



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

TESIS:

**“APLICACIONES Y PRINCIPIOS BÁSICOS DEL
MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO EN
PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL.”**

PRESENTADA POR:

ROBERTO ROBLES JIMÉNEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE:

INGENIERO CIVIL

DIRIGIDA POR:

DR. ROBERTO GÓMEZ MARTÍNEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

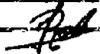
Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Roberto Robles Jiménez

FECHA: 26/Enero/2005

FIRMA: 



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
FING/DCTG/SEAC/UTIT/032/04

Señor
ROBERTO ROBLES JIMÉNEZ
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor DR. ROBERTO GÓMEZ MARTÍNEZ, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

"APLICACIONES Y PRINCIPIOS BÁSICOS DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO EN PROBLEMAS DE INGENIERÍA CIVIL"

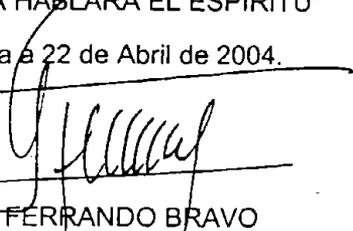
- INTRODUCCIÓN
- I. MÉTODO DE LOS RESIDUOS PESADOS
- II. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
- III. ELEMENTO FINITO BARRA
- IV. ELEMENTO FINITO VIGA
- V. PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR
- VI. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS A PROBLEMAS PLANOS
- CONCLUSIONES
- ANEXOS
- BIBLIOGRAFÍA

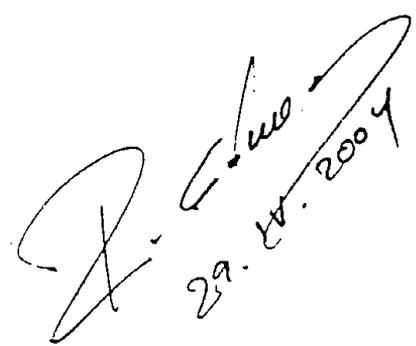
Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cd. Universitaria a 22 de Abril de 2004.


M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/AJP/cfc


29. IV. 2004

ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN.....	I
I. Método de los residuos pesados.....	1
II. Método del elemento finito.....	19
III. Elemento finito barra.....	30
IV. Elemento finito viga.....	52
V. Problemas de campo escalar.....	62
VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.....	88
Conclusiones.....	104
Anexos.....	107
Bibliografía	

INTRODUCTION

Dentro del campo de la mecánica de sólidos podemos encontrar por un lado los sistemas discretos y por otro los sistemas continuos. A los primeros por su simplicidad es posible su estudio a partir de fórmulas explícitas o mediante el uso de algún método numérico. Por su parte un sistema continuo no es posible verlo como un conjunto de entidades independientes entre sí, muy por el contrario, todas actúan como un todo y por lo mismo, su estudio adquiere un mayor grado de complejidad y cuya fórmula única que describa su comportamiento no existe, por lo menos no de forma satisfactoria.

Ejemplos de tales problemas son los que surgen al analizar la consolidación o deslizamiento de masas de suelo, vibración de maquinaria, escurrimiento de líquidos y gases, etc.

“Todos estos casos se relacionan con medios deformables caracterizados por el hecho de que sus átomos o moléculas están próximos unos a otros que el material puede considerarse, microscópicamente, como una masa homogénea, cuyas deformaciones deben poder preverse sin necesidad de considerar el movimiento de cada una de las partículas que la componen.”

“Este resultado producto de la experiencia, sugiere que dichos materiales pueden idealizarse como medios continuos, carentes de huecos o separaciones entre sus partículas. Normalmente se acepta, además, que tales medios sean también isótropos.”

Debido a la insuficiencia de una solución analítica para dar salida a problemas que involucren sistemas continuos, desde la antigüedad se han usado los conceptos de **DISCRETIZACIÓN** y **APROXIMACIÓN NUMÉRICA** y es en estos mismos, en los cuales se cimienta la Teoría Del Elemento Finito.

“Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.)

empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.141516.”

“El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aerospacial. En los años 40 Courant propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigt-Ritz para aproximar soluciones.”

“Fueron Turner, Clough, Martin y Topp quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.”

“El trabajo de revisión de Oden presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki y de Zienkiewicz y Holister presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de Zienkiewicz y Cheung o Zienkiewicz y Taylor presentan una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se muestra que las ecuaciones de los EF pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.”

Aunque como ya se mencionó la estructura básica del método es conocida desde hace bastante tiempo, como formulación matemática es reciente y su desarrollo ha ido de la mano del avance tecnológico computacional. Las computadoras han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantea en el método.

Los estudios teóricos deben de complementarse con una serie de ejemplos con el fin de que los conceptos le queden perfectamente claros al lector, y que le permitan calcular casos reales.

Esta tesis pretende dar a conocer las bases de la teoría del elemento finito. Está dedicada a que el lector conozca los fundamentos sobre los que se basan muchos de los cálculos más avanzados utilizando este método. Así, una parte de la tesis se dedica al estudio de sistemas estructurales continuos. Este documento se recomienda a aquellos estudiantes que teniendo una inclinación al estudio de la mecánica, deseen profundizar en el análisis de sistemas estructurales complejos formados por medios continuos, como los encontrados en la construcción de piezas de maquinaria, edificios, etc.

Primeramente, aprenderemos un método numérico de solución de ecuaciones diferenciales llamado Método de los residuos pesados, ya que en todos los casos que analicemos, siempre se partirá de una de estas expresiones matemáticas.

En el segundo capítulo se pretende dar una presentación general del método de los elementos finitos, la terminología que se usará más adelante y la secuencia de pasos a seguir para el análisis de un sistema estructural así como el saber interpretar las condiciones de frontera que presente el problema.

Ya en el tercer capítulo, comenzaremos el análisis de estructuras iniciando con la más fácil de ellas que es, el elemento barra sometida a cargas axiales, aquí aprenderemos a calcular sus desplazamientos y esfuerzos.

Otro elemento unidimensional de gran importancia en el análisis estructural es el elemento viga. De una viga nos interesará conocer que tanto puede flexionarse al ser cargada pero también poder calcular el momento flexionante y la fuerza cortante en determinados puntos de interés, esto lo aprenderemos a hacerlo el cuarto capítulo.

Es común en gran parte de las ramas de la ingeniería encontrar problemas de carácter escalar. En el capítulo V, analizaremos solo algunos de los fenómenos habituales en la ingeniería civil como son la transferencia de calor y el flujo de medios porosos, aunque una vez explicado estos, se estará en condiciones de poder deducir una expresión que permita dar solución a otro tipo de fenómenos regidos por un mismo tipo de ecuación diferencial.

El último capítulo se dedica a efectuar el estudio de la elasticidad en dos dimensiones. La importancia de la mecánica del medio continuo en problemas de estado plano de esfuerzos y deformaciones se presenta en este capítulo pretendiendo dar una introducción para la solución de problemas de mayor complejidad.

Para la correcta asimilación del contenido de esta tesis se requieren los conocimientos adquiridos en las asignaturas de mecánica y estructuras. Es necesario así mismo disponer de conocimientos básicos de álgebra matricial.

CAPÍTULO I

CAPÍTULO I

"MÉTODO DE LOS RESIDUOS PESADOS"

I.1. Resolver por el método de residuos pesados la siguiente ecuación diferencial

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

en el dominio $0 \leq x \leq 1$, con las siguientes condiciones de frontera

$$y = 1 \text{ en } x = 0$$

$$y = 0 \text{ en } x = 1$$

SOLUCIÓN:

Primeramente se aproxima la solución de la ecuación mediante la serie

$$y \approx y^* = \sum_{i=1}^n c_i f_i$$

donde "f_i" son funciones desconocidas, "c_i" son coeficientes indeterminados y "n" es el número de términos de la serie que se quiera considerar en la solución. La solución sugerida debe de cumplir con las condiciones de frontera del problema. Además, cuando proponemos una solución hay que tener en cuenta el grado de la ecuación diferencial.

Utilizaremos una aproximación con $n = 2$, esto es:

$$y^* = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

En el contexto del problema la expresión anterior se escribe como:

$$y^* = 1 + c_1x + c_2x^2$$

En la que se agregó el término independiente "1", para cumplir con las condiciones de frontera. Esto es:

para $x=0$, $y^*=1 \Rightarrow$ si cumple

para $x=1$, $y^*=1 + c_1 + c_2 \Rightarrow$ no cumple

Como no se cumplen ambas condiciones debemos manipular la aproximación que inicialmente habíamos propuesto. Así, si multiplicamos por $1-x$;

$$y^* = (1-x)(1 + c_1x + c_2x^2) \quad \dots (1.1)$$

Verificando otra vez que se cumpla con las condiciones de frontera

para $x=0$, $y^*=1 \Rightarrow$ si cumple

para $x=1$, $y^*=0 \Rightarrow$ si cumple

Una vez que se tiene una expresión que cumple con las condiciones de frontera, se procede a calcular el error o residuo (ϵ). Para ello sustituimos la solución propuesta en la ecuación original:

$$\epsilon = x \frac{d^2y^*}{dx^2} + \frac{dy^*}{dx}$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$\epsilon = 1 - c_1 + c_1x - 3c_2x^2$$

El siguiente paso consiste en aplicar la definición de producto escalar entre el error y la función de peso W_i .

$$\langle \epsilon, W_i \rangle_{\Omega} = 0$$

$$\int_{\Omega} (\epsilon W_i) d\Omega = 0$$

donde W_i es la función de peso, cuya forma y/o valor dependerá del método que se elija.

Cabe mencionar que como en este ejemplo tomamos una $n = 2$, se deben desarrollar dos ecuaciones para cada método a modo de tener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. A continuación se presenta el desarrollo de la solución para cuatro métodos:

I.1.a. Método de colocación.

Por definición se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) \delta(x_i) dx = \epsilon(x_i)$$

donde $\delta(x_i)$ es la función delta de Dirac. Si damos valores a $W_1 = \delta(1/3)$ y $W_2 = \delta(2/3)$. La primera ecuación se obtiene con la expresión

$$\int_0^1 (1 - c_1 + c_1 x - 3c_2 x^2) \delta(1/3) dx = 0$$

Capítulo I. Método de los residuos pesados

Sustituyendo el valor de $1/3$ donde aparece la variable "x", tal como lo indica la definición, para después resolver la integral, obtenemos

$$0.666c_1 + 0.333c_2 = 1 \quad \dots (1.2)$$

La otra ecuación se obtiene de la expresión:

$$\int_0^1 (1 - c_1 + c_1x - 3c_2x^2) \delta(2/3) dx = 0$$

Al igual que para el valor de $1/3$, sustituyendo el valor de $2/3$ donde aparece la variable "x", obtenemos

$$0.333c_1 + 1.333c_2 = 1 \quad \dots (1.3)$$

Con las expresiones (1.2) y (1.3) tenemos nuestro sistema de dos ecuaciones. Al resolverlo se obtiene

$$c_1 = 1.287$$

$$c_2 = 0.429$$

Si sustituimos estas cantidades en la aproximación de la solución (ec. 1.1):

$$y^* = (1 - x)(1 + 1.287x + 0.429x^2)$$

I.1.b. Método de los subdominios.

Para este caso, dividiremos el dominio ($0 \leq x \leq 1$) en dos subdominios iguales. Entonces por definición tenemos que:

$$W_1 = 1 \text{ en } 0 \leq x \leq 1/2$$

$$W_1 = 0 \text{ en } 1/2 \leq x \leq 1$$

$$W_2 = 0 \text{ en } 0 \leq x \leq 1/2$$

$$W_2 = 1 \text{ en } 1/2 \leq x \leq 1$$

Una vez establecido lo anterior, la primera ecuación se escribe como:

$$\int_0^{1/2} \epsilon(1) dx + \int_{1/2}^1 \epsilon(0) dx = 0$$

Sustituyendo las funciones $\epsilon(1)$ y $\epsilon(0)$ se obtiene:

$$\int_0^{1/2} (1 - c_1 + c_1 x - 3c_2 x^2)(1) dx = 0$$

cuya solución es

$$0.357c_1 + 0.125c_2 = 0.5 \quad \dots (1.4)$$

La segunda ecuación se obtiene de evaluar la integral

$$\int_0^{1/2} \epsilon(0) dx + \int_{1/2}^1 \epsilon(1) dx = 0$$

Sustituyendo en esta las funciones $\epsilon(0)$ y $\epsilon(1)$ se obtiene

$$\int_{1/2}^1 (1 - c_1 + c_1 x - 3c_2 x^2)(1) dx = 0$$

cuya solución es

$$0.250c_1 + 0.875c_2 = 0.5 \quad \dots (1.5)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1.4) y (1.5) se obtiene:

$$c_1 = 1.263$$

$$c_2 = 0.211$$

Sustituyendo estas cantidades en la ecuación de aproximación de la solución (ec. 1.1):

$$y^* = (1 - x)(1 + 1.263x + 0.211x^2)$$

I.1.c. Método de Galerkin.

La función de aproximación (ec. 1.1) propuesta, una vez manipulada matemáticamente también puede ser expresada de la siguiente forma $y^* = 1 - x + c_1(x - x^2) + c_2(x^2 - x^3)$, por lo que las funciones de peso son:

$$W_1 = x - x^2$$

$$W_2 = x^2 - x^3$$

Por lo tanto la primera ecuación se escribe como

$$\int_0^1 (1 - c_1 + c_1 x - 3c_2 x^2)(x - x^2) dx = 0$$

lo que una vez resuelta la integral se reduce a

$$0.083c_1 + 0.150c_2 = 0.166 \quad \dots (1.6)$$

La segunda ecuación se escribe como

$$\int_0^1 (1 - c_1 + c_1 x - 3c_2 x^2)(x^2 - x^3) dx = 0$$

lo que una vez resuelta la integral se reduce a

$$0.033c_1 + 0.100c_2 = 0.083 \quad \dots (1.7)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (1.6) y (1.7) se obtiene:

$$c_1 = 1.239$$

$$c_2 = 0.421$$

Al sustituir estos valores en la aproximación de la solución (ec. 1.1) se tiene:

$$y^* = (1 - x)(1 + 1.239x + 0.421x^2)$$

I.1.d. Método de los mínimos cuadrados.

En este método se requiere derivar parcialmente el error con respecto a cada una de las constantes arbitrarias para calcular las funciones de peso.

Así,

$$W_1 = \frac{\partial \epsilon}{\partial c_1} = x - 1$$

$$W_2 = \frac{\partial \epsilon}{\partial c_2} = 3x^2$$

Tenemos entonces que la primera ecuación resulta

$$\int_0^1 (1 - c_1 + c_1x - 3c_2x^2)(x - 1) dx = 0$$

la que al resolverla produce

$$0.333c_1 + 0.250c_2 = 0.5 \quad \dots (1.8)$$

La segunda ecuación resulta

$$\int_0^1 (1 - c_1 + c_1x - 3c_2x^2)(3x^2) dx = 0$$

de donde obtenemos

$$0.250c_1 + 1.800c_2 = 1 \quad \dots (1.9)$$

Resolviendo el sistema, de las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$c_1 = 1.211$$

$$c_2 = 0.387$$

Sustituyendo estas cantidades en la ec. (1.1), se tiene

$$y^* = (1-x)(1+1.211x+0.387x^2)$$

COMPARACIÓN DE SOLUCIONES.

La mejor forma de evaluar cada una de las soluciones obtenidas es dibujarlas en el dominio especificado y compararlas con la solución analítica que en este caso es

$$y = 1-x^2$$

La Tabla 1.1., registra de forma numérica las diferencias entre cada una de las soluciones antes calculadas por el método de los residuos pesados, mientras que en la Fig. 1.1., tenemos las gráficas correspondientes de dichas soluciones.

Tabla 1.1. Comparación numérica de las soluciones del problema I.1.

	Sol. Analítica	Mét. Colocación	Mét. Subdominios	Mét. Galerkin	Mét. Mín. Cuad.
0	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.99	1.0197	1.0156	1.0153	1.0125
0.2	0.96	1.0196	1.0088	1.0117	1.0061
0.3	0.91	0.9973	0.9785	0.9867	0.9787
0.4	0.84	0.9501	0.9234	0.9378	0.9278
0.5	0.75	0.8754	0.8421	0.8524	0.8511
0.6	0.64	0.7707	0.7335	0.7580	0.7464
0.7	0.51	0.6333	0.5862	0.6221	0.6112
0.8	0.36	0.4608	0.4291	0.4521	0.4433
0.9	0.19	0.2506	0.2308	0.2456	0.2403
1	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

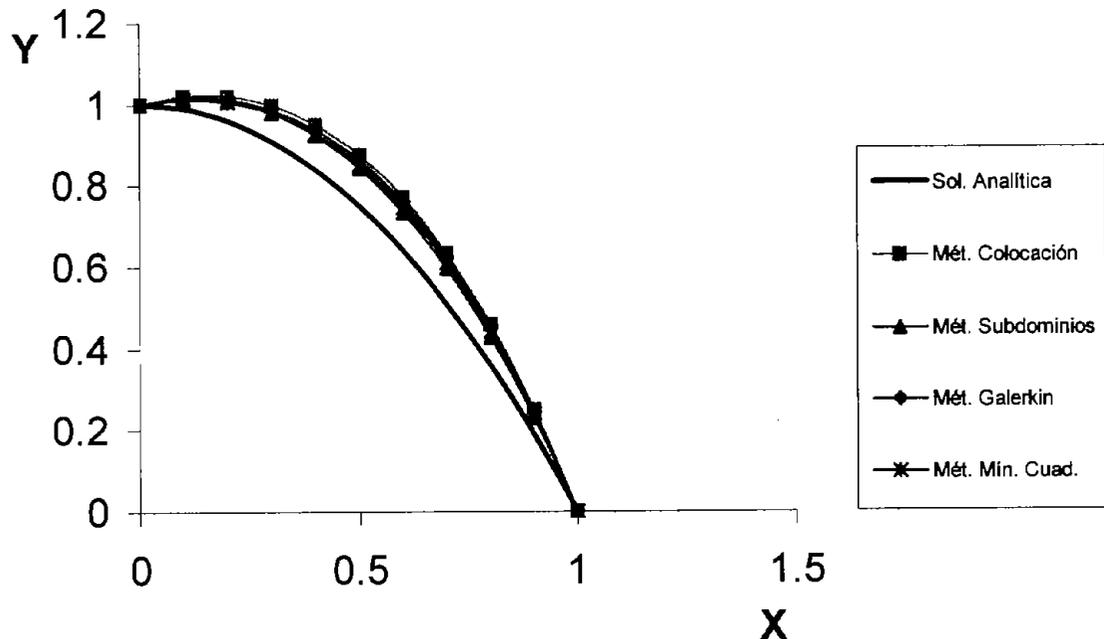


Fig. 1.1. Comparación gráfica de las soluciones del problema I.1.

I.2. Resolver por el método de residuos pesados la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = (x + 1)$$

en el dominio $0 \leq x \leq 1$, con las siguientes condiciones de frontera

$$\Phi = 0 \text{ en } x = 0$$

$$\Phi = 1 \text{ en } x = 1$$

SOLUCIÓN:

Aproximamos la solución de la ecuación mediante la serie

$$\Phi \approx \Phi^* = \sum_{i=1}^n c_i f_i$$

donde "f_i" son funciones desconocidas, "c_i" coeficientes indeterminados y "n" el número de términos que deseamos contenga la solución a la ecuación diferencial.

Para este caso utilizaremos una aproximación con n = 1, esto es:

$$\Phi^* = c_1 f_1$$

Una primera propuesta de dicha ecuación de aproximación puede ser la siguiente

$$\Phi^* = c_1 (x^3 - 2x^2 + x)$$

verificando que se cumpla con las condiciones de frontera, tenemos que

para $x = 0$, $\Phi^* = 0 \Rightarrow$ si cumple

para $x = 1$, $\Phi^* = 0 \Rightarrow$ no cumple

Como no se cumplen ambas condiciones debemos manipular la aproximación que inicialmente habíamos propuesto. Si sumamos el término "x" de tal forma que se obtenga

$$\Phi^* = x + c_1(x^3 - 2x^2 + x) \quad \dots (2.1)$$

verificando nuevamente que se cumplan las condiciones de frontera dadas,

para $x = 0$, $\Phi^* = 0 \Rightarrow$ si cumple

para $x = 1$, $\Phi^* = 1 \Rightarrow$ si cumple

Una vez que tenemos una expresión que cumple con las condiciones de frontera, se procede a calcular el error o residuo (ϵ). Para ello se debe sustituir la solución propuesta en la ecuación diferencial original:

$$\epsilon = \frac{d^2\Phi^*}{dx^2} - (x + 1)$$

Realizando las operaciones indicadas en la expresión anterior se tiene:

$$\epsilon = c_1(6x - 4) - (x + 1)$$

Para este ejemplo la primera aproximación pudo ser $c_1(x^2 - x)$ y después agregar una "x" y también cumpliría con las condiciones de frontera pero los resultados que se obtuvieran no serían tan próximos a una solución por métodos analíticos, por lo que se

recalca el hecho de que entre mayor sea el grado del polinomio que propongamos, las consecuencias serán más satisfactorias.

A continuación se debe aplicar la definición de producto escalar entre el error y la función de peso W_i .

$$\langle \epsilon, W_i \rangle_{\Omega} = 0$$
$$\int_{\Omega} (\epsilon W_i) d\Omega = 0$$

la forma y/o valor de la función de peso dependerá del método que se elija. Como en este ejemplo se decidió tomar un número de términos $n = 1$, entonces, solamente hay que desarrollar una ecuación para cada método. En seguida se presenta el desarrollo de la solución por cuatro métodos diferentes:

1.2.a. Método de colocación.

Por definición se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) \delta(x - x_i) dx = \epsilon(x_i)$$

donde $\delta(x_i)$ es la función Delta de Dirac. Si damos el valor a $W_1 = \delta(1/2)$, se obtiene la expresión

$$\int_0^1 [c_1(6x - 4) - (x + 1)] \delta(1/2) dx = 0$$

sustituyendo el valor de $1/2$ donde aparece la variable "x", tal como lo indica la definición, para después resolver la integral, obtenemos

$$c_1 = -1.5$$

Si sustituimos esta cantidad en la aproximación de la solución (ec. 2.1):

$$\Phi^* = x - 1.5(x^3 - 2x^2 + x)$$

I.2.b. Método de los subdominios.

Para este caso, solo necesitamos un subdominios, entonces por definición tenemos que:

$$W_1 = 1.$$

Por lo cual, la integral a resolver es la siguiente:

$$\int_0^1 [c_1(6x - 4) - (x + 1)](1) dx = 0$$

cuya solución es

$$c_1 = -1.5$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de aproximación de la solución (ec. 2.1):

$$\Phi^* = x - 1.5(x^3 - 2x^2 + x)$$

1.2.c. Método de Galerkin.

En este caso, la función de peso es igual a la función f_1 de la función de aproximación, por lo tanto:

$$W_1 = x^3 - 2x^2 + x.$$

Por lo tanto la constante se calculará con la expresión

$$\int_0^1 [c_1(6x - 4) - (x + 1)](x^3 - 2x^2 + x) dx = 0$$

una vez resuelta la integral se reduce a

$$c_1 = -0.875$$

Al sustituir este valor en la aproximación de la solución (ec. 2.1), se tiene

$$\Phi^* = x - 0.875(x^3 - 2x^2 + x)$$

1.2.d. Método de los mínimos cuadrados.

En este método se requiere derivar parcialmente el error respecto a la constante arbitraria para calcular la función de peso.

Por lo tanto, la función de peso buscada es

$$W_1 = \frac{\partial \epsilon}{\partial c_1} = 6x - 4$$

Tenemos entonces que la integral a resolver es

$$\int_0^1 [c_1(6x - 4) - (x + 1)](x^3 - 2x^2 + x) dx = 0$$

y cuyo resultado una vez llevada a su mínima expresión es

$$c_1 = 0.25$$

Sustituyendo esta cantidad en la ecuación (2.1), se obtiene

$$\Phi^* = x + 0.25(x^3 - 2x^2 + x)$$

COMPARACIÓN DE SOLUCIONES.

En la Tabla 2.1., podemos apreciar los diferentes resultados que arroja cada solución al ser valuadas en el intervalo especificado en el problema. Además, en la Fig. 2.1 observamos estas discrepancias de forma gráfica comparando cada uno de estos resultados con el que proporcionaría la solución analítica de la ecuación diferencial que en este caso es

$$\Phi = x^2 - 2x + 1$$

Tabla 2.1. Comparación numérica de las soluciones del problema I.2.

