



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
CAMPUS ARAGÓN

## “PROPIEDADES GENERALES DEL OLEAJE IRREGULAR Y SU ANÁLISIS”

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :  
**I N G E N I E R O C I V I L**  
P R E S E N T A :  
**ÁNGEL HERNÁNDEZ COPCA**

ASESOR DE TESIS:  
ING. VALENTE TORRES ORTIZ

MÉXICO

2005

m.340183



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

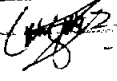
Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a darme en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: HERNANDEZ CARCA  
ANGEL

FECHA: 26 - NOVIEMBRE - 2004

FIRMA: 



ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ARAGÓN  
DIRECCIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

ANGEL HERNANDEZ COPCA  
Presente

Con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobado su tema de tesis y asesor.

TÍTULO:  
"PROPIEDADES GENERALES DEL OLEAJE IRREGULAR Y SU ANÁLISIS"

ASESOR: Ing. VALENTE TORRES ORTIZ

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
San Juan de Aragón, México, 1 de abril de 2003

LA DIRECTORA

ARQ. LILIA TURCOTT GONZÁLEZ



C p Secretaria Académica  
C p Jefatura de Carrera de Ingeniería Civil  
C p Asesor de Tesis

LTG/AIR/IIa

# **DEDICATORIA**

A **DIOS** por concederme inteligencia y sabiduría para poder concluir esta meta tan importante en mi vida.

A la **UNAM**, por haberme ayudado en mi formación profesional y como persona; que servirá para progresar en la vida; y al mismo tiempo querer engrandecer el nombre de la máxima casa de estudios.

A mis **PADRES Y TODOS MIS FAMILIARES**, por todo su amor. Por toda su dedicación, comprensión y sacrificio y entrega total; gracias les doy por haberme apoyado para culminar una carrera profesional.

A mis **HERMANOS**, por todo su apoyo y comprensión para alcanzar una meta en mi vida.

A mis **SOBRINOS**, con todo mi cariño. Que obtengan todo lo que se propongan en la vida.

A mi **PAREJA**, por todo el cariño, por todo el amor y confianza, porque con su amor y dedicación me ha apoyado a la realización de esta tesis para poder ser excelente cada día.

A todos los **PROFESORES** por haber transmitido los conocimientos en forma clara y precisa, para que lograra concluir en forma integral mi carrera profesional.

A mi **ASESOR** y **SINODALES** por permitir el paso constante y sin obstáculos para mi formación como persona y el progreso profesional.

Y muy en especial a mi **AMIGO** de generación, que estuvo junto conmigo “*evolucionando*”, ayudándome y apoyándome en la carrera profesional.

# INDICE

PAGINA

<b>CAPITULO I.-</b>	<b>INTRODUCCION .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO II.-</b>	<b>PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL OLEAJE IRREGULAR.....</b>	<b>4</b>
	II.1. Ola significativa y su definición.....	4
	II.2. Distribución de ocurrencia de altura de ola.....	7
	II.2.1 Deducción de la distribución de Rayleigh.....	13
	II.2.2 Relación entre $m_0$ y $\bar{H}$ , $H_{rms}$ .....	18
	II.2.3 Relación de $H_{1,3}$ con $\bar{H}$ .....	20
	II.2.4 El valor estadístico de $H_{max}$ .....	23
	II.3 Distribución de ocurrencia de período de ola.....	28
	II.3.1 Teoría sobre la distribución de período.....	29
	II.4 Ejercicios .....	32
<b>CAPITULO III.-</b>	<b>ESPECTROS DEL OLEAJE IRREGULAR.....</b>	<b>38</b>
	III.1. Espectro potencial del oleaje.....	38
	III.2 Espectros frecuenciales teóricos de oleaje.....	42
	III.3 Relación entre espectro y altura o período de ola.....	44
	III.4 Espectros direccionales teóricos de oleaje.....	46
	III.5 Ejercicios.....	61

<b>CAPITULO IV.- ANÁLISIS DEL OLEAJE IRREGULAR.....</b>	<b>63</b>
IV.1 Análisis de cantidad estadística de oleaje.....	63
IV.1.1 Análisis de registro análogo.....	63
IV.1.2 Análisis de registro digital.....	68
IV.2 Análisis de espectro frecuencial.....	75
IV.2.1 Teoría de deducción del espectro.....	75
IV.2.2. Cálculo de espectro por método del periodograma suavizado.....	85
IV.3 Ejercicios.....	95
<b>CAPITULO V.- MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE AYUDA PARA EL ANÁLISIS -</b>	
<b>DEL OLEAJE IRREGULAR .....</b>	<b>98</b>
V.1 Análisis de Fourier.....	98
V.1.1. Preparación preliminar para la teoría de las series de Fourier.....	98
V.1.2 Expresión de una función por las series de Fourier.....	99
V.2 Función de auto-correlación y función de densidad del espectro.....	102
V.2.1 Definición de la función de auto-correlación.....	102
V.2.2. Definición de la función de densidad del espectro frecuencial.....	102
V.2.3. Relación entre la función de auto-correlación y función de densidad de-	
espectro.....	103
V.3 Distribución chi-cuadrado.....	106
V.4 Nyquist frequency o folding frequency.....	108
V.5 Tablas de las distribuciones estadísticas.....	110
<b>CAPITULO VI. CONCLUSIONES.....</b>	<b>113</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>114</b>

# CAPITULO I



## INTRODUCCIÓN.



## I. INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta tesis es mostrar los métodos para calcular las características del oleaje irregular (altura y periodo de ola), principalmente a partir de registros de oleaje y mediante métodos de predicción del mismo, y comparar sus propiedades estadísticas y espectrales con sus equivalentes teóricas con el fin de saber cuales son las que mejor se ajustan a los datos medidos y así poderlas utilizar en zonas cercanas a la zona de las mediciones.

Cuando no se cuenta con datos medidos de oleaje (datos de campo), es necesario recurrir a fuentes indirectas como son las formulaciones teóricas para estimar los valores característicos del oleaje.

En este trabajo se muestran dos formas de estudiar el oleaje, una que considera las propiedades estadísticas temporales de la superficie libre del mar y otra que se realiza por medio de un análisis estadístico espectral de las señales. También se presentan comparaciones de las características del oleaje con datos teóricos y medidos para ambas formas de estudio. Todo ésto se expone en el CAPITULO II o IV.

