayectoria es completamente observable se dice entonces que el sistema no lineal es completa y linealizablemente observable. Esta noción de observabilidad esta definida para un intervalo de tiempo porque se necesita de redundancia en la información para poder compensar zonas de una trayectoria de estados, donde la información de la observabilidad es poca o totalmente nula.

Existe otra forma de determinar la matriz de observabilidad $W_O(t_0, t_1)$, a partir de la derivada temporal de (3.4.4). Aplicando ciertas reglas de producto y propiedades de matrices es posible llegar a la siguiente ecuación [27]:

$$\frac{d}{dt}W_O^{-1}(t, t_0) = A(t)W_O^{-1}(t, t_0) + W_O^{-1}(t, t_0)A^T(t) - W_O^{-1}(t, t_0)C^T(t)C(t)W_O^{-1}(t, t_0)$$

Esta es una ecuación matricial diferencial tipo Ricatti definida en $[t_0, t]$ que tiene solución cuando ha transcurrido el tiempo suficiente para que el sistema tenga observabilidad completa [27].

Para sistemas lineales existe otra forma de obtener una igualdad como (3.4.3) con n ecuaciones linealmente independientes para un intervalo $[t_0, t_1]$, y garantizar la observabilidad completa [30]. Esta forma consiste en tomar la salida en un instante de tiempo $\tilde{y}(t_a)$ y q derivadas temporales. Haciendo esto con el sistema variante en el tiempo (3.4.2) se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t_a) &= C(t_a)\tilde{x} = N_0(t_a)\tilde{x}(t_a) \\ \dot{\tilde{y}}(t_a) &= C(t_a)\dot{\tilde{x}} + \dot{C}(t_a)\tilde{x} = \left[C(t_a)A(t_a) + \dot{C}(t_a) \right] \tilde{x} = N_1(t_a)\tilde{x}(t_a) \\ \ddot{\tilde{y}}(t_a) &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[C(t_a)A(t_a) + \dot{C}(t_a) \right] \tilde{x} \right\} = N_2(t_a)\tilde{x}(t_a) \\ &\vdots \\ \overset{(q)}{\tilde{y}}(t_a) &= N_q(t_a)\tilde{x}(t_a)\end{aligned}$$

donde los operadores $N_k(t)$ se definen como:

$$N_0(t) = C(t)$$

$$N_{k-1}(t) = N_k(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_k(t)$$

El sistema puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(t_a) \\ \dot{\tilde{y}}(t_a) \\ \ddot{\tilde{y}}(t_a) \\ \vdots \\ \overset{q}{\tilde{y}}(t_a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0(t_a) \\ N_1(t_a) \\ N_2(t_a) \\ \vdots \\ N_q(t_a) \end{bmatrix} \tilde{x}(t_a).$$

De este sistema de q ecuaciones vectoriales se puede determinar unívocamente el estado $\tilde{x}(t_a)$ si se cumplen las condiciones del siguiente teorema:

Teorema 3.4.4 [30] *Supóngase que q es un entero positivo tal que para todo $t \in [t_0, t_1]$ las matrices $A(t)$ y $C(t)$ sean $(q-1)$ y q veces continuamente diferenciables, respectivamente. El sistema (3.4.2) es observable en el intervalo $[t_0, t_1]$ si para algún tiempo $t_a \in [t_0, t_1]$ se cumple que*

$$\text{rango} \begin{bmatrix} N_0(t_a) \\ N_1(t_a) \\ N_2(t_a) \\ \vdots \\ N_q(t_a) \end{bmatrix} = n$$

Este teorema también impone una condición supeditada a un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, que es necesaria para lograr la independencia lineal de las funciones que la forman. Se puede apreciar que es una condición más fuerte que la que exige la matriz de observabilidad de primer tipo, por lo que ésta última implica la primera. Sin embargo esta condición sólo es suficiente para garantizar la observabilidad completa en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, mientras que la dada por el teorema 6 es condición suficiente y necesaria.

Dadas las definiciones de observabilidad completa puede ser posible que un sistema sea completamente observable en un intervalo de tiempo determinado y que al reducir el intervalo se pierda la observabilidad al no lograrse suficiente independencia lineal de las funciones. Sin embargo, también puede ocurrir que el sistema siga siendo observable con un intervalo de tiempo extremadamente pequeño. En el límite, este tipo de observabilidad es denominada instantánea. Si un sistema tiene la propiedad de ser instantáneamente observable para todo tiempo entonces la propiedad de observabilidad no está supeditada a un intervalo de tiempo [31].

Para probar si un sistema lineal variante en el tiempo posee este tipo de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad de segundo tipo O_L que es la matriz dada por el Teorema 3.4.4 con $q = n - 1$ es decir

$$[O_L] = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ \vdots \\ N_{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Las condiciones de observabilidad instantánea están dadas por el siguiente teorema.

Teorema 3.4.5 [31] *Supóngase que las matrices $A(\cdot)$ y $C(\cdot)$ del sistema (3.4.2) son continuamente diferenciables $(n - 1)$ veces. El sistema (3.4.2) es instantáneamente observable para todo tiempo si*

$$\text{rango} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \text{rango} [O_L(t)] = n \quad \forall t \in (-\infty, \infty) \quad (3.4.5)$$

La propiedad de observabilidad instantánea exige condiciones más fuertes, pues no requiere de un intervalo de tiempo determinado. Además, si se cumple entonces el sistema es observable en cualquier tiempo.

3.5. Detectabilidad

El concepto de detectabilidad parte de la definición de estados indistinguibles, es decir, de estados que generan trayectorias internas (de estado) diferentes a pesar de tener el mismo comportamiento de entrada/salida [34]. Si todas las posibles trayectorias de estados iniciales indistinguibles convergen entre sí, se dice entonces, que el sistema es detectable. A continuación se presenta la definición de detectabilidad:

Definición 3.5.1 [37] *Considere para el sistema (2.3.4) una entrada $u(\cdot)$ y $d(\cdot)$, y una condición inicial $x \in \mathbb{R}^n$ y cuya solución es $x(t) = \Phi(x_0, u(\cdot), d(\cdot))$ y salida $y(t) = \varphi(x_0, u(\cdot), d(\cdot))$. Considérese un estado \check{x} tal que $\varphi(x, u(\cdot), d(\cdot)) = \varphi(\check{x}, u(\cdot), d(\cdot))$ para todo $t \in [0, T)$ para algún $T > 0$. Entonces \check{x} es un estado entrada-indistinguible en el intervalo $[0, T)$. El conjunto de todos los estados entrada-indistinguibles se denota como $\varrho_{(u,d,x)}$. El sistema (2.3.4) es detectable si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface que para cada $\check{x} \in \varrho_{(u,d,x)}$ tal que $T = \infty \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(\check{x}, u(\cdot), d(\cdot)) - \Phi(x, u(\cdot), d(\cdot))\| = 0$.*

Esta definición de detectabilidad, al igual que la definición genérica de observabilidad, es una característica global y no instantánea. Otra definición útil de detectabilidad es la siguiente:

Definición 3.5.2 [38] *Considere para el sistema (2.3.4) una entrada $u(\cdot)$ y $d(\cdot)$ tal que $y(t) \rightarrow 0$. El sistema (2.3.4) es observable si: $y(t) \xrightarrow{ar} 0 \implies x(t) \xrightarrow{ar} 0$.*

El sistema es detectable si: $y(t) \xrightarrow{ar} 0 \implies x(t) \rightarrow 0$.

Donde ar significa arbitrariamente rápido.

3.6. Caracterización del modelo nominal del reactor

A continuación se caracterizan las definiciones anteriores para el modelo nominal del la clase de reactores estudiados (2.3.2). Considérese el caso donde se tienen dos estados iniciales diferentes $\check{x}_1 = [c_1(0), T_1(0)]^T \neq \check{x}_2 = [c_2(0), T_2(0)]^T$ con la misma

salida $T_1(t) = T_2(t) = T(t)$, esto implica que $T_1(0) = T_2(0) = T(0)$. Dado el modelo matemático de la velocidad de reacción (2.4.1) es posible tener en el tiempo $t = 0$ lo siguiente:

$$\begin{aligned}\rho(c_1(0), T(0)) &= \rho(c_2(0), T(0)) \\ c_1(0) &\neq c_2(0).\end{aligned}$$

Es decir, un valor instantáneo de velocidad de reacción igual a pesar de tener dos concentraciones diferentes. Sin embargo, si se escoge la entrada del sistema igual a cero $u_0 = 0$ y $d_0 = 0$ se tiene que $\dot{c}_1 \neq \dot{c}_2$ por lo tanto un instante después de esta condición

$$\begin{aligned}\rho(c_1(0^+), T(0^+)) &\neq \rho(c_2(0^+), T(0^+)) \\ T_1(0^+) &\neq T_2(0^+) \\ \dot{T}_1(0^+) &\neq \dot{T}_2(0^+)\end{aligned}$$

y por lo tanto $y(\check{x}_1, u_0) \neq y(\check{x}_2, u_0)$. Como existe al menos una entrada u_0, d_0 con la cual se pueden distinguir cualesquiera dos estados iniciales, el modelo del sistema es observable. Cabe señalar que una entrada $u_0 = 0$ y $d_0 = 0$ implica que las temperaturas T_e y T_j son exactamente igual a cero grados Kelvin, lo que no tiene un sentido físico. Sin embargo en forma estricta y viéndolo desde el punto de vista matemático el modelo nominal del sistema es observable.

Para la clase de reactores estudiados, considérese de nuevo el caso donde se tienen dos sistemas idénticos (S_1 y S_2) con estados iniciales diferentes $\check{x}_1 = [c_1(0), T_1(0)]^T \neq \check{x}_2 = [c_2(0), T_2(0)]^T$ con $T_1(0) = T_2(0)$. De nueva cuenta, dado el modelo matemático de la velocidad de reacción (2.4.1) si a ambos sistemas se le aplica una entrada mala se genera en ambos la misma salida $T_1 = T_2 = T$. Para el sistema S_1

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= -\rho(c_1, T) + u_q(d_1 - c_1) \\ \dot{T}_1 &= \beta\rho(c_1, T) + u_q(d_2 - T) - \delta(T - u_j) \\ y_1 &= T\end{aligned}\tag{3.6.1}$$

mientras que para el sistema S_2

$$\dot{c}_2 = -\rho(c_2, T) + u_q(d_1 - c_2) \quad (3.6.2)$$

$$\dot{T}_2 = \beta\rho(c_2, T) + u_q(d_2 - T) - \delta(T - u_j)$$

$$y_2 = T.$$

Por lo tanto las trayectorias indistinguibles que se generan en ambos casos tienen $\rho(c_1, T) = \rho(c_2, T)$ y, dado que esta función no es monótona, no es posible concluir que $c_1 = c_2$. Restando las ecuaciones de concentración de ambos sistemas se obtiene que a lo largo de estas trayectorias indistinguibles:

$$(\dot{c}_1 - \dot{c}_2) + \theta(c_1 - c_2) = 0 \quad (3.6.3)$$

Si θ es positivo (que para cualquier reactor se cumple pues θ es el inverso del tiempo de residencia) esta ecuación lineal (3.6.3) tiene al origen como punto de equilibrio asintóticamente estable. De este modo se comprueba que dos trayectorias indistinguibles tienen la misma temperatura y las concentraciones convergen entre sí, por lo tanto el modelo de la clase de reactores estudiados es detectable.

Siguiendo con el análisis anterior, considérese el caso donde se tienen dos sistemas idénticos (S_1 y S_2) cada uno con un estado inicial diferente $[c_1(0), T_1(0)]^T \neq [c_2(0), T_2(0)]^T$ con $T_1(0) = T_2(0)$. Si bajo estas condiciones se le introduce una entrada mala a ambos sistemas se generarán entonces la mismas salidas $T_1(t) = T_2(t) = T(t)$. Para el sistema S_1 se tiene

$$\dot{c}_1 = -\rho(c_1, T) + u_q(d_1 - c_1) \quad (3.6.4)$$

$$\dot{T}_1 = \beta\rho(c_1, T) + u_q(d_2 - T) - \delta(T - u_j)$$

$$y_1 = T$$

Para el sistema S_2

$$\dot{c}_2 = -\rho(c_2, T) - u_q(d_1 - c_2) \quad (3.6.5)$$

$$\dot{T}_2 = \beta\rho(c_2, T) + u_q(d_2 - T) - \delta(T - u_j)$$

$$y_2 = T$$

De (3.6.4) y (3.6.5) se puede encontrar que para las trayectorias generadas por ambos sistemas se cumple que $\rho(c_1, T) = \rho(c_2, T)$. Tomando la diferencia de las concentraciones en ambos casos como $\tilde{c} = c_2 - c_1$ se tiene $\rho(c_1 + \tilde{c}, T) = \rho(c_1, T)$. Ahora bien, si el valor de estas funciones es igual en todo momento, entonces su variación respecto al tiempo también será igual, es decir $\dot{\rho}(c_1 + \tilde{c}, T) = \dot{\rho}(c_1, T)$. De esta igualdad se obtiene:

$$\frac{\partial \rho(c_1 + \tilde{c}, T)}{\partial c} (\dot{c}_1 + \dot{\tilde{c}}) - \frac{\partial \rho(c_1 + \tilde{c}, T)}{\partial T} (\dot{T}) = \frac{\partial \rho(c_1, T)}{\partial c} (\dot{c}_1) + \frac{\partial \rho(c_1, T)}{\partial T} (\dot{T})$$

Sustituyendo el valor de las variables derivadas y despejando para $d_1 = c_e$ se obtiene:

$$c_e = \frac{1}{\theta \left(\frac{\partial \rho(c_1 + \tilde{c}, T)}{\partial c} - \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} \right)} \left[-\frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} \theta c_1 + \left(\frac{\partial \rho(c_1, T)}{\partial T} - \frac{\partial \rho(c_1 + \tilde{c}, T)}{\partial T} \right) (\beta\rho(c_1, T) - \dots \right. \\ \left. \dots \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j)) - \frac{\partial \rho(c_1 + \tilde{c}, T)}{\partial c} \theta(c_e - c_1) \right].$$

Esta igualdad define una familia de entradas malas del sistema, lo que provoca que el sistema no sea observable para toda entrada.

Por otro lado, analizando la observabilidad instantánea del modelo matemático nominal del sistema se tiene con $n = 2$:

$$\phi(c, T) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f^1 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ \beta\rho(c, T) + u_q(d_2 - T) - \delta(T - u_j) \end{bmatrix} \quad (3.6.6)$$

Si este mapa de observabilidad es invertible, entonces el sistema tiene observabilidad instantánea. Si esto ocurre entonces debe ser posible despejar unívocamente el estado (c, T) como función de las salidas y sus $n - 1$ derivadas, es decir:

$$\begin{bmatrix} T \\ \rho(c, T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{1}{3} [\dot{y} - u_q(d_2 - T) + \delta(T - u_j)] \end{bmatrix}$$

De aquí se puede observar que para encontrar el valor de c se requiere invertir la función $\rho(c, T)$ con respecto a c , y dado que esta función es no monótona esto no se puede hacer en forma unívoca. Entonces, para cada valor de T siempre existen dos valores de velocidad de reacción $\rho(c_1, T) = \rho(c_2, T)$. Por lo tanto el modelo del sistema no es instantáneamente observable.

Para la clase de reactores estudiados la matriz de observabilidad no lineal es:

$$O_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial c} & \frac{\partial T}{\partial T} \\ \frac{\partial \rho}{\partial c} & \frac{\partial \rho}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} & \beta \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial T} - u_q - \delta \end{bmatrix} \quad (3.6.7)$$

Para que la matriz tenga rango completo ésta debe cumplir que $\text{rango}[O_{NL}] = n = 2$.

Por lo tanto el modelo del sistema es localmente observable si y solamente si:

$$\frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} \neq 0$$

Se puede notar que esta condición se cumple en todos los puntos excepto en la curva formada por los puntos donde $\rho(\cdot, T)$ alcanza su valor máximo. Por lo tanto el modelo del sistema tiene una región que no es localmente observable en cualquiera de esos puntos.

Para determinar si la clase de reactores estudiados es linealmente observable se obtienen las matrices $A(t)$ y $C(t)$ del sistema (3.4.2) y con ellas la matriz de observabilidad de segundo tipo O_L .

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[O_L] = \begin{bmatrix} C(t) \\ C(t)A(t) - \dot{C}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo el valor de las parciales se tiene:

$$[O_L] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} & \beta \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial T} - u_q - \delta \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene $\text{rango}[O_L(t)] = n = 2$ en todo el espacio de estados, excepto si:

$$\frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} = 0 \quad (3.6.8)$$

Por lo tanto el modelo del sistema pierde observabilidad instantánea en todos los puntos que forman la curva donde $\rho(\cdot, T)$ alcanza su valor máximo. Como se puede notar la condición de observabilidad instantánea linealizada en este caso coincide con la condición de observabilidad local no lineal. La curva donde la velocidad de reacción alcanza su valor máximo secciona en dos partes el espacio de estados (Fig. 3.1) que queda dividido para cada temperatura por el máximo $c^*(t)$ donde:

$$\left(\frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} \right)_{(c^*, T)} = 0 \quad (3.6.9)$$

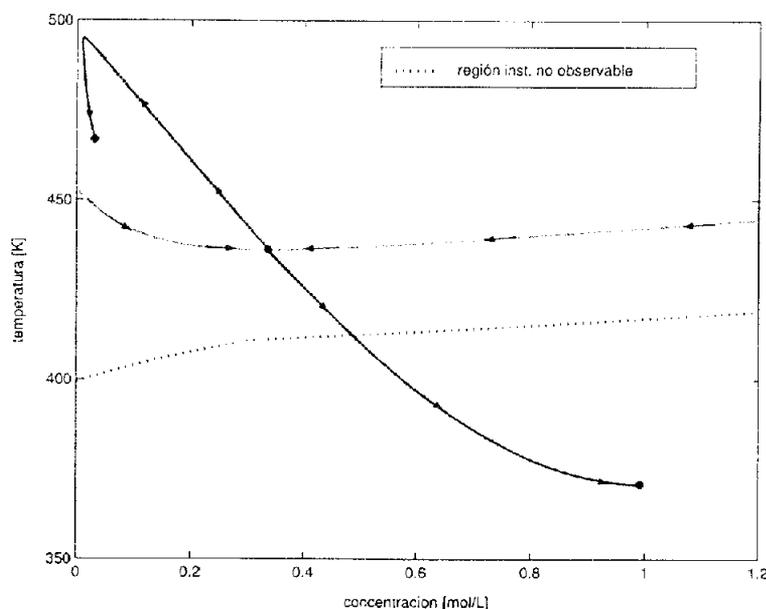


Figura 3.1: Plano de fase mostrando región instantáneamente no observable.