	Sol. Analítica	Mét. Colocación	Mét. Subdominios	Mét. Galerkin	Mét. Mín. Cuad.
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0385	-0.0215	-0.0215	0.0291	0.1203
0.2	0.0880	0.0080	0.0080	0.0880	0.2320
0.3	0.1495	0.0795	0.0795	0.1714	0.3368
0.4	0.2240	0.1840	0.1840	0.2740	0.4360
0.5	0.3125	0.3125	0.3125	0.3906	0.5313
0.6	0.4160	0.4560	0.4560	0.5160	0.6240
0.7	0.5365	0.6055	0.6055	0.6449	0.7158
0.8	0.6720	0.7520	0.7520	0.7720	0.8080
0.9	0.8265	0.8865	0.8865	0.8921	0.9023
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

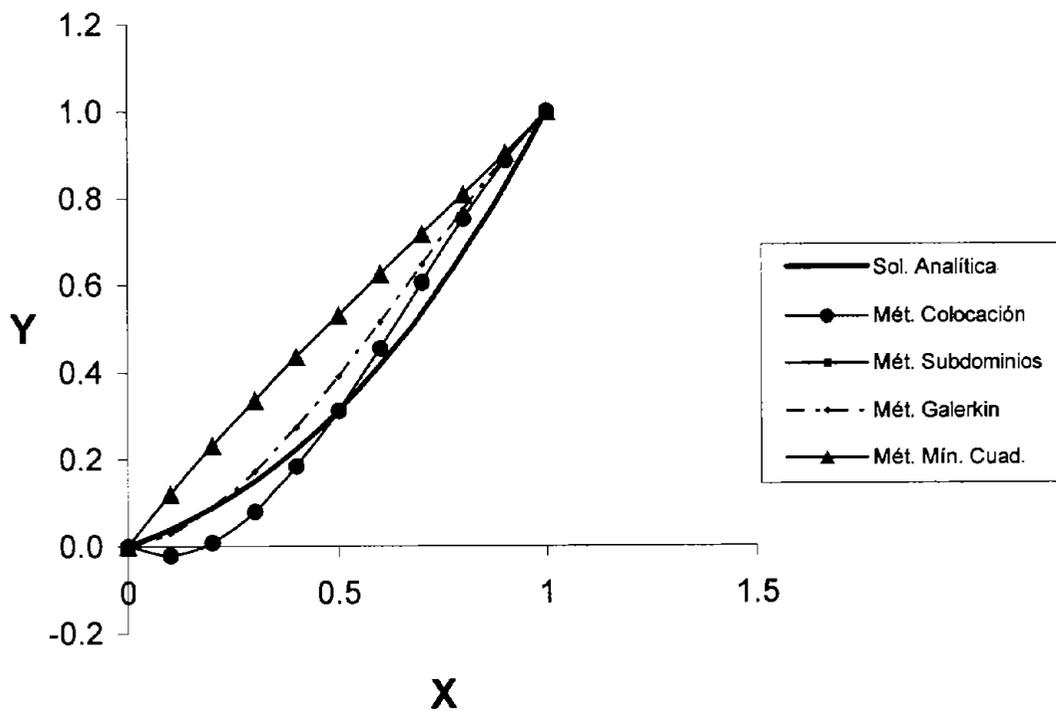


Fig. 2.1. Comparación gráfica de las soluciones del problema I.2.

CAPÍTULO I

"MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO"

Capítulo II. Método del elemento finito

La mayor parte del trabajo que realiza el ingeniero tiene que ver con el cálculo y análisis de fenómenos como la deformación axial en barras, transferencia de calor a través de cuerpos sólidos, el flujo de agua en medios porosos, campos eléctricos y magnéticos, flexión de vigas y marcos, entre otras.

El método del elemento finito es una herramienta que en la actualidad es de mucha utilidad para encontrar solución a las aplicaciones de cada uno de estos temas.

Este método permite el cálculo de una variable primaria,¹ la cual, una vez conocida, permite determinar otras que se quieran conocer de uno u otro fenómeno antes enunciado. En la Tabla 2.1, se presentan algunas de estas variables primarias y secundarias.

Tabla 2.1. Variables calculadas a partir del método del elemento finito.

FENÓMENO	VARIABLE PRIMARIA	VARIABLE (S) SECUNDARIA
Deformación axial de una barra	Variación longitudinal de la barra (U)	Esfuerzo en la barra (σ)
Transferencia de calor	Temperatura en el cuerpo (T)	Flujo de calor a través del cuerpo (q)
Flujo de agua en medios porosos	Potencial hidráulico (Φ)	Velocidad del agua (v)
Flexión en vigas	Flecha (ω) y giro (θ)	Momento (M) y cortante (V)

¹ También llamadas fundamentales.

II.1. Conceptos fundamentales.

El método del elemento finito se basa en la **DISCRETIZACIÓN** (división) del continuo por medio de líneas, superficies o volúmenes, dependiendo en que dimensión se este trabajando, con el fin de obtener un número finito de **ELEMENTOS**, los cuales están interconectados por una serie de puntos llamados **NODOS** colocados en sus entornos, preferentemente en los vértices. La importancia de los nodos radica en que son el medio por el cual se transfiere la información de un elemento a otro. En la Fig. 2.1., podemos ver la modelación de algunos cuerpos por la teoría del elemento finito, esto también es conocido como **MALLA**.

De cada elemento conoceremos sus propiedades geométricas y constitutivas del material, mientras que de los nodos se pueden determinar el valor de los **GRADOS DE LIBERTAD (gdl)**² (desplazamientos, temperaturas, potencial de flujo, etc.), así como las acciones ejercidas en cada uno (fuerzas externas, fuentes de energía, flujo de calor, etc.). Los grados de libertad son las variables que determinan el estado y/o posición del nodo, a demás de ser el lugar donde se materializan las incógnitas fundamentales del problema.

Así por ejemplo, en un elemento unidimensional sus nodos tendrán un grado de libertad (desplazamiento en dirección "X"), en uno bidimensional dos grados de libertad (desplazamiento en dirección "X" y desplazamiento en dirección "Y") y en uno tridimensional, 3 grados de libertad (desplazamiento en dirección de cada eje coordenado), en el caso de una viga dependiendo de cómo este apoyada, puede incluir además de la translación, la rotación respecto a un eje coordenado, dependiendo esto del sistema de referencia que se utilice.

² Condiciones iniciales o de frontera.

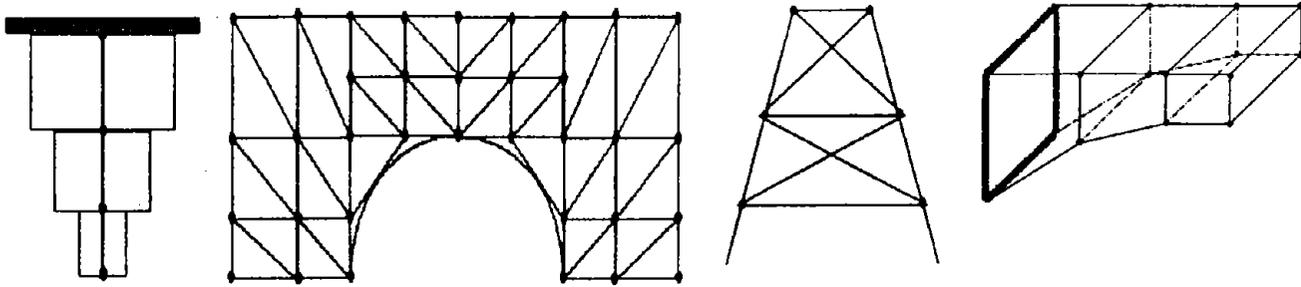


Fig. 2.1. Discretización de cuerpos en elementos finitos.

Es común la combinación de fenómenos, por ejemplo, si el sistema a estudiar es una viga en voladizo con una carga puntual en el extremo y una distribución de temperaturas, los grados de libertad de cada nodo serán:

- Desplazamiento en dirección X.
- Desplazamiento en dirección Y.
- Giro respecto al eje Z.
- Temperatura.

No obstante, estos casos quedan fuera de los alcances de éste trabajo.

II.2. Formulación del método de los elementos finitos.

Si bien existe una gran discrepancia entre los problemas que podemos analizar con este método, todos tienen algo en común: el hecho de poder ser descritos a través de una ecuación diferencial.

En general, el método del elemento finito se puede concebir como una sucesión de pasos a seguir con el fin de llegar a la obtención del valor (es) de lo que hemos señalado como variable primaria.

Paso 1. Discretización del dominio.

Una vez que conocemos la geometría del continuo, que puede ser regular o irregular, podemos determinar que tipo de elementos finitos se usarán para llevar a cabo su discretización, partiendo del hecho de que esta división del cuerpo deberá apegarse lo mejor posible a los límites que éste presente.

El número de elementos y su tamaño lo definirá cada quien de acuerdo a los intereses que persiga, es decir, que tan exactos quiera sean los resultados obtenidos al aplicar el método³. Así también queda a consideración personal el tipo de elementos en que se dividirá al continuo, esto para problemas de 2 y 3 dimensiones, dependiendo de la idealización que se le de al problema.

Algo básico es colocar un nodo en puntos donde se especifiquen las condiciones de frontera del problema, por ejemplo, apoyos, temperatura, potencial de flujo, cargas externas, etc. y en lugares donde nos interese conocer las consecuencias que resulten de la aplicación de estas condiciones.

Una vez discretizado el cuerpo, habrá que designarle a cada elemento y a cada nodo un número, esto es importante ya que este mismo orden nos ayudará más adelante a conformar el modelo característico del problema analizado. En la Fig. 2.2., se muestra un ejemplo de cómo debe de realizarse esto, aunque este orden también dependerá del gusto de cada persona.

³ A mayor número y menor tamaño de elementos, más confiable será la solución.

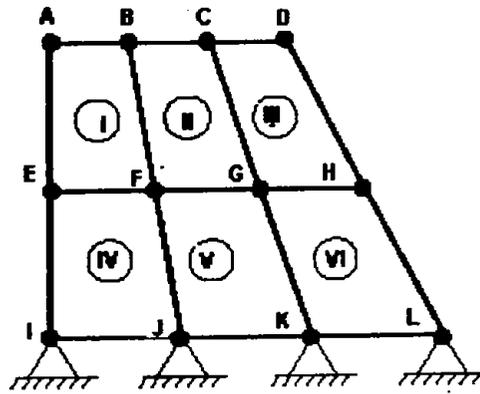


Fig. 2.2. Disposición de elementos y nodos.

La disposición que demos a los nodos de la malla nos proporcionará lo que llamaremos **CONECTIVIDAD** de los elementos, condición que nos facilitará el orden para saber como están interconectados los elementos finitos. Esto puede quedar más claro si se analizan los casos presentados en la Fig. 2.3.

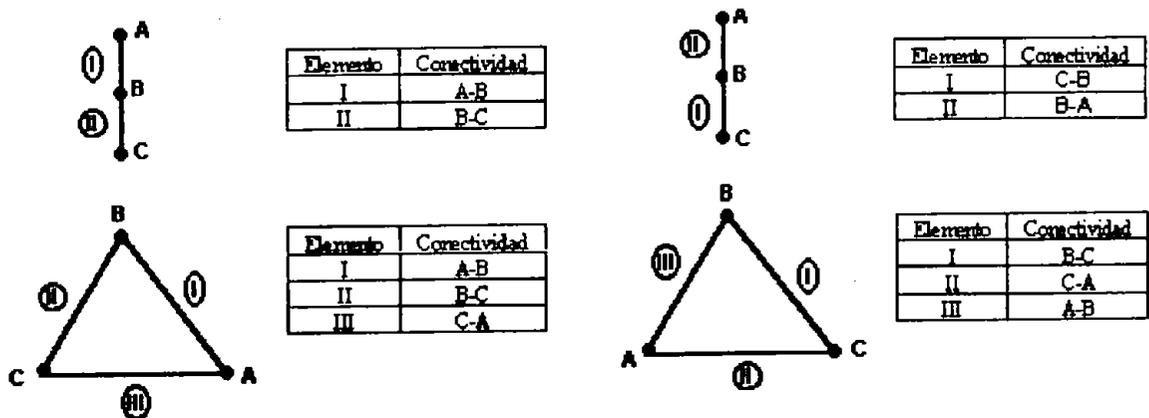


Fig. 2.3. Conectividad de nodos.

Paso 2. Grados de libertad y condiciones de frontera.

Antes de iniciar con los cálculos matemáticos, primero hay que identificar:

- a) Cuantos gdl tiene cada nodo.
- b) Que condiciones iniciales presenta el problema.

Capítulo II. Método del elemento finito

Los gdl también deben ser numerados, debido a que, como ya se mencionó anteriormente, la información pasa de un elemento a otro a través de los nodos comunes. Ya en el apartado anterior se definió el término gdl.

En los casos unidimensionales no hay problema, ya que el número asignado a cada nodo será también el número que le corresponda a su gdl. No ocurre lo mismo con problemas bidimensionales y tridimensionales, en la Fig. 2.4., se muestra la forma de numerar los gdl de cada nodo para los dos primeros casos.

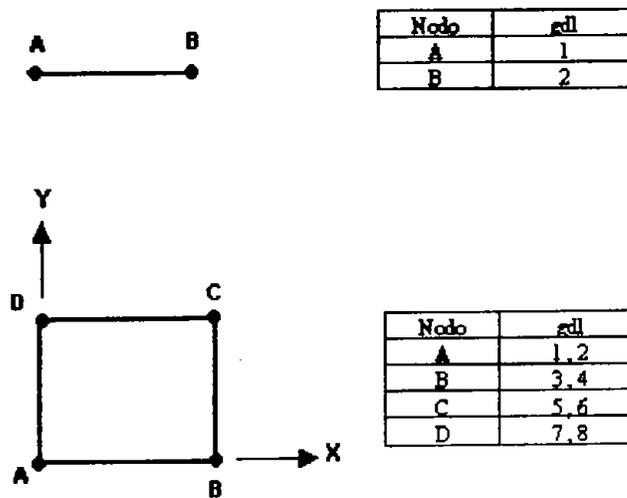


Fig. 2.4. Grados de libertad en nodos.

El segundo aspecto a considerar en este paso 2, es el de saber interpretar cuales son las condiciones de frontera que nos presenta el problema ya que algunas de ellas no se presentan de forma explícita.

Las condiciones de frontera estructurales incluyen:

- Restricciones de desplazamiento (según el tipo de apoyo).
- Fuerzas aplicadas en nodos.
- Temperaturas en nodos.
- Cargas volumétricas o de inercia (gravedad).
- Fuentes de energía.

entre otras.

Nota: Por lo general solo se usan números arábigos para numerar los elementos, los nodos y los gdl. En este capítulo se ocupan números arábigos, romanos y letras del alfabeto con el fin de hacer esta parte teórica más clara. En los problemas que mas adelante se analizarán debe de sobreentenderse esta situación.

Paso 3. Cálculo de la matriz local.

Llamaremos matriz local a aquella que contiene, en esencia, las propiedades constitutivas del material y las propiedades geométricas del elemento finito seleccionado. Dependiendo del fenómeno que estemos analizando, ésta matriz se llamará de rigidez, de transferencia de calor, de flujo, etc. En los capítulos subsecuentes se deducirá la matriz local para algunos fenómenos útiles en el desarrollo de la ingeniería civil. Estas expresiones han sido posibles a partir de una serie de funciones llamadas "Funciones de forma" calculadas a partir de un polinomio de interpolación.

La matriz local tiene las siguientes propiedades:

- Es de orden $n \times n$ (cuadradas)
- Simétrica.

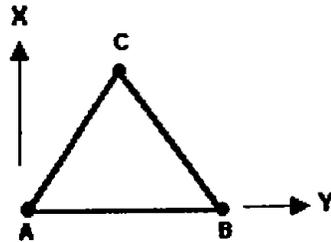
Una característica de los elementos unidimensionales es que su matriz local es de orden 2×2 y en el caso de los problemas bidimensionales el orden cambia a una matriz de 4×4 y así sucesivamente.

Cada componente de esta matriz local estará gobernado por un gdl de cada nodo. La Fig. 2.5., muestra con mayor claridad esto.



Nodo	gdl
A	1
B	2

La matriz local es $[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$



Nodo	gdl
A	1,2
B	3,4
C	5,6

La matriz local es $[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a & b & c & d \\ & e & f & g \\ & & h & i \\ \text{Simétrica} & & & j \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$

Fig. 2.5. Asignación de los grados de libertad a la matriz local.

Paso 4. Ensamble de la matriz global

La matriz global es la representación matemática total del problema, es decir, en ella se unen todas y cada una de las matrices locales y por lo tanto, todos y cada uno de los elementos de la malla.

Esta unión es posible a través de los números asignados a cada gdl. Un ejemplo de cómo llevar a cabo esta conexión de las matrices locales se presenta en la Fig. 2.6.



$$[K_I] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad [K_{II}] = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix}, \quad [K_{III}] = \begin{bmatrix} g & h \\ h & i \end{bmatrix}$$

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & f \end{bmatrix} + \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & h & i \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & c+d & 0 & e \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & e & h & f+i \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fig. 2.6. Ensamble de la matriz global a partir de las matrices locales.

Las componentes que se suman es por que existe un nodo en común entre dos elementos. Una forma de poder calcular el orden de la matriz global es multiplicando la cantidad de nodos por el número de grados de libertad de cada uno de ellos. En el ejemplo anterior, tenemos cuatro nodos y cada nodo tiene un gdl, por lo cual la matriz global es de orden 4x4.

Paso 5. Cálculo de variables dependientes.

De la teoría de rigidez, el problema se plantea de la siguiente forma matricial

$$[K][U] = [F]$$

Capítulo II. Método del elemento finito

donde $[K]$ representa a la matriz global, $[U]$ es el vector de variables dependientes primarias (desplazamientos, potencial de flujo, temperatura, etc.) y $[F]$ es el vector de acciones ejercidas en cada nodo (cargas externas, flujo de calor, etc.).

$$[K][U] = [F]$$

$$[K][T] = [q]$$

$$[K][\Phi] = [q]$$

A partir de la solución de estos sistemas de ecuaciones lineales, se está en condición de conocer los valores del vector $[U]$, $[T]$, $[\phi]$ y una vez teniendo estos datos, es posible el cálculo de las variables dependientes secundarias vistas en la Tabla 2.1., de este mismo capítulo.

CAPITULO II

**"ELEMENTO FINITO
BARRA"**

III.1. Una barra de acero está sometida a las cargas que se muestran en la Fig. 3.1. Si el área de la sección transversal de la barra es de 0.6 cm^2 y el módulo de elasticidad es de $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, determine el desplazamiento de los puntos A, B y C marcados en la Fig. 3.1.(a).

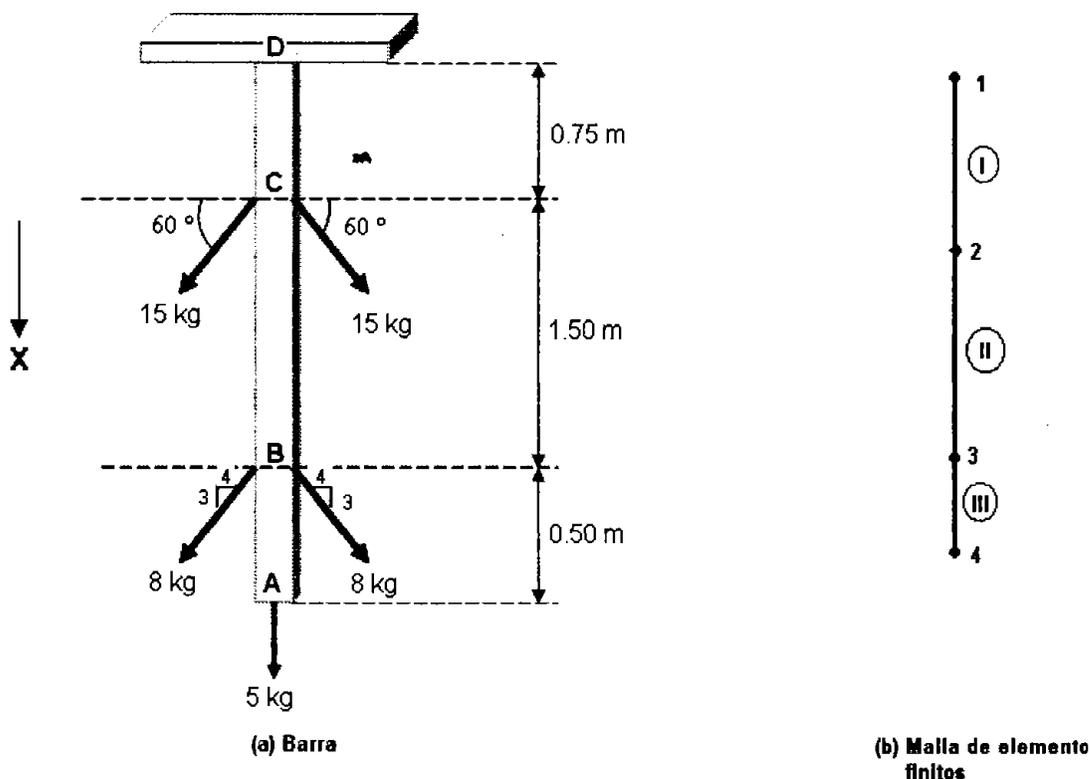


Fig. 3.1. Modelo de la barra.

SOLUCIÓN:

En la siguiente Tabla 3.1 se resumen los datos del problema

Tabla 3.1. Propiedades de los elementos de la malla.

Elemento	Propiedades			Conectividad
	A (cm^2)	E (kg/cm^2)	L (cm)	
I	0.6	2000000	75	1-2
II	0.6	2000000	150	2-3
III	0.6	2000000	50	3-4

La matriz de rigidez de cada elemento la calculamos con la siguiente expresión

$$[K]_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así para el elemento I,

$$[K]_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 16000 & -16000 \\ -16000 & 16000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

para el elemento II

$$[K]_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8000 & -8000 \\ -8000 & 8000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

y finalmente para el elemento III

$$[K]_{III} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 24000 & -24000 \\ -24000 & 24000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A partir de estas matrices locales podemos ensamblar la matriz global respetando la conectividad establecida en cada matriz antes calculada. Procediendo con el ensamble, se obtiene

$$[K]_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 16000 & -16000 & 0 & 0 \\ & 24000 & -8000 & 0 \\ & & 32000 & -24000 \\ & \text{Simétrica} & & 24000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Lo siguiente es resolver el sistema de ecuaciones, que matricialmente se expresa de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 16000 & -16000 & 0 & 0 \\ & 24000 & -8000 & 0 \\ & & 32000 & -24000 \\ \text{Simétrica} & & & 24000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

donde [U] es el vector de desplazamientos y [F] el vector de cargas externas. En la mayoría de las ocasiones las condiciones iniciales del problema no son dadas de forma explícita, por lo tanto habrá que interpretarlas del mismo esquema que se proporciona.

Así, de la Fig. 3.1., observamos que su base se encuentra empotrada, lo que significa que el nodo 1 de la malla propuesta no puede tener ningún desplazamiento a lo largo del eje "X", entonces $U_1 = 0$.

Como el análisis que se está haciendo a la barra son los efectos de la carga axial, entonces solamente se tomará en cuenta la componente de las fuerzas proyectadas sobre el eje "X", previamente sumando vectorialmente las que concurren en un punto. Haciendo esto, tenemos que $F_1 = 0$, $F_2 = 25.981 \text{ Kg.}$, $F_3 = 9.60 \text{ Kg.}$ y $F_4 = 5 \text{ Kg.}$

Sustituyendo las condiciones iniciales del problema y las cargas aplicadas en el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 16000 & -16000 & 0 & 0 \\ & 24000 & -8000 & 0 \\ & & 32000 & -24000 \\ \text{Simétrica} & & & 24000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25.981 \\ 9.600 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

De cuya solución se deriva el valor del vector de desplazamientos [U], que en este caso es

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0025 \\ 0.0044 \\ 0.0046 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

de esta forma, el desplazamiento de los puntos A y B son los mismos que los de los nodos 4 y 3, respectivamente. Para el cálculo de los esfuerzos en cada elemento, utilizaremos la siguiente ecuación

$$\sigma = E \frac{du}{dx}$$

La aproximación al campo de desplazamientos axiales en un elemento unidimensional se escribe como:

$$u = u_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + u_2 \left(\frac{x}{L} \right)$$

derivando esta ecuación respecto a "X" y sustituyéndola en la anterior, obtenemos la expresión general para el cálculo del esfuerzo por el método de los elementos finitos,

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{L_1} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

De esta forma, el elemento I está sometido a un esfuerzo

$$\sigma_1 = \frac{2000000}{75} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0025 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 66.667 \text{ Kg. / cm}^2$$

el elemento II

$$\sigma_{II} = \frac{2000000}{150} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0044 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = 25.333 \text{ Kg. / cm}^2$$

y el elemento III

$$\sigma_{III} = \frac{2000000}{50} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0046 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = 8.0 \text{ Kg. / cm}^2$$

Para calcular las fuerzas axiales en cada elemento, no confundir con las actuantes en los nodos, utilizamos la expresión $P = \sigma A$.

Por lo tanto, aplicando esta fórmula para cada elemento, tenemos que.

$$P_I = 40.00 \text{ Kg.}$$

$$P_{II} = 15.20 \text{ Kg.}$$

$$P_{III} = 4.80 \text{ Kg.}$$

En caso de que nos interesara conocer la reacción en el punto D, ésta debe ser la misma carga en magnitud que en el elemento I pero en sentido y dirección opuesta, es decir:

$$R_D = -40 \text{ Kg.}$$

III.2. En la Fig. 3.2., se muestra un dispositivo de soporte sometido a una carga $P = 80$ ton. El dispositivo está hecho de un material cuyo módulo de elasticidad es 1.2×10^6 kg/cm². El área de cada uno de los elementos es $A_1 = 1\ 256$ cm² y $A_2 = 2\ 827$ cm². Determine el esfuerzo que se desarrolla en cada elemento.

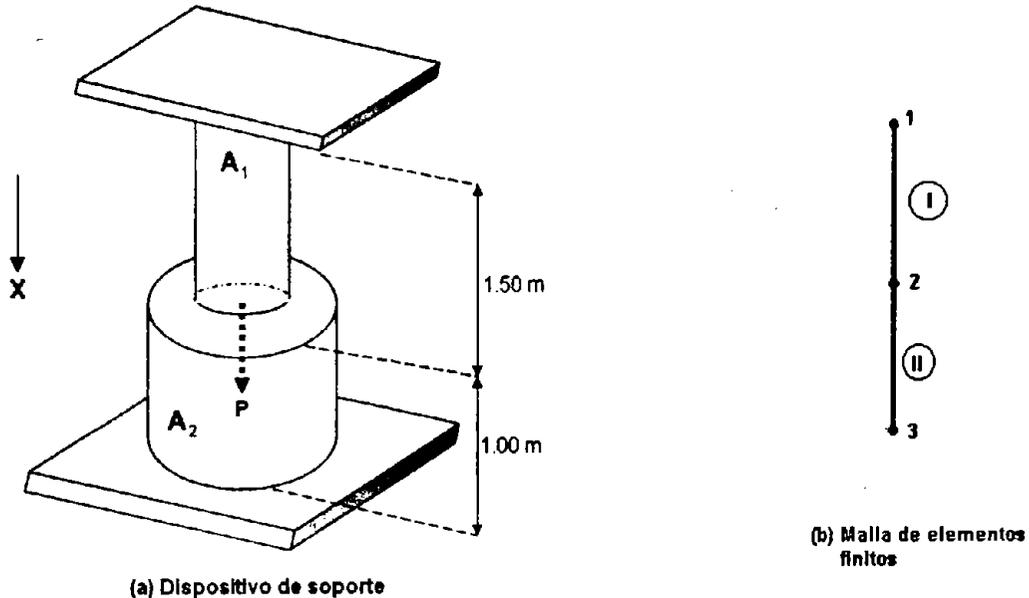


Fig. 3.2. Modelo del dispositivo de soporte.