La predicción del oleaje es importante, ya que al no contar con suficientes mediciones *in situ*, (datos de campo) pues al realizarlas totalmente, resulta económicamente imposible. Por eso se utiliza la probabilidad de ocurrencia del oleaje. Estas mediciones no solo son necesarias, sino de vital importancia para la buena planeación, el diseño y la construcción de obras costeras; ya sean de protección, comerciales o asentamientos humanos cercanos a la línea de costa. Asimismo, es esencial la buena predicción de las condiciones venideras del oleaje para una zona en específico, con el objetivo de evitar pérdidas, tanto humanas como materiales, ya sea en la costa y/o en alta mar, que en ocasiones llegan a ser devastadoras para el desarrollo de la región.

En las zonas costeras es quizá aún más importante una buena predicción, debido a la creciente tendencia mundial de asentarse frente o cerca del mar. No es raro el caso en el que no se haya tomado en cuenta el oleaje de tormenta, la sobre-elevación del nivel del mar debido al oleaje a bajas presiones atmosféricas y/o mareas vivas; para la realización de alguna actividad en la zona costera, como lo puede ser desde una simple colecta de organismos en la zona intermareal, la realización de perfiles de playa o incluso el plan de construcción de alguna obra marítima.

Para facilitar la descripción de las características del oleaje, se hace uso de una variable bidimensional llamada espectro de densidad de energía o amplitud, la cual representa la cantidad de energía del oleaje en un punto en el eje  $X$ , por cada una de las frecuencias que lo componen en el eje  $Y$  pudiendo ser Hz y se expone en el CAPITULO III.

En respuesta al creciente interés por saber qué es lo que pasa, y quizá aún más importante, de lo que va a pasar en la superficie del océano, se han desarrollado una serie de modelos y técnicas para pronosticar o predecir las olas en el mar.

El grado de sofisticación que pueden alcanzar estos modelos radica en el número y forma de representar los términos fuente considerados. Estos términos representan todos aquellos procesos físicos que transfieren energía hacia adentro, afuera o incluso entre las diferentes componentes del oleaje, modificando así sus características, y se representan como la sumatoria de procesos independientes. Estos procesos son los de generación, propagación y disipación del oleaje.

Los métodos analíticos utilizados, que gracias a las capacidades computacionales actuales y diagramas de flujo computacionales, involucran los últimos adelantos teóricos y numéricos que utilizan para representar el oleaje y su evolución, que se mencionan en el CAPITULO IV. Las aportaciones más importantes fueron el tomar de forma explícita la disipación de la energía del oleaje y utilizar aproximaciones para sumar la aportación que las interacciones no lineales tienen sobre la evolución del espectro.

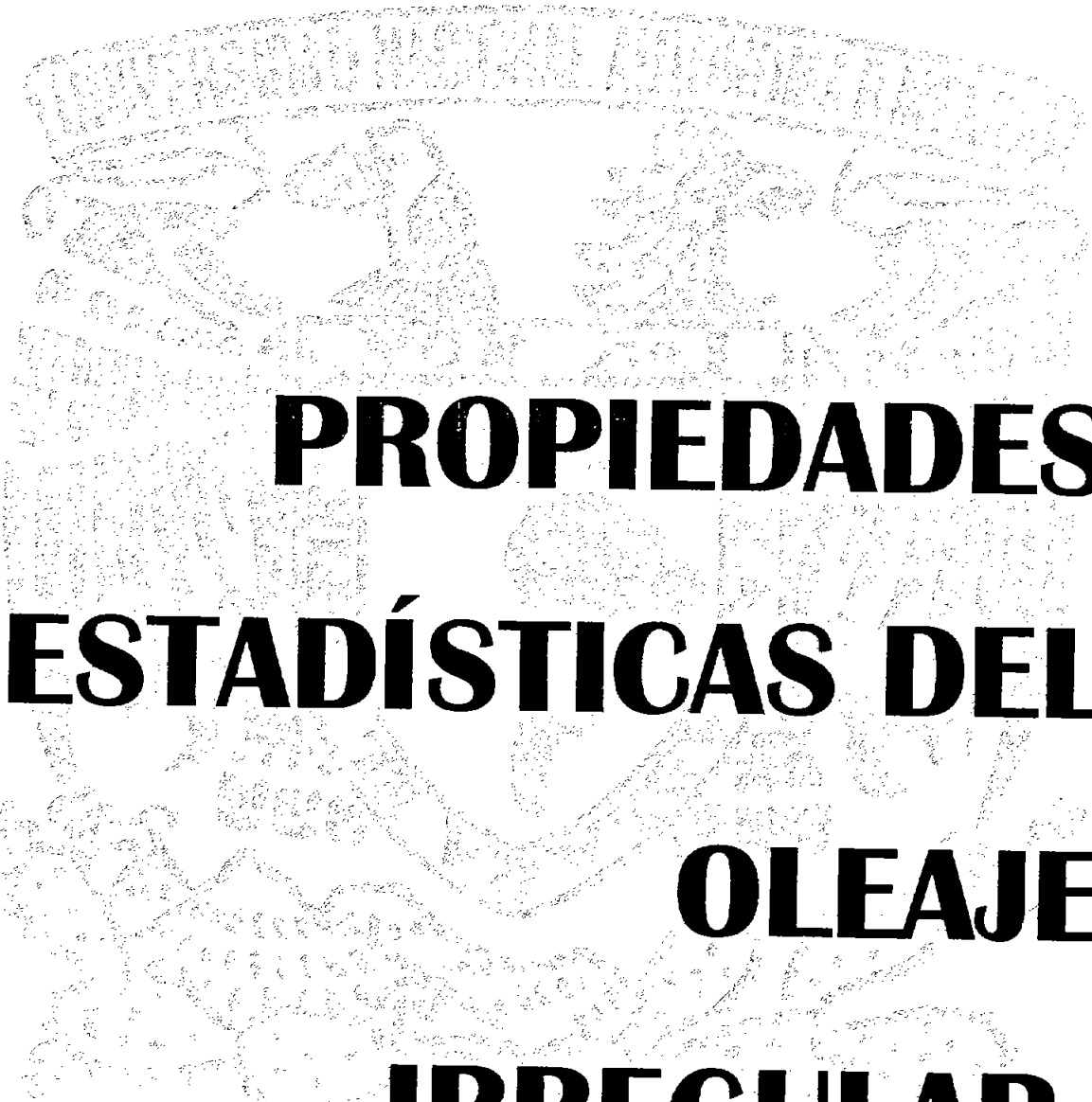
Los métodos estadísticos como formulas expuestos para el análisis del oleaje irregular nos da herramientas útiles, y éstos se encuentran en el CAPITULO V.