Si la trayectoria de estados no cruza por algún punto de esta curva entonces el modelo nominal linealizado es instantáneamente observable y por ende completamente observable para cualquier intervalo y tiempo. Sin embargo, si las condiciones iniciales y las entradas del sistema son tales que la trayectoria de estados cruza por algún punto

de la región entonces el modelo nominal linealizado del sistema pierde observabilidad instantánea en ese punto y vuelve a recuperarla al pasar la región. Por lo tanto si una trayectoria de estados, aún con un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ arbitrariamente pequeño, tiene al menos un punto que no pertenezca a la región instantáneamente no observable entonces es completamente observable en $[t_0, t_1]$. Esto está garantizado por el Teorema 3.4.5. En la práctica conforme el intervalo se va haciendo más pequeño la observación del estado se va haciendo cada vez más incierta, pues un intervalo de integración pequeño genera una matriz Grammiana casi singular y más aún si el intervalo de integración contiene un punto instantáneamente no observable. Si una trayectoria de estados no cruza, sino es tal que se mantiene sobre la región instantáneamente no observable más que en un sólo punto, se volverá muy difícil tener observación completa del sistema. En el límite si la trayectoria nunca abandona la región instantáneamente no observable no es posible tener observación completa del sistema para ningún intervalo de tiempo escogido.

3.7. Caracterización del modelo expandido.

En esta sección se caracterizan la observabilidad instantánea y la detectabilidad de un modelo expandido de la clase de reactores estudiados. El modelo expandido busca explotar la propiedad de observabilidad instantánea que tiene la función $\rho(c, T)$, como ya se vió en la sección anterior, y lograr una estructura de estimación pasiva donde se obtiene una dinámica observable y una dinámica no observable pero estable [11].

El modelo expandido se obtiene del modelo nominal (2.3.1) añadiendo la dinámica de la velocidad de reacción $\dot{r} = \frac{d\rho(c, T)}{dt}$ como un nuevo estado.

$$\dot{c} = -r + \theta(c_e - c) \quad (3.7.1)$$

$$\dot{T} = \beta r + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j) \quad (3.7.2)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} [-r + \theta(c_e - c)] + \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial T} [\beta r + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j)]$$

$$r = \rho(c, T)$$

Para que este modelo extendido sea equivalente al nominal se requiere que las condi-

ciones iniciales se encuentren dentro de una subvariedad de \mathbb{R}^3 definida por $r = \rho(c, T)$, es decir, el valor instantáneo de la velocidad de reacción.

El modelo extendido se puede particionar en una parte observable \mathbf{x}_O y otra parte no observable \mathbf{x}_{NO}

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_O \\ \mathbf{x}_{NO} \end{bmatrix}.$$

es decir:

$$\dot{\mathbf{x}}_O = \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta r + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j) \\ \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} [-r + \theta(T_e - T)] + \frac{\partial \rho(c, T)}{\partial T} [\beta r + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j)] \end{bmatrix} \quad (3.7.3)$$

$$y_O = T \quad (3.7.4)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{NO} = \dot{c} = -r + \theta(c_e - c) \quad (3.7.5)$$

$$y_{NO} = r \quad (3.7.6)$$

La desventaja de este modelo es que requiere del conocimiento de la función $\rho(c, T)$ y sus derivadas para determinar la dinámica de r . Como ya se ha visto, en la práctica la función velocidad de reacción es altamente incierta. Sin embargo el análisis calorimétrico [6] afirma que es posible determinar r , de una dinámica observable, siempre y cuando su dinámica sea nula:

$$\dot{r} = 0 \quad (3.7.7)$$

En sentido estricto esto no es cierto porque aunque la variación con respecto al tiempo puede hacerse pequeña, haciendo relativamente pequeño el intervalo de medición de temperatura, nunca es exactamente igual a cero. Sin embargo, en este trabajo se considera que la dinámica es *prácticamente* nula $\dot{r} \approx 0$, es decir que la variación del valor de velocidad de reacción entre dos mediciones de temperatura con respecto al tiempo es enormemente pequeña. De este modo la dinámica de \mathbf{x}_O es:

$$[\dot{\mathbf{x}}_O] = \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta r + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7.8)$$

Para analizar la observabilidad instantánea de \mathbf{x}_O se obtiene la matriz de observabilidad no lineal con el mapa de salidas de y_O .

$$O_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial T} & \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial \dot{T}}{\partial T} & \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta - \delta & \beta \end{bmatrix}.$$

Para que la matriz O_{NL} tenga rango completo ésta debe cumplir que $\text{rango}[O_{NL}] = n = 2$, por lo tanto \mathbf{x}_O es observable si y solamente si:

$$\beta \neq 0$$

Esto ocurre para todos los reactores químicos, ya que β es un coeficiente con valor siempre positivo, por lo tanto \mathbf{x}_O es instantáneamente observable.

Para la dinámica no observable \mathbf{x}_{NO} se tiene una dinámica parcial (??) que corresponde a la dinámica cero del modelo nominal con un grado relativo uno con respecto al mapa de entrada-salida $u_j \rightarrow T$. Para analizar esta dinámica considérese que se tienen dos sistemas idénticos (S_{1NO}, S_{2NO}) con estados iniciales diferentes $\check{\mathbf{x}}_{1NO} = c_1(0) \neq \check{\mathbf{x}}_{2NO} = c_2(0)$. Para cualquier entrada r que se les aplique a los sistemas se tiene $c_1 = c_2$, es decir, la solución de esta dinámica es única, ya que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, y se encontrará del lado correcto de la curva dividida por el máximo de $\rho(\cdot, T)$.

3.8. Resumen

En este capítulo se caracterizaron diferentes propiedades de observabilidad y detectabilidad de sistemas no lineales. Se hizo un análisis de la observabilidad y detectabilidad de dos modelos matemáticos de la clase de reactores estudiados. El primer modelo es un modelo nominal que considera una velocidad de reacción conocida. Para este modelo se determinó que dado que existen entradas malas el modelo no es completamente observable. Por otro lado debido a que la velocidad de reacción tiene un

comportamiento no monótono el modelo nominal no es instantáneamente observable. En cuanto a la observabilidad local el modelo nominal tiene una región, determinada por la curva formada por los puntos donde la velocidad de reacción alcanza su valor máximo, donde no es localmente observable. Para el caso del modelo nominal linealizado se determinó que existe una región donde se pierde la observabilidad instantánea y esta región es exactamente donde se pierde la observabilidad local del modelo no lineal. Sin embargo aun con esta pérdida instantánea de observabilidad se determinó que si la trayectoria de estados sólo cruza por esta región en instantes aislados de tiempo, es posible la observación del estado siempre que se tenga un intervalo de tiempo lo suficientemente grande para lograr la independencia lineal de las funciones del Grammiano de observabilidad. Por otro lado, se determinó que el modelo nominal del reactor es detectable ya que las trayectorias indistinguibles convergen entre si. El segundo modelo es un modelo expandido que permite obtener una estructura pasiva de estimación con una dinámica observable y otra no observable. Haciendo la hipótesis de que la dinámica del nuevo estado es prácticamente nula se tiene que la dinámica observable es instantáneamente observable y que un estimador puede determinar la velocidad de reacción. Por último se determinó que la dinámica no observable al tener como entrada el valor instantáneo de velocidad de reacción tiene una solución única que será el valor correcto de concentración.

Capítulo 4

Diseño de observadores para la clase de reactores estudiados

En este capítulo se desarrollan cinco observadores para el modelo de la clase de reactores estudiados basándose en las definiciones de observabilidad y detectabilidad del capítulo anterior. Los dos primeros están basados en el modelo nominal del sistema y han sido ampliamente utilizados para la observación de estados en sistemas no lineales, incluyendo reactores químicos y biológicos: el observador geométrico no lineal [32] y el filtro extendido de Kalman [17].

A continuación se desarrollan dos observadores pasivos basados en el modelo expandido, los cuales están formados por un esquema de estimación en cascada (maestro-esclavo ó primario-secundario) [18]. Ambos esquemas comparten el mismo observador maestro que se encarga de estimar el valor instantáneo de la velocidad de reacción. La diferencia radica en el estimador secundario. En el primer caso se trata de un filtro extendido de Kalman que para su funcionamiento requiere del conocimiento de la velocidad de reacción. Mientras que el segundo es un estimador a lazo abierto que no requiere del conocimiento de esta función.

Estos observadores pasivos dan como resultado un sistema dinámico de observación más pequeño que el filtro extendido de Kalman (con tres ecuaciones diferenciales en lugar de cinco) pero conservando la robustez del mismo.

Finalmente se desarrolla un observador asintótico basado en el modelo nominal. Este

observador es capaz de estimar la concentración de producto aún con una velocidad de reacción desconocida. El diseño propuesto por [7] esta basado en considerar el cambio en la entalpía del reactor y fue propuesto para ser utilizado en reactores químicos y biológicos. Sin embargo, este estimador por si sólo no puede ser utilizado directamente para control por retroalimentación de salidas ya que para determinar la entrada de control se necesita conocer la velocidad de reacción.

4.1. Observador Geométrico no lineal

Como se vio en el capítulo anterior dado que el modelo nominal de la clase de reactores estudiados es localmente observable, siempre que la trayectoria de estados no cruce por la región instantáneamente no observable, es posible diseñar un observador geométrico no lineal que funcione en forma local. El diseño de este observador tiene tres etapas [32],[15]. Primero se transforma al sistema, mediante un difeomorfismo, a la forma canónica observable. A continuación, se diseña el observador en las nuevas coordenadas. Por último, el observador diseñado se transforma a las coordenadas originales. A continuación se presenta el diseño del observador para la clase de reactores estudiados (2.3.1).

Utilizando el mapa de observabilidad (3.6.6) se hace un cambio de coordenadas haciendo $z = \phi(x, u)$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1 = y = T \\ z_2 &= \phi_2 = \dot{y} = \beta\rho(c, T) + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j). \end{aligned}$$

El sistema en las nuevas variables de estado es:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 = \beta\rho(c, T) + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j) \\ \dot{z}_2 &= \ddot{y} = \beta \left[\frac{\partial\rho(c, T)}{\partial c} \dot{c} + \frac{\partial\rho(c, T)}{\partial T} \dot{T} \right] + \theta(\dot{T}_e - \dot{T}) - \delta(\dot{T} - \dot{T}_j). \end{aligned}$$

En forma compacta el sistema se puede escribir en la forma canónica observable:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \Gamma z + \Pi\varphi(z, \dot{u}, d) \\ y &= \delta z \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

donde:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\varphi(z, \dot{u}, \dot{d})$ es una función no lineal del nuevo estado, de la entrada y $n - 1$ de sus derivadas. Teniendo el sistema en las nuevas coordenadas se diseña el observador dinámico del estado z :

$$\dot{\hat{z}} = \Gamma \hat{z} + \Pi \varphi(\hat{z}, \dot{u}, \dot{d}) + k_0(y - \delta \hat{z}) \quad (4.1.2)$$

Se obtiene la dinámica del error entre el estado real y el estimado restando (4.1.1) de (4.1.2) es decir: $\dot{\tilde{z}} = \dot{z} - \dot{\hat{z}}$

$$\dot{\tilde{z}} = \Gamma \tilde{z} + \Pi \tilde{\varphi} - k_0(y - \delta \tilde{z}) \quad (4.1.3)$$

donde

$$\tilde{\varphi} = \varphi(z, \dot{u}, \dot{d}) - \varphi(z - \tilde{z}, \dot{u}, \dot{d}).$$

Por lo tanto la dinámica del error puede escribirse como:

$$\dot{\tilde{z}} = (\Gamma - k_0 \delta) \tilde{z} + \Pi \tilde{\varphi}. \quad (4.1.4)$$

Para garantizar que el error tienda a cero en forma local se deben cumplir dos condiciones. La primera condición es que el vector de ganancia k_0 sea tal que la matriz $(\Gamma - k_0 \delta)$ sea Hurwitz.

El sistema puede manipularse para lograr que la dinámica del error se comporte como una dinámica lineal de segundo orden. Haciendo $A_0 = (\Gamma - k_0 \delta)$ el sistema se re-escribe como:

$$\dot{\tilde{z}} - A_0 \tilde{z} = \Pi \tilde{\varphi} \quad (4.1.5)$$

y como se tiene un sistema con una sola salida donde $y = \delta z = z_1$ se tiene que:

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \dot{\tilde{y}}$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = \ddot{\tilde{y}}$$

sustituyendo en (4.1.5) se obtiene la dinámica del error de observación como un sistema lineal de segundo orden:

$$\ddot{\tilde{z}} - A_0 \tilde{z} = \ddot{\tilde{y}} + 2\zeta\omega\dot{\tilde{y}} + \omega^2\tilde{y} \cong \Pi\tilde{\varphi} \longrightarrow 0 \quad (4.1.6)$$

De la ecuación (4.1.6) se obtiene el vector de ganancias:

$$k_0 = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega \\ \omega^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.7)$$

La segunda condición de convergencia local del error de este observador está dada por:

$$\zeta\omega > aL^{\tilde{\varphi}}z$$

donde a es el término de amplitud de la matriz en forma de acompañamiento A_0 de la forma vectorial de la dinámica del error (4.1.6), y $L^{\tilde{\varphi}}z$ es el límite de la constante de Lipschitz del mapa no lineal $\tilde{\varphi}$ con respecto a $z = \phi(x)$, [32] es decir:

$$L^{\tilde{\varphi}}z = \sup_t \left[\left| \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, u, \dot{u}, d, \dot{d})}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \phi(x, u, d)}{\partial x} \right|^{-1} \right]$$

Esta condición se debe cumplir para lograr que la ganancia del observador tenga un valor mínimo con el cual garantice que se contrarresta el efecto de la función no lineal $\tilde{\varphi}$.

El observador se transforma a las coordenadas originales mediante la inversión del mapa de observabilidad ϕ , quedando éste como [32]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + g(\hat{x}, u, d, \zeta, \omega)(y - \hat{x}_2) \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \end{aligned}$$

donde el vector de ganancias en las coordenadas originales es:

$$g(\hat{x}, u, d, \zeta, \omega) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \right)^{-1} (\hat{x}, u, d) k_0. \quad (4.1.8)$$

Como se analizó en el capítulo anterior, el mapa de observabilidad no es un difeomorfismo global ya que su inversa se vuelve singular en la región donde $\frac{\partial \phi(c, T)}{\partial c} = 0$. Sin

embargo fuera de esta región se puede usar el mapa $\phi(c, T)$ como transformación local de coordenadas. Calculando el vector de ganancias en coordenadas originales:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-\beta \frac{\partial \rho}{\partial c}} \begin{bmatrix} \beta \frac{\partial \rho}{\partial T} - \theta - \delta & -1 \\ -\beta \frac{\partial \rho}{\partial c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\zeta\omega \\ \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\zeta\omega(-\beta \frac{\partial \rho}{\partial T} + \theta + \delta) + \omega^2}{\beta \frac{\partial \rho}{\partial c}} \\ 2\zeta\omega \end{bmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Se puede observar que la componente g_1 del vector de ganancias tenderá a infinito conforme $\frac{\partial \rho(c, T)}{\partial c} \rightarrow 0$ es decir, conforme la trayectoria de estados se aproxime a la región instantáneamente no observable. Una solución para este problema es saturar el valor de la componente g_1 del vector de ganancias con una cota máxima η arbitrariamente grande cuando la trayectoria se encuentre muy próxima a la región no observable del siguiente modo:

$$g_1 = \begin{cases} \eta & \text{si } \left| \frac{\partial \rho}{\partial c} \right| < \epsilon \\ \frac{2\zeta\omega(-\beta \frac{\partial \rho}{\partial T} + \theta + \delta) + \omega^2}{\beta \frac{\partial \rho}{\partial c}} & \text{si } \left| \frac{\partial \rho}{\partial c} \right| > \epsilon \end{cases}$$

donde ϵ es una cota inferior cuyo tamaño define que tan cerca de la zona no observable se desconecta la componente g_1 del vector de ganancias. Esto permitirá que el observador "pase" esta región no observable sin que la componente g_1 tienda a infinito y que funcione incluso si la trayectoria de estados comienza en la zona no observable.

Cabe señalar que esta solución es meramente práctica y para fines de implementación por lo que no se tomó en cuenta en el análisis anterior.

4.2. Filtro extendido de Kalman

El filtro extendido de Kalman esta basado en una propiedad de observabilidad integral local, pues requiere que el modelo linealizado tenga observabilidad completa en un intervalo $[t_0, t_1]$, es decir, que el Grammiano de observabilidad sea no singular en un intervalo de tiempo. Para el modelo nominal de la clase de reactores estudiados es posible observar localmente los estados con un filtro extendido de Kalman siempre que la trayectoria de los mismos sólo cruce por la región donde se pierde observabilidad instantánea en momentos aislados de tiempo o bien intervalos de tiempo lo suficientemente grandes para lograr la independencia lineal de las funciones del Grammiano de observabilidad [27].