SOLUCIÓN:

Al igual que en el ejemplo anterior, para cada elemento la matriz local se calcula con la expresión

$$[K]_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los datos generales del problema se resumen en la siguiente Tabla 3.2

Tabla 3.2. Propiedades de los elementos de la malla.

Elemento	Propiedades			Conectividad
	A (cm ²)	E (kg/cm ²)	L (cm)	
I	1 256	1200000	750	1-2
II	2 827	1200000	100	2-3

La matriz de rigidez del elemento I se escribe como

$$[K]_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10048000 & -10048000 \\ -10048000 & 10048000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

y la del elemento II de la siguiente forma

$$[K]_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 33924000 & -33924000 \\ -33924000 & 33924000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores en una matriz global se tiene

$$[K]_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10048000 & -10048000 & 0 \\ & 43972000 & -33924000 \\ \text{Simétrica} & & 33924000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

En términos de un sistema de ecuaciones, la solución del problema implica resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 10048000 & -10048000 & 0 \\ & 43972000 & -33924000 \\ \text{Simétrica} & & 33924000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

con las correspondientes condiciones de frontera. En este caso tenemos que ambos extremos del dispositivo están empotrados por lo que $U_1 = 0$ y $U_3 = 0$ y solamente habrá desplazamiento en el nodo 2 de la malla propuesta. La única fuerza externa actúa en el nodo 2, es decir $F_2 = 80$ ton. Sustituyendo estas condiciones de frontera y resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Si utilizamos las fórmulas vistas en el ejemplo anterior, el esfuerzo en el elemento I está dado por

$$\sigma_I = \frac{1200000}{150} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_I = 14.4 \text{ Kg. / cm}^2$$

para el elemento II

$$\sigma_{II} = \frac{1200000}{100} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0018 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -21.6 \text{ Kg. / cm}^2$$

Estos resultados indican que en el elemento I existe un esfuerzo de tensión de 14.4 Kg/cm², mientras que el elemento II experimenta un esfuerzo a compresión de 21.6 Kg/cm².

Las fuerzas correspondientes en cada elemento son:

$$P_I = 18\ 086 \text{ Kg.}$$

$$P_{II} = -61\ 063 \text{ Kg.}$$

Por otro lado las reacciones en los extremos del dispositivo resultan ser:

$$R_1 = -18\ 086 \text{ Kg.}$$

$$R_2 = -61\ 063 \text{ Kg.}$$

La forma más fácil de comprobar los resultados obtenidos es haciendo una suma de fuerzas a lo largo del eje "X", la cual debe de ser igual a cero, o lo que es lo mismo, la suma de reacciones debe ser igual a la suma de cargas externas, es decir,

$$\sum F_x = 0$$

$$R_1 + R_2 + P = 0$$

$$851 \approx 0$$

Recordemos que éste es un método aproximado y que por lo general existirá un error, la idea es que éste sea lo menor posible.

III.3. La armadura que se muestra en la Fig. 3.3., está sometida al sistema de cargas indicado. El material utilizado para su fabricación es acero con un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y las tres barras tienen una misma área $A = 7.07 \text{ cm}^2$. Calcule los esfuerzos en cada una de las barras.

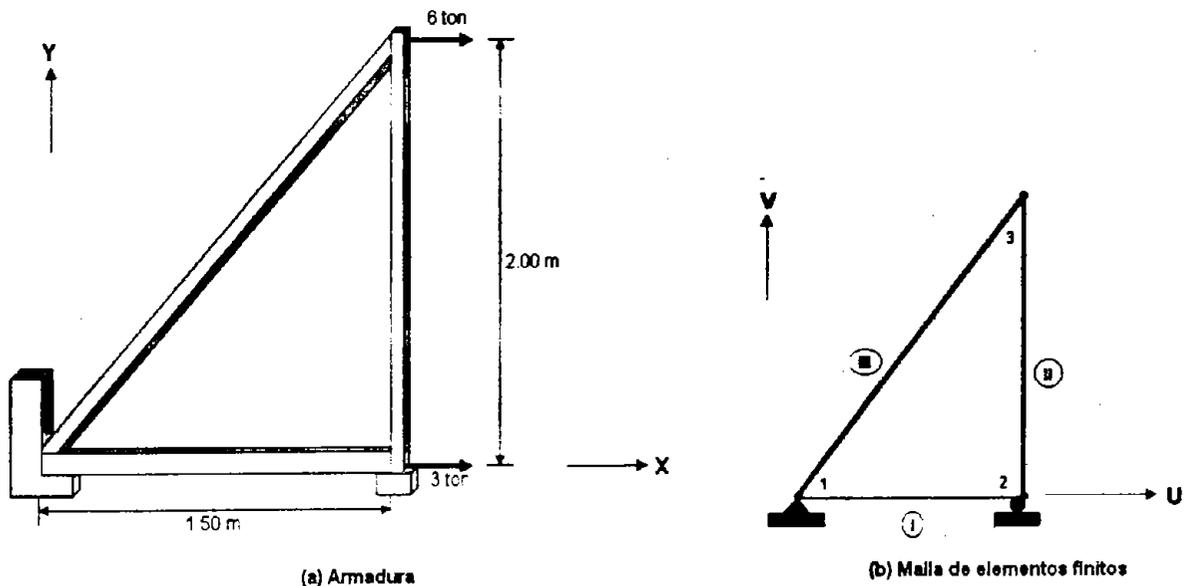


Fig. 3.3. Modelo de la armadura.

SOLUCIÓN.

Con base en la figura y los datos del problema podemos construir la siguiente Tabla 3.3:

Tabla 3.3 Propiedades de los elementos de la malla.

Elemento	Propiedades					Conectividad
	A (cm ²)	L (cm)	θ^1	sen θ	cos θ	
I	7.07	150	0	0	1	1-2
II	7.07	200	90	1	0	2-3
III	7.07	250	233.13	-0.8	-0.6	3-1

La matriz de rigidez de cada elemento se calcula con la siguiente expresión:

¹ El ángulo "θ" está medido en sentido antihorario a partir del eje "X".

$$[K]_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta \\ & \text{sen}^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ & & \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ & \text{Simétrica} & & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

Así entonces, para el elemento I

$$[K]_I = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 94267 & 0 & -94267 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 94267 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

de forma similar, para el elemento II

$$[K]_{II} = \begin{bmatrix} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 70700 & 0 & -70700 \\ & & & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & & 70700 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

y para el elemento III

$$[K]_{III} = \begin{bmatrix} & 5 & 6 & 1 & 2 \\ & 20362 & 27149 & -20362 & -27149 \\ & & 36198 & -27149 & -36198 \\ & & & 20362 & 27149 \\ \text{Simétrica} & & & & 36198 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Utilizando las tres matrices anteriores se puede formar la matriz global $[K]_G$, obteniéndose:

$$[K]_G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 114628 & 27149 & -94267 & 0 & -20362 & -27149 \\ & 36198 & 0 & 0 & -27149 & -36198 \\ & & 94267 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 70700 & 0 & -70700 \\ & & & & 20362 & 27149 \\ & \text{Simétrica} & & & & 106898 \\ & & & & & & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Aplicando las condiciones de frontera $U_{1X} = U_{1Y} = U_{2Y} = 0$ y sustituyendo los valores de las cargas $F_{2X} = 3\ 000\ \text{Kg}$, $F_{3X} = 6\ 000\ \text{Kg}$, $F_{3Y} = 0$, en la ecuación matricial anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 114628 & 27149 & -94267 & 0 & -20362 & -27149 \\ & 36198 & 0 & 0 & -27149 & -36198 \\ & & 94267 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 70700 & 0 & -70700 \\ & \text{Simétrica} & & & 20362 & 27149 \\ & & & & & 106898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{2X} \\ 0 \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ 3\ 000 \\ F_{2Y} \\ 6\ 000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.032 \\ 0 \\ 0.446 \\ -0.113 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Para calcular los esfuerzos en cada barra, de la fórmula de la Ley de Hooke, tenemos

que $\sigma = E \frac{dU}{dx}$ y sabiendo que $U = \left(1 - \frac{x}{L}\right)U_1 + \left(\frac{x}{L}\right)U_2$,

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Si expresamos los desplazamientos U_1 y U_2 en términos de sus cosenos directores, se obtiene

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{bmatrix}$$

sustituyendo el vector de desplazamientos, tenemos que

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{bmatrix}$$

lo que reducido a su mínima expresión queda

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\text{sen}\theta & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{bmatrix}$$

Así para el elemento I, tenemos que

$$\sigma_I = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_I = \frac{2000000}{150} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.032 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_I = 426.66 \text{ Kg/cm}^2$$

para el elemento II

$$\sigma_{II} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = \frac{2000000}{200} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.032 \\ 0 \\ 0.446 \\ -0.113 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -1130 \text{ Kg/cm}^2$$

y para el elemento III

$$\sigma_{III} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\text{sen}\theta & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{3X} \\ U_{3Y} \\ U_{1X} \\ U_{1Y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = \frac{2000000}{250} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.032 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = 1417 \text{ Kg./cm}^2$$

III.4. Para la armadura plana compuesta de cuatro elementos que se presenta en la Fig. 3.4., determine los desplazamientos nodales así como los esfuerzos a los que están sometidos cada uno de los elementos. Considere que el material con el que está construida tiene un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y el área transversal igual es para todos, $A = 7.07 \text{ cm}^2$.

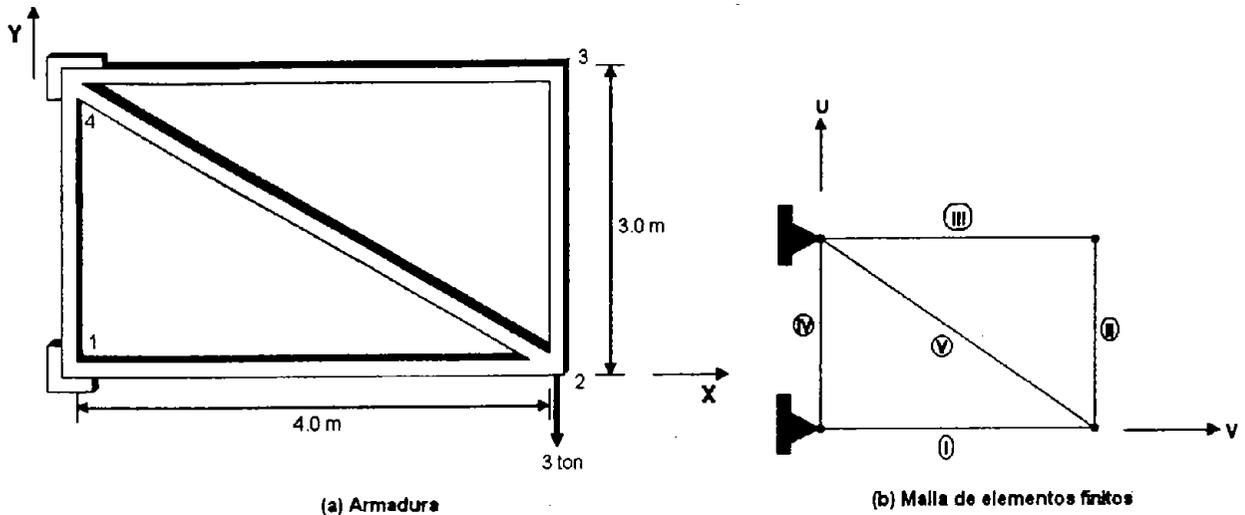


Fig. 3.4. Modelo de la armadura plana.

SOLUCIÓN.

De la Fig. 3.4., y los datos del problema es posible construir la siguiente Tabla 3.4:

Tabla 3.4. Propiedades de los elementos de la malla.

Elemento	Propiedades					Conectividad
	A (cm ²)	L (cm)	θ^2	sen θ	cos θ	
I	7.07	400	0	0	1	1-2
II	7.07	300	90	1	0	2-3
III	7.07	400	180	0	-1	3-4
IV	7.07	300	270	-1	0	4-1
V	7.07	500	143.13	0.6	-0.8	2-4

² El ángulo " θ " está medido en sentido antihorario a partir del eje "X".

Al igual que en el ejemplo anterior, la matriz de rigidez de cada elemento se calcula con la expresión siguiente:

$$[K]_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta \\ & \text{sen}^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ \text{Simétrica} & & \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ & & & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

Así entonces, para el elemento I

$$[K]_I = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 35350 & 0 & -35350 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & 35350 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

de forma similar, para el elemento II

$$[K]_{II} = \begin{bmatrix} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 47133 & 0 & -47133 \\ \text{Simétrica} & & & 0 & 0 \\ & & & & 47133 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

y para el elemento III

$$[K]_{III} = \begin{bmatrix} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 35350 & 0 & -35350 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & 35350 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

y para el elemento IV

$$[K]_{IV} = \begin{bmatrix} & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 47133 & 0 & -47133 \\ & & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & 47133 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

y para el elemento V

$$[K]_{V} = \begin{bmatrix} & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 18099.2 & -13574.4 & -18099.2 & 13574.4 \\ & 10180.8 & -13574.4 & -10180.8 \\ & & 18099.2 & 13574.4 \\ \text{Simétrica} & & & 10180.8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Utilizando las cinco matrices anteriores se puede formar la matriz global $[K]_G$, obteniéndose:

$$[K]_G = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 35350 & 0 & -35350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 47133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -47133 \\ & & 53449.2 & -13574.4 & 0 & 0 & -18099.2 & 13574.4 & \\ & & & 57313.8 & 0 & -47133 & 13574.4 & -10180.8 & \\ & & & & 35350 & 0 & -35350 & 0 & \\ & & & & & 47133 & 0 & 0 & \\ \text{Simétrica} & & & & & & 53449.2 & 13574.4 & \\ & & & & & & & 57313.8 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Aplicando las condiciones de frontera $U_{1X} = U_{1Y} = U_{2Y} = 0$ y sustituyendo los valores de las cargas $F_{2X} = 3\ 000\ \text{Kg}$, $F_{3X} = 6\ 000\ \text{Kg}$, $F_{3Y} = 0$, en la ecuación matricial anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix}
 35350 & 0 & -35350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 47133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -47133 \\
 & & 53449.2 & -13574.4 & 0 & 0 & -18099.2 & 13574.4 \\
 & & & 57313.8 & 0 & -47133 & 13574.4 & -10180.8 \\
 & & & & 35350 & 0 & -35350 & 0 \\
 & & & & & 47133 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 53449.2 & 13574.4 \\
 & & & & & & & 57313.8
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_{1X} \\
 U_{1Y} \\
 U_{2X} \\
 U_{2Y} \\
 U_{3X} \\
 U_{3Y} \\
 U_{4X} \\
 U_{4Y}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_{1X} \\
 F_{1Y} \\
 F_{2X} \\
 F_{2Y} \\
 F_{3X} \\
 F_{3Y} \\
 F_{4X} \\
 F_{4Y}
 \end{bmatrix}$$

Simétrica

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix}
 U_{1X} \\
 U_{1Y} \\
 U_{2X} \\
 U_{2Y} \\
 U_{3X} \\
 U_{3Y} \\
 U_{4X} \\
 U_{4Y}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -0.113 \\
 -0.445 \\
 0 \\
 -0.445 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \text{ cm}$$

Para calcular los esfuerzos en cada barra, utilizaremos la expresión deducida en el ejemplo anterior, que es

$$\sigma = \frac{E}{L} [-\cos\theta \quad -\text{sen}\theta \quad \cos\theta \quad \text{sen}\theta]
 \begin{bmatrix}
 U_{1X} \\
 U_{1Y} \\
 U_{2X} \\
 U_{2Y}
 \end{bmatrix}$$

Así para el elemento I, tenemos que

$$\sigma_1 = \frac{2000000}{400} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -0.113 \\
 -0.445
 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = -565 \text{ Kg./cm}^2$$

para el elemento II

$$\sigma_{II} = \frac{2000000}{300} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} -0.113 \\ -0.445 \\ 0 \\ -0.445 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = 0$$

y para el elemento III

$$\sigma_{III} = \frac{2000000}{400} [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -0.445 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = 0$$

para el elemento IV

$$\sigma_{IV} = \frac{2000000}{300} [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{IV} = 0$$

y para el elemento V

$$\sigma_v = \frac{2000000}{500} [0.8 \quad -0.6 \quad -0.8 \quad 0.6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.113 \\ -0.445 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_v = -706.4 \text{ Kg./cm}^2$$

CANTON IN
CANTON IN

"ELEMENTO FINITO
VIGA"

IV.1. Para la viga en voladizo que se muestra en la Fig. 4.1., el valor de P es 2 ton, la longitud $L = 1.5$ m, el módulo de elasticidad $E = 2.8 \times 10^5$ kg/cm² y el momento de inercia $I = 6\ 666$ cm⁴, determine la pendiente y la flexión en el punto B, así como los diagramas de momento y cortante.

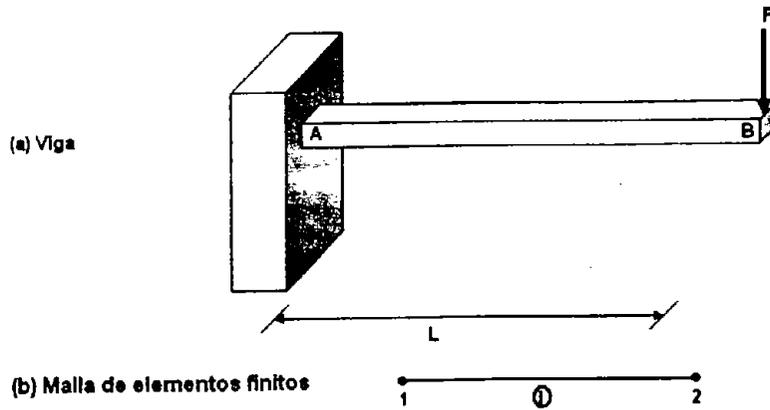


Fig. 4.1. Modelo de la viga en voladizo.

SOLUCIÓN:

Tal como se muestra en la Fig. 4.1.(b), se utiliza una malla de un solo elemento finito. La expresión para el cálculo de la matriz local de rigidez del elemento es

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12 EI}{L^3} & \frac{6 EI}{L^2} & -\frac{12 EI}{L^3} & \frac{6 EI}{L^2} \\ & \frac{4 EI}{L} & -\frac{6 EI}{L^2} & \frac{2 EI}{L} \\ \text{Simétrica} & & \frac{12 EI}{L^3} & -\frac{6 EI}{L^2} \\ & & & \frac{4 EI}{L} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las propiedades elásticas y geométricas del único elemento, encontraremos la matriz local de rigidez y también la matriz global. Esto es

$$[K]_G = \begin{bmatrix} 6636.37 & 497728 & -6636.37 & 497728 \\ & 49772800 & -497728 & 24886400 \\ & & 6636.37 & -497728 \\ \text{Simétrica} & & & 49772800 \end{bmatrix}$$

En forma matricial el problema de equilibrio se expresa de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} 6636.37 & 497728 & -6636.37 & 497728 \\ & 49772800 & -497728 & 24886400 \\ & & 6636.37 & -497728 \\ \text{Simétrica} & & & 49772800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Donde ω representa la deflexión (o flecha), θ la pendiente o giro en un punto, V el cortante y M el momento en el punto en cuestión. Las condiciones de frontera del problema son $\omega_1 = \theta_1 = 0$, por estar empotrada la barra en el extremo A y la única fuerza aplicada es $V_2 = -2\,000$ Kg. Sustituyendo estas condiciones en el sistema de ecuaciones anterior y resolviéndolo, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.206 \text{ cm} \\ -0.012 \end{bmatrix}$$

Para obtener los diagramas de momento flexionante y de fuerza cortante de la viga, tenemos que

$$M = EI \frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad \text{y} \quad V = EI \frac{d^3 \omega}{dx^3}$$

La aproximación al campo de desplazamiento de un elemento viga, se escribe como

$$\omega = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)\omega_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)\omega_2 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_2$$

Por lo que las respectivas derivadas de orden superior resultan

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\omega_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\omega_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_2$$

$$\frac{d^3\omega}{dx^3} = \frac{12}{L^3}\omega_1 + \frac{6}{L^2}\theta_1 - \frac{12}{L^3}\omega_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2$$

Así, las ecuaciones para el cálculo del momento flexionante y el cortante quedan de la siguiente forma

$$M = EI \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\omega_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\omega_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_2 \right]$$

$$V = EI \left[\frac{12}{L^3}\omega_1 + \frac{6}{L^2}\theta_1 - \frac{12}{L^3}\omega_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2 \right]$$

Después de sustituir los valores de los desplazamientos calculado en los nodos de la malla propuesta y los valores de E, I y L, obtenemos las cantidades de la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Momento y fuerza cortante, calculados con elementos finitos.

Elemento I	
Nodo 1	Nodo 2
M = -301 623 Kg*cm	M = 2 986 Kg*cm
V = 2 030 Kg	V = 2 030 Kg

Estos lo podemos comparar con los resultados con los obtenidos utilizando algún método analítico, los cuales son los que muestra la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Momento y fuerza cortante calculados por métodos analíticos.

Elemento I	
Nodo 1	Nodo 2
M = -300 000 Kg*cm	M = 0
V = 2 000 Kg	V = 2 000 Kg

Gráficamente es casi imposible de observar la diferencia, debido al factor de escala, a menos de que nuestro gráfico fuese de gran tamaño, como a continuación observamos en la Fig. 4.2.

Diagrama de momento flexionante

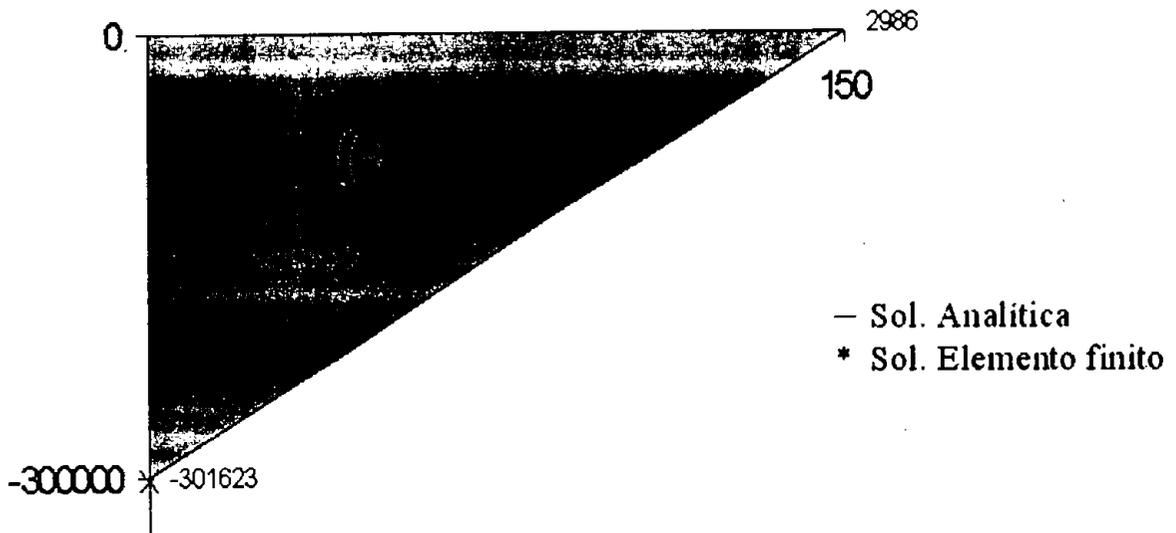


Diagrama de fuerza cortante

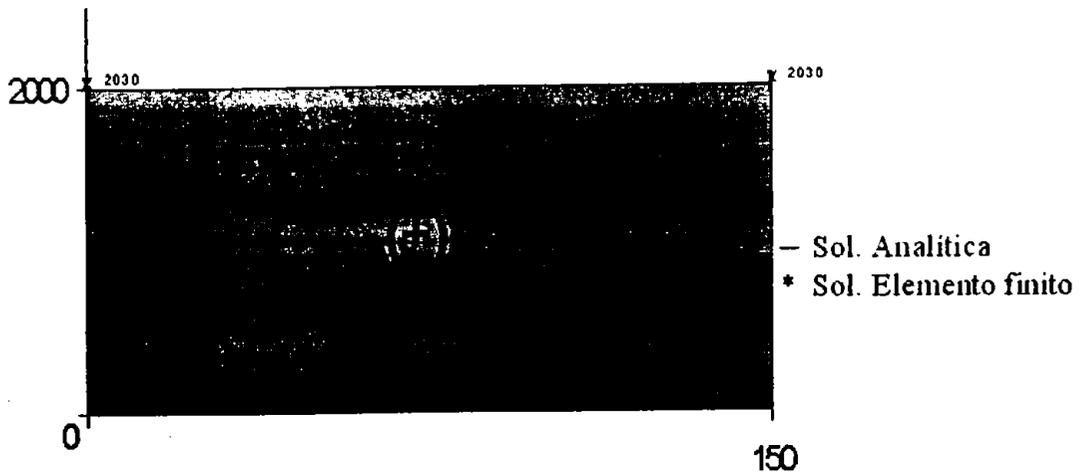


Fig. 4.2. Diagramas de momento flexionante y fuerza cortante de la viga en voladizo.