En general, analítica y numéricamente los términos pueden ser representados de diferente manera. Las diferentes formas de hacerlo se debe mas que nada a la capacidad computacional y nos da la diferencia entre los métodos. La predicción del oleaje se puede hacer a escala global o regional, todo depende del detalle que se requiera para una zona en particular y un trabajo en específico.

La aplicación de predicciones prácticas de oleaje involucra una mezcla del conocimiento del estado actual del oleaje generado tanto localmente como a distancia (“*sea*” y “*swell*”), así como de las variaciones temporales y espaciales de los campos de viento y corrientes, la irregularidad del fondo batimétrico y la configuración de las costas, y sobre todo de la cantidad de recursos con los que se cuenta para lograrlo, ya que es necesario contar con una serie de aparatos que brindan la información necesaria para hacerlo. Predecir el oleaje bajo estas condiciones no es fácil, y en la mayoría de los casos inaccesible para los fines prácticos que muchas veces se requiere y que por falta de recursos no se toma en cuenta. Por esta razón, es necesario un modelo práctico, rápido y eficaz que represente los procesos físicos que ocurren en la naturaleza de la mejor manera posible, y que con la menor cantidad de información y equipo nos proporcione buenos resultados.

Este trabajo incluye, también, ejercicios al final de los capítulos II, III, IV para tener una mayor comprensión de cómo analizar el tipo de oleaje en estudio, que, en nuestro caso, es el oleaje irregular.

# **CAPITULO II**



## **PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL OLEAJE IRREGULAR.**

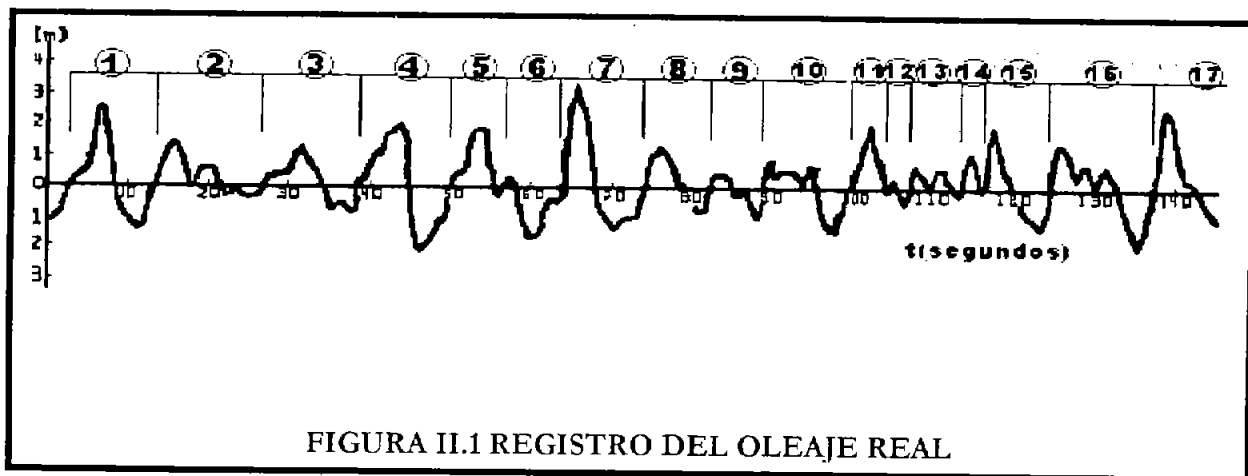
## II PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL OLAJE IRREGULAR.

### II.1. OLA SIGNIFICANTE Y SU DEFINICIÓN

La ola, cuyas propiedades se exponen generalmente, es la llamada ola ideal e intransformable tipo permanente, teniendo; una amplitud, una longitud y un período.

Sin embargo, el oleaje real que se presenta en el mar es diferente de la ola, anteriormente mencionada.

El oleaje real varía su configuración irregularmente, tal como se ve en la figura II.1.



La Figura II.1 es un ejemplo de oleaje real, obtenido por un ológrafo de tipo medidor de resistencia.

De la figura se observa que:

- a) Las olas grandes y pequeñas se superponen irregularmente.
- b) La cresta pequeña surge en la parte del valle mayor o el valle pequeño en la cresta mayor.

Es importante definir la altura y el período de cada ola, sobre el oleaje irregular, para aplicarlo al diseño de estructuras portuarias, etc.

Para definir la altura de cada ola en el perfil de oleaje irregular, se pueden utilizar los tres métodos siguientes:

1.- La diferencia de altura entre el punto máximo y el mínimo que le sigue, o entre el mínimo y el máximo que le sigue.

2.- La diferencia de altura entre dos puntos, que se suponen aproximadamente como la cresta y el valle de ola olvidando irregularidades pequeñas en el perfil.

3.- La diferencia entre el perfil máximo y el perfil mínimo, que se encuentran entre dos puntos sucesivos de tiempo cuando los perfiles atraviesan el nivel medio del oleaje hacia arriba se le llama punto de "zero-up-cross".

De los tres métodos anteriores se tienen las siguientes observaciones:

- a) En el método 1. En el caso de que los rizos de agua se superpongan a un oleaje grande (oleada), no pueden calcularse sino sólo los rizos como altura.
- b) En el método 2. Aunque se puede quitar tal defecto, no hay criterio que indique cuáles irregularidades se omiten, faltando objetividad.
- c) En el método 3. No hay tales problemas, y además conviene que el procedimiento se automatice por computadora. Por lo que este método se adopta como el método normal para definir altura de ola llamado método de zero-up-cross. En este caso, el período de ola se define como intervalo de tiempo de dos puntos sucesivos de "zero-up-cross". En la Figura II.1, las olas ① a ⑱ se definen por el método "zero-up-cross".

El problema siguiente, al cual se debe enfrentar, es como se representan las propiedades de oleaje usando los datos de la Figura II.1.

Para ese fin, se puede considerar el método que selecciona alguna ola representativa, propia y que exprese el grupo del oleaje por su altura y período de ola.

Se usan las siguientes consideraciones para seleccionar la ola representativa:

- (1) La ola indicada en ⑦ ( $H_{m\acute{a}x}$ ,  $T_{m\acute{a}x}$ ): es la ola que tiene altura máxima, entre un grupo de oleaje registrado, correspondiendo la ola en la Figura II.1.