El filtro extendido de Kalman esta basado en optimizar las ganancias de observación en base a las características estocásticas de las perturbaciones y ruidos del sistema, a modo de minimizar la covariancia del error de estimación. Por esta razón, para el diseño de este observador, se debe considerar que el sistema (2.3.4) es afectado con ruido blanco que se introduce al mismo como dos señales aditivas $w(t)$ y $v(t)$ en la ecuación de estados y la ecuación de salida respectivamente (4.2.1).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + w(t) \\ y &= h(x) + v(t)\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

Básicamente, se considera que $w(t)$ engloba incertidumbres y perturbaciones del sistema, y que $v(t)$ es el ruido presente en la medición de la salida [27]. Se asume que estos ruidos tienen las siguientes características: son independientes entre sí, tienen media cero y una variancia dada por las matrices R y Q respectivamente, es decir

$$\begin{aligned}E \{w(t) w(t)^T\} &= R \\ E \{v(t) v(t)^T\} &= Q \\ E \{v(t) w(t)^T\} &= 0 \\ E \{w(t)\} &= 0 \\ E \{v(t)\} &= 0.\end{aligned}$$

A partir de la optimización del sistema (4.2.1) se obtiene el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(t)(y - h(\hat{x})), \quad \hat{x}(0) = x_0.\tag{4.2.2}$$

Donde la matriz de ganancia de retroalimentación de salida $K(t)$ se calcula como:

$$K(t) = P(t)h_x(\hat{x})^T R^{-1}\tag{4.2.3}$$

y la matriz de covariancia del error de estimación $P(t)$ resolviendo la ecuación de Ricatti

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}, u)P(t) + P(t)F^T(\hat{x}, u) + Q - P(t)H^T(\hat{x})R^{-1}H(\hat{x})P(t)\tag{4.2.4}$$

$$P(0) = P_0.$$

donde

$$\begin{aligned}
 F(\hat{x}, u) &= \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}} \\
 H(\hat{x}) &= \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}} \\
 P(t) &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \\
 Q &= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \\
 R &= [r_{11}].
 \end{aligned}$$

El filtro extendido de Kalman requiere de $n(n+1)/2$ ecuaciones dinámicas. De este modo se forma un sistema dinámico con cinco ecuaciones diferenciales, dos de las cuales corresponden a los estados estimados y tres asociadas con los elementos de la matriz de covariancia del error de estimación:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= f_1(x) + \frac{\sigma_{12}}{r_{11}}(x_2 - \hat{x}_2) \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(x) + \frac{\sigma_{22}}{r_{11}}(x_2 - \hat{x}_2) \\
 \dot{\sigma}_{11} &= 2 \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \sigma_{12} \right] + q_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{r_{11}} \\
 \dot{\sigma}_{22} &= 2 \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \sigma_{12} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \sigma_{22} \right] + q_{22} - \frac{\sigma_{22}^2}{r_{11}} \\
 \dot{\sigma}_{12} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \sigma_{11} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] \sigma_{12} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \sigma_{22} - \frac{\sigma_{12} \sigma_{22}}{r_{11}}.
 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

El filtro extendido de Kalman, al no estar basado en una propiedad de observabilidad local instantánea, funciona correctamente en la región instantáneamente no observable siempre que sólo se encuentre sobre esta curva en instantes aislados o intervalos breves de tiempo. Matemáticamente esto se puede ver de las ecuaciones dinámicas del filtro pues, en la región no observable donde $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ son cero, existen otros términos en las ecuaciones diferenciales que mantienen funcionando al observador.

4.3. Observadores con estructura pasiva

En esta sección se presenta el diseño de dos observadores con estructura pasiva basados en el modelo expandido. Los observadores tienen un esquema de observación en cascada maestro-esclavo (Fig. 4.1). En ambos casos el observador maestro es un estimador calorimétrico de la dinámica observable del modelo expandido que se encarga de estimar el valor instantáneo de la velocidad de reacción. Este valor calculado se utiliza como la entrada virtual de los observadores esclavos que calculan la concentración en el reactor a partir de la dinámica no observable. En el primer caso el observador esclavo es un filtro extendido de Kalman que requiere del conocimiento de la velocidad de reacción y en el segundo es un observador a lazo abierto que no requiere conocer esta función.

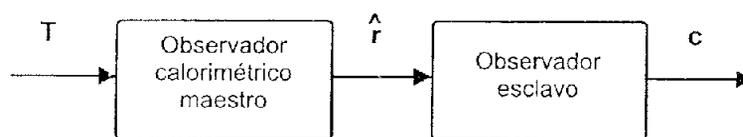


Figura 4.1: Esquema de observación en cascada.

Estimador calorimétrico

Este estimador está basado en el análisis calorimétrico de los balances de materia y energía [6]. En reacciones exotérmicas el análisis calorimétrico permite determinar la velocidad de reacción a partir de la medición de las temperaturas presentes en el balance de energía [14]. Esta idea se basa en explotar la propiedad de observabilidad instantánea de la dinámica observable del modelo expandido para determinar las funciones desconocidas del modelo con ayuda de los estados medidos. Ideas similares han sido utilizadas por [1] en un estimador basado en observador, por [21] en un observador adaptable y por [5] en un observador de Kalman extendido. Estos observadores utilizan como nuevos estados los parámetros desconocidos del sistema, que por lo general son parámetros asociados con las funciones inciertas del mismo. La principal restricción de estos estimadores y del estimador calorimétrico es que el parámetro o función añadido

como estado extendido debe de tener una dinámica prácticamente nula.

El diseño del estimador calorimétrico esta basado en utilizar la dinámica observable del sistema expandido \mathbf{x}_O para estimar la velocidad de reacción, considerando que la dinámica de este estado es prácticamente nula.

$$[\dot{\mathbf{x}}_O] = \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta r + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

$$y_O = T \quad (4.3.2)$$

Ya que \mathbf{x}_O es instantáneamente observable es posible plantear un observador para r . Más aún, la hipótesis de considerar $\dot{r} \approx 0$ permite tratar a la dinámica \mathbf{x}_O como una dinámica lineal, pues originalmente el único término no lineal es la propia velocidad de reacción, y utilizar un observador de Luenberger convencional para estimar r .

$$\begin{aligned} \dot{\hat{T}} &= \beta \hat{r} + \theta(T_e - \hat{T}) - \delta(\hat{T} - T_j) + k_1(t)(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{r}} &= k_2(t)(y - \hat{T}). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Definiendo el error de observación como $\tilde{T} = T - \hat{T}$ y $\tilde{r} = r - \hat{r}$ se encuentra la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{T}} &= \beta \tilde{r} + (-\theta - \delta - k_1) \tilde{T} \\ \dot{\tilde{r}} &= -k_2 \tilde{T}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Manipulando esta dinámica se obtiene:

$$\ddot{\tilde{T}} + (+\theta + \delta + k_1) \dot{\tilde{T}} + (\beta k_2) \tilde{T} = 0$$

Proponiendo el vector de ganancias como:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta_T \omega_T - \theta - \delta \\ \frac{\omega_T^2}{\beta} \end{bmatrix}$$

se obtiene para el error de observación de temperatura una dinámica lineal de segundo orden

$$\ddot{\tilde{T}} + 2\zeta_T \omega_T \dot{\tilde{T}} + \omega_T^2 \tilde{T} = 0.$$

Este error converge a cero con una dinámica dada por ζ_T y ω_T , y como es posible observar de (4.3.4) la convergencia de este error implica la convergencia del error de estimación del valor instantáneo de velocidad de reacción r .

Observadores esclavos

Los observadores esclavos utilizan la dinámica no observable del modelo expandido. Al tener como entrada (virtual) $u_o = \hat{r}$ y como salida $y_o = c$, tienen una estructura pasiva entre la entrada y la salida del observador [16]. Como se vió en el capítulo anterior, si se puede garantizar que $\hat{r} \rightarrow r$ es posible determinar en forma unívoca el valor de concentración.

Filtro de Kalman. Para la dinámica x_{NO} se diseña un filtro extendido de Kalman considerando que el sistema tiene ruidos aditivos en la ecuación de estado y de salida:

$$\dot{c} = -r + \theta(c_e - c) + w(t) \quad (4.3.5)$$

$$y_r = r + v(t).$$

El filtro extendido de Kalman es el siguiente

$$\dot{\hat{c}} = -r + \theta(c_e - \hat{c}) + g(\hat{c}, \hat{T}, \sigma)(\rho(c, T) - \rho(\hat{c}, \hat{T})) \quad (4.3.6)$$

donde $g(\hat{c}, \hat{T}, \sigma)$ es el vector de ganancias, aún por definir, que multiplica al término corrector. Como se puede notar, ya que $r = \rho(c, T)$ el término corrector denota la diferencia entre el valor instantáneo de la velocidad de reacción de los valores reales y los estimados.

Sin embargo (4.3.6) es un observador no realizable, ya que se desconoce el valor instantáneo de la función $\rho(c, T)$, por lo que se utiliza el estimado del valor instantáneo de la velocidad de reacción en lugar de su valor verdadero. De esta manera, y utilizando el mismo procedimiento descrito anteriormente y con $P(t) = \sigma$, $Q = q_c$ y $r = q_r$ se obtiene el filtro extendido de Kalman de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{\hat{c}} &= -\hat{r} + \theta(c_e - \hat{c}) + g(\hat{c}, \hat{T}, \sigma) \left[\hat{r} - \rho(\hat{c}, \hat{T}) \right] & \hat{c}(0) &= \hat{c}_0 \\ \dot{\sigma} &= -2\theta\hat{c}\sigma + q_c - \left[q_r^{-1} \left(\frac{\partial \rho(\hat{c}, \hat{T})}{\partial c} \right)^2 \right] \sigma^2 & \sigma(0) &= \sigma_0 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

donde la ganancia dinámica $g(\hat{c}, \hat{T}, \sigma)$ es igual a:

$$g(\hat{c}, \hat{T}, \sigma) = \sigma \frac{\partial \rho(\hat{c}, \hat{T})}{\partial c} q_r^{-1} \quad (4.3.8)$$

La solución de la trayectoria estimada de la concentración $\hat{c}(t)$ se encontrará siempre del lado correcto de la curva de velocidad de reacción, que queda dividida para cada temperatura por la región no observable (3.6.9), si se garantiza que el estado estimado comienza lo suficientemente cerca del estado real es decir :

$$c_0 \approx \hat{c}_0. \quad (4.3.9)$$

Definiendo el error de observación de c como:

$$\tilde{c} = c - \hat{c}$$

la dinámica de este error queda dada por

$$\dot{\tilde{c}} + \theta \tilde{c} = g(\hat{c}, \hat{T}, \sigma)(\hat{r} - \rho(\hat{c}, \hat{T})).$$

Para este observador la dinámica del error de observación de concentración tiende a cero con una rapidez ω_c determinada por los valores q_c y q_r , es decir $\omega_c(q_c, q_r)$ siempre y cuando \hat{r} tienda a $\rho(\hat{c}, \hat{T})$. Por esta razón, ω_T se escoge más grande que ω_c para lograr que la convergencia del error de estimación de c sea mas rápida que la dinámica de la estimación de r .

Se puede notar de (4.3.7) y (4.3.8) que si la trayectoria de observación pasa por la curva no observable, cuando $\frac{\partial \rho(\hat{c}, \hat{T})}{\partial c} = 0$, no produce ningún problema en el estimador, pues éste continúa operando como un estimador parcial de primer orden sin término corrector

$$\dot{\hat{c}} = -\hat{r} + \theta(c_e - \hat{c}). \quad (4.3.10)$$

Estimador a lazo abierto El estimador a lazo abierto es un estimador parcial de primer orden sin término corrector que equivale exactamente al filtro extendido de Kalman cuando la trayectoria de observación cruza por la curva no observable

$$\dot{\hat{c}} = -\hat{r} + \theta(c_e - \hat{c}). \quad (4.3.11)$$

La ventaja de este estimador es que, a diferencia del filtro extendido de Kalman, no requiere del conocimiento de la velocidad de reacción para ser implementado. Como el estimador calorimétrico garantiza que \hat{r} tienda a r con una rapidez definida por

ω_T . Una vez que el valor estimado de la velocidad de reacción converge al valor real, la dinámica del error de estimación $\tilde{c} = c - \hat{c}$ del observador a lazo abierto (4.3.11) es igual a:

$$\dot{\tilde{c}} + \theta\tilde{c} = 0.$$

La dinámica de este error determina que tan rápido se puede estimar la trayectoria de la concentración una vez que el error de observación de la velocidad de reacción es cero. Por esta razón ω_T se escoge entre tres y diez veces más grande que θ para lograr que la convergencia del observador de concentración sea más rápida que la dinámica de la estimación de r y de este modo asegurar que la estimación de la concentración pueda lograrse para cualquier concentración inicial del observador. Esta es la principal desventaja que presenta este observador a lazo abierto, con respecto a (4.3.7), pues no es posible modificar su rapidez de convergencia. El valor de θ es el inverso del tiempo de residencia del material dentro del reactor y aunque presenta un mínimo y un máximo para cada reactor en particular, no es posible modificarlo arbitrariamente. En cambio si se utiliza el filtro extendido de Kalman como observador esclavo la rapidez de observación de la trayectoria de la concentración se puede hacer arbitrariamente rápida. Sin embargo, otra ventaja que presenta el observador a lazo abierto es que para la convergencia del observador no es necesario garantizar que el estado inicial estimado se encuentre cerca del estado real. Ni siquiera es necesario garantizar que se encuentre en el lado correcto del espacio de estados que se encuentra dividido por la curva no observable, pues al ser una ecuación diferencial de primer orden tiene una solución única y obliga a una condición de convergencia global.

Configuraciones de los observadores con estructura pasiva

En esta sección se muestran las configuraciones de los dos observadores con estructura pasiva:

a) Si se utiliza el EFK para el observador esclavo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{T}} &= \beta\hat{r} + \theta(T_e - \hat{T}) - \delta(\hat{T} - T_j) + 2\zeta_T\omega_T(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{r}} &= \omega_T^2(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{c}} &= -\hat{r} + \theta(c_e - \hat{c}) + \sigma \frac{\partial \rho(\hat{c}, \hat{T})}{\partial c} q_r^{-1} [\rho(c, \hat{T}) - \rho(\hat{c}, \hat{T})] \\ \dot{\sigma} &= -2\theta\hat{c}\sigma + q_c - \left[q_r^{-1} \left(\frac{\partial \rho(\hat{c}, \hat{T})}{\partial c} \right)^2 \right] \sigma^2\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

donde $T \xrightarrow{\omega_T} \hat{T}$, $r \xrightarrow{\omega_T} \hat{r}$ y $c \xrightarrow{\omega_c} \hat{c}$ y se escoge $10\omega_T > \omega_c$ para lograr que la dinámica del observador de r sea mas rápida que la dinámica del observador de c .

b) Si se utiliza el observador a lazo abierto para el esclavo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{T}} &= \beta\hat{r} + \theta(T_e - \hat{T}) - \delta(\hat{T} - T_j) + 2\zeta_T\omega_T(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{r}} &= \omega_T^2(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{c}} &= -\hat{r} + \theta(c_e - \hat{c})\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

donde $T \xrightarrow{\omega_T} \hat{T}$, $r \xrightarrow{\omega_T} \hat{r}$ y $c \xrightarrow{\theta} \hat{c}$ y se escoge $10\omega_T > \theta$ para lograr que la dinámica del observador de r sea mas rápida que la dinámica del observador de c .

4.4. Observador asintótico

En esta sección se diseña un observador asintótico para el modelo nominal. Este observador, llamado así y basado en el diseño de [7], es capaz de estimar la concentración de producto a través de la definición de una variable auxiliar, estrechamente relacionada con una diferencia de entalpías. La convergencia del error de observación se asegura para esta nueva variable, mientras que el valor de concentración estimada se obtiene a partir del estimado de la misma. El diseño parte del modelo nominal del reactor (2.3.2) y de la definición de una variable auxiliar como:

$$\chi \triangleq \beta c + T.$$

Se encuentra la dinámica de χ utilizando la dinámica de la planta

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= \beta \dot{c} + \dot{T} \\ \dot{\chi} &= \beta [-\rho(c, T) + \theta(c_e - c)] + \beta \rho(c, T) + \theta(T_e - T) - \delta(T - T_j).\end{aligned}$$

Simplificando se llega a:

$$\dot{\chi} = -\theta z + \pi$$

donde π es una variable que se puede calcular, puesto que sus términos son todos conocidos:

$$\pi = \theta(\beta c_e + T_e) - \delta(T - T_j)$$

Se diseña un observador dinámico para χ del modo siguiente:

$$\dot{\hat{\chi}} = -\theta \hat{z} + \pi.$$

Definiendo el error de estimación de χ como

$$\tilde{\chi} = \chi - \hat{\chi}$$

la dinámica de este error esta dada por

$$\dot{\tilde{\chi}} + \theta \tilde{\chi} = 0.$$

La solución de este sistema esta dada por:

$$\tilde{\chi} = \exp\left(-\int_{t_0}^t \theta(\tau) d\tau\right) \tilde{\chi}(t_0).$$

Por lo tanto para garantizar convergencia exponencial al origen el sistema debe cumplir

$$\int_{t_0}^t \theta(\tau) d\tau \longrightarrow \infty \quad \text{conforme } t \longrightarrow \infty.$$

Aunque existe una condición menos estricta para la convergencia exponencial dada por la existencia de dos números α y T , tales que:

$$\int_t^{t+T} \theta(\tau) d\tau > 0.$$

Finalmente el valor de concentración estimada \hat{c} se obtiene como:

$$\hat{c} = \frac{\hat{\chi} - y}{\beta}.$$

Como se puede observar este estimador no requiere del conocimiento de la velocidad de reacción $\rho(c, T)$ para observar la concentración c . Al igual que el segundo de los observadores con estructura pasiva la rapidez de convergencia queda determinada por la tasa de dilución del reactor θ y la convergencia al valor correcto de concentración es independiente del valor inicial del estimado. Sin embargo este observador por si solo no puede ser utilizado para un controlador por retroalimentación de salidas ya que se desconoce la velocidad de reacción.

4.5. Resumen

Aunque el modelo nominal del sistema no es localmente observable, se diseñó un observador geométrico no lineal realizando una saturación del término que se vuelve infinito en las inmediaciones de la región no observable y utilizando el mapa $\phi(c, T)$ como transformación de coordenadas. También para el modelo nominal se diseñó un observador basado en el filtro extendido de Kalman. Esto fue posible dado que aunque la linealización del modelo nominal alrededor de una trayectoria no es completamente observable, se asume que el filtro de Kalman es capaz de converger si la trayectoria de estados solo "pasa" por instantes de tiempo aislados por la región donde se pierde observabilidad instantánea.