V.2. La viga simplemente apoyada en sus extremos que se muestra en la Fig. 4.3., está sometida a la acción de una carga puntual $P = 3$ ton, ubicada a 1 m del punto A y a 2 m del punto B. Si el módulo de elasticidad del material es $E = 2.8 \times 10^5$ kg/cm² y la sección transversal tiene un momento de inercia $I = 6\,666$ cm², calcule el giro y la flecha de la viga en el punto C así como los diagramas de Momento y cortante.

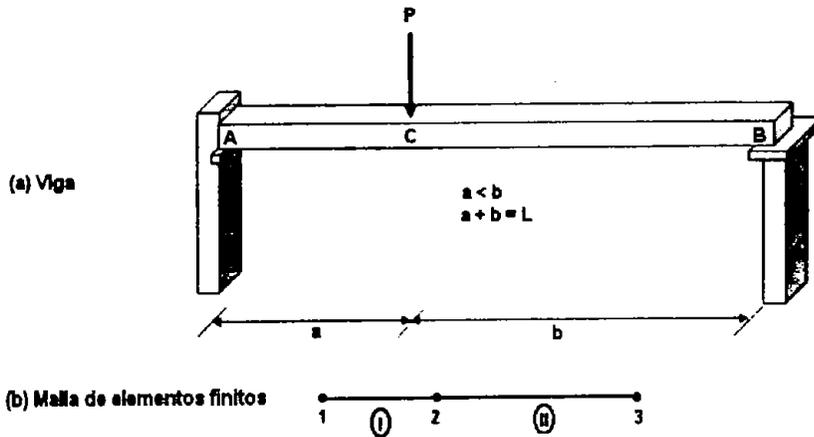


Fig. 4.3. Modelo de la viga simplemente apoyada.

SOLUCIÓN:

La viga modelada podemos discretizarla en dos elementos por lo menos, tal como se muestra en la Fig. 4.3.(b)., para dar solución al problema, la expresión para el cálculo de la matriz de rigidez de cada elemento es la siguiente.

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12 EI}{L^3} & \frac{6 EI}{L^2} & -\frac{12 EI}{L^3} & \frac{6 EI}{L^2} \\ & \frac{4 EI}{L} & -\frac{6 EI}{L^2} & \frac{L}{2 EI} \\ & & \frac{12 EI}{L^3} & -\frac{6 EI}{L^2} \\ \text{Simétrica} & & & \frac{4 EI}{L} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las propiedades del elemento I, obtenemos

$$[K]_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2239776 & 1119888 & -2239776 & 1119888 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 74659200 & -1119888 & 37329600 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} & & 2239776 & -1119888 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Simétrica} & & & 74659200 \end{matrix} & \end{matrix}$$

De igual forma hacemos con los datos del elemento II,

$$[K]_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2799.72 & 279972 & -2799.72 & 279972 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 37329600 & -279972 & 18664800 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} & & 2799.72 & -278872 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Simétrica} & & & 37329600 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Utilizando la conectividad de los elementos se forma la matriz global representativa del problema, la cual queda de la siguiente forma

$$[K]_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 22397.76 & 1119888 & -22397.76 & 1119888 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 74659200 & -1119888 & 37329600 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} & & 25197.48 & -839916 & -2799.72 & 279972 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} & & & 1119888 & -279972 & 18664800 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Simétrica} & & & & 2799.72 & -279972 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} & & & & & 37329600 \end{matrix} \end{matrix}$$

En forma matricial el problema de equilibrio se expresa de la siguiente manera

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 22397.76 & 1119888 & -22397.76 & 1119888 & 0 & 0 \\ & 74659200 & -1119888 & 37329600 & 0 & 0 \\ & & 25197.48 & -839916 & -2799.72 & 279972 \\ & & & 1119888 & -279972 & 18664800 \\ \text{Simétrica} & & & & 2799.72 & -279972 \\ & & & & & 37329600 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \\ \omega_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por las condiciones de frontera del problema se tiene que $\omega_1 = \theta_1 = 0$ y $V_2 = -3\ 000\text{ Kg}$.
Sustituyendo en el sistema anterior y resolviéndolo se obtiene

$$\begin{bmatrix} \omega_2 \\ \theta_2 \\ \omega_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.009 \\ -0.714\text{ cm} \\ -0.004 \\ 0 \\ 0.007 \end{bmatrix}$$

Los diagramas de momento flexionante y de fuerza cortante de la viga (ver Fig. 4.4.), se obtienen con las expresiones siguientes

$$M = EI \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad \text{y} \quad V = EI \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

donde

$$\omega = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)\omega_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)\omega_2 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_2$$

Así, las respectivas derivadas de orden superior son

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\omega_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\omega_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_2$$

$$\frac{d^3\omega}{dx^3} = \frac{12}{L^3}\omega_1 + \frac{6}{L^2}\theta_1 - \frac{12}{L^3}\omega_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2$$

Por lo que las ecuaciones para el cálculo del momento flexionante y el cortante quedan de la siguiente forma

$$M = EI \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \omega_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \omega_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_2 \right]$$

$$V = EI \left[\frac{12}{L^3} \omega_1 + \frac{6}{L^2} \theta_1 - \frac{12}{L^3} \omega_2 + \frac{6}{L^2} \theta_2 \right]$$

Sustituyendo en cada una de estas expresiones los desplazamientos calculados en los nodos de la malla propuesta y los valores de E, I y L obtenemos los valores mostrados en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Momento y fuerza cortante calculados con elementos finitos.

Elemento I		Elemento II	
Nodo 1	Nodo 2	Nodo 2	Nodo 3
M = 21 651 Kg*cm	M = 164 996 Kg*cm	M = 218 564 Kg*cm	M = -13 252 Kg*cm
V = 1 433 Kg	V = 1 433 Kg	V = -1 159 Kg	V = -1 159 Kg

Por otra parte, los valores que calculados con métodos analíticos podemos verlos en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4. Momentos y fuerzas cortantes calculados con métodos analíticos.

Elemento I		Elemento II	
Nodo 1	Nodo 2	Nodo 2	Nodo 3
M = 0	M = 200 000 Kg*cm	M = 200 000 Kg*cm	M = 0
V = 2 000 Kg	V = 2 000 Kg	V = -1 000 Kg	V = -1 000 Kg

Diagrama de momento flexionante

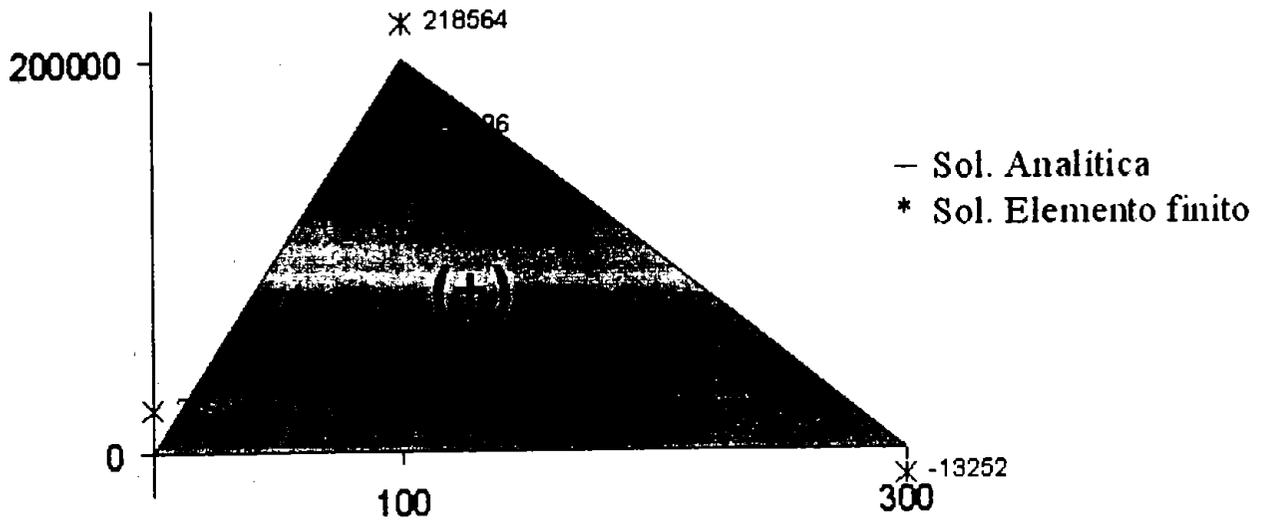


Diagrama de fuerza cortante

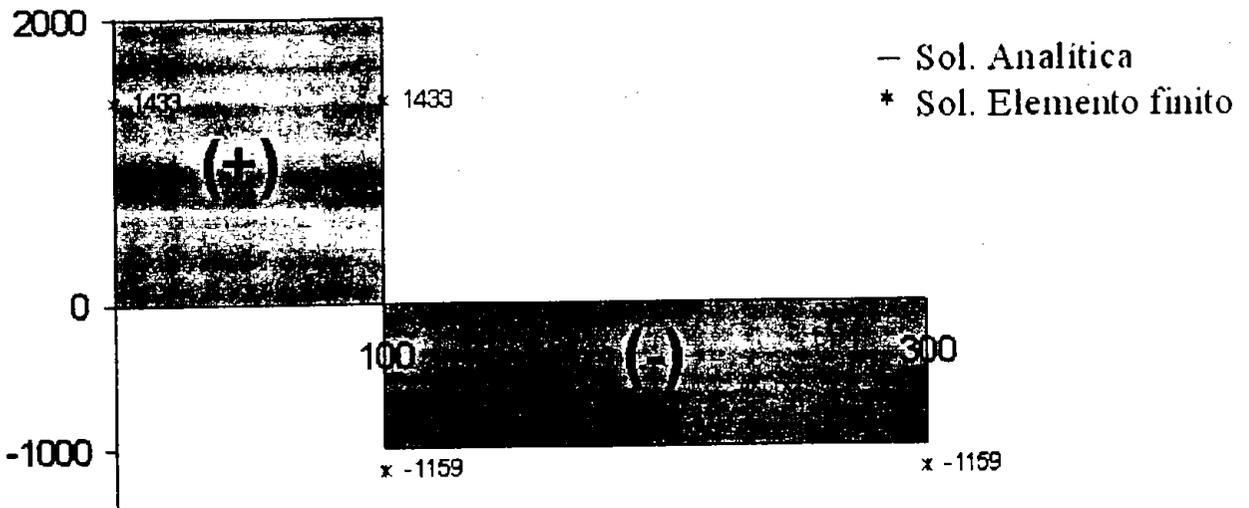


Fig. 4.4. Diagramas de momento flexionante y fuerza cortante de la viga simplemente apoyada.

CAPÍTULO V

“Problemas de campo escalar”

V.1. Se tiene una barra (ver Fig. 5.1.(a)) de longitud 0.2 m, cuya temperatura en un extremo se mantiene a 100 °C. Si suponemos que se tiene una fuente interna de calor con $Q = 3 \times 10^6 \text{ W/m}^3$ a lo largo de la barra, un flujo de calor $q = 1.8 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$ en el otro extremo y una conductividad térmica $K_T = 6\,000 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, calcule la temperatura y la distribución de flujo para cada elemento. Suponga que el área de la barra es $0.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Use cinco elementos de igual longitud.

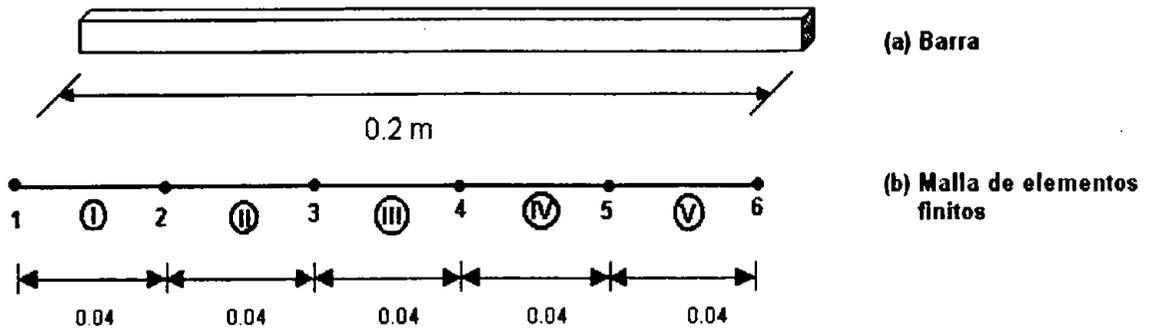


Fig. 5.1. Modelo de la barra.

SOLUCIÓN:

La ecuación que utilizaremos para analizar problemas de flujo de calor unidimensional es aquella en la cual sólo se considera el fenómeno de transferencia de calor por conducción, por lo que la ecuación matricial que gobierna el problema es

$$\frac{K_T A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{QAL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + qA \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el Elemento I, como el flujo es nulo ($q=0$) en el nodo "i", se tendrá

$$\frac{(6000)(0.4 \times 10^{-3})}{0.04} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \frac{(3 \times 10^6)(0.4 \times 10^{-3})(0.04)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando las operaciones se obtiene

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \left[\begin{array}{cc} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

De igual forma hacemos lo mismo para los elementos II, III y IV

Elemento II

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ \left[\begin{array}{cc} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Elemento III

$$\begin{matrix} 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cc} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento IV

$$\begin{matrix} 4 & 5 \\ \left[\begin{array}{cc} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Para el elemento "V" se tiene flujo de calor en el nodo j (nodo 6), cuyos efectos se suman al segundo miembro de la ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \end{bmatrix} - (1.8 \times 10^6)(0.4 \times 10^{-3}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando las operaciones se obtiene

$$\begin{matrix} & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 24 \\ -696 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Ensamblando en la matriz global (K_G) las matrices de conductividad térmica de cada elemento de la malla se obtiene

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 120 & -60 & 0 & 0 & 0 \\ & & 120 & -60 & 0 & 0 \\ & & & 120 & -60 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & 120 & -60 \\ & & & & & 60 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Expresando el problema en forma matricial se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, en el que ya se consideran los elementos del lado derecho de cada ecuación matricial local.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 120 & -60 & 0 & 0 & 0 \\ & & 120 & -60 & 0 & 0 \\ & & & 120 & -60 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & 120 & -60 \\ & & & & & 60 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 24 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ 48 \\ -696 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Si en este sistema de ecuaciones aplicamos la condición de frontera $T_1 = 100\text{ °C}$, y el sistema, obtendremos las temperaturas en los nodos restantes. Se tiene así:

$$T_1 = 100.0\text{ °C}$$

$$T_2 = 91.6\text{ °C}$$

Capítulo V. Problemas de campo escalar

$$T_3 = 82.4 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 72.4 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 61.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_6 = 50.0 \text{ }^\circ\text{C}$$

La solución exacta para el cálculo de la temperatura en cada punto en este problema se obtiene de sustituir los valores de la distancia "x", tomando como origen el extremo izquierdo de la barra, en la expresión siguiente:

$$T = \frac{3 \times 10^6}{6000} (0.2x - 0.5x^2) - \frac{(1.8 \times 10^6)x}{6000} + 100$$

lo cual proporciona los mismos resultados ya antes enunciados.

Para calcular el flujo de calor para cada nodo usaremos la ley de Fourier;

$$q = -K \frac{dT}{dx}$$

En la teoría del elemento finito el vector T se define como

$$T = \left(1 - \frac{x}{L}\right) T_i + \left(\frac{x}{L}\right) T_j$$

Sustituyendo esta expresión en la que describe la ley de Fourier obtenemos:

$$q = -K_T \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) T_i + \left(\frac{x}{L}\right) T_j \right]$$

Si aplicamos esta ecuación a cada uno de los elementos de la malla, obtendremos el flujo de calor a lo largo de la barra

$$q_i = -6000 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.04} \right) (100) + \left(\frac{X}{0.04} \right) (91.6) \right]$$

$$q_i = 1.260 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

$$q_{ii} = -6000 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.04} \right) (91.6) + \left(\frac{X}{0.04} \right) (82.4) \right]$$

$$q_{ii} = 1.380 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

$$q_{iii} = -6000 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.04} \right) (82.4) + \left(\frac{X}{0.04} \right) (72.4) \right]$$

$$q_{iii} = 1.500 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

$$q_{iv} = -6000 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.04} \right) (72.4) + \left(\frac{X}{0.04} \right) (61.6) \right]$$

$$q_{iv} = 1.620 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

$$q_v = -6000 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.04} \right) (61.6) + \left(\frac{X}{0.04} \right) (50.0) \right]$$

$$q_v = 1.740 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

Cabe señalar que esta cantidad de flujo de calor que acabamos de calcular es la que se encuentra en el punto medio del segmento de material $\left(x = \frac{L}{2} \right)$, o como lo hemos llamado aquí el punto medio de cada elemento finito propuesto.

V.2. El material sólido que se observa en la Fig. 5.2.(a). Esta sujeto a una diferencia de temperatura debido a las diferentes propiedades de los gases que lo rodean. Usando cinco elementos finitos de igual longitud, calcule la distribución de temperatura a través del espesor del material (0.1 m). Asuma $K = 250 \text{ W/m}^2\text{K}$, $W = 0.1 \text{ m}$, $h_1 = 2,000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, $h_2 = 5,000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, $T_{1\infty} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ y $T_{2\infty} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$.

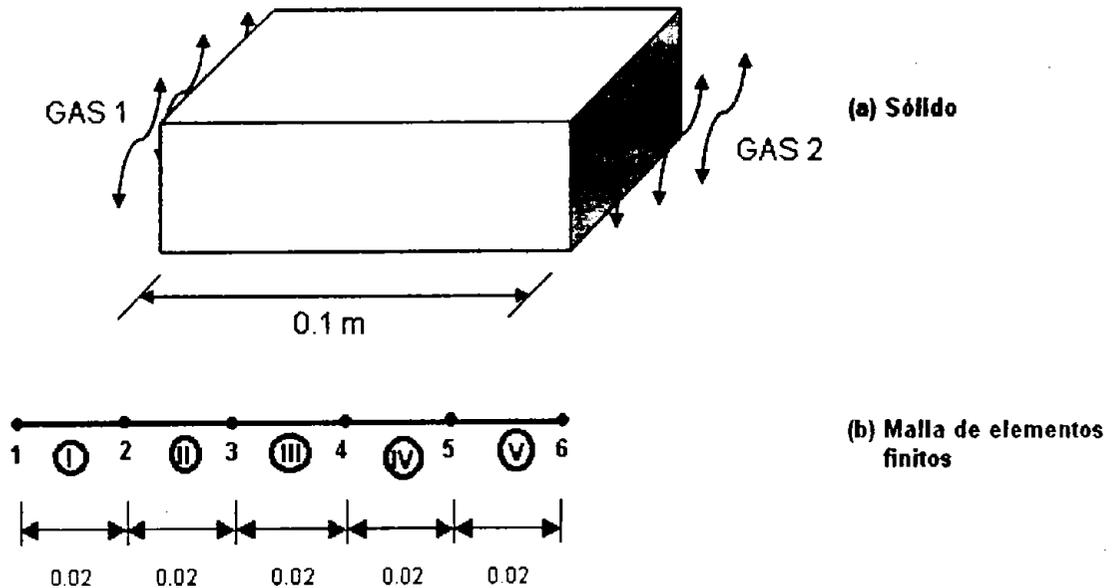


Fig. 5.2. Modelo del material sólido.

SOLUCIÓN:

A diferencia del problema anterior en éste no existe generación interna de calor, y se tiene transferencia de calor por convección. Así, el elemento I se evaluará de acuerdo con la siguiente ecuación

$$\frac{K_T A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + hA \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = hT_{\infty} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{(250)(1)}{0.02} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + (2000)(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = (2000)(100)(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que valores adicionales sólo se presentan en el nodo 1. Realizando las operaciones en el modelo para este elemento se obtiene

$$\begin{matrix} & 1 & & 2 \\ \begin{bmatrix} 14500 & -12500 \\ -12500 & 12500 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 20000 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

En el segundo elemento no incluimos la transferencia por convección, por lo tanto la expresión para este elemento II es como sigue

$$\frac{(250)(1)}{0.02} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando las operaciones se tiene

$$\begin{matrix} & 2 & & 3 \\ \begin{bmatrix} 12500 & -12500 \\ -12500 & 12500 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Los elementos III y IV presentan las mismas características del elemento II, por tanto su matriz local es idéntica, esto es

Elemento III

$$\begin{matrix} & 3 & & 4 \\ \begin{bmatrix} 12500 & -12500 \\ -12500 & 12500 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento IV

$$\begin{matrix} & 4 & & 5 \\ \begin{bmatrix} 12500 & -12500 \\ -12500 & 12500 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

En el elemento V se tiene un nodo con una condición de frontera de flujo por convección, por lo que esta condición se debe sumar a ambos miembros de la igualdad

$$\begin{bmatrix} 12500 & -12500 \\ -12500 & 12500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} + (5000)(1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = (5000)(50)(1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual una vez realizado las operaciones queda de la siguiente forma

$$\begin{matrix} & 5 & & 6 \\ \begin{bmatrix} 12500 & -12500 \\ -12500 & 17500 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 250000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Ensamblando en la matriz global K_G las matrices calculadas para cada elemento se obtiene

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 14500 & -12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 25000 & -12500 & 0 & 0 & 0 \\ & & 25000 & -12500 & 0 & 0 \\ & & & 25000 & -12500 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & 25000 & -12500 \\ & & & & & 17500 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

En forma general, el problema se representa matricialmente como $[K_G][T]=[F]$, esto es

Capítulo V. Problemas de campo escalar

$$\begin{bmatrix} 14500 & -12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 25000 & -12500 & 0 & 0 & 0 \\ & & 25000 & -12500 & 0 & 0 \\ & & & 25000 & -12500 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & 25000 & -12500 \\ & & & & & 17500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250000 \end{bmatrix}$$

Como el problema no presenta condiciones de frontera con temperatura en algún punto, solo resta resolver este sistema de ecuaciones y así determinar la temperatura en cada uno de los nodos de la malla. A continuación se presentan los resultados para el vector de temperaturas:

$$[T] = [77.27 \quad 73.63 \quad 70.0 \quad 66.36 \quad 62.73 \quad 59.09]^T$$

La solución exacta para el cálculo de la temperatura en los nodos es proporcionada por la siguiente expresión:

$$T = T_{1\infty} - (T_{1\infty} - T_{2\infty}) \frac{(x/k) + (1/h_1)}{(1/h_1) + (1/h_2) + (L/k)}$$

donde "x" representa la posición del nodo medida a partir del extremo izquierdo del sólido y "L" su longitud del elemento.

De la misma forma que en el ejemplo anterior se puede calcular el flujo de calor en cada uno de los elementos utilizados empleando la siguiente expresión:

$$q = -K_T \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{L} \right) T_i + \left(\frac{X}{L} \right) T_j \right]$$

Para el elemento I:

$$q_I = -250 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.02} \right) (77.27) + \left(\frac{X}{0.02} \right) (73.64) \right]$$

$$q_I = 45.462 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

Para el elemento II:

$$q_{II} = -250 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.02} \right) (73.64) + \left(\frac{X}{0.02} \right) (70.0) \right]$$

$$q_{II} = 45.500 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

Para el elemento III.

$$q_{III} = -250 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.02} \right) (70.0) + \left(\frac{X}{0.02} \right) (66.36) \right]$$

$$q_{III} = 45.500 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

Para el elemento IV

$$q_{IV} = -250 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.02} \right) (66.36) + \left(\frac{X}{0.02} \right) (62.73) \right]$$

$$q_{IV} = 45.462 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

Y finalmente para el elemento V

$$q_v = -250 \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{X}{0.02} \right) (62.73) + \left(\frac{X}{0.02} \right) (59.09) \right]$$

$$q_v = 45.500 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

V.3. Si la matriz local para la transferencia de calor en un elemento rectangular de cuatro nodos se escribe como

$$[K] = \frac{t}{6a^2b^2} \begin{bmatrix} 2b^2k_{TX} + 2a^2k_{TY} & -2b^2k_{TX} + a^2k_{TY} & -b^2k_{TX} - a^2k_{TY} & b^2k_{TX} - 2a^2k_{TY} \\ -2b^2k_{TX} + a^2k_{TY} & 2b^2k_{TX} + 2a^2k_{TY} & b^2k_{TX} - 2a^2k_{TY} & -b^2k_{TX} - a^2k_{TY} \\ -b^2k_{TX} - a^2k_{TY} & b^2k_{TX} - 2a^2k_{TY} & 2b^2k_{TX} + 2a^2k_{TY} & -2b^2k_{TX} + a^2k_{TY} \\ b^2k_{TX} - 2a^2k_{TY} & -b^2k_{TX} - a^2k_{TY} & -2b^2k_{TX} + a^2k_{TY} & 2b^2k_{TX} + 2a^2k_{TY} \end{bmatrix}$$

Simétrica

Calcule la distribución de temperatura en la placa que se muestra en la Fig. 5.3.(a). Suponga que se mantiene una temperatura constante $T_0 = 100$ a lo largo del extremo superior, y los restantes lados tienen temperatura nula. Para el cálculo, asuma que la conductividad térmica es igual en ambas direcciones, es decir, $K_{TX} = K_{TY} = 1$ y compare el resultado numérico con el resultado de la solución exacta. Considere $W = L = 1$ y un espesor $t = 1$, ya que la solución es independiente de t .