(2) La ola ( $H_{1/10}, T_{1/10}$ ) es la ola que corresponde al promedio de una décima parte de todas las alturas mayores de las olas en un grupo de oleaje. En la Figura II.1, significa la ola de altura y período promediadas de las olas indicadas en ⑦ y ④

(3) La ola ( $H_{1/3}, T_{1/3}$ ) es la ola que corresponde al promedio de una tercera parte de las alturas mayores de todas las olas en un grupo de oleaje, conocido generalmente como "ola significativa".

En la Figura II.1, significa la ola de altura y período promediados de las olas indicadas en ⑦

④ ① ①⑦ ①⑥ y ①⑤

(4) La ola ( $\bar{H}, T$ ) es la ola que corresponde al promedio de todas las olas en un grupo de oleaje registrado.

En el caso del ejemplo de la Figura II.1, el valor más largo del período es 13 segundos de la ola ①⑥, sin embargo el período ( $T_{máx}$ ) es 10 segundos de la ola ⑦ como se determina por la definición anteriormente mencionada.

Así como hay que poner atención en que el período de la ola significativa ( $T_{1/3}$ ) no es promedio de una tercera parte de los períodos más largos de todas las olas.

Entre estas olas representativas, se usan más la ola significativa y si se usa solamente la palabra de "la altura de ola" en el oleaje real, ello corresponde generalmente a la altura de ola significativa ( $H_{1/3}$ ).

El concepto de "ola significativa" se introdujo por Sverdrup y Munk cuando desarrollaron el método de predicción del oleaje llamado el método de S-M-B (Sverdrup-Munk-Bretschneider) adoptado por la razón de que la ola significativa coincide con el valor informado por la observación visual.

Los resultados de predicción de oleaje por otros métodos también son expresados como  $H_{1/3}$ ,  $T_{1/3}$ .

En la planeación y el diseño de estructuras portuarias y costeras, se usan frecuentemente la altura y el período de ola significativa como el índice de ola de diseño.

## II.2. DISTRIBUCIÓN DE OCURRENCIA DE ALTURA DE OLA

La Figura II.1 es un ejemplo del perfil del oleaje real registrado y no hay regularidad en el orden de ocurrencia de las olas grandes o pequeñas, siendo casi imposible predecirlo.

Estadísticamente se puede expresar con cual frecuencia ocurre cada altura o cada período de ola en un registro de oleaje.

La probabilidad de ocurrencia de una altura de ola se ha introducido teóricamente por Rayleigh sobre la distribución de intensidad de sonido, aplicándosele por Longuett-Higgins al oleaje de mar, resultando la ecuación siguiente:

$$\rho(H)d(H) = \frac{\pi \cdot H}{2 \cdot H^2} e^{\left[ -\frac{\pi}{4} \left( \frac{H}{H} \right)^2 \right]} d(H) \dots \dots \dots (II.1)$$

Donde:

$\rho(H)$ : Es la función de densidad de probabilidad de la altura de ola. La función  $\rho(H)$ , en la ecuación (II.1), tiene la forma de probabilidad sobre la distribución de ocurrencia de altura de ola.

$\rho(H)dH$ : Expresa la probabilidad de que una altura de ola tiene un valor entre  $H$  y  $H + dH$ .

Por otra parte, la probabilidad de que la altura de ola tiene un valor mayor de  $H$  arbitrario  $P(H)$ , es decir la probabilidad de ocurrencia excedente, se obtiene con la ecuación (II.2) por la integración de la ecuación (II.1):

$$P(H) = 1 - \int_0^H \rho(H)dH = e^{\left[ -\frac{\pi}{4} \left( \frac{H}{H} \right)^2 \right]} \dots \dots \dots (II.2)$$



Donde:

$$\int_0^H \rho(H) dH = \int_0^H \frac{\pi}{2} \frac{H}{\bar{H}^2} e^{\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^2\right]} dH$$

Sustituyendo:

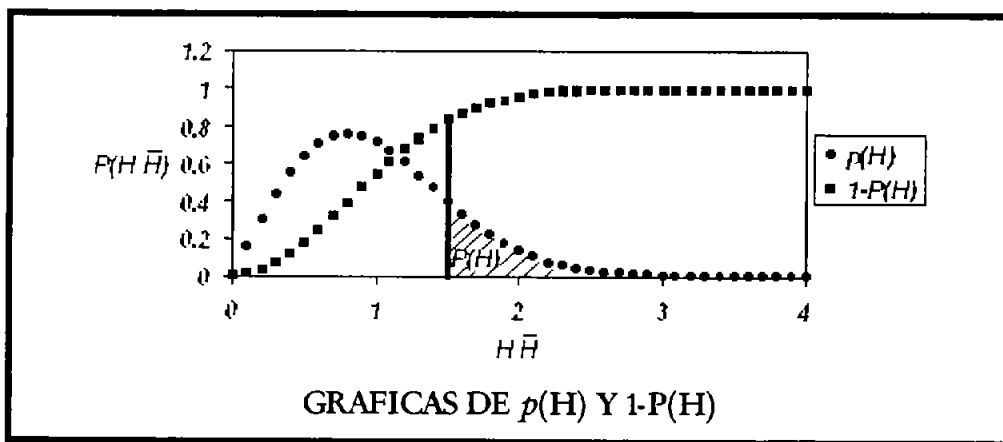
$$x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^2, \quad dx = \frac{\pi}{2} \frac{H}{\bar{H}^2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^x e^{(-x)} dx = e^{-x} \Big|_0^x = 1 - e^{-x}$$

Entonces nos queda:

$$P(H) = 1 - \int_0^H \rho(H) dH = e^{-x} = e^{\left(-\frac{\pi}{4} \left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^2\right)}$$



La Tabla II.1 indica los cálculos de  $p(H)$  y  $P(H)$  con  $\frac{H}{\bar{H}} = 0$  a  $4.0$  teniendo  $H$  por el valor normal.