Para el modelo expandido se diseñaron también dos observadores con estructura pasiva a partir de un esquema de observación en cascada maestro-esclavo. El observador maestro, un estimador calorimétrico, calcula el valor instantáneo de la velocidad de reacción r sin necesitar del conocimiento de la función $\rho(c, T)$. Este valor estimado se utiliza como una medición virtual de los observadores esclavos. El primero de ellos, un filtro extendido de Kalman ofrece la ventaja de poder modificar la rapidez de convergencia y darle diferentes pesos a la velocidad de reacción y a la propia concentración estimada en el cálculo de la ganancia que multiplica al término corrector. En cambio el segundo de ellos, un estimador a lazo abierto, tiene una rapidez de convergencia determinada por la tasa de dilución del reactor y no es posible modificarla arbitrariamente. Sin embargo a diferencia del primero el estimador parcial a lazo abierto ofrece

la ventaja de tener convergencia global y de no requerir de la velocidad de reacción.

Por último con el modelo nominal se diseñó un observador asintótico. Este observador está basado en la diferencia de entalpía de reacción del reactor. A través de la definición de una nueva variable, donde se garantiza la convergencia del error de observación de esta nueva variable, es capaz de estimar la concentración de producto sin tampoco requerir del conocimiento de la velocidad de reacción $\rho(c, T)$. Al igual que el segundo observador con estructura pasiva la rapidez de convergencia está determinada por la tasa de dilución del reactor. La diferencia fundamental con el observador híbrido es que el observador asintótico no estima la velocidad de reacción $\rho(c, T)$ por lo que por sí solo no puede ser utilizado para control por retroalimentación de salidas.

Capítulo 5

Diseño del controlador MIMO por retroalimentación de estados

En este capítulo se diseña un control regulador ideal MIMO (Multiple Input Multiple Output) por retroalimentación de estados para el reactor de prueba, haciendo un análisis de las condiciones de solución. Este controlador basado en la linealización entrada-salida no puede ser implementado porque las entradas de control son función de el estado concentración de producto c y la función velocidad de reacción $\rho(c, T)$ y ambos son desconocidos. Sin embargo este control constituye el primer paso para el diseño del control por retroalimentación de salidas del siguiente capítulo.

El control regulador busca tener valores constantes deseados en la salida regulada, es decir:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{T} \end{bmatrix}$$

a partir del vector de entradas de control

$$u = \begin{bmatrix} u_q \\ u_j \end{bmatrix}$$

La entrada u_q se encarga de controlar la concentración, mientras que u_j hace lo propio con la temperatura. En este punto cabe recordar que $u_q = \theta$ es la tasa de dilución del reactor y que el volumen de material dentro del reactor \bar{V} es constante, por lo que manipular el valor de u_q equivale a modificar al mismo tiempo el flujo de

entrada q y de salida q_c , de tal modo que se mantenga el volumen constante y $\dot{V} = 0$. Una vez calculada la señal de control u_q el valor del gasto (que es la verdadera entrada de control) se calcula como:

$$u_q = \frac{q}{\bar{V}} = \frac{q_c}{\bar{V}}$$

Ya que los grados relativos de cada pareja entrada de control-salida regulada (u_q, c), (u_j, T) son $\kappa_1 = 1$ y $\kappa_2 = 1$, respectivamente, el grado relativo del sistema κ es:

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = 2$$

Lo que significa que es un sistema de fase mínima $\kappa_T = n$ y que puede transformarse a un sistema lineal y controlable [16].

Para el diseño del controlador primero se define el error de regulación como:

$$e_z = z - \bar{z} = \begin{bmatrix} c - \bar{c} \\ T - \bar{T} \end{bmatrix}$$

es decir la diferencia entre la señal real y la señal deseada.

Se desea que este error tenga la siguiente dinámica:

$$\dot{e}_z + k_z e_z = 0.$$

Como se trata de un control de regulación se tiene $\dot{\bar{z}} = 0$, y ya que las salidas reguladas son exactamente los estados se tiene

$$\dot{z} = \dot{e}_z = -k_z [z - \bar{z}] = \begin{bmatrix} k_{z1} & k_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - \bar{c} \\ T - \bar{T} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo esta dinámica deseada en la de la planta

$$-k_z [z - \bar{z}] = \begin{bmatrix} -\rho(c, T) + u_q(c_e - c) \\ \beta\rho(c, T) + u_q(T_e - T) - \delta(T - u_j) \end{bmatrix} \quad (5.0.1)$$

De donde se despeja la entrada de control ideal u°

$$u^\circ = \begin{bmatrix} u_q^\circ \\ u_j^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_c(c-\bar{c})+\rho(c,T)}{c_e-c} \\ T + \left[\frac{-k_T(T-\bar{T})-\beta\rho(c,T)-u_q(T_e-T)}{\delta} \right] \end{bmatrix} \quad (5.0.2)$$

donde $k_{z1} = k_c$ y $k_{z2} = k_T$.

Se puede observar que para calcular la componente u_q° de la señal de control ideal se requiere que $c_e \neq c$, situación que sucede una vez que comienza la reacción dentro del reactor, pues antes de comenzar la reacción se tiene $c_e = c$.

5.1. Resumen

En este capítulo se hizo el diseño de un controlador MIMO por retroalimentación de estados, encontrando una condición de solución que se cumple una vez que inicia la reacción dentro del reactor. El controlador resultante logra la dinámica deseada en el error de regulación, sin embargo se trata de un controlador que no puede ser implementado porque no se conocen la concentración c y la velocidad de reacción $\rho(c, T)$. Sin embargo constituye el primer paso en el diseño del control por retroalimentación de salidas pues este último se diseña para tratar de recuperar el comportamiento del primero.

Capítulo 6

Diseño de los controladores MIMO por retroalimentación de salidas

En este capítulo se diseñan dos controladores MIMO por retroalimentación de salidas analizando las condiciones de solución. El diseño de ambos controladores está basado en las leyes de control ideales del controlador por retroalimentación de estados acoplados con dos de los estimadores diseñados previamente. Estos estimadores son el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y el observador asintótico. Se incluye un análisis matemático de estabilidad para el primer controlador.

6.1. Diseño del controlador por retroalimentación de salidas utilizando el estimador con estructura pasiva a lazo abierto

El diseño de este controlador se basa en acoplar el estimador con estructura pasiva a lazo abierto con el controlador ideal. Como se mencionó en el capítulo anterior el controlador ideal no puede ser implementado ya que se desconocen la velocidad de reacción $\rho(c, T)$ y la concentración del reactor c . Puesto que las salidas del estimador con estructura pasiva a lazo abierto son precisamente el estimado de la velocidad de reacción \hat{r} y el estimado de concentración \hat{c} el diseño es muy simple, y consiste en

utilizar los valores estimados en lugar de los valores reales en la señal de control ideal. De tal modo que se obtiene una señal de control real u :

$$u = \begin{bmatrix} u_q \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_c(\hat{c}-\bar{c})+\hat{r}}{c_e-\hat{c}} \\ T + \frac{[-k_T(T-\bar{T})-\beta\hat{r}-u_q(T_e-T)]}{\delta} \end{bmatrix}. \quad (6.1.1)$$

Se puede observar que para calcular la componente u_q de la señal de control se requiere que $c_e \neq \hat{c}$. Esta condición no se puede garantizar *a priori* puesto que el valor del estimado \hat{c} ya no depende de condiciones físicas del reactor. Por esta razón para el cálculo de la señal de control verdadera u_q^V se utiliza un esquema de conmutación similar al utilizado en el observador geométrico. De este modo si la diferencia $c_e - \hat{c}$ es muy pequeña, su valor se sustituye por un valor ϵ arbitrariamente pequeño.

$$u_q^V = \begin{cases} \frac{-k_c(\hat{c}-\bar{c})+\hat{r}}{\epsilon} & \text{si } |c_e - \hat{c}| < \epsilon \\ \frac{-k_c(\hat{c}-\bar{c})+\hat{r}}{c_e-\hat{c}} & \text{si } |c_e - \hat{c}| \geq \epsilon \end{cases}$$

Sin embargo se espera que, al igual que en el caso de la señal de control ideal, esta situación no ocurra una vez iniciada la reacción, por lo que para el análisis se utiliza la señal de control real, es decir sólo se considera el caso $u_q = \frac{-k_c(\hat{c}-\bar{c})+\hat{r}}{c_e-\hat{c}}$.

Sustituyendo la primer componente de la señal de control u_q en la planta y sumando y restando el término $k_c(c-\bar{c})$ se obtiene la dinámica deseada de concentración igualada a un término de perturbación.

$$\dot{c} + k_c(c - \bar{c}) = \left[\frac{-k_c(\hat{c} - \bar{c}) + \hat{r}}{c_e - \hat{c}} \right] (c_e - c) - r.$$

Manipulando la expresión se llega a una dinámica de error de concentración perturbada:

$$\dot{c} + k_c(c - \bar{c}) = \left[\frac{\hat{r}(c_e - c)}{c_e - \hat{c}} - r \right] + k_c \left[c - \bar{c} - \frac{(\hat{c} - \bar{c})(c_e - c)}{c_e - \hat{c}} \right].$$

De esta última expresión se puede notar que para lograr la dinámica deseada en el error de regulación de concentración es necesario garantizar que desaparezca la perturbación, es decir que:

$$r - \hat{r} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad c - \hat{c} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Por su parte, sustituyendo la segunda componente de la señal de control u_j en la planta se obtiene:

$$\dot{T} = \beta r + \theta(T_e - T) - \delta \left(T - \left[T + \frac{1}{\delta} [-k_T(T - \bar{T}) - \beta\hat{r} - \theta(T_e - T)] \right] \right).$$

Simplificando se obtiene una dinámica de error perturbada:

$$\dot{T} = -k_T [T - T] + \beta[r - \hat{r}]$$

De esta dinámica perturbada a lazo cerrado se puede ver que para lograr la dinámica deseada en el error de regulación de temperatura es necesario que se cumpla lo siguiente:

$$r - \hat{r} \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty$$

6.2. Análisis matemático de estabilidad

Para hacer el análisis de estabilidad de este controlador se busca establecer las dinámicas de los errores de control y observación cuya definición es:

$$\begin{aligned} e_c &= c - \bar{c} && \text{error de control de concentración} \\ e_T &= T - \bar{T} && \text{error de control de temperatura} \\ e_e &= c - \hat{c} && \text{error de observación de concentración} \\ e_T &= T - \hat{T} && \text{error de observación de temperatura} \\ e_r &= r - \hat{r} && \text{error de observación de velocidad de reacción} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Se analizará primero la dinámica de los errores de control, después la de los errores de observación y finalmente la del del esquema de observación-control.

Dinámica de los errores de control

Primero se define el sistema dinámico de los errores de control. Para el error de control de temperatura se parte de la dinámica de temperatura a lazo cerrado con el control verdadero:

$$\dot{T} = \beta r + u_q(T_c - T) - \delta T - \dot{u}_j$$

sumando y restando el término δu_j^e a esta dinámica se tiene:

$$\dot{T} = \beta r + u_q(T_c - T) - \delta T + \delta u_j - \dot{\delta u}_j^e - \delta u_j^e \quad (6.2.2)$$

La dinámica de la temperatura con el control nominal es

$$-k_T e_T = \beta r + u_q(T_c - T) - \delta T - \delta u_j^e$$

Sustituyendo en (6.2.2) se obtiene:

$$\dot{T} = -k_T c_T - \delta(u_j - u_j^o).$$

Definiendo la función q_T como:

$$q_T = \delta(u_j - u_j^o).$$

Utilizando (??) y (6.1.1) se puede determinar que q_T es

$$q_T(c_r) = \beta c_r.$$

Como se tiene un control de regulación se tiene

$$\dot{T} = \dot{c}_T$$

por lo tanto la dinámica del error de control de temperatura es la dinámica deseada más un término de perturbación q_T que desaparece cuando $c_r = 0$.

$$\dot{c}_T = -k_T c_T + q_T(c_r).$$

Para el error de control de concentración se procede en forma similar, a partir de la dinámica de concentración con la señal de control verdadera:

$$\dot{c} = -r + u_q(c_e - c).$$

Sumando y restando el término $u_q^o(c_e - c)$ se tiene

$$\dot{c} = -r + u_q(c_e - c) + u_q^o(c_e - c) - u_q^o(c_e - c). \quad (6.2.3)$$

La dinámica de concentración con el control nominal es:

$$-k_c c_c = -r + u_q^o(c_e - c).$$

Sustituyendo en (6.2.3) se tiene

$$\dot{c} = -k_c c_c + (u_q - u_q^o)(c_e - c).$$

Se define la función q_c como

$$q_c = (u_q - u_q^o)(c_e - c).$$

Utilizando (??) y (6.1.1) y las definiciones de errores (6.2.1) se puede determinar que q_c es

$$q_c(c, \bar{c}, c_c; c_c, c_r) = \frac{\{-k_c(c_c - c_r - c) + \dot{r}\}}{(c_c + c_r - c)} - k_c(c_c - c) - r$$

De esta última expresión es claro que si $c_c = 0$ se tiene:

$$q_c = \dot{r} - r = -c_r$$

es decir:

$$q_c(c, \bar{c}, c_c; c_c = 0, c_r = 0) = 0.$$

Además como se tiene un control de regulación se tiene

$$\dot{c} = \dot{c}_c$$

por lo tanto la dinámica del error de control de concentración es igual a la dinámica deseada más un término de perturbación q_c que desaparece cuando los errores c_c y c_r son cero

$$\dot{c}_c = -k_c c_c + q_c(c, \bar{c}, c_c; c_c, c_r).$$

Finalmente el sistema dinámico del error de control es

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{c}_r \\ \dot{c}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_r c_r + q_r(c, \bar{c}, c_c; c_c, c_r) \\ -k_T c_T + q_T(c, \bar{c}) \end{bmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Dinámica del error de observación

Para determinar las dinámicas de error de observación se utiliza el modelo expandido de la planta (??) y la dinámica del observador híbrido (4.3.13). Para el error de observación de la concentración se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{c}_c &= \dot{c} - \dot{\hat{c}} \\ \dot{c}_c &= -r + u_q(c_c - c) + \dot{r} - u_q(c_c - \hat{c}) \\ \dot{c}_c &= -u_q c_c - c_r. \end{aligned}$$

Para el error de observación de temperatura:

$$\begin{aligned} \dot{c}_T &= \dot{T} - \dot{\hat{T}} \\ \dot{c}_T &= \beta r - u_q(T_c - T) - \delta(T - u_j) - \beta \dot{r} - u_q(T_c - \hat{T}) - \delta(\hat{T} - u_j) - 2\zeta_T \omega_T (y - \hat{T}). \end{aligned}$$

Simplificando y tomando en cuenta que $g = T$ se tiene:

$$\dot{c}_T = -(u_q + \delta - 2\zeta_T \omega_T) c_T - \beta c_r.$$

Para el error de observación de velocidad de reacción:

$$\begin{aligned} \dot{c}_r &= \hat{r} - \dot{r} \\ \dot{c}_c &= \frac{\partial \rho(\bar{c} + e_c, \bar{T} + e_T)}{\partial c} [\dot{\bar{c}}] + \frac{\partial \rho(\bar{c} + e_c, \bar{T} + e_T)}{\partial T} [\dot{\bar{T}}] - \omega^2 c_T \\ \dot{c}_r &= \frac{\partial \rho(\bar{c} + e_c, \bar{T} + e_T)}{\partial c} [-k_c c_c + q_c(\bar{c}, c_c, \hat{r}, c_c; c_c, c_r)] + \dots \\ &\dots + \frac{\partial \rho(\bar{c} + e_c, \bar{T} + e_T)}{\partial T} [-k_T c_T + q_T(c_r)] - \omega^2 c_T. \end{aligned}$$

El sistema dinámico de error de observación es el siguiente:

$$\dot{c} = \begin{bmatrix} \dot{c}_c \\ \dot{c}_T \\ \dot{c}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_q c_c - c_r \\ -(u_q + \delta + 2\zeta_T \omega_T) c_T + \beta c_r \\ \rho_c [-k_c c_c + q_c(\bar{c}, c_c, \hat{r}, c_c; c_c, c_r)] + \rho_T [-k_T c_T + q_T(c_r)] - \omega^2 c_T \end{bmatrix} \quad (6.2.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{\partial \rho(\bar{c} + e_c, \bar{T} + e_T)}{\partial c} \\ \rho_T &= \frac{\partial \rho(\bar{c} + e_c, \bar{T} + e_T)}{\partial T} \end{aligned}$$

Estabilidad de la interconexión de los sistemas dinámicos de error de control y observación

Una vez definidos los sistemas de error (6.2.4) y (6.2.5) el paso siguiente es determinar bajo qué condiciones la interconexión de los dos sistemas dinámicos es estable. Como se puede ver en la Figura 6.1 el sistema de error de control depende del sistema de error de observación a través de la función g y en forma inversa a través de las parciales de la velocidad de reacción con respecto a la concentración y la temperatura $\frac{\partial \rho}{\partial c}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial T}$. Sin embargo, tal y como se consideró en el modelo extendido la dinámica de la velocidad de reacción es tan lenta que puede considerarse cero $\dot{r} = 0$, y por este motivo también es posible desprestigiar los términos $\frac{\partial \rho}{\partial c}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial T}$. De este modo se puede considerar

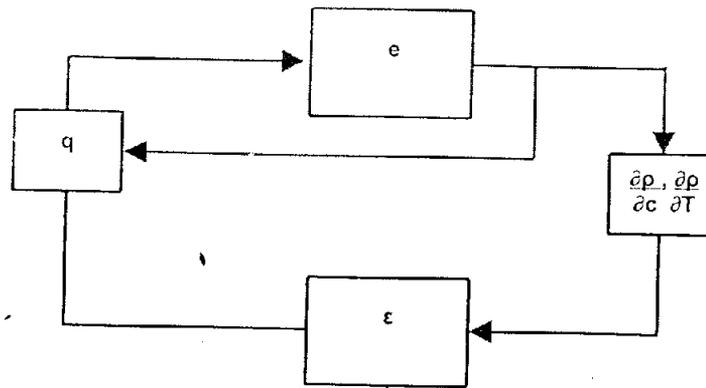


Figura 6.1: Interacción de los sistemas dinámicos de error.

que la dinámica del error de observación no depende del error de control quedando una configuración en cascada Figura 6.2.