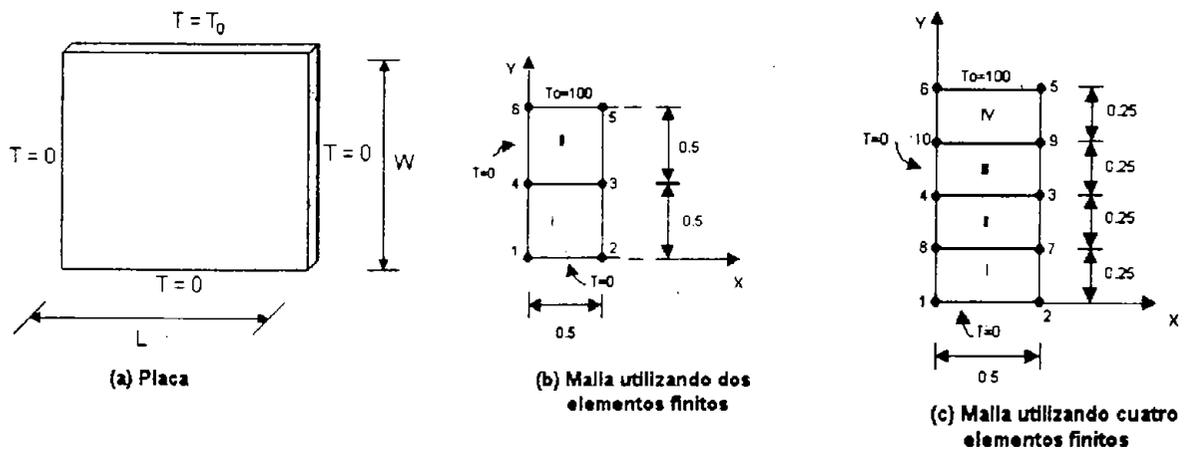


Fig. 5.3. Modelo de la placa utilizada.

SOLUCIÓN:

Debido a la simetría del problema sólo se analizará una mitad de la placa lo que disminuirá la cantidad de cálculos numéricos.

- i) Discretización en dos elementos.

En la Fig. 5.3.(b) se presenta esta condición. La Tabla 5.1 contiene un resumen de las propiedades principales de cada elemento.

Tabla 5.1. Propiedades de los elementos de la malla.

Elemento Finito	Conectividad I,j,k,l	Lado a	Lado b	Conductividad térmica		Espesor "t"
				K _{TX}	K _{TY}	
I	1,2,3,4	0.5	0.5	1	1	1
II	3,4,5,6	0.5	0.5	1	1	1

Sustituyendo los datos del elemento I en la matriz local de conductividad térmica presentada obtendremos

$$[K]_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 & -0.1667 \\ & 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 \\ & & 0.6667 & -0.1667 \\ \text{Simétrica} & & & 0.6667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

De igual forma para el elemento II tenemos

$$[K]_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 & -0.1667 \\ & 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 \\ & & 0.6667 & -0.1667 \\ \text{Simétrica} & & & 0.6667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A partir de estas matrices y de sus indicadores de ecuación, podemos formar la matriz global de conductividad $[K_G]$, esto es

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 & -0.1667 & 0 & 0 \\ & 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 & 0 & 0 \\ & & 1.3333 & -0.3333 & -0.1667 & -0.3333 \\ & & & 1.3333 & -0.3333 & -0.1667 \\ & \text{Simétrica} & & & 0.6667 & -0.1667 \\ & & & & & 0.6667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Todo el problema lo podemos expresar matricialmente de la forma $[K_G][T]=[F]$. Así, se genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 & -0.1667 & 0 & 0 \\ & 0.6667 & -0.1667 & -0.3333 & 0 & 0 \\ & & 1.3333 & -0.3333 & -0.1667 & -0.3333 \\ & & & 1.3333 & -0.3333 & -0.1667 \\ & \text{Simétrica} & & & 0.6667 & -0.1667 \\ & & & & & 0.6667 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el problema se tienen las siguientes condiciones de frontera: $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_4 = 0$ y $T_5 = T_6 = 100$; sustituyendo y resolviendo el sistema calculamos la temperatura T_3 , obteniéndose

$$T_3 = 37.5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ii) Discretización en cuatro elementos

Capítulo V. Problemas de campo escalar

Básicamente es el mismo cálculo. El cambio estriba en el hecho de que se tienen dos elementos más por lo que la matriz global será de orden 10x10 y se podrá calcular la temperatura en dos puntos más de la placa. Esta malla se presenta en la Fig.5.3.(c).

Tabla 5.2. Propiedades de los elementos de la malla.

Elemento Finito	Conectividad i,j,k,l	Lado a	Lado b	Conductividad térmica		Espesor "t"
				K _{TX}	K _{TY}	
I	1,2,7,8	0.5	0.25	1	1	1
II	7,8,4,3	0.5	0.25	1	1	1
III	4,3,9,10	0.5	0.25	1	1	1
IV	9,10,6,5	0.5	0.25	1	1	1

Sustituyendo los valores de las propiedades del elemento I, tenemos

$$[K]_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.8333 & 0.1667 & -0.4167 & -0.5833 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 0.8333 & -0.5833 & -0.4167 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} & & 0.8333 & 0.1667 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Simétrica} & & & 0.8333 \end{matrix} & \end{matrix}$$

A su vez, para el caso del elemento II

$$[K]_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 4 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.8333 & 0.1667 & -0.4167 & -0.5833 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 0.8333 & -0.5833 & -0.4167 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Simétrica} & & 0.8333 & 0.1667 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} & & & 0.8333 \end{matrix} \end{matrix}$$

En el elemento III se tendrá

$$[K]_{III} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 3 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.8333 & 0.1667 & -0.4167 & -0.5833 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 0.8333 & -0.5833 & -0.4167 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Simétrica} & & 0.8333 & 0.1667 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} & & & 0.8333 \end{matrix} \end{matrix}$$

Y para el elemento IV, su matriz local quedará de la siguiente forma

$$[K]_V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 6 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.8333 & 0.1667 & -0.4167 & -0.5833 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 0.8333 & -0.5833 & -0.4167 \\ & \text{Simétrica} & 0.8333 & 0.1667 \\ & & & 0.8333 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz global de conductividad de la malla de cuatro elementos finitos queda como sigue:

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.8333 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4167 & -0.5833 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 0.8333 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5833 & -0.4167 & 0 & 0 \\ & & 1.6667 & 0.3333 & 0 & 0 & -0.5833 & -0.4167 & -0.5833 & -0.4167 \\ & & & 1.6667 & 0 & 0 & -0.4167 & -0.5833 & -0.4167 & -0.5833 \\ & & & & 0.8333 & 0.1667 & 0 & 0 & -0.5833 & -0.4167 \\ & & & & & 0.8333 & 0 & 0 & -0.4167 & -0.5833 \\ & & & & & & 1.6667 & 0.3333 & 0 & 0 \\ & & \text{Simétrica} & & & & & 1.6667 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1.6667 & 0.3333 \\ & & & & & & & & & 1.6667 \end{matrix} \end{matrix}$$

En forma matricial $[K_G][T]=[F]$ y sustituyendo las condiciones de frontera del problema; $T_1=0, T_2=0, T_8=0, T_4=0, T_{10}=0,$ y $T_6=T_5=100.$

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0.8333 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4167 & -0.5833 & 0 & 0 \\ & 0.8333 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5833 & -0.4167 & 0 & 0 \\ & & 1.6667 & 0.3333 & 0 & 0 & -0.5833 & -0.4167 & -0.5833 & -0.4167 \\ & & & 1.6667 & 0 & 0 & -0.4167 & -0.5833 & -0.4167 & -0.5833 \\ & & & & 0.8333 & 0.1667 & 0 & 0 & -0.5833 & -0.4167 \\ & & & & & 0.8333 & 0 & 0 & -0.4167 & -0.5833 \\ & & \text{Simétrica} & & & & 1.6667 & 0.3333 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1.6667 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1.6667 & 0.3333 \\ & & & & & & & & & 1.6667 \end{matrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema se obtienen las temperaturas en los nodos 3, 7 y 9.

$$T_3 = 27.810$$

$$T_7 = 9.733$$

$$T_9 = 69.732$$

La solución exacta está dada por la siguiente formula

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{\sinh(n\pi y / L)}{\sinh(n\pi W / L)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sustituyendo en esta expresión valores para los nodos 3, 7 y 9 se obtienen los siguientes resultados

$$T_3(0.5,0.5) = 25.0$$

$$T_7(0.5,0.25) = 9.54$$

$$T_9(0.5,0.75) = 54.12$$

Este problema bidimensional nos permite hacer una comparación de resultados, los cuales aparecen en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3. Comparación de resultados.

Solución					
Analítica		Elementos Finitos Utilizando 2 elementos		Elementos Finitos Utilizando 4 elementos	
Nodo	Temperatura	Nodo	Temperatura	Nodo	Temperatura
3	25	3	37.5	3	27.81
7	9.54			7	9.73
9	54.12			9	69.73

Por lo que podemos concluir que entre mayor sea el número de elementos en que se divida la placa la solución será más exacta.

V.4. En la siguiente estratigrafía (Fig. 5.4.(a)), tenemos tres tipos de suelo diferente, cada uno con sus respectivas propiedades. Tenemos para el primer tipo de suelo un coeficiente de permeabilidad $k = 2 \text{ m/s}$, para el segundo tipo una constante de permeabilidad $k = 4 \text{ m/s}$ y finalmente para el tercero de ellos una $k = 6 \text{ m/s}$. Además, el potencial de flujo en la parte superior de la estratigrafía es de 10 m mientras que en la parte inferior tiene un valor de 0 . Utilizando el método del elemento finito, calcule el potencial de flujo y la velocidad de flujo que se presenta en estos estratos si cada uno tiene una longitud de 1 m .

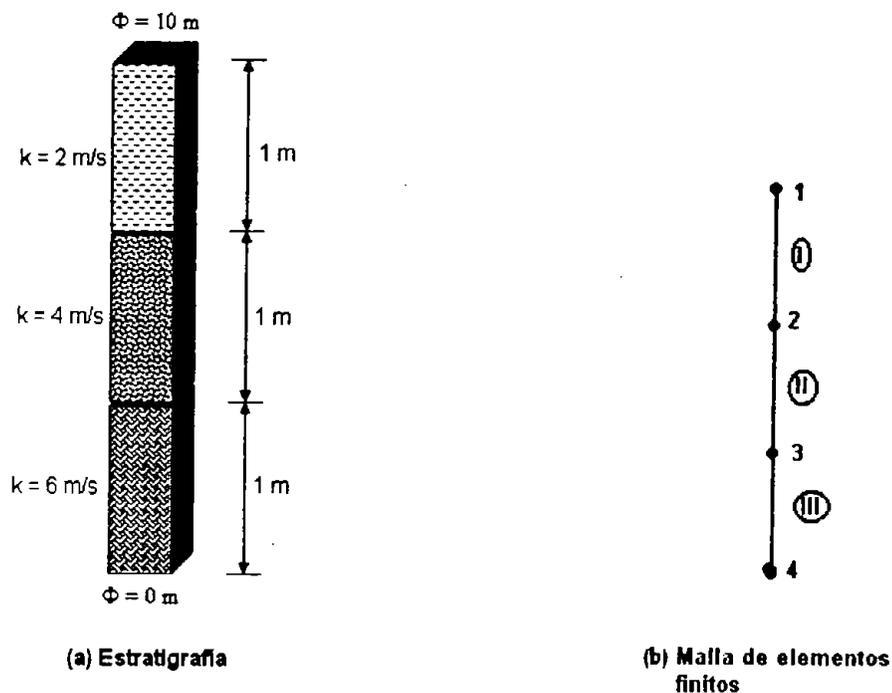


Fig.5.4. Modelo de la estratigrafía.

En forma unidimensional, el fenómeno de flujo en medios porosos se representa por la ecuación matricial

$$\frac{K_x A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} = q_i A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q_j A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, para el elemento I

$$\frac{(2)(1)}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Para elemento II

$$\frac{(4)(1)}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ \left[\begin{array}{cc} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

de igual forma obtenemos el elemento III

$$\frac{(6)(1)}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cc} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Sumando las cantidades de los elementos que comparten un mismo nodo, se obtiene la matriz global

Capítulo V. Problemas de campo escalar

$$[K]_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ & 6 & -4 & 0 \\ & & 10 & -6 \\ \text{Simétrica} & & & 10 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

En forma matricial el problema es expresado como

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ & 6 & -4 & 0 \\ & & 10 & -6 \\ \text{Simétrica} & & & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aplicando las condiciones de frontera $\Phi_1 = 10$ y $\Phi_4 = 0$, conocidos como carga hidráulica, que equivale a la suma de la carga de posición y la carga de presión en cada punto del medio poroso, es decir

$$\Phi = \frac{p}{\gamma} + Z$$

De esta forma el sistema de ecuaciones queda expresado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ & 6 & -4 & 0 \\ & & 10 & -6 \\ \text{Simétrica} & & & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo sistema

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4.54 \\ 1.82 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Ahora se calculará la velocidad de flujo o velocidad de Darcy que asume que el flujo tiene lugar a través de toda la sección considerada, pero realmente el flujo sólo tiene lugar por los espacios porosos del material. Matemáticamente esta velocidad se escribe como

$$V_D = K \cdot i = -K \cdot \frac{d\Phi}{ds}$$

que es la forma más usual de la ley de Darcy, y en la que el signo negativo indica el hecho de que el flujo se dirige en el sentido de la disminución de la carga hidráulica. Es preciso tener en cuenta que v_D es una velocidad de filtración, distinta de la velocidad media real de las moléculas de agua

Si llevamos esta fórmula a la teoría del elemento finito obtenemos

$$V_x = -K_x \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$$

Así, tenemos que para el elemento I la velocidad de flujo es

$$V_x = -2 \left[-\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \right] \begin{bmatrix} 10 \\ 4.54 \end{bmatrix}$$

$$V_x = 10.92 \text{ m/s}$$

para el elemento II

$$V_x = -4 \left[-\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \right] \begin{bmatrix} 4.54 \\ 1.82 \end{bmatrix}$$

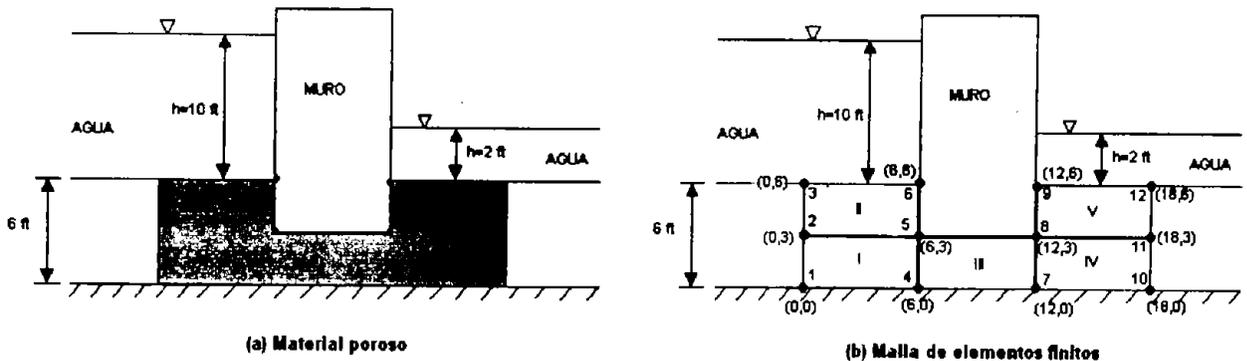
$$V_x = 10.88 \text{ m/s}$$

y en el elemento III

$$V_x = -6 \left[-\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \right] \begin{bmatrix} 1.82 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_x = 10.92 \text{ m/s}$$

V.5. Obtenga los valores del potencial hidráulico por elementos finitos para el problema de flujo confinado que se muestra en la Fig. 5.5.(a). Se tienen 10 ft de profundidad aguas arriba y 2 ft aguas abajo. Para el confinamiento se usa un muro sumergido 3 ft en el material poroso. Asuma que el material es homogéneo con un coeficiente de permeabilidad $K = 10(10)^{-5}$.



5.5. Modelo del flujo confinado.

SOLUCIÓN:

Para la solución de este problema también utilizaremos la ecuación que se obtuvo en el ejemplo V.3 sólo que como el medio es homogéneo, entonces la constante de permeabilidad es igual en ambas direcciones, es decir, $K_{xx} = K_{yy} = K$. Por lo tanto, la matriz de permeabilidad se calculará con la siguiente expresión

$$[K] = \frac{t}{6a^2b^2} \begin{bmatrix} 2b^2k_{xx} + 2a^2k_{yy} & -2b^2k_{xx} + a^2k_{yy} & -b^2k_{xx} - a^2k_{yy} & b^2k_{xx} - 2a^2k_{yy} \\ & 2b^2k_{xx} + 2a^2k_{yy} & b^2k_{xx} - 2a^2k_{yy} & -b^2k_{xx} - a^2k_{yy} \\ \text{Simétrica} & & 2b^2k_{xx} + 2a^2k_{yy} & -2b^2k_{xx} + a^2k_{yy} \\ & & & 2b^2k_{xx} + 2a^2k_{yy} \end{bmatrix}$$

Puesto que todos los elementos tienen las mismas dimensiones y el único cambio entre ellos es la conectividad, las matrices de permeabilidad también son iguales. A continuación se presentan las propiedades de cada elemento que conforma la malla propuesta.

Tabla 5.4. Propiedades geométricas de la malla propuesta.

Elemento Finito	Conectividad I,j,k,l	Lado a	Lado b	Coeficiente de permeabilidad		Espesor "t"
				K _{xx}	K _{yy}	
I	1,2,5,4	6	3	0.0001	0.0001	1
II	2,5,6,3	6	3	0.0001	0.0001	1
III	5,4,7,8	6	3	0.0001	0.0001	1
IV	7,8,11,10	6	3	0.0001	0.0001	1
V	8,11,12,9	6	3	0.0001	0.0001	1

De esta forma, la matriz local de permeabilidad del elemento I queda de la siguiente manera

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8.333E-5 & 1.667E-5 & -4.167E-5 & -5.833E-5 \\ & 8.333E-5 & -5.833E-5 & -4.167E-5 \\ & & 8.333E-5 & 1.667E-5 \\ & & & 8.333E-5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simétrica

De la misma manera tenemos que la matriz del elemento II es

$$[K]_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 5 & 5 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8.333E-5 & 1.667E-5 & -4.167E-5 & -5.833E-5 \\ & 8.333E-5 & -5.833E-5 & -4.167E-5 \\ & & 8.333E-5 & 1.667E-5 \\ & & & 8.333E-5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simétrica

Repitiendo el proceso de cálculo de la matriz de permeabilidad para el elemento III

$$[K]_{III} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8.333E-5 & 1.667E-5 & -4.167E-5 & -5.833E-5 \\ & 8.333E-5 & -5.833E-5 & -4.167E-5 \\ & & 8.333E-5 & 1.667E-5 \\ & & & 8.333E-5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simétrica

Para el elemento IV

$$[K]_V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 11 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8.333E-5 & 1.667E-5 & -4.167E-5 & -5.833E-5 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 8.333E-5 & -5.833E-5 & -4.167E-5 \\ & & 8.333E-5 & 1.667E-5 \\ \text{Simétrica} & & & 8.333E-5 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Y por ultimo, para el elemento V.

$$[K]_V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 11 & 12 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8.333E-5 & 1.667E-5 & -4.167E-5 & -5.833E-5 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 \\ 11 \\ 12 \\ 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 8.333E-5 & -5.833E-5 & -4.167E-5 \\ & & 8.333E-5 & 1.667E-5 \\ \text{Simétrica} & & & 8.333E-5 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Finalmente, la matriz global de permeabilidad queda de la siguiente forma una vez ensambladas las matrices de cada elemento

$$[K]_G = (1 \times 10^{-5}) \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8.333 & 1.667 & 0 & -5.833 & -4.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 16.67 & -5.833 & -4.167 & 2.5 & -4.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8.333 & 0 & -4.167 & 1.667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 16.67 & 3.333 & 0 & -5.833 & -4.167 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 25 & -5.833 & -4.167 & -5.833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 8.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 16.67 & 3.333 & 0 & -5.833 & -4.167 & 0 \\ & & & & & & & 25 & -5.833 & -4.167 & -4.167 & -4.167 \\ & & & & & & & & 8.333 & 0 & -4.167 & 1.667 \\ & & & & & & & & & 8.333 & 1.667 & 0 \\ & & & & & & & & & & 16.67 & -5.833 \\ & & & & & & & & & & & 8.333 \end{matrix} \\ \text{Simétrica} & \end{matrix}$$

Si representamos en forma matricial nuestro problema obtendremos

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 8.333 & 1.667 & 0 & -5.833 & -4.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 16.67 & -5.833 & -4.167 & 2.5 & -4.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 8.333 & 0 & -4.167 & 1.667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 16.67 & 3.333 & 0 & -5.833 & -4.167 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 25 & -5.833 & -4.167 & -5.833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 8.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 16.67 & 3.333 & 0 & -5.833 & -4.167 & 0 \\
 & & & & & & & 25 & -5.833 & -4.167 & -4.167 & -4.167 \\
 & & & & & & & & 8.333 & 0 & -4.167 & 1.667 \\
 & & & & & & & & & 8.333 & 1.667 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 16.67 & -5.833 \\
 & & & & & & & & & & & 8.333
 \end{array} \right] \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \\ \Phi_{10} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

Simétrica

Donde las Φ_i representan la carga hidráulica en cada nodo y el vector del lado derecho se calcula con base en las condiciones iniciales especificadas y cuyos valores de potencial hidráulico son $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_6 = 16$ y $\Phi_9 = \Phi_{10} = \Phi_{11} = \Phi_{12} = 8$. Sustituyendo y resolviendo el sistema obtenemos el valor de la carga hidráulica en los restantes nodos, dando como resultado

$$\Phi_4 = 13.07 \text{ ft.}$$

$$\Phi_5 = 14.10 \text{ ft.}$$

$$\Phi_7 = 10.92 \text{ ft.}$$

$$\Phi_8 = 9.89 \text{ ft.}$$

CAPÍTULO VI

**“Método del elemento
finito aplicado a
problemas planos”**

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

VI.1. La placa de la Fig. 6.1.(a)., es de 6 x 10 in y 0.2 in de espesor con una carga de tensión de 10,000 psi como se muestra. Calcule el desplazamiento de cada nodo de la malla propuesta. Considere que el material tiene un módulo de elasticidad $E = 10 \times 10^6$ psi y un módulo de Poisson $\nu = 0.3$

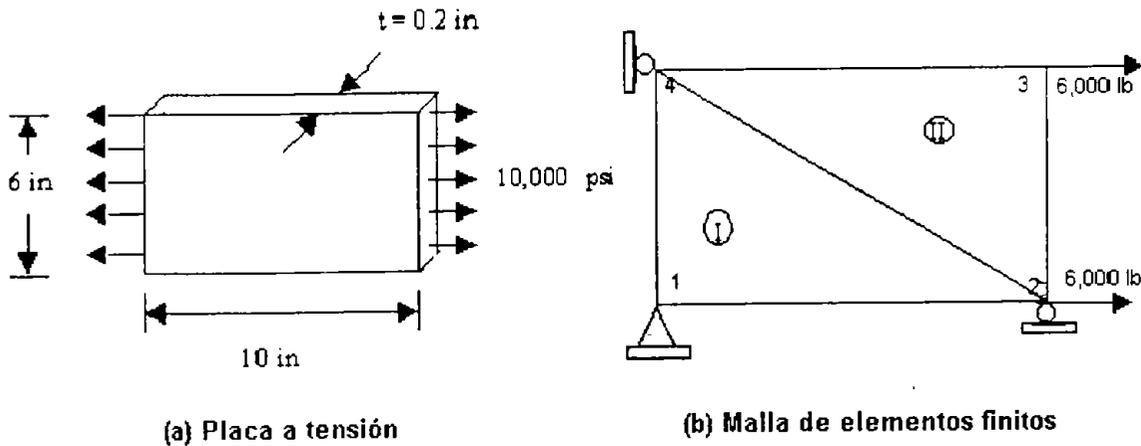


Fig. 6.1. Modelo de la placa.

Solución.