$\frac{H}{\bar{H}}$	$\rho \frac{H}{\bar{H}}$	$P \frac{H}{\bar{H}}$	$\frac{H}{\bar{H}}$	$\rho \frac{H}{\bar{H}}$	$P \frac{H}{\bar{H}}$
0	0	1.0000	2.0	0.1357	0.0432
0.1	0.1559	0.9922	2.1	0.1032	0.0313
0.2	0.3045	0.9691	2.2	0.0771	0.0223
0.3	0.4391	0.9318	2.3	0.0567	0.0157
0.4	0.5541	0.8819	2.4	0.0407	0.0108
0.5	0.6454	0.8217	2.5	0.029	0.00738
0.6	0.7104	0.7537	2.6	0.0202	0.00495
0.7	0.7484	0.6806	2.7	0.0138	0.00326
0.8	0.7601	0.6049	2.8	0.0093	0.00211
0.9	0.7480	0.5293	2.9	0.0062	0.00135
1.0	0.7161	0.4559	3.0	0.0040	0.00085
1.1	0.6680	0.3866	3.1	0.0026	0.00053
1.2	0.6083	0.3227	3.2	0.0016	0.00032
1.3	0.5415	0.2652	3.3	0.0010	0.00019
1.4	0.4715	0.2144	3.4	0.0006	0.00011
1.5	0.4024	0.1708	3.5	0.0004	0.000066
1.6	0.3365	0.1339	3.6	0.0002	0.000038
1.7	0.2758	0.1033	3.7	0.0001	0.000021
1.8	0.2219	0.0785	3.8	0.0001	0.000012
1.9	0.1752	0.0587	3.9	0.0000	0.0000065
2.0	0.1357	0.0432	4.0	0.0000	0.0000035

TABLA II.1 CÁLCULOS DE LA DISTRIBUCIÓN DE RAYLEIGH DE ALTURA DE OLA

La relación entre  $H_{1/3}$  y  $\bar{H}$  es la siguiente:

Según la definición mencionada en la Figura II.1,  $H_{1/3}$  es el promedio de las alturas de las olas que existen entre el dominio de mayoría de  $P = 1/3$ . En la Tabla II.1 se encuentra el valor  $\frac{H}{\bar{H}} = 1.18$  que corresponde a  $P = 1/3$

Calculando el promedio de las olas mayores de  $\frac{H}{\bar{H}} = 1.18$ , y teniendo en cuenta la probabilidad de ocurrencia, se llega a la ecuación (II.3).

$$H_{1/3} = 1.6\bar{H} \quad \text{ó} \quad \bar{H} = 0.625 H_{1/3} \dots\dots\dots (II.3)$$

Calculando sobre  $H_{1/10}$  como arriba:

$$\bar{H}_{1/10} = 2.03\bar{H} = 1.27 H_{1/3} \dots\dots\dots (II.3')$$

Refiriéndose a la Tabla II.1 se encuentra que las olas de cuyas alturas tienen los valores  $H_{1/3}$  y  $H_{1/10}$  arriba calculados, corresponden a las que se encuentran a 13% y 4% contando desde la ola mayor, es decir alrededor de 13 olas de un grupo de oleaje que tiene 100 olas, son más grandes en altura que la ola significativa.

$H_{m\acute{a}x}$  no puede ser como el valor determinado, es la función del número de ola  $N$  como lo indica en la Tabla II.2.

NÚMERO DE OLAS N	OCURRENCIA 5%	MODA	PROMEDIO	OCURRENCIA 5%
20	menor de $0.99 H_{1/3}$	$1.22 H_{1/3}$	$1.32 H_{1/3}$	mayor de $1.73 H_{1/3}$
50	menor de $1.19 H_{1/3}$	$1.40 H_{1/3}$	$1.50 H_{1/3}$	mayor de $1.86 H_{1/3}$
100	menor de $1.33 H_{1/3}$	$1.52 H_{1/3}$	$1.61 H_{1/3}$	mayor de $1.94 H_{1/3}$
200	menor de $1.45 H_{1/3}$	$1.63 H_{1/3}$	$1.72 H_{1/3}$	mayor de $2.03 H_{1/3}$
500	menor de $1.60 H_{1/3}$	$1.76 H_{1/3}$	$1.84 H_{1/3}$	mayor de $2.14 H_{1/3}$
1000	menor de $1.70 H_{1/3}$	$1.86 H_{1/3}$	$1.93 H_{1/3}$	mayor de $2.22 H_{1/3}$

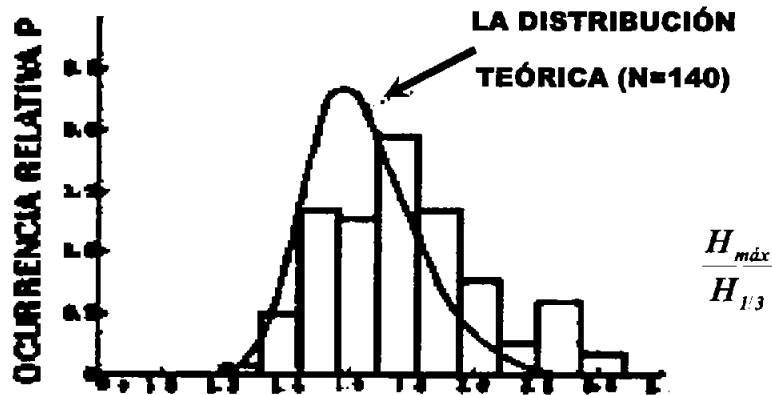
TABLA II.2 ESPERANZA DE  $H_{m\acute{a}x}$ 

Por ejemplo si se seleccionan 100 muestras de oleaje que tiene 100 olas, el valor más frecuentemente aparecido de  $H_{m\acute{a}x}$  es alrededor de  $H_{m\acute{a}x} = 1.52 H_{1/3}$  y el promedio,  $H_{m\acute{a}x} = 1.61 H_{1/3}$ , sin embargo, 5 entre 100 muestras pueden tener el valor de  $H_{m\acute{a}x}$  que es menos de  $1.33 H_{1/3}$ , por otra parte otras cinco olas son mayores de  $1.94 H_{1/3}$ .

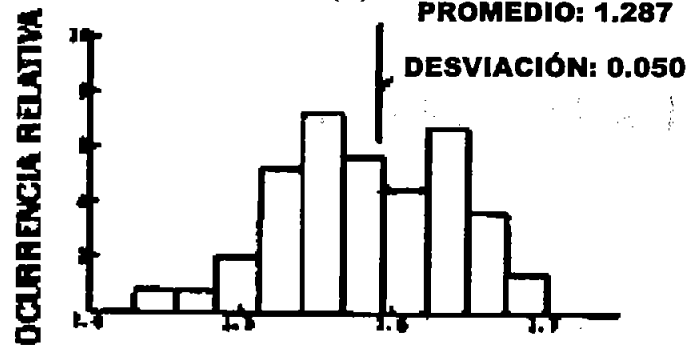
La teoría de la distribución de Rayleigh se ha deducido en base a la suposición de que el ancho distribucional del período de oleaje sea muy angosto, o sea, cada ola del oleaje tiene casi mismo valor del período (también puede decirse por ejemplo, el caso de que no se encuentra una cresta pequeña en la parte de valle de la ola). Realmente, en cuanto se definen las olas por el método de "zero-up-cross", esta teoría se aplica en su mayoría a "oleaje de viento" que tiene una distribución ancha del período.