Dada esta configuración en cascada la estabilidad de la interconexión de los sistemas dinámicos esta garantizada si el sistema de error de observación ϵ es asintóticamente estable y el sistema de error de control e es entrada-estado estable [9].

Estabilidad de la dinámica del error de observación El sistema dinámico del error de observación puede escribirse como un sistema lineal variante en el tiempo $\dot{c} = A(t)c$:

$$\dot{c} = \begin{bmatrix} \dot{c}_c \\ \dot{c}_T \\ \dot{c}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_q & 0 & -1 \\ 0 & -(u_q + \delta + 2\zeta_T\omega_T) & \beta \\ 0 & -\omega_T^2 & 0 \end{bmatrix} c$$

La matriz $A(t)$ tiene la señal de control $u_q(t)$ como el único factor variante en el tiempo puesto que éste es constante sólo hasta que se logra la regulación. Por esta razón la

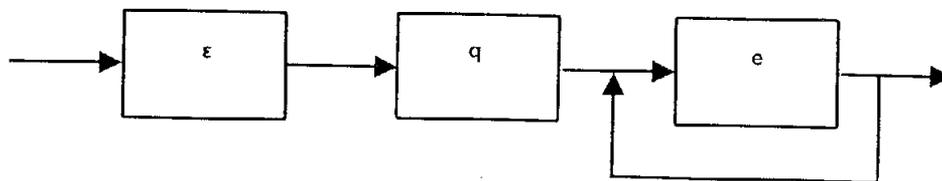


Figura 6.2: Sistemas dinámicos de error en cascada.

matriz $A(t)$ puede escribirse como:

$$A(t) = \bar{A} + \tilde{A}(t)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\bar{u}_q & 0 & -1 \\ 0 & -(\bar{u}_q + \delta + 2\zeta_T\omega_T) & \beta \\ 0 & -\omega_T^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} -u_q(t) & 0 & 0 \\ 0 & -u_q(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde \bar{A} es la matriz del sistema una vez que la señal de control es constante $u_q = \bar{u}_q$ y $\tilde{A}(t)$ es una matriz variante en el tiempo mientras la señal de control no es constante $u_q = u_q(t)$ y que para fines de análisis puede considerarse como una perturbación del sistema nominal $\dot{c} = \bar{A}c$. La estabilidad del sistema sin perturbación se analiza obteniendo los valores propios de \bar{A} :

$$\det(sI - \bar{A}) = (s + \bar{u}_q) (s^2 - (\bar{u}_q + \delta + 2\zeta_T\omega_T)s + \beta\omega_T^2)$$

por lo que el sistema invariante es exponencialmente estable en el origen si se cumple:

$$\begin{aligned} u_q &> 0 \\ \bar{u}_q + \delta + 2\zeta_T\omega_T &> 0 \\ \beta\omega_T^2 &> 0 \end{aligned}$$

condiciones que se cumplen no permitiendo un flujo de entrada exactamente igual a cero.

Para el sistema perturbado $\dot{c} = [\bar{A} + \tilde{A}(t)]c$ si se tiene que $\tilde{A}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ y que el sistema invariante $\dot{c} = \bar{A}c$ es exponencialmente estable en el origen, entonces el origen también es equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado [9].

Estabilidad de la dinámica del error de control. Por su parte el sistema dinámico de error de control es un sistema de la forma:

$$\dot{e} = f(e, u)$$

donde :

$$\mathbf{u} = f(q_c, q_T)$$

La entrada \mathbf{u} se puede considerar como una perturbación del sistema $\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{e})$. Dado que $f(\mathbf{e}, \mathbf{u})$ es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz si el sistema sin perturbación tiene al origen como un punto global y exponencialmente estable entonces el sistema perturbado es entrada-estado estable [9].

El sistema $\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{e})$ se puede escribir como un sistema lineal invariante en el tiempo $\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{e}$:

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_c \\ \dot{e}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & -k_T \end{bmatrix} \mathbf{e}$$

Para este sistema una función de Lyapunov se encuentra resolviendo:

$$A^T P + P A = -Q$$

proponiendo Q como una matriz identidad:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2k_T} \end{bmatrix}$$

por lo que la función de Lyapunov es $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T P \mathbf{e}$:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{e_c^2}{2k_c} + \frac{e_T^2}{2k_T}$$

El sistema sin perturbación es global y exponencialmente estable dado que:

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -e_c^2 - e_T^2$$

Por lo tanto el sistema forzado $\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{e}, \mathbf{u})$ es entrada-estado estable.

Estabilidad de la dinámica del esquema de observación-control

Los argumentos de estabilidad del esquema en cascada de observación-control utilizan las características de las dinámicas del error vistas anteriormente.

Supongamos que la señal u_q es tal que permite que el error de observación ϵ converja al origen. Si esto sucede entonces las funciones q_r y q_f se hacen cero conforme se incrementa el tiempo. Por su parte la estabilidad entrada-estado del sistema de error de control garantiza que ante una entrada acotada el estado también estará acotado. Finalmente al transcurrir el tiempo y desaparecer los términos de entrada la dinámica del error de control queda como el sistema no forzado $\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{e})$ el cual es global y exponencialmente estable. Esta estabilidad provoca que la señal de control u_q varíe cada vez menos conforme transcurre el tiempo hasta que se vuelva constante una vez alcanzadas las señales de referencia, lo que a su vez implica que en la dinámica del error de observación $\tilde{A}(t)$ tiende a 0 conforme t tiende a ∞ y que el error de observación converja al origen, que es la hipótesis de la que se partió.

Por lo regular para lograr que el término de entrada de la dinámica de control \mathbf{u} desaparezca lo más rápido posible se eligen ω_T y ζ_T de modo tal que exista una rápida convergencia en el sistema de observación. En la práctica esta rapidez se ve limitada por el ruido del sensor de temperatura. Sin embargo puede ser posible que exista un señal de control u_q que provoque una convergencia muy lenta del error de observación de concentración y por ende del error de control de concentración. En el límite la señal que provoca que nunca exista convergencia es $u_q = 0$, sin embargo esto físicamente no es posible pues implicaría un tiempo de residencia infinito. En la práctica conforme el tiempo de residencia aumenta también aumentará el tiempo de convergencia del error de observación de concentración.

6.3. Diseño del controlador por retroalimentación de salidas utilizando el observador asintótico

El diseño de este controlador se basa en acoplar el observador asintótico con el controlador ideal. A diferencia del controlador anterior el diseño no es tan directo puesto que el observador asintótico sólo provee el estimado de la concentración de producto \hat{c} . Para obtener un estimado de la velocidad de reacción se despeja de la

dinámica de temperatura quedando

$$\dot{\hat{r}} = \frac{1}{\beta} \left[\dot{T} - u_q(T_c - T) + \delta(T - T_j) \right]. \quad (6.3.1)$$

Donde $\hat{r}(t_1) = \rho(c(t_1), T(t_1))$. El inconveniente es que aparece la derivada de la temperatura \dot{T} . Sin embargo ésta se puede aproximar con T_f utilizando un filtro que semeja un derivador perfecto:

$$\frac{s}{\tau s + 1} \approx \frac{T_f}{T} \quad ; \quad 0 < \tau \ll 1$$

quedando como

$$\dot{\hat{r}} = \frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_c - T) + \delta(T - T_j)] \quad (6.3.2)$$

Este estimado de velocidad de reacción y el estimado de concentración \hat{c} se utilizan como los valores reales en el control ideal. Haciendo la sustitución se obtiene:

$$u = \begin{bmatrix} u_q \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_c(\hat{c} - \bar{c}) + \frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_c - T) + \delta(T - u_j)]}{c_c - \hat{c}} \\ T + \frac{[-k_T [T - \bar{T}] - \frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_c - T) + \delta(T - u_j)] - u_q(T_c - T)]}{\delta} \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar las componentes de la señal de control dependen de si mismas. La componente u_q se puede despejar explícitamente:

$$u_q = \frac{-k_c(\hat{c} - \bar{c}) + \frac{1}{\beta} [T_f + \delta(T - u_j)]}{c_c - \hat{c} + \frac{1}{\beta} [T_c - T]}$$

De donde se puede observar que la condición para calcular u_q es:

$$c_c - \hat{c} + \frac{1}{\beta} [T_c - T] > 0$$

Como las concentraciones y temperaturas son cantidades positivas la expresión siempre será mayor que cero al menos que al mismo tiempo el estimado de concentración sea igual a la concentración de entrada y la temperatura de entrada sea exactamente la temperatura dentro del reactor.

Por su parte la componente u_j no puede despejarse explícitamente de tal modo que su expresión es:

$$u_j = T + \frac{1}{\delta} \left[-k_T [T - \bar{T}] - \frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_c - T) + \delta(T - u_j)] - u_q(T_c - T) \right]$$

Para poder calcular la componente u_j , a pesar de la existencia de un lazo algebraico, se utiliza un filtro (6.3.3) que, conectado entre la salida y la retroalimentación de la señal,

la retarda y elimina el lazo algebraico dando por resultado una componente filtrada u_{jf} .

$$\frac{1}{\tau s + 1} \approx \frac{u_{jf}}{u_j} \quad : \quad 0 < \tau \ll 1 \quad (6.3.3)$$

Con esta componente se calcula la señal de control real

$$u_j = T + \frac{1}{\delta} \left[-k_T [T - \bar{T}] - \frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_e - T) + \delta(T - u_{jf})] - u_q(T_e - T) \right]$$

Continuando con el análisis de condiciones de solución se sustituyen las componentes de la señal de control real en la dinámica del reactor. Para la componente u_q se tiene:

$$\dot{c} = -\hat{r} + \left[\frac{-k_c(\hat{c} - \bar{c}) + \frac{1}{\beta} [T_f + \delta(T - u_j)]}{c_e - \hat{c} + \frac{1}{\beta} [T_e - T]} \right] (c_e - c)$$

simplificando

$$\dot{c} = -\hat{r} + (c_e - c) \left[\frac{-k_c(\hat{c} - \bar{c}) - r}{c_e - \hat{c}} \right].$$

Por lo que las condiciones necesarias para lograr la dinámica del error de concentración deseada son:

$$\hat{c} - c \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad r - \hat{r} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Para la componente u_j se obtiene sustituyendo en la dinámica de la temperatura.

$$\begin{aligned} \dot{T} = & \beta \rho(c, T) + \theta(T_e - T) - \delta T + \dots \\ & \dots \delta \left(\frac{1}{\delta} \left[-k_T [T - \bar{T}] - \frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_e - T) + \delta(T - u_j)] - u_q(T_e - T) \right] \right) \end{aligned}$$

simplificando y considerando que $\frac{1}{\beta} [T_f - u_q(T_e - T) + \delta(T - u_j)]$ tiende a $\rho(c, T)$:

$$\dot{T} = -k_T [T - \bar{T}]$$

Como se puede ver la convergencia del error de temperatura deseada no depende del estimador. En este punto cabe señalar que de nuevo se han hecho dos adecuaciones prácticas (las ecuaciones de filtrado) que permiten la implementación del controlador pero que no se toman en cuenta para el análisis.

6.4. Comparación de los esquemas de observación-control

El control por retroalimentación de salidas basado en el estimador con estructura pasiva a lazo abierto tiene tres ecuaciones dinámicas

$$\begin{aligned}\dot{\hat{T}} &= \beta\hat{r} + \theta(T_e - \hat{T}) - \delta(\hat{T} - T_j) + 2\zeta_T\omega_T(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{r}} &= \omega_T^2(y - \hat{T}) \\ \dot{\hat{c}} &= -\hat{r} + \theta(c_e - \hat{c})\end{aligned}\quad (6.4.1)$$

y dos ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned}u_q &= \frac{-k_c(\hat{c} - \bar{c}) + \hat{r}}{c_e - \hat{c}} \\ u_j &= T + \frac{[-k_T(T - \bar{T}) - \beta\hat{r} - u_q(T_e - T)]}{\delta}\end{aligned}$$

El control por retroalimentación de salidas basado en el observador asintótico tiene tres ecuaciones dinámicas

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= -u_q\hat{z} + u_q(\beta c_e + T_e) - \delta(T - u_j) \\ \frac{s}{\tau s + 1} &= \frac{T_f}{T} \\ \frac{1}{\tau s + 1} &= \frac{u_{jf}}{u_j}\end{aligned}$$

y tres ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \frac{\hat{z} - T}{\beta} \\ u_q &= \frac{-k_c(\hat{c} - \bar{c}) + \frac{1}{\beta}[T_f + \delta(T - u_j)]}{c_e - \hat{c} + \frac{1}{\beta}[T_e - T]} \\ u_j &= T + \frac{1}{\delta} \left[-k_T[T - \bar{T}] - \frac{1}{\beta}[T_f - u_q(T_e - T) + \delta(T - u_{jf})] - u_q(T_e - T) \right]\end{aligned}$$

6.5. Resumen

En este capítulo se diseñaron dos controladores MIMO de regulación por retroalimentación de salidas para el reactor de prueba. Ambos controladores utilizan el mismo

mapa de entrada de control-salida manipulada. El primer controlador esta acoplado con el estimador con estructura pasiva a lazo abierto logrando un sistema de observación-control con tres ecuaciones dinámicas y dos algebraicas. Se determinaron las condiciones de solución y se hizo una prueba analítica de estabilidad del esquema de observación-control. El segundo controlador esta acoplado con el observador asintótico logrando un sistema de observación-control con tres ecuaciones dinámicas y tres ecuaciones algebraicas. La estabilidad de este esquema de observación-controlador sólo se prueba en forma simulada en el siguiente capítulo. Cabe señalar que para su funcionamiento correcto ambos esquemas requieren que la dinámica de la velocidad de reacción sea prácticamente nula, o al menos lo suficientemente lenta para que pueda ser estimada rápidamente sin que afecte la estabilidad en lazo cerrado.

Capítulo 7

Simulaciones de los observadores y los esquemas observador-controlador para el reactor de prueba

En este capítulo se presentan las simulaciones del reactor de prueba con los cinco observadores diseñados a lazo abierto, y las simulaciones en lazo cerrado de los dos esquemas de observador-controlador diseñados anteriormente y de otros dos esquemas de observación-control utilizando el observador EKF y el estimador con estructura pasiva con EKF. Para estos últimos esquemas se utiliza el mismo método de diseño del control a partir de la señal de control ideal. Sin embargo cabe señalar que el desarrollo formal no se presenta en ninguna parte de este trabajo, pues el interés de incluirlos en la simulación es meramente comparativo.

Para determinar si los observadores son capaces de converger al valor real cuando la trayectoria de estados cruza por la región con observabilidad mal condicionada, en todos los casos (a lazo abierto y cerrado) las simulaciones presentan una trayectoria de estados que al menos cruza una vez por la zona donde se pierde la observabilidad local y la observabilidad instantánea para el sistema linealizado. En cada caso se incluye una prueba nominal, una prueba con ruido en la medición de temperatura y una prueba

con variación en los parámetros de la velocidad de reacción. Estas dos últimas pruebas buscan comparar la robustez de los esquemas con condiciones ideales, y con condiciones más realistas en la práctica experimental e industrial.

7.1. Simulación de los observadores a lazo abierto

En esta sección se muestran los resultados de simulación de los cinco observadores propuestos anteriormente operando en el reactor de prueba a lazo abierto. Se realizaron tres pruebas diferentes que son: prueba del comportamiento nominal, prueba del comportamiento con ruido en la señal de medición y prueba del comportamiento con variación en los parámetros del sistema.

La forma en que se excita al sistema es mediante la variación de una de las entradas de control: la temperatura de la camisa de enfriamiento. Mientras que la otra señal de control u_q y las entradas exógenas d_1, d_2 se mantienen constantes. La señal de excitación $u_j = 350 + 70 \sin(0.5t)$ (Fig. 7.1) se escogió de tal forma que obligara a la trayectoria de estados a cruzar en dos ocasiones por la región instantáneamente no observable (Fig. 7.2).

En todos los casos el sistema parte del punto de equilibrio [$c(t_0) = 0.991, T(t_0) = 370.88$]. Las condiciones iniciales de los observadores son las mismas [$\hat{c}(t_0) = 0.5, \hat{T}(t_0) = 300, \hat{r}(t_0) = \sigma(t_0) = 1$], y las entradas del sistema se fijan en: [$d_1 = 1, d_2 = 370, u_q = 1$].

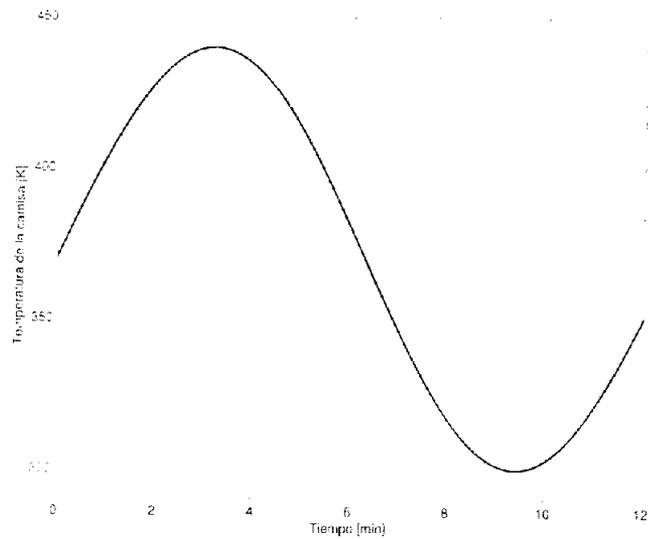


Figura 7.1: Señal de excitación del sistema a lazo abierto.