La expresión para resolver un problema de estado plano de esfuerzos para elementos triangulares de tres nodos, es la siguiente

$$[K] = \frac{tE}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i^2 + \frac{c_i^2(1-\nu)}{2} & b_i c_i \nu + \frac{b_i c_i (1-\nu)}{2} & b_i b_j + \frac{c_i c_j (1-\nu)}{2} & b_i c_j \nu + \frac{b_j c_i (1-\nu)}{2} & b_i b_k + \frac{c_i c_k (1-\nu)}{2} & b_i c_k \nu - \frac{b_j c_k (1-\nu)}{2} \\ & c_i^2 + \frac{b_i^2(1-\nu)}{2} & b_j c_i \nu + \frac{b_i c_j (1-\nu)}{2} & c_i c_j + \frac{b b_j (1-\nu)}{2} & b_k c_i \nu + \frac{b_i c_k (1-\nu)}{2} & c_i c_k + \frac{b_j b_k (1-\nu)}{2} \\ & & b_j^2 + \frac{c_j^2(1-\nu)}{2} & b_j c_j \nu + \frac{b_j c_j (1-\nu)}{2} & b_j b_k + \frac{c_j c_k (1-\nu)}{2} & b_j c_k \nu + \frac{b_k c_j (1-\nu)}{2} \\ & & & c_j^2 + \frac{b_j^2(1-\nu)}{2} & b_k c_j \nu + \frac{b_j c_k (1-\nu)}{2} & c_j c_k + \frac{b_i b_k (1-\nu)}{2} \\ & & & & b_k^2 + \frac{c_k^2(1-\nu)}{2} & b_k c_k \nu + \frac{b_k c_k (1-\nu)}{2} \\ & & & & & c_k^2 + \frac{b_k^2(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Simétrica

Si tomamos las características de cada elemento de la discretización propuesta en la figura y los tabulamos, obtenemos:

Tabla 6.1. Características de los elementos

Elemento Finito	Conectividad i,j,k	b_i	b_j	b_k	c_i	c_j	c_k	A (in ²)	ν	E (psi)	t (in)
		$y_j - y_k$	$y_k - y_i$	$y_i - y_j$	$x_k - x_i$	$x_i - x_k$	$x_j - x_i$				
I	1,2,4	-6	6	0	-10	0	10	30	0.3	10×10^6	0.2
II	2,3,4	0	6	-6	-10	10	0	30	0.3	10×10^6	0.2

Valuando la ecuación para el cálculo de la matriz local de rigidez con las propiedades del elemento I, obtenemos

$$[K]_{1,2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 & -641026 & -329670 \\ & 2062271 & -329670 & -230769 & -384615 & -1831502 \\ & & 659341 & 0 & 0 & 329670 \\ & & & 230769 & 384615 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & 641026 & 0 \\ & & & & & 1831502 \\ & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

mientras que si lo hacemos con las propiedades del elemento II, llegamos a

$$[K]_{2,3,4} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 641026 & 0 & -641026 & -384615 & 0 & 384615 \\ & 1831502 & -329670 & -1831502 & 329670 & 0 \\ & & 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 \\ & & & 2062271 & -329670 & -230769 \\ & \text{Simétrica} & & & 659341 & 0 \\ & & & & & 230769 \\ & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

Sumando los términos comunes entre elementos, conformamos la matriz global

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 & 0 & 0 & -641026 & -329670 \\ & 2062271 & -329670 & -230769 & 0 & 0 & -384615 & -1831502 \\ & & 1300366 & 0 & -641026 & -384615 & 0 & 714286 \\ & & & 2062271 & -329670 & -1831502 & 714286 & 0 \\ & & & & 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 \\ & \text{Simétrica} & & & & 2062271 & -329670 & -230769 \\ & & & & & & 1300366 & 0 \\ & & & & & & & 2062271 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

El problema total presentado de forma matricial se escribe de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 & 0 & 0 & -641026 & -329670 \\ & 2062271 & -329670 & -230769 & 0 & 0 & -384615 & -1831502 \\ & & 1300366 & 0 & -641026 & -384615 & 0 & 714286 \\ & & & 2062271 & -329670 & -1831502 & 714286 & 0 \\ & & & & 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 \\ & \text{Simétrica} & & & & 2062271 & -329670 & -230769 \\ & & & & & & 1300366 & 0 \\ & & & & & & & 2062271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \\ F_{4X} \\ F_{4Y} \end{bmatrix}$$

La carga distribuida (w) la aproximamos a una carga puntual en los nodos 2 y 3 mediante la fórmula

$$\begin{aligned} F_{2X} = F_{3X} &= \frac{Lwt}{2} \\ &= \frac{(6)(10\,000)(0.2)}{2} \\ &= 6\,000 \text{ lb} \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones de frontera del problema que son $U_1 = U_4 = 0$, $V_1 = V_2 = 0$ y $F_{2X} = F_{3X} = 6\,000 \text{ lb}$.

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

$$\begin{bmatrix}
 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 & 0 & 0 & -641026 & -329670 \\
 & 2062271 & -329670 & -230769 & 0 & 0 & -384615 & -1831502 \\
 & & 1300366 & 0 & -641026 & -384615 & 0 & 714286 \\
 & & & 2062271 & -329670 & -1831502 & 714286 & 0 \\
 & & & & 1300366 & 714286 & -659341 & -384615 \\
 & & & & & 2062271 & -329670 & -230769 \\
 & & & & & & 1300366 & 0 \\
 & & & & & & & 2062271
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 V_1 \\
 U_2 \\
 V_2 \\
 U_3 \\
 V_3 \\
 U_4 \\
 V_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 6000 \\
 0 \\
 6000 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Simétrica

Resolviendo sistema de ecuaciones nos da los siguientes resultados

$$\begin{bmatrix}
 U_1 \\
 V_1 \\
 U_2 \\
 V_2 \\
 U_3 \\
 V_3 \\
 U_4 \\
 V_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0.01 \\
 0 \\
 0.01 \\
 -0.0018 \\
 0 \\
 -0.0018
 \end{bmatrix}
 \text{ cm}$$

Para el cálculo de esfuerzos tenemos la expresión siguiente

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\}$$

donde $\{\varepsilon\}$ es el vector de deformación unitaria y que es igual a

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right\}$$

obteniendo el vector de deformaciones unitarias del elemento I tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} u_i + \frac{b_J}{2A} u_J + \frac{b_k}{2A} u_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-6}{2(30)}(0) + \frac{6}{2(30)}(0.01) + \frac{0}{2(30)}(0)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0.001$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{C_i}{2A} v_i + \frac{C_J}{2A} v_J + \frac{C_k}{2A} v_k$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-10}{2(30)}(0) + \frac{0}{2(30)}(0) + \frac{10}{2(30)}(-0.0018)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -0.0003$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{C_i}{2A} u_i + \frac{C_J}{2A} u_J + \frac{C_K}{2A} u_k + \frac{b_i}{2A} v_i + \frac{b_J}{2A} v_J + \frac{b_K}{2A} v_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-10}{2(30)}(0) + \frac{0}{2(30)}(0.01) + \frac{10}{2(30)}(0) + \frac{-6}{2(30)}(0) + \frac{6}{2(30)}(0) + \frac{0}{2(30)}(-0.0018)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Sustituyendo estos valores tenemos que los esfuerzos en el elemento I son

$$\sigma_i = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ psi}$$

Procediendo de forma similar para el elemento II, obtenemos sus respectivos esfuerzos

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

$$\sigma_{11} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ psi}$$

Cabe aclarar que estos esfuerzos calculados para cada elemento actúan en el centroide del elemento y son diferentes a los que se presentan en los nodos.

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

VI.2. Se desea construir un muro de contención (ver Fig. 6.2.) el cual estará sometido al empuje de una masa de suelo cuya densidad es $\gamma_m = 2.2 \text{ t/m}^3$. El muro será de concreto con un módulo de elasticidad $E = 2.8 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ y un módulo de Poisson $\nu = 0.30$. La sección geométrica es como se muestra en la Fig. 6.2.(a). Calcule los esfuerzos a los que estará sometido este muro.

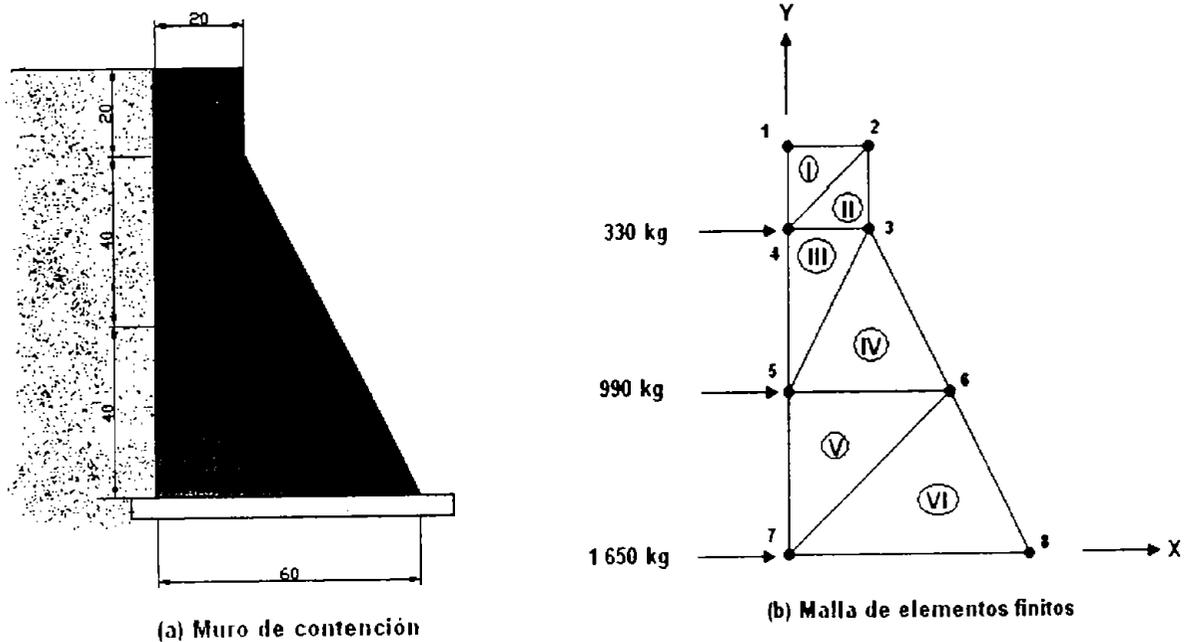


Fig. 6.2. Modelo del muro.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema ocuparemos nuevamente la expresión siguiente

$$[K] = \frac{tE}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i^2 + \frac{c_i^2(1-\nu)}{2} & b_i c_i \nu + \frac{b_i c_i (1-\nu)}{2} & b_i b_j + \frac{c_i c_j (1-\nu)}{2} & b_i c_j \nu + \frac{b_j c_i (1-\nu)}{2} & b_i b_k + \frac{c_i c_k (1-\nu)}{2} & b_i c_k \nu + \frac{b_k c_i (1-\nu)}{2} \\ & c_i^2 + \frac{b_i^2(1-\nu)}{2} & b_j c_i \nu + \frac{b_i c_j (1-\nu)}{2} & c_i c_j + \frac{b_i b_j (1-\nu)}{2} & b_k c_i \nu + \frac{b_i c_k (1-\nu)}{2} & c_i c_k + \frac{b_i b_k (1-\nu)}{2} \\ & & b_j^2 + \frac{c_j^2(1-\nu)}{2} & b_j c_j \nu + \frac{b_j c_j (1-\nu)}{2} & b_j b_k + \frac{c_j c_k (1-\nu)}{2} & b_j c_k \nu + \frac{b_k c_j (1-\nu)}{2} \\ & & & c_j^2 + \frac{b_j^2(1-\nu)}{2} & b_k c_j \nu + \frac{b_j c_k (1-\nu)}{2} & c_j c_k + \frac{b_j b_k (1-\nu)}{2} \\ & & & & b_k^2 + \frac{c_k^2(1-\nu)}{2} & b_k c_k \nu + \frac{b_k c_k (1-\nu)}{2} \\ & & & & & c_k^2 + \frac{b_k^2(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Simétrica

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

A continuación en la Tabla 6.2 desglosaremos las propiedades geométricas de cada uno de los elementos de la malla propuesta en la Fig. 6.2.(b)

Tabla 6. 2. Características de los elementos.

Elemento Finito	Conectividad i,j,k	b_i	b_j	b_k	c_i	c_j	c_k	A (cm ²)	ν	E (kg/cm ²)
		$y_j - y_k$	$y_k - y_i$	$y_i - y_j$	$x_k - x_i$	$x_i - x_k$	$x_j - x_i$			
I	1,2,4	20	-20	0	-20	0	20	200	0.20	280 000
II	2,3,4	0	-20	20	-20	20	0	200	0.20	280 000
III	3,4,5	40	-40	0	0	20	-20	400	0.20	280 000
IV	3,5,6	0	-40	40	40	-20	-20	800	0.20	280 000
V	5,6,7	40	-40	0	-40	0	40	800	0.20	280 000
VI	6,7,8	0	-40	40	60	-20	-40	1 200	0.20	280 000

Como se pudo notar, en los datos del problema no se proporciona un espesor determinado, por lo tanto los cálculos se harán considerando un valor para el espesor "t" igual a 1 m.

Valuando la ecuación para el cálculo de la matriz local de rigidez con las propiedades del elemento I, obtenemos:

$$[K]_{1,2,4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 20769231 & -10000000 & -15384615 & 5384615 & -5384615 & 4615385 \\ & 20769231 & 4615385 & -5384615 & 5384615 & -15384615 \\ & & 15384615 & 0 & 0 & -4615385 \\ & \text{Simétrica} & & 5384615 & -5384615 & 0 \\ & & & & 5384615 & 0 \\ & & & & & 15384615 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Mientras que si lo hacemos con las propiedades del elemento II, llegamos a

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

$$[K]_{2,3,4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5384615 & 0 & -5384615 & 5384615 & 0 & -5384615 \\ & 15384615 & 4615385 & -15384615 & -4615385 & 0 \\ & & 20769231 & -10000000 & -15384615 & 5384615 \\ & & & 20769231 & 4615385 & -5384615 \\ & & & & 15384615 & 0 \\ & & & & & 5384615 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simétrica

Para el elemento III, su matriz local es la siguiente

$$[K]_{3,4,5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 30769231 & 0 & -30769231 & 4615385 & 0 & -4615385 \\ & 10769231 & 5384615 & -10769231 & -5384615 & 0 \\ & & 33461538 & -10000000 & -2692308 & 4615385 \\ & & & 18461538 & 5384615 & -7692308 \\ & & & & 2692308 & 0 \\ & & & & & 7692308 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simétrica

A su vez para el elemento IV

$$[K]_{3,5,6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5384615 & 0 & -2692308 & -5384615 & -2692308 & 5384615 \\ & 15384615 & -4615385 & -7692308 & 4615385 & -7692308 \\ & & 16730769 & 5000000 & -14038462 & -384615 \\ & & & 9230769 & 384615 & -1538462 \\ & & & & 16730769 & -5000000 \\ & & & & & 9230769 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Simétrica

Y para el elemento V

Capítulo VI. Método del elemento finito aplicado a problemas planos.

$$[K]_{5,6,7} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 20769231 & -10000000 & -15384615 & 5384615 & -5384615 & 4615385 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 20769231 & 4615385 & -5384615 & 5384615 & -15384615 \\ & & 15384615 & 0 & 0 & -4615385 \\ & & & 5384615 & -5384615 & 0 \\ & & & & 5384615 & 0 \\ & & & & & 15384615 \end{matrix} \\ \text{Simétrica} & \end{matrix}$$

Finalmente, el elemento VI queda representado por la matriz de rigidez

$$[K]_{6,7,8} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8076923 & 0 & -2692308 & -5384615 & -5384615 & 5384615 \end{matrix} & \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 23076923 & -4615385 & -7692308 & 4615385 & -15384615 \\ & & 11153846 & 3333333 & -8461538 & 1282051 \\ & & & 6153846 & 2051282 & 1538462 \\ & & & & 13846154 & -6666667 \\ & & & & & 13846154 \end{matrix} \\ \text{Simétrica} & \end{matrix}$$

Utilizando las seis matrices anteriores se puede formar la matriz global $[K_G]$, obteniéndose:

Las fuerzas aplicadas al modelo del muro para su análisis mostradas en la Fig. 6.2.(b), se calcularon inicialmente por medio del prisma de presiones sobre la superficie del muro

$$E = \frac{\gamma_m Z^2}{2}$$

Sabemos que este empuje es aplicado a un tercio de la altura "Z" medida a partir de la base del muro, por lo que hubo necesidad de interpolar este valor a las alturas en que se encuentran los nodos de la malla propuesta.

Sustituyendo las condiciones de frontera del problema que son $U_7 = U_8 = 0$, $V_7 = V_8 = 0$ y $F_{4x} = 330$, $F_{5x} = 990$, $F_{7x} = 1\ 650$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones nos da los siguientes resultados de desplazamientos.

U_1	0.000332
V_1	0.0000723
U_2	0.000332
V_2	0.0000204
U_3	0.000274
V_3	0.0000173
U_4	0.000282
V_4	0.0000728
U_5	0.000154
V_5	0.0000558
U_6	0.000118
V_6	-0.0000301
U_7	0
V_7	0
U_8	0
V_8	0

cm

Para el cálculo de esfuerzos, al igual que en el ejemplo anterior, tenemos la expresión siguiente

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\}$$

donde $\{\varepsilon\}$ es el vector de deformación unitaria

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{array} \right\}$$

obteniendo el vector de deformaciones unitarias del elemento I tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} u_i + \frac{b_j}{2A} u_j + \frac{b_k}{2A} u_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{20}{2(200)} (3.32 \times 10^{-4}) + \frac{-20}{2(200)} (3.32 \times 10^{-4}) + \frac{0}{2(200)} (2.82 \times 10^{-4})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{c_i}{2A} v_i + \frac{c_j}{2A} v_j + \frac{c_k}{2A} v_k$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-20}{2(200)} (7.23 \times 10^{-5}) + \frac{0}{2(200)} (2.04 \times 10^{-5}) + \frac{20}{2(200)} (7.28 \times 10^{-5})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2.5 \times 10^{-8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{C_i}{2A} u_i + \frac{C_J}{2A} u_J + \frac{C_K}{2A} u_K + \frac{b_i}{2A} v_i + \frac{b_J}{2A} v_J + \frac{b_K}{2A} v_K$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{-20}{2(200)} (3.32 \times 10^{-4}) + \frac{0}{2(200)} (3.32 \times 10^{-4}) + \frac{20}{2(200)} (2.82 \times 10^{-4}) + \\ &+ \frac{20}{2(200)} (7.23 \times 10^{-5}) + \frac{20}{2(200)} (2.04 \times 10^{-5}) + \frac{0}{2(200)} (7.28 \times 10^{-5}) \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 9.5 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores estaremos en posibilidades de calcular los esfuerzos en el elemento I,

$$\sigma_I = \begin{Bmatrix} 0.0023 \\ 0.0077 \\ 0.0102 \end{Bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

De la misma forma que calculamos los esfuerzos en el elemento II

$$\sigma_{II} = \begin{Bmatrix} 0.1088 \\ -0.0108 \\ -0.0135 \end{Bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Por su parte el elemento III está sometido a los siguientes esfuerzos

$$\sigma_{III} = \begin{Bmatrix} -0.0838 \\ 0.0938 \\ 0.0458 \end{Bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Mientras que en el elemento IV tendremos

$$\sigma_V = \left\{ \begin{array}{l} -0.2667 \\ -0.0488 \\ 0.1403 \end{array} \right\} \text{kg/cm}^2$$

El elemento V está sometido a los siguientes esfuerzos

$$\sigma_V = \left\{ \begin{array}{l} 0.1482 \\ -0.3462 \\ -0.1833 \end{array} \right\} \text{kg/cm}^2$$

y finalmente los valores de esfuerzo para el elemento VI son

$$\sigma_{VI} = \left\{ \begin{array}{l} 0.0695 \\ 0.2315 \\ 0.3177 \end{array} \right\} \text{kg/cm}^2$$

Como ya se mencionó en el ejemplo anterior, estos esfuerzos son los que actúan en el centroide del elemento.

CONCLUSIONES

- La tesis pretende introducir al lector al método de los elementos finitos mediante aplicaciones de la Ingeniería como la mecánica de sólidos, de fluidos y la transferencia de calor. Se pone especial énfasis en la construcción de los diferentes elementos utilizados y su aplicabilidad a problemas prácticos.

- Si las ecuaciones diferenciales son difíciles de resolver, podemos buscar una solución aproximada. Una solución posible se logra al elegir la teoría del elemento finito. Es por esto que podemos decir que el método del elemento finito es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales.

- El método de los elementos finitos no presenta dificultades de planteamiento para geometrías complejas.

- Los elementos finitos no son simples trozos segregados de la estructura original, sino modelos específicos elásticos obligados a deformarse de tal manera que tiendan a mantener la continuidad del conjunto.

- Los desplazamientos de los nodos son compatibles con la deformación del elemento.

- Las cargas externas aplicadas a la estructura se sustituyen por sistemas de fuerzas equivalentes concentradas en los nodos. De existir cargas puntuales, de

preferencia ha de distribuirse la malla de manera que los nodos coincidan con sus puntos de aplicación.

➤ Las condiciones de frontera de la estructura, se introducen como restricciones de giro, desplazamiento, temperatura, potencial de flujo, etc., sobre los nodos, dependiendo del fenómeno en estudio.

➤ A cada elemento finito estudiado aisladamente es posible aplicar las teorías clásicas de la mecánica del medio continuo y del cálculo, lo que es posible dada la forma geométrica sencilla elegida (triángulos, rectángulos...) estableciéndose las condiciones de contorno y equilibrio a través de los nodos. Esta discretización de la estructura permite su solución planteando un sistema de ecuaciones lineales y se aplica fácilmente a cualquier estructura por complicadas que sean sus características geométricas y condiciones de carga.

➤ Los elementos finitos se enlazan entre ellos solamente mediante los nodos, lo que significa que las condiciones de contorno de la estructura no se satisfacen a lo largo de los lados. La solución ahora es sólo aproximada en función de los resultados obtenidos para los nodos.

➤ Las ecuaciones de comportamiento aproximadas pueden calcularse mediante ensamblado de las ecuaciones de comportamiento de cada elemento finito. Esto es una gran ventaja del método, ya que permite realizar gran parte de los cálculos de forma sistematizada.

➤ En general, dado que el método de cálculo mediante elementos finitos es un procedimiento aproximado, la precisión requerida aumenta directamente con el número de elementos empleados. No es posible concretar el número de elementos que se requieren para obtener en cada caso la solución más satisfactoria, ya que va a depender de la estructura objeto de estudio. La elección de la subdivisión más conveniente ha de realizarse de acuerdo con la experiencia, basándose, si es posible, en resultados obtenidos mediante ensayos. En cualquier caso, se deben poner en práctica soluciones que hagan intervenir mallas de diferentes dimensiones con el fin de asegurar la convergencia de los resultados.

- Resulta ventajoso en algunos casos utilizar una discretización gradual a fin de conseguir un estudio más detallado en aquellas zonas donde se tiene previsto que puedan concentrarse deformaciones o tensiones.

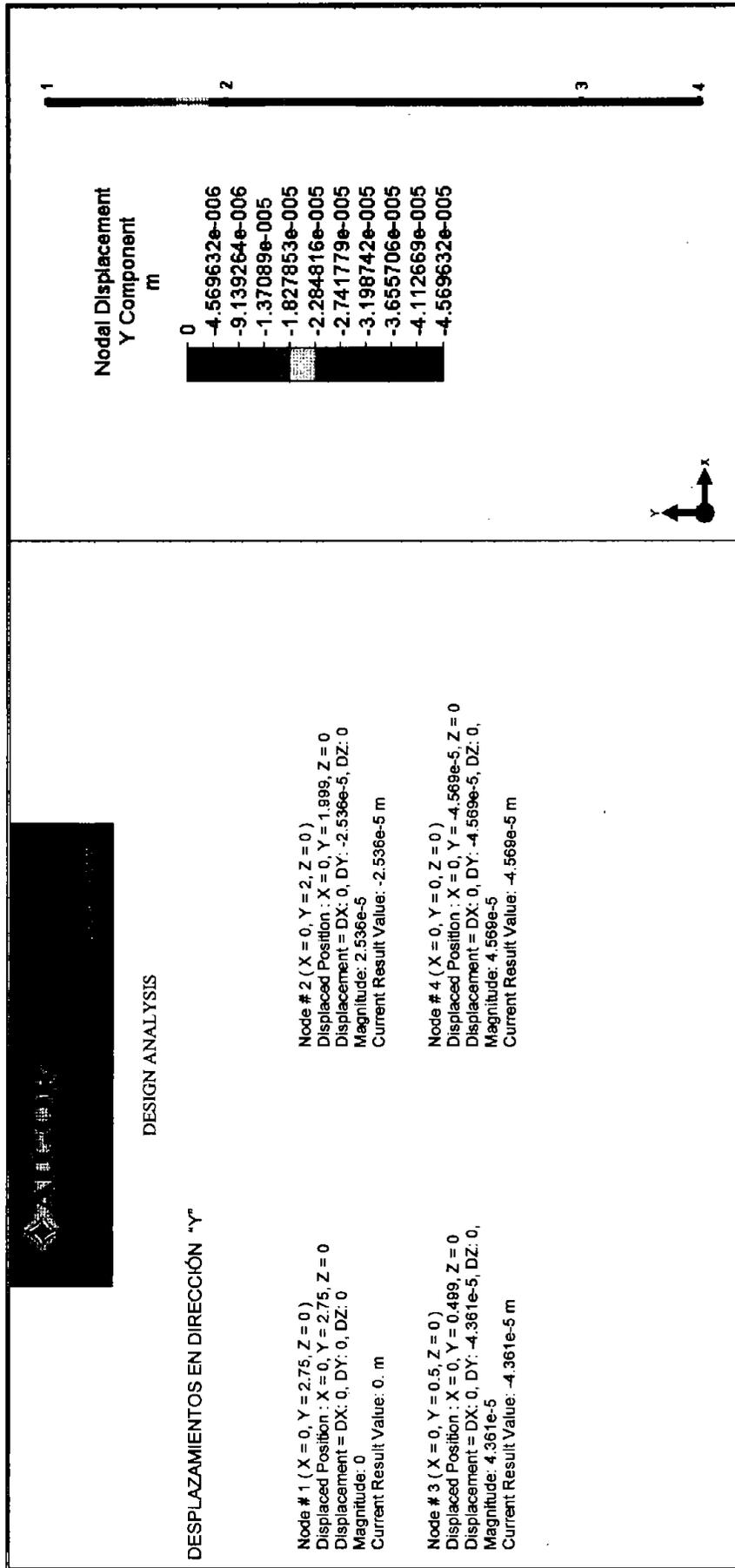
- Para la resolución de estructuras por el método de cálculo mediante elementos finitos se requiere el planteamiento de las matrices locales de todos los elementos discretos y ensamblarlos adecuadamente con el fin de formar la matriz global $[K_G]$ de la totalidad de la estructura.