La Figura II.2 es el resultado del estudio sobre las distribuciones de ocurrencia de la proporción;  $H_{m\acute{a}x} / H_{1/3}$  (Número de las olas medidas igual a 140),  $H_{1/10} / H_{1/3}$ ,  $H_{1/3} / \bar{H}$  usando 92 datos del oleaje directamente medido en la configuración de la superficie en el Puerto, y los promedios de estos tienen valores cercanos a la Tabla II.2 o las ecuaciones (II.3) y (II.3').

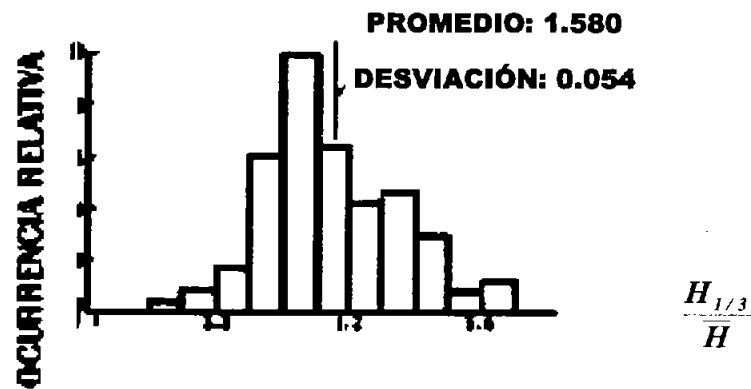
Las proporciones  $H_{1/10} / H_{1/3}$ ,  $H_{1/3} / \bar{H}$ , como se ve en la Figura II.2 (b), (c) no son determinantes, sino varían entre algún ancho, según cada grupo de oleaje registrado.



(a)



(b)



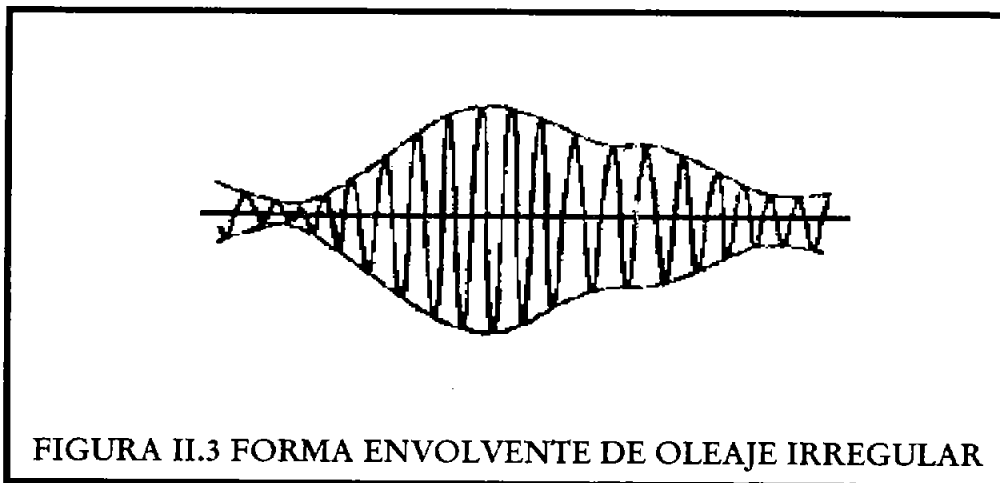
(c)

FIGURA II.2 DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA DE PROPORCIONES ENTRE CADA ALTURA DE OLA.

## II.2.1 Deducción De La Distribución De Rayleigh

Al caso de que se concentre alrededor de un período, la energía de espectro, se llama “espectro angosto”.

El perfil del oleaje, en dicha condición tiene la forma que se muestra en la Figura II.3, de la amplitud variándose suavemente con un período casi igual.



Dicho perfil se expresa como sigue:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n)$$

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi(f_n - f)t + 2\pi f t + \varepsilon_n)$$

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi(f_n - f) + \varepsilon_n) \cos 2\pi f t - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi(f_n - f) + \varepsilon_n) \sin 2\pi f t \dots\dots\dots (II.4)$$

Sustituyendo:

$$Y_c(t) \quad \text{por} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_n),$$

$$Y_s(t) \quad \text{por} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_n)$$

Nos queda:

$$\eta(t) = Y_c(t) \cos 2\pi \bar{f} t - Y_s(t) \text{sen} 2\pi \bar{f} t \dots \dots \dots (II.4')$$

La frecuencia  $\bar{f}$  puede tener cualquier valor si se ha representado entre el dominio frecuencial, en donde se concentre la energía. Entre ellas, se puede aplicar la frecuencia promedia que se define como sigue, usándose el momento de primer grado al espectro frecuencial:

$$\bar{f} = \frac{m_1}{m_0} \dots \dots \dots (II.5)$$

Donde:

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df \dots \dots \dots (II.6)$$

Definiendo amplitud  $R$  y ángulo de fase  $\phi$ , en la relación con  $Y_c$  y  $Y_s$  de la ecuación (II.4') :

$$R = R(t) = \sqrt{Y_c^2(t) + Y_s^2(t)} \dots \dots \dots (II.7)$$

$$\phi = \phi(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{Y_s(t)}{Y_c(t)} \right] \dots \dots \dots (II.8)$$

$$Y_C(t) = R \cos \phi, \quad Y_S(t) = R \sin \phi \dots\dots\dots (II.9)$$

Se expresa  $\eta$  con  $R$  y  $\phi$  como sigue:

$$\eta = R(t) \cos[2\pi \bar{f}t + \phi(t)] \dots\dots\dots (II.10)$$

La ecuación (II.10) indica que la amplitud  $R$  y el ángulo de fase  $\phi$  de la oscilación con frecuencia se varían por tiempo, cuya variación en caso de espectro con banda estrecha es muy lento, resultando que  $R = R(t)$  tiene la forma de la amplitud de "oleaje envolvente" ilustrada como en la Figura II.3