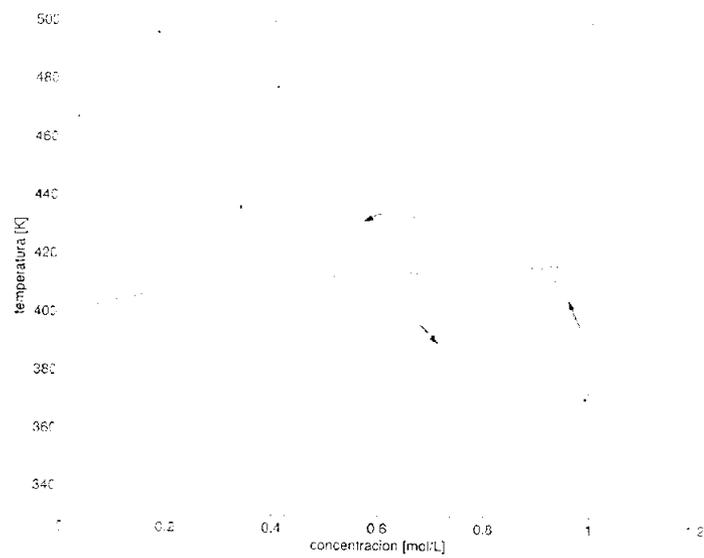


Figura 7.2: Plano de fase de la trayectoria a lazo abierto.

Comportamiento nominal de los observadores

Se considera que en el comportamiento nominal se tiene un conocimiento perfecto del modelo del reactor, incluyendo el modelo de la velocidad de reacción $\rho(c, T)$, al menos para el caso geométrico y EKF, y que la medición de temperatura no tiene ruido. En las Figuras 7.3 y 7.4 se muestra el comportamiento de los observadores de concentración y del error de observación de concentración, respectivamente. Se puede observar como a excepción del observador geométrico, que tiene un gran sobrepaso y un tiempo grande de convergencia y del EKF que tiene un gran sobrepaso, los observadores convergen al valor real de concentración. En la Figura 7.5 se muestra la estimación de temperatura de los observadores. En esta ocasión sólo se muestran los estimados de temperatura del observador geométrico, el EKF, y los estimadores con estructura pasiva ya que en el caso del observador asintótico no se estima esta variable.

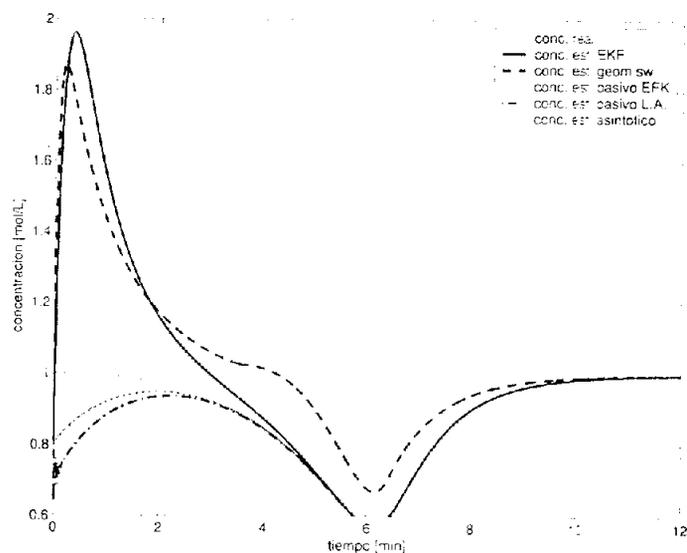


Figura 7.3: Comportamiento nominal de los observadores de concentración.

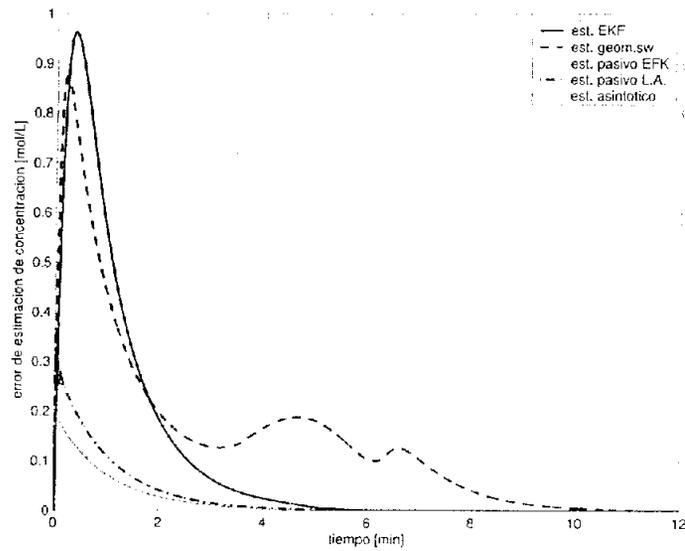


Figura 7.4: Comportamiento nominal del error de observación de concentración.

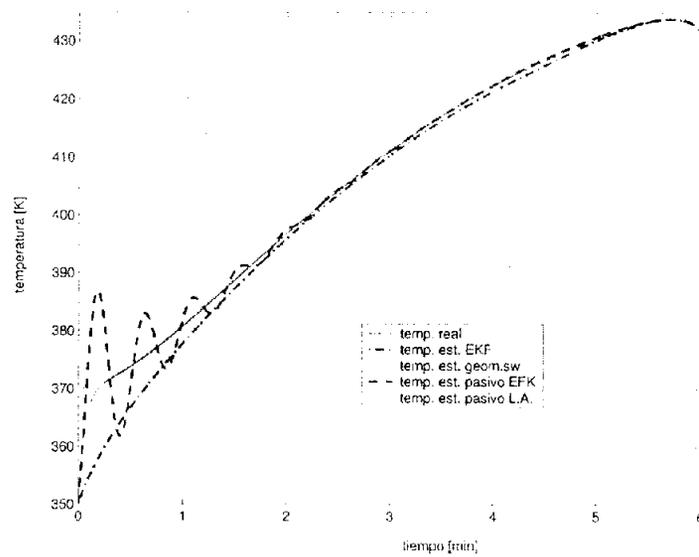


Figura 7.5: Comportamiento nominal de la observación de temperatura.

7.1.1. Comportamiento de los observadores con ruido en la medición

En las Figuras 7.6 y 7.7 se muestra el comportamiento de la concentración y del error de observación de concentración considerando ruido en la medición de temperatura. Para ello se inyecta ruido blanco con potencia de 0.0001 en la señal de temperatura, simulando el comportamiento de un transductor de temperatura común [17]. En la Figura 7.8 se muestra el comportamiento de la temperatura y sus estimados geométrico, EKF, y con estructura pasiva. Las simulaciones muestran que el comportamiento es muy similar al caso nominal, pues el sobrepaso y los tiempos de convergencia prácticamente son iguales y sólo se presenta un deterioro en la convergencia, pues esta nunca llega a ser exacta debida al ruido en la medición.

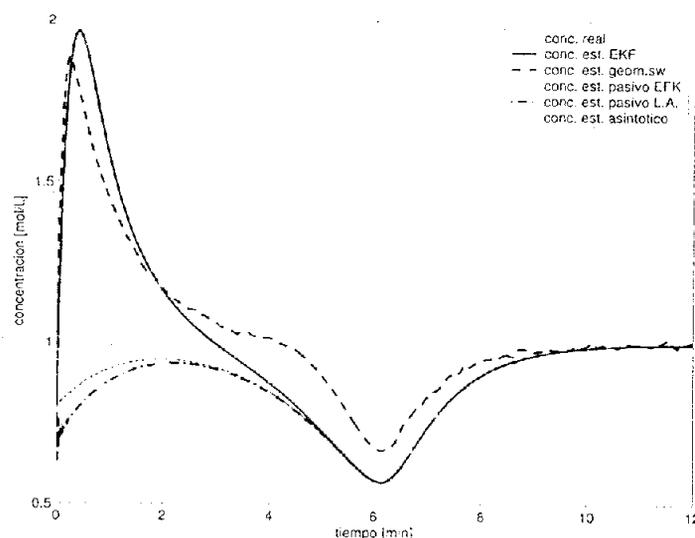


Figura 7.6: Comportamiento con ruido de los observadores de concentración.

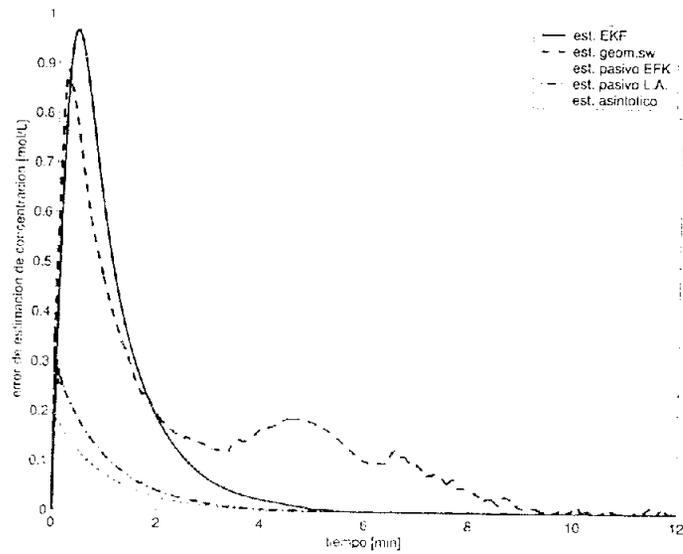


Figura 7.7: Comportamiento con ruido del error de observación de concentración.

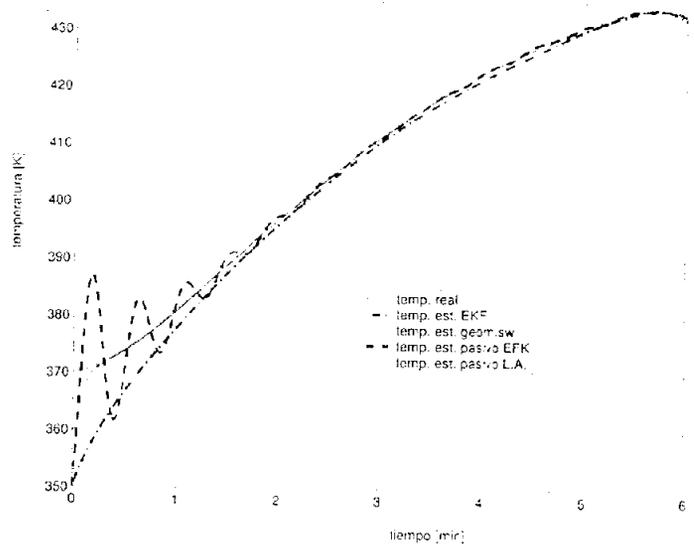


Figura 7.8: Comportamiento con ruido de la observación de temperatura.

7.1.2. Comportamiento de los observadores con variación de los parámetros de velocidad de reacción

Las simulaciones con variación de parámetros muestran una situación más realista que se presenta en el ámbito experimental y sobretodo en el ámbito industrial, pues lo común es que exista un conocimiento imperfecto del modelo del reactor, específicamente de la velocidad de reacción. Para reflejar esta situación real en forma simulada se modifica la velocidad de reacción nominal (7.1.1) en una velocidad con variación en sus tres parámetros (7.1.2).

$$\rho(c, T) = \frac{ce^{25}e^{-\left(\frac{-10000}{T}\right)}}{(1 - 3c)^2} \quad (7.1.1)$$

$$\rho(c, T) = \frac{ce^{24.9}e^{-\left(\frac{-9950}{T}\right)}}{(1 + 2.8c)^2} \quad (7.1.2)$$

Esta variación es menor al siete por ciento en cada parámetro pero es suficiente para mostrar la robustez de los observadores. En las Figuras 7.9 y 7.10 se muestra el comportamiento de las concentraciones real y estimadas y los errores de observación de los cinco observadores respectivamente. Es muy notorio como, aún con una pequeña variación de parámetros, sólo el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y el observador asintótico son insensibles a estas variaciones. En la Figura 7.11 se muestra el comportamiento de la temperatura y sus estimados bajo las mismas condiciones de variación en sus parámetros. A diferencia del estimado de concentración en este caso el estimador con estructura pasiva con EKF también logra una buena estimación de temperatura.

7.1.3. Observaciones de los experimentos a lazo abierto

Los tiempos de convergencia de los observadores de temperatura y concentración bajo las diferentes pruebas están resumidos en las Tablas 7.1 y 7.2 respectivamente.

Como se puede constatar los observadores con estructura pasiva con EKF y asintótico son los más robustos, pues convergen en la estimación de concentración a pesar del ruido en la medición y de la variación de parámetros con un tiempo de entre cuatro y

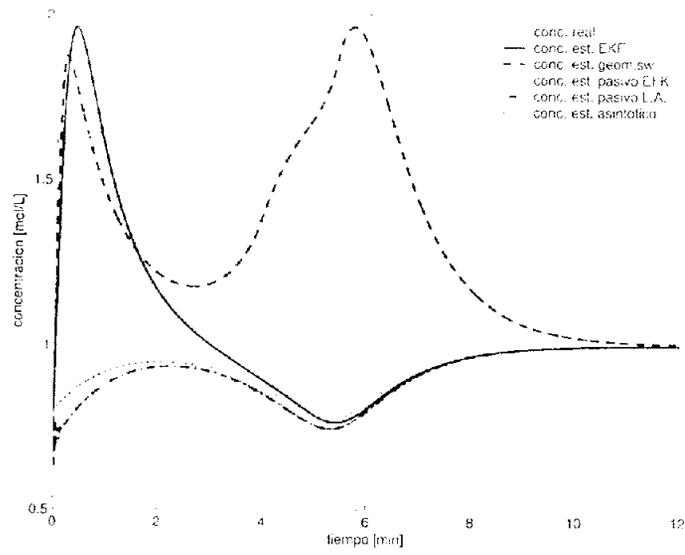


Figura 7.9: Comportamiento con variación de parámetros de los observadores de concentración.

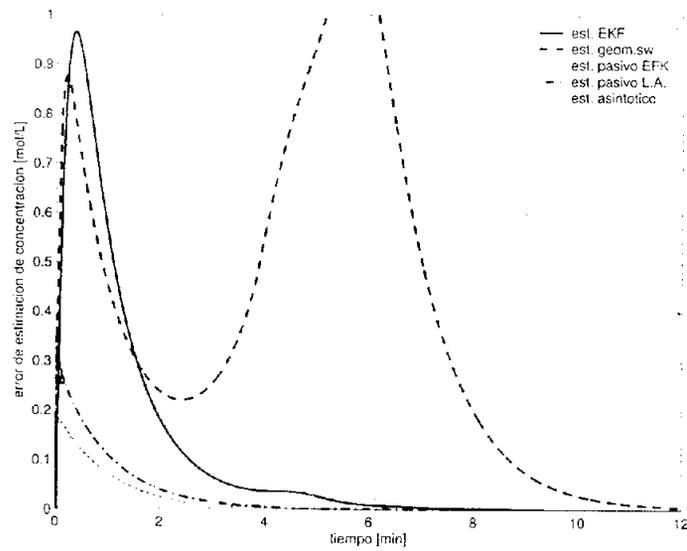


Figura 7.10: Comportamiento con variación de parámetros del error de observación de concentración.

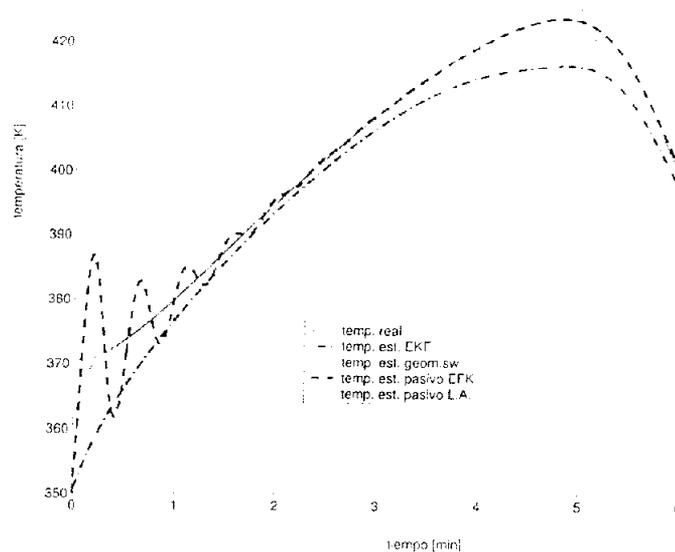


Figura 7.11: Comportamiento con variación de parámetros de la observación de temperatura.

| | geométrico | EKF | pasivo EKF | pasivo L.A. |
|----------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| nominal | 0-1 min. | 5-6 min. | 4-5 min. | 0-1 min. |
| ruido | 0-1 min. | 5-6 min. | 4-5 min. | 0-1 min. |
| var. de param. | no converge | no converge | 4-5 min. | 0-1 min. |

Tabla 7.1: Tiempos de convergencia de observación de temperatura

| | geométrico | EKF | pasivo EKF | pasivo L.A. | asintótico |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| nominal | 11-12 min. | 5-6 min. | 4-5 min. | 4-5 min. | 4-5 min. |
| ruido | 11-12 min. | 5-6 min. | 4-5 min. | 4-5 min. | 4-5 min. |
| var. de param. | no converge | no converge | no converge | 4-5 min. | 4-5 min. |

Tabla 7.2: Tiempos de convergencia de observación de concentración

cinco veces la tasa de dilución del reactor. El comportamiento del observador geométrico es muy peculiar pues aunque converge rápidamente para la temperatura es el más lento en converger para la concentración. Se puede notar que el ruido en la medición en realidad no modifica los tiempos de convergencia ni el sobrepaso de los observadores pero sí afecta en mayor o menor medida la convergencia que nunca llega a ser exacta, como es de esperarse. Aún así el observador más afectado por ruido en la medición es el observador geométrico. En cambio el observador más inmune al ruido es el EKF y en seguida los observadores con estructura pasiva. La prueba de variación de parámetros muestra como el observador geométrico, el EKF y el observador con estructura pasiva con EKF son dependientes de un buen conocimiento del modelo matemático del sistema.