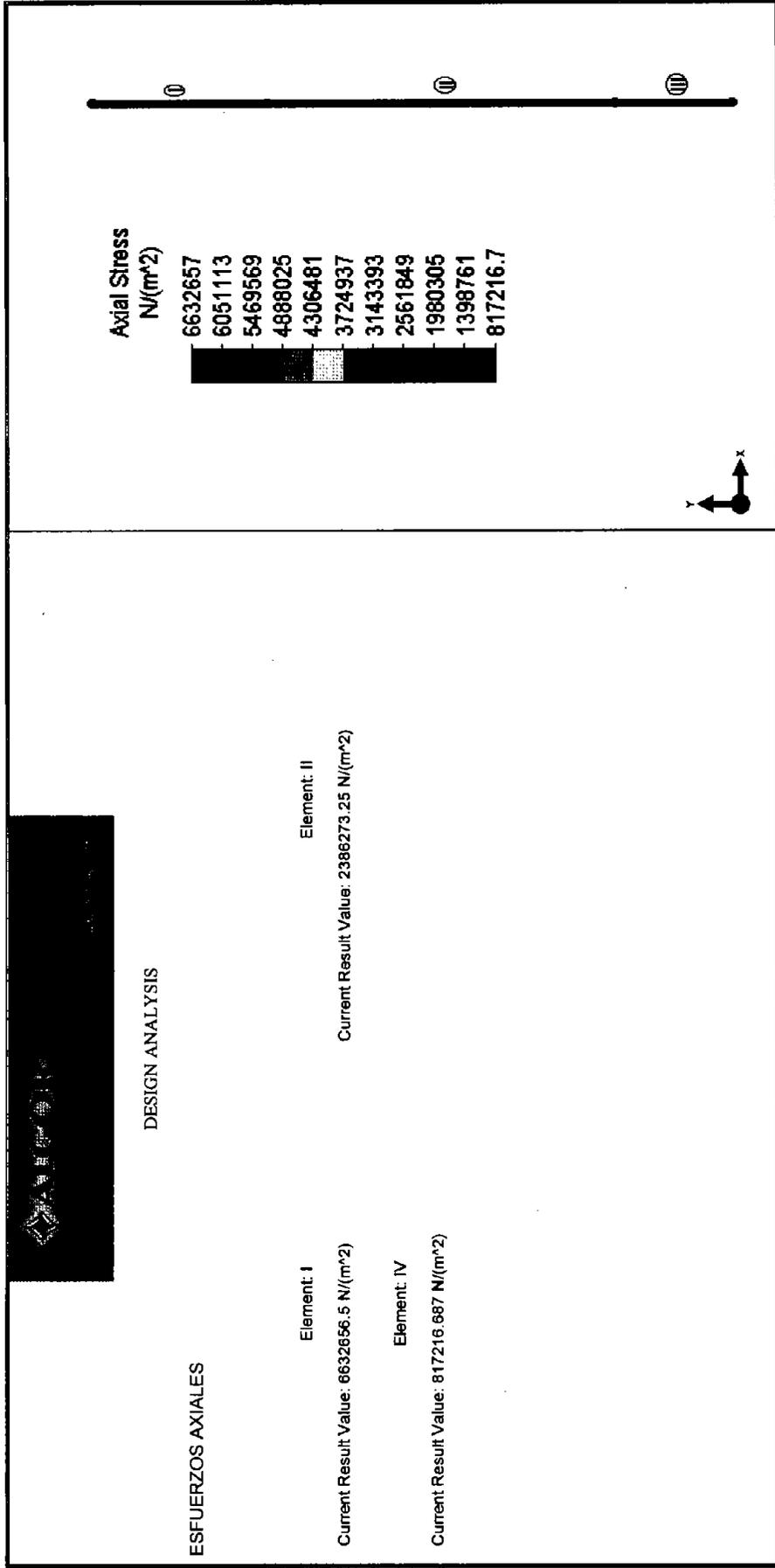
- El método del elemento finito parte del cálculo matricial en el planteamiento del equilibrio en los nodos mediante un sistema de ecuaciones resultado de la contribución de los elementos. En esencia el método de los elementos finitos se resuelve cuando a cada elemento se le plantea la ecuación que liga las deformaciones de los nodos con las fuerzas en ellas aplicadas a través de la matriz local (matriz de rigidez, matriz transferencia de calor, de flujo en medios porosos, etc.). El procedimiento que se sigue es suponer unas leyes, generalmente polinómicas, que definen los recorridos de los puntos del elemento finito en función de las coordenadas asignadas a los nodos.

- Dado que cada nodo tiene un número "n" de grados de libertad, entonces la estructura tendrá un número total de grados de libertad igual a "n" veces el número total de nodos del modelo. Con esto cabe esperar que la matriz global $[K_G]$ ha de ser una matriz cuadrada de orden "n" veces el número de nodos que componen la estructura.

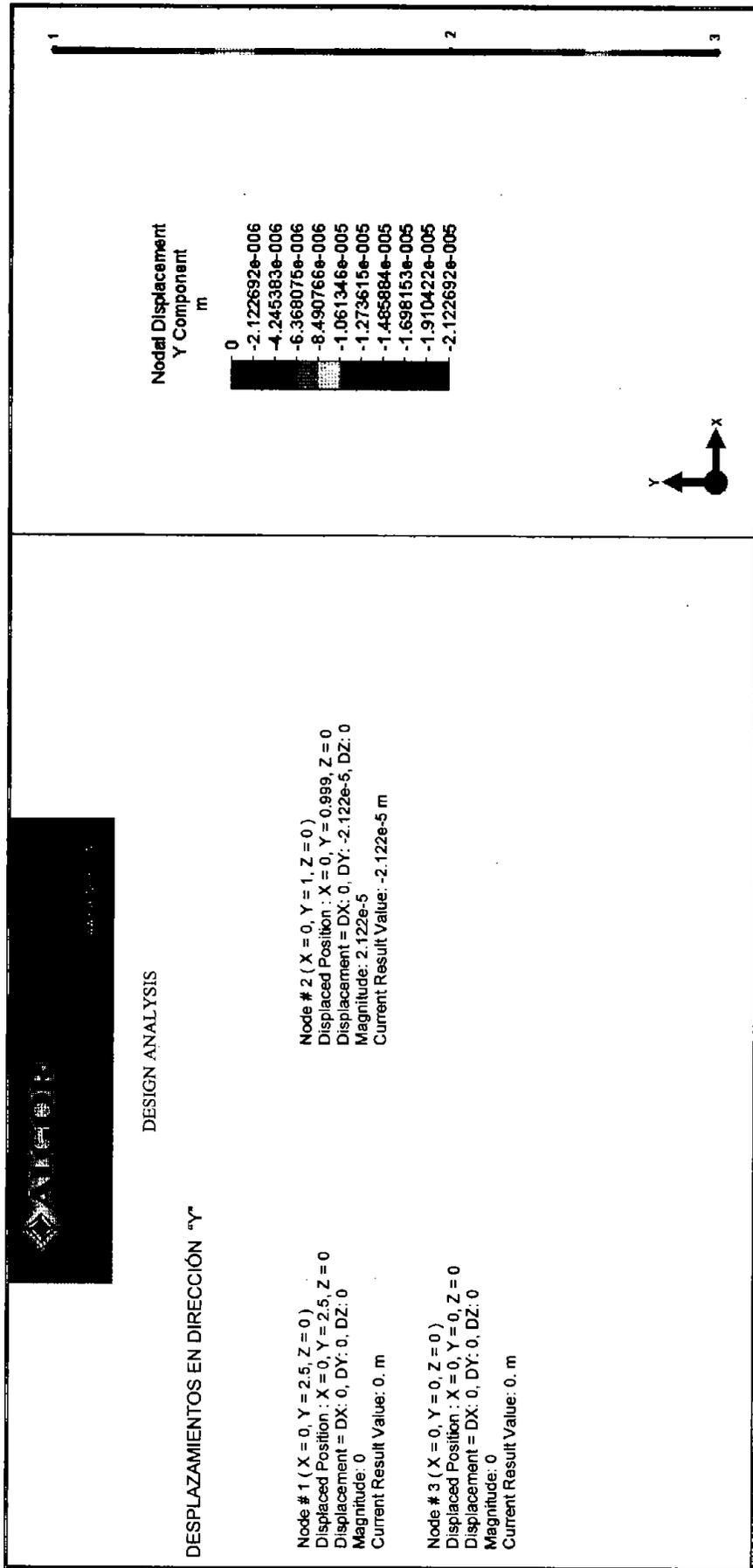
ANEXOS
ANEXOS

ANEXO A. Solución al problema III.1., usando el programa de elemento finito ALGOR.





ANEXO B. Solución al problema III.2., usando el programa de elemento finito ALGOR.



DESIGN ANALYSIS

DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Y"

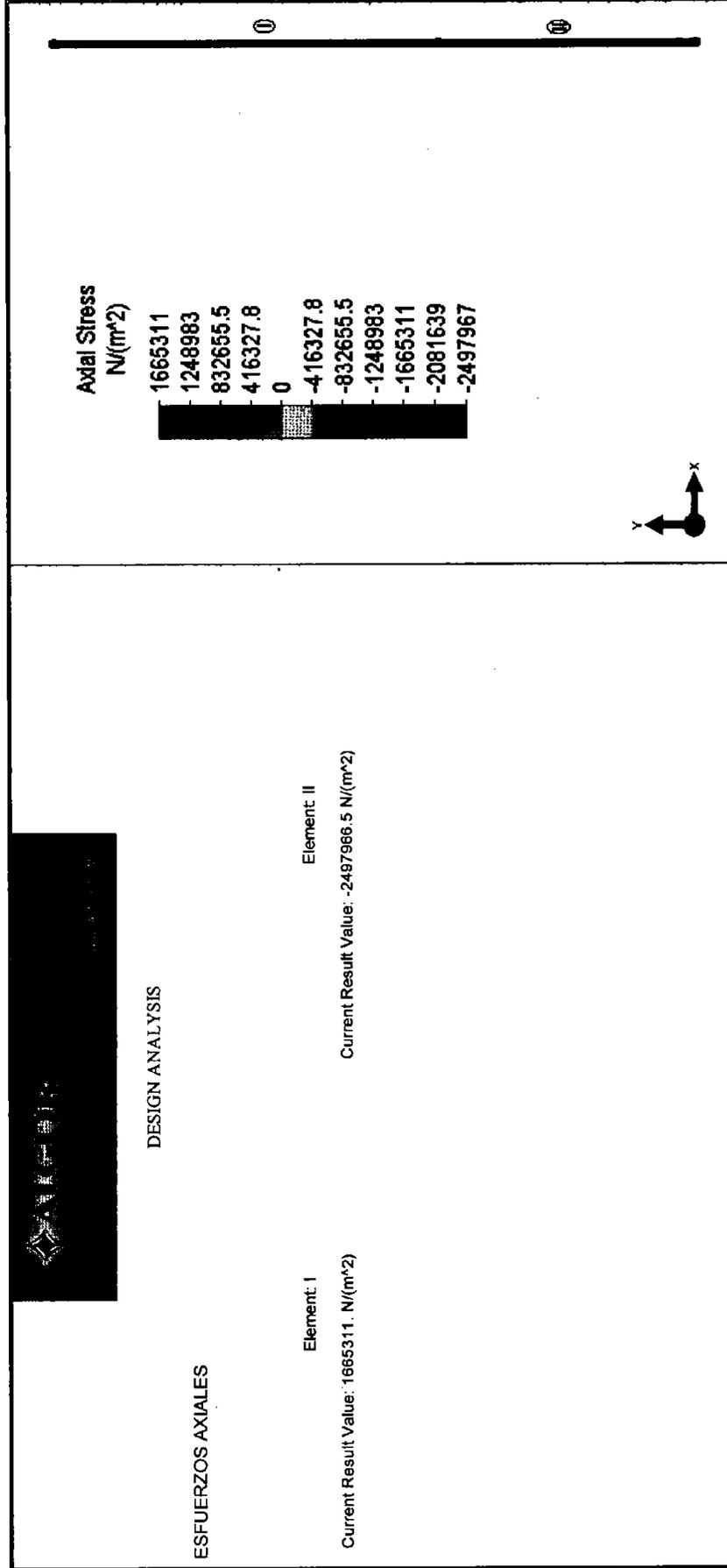
Node # 1 (X = 0, Y = 2.5, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 2.5, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

Node # 3 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

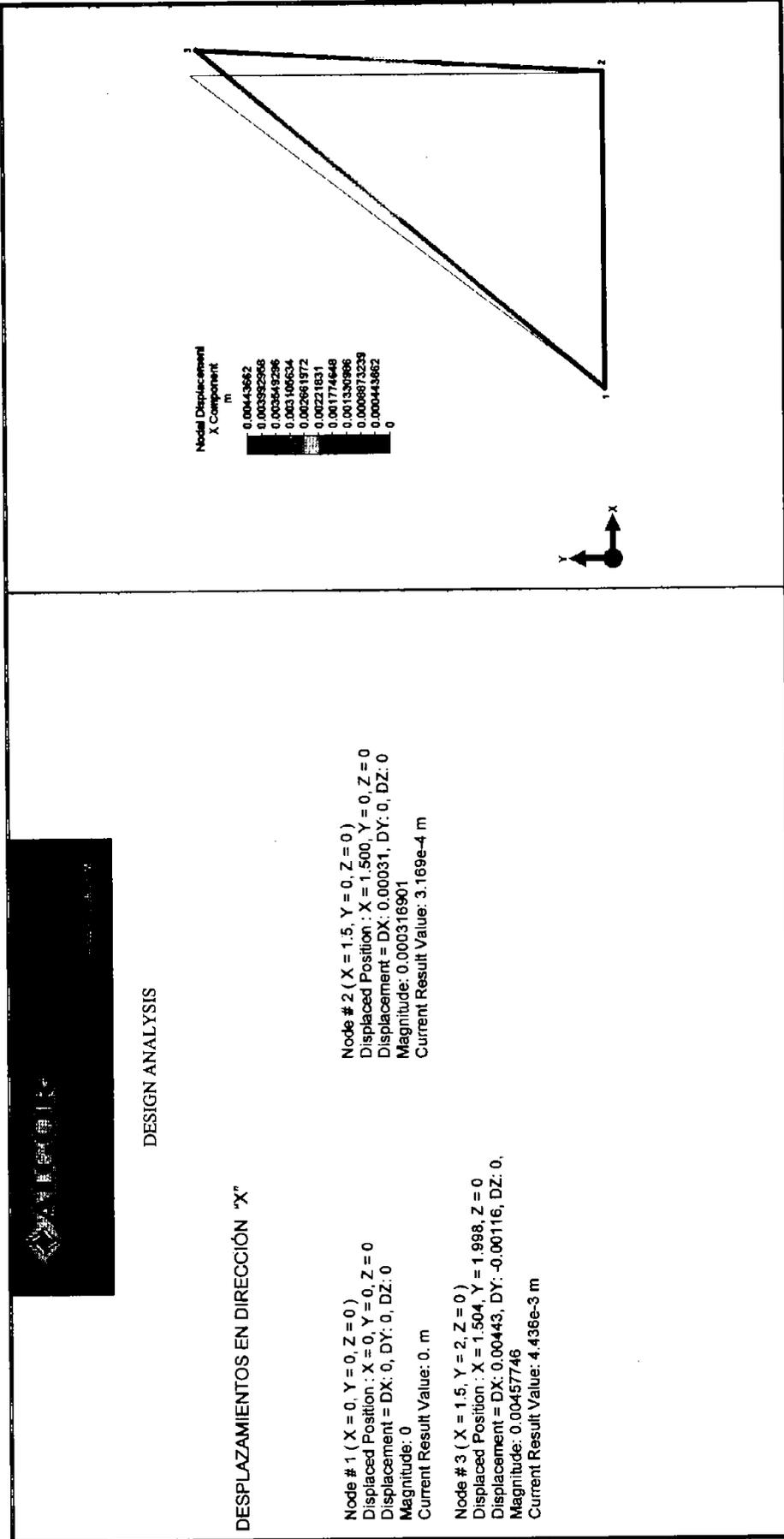
Node # 2 (X = 0, Y = 1, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.999, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: -2.122e-5, DZ: 0
 Magnitude: 2.122e-5
 Current Result Value: -2.122e-5 m

Nodal Displacement Y Component m

0
-2.122692e-006
-4.245383e-006
-6.368075e-006
-8.490766e-006
-1.061346e-005
-1.273615e-005
-1.485884e-005
-1.698153e-005
-1.910422e-005
-2.122692e-005



ANEXO C. Solución al problema III.3., usando el programa de elemento finito ALGOR.

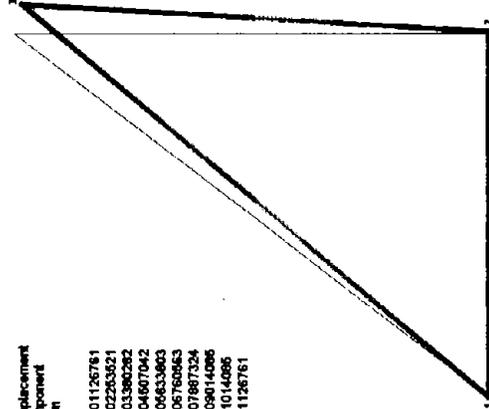
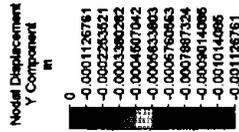


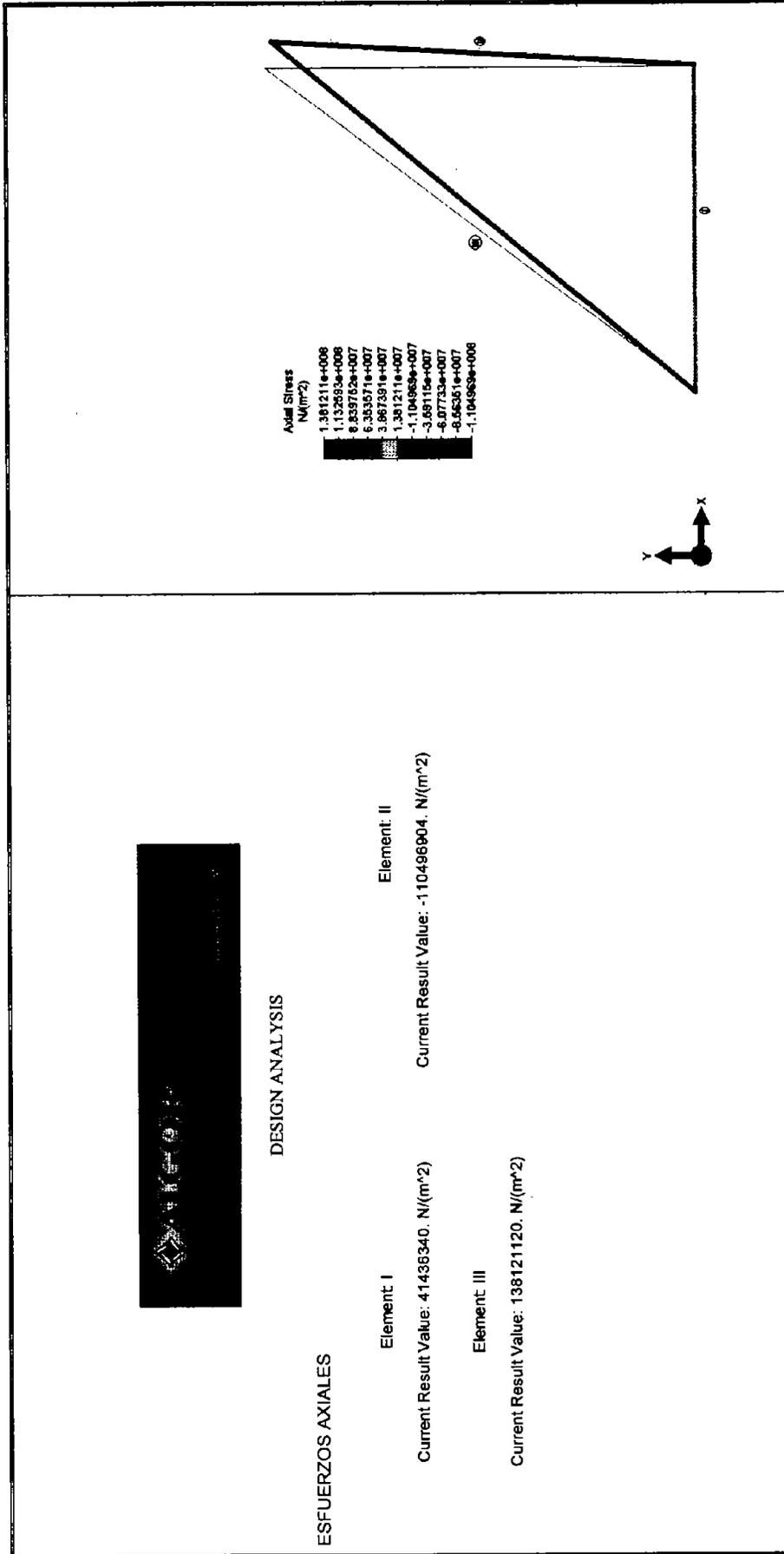
DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Y"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

Node # 3 (X = 1.5, Y = 2, Z = 0)
 Displaced Position : X = 1.504, Y = 1.998, Z = 0
 Displacement = DX: 0.0044, DY: -0.0011, DZ: 0,
 Magnitude: 0.00457746
 Current Result Value: -1.126e-3 m

Node # 2 (X = 1.5, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 1.500, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0.00031, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0.00031
 Current Result Value: 0. m





ANEXO D. Solución al problema III.4., usando el programa de elemento finito ALGOR.



DESIGN ANALYSIS

DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "X"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0,
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

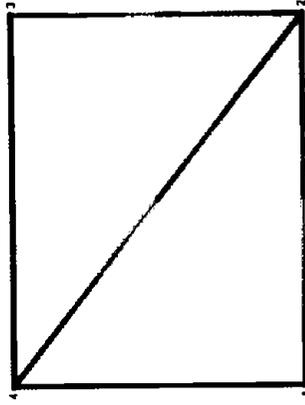
Node # 3 (X = 4, Y = 3, Z = 0)
 Displaced Position : X = 4, Y = 2.995, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: -0.0044, DZ: 0,
 Magnitude: 0.00445545
 Current Result Value: 0. m

Node # 2 (X = 4, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 3.998, Y = -0.0044, Z = 0
 Displacement = DX: -0.0011, DY: -0.0044, DZ: 0,
 Magnitude: 0.00459689
 Current Result Value: -1.1315e-3 m

Node # 4 (X = 0, Y = 3, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 3, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0,
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

Node Displacement
 X Component
 m

0
-0.0001131542
-0.0002263083
-0.0003394625
-0.0004526167
-0.0005657709
-0.000678925
-0.0007920792
-0.0009052334
-0.001018388
-0.001131542



DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Y"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0 m

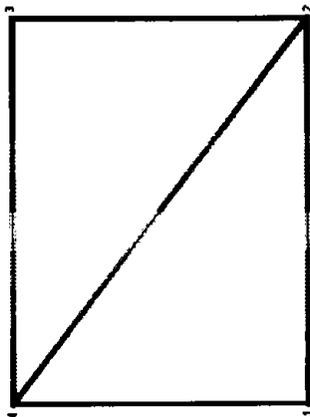
Node # 3 (X = 4, Y = 3, Z = 0)
 Displaced Position : X = 4, Y = 2.995, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: -0.0044, DZ: 0,
 Magnitude: 0.00445545
 Current Result Value: -4.4554e-3 m

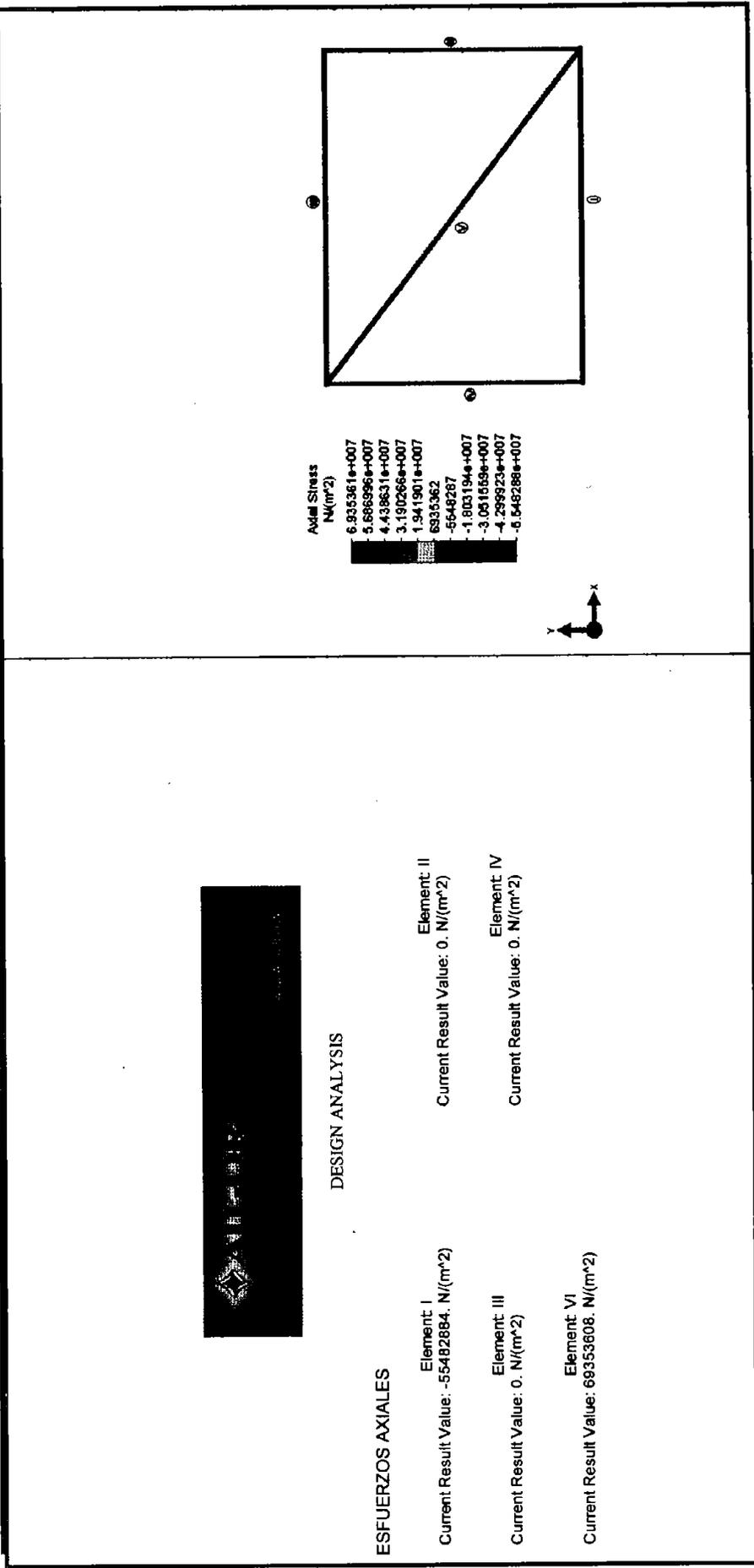
Node # 2 (X = 4, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 3.998, Y = -0.0044, Z = 0
 Displacement = DX: -0.0011, DY: -0.0044, DZ: 0,
 Magnitude: 0.00459689
 Current Result Value: -4.455e-3 m

Node # 4 (X = 0, Y = 3, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 3, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0 m

Nodal Displacement
 Y Component
 m

0
-0.004455446
-0.0006910891
-0.001336634
-0.001782178
-0.002227723
-0.002673267
-0.003118812
-0.003564356
-0.004009901
-0.004455446





Axial Stress
N/(m²)

6.935361e+007
-1.686996e+007
4.438631e+007
-3.190266e+007
1.941901e+007
6935362
-5648287
-1.803194e+007
-3.051659e+007
-4.299923e+007
-6.548288e+007

DESIGN ANALYSIS

ESFUERZOS AXIALES

Element I	Element II	Element III	Element VI
Current Result Value: -55482884. N/(m ²)	Current Result Value: 0. N/(m ²)	Current Result Value: 0. N/(m ²)	Current Result Value: 69353608. N/(m ²)

ANEXO E. Solución al problema IV.1., usando el programa de elemento finito ALGOR.