Para deducir la distribución de probabilidad de la amplitud  $R$ , será necesario, primeramente saber cómo se caracterizan  $Y_C$  y  $Y_S$  por la definición de la ecuación (II.4), los dos resultan como sigue:

$$\begin{aligned} E[Y_C^2] &= E \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \right\}^2 \right] \\ &= E \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos^2(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \cos(2\pi f_m t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \cos(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y_S^2] &= E \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \right\}^2 \right] \\ &= E \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sin^2(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \sin(2\pi f_m t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \sin(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f}t + \epsilon_n) \right] \end{aligned}$$



$$\cos^2 mx = \sin^2 mx = \frac{1}{2}, \quad (\sin mx)(\sin nx) = (\cos mx)(\cos nx) = 0$$

$$(m \neq n)$$

Por otra parte:

$$E[Y_C Y_S] = E \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \sin(2\pi f_m t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_m) \cos(2\pi f_n t - 2\pi \bar{f} t + \varepsilon_n) \right]$$

$$(\sin mx)(\cos nx) = 0$$

$$E[Y_C Y_S] = 0$$

Es decir  $Y_C$  y  $Y_S$  son independientes estadísticamente, por lo que la probabilidad de que  $Y_C$  tenga el valor entre  $Y_C$  y  $Y_C + dY_C$  y  $Y_S$  el valor de  $Y_S$  y  $Y_S + dY_S$  simultáneamente, se expresa como producto de dos distribuciones normales.

$$\rho(Y_C, Y_S) dY_C dY_S = \frac{1}{2\pi m_0} e^{\left[ -\frac{Y_C^2 + Y_S^2}{2m_0} \right]} dY_C dY_S \dots \dots \dots (II.12)$$

En la ecuación (II.12) se transforman las variables a  $R$  y  $\phi$ , teniendo la relación siguiente:

$$dY_C dY_S = \frac{\partial(R \cos \phi, R \sin \phi)}{\partial(R, \phi)} dR d\phi = \begin{matrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -R \sin \phi & R \cos \phi \end{matrix}$$

$$dR d\phi = R dR d\phi$$

Y por la función de  $R$  y  $\phi$ :

$$\rho(R, \phi) dR d\phi = \frac{R}{2\pi m_0} e^{\left[-\frac{R^2}{2m_0}\right]} dR d\phi \dots \dots \dots (II.13)$$

La ecuación (II.13) no tiene  $\phi$  como una variable, indicando que se distribuye uniformemente entre  $0$  a  $2\pi$  de la variable  $\phi$  por lo tanto:

$$\rho(R) dR = \int_0^{2\pi} \rho(R, \phi) dR d\phi = \frac{R}{m_0} e^{\left[-\frac{R^2}{2m_0}\right]} dR$$

La premisa del espectro con frecuencia estrecha de la probabilidad baja de ocurrencia, de que un punto de máximo aparezca entre dos crestas lindantes, resultando que la variable arriba mencionada puede expresarse como amplitud de cada ola, por su parte la teoría que tiene la suposición de linealidad de ola da la distribución simétrica de probabilidad entre cresta y valle, la cual puede indicar que altura  $H$  sea el doble de amplitud  $R$  es decir:

$$R = \frac{H}{2}, \quad dR = \frac{dH}{2}$$

$$\rho(H) dH = \frac{H}{4m_0} e^{\left[-\frac{H^2}{8m_0}\right]} dH \dots \dots \dots (II.14)$$

## II.2.2 Relación Entre $m_0$ Y $\bar{H}$ , $H_{rms}$

La relación entre  $m_0$  y  $\bar{H}$  se obtiene como sigue:

$$\bar{H} = \frac{\int_0^{\infty} H \rho(H) dH}{\int_0^{\infty} \rho(H) dH} = \int_0^{\infty} \frac{H^2}{4m_0} e^{-\left[\frac{H^2}{8m_0}\right]} dH$$

Por la fórmula de integral definida:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}, \quad (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 3!$$

Sustituyendo:

$$n = 1$$

$$a = \frac{1}{8} m_0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{4m_0} \frac{1}{4} (8m_0)^{3/2} \pi^{1/2} = (2\pi m_0)^{1/2} \dots \dots \dots (II.15)$$

Asimismo, sobre  $H_{rms}$  (raíz cuadrada de la altura media cuadrática):

$$H_{rms}^2 = \int_0^{\infty} H^2 \rho(H) dH = \int_0^{\infty} \frac{H^3}{4m_0} e^{-\left[\frac{H^2}{8m_0}\right]} dH$$

Por la fórmula de la integral definida:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

Sustituyendo:

$$n = 1$$

$$a = \frac{1}{8} m_0$$

Usando los resultados anteriores expresados en las ecuaciones (II.15) y (II.16) se da la forma generalizada de la distribución de Rayleigh.

$$\rho(x)dx = 2a^2 x e^{-a^2 x^2} dx \dots \dots \dots (II.17)$$

Donde:

$$x = \frac{H}{H^*}; H^* : \text{altura de una ola característica}$$

$$a = \frac{H^*}{(8m_0)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}}; & H^* = m_0^{1/2} \\ \frac{\pi}{2}; & H^* = \bar{H} \\ 1; & H^* = H_{rms} \end{cases} \dots \dots \dots (II.18)$$

### II.2.3 Relación De $H_{1,3}$ con $\bar{H}$

Para calcular la altura de ola  $H_{1,N}$  primeramente se obtiene la altura de ola que tiene la probabilidad excedente de  $1/N$ . Aquí se usa la forma generalizada de la distribución de Rayleigh.

$$P(x) = P[\xi > x] = \int_x^{\infty} \rho(\xi) d\xi = e^{(-a^2 x^2)} \dots \dots \dots (II.19)$$

$$x_N \text{ corresponde a: } P(x_N) = \frac{1}{N}$$

$$e^{(-a^2 x_N^2)} = \frac{1}{N}, \quad x_N = \frac{1}{a} (\ln N)^{1/2} \dots \dots \dots (II.20)$$

Si se expresa la proporción de  $H_{1,N}$  como  $x_{1,N}$

$$x_{1,N} = \frac{\int_{x_{1,N}}^{\infty} x \rho(x) dx}{\int_{x_{1,N}}^{\infty} \rho(x)} = N \int_{x_N}^{\infty} x \rho(x) dx \dots \dots \dots (II.21)$$

Por la fórmula matemática de integral parcial

$$x_{1,N} = N \left\{ x_N e^{[-a^2 x_N^2]} + \int_{x_N}^{\infty} e^{[-a^2 x_N^2]} dx \right\} \dots \dots \dots (II.22)$$

Introduciendo la función de Error:

$$x_{1,N} = x_N + \frac{N}{a} \operatorname{Erfc}[ax_N] \dots \dots \dots (II.23)$$

Donde:

$$\operatorname{Erfc}[x] = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \dots\dots\dots (II.24)$$