7.2. Simulaciones del sistema con los esquemas de observación-control

En esta sección se muestran los resultados de simulación del sistema a lazo cerrado con los dos esquemas de observación-control propuestos y dos esquemas más utilizando el EKF y el estimador con estructura pasiva con EKF, cuyo diseño es similar al de los controladores en el capítulo anterior pero se omiten en este trabajo. La prueba de control para los cuatro esquemas consiste en iniciar en el punto estable a lazo abierto P1 y regular la temperatura y concentración en el punto inestable a lazo abierto P2. Los valores utilizados para la simulación son los siguientes.

$$c(t_0) = 0.991, T(t_0) = 370.88, T_e = 370, c_e = 1, \bar{T} = 436.14, \bar{c} = 0.338, \hat{c}(t_0) = 0.5, \hat{T}(t_0) = 300, \hat{r}(t_0) = 1$$

Para reflejar una situación realista las señales de control se acotan de la siguiente manera: $u_g = [0.01, 2]$, $u_j = [283.15, 400]$

Se realizan de nuevo tres pruebas que son el comportamiento nominal, el comportamiento con ruido en la señal de medición y el comportamiento con variación en los parámetros de la velocidad de reacción. El ruido y la variación de parámetros son los mismos que se utilizaron en las pruebas a lazo abierto. La prueba de control genera

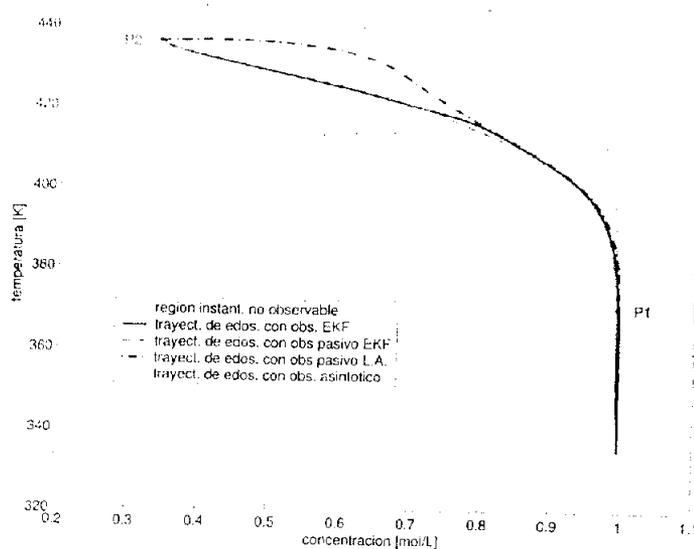


Figura 7.12: Plano de fase de las trayectorias a lazo cerrado

una trayectoria nominal de estados que obliga al sistema a cruzar por la región donde se pierde la observabilidad instantánea (Fig. 7.12), aunque como se puede notar las trayectorias nominales de los esquemas son diferentes.

Las gráficas que se presentan son, en cada caso, el comportamiento de las concentraciones de cada sistema con respecto a la deseada, el error de estimación de la concentración, y el comportamiento de las temperaturas con respecto a la deseada. También para el caso nominal se presentan los estimados de la velocidad de reacción dados por el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y la ecuación (6.3.2) del control basado en el observador asintótico.

7.2.1. Comportamiento nominal del sistema a lazo cerrado.

Estas pruebas se realizan con la velocidad de reacción nominal (7.1.1) y con una medición de temperatura libre de ruido, es decir, con condiciones ideales. En la Figura 7.13 se muestra el comportamiento de las concentraciones vs la referencia de concentración deseada. Se puede notar que los controladores basados en el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y observador asintótico son sobrepasados por los controles basados en el EKF y el estimador con estructura pasiva con EKF. Esto, como se

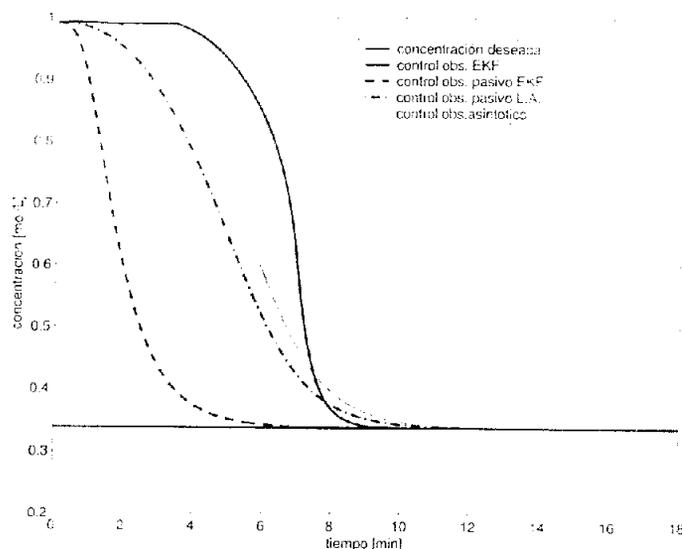


Figura 7.13: Comportamiento nominal del control de concentración.

aprecia en la Figura 7.14, es debido a que el error de observación de estos dos últimos convergen más rápidamente que los dos primeros.

En el caso del comportamiento de las temperaturas con respecto a la deseada (Fig. 7.15) ocurre lo mismo, pues los dos controles propuestos se ven superados por los controles basados en el EKF y el estimador pasivo con EKF.

En las Figuras 7.16 y 7.17 se muestran los estimados de la velocidad de reacción dados por el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y la ecuación (6.3.2) del control basado en el observador asintótico respectivamente. Se puede notar que la convergencia al valor real de velocidad de reacción está dada en aproximadamente 0.5θ y θ del tiempo de residencia respectivamente (recordando que $\theta = 1$ min). Estas simulaciones muestran que es una buena hipótesis el considerar la dinámica de la velocidad de reacción prácticamente nula, o al menos lo suficientemente lenta para que pueda ser estimada sin que afecte la estabilidad en lazo cerrado.

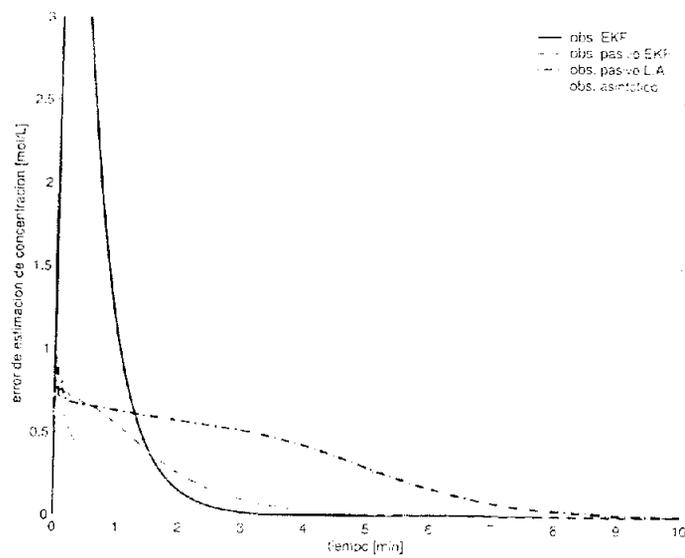


Figura 7.14: Comportamiento nominal del error de observación de concentración.

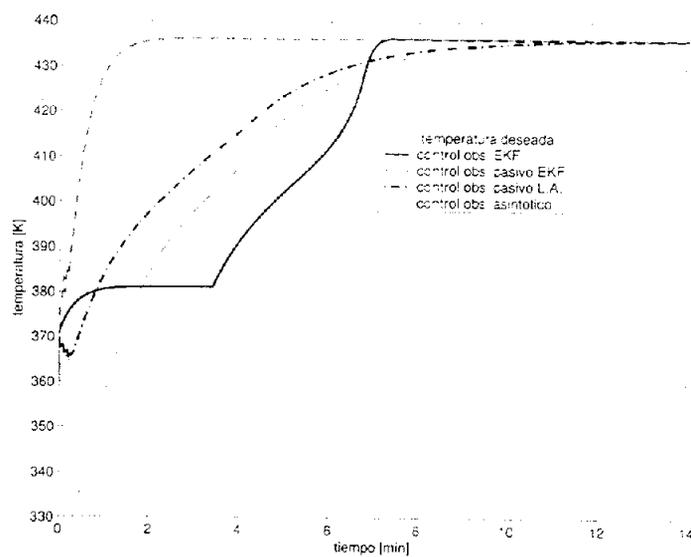


Figura 7.15: Comportamiento nominal del control de temperatura.

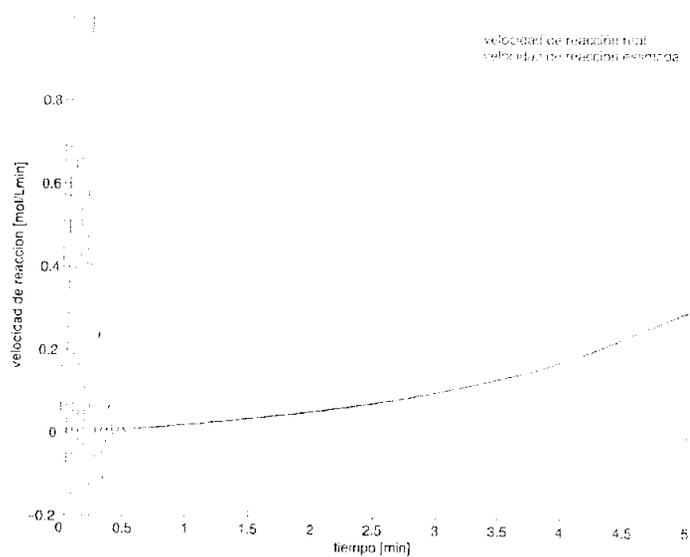


Figura 7.16: Comportamiento de la velocidad de reacción real y estimada con el observador con estructura pasiva a lazo abierto.

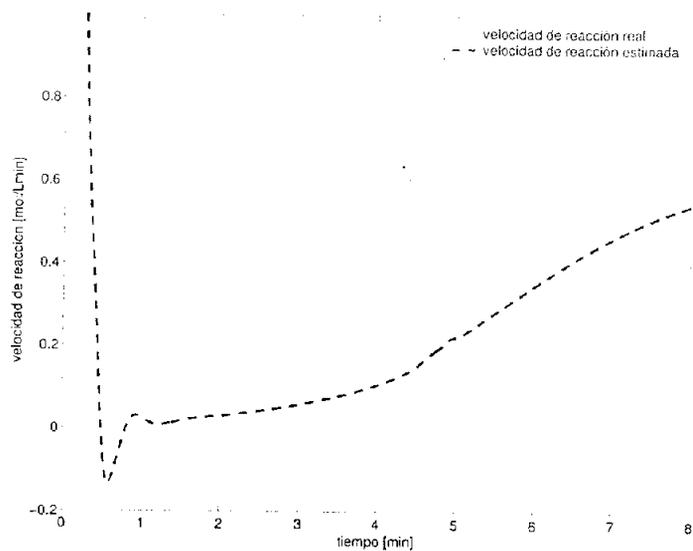


Figura 7.17: Comportamiento de la velocidad de reacción real y estimada con el observador asintótico.

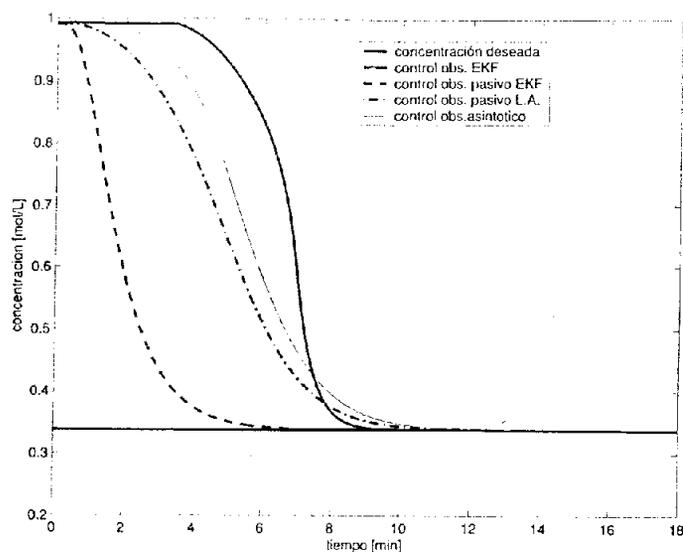


Figura 7.18: Comportamiento con ruido del control de concentración.

7.2.2. Comportamiento del sistema a lazo cerrado con ruido en la medición

Para estas pruebas se considera un ruido en la medición de temperatura con potencia 0.0001 que, como ya se mencionó, es el comportamiento típico de un transductor de temperatura comercial. En la Figura 7.18 se muestra el comportamiento de las concentraciones vs la referencia de concentración deseada. Al igual que el caso a lazo abierto los tiempos de convergencia prácticamente son iguales al caso nominal y sólo se presenta un deterioro en la convergencia del error de estimación que nunca llega a ser exacta (Fig. 7.19) y que afecta a su vez a la convergencia del controlador, sobretodo la convergencia de la temperatura deseada (Fig. 7.20).

7.2.3. Comportamiento del sistema a lazo cerrado con variación de los parámetros de la velocidad de reacción

Para estas pruebas se considera la variación en los parámetros de la velocidad de reacción dada por (7.1.2) que es menor al siete por ciento de los valores nominales. Las Figuras 7.21, 7.22 y 7.23 muestran como esta pequeña variación afecta en mayor medida

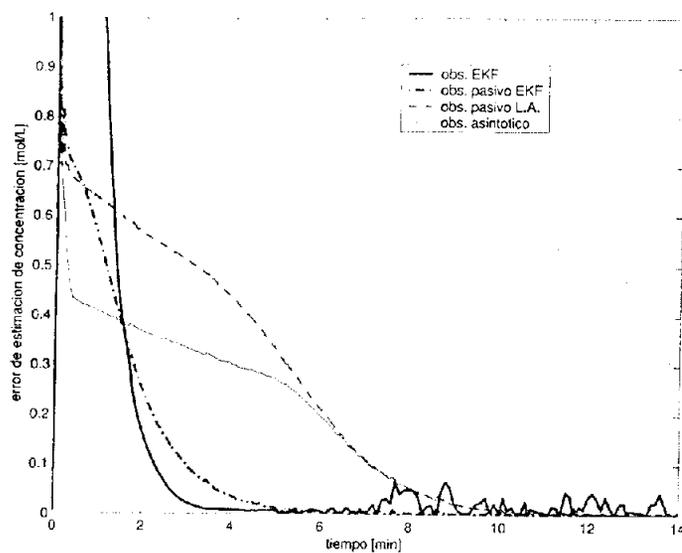


Figura 7.19: Comportamiento con ruido del error de observación de concentración.

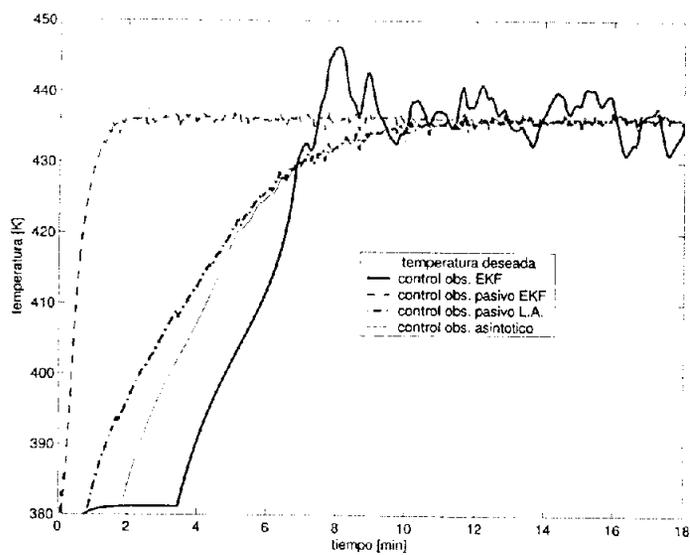


Figura 7.20: Comportamiento con ruido del control de temperatura.

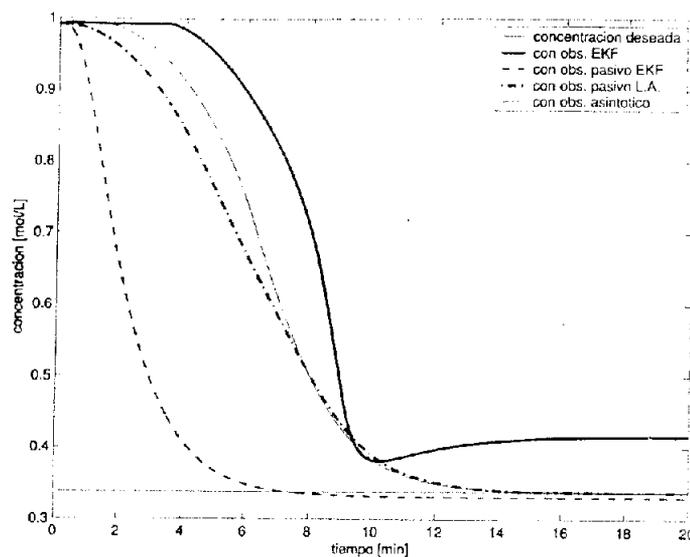


Figura 7.21: Comportamiento con variación de parámetros del control de concentración

al control basado en el EKF, pues no converge a los valores deseados de concentración ni temperatura. Por su parte, el control basado en el estimador con estructura pasiva comprueba lo ocurrido en la simulación en lazo abierto, donde se logra una buena estimación de temperatura pero no de concentración lo que se refleja directamente en el comportamiento del control pues se logra la temperatura deseada pero no la concentración. Los controladores basados en el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y observador asintótico son prácticamente insensibles a la variación de parámetros y presentan el mismo comportamiento que en la prueba nominal.

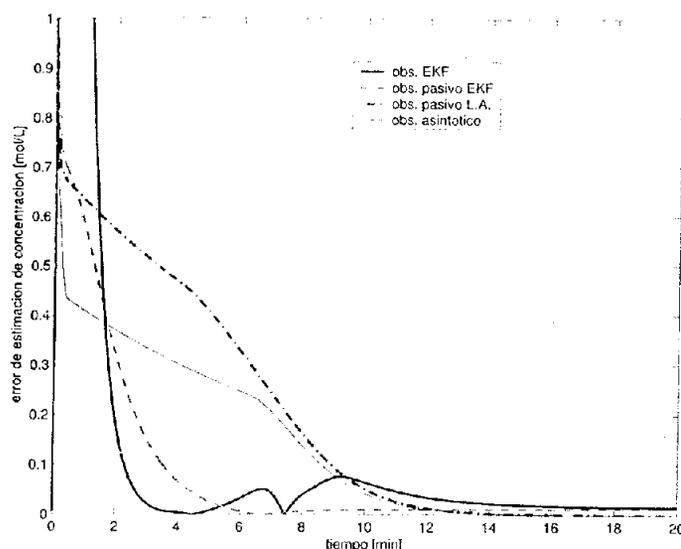


Figura 7.22: Comportamiento con variación de parámetros del error de observación de concentración.