DESIGN ANALYSIS

FLEXIÓN

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
Magnitude: 0
Current Result Value: 0. m

Node # 2 (X = 1.5, Y = 0, Z = 0)
Displaced Position : X = 1.5, Y = -0.0122, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: -0.0122, DZ: 0,
Magnitude: 0.0122169
Current Result Value: -1.221e-2 m

Nodal Displacement
Y Component
m

0
-0.001221693
-0.002443386
-0.003665079
-0.004886772
-0.006108465
-0.007330158
-0.008551852
-0.009773545
-0.01099524
-0.01221693





DESIGN ANALYSIS

ÁNGULO DE FLEXIÓN

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0,
Magnitude: 0
Current Result Value: 0. ° (angle)

Node # 2 (X = 1.5, Y = 0, Z = 0)
Displaced Position : X = 1.5, Y = -0.0122169, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: -0.0122169, DZ: 0,
Magnitude: 0.0122169
Current Result Value: -0.6905842417 ° (angle)

Nodal Rotation
Z Component
° (angle)





DESIGN ANALYSIS

MOMENTOS FLEXIONANTES

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0,
 Magnitude: 0
 Current Result Value: -29419.8 N m

Node # 2 (X = 1.5, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 1.5, Y = -0.0122169, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: -0.0122169, DZ: 0,
 Magnitude: 0.0122169
 Current Result Value: 0. N m

Reaction Moment
 Z Component
 N m



ANEXO F. Solución al problema IV.2., usando el programa de elemento finito ALGOR.



DESIGN ANALYSIS

FLEXIÓN

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

Node # 2 (X = 1, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 1, Y = -0.0072, Z = -0.0022
 Displacement = DX: 0, DY: -0.0072, DZ: -0.0022
 Magnitude: 0.00759137
 Current Result Value: -7.251e-3 m

Node # 3 (X = 3, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 3, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

Node# Displacement
 Y Component
 m

0
-0.0007251808
-0.001450362
-0.002175542
-0.002900723
-0.003625904
-0.004351085
-0.005076266
-0.005801446
-0.006526627
-0.007251808





ÁNGULO DE FLEXIÓN

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: -0.511 ° (angle)

Node # 2 (X = 1, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 1, Y = -0.0072, Z = -0.0022
 Displacement = DX: 0, DY: -0.0072, DZ: -0.0022,
 Magnitude: 0.00759137
 Current Result Value: -0.204 ° (angle)

Node # 3 (X = 3, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 3, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0.409 ° (angle)

DESIGN ANALYSIS

Nodal Rotation Z Component ° (angle)
0.4092351
-0.3171572
-0.2250793
0.1330014
0.04092351
-0.06115439
-0.1432323
-0.2353102
-0.3273881
-0.419466
-0.5115439





DESIGN ANALYSIS

MOMENTOS FLEXIONANTES

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 1.0913e-11 N m

Node # 2 (X = 1, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 1, Y = -0.0072, Z = -0.0022
 Displacement = DX: 0, DY: -0.0072, DZ: -0.0022,
 Magnitude: 0.00759137
 Current Result Value: 1.818989404e-011 N m

Node # 3 (X = 3, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 3, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 3.6379e-12 N m

Reaction Moment
 Z Component
 N m

1.818989e-011
- 1.67347e-011
- 1.527951e-011
- 1.382432e-011
- 1.236913e-011
- 1.091394e-011
- 9.458745e-012
- 8.003553e-012
- 6.548362e-012
- 5.09317e-012
- 3.637979e-012



ANEXO G. Solución al problema VI.1., usando el programa de elemento finito ALGOR.



DESIGN ANALYSIS

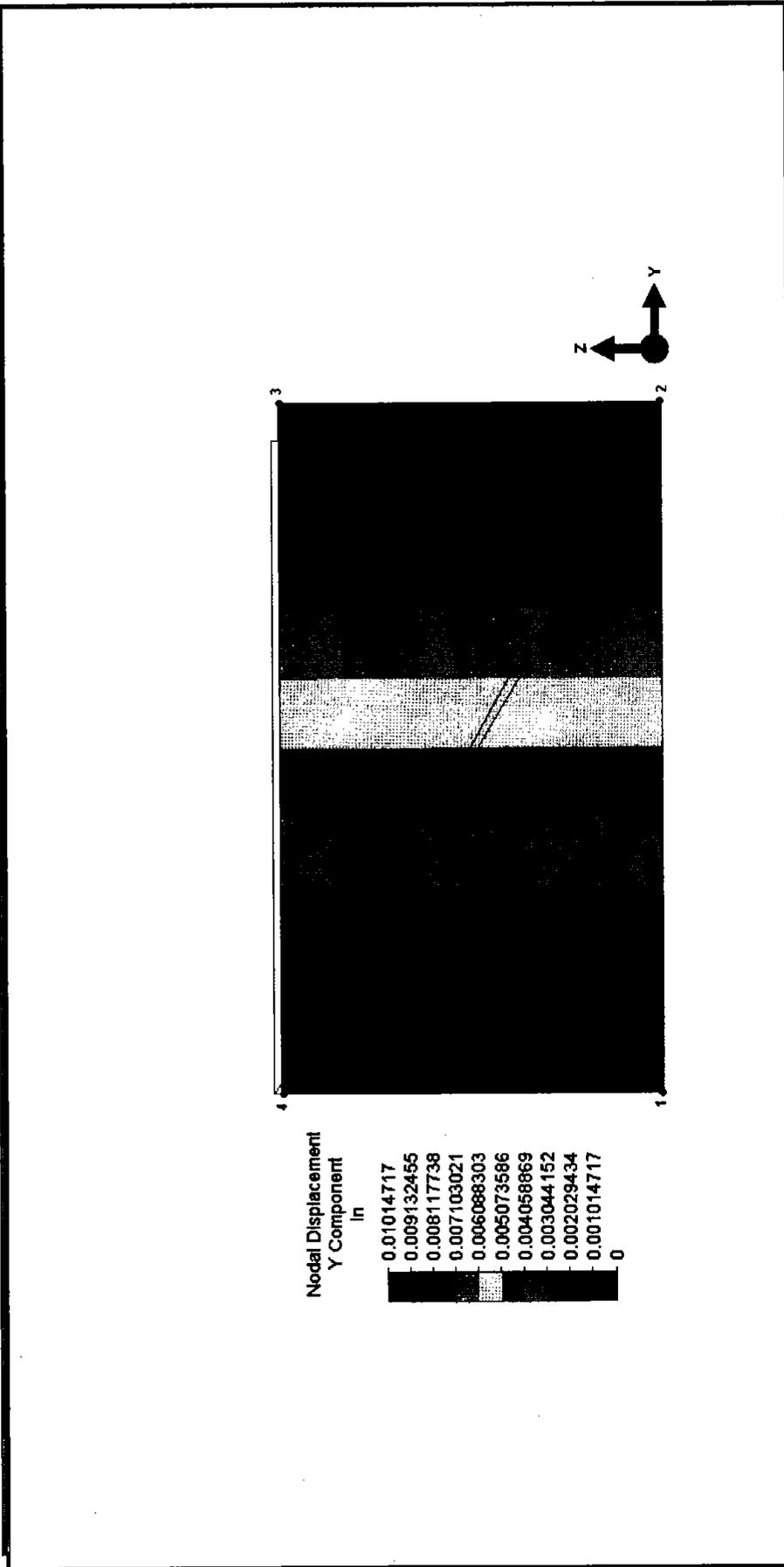
DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Y"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
Magnitude: 0
Current Result Value: 0. in

Node # 3 (X = 0, Y = 10, Z = 6)
Displaced Position : X = 0, Y = 10.0101, Z = 5.9981
Displacement = DX: 0, DY: 0.0101, DZ: -0.0018
Magnitude: 0.0103133
Current Result Value: 1.0147e-2 in

Node # 2 (X = 0, Y = 10, Z = 0)
Displaced Position : X = 0, Y = 10.0101, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: 0.0101, DZ: 0
Magnitude: 0.0101
Current Result Value: 1.0127e-2 in

Node # 4 (X = 0, Y = 0, Z = 6)
Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 5.9980
Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: -0.00192
Magnitude: 0.0019
Current Result Value: 0. in





DESIGN ANALYSIS

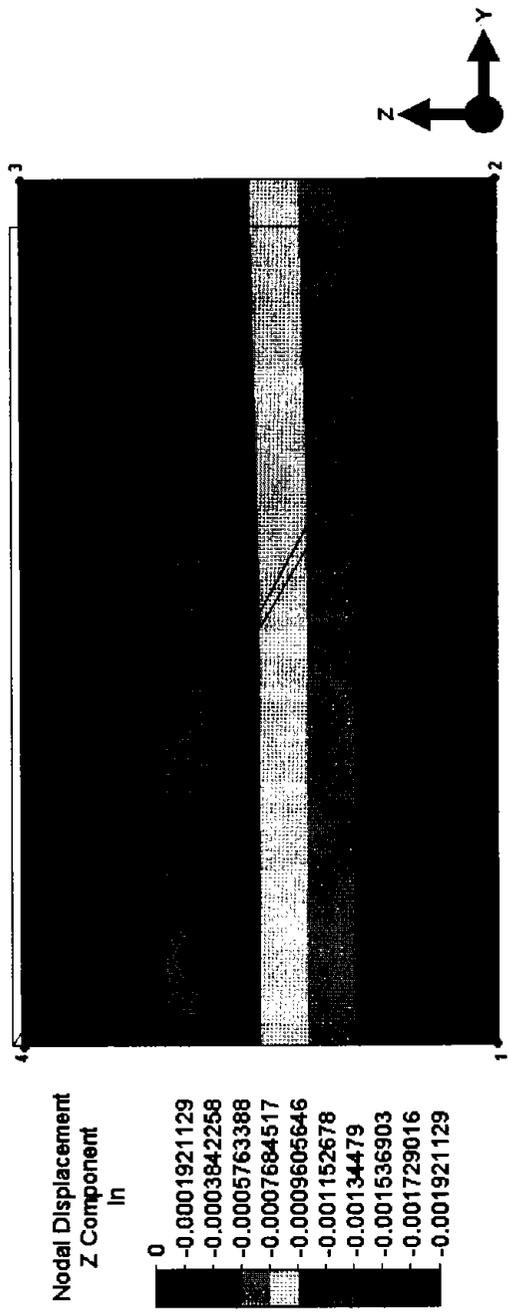
DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Z"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0,
Magnitude: 0
Current Result Value: 0. In

Node # 3 (X = 0, Y = 10, Z = 6)
Displaced Position : X = 0, Y = 10.0101, Z = 5.9981
Displacement = DX: 0, DY: 0.0101, DZ: -0.0018
Magnitude: 0.0103
Current Result Value: -1.8434e-3 In

Node # 2 (X = 0, Y = 10, Z = 0)
Displaced Position : X = 0, Y = 10.0101, Z = 0
Displacement = DX: 0, DY: 0.0101, DZ: 0,
Magnitude: 0.0101
Current Result Value: 0. In

Node # 3 (X = 0, Y = 0, Z = 6)
Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 5.9980
Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: -0.0019
Magnitude: 0.0019
Current Result Value: -1.9211e-3 In



ANEXO H. Solución al problema VI.2., usando el programa de elemento finito ALGOR.



DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Y"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 1)
 Displaced Position : X = 0, Y = 3.30064e-006, Z = 1
 Displacement = DX: 0, DY: 3.3006e-6, DZ: 7.1018e-7
 Magnitude: 3.3761e-6
 Current Result Value: 3.300e-6 m

Node # 3 (X = 0, Y = 0.2, Z = 0.8)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.200, Z = 0.8
 Displacement = DX: 0, DY: 2.730e-6, DZ: 1.637e-7
 Magnitude: 2.735e-6
 Current Result Value: 2.730e-6 m

Node # 5 (X = 0, Y = 0, Z = 0.4)
 Displaced Position : X = 0, Y = 1.537e-6, Z = 0.400
 Displacement = DX: 0, DY: 1.537e-6, DZ: 5.581e-7
 Magnitude: 1.635e-6
 Current Result Value: 1.537e-6 m

Node # 7 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

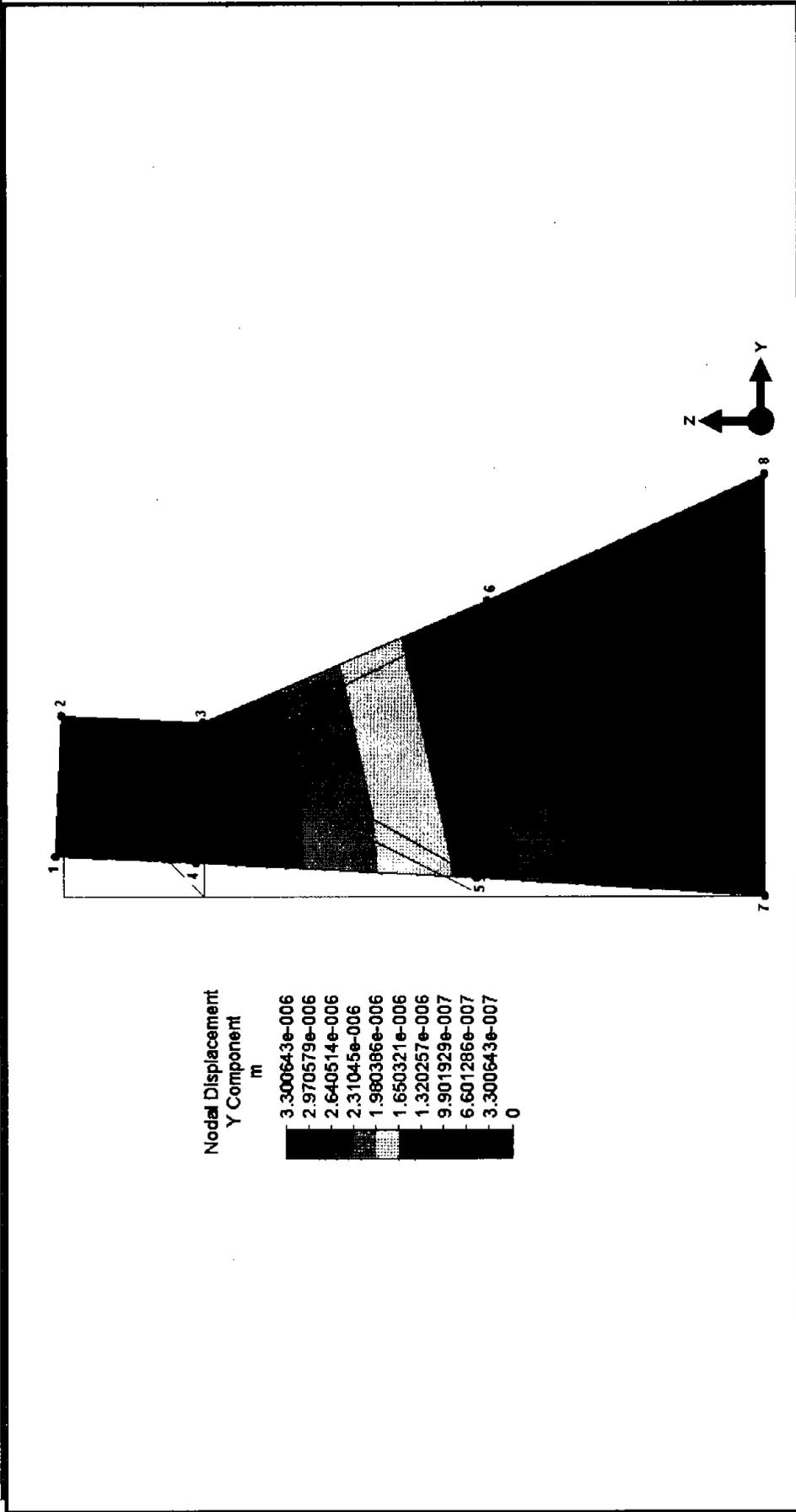
DESIGN ANALYSIS

Node # 2 (X = 0, Y = 0.2, Z = 1)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.2000, Z = 1
 Displacement = DX: 0, DY: 3.2966e-6, DZ: 1.884e-7
 Magnitude: 3.30184e-006
 Current Result Value: 3.2964e-6 m

Node # 4 (X = 0, Y = 0, Z = 0.8)
 Displaced Position : X = 0, Y = 2.7944e-6, Z = 0.800
 Displacement = DX: 0, DY: 2.7944e-6, DZ: 7.143e-7
 Magnitude: 2.884e-6
 Current Result Value: 2.7944e-6 m

Node # 6 (X = 0, Y = 0.4, Z = 0.4)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.400, Z = 0.4
 Displacement = DX: 0, DY: 1.1824e-6, DZ: -3.011e-7
 Magnitude: 1.220e-6
 Current Result Value: 1.1824e-6 m

Node # 8 (X = 0, Y = 0.6, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.6, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m





DESIGN ANALYSIS

DESPLAZAMIENTOS EN DIRECCIÓN "Z"

Node # 1 (X = 0, Y = 0, Z = 1)
 Displaced Position : X = 0, Y = 3.300e-6, Z = 1
 Displacement = DX: 0, DY: 3.300e-6, DZ: 7.10188e-7,
 Magnitude: 3.376e-6
 Current Result Value: 7.1018e-7 m

Node # 3 (X = 0, Y = 0.2, Z = 0.8)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.200, Z = 0.8
 Displacement = DX: 0, DY: 2.730e-6, DZ: 1.637e-7
 Magnitude: 2.7352e-6
 Current Result Value: 1.6379e-7 m

Node # 5 (X = 0, Y = 0, Z = 0.4)
 Displaced Position : X = 0, Y = 1.5370e-6, Z = 0.400
 Displacement = DX: 0, DY: 1.5370e-6, DZ: 5.5812e-7
 Magnitude: 1.6352e-6
 Current Result Value: 5.5812e-7 m

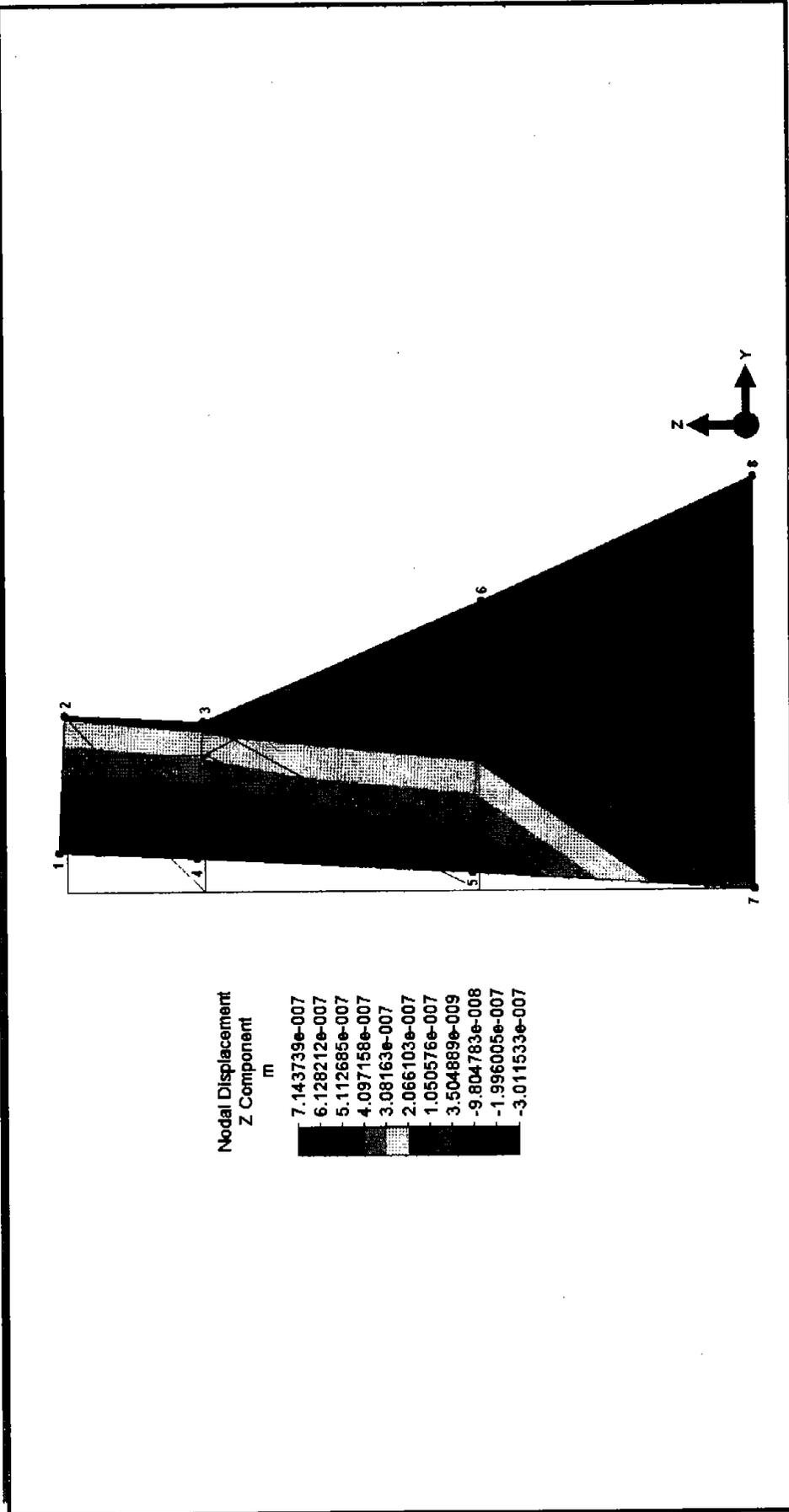
Node # 7 (X = 0, Y = 0, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m

Node # 2 (X = 0, Y = 0.2, Z = 1)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.200003, Z = 1
 Displacement = DX: 0, DY: 3.286e-6, DZ: 1.884e-7
 Magnitude: 3.3018e-6
 Current Result Value: 1.884e-7 m

Node # 4 (X = 0, Y = 0, Z = 0.8)
 Displaced Position : X = 0, Y = 2.794e-6, Z = 0.800
 Displacement = DX: 0, DY: 2.794e-6, DZ: 7.1437e-7
 Magnitude: 2.884e-6
 Current Result Value: 7.1437e-7 m

Node # 6 (X = 0, Y = 0.4, Z = 0.4)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.400, Z = 0.4
 Displacement = DX: 0, DY: 1.182e-6, DZ: -3.011e-7
 Magnitude: 1.220e-6
 Current Result Value: -3.011e-7 m

Node # 8 (X = 0, Y = 0.6, Z = 0)
 Displaced Position : X = 0, Y = 0.6, Z = 0
 Displacement = DX: 0, DY: 0, DZ: 0
 Magnitude: 0
 Current Result Value: 0. m



BIBLIOGRAFÍA

- Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu. **Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería**. Mexico: Prentice Hall Hispanoamericana, c1999.
- Logan, Daryl L. **A first course in the finite element method using algor**. Boston: PWS, c1997.
- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. **The finite element method**. Oxford : Butterworth Heinemann, 2000.
- I.N. Reddy. **An introduction to the finite element method**. México: McGraw-Hill.
- Fernand P. Beer, E. Russell Johnston. **Mecánica de materiales**. Santa fe bogota; México: McGraw-Hill, c1993
- R.C. Hibbeler. **Mecánica de materiales**. México: Continental, 1994.
- J. P. Colman. **Transferencia de calor**. México: Continental, 1977.
- G. R. Buchanan. **Finite element analysis**. México: McGraw-Hill.
- Darrell W. Pepper, C. Heinrich. **The finite element method basic. Concepts and applications**. Taylor & Francis Publishers.

- Kenneth H. Huebner. **The finite element method for engineers.** A Wiley-Interscience Publication.
- Agustín Demeneghi Colina. **Método del elemento finito. Análisis lineal.** Universidad Nacional Autónoma de México.