7.2.4. Diagrama de fase del reactor con los esquemas de observación-control

En las Figuras 7.24 y 7.25 se muestran los diagramas de fase en lazo cerrado utilizando el esquema de observación-control basado en el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y el observador asintótico respectivamente. Para obtener estas gráficas se realizaron cuatro pruebas en lazo cerrado pidiendo al control que regule al sistema en P2 con trayectorias que parten de P1 y P3 y dos puntos sobre la separatriz del diagrama de fase en lazo abierto [0.001, 453.07] y [1.200, 418.91].

Las gráficas muestran que cada esquema de observación-control, aunque generan trayectorias diferentes, modifican el diagrama de fase a lazo abierto de tal modo que dentro del conjunto invariante \bar{X} la trayectoria de estado puede partir de cualquier estado inicial y estabilizarse en el punto deseado, en este caso el punto inestable a lazo abierto del sistema P2.

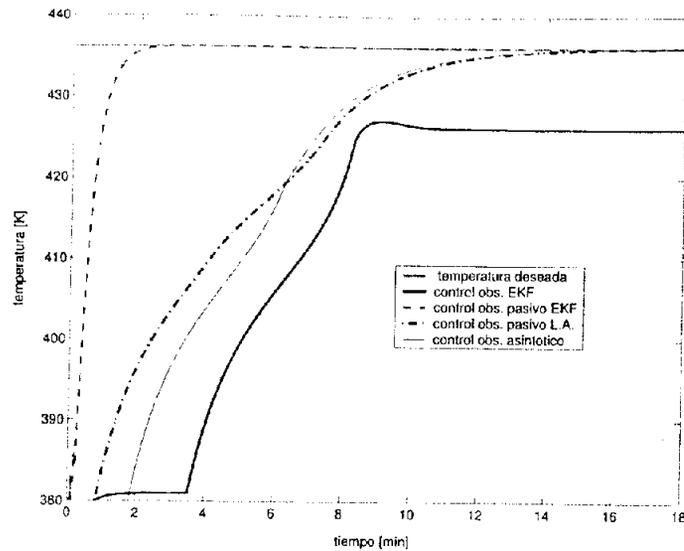


Figura 7.23: Comportamiento con variación de parámetros del control de temperatura

7.2.5. Observaciones de los experimentos a lazo cerrado

Comparando los resultados del error de observación a lazo abierto se puede notar que para el caso del EKF y el estimador con estructura pasiva con EKF el tiempo de convergencia es muy similar, no así el caso para el estimador con estructura pasiva a lazo abierto y el observador asintótico donde se presenta un aumento de hasta 12-13 minutos (aproximadamente el doble de tiempo a lazo abierto) tanto en la observación de concentración como de temperatura. Sin embargo, se puede notar de las gráficas que el comportamiento nominal, con ruido en la medición y con variación en los parámetros de los los controles basados en el estimador pasivo a lazo abierto y observador asintótico son prácticamente iguales, es decir en simulación estos controles prueban ser inmunes al ruido en la medición y a la variación de los parámetros del sistema. Esto se explica por la robustez mostrada por los mismos estimadores en las simulaciones a lazo abierto.

7.3. Resumen

Las simulaciones en lazo abierto muestran que aunque todos los observadores convergen en todas las pruebas, el estimador con estructura pasiva a lazo cerrado y el

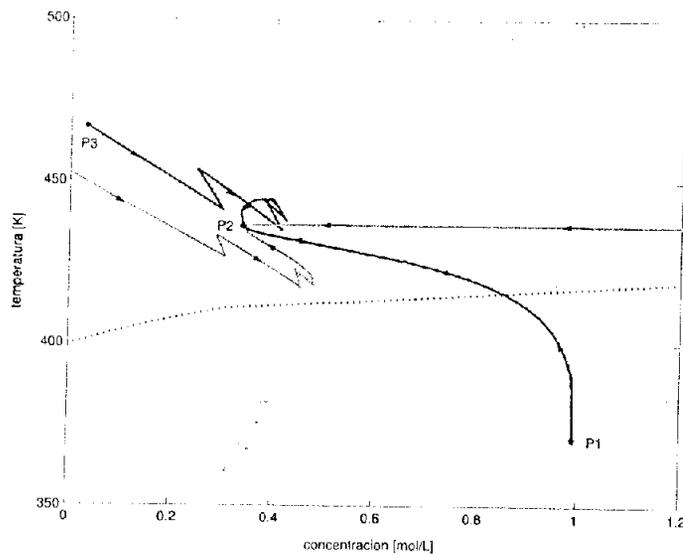


Figura 7.24: Plano de fase de regulación utilizando el control con el observador pasivo a lazo abierto.

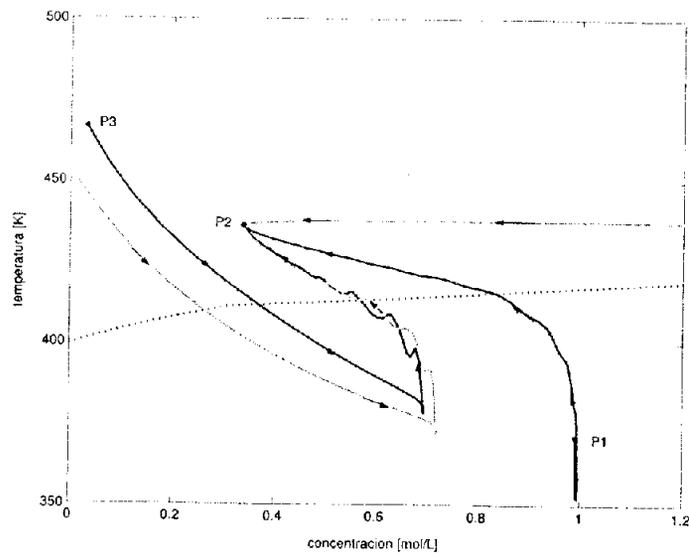


Figura 7.25: Plano de fase de regulación utilizando el control con el observador asintótico.

observador asintótico son los más robustos, pues presentan prácticamente el mismo comportamiento con presencia de ruido y con variación en los parámetros del modelo del reactor y por lo tanto los más recomendables en un uso real. Este resultado era de esperarse por la nula dependencia de estos observadores en el conocimiento de la velocidad de reacción.

Las simulaciones en lazo cerrado muestran que aunque los controles basados en el estimador con estructura a lazo abierto y el observador asintótico no son los mejores cuando existen condiciones ideales, mantienen el mismo comportamiento ante ruido en la medición y variación de parámetros. Es decir de nueva cuenta son los más recomendables para su uso real. Además, las simulaciones muestran que con ambos esquemas de observación-control se puede regular al reactor en cualquier punto dentro del conjunto invariante definido en (2.4.3), incluso en el punto que en lazo abierto es inestable.

Capítulo 8

Conclusiones

Reactores con velocidad de reacción no monótona generan usualmente problemas de observación de estados. La velocidad de reacción no monótona provoca que el mapa de observación no lineal pierda inyectividad. En el espacio de estados esta pérdida de inyectividad se puede visualizar como una región del espacio donde el sistema carece de observabilidad local e instantánea. Sin embargo, aún con este problema es posible diseñar observadores para el sistema. El análisis de observabilidad muestra que es posible diseñar un observador geométrico haciendo una saturación del término de ganancia que se vuelve infinito cuando la trayectoria de estados se aproxima a la región instantáneamente no observable. Dado que la pérdida instantánea de observabilidad no afecta al Grammiano de observabilidad, también es posible diseñar un filtro extendido de Kalman aunque con un aumento considerable de ecuaciones, ya que este observador determinístico requiere $n(n + 1)/2$ ecuaciones dinámicas auxiliares. Sin embargo estos dos observadores convencionales, el primero basado en una propiedad de observabilidad diferencial y el segundo en una propiedad integral, funcionan correctamente siempre que la pérdida de observabilidad ocurra sólo en instantes aislados de tiempo. Cualquier trayectoria de estados que no cumpla esta restricción difícilmente podrá ser observada. Más aún, una trayectoria que cumpla la restricción anterior pero que permanezca cerca de esta región problemática más que por sólo instantes de tiempo tendrá problemas para ser observada aun por el filtro extendido de Kalman ya que provoca que la propiedad de observabilidad completa este mal condicionada. Para salvar este proble-

ma en este trabajo se propone un enfoque constructivo donde se busca una estructura pasiva en el estimador de estados. Para ello se propone un modelo diferente, con un estado aumentado, para ser utilizado por el estimador en lugar del modelo nominal. Este modelo presenta una fuerte propiedad de observabilidad para dos de sus estados y una dinámica interna estable y por lo tanto detectable. Además presenta la ventaja de estimar el valor instantáneo de la velocidad de reacción que por lo general es una función incierta. Utilizando este enfoque constructivo se diseñan dos estimadores con estructura pasiva uno de los cuales prueba ser independiente de los errores de modelado del reactor.

Por otro lado también se utiliza un observador asintótico para estimar la concentración del reactor. Este observador es capaz de funcionar correctamente a pesar de también desconocer la velocidad de reacción, pero precisamente por esta razón no puede ser utilizado directamente en el control.

El problema de control para la clase de reactores estudiados con cinética no monótona y desconocida se resuelve mediante un control regulador MIMO acoplado con un estimador de concentración y de la velocidad de reacción, que se utilizan como los valores verdaderos en las ecuaciones de la señal de control. Sin embargo al realizar el acoplamiento se genera un problema. El problema consiste en que la tasa de dilución del reactor además de determinar la rapidez de convergencia de los observadores, es una entrada de control. Por un lado este hecho no permite modificar la rapidez de la dinámica del error de observación de concentración arbitrariamente, y por otro produce un lazo cerrado entre la dinámica del error de control y el error de observación.

Aún con este problema se demostró que suponiendo que el tiempo de residencia del reactor es finito se puede lograr la convergencia de los errores de observación y de control de concentración, al menos para el estimador con estructura pasiva a lazo abierto. Las simulaciones por su parte mostraron que los esquemas de observación-control basados en el estimador pasivo en lazo abierto y en el observador asintótico son inmunes a la incertidumbre de la velocidad de reacción y al ruido en la medición. Sin embargo el tiempo de convergencia de los observadores aumenta aproximadamente al doble del valor en lazo abierto. Más aún, se determinó que puede haber entradas de

control que hagan muy lenta la convergencia del error de concentración. En este sentido es necesario realizar un análisis más profundo de la interacción entre el observador y el controlador a lazo cerrado y determinar si es posible garantizar para cualquier conjunto de ganancias de observación y control la convergencia de los errores.

Para ambos esquemas de observación-control se debe cumplir la hipótesis de que la variación de la velocidad de reacción con respecto al tiempo debe de ser tan pequeña que se considere despreciable. La diferencia radica en la forma y en el lugar en donde esto se hace: mientras que en el esquema de estimación pasiva la velocidad de reacción se estima dentro del mismo observador tomando a la propia velocidad como un estado adicional, en el esquema asintótico esta se estima en el control a partir de la propia dinámica conocida de temperatura. Sin embargo en ambos esquemas de observación-control la estimación de la velocidad de reacción aumenta la robustez del sistema.

En este trabajo se pudo constatar que el diseño de esquemas de control basados en observadores para este tipo de reactores con velocidad no monótona e incierta debe realizarse de una forma integral, pues el resolver el problema de control u observación en forma aislada no garantiza la solución del problema completo. Por esta razón es necesario que en el futuro se logre sistematizar el diseño del controladores basados en observadores como un problema conjunto; y basar esta sistematización en las características intrínsecas del sistema. Por último cabe señalar que es necesario ampliar el análisis a modelos más complejos que reflejen una situación más realista de reactores STR e incluir otros tipos de reactores químicos y reactores biológicos que presentan un comportamiento no monótono en la velocidad de reacción.

Referencias

- [1] Dochain, D. , *State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial*, J. of Process Control, 13 (2003) 801-818.
- [2] Aris, R. *Elementary Chemical Reactor Analysis*, Prentice hall, New jersey, 1969.
- [3] Gavalas. G. R., *Nonlinear Differential Equations of Chemical reacting Systems*, Springer, New York. 1968.
- [4] Herskowitz, H., Kenney. C.N., *CO oxidation on Pt supported catalyst. Kinetics and multiple steady states*. Can. J. Chem. Eng., 61, 194. 1983
- [5] Agrawal, M., Bovin. D., *Improved state estimator in the face of unreliable parameters*, J. of Process control 1, 251-257, 1991.
- [6] Schuler, H., Schmidt, C.U., *Calorimetric-state estimators for chemical reactor diagnosis and control: review of methods and applications*. Chemical Engineering Science, 47, 899-915, 1992
- [7] Bastin, G., Dochain, D., *On line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, Amsterdam. 1990.
- [8] Butt, J., *Kinetics and reactor Design*. Prentice Hall. New Jersey. 1980.
- [9] Khalil, H., *Nonlinear Systems*. Prentice hall, N.J., 1996.
- [10] Fan, S., Alpay, E. , *Calorimetric estimation for a batch-loop emulsion polymerisation reactor*. Chemical Engineering Science, 59 (2004) 2811-2815.

-
- [11] Álvarez, J., López, T., *Robust Dynamic State Estimation of Nonlinear Plants*. AIChE Journal, Vol. 45, No. 1, 107-123
- [12] Hill, C. *An Introduction to Chemical Engineering Kinetics & Reactor Design*. John Wiley & Sons, E. U. A., 1980
- [13] Marino, R., Tomei, P., *Nonlinear control design : geometric, adaptive, and robust*. Prentice hall, New York, 1995.
- [14] Benamor, S.; Hammouri, H.; Couenne, F., *A Luenberger-like observer for discrete-time nonlinear systems*, Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on .Volume: 4 . 16-18 1998
- [15] Krener, A.J., Respondek, W., *Nonlinear Observers with linearizable error dynamics*. SIAM Journal of Control and Optimization. 23, 197-216, 1985.
- [16] Isidori, A., *Nonlinear Control System*. Springer, New York, 1995.
- [17] López, T., Tronci, S., Baratti, R., Álvarez, J. *State estimation in a Catalytic Reactor via a Constructive Approach.*, 15th Triennial World Congress, 2002 IFAC.
- [18] Álvarez-Ramírez, J., Álvarez, J., Morales, A., *An adaptive cascade control for a class of chemical reactors*. I. J. of Adaptive Control and Signal Processing, 2002, 16:681-701.
- [19] Álvarez, J., López, T., Hernandez, H., *Robust geometric Nonlinear Control of Process Systems*. I. Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, 2000, IFAC
- [20] López, T., Álvarez, J., *On the effect of the estimation structure in the functioning of a nonlinear copolymer reactor estimator*. J. of Process Control, 14 (2004) 99-109.
- [21] Dochain, D., Pengov, M., *State observers for processes with uncertain kinetics*, Proc. ADCHEM2000, 171-176, 2000.
- [22] Slotine, J. E, Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice hall, New Jersey, 1990.
-

-
- [23] Sepulchre, R. Jankovic', M., Kokotovic', P.V., *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, London, 1997.
- [24] Perlmutter, D. *Stability of Chemical Reactors*, prentice hall, New Jersey, 1972.
- [25] Misawa, E.A., Hedrick, J.K., *Nonlinear Observers A State-of-the-Art Survey*, Transactions of the ASME, Vol 111, 344-352, 1989.
- [26] Vargas, A. *Control de tiempo óptimo de un biorreactor aerobio usando observadores no lineales*. Tesis, U.N.A.M., 1999.
- [27] Brammer, K., Siffling G., *Kalman-Bucy filters*, Artech house, Massachusetts, 1989.
- [28] Nijmeijer, H., Van der Shaft, A., *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [29] Gauthier, J. P., Hammouri, H., Othman, S., *A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors*, IEEE Transactions of Automatic Control, Vol. 37 (6), 1992.
- [30] Chen, Chi-Tsong. *Linear System theory and Design*, Oxford University Press, 2nd. e.d., 1999.
- [31] Rugh, Wilson. J., *Linear System theory*, Prentice hall, 2nd. e.d., NJ 1996.
- [32] Ciccarella, G., Dalla Mora, M., Germani, A., *A Luenberger-like Observer for Nonlinear Systems*, International Journal of Control, No. 57, Vol 3, 1993
- [33] Alvarez, J., Alvarez, J., Suárez, R., *Nonlinear bounded control for a class of continuous agitated tank reactors*. Chemical Engineering Science, VI. 46, No. 12, 1991.
- [34] Hermann, R., Krener, A. J., *Nonlinear Controllability and Observability*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 5, 1977.
- [35] Ray, W.H., *Polymerization reactor control*, IEEE Control Systems, Vol. 6, No. 4, 1986.
-

-
- [36] Bornard, G., Celle-coeuime, F., Gilles, G., *Observabilidad y Observadores*. Nonlinear Systems, modelling and destination. Chapman and Hall, 1993.
- [37] Ibarra-Rojas, S., Moreno, J., Espinoza-Pérez, G. *Global observability analysis of sensorless induction motors*. Automatica, Vol. 40, 2004.
- [38] Sontag, E.D., Wang, Y. *Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems*. Systems & Control Letters, Vol 29, 1997.
- [39] Baratti, R., Alvarez, J., Miorbidelli, M, *Design and experimental verification of a nonlinear catalytic reactor estimator*. Chemical Engineering Science, Vol. 48, No. 14, 1993.
- [40] Gonzalez, P., Alvarez, J. *Combined PI-inventory control of solution homopolymerization reactors*. Submitted to the Industrial & Engineering Chemistry research Journal, 2004.
- [41] Alvarez, J., Zaldo, F., Oaxaca, G., *Towards a joint process and control design for batch processes: application to semibatch polymer reactors*.
-