La ecuación (II.24) se puede hacer el desarrollo aproximado, como la siguiente:

$$\operatorname{Erfc}[x] \approx e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} x^{2n+1}}; \quad x \rightarrow \infty \dots\dots\dots (II.24')$$

Si se usa hasta el segundo término de la ecuación. (II.24'), la ecuación. (II.23) se puede aproximar a la siguiente:

$$x_{I,N} = x_N + \frac{N}{a} e^{(-ax_N)} \left\{ \frac{1}{2ax_N} - \frac{1}{4(ax_N)^3} \right\}$$

$$x_{I,N} = x_N + \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{2(\ln N)^{1,2}} - \frac{1}{4(\ln N)^{3,2}} \right\}$$

$$x_{I,N} = x_N + \frac{1}{2a(\ln N)^{1,2}} \left\{ 1 - \frac{1}{4\ln N} \right\} \dots\dots\dots (II.25)$$

Aquí se calcula la relación entre  $H_{1,3}$  y  $\bar{H}$

De la ecuación (II.20) se tiene:

$$x_3 = \left[ \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \right] (In3)^{1/2} = 1.18$$

$$ax_3 = (In3)^{1/2} = 1.048$$

$$Erfc(1.048) = 0.124$$

Por lo tanto:

$$x_{1,3} = \left( \frac{H_{1,3}}{\bar{H}} \right) = 1.18 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} (0.124) = 1.60$$

$$H_{1,3} = 1.60\bar{H} \dots\dots\dots (II.26)$$

## II.2.4 El Valor Estadístico De $H_{m\acute{a}x}$

La distribución de Rayleigh no tiene límite superior como se puede observar en la ecuación. (II.1) y sólo disminuye exponencialmente la probabilidad de ocurrencia a medida que crece la altura de ola, teniendo  $H_{m\acute{a}x}$  solamente el significado de cantidad estadística, ya que es el valor entre las muestras de algunas olas extraídas de la población de altura de ola.

Es natural que tal cantidad estadística cambie su valor en cada muestra y se necesita discutir la distribución de probabilidad sobre su valor estadístico.

La inducción de la distribución de  $H_{m\acute{a}x}$  se ha hecho por Longuet-Higgins, y Davenport obtuvo la inducción poco simplificada.

Suponen que  $N$  sea el número de las alturas de ola en un grupo que se extraigan de la población y que la máxima de éstas sea  $x_{m\acute{a}x}$ .

Si se expresa la función de densidad de probabilidad de  $x_{m\acute{a}x}$  como  $\rho^*(x_{m\acute{a}x})$  la probabilidad de que el valor máximo de  $x$  esté entre  $x_{m\acute{a}x}$  y  $x_{m\acute{a}x} + dx_{m\acute{a}x}$  es  $\rho^*(x_{m\acute{a}x})dx_{m\acute{a}x}$  por su definición.

Por otra parte, ésta es la probabilidad de que sólo una ola, entre  $N_0$  olas, tiene el valor entre  $x_{m\acute{a}x}$  y  $x_{m\acute{a}x} + dx_{m\acute{a}x}$  ya todas las otras olas ( $N_0 - 1$ ) tienen el valor menor de  $x_{m\acute{a}x}$ :

$$\rho^*(x_{m\acute{a}x})dx_{m\acute{a}x} = N_0 [1 - P(x_{m\acute{a}x})]^{N_0-1} \rho(x_{m\acute{a}x})dx$$

$$\rho^*(x_{m\acute{a}x})dx_{m\acute{a}x} = d[1 - P(x_{m\acute{a}x})]^{N_0-1} \dots\dots\dots(II.27)$$



Donde:  $P(x)$  expresado por la ecuación (II.19) y  $\rho^*(x)$  por la ecuación (II.17). Si  $N_0$  es muy grande, la función del segundo miembro de la ecuación se puede aproximar como sigue:

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} [1 - P(x_{m\acute{a}x})]^{N_0} = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\xi}{N_0}\right]^{N_0} = e^{-\xi} \dots\dots\dots (II.28)$$

Donde:

$$\xi = N_0 P(x_{m\acute{a}x}) = N_0 e^{-a^2 x_{m\acute{a}x}^2} \dots\dots\dots (II.29)$$

Sustituyendo la ecuación (II.28) a la ecuación (II.27):

$$\rho^*(x_{m\acute{a}x}) dx_{m\acute{a}x} = e^{-\xi} d\xi = 2a^2 x_{m\acute{a}x} \xi e^{-\xi} dx_{m\acute{a}x} \dots\dots\dots (II.30)$$

Se ha obtenido la función de densidad de probabilidad, lo que se puede calcular, el valor ocurrido más frecuentemente, el valor de promedio, variación, etc.

El valor ocurrido más frecuentemente,  $(x_{m\acute{a}x})_{moda}$ , se dará lo siguiente, teniendo la condición:

$$\frac{d\rho^*}{dx_{m\acute{a}x}} = 0$$

$$(x_{m\acute{a}x})_{moda} = \frac{1}{a} (\ln N_0)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{4(\ln N_0)} + \dots \right\} \dots\dots\dots (II.31)$$

Si se omite el segundo término y el valor mayor del segundo miembro de la ecuación (II.31) por el menor, se obtendrá la relación siguiente:

$$(H_{m\acute{a}x})_{moda} = 0.706 (\ln N_0)^{1/2} H_{1/3} \dots\dots\dots (II.32)$$

Asimismo, las ecuaciones para estimar el valor esperado (el valor medio aritméticamente), y el valor de promedio del cuadrado de  $x_{max}$  son:

$$E[x_{max}] = \int_0^{\infty} x_{max} \rho^*(x_{max}) dx_{max} = \int_0^{N_0} x_{max} e^{-\xi} d\xi \dots \dots \dots (II.33)$$

$$E[x_{max}^2] = \int_0^{\infty} x_{max}^2 \rho^*(x_{max}) dx_{max} = \int_0^{N_0} x_{max}^2 e^{-\xi} d\xi \dots \dots \dots (II.34)$$

Aquí si se cambia la expresión de la ecuación (II.29):

$$x_{max} = \frac{1}{a} (\ln N_0 - \ln \xi)^{1/2}$$

$$x_{max} = \frac{1}{a} (\ln N_0)^{1/2} - \frac{\ln \xi}{2a (\ln N_0)^{1/2}} - \frac{(\ln \xi)^2}{8a (\ln N_0)^{3/2}} \dots \dots \dots (II.35)$$

Sustituyendo la ecuación (II.33), o sustituyendo la ecuación (II.29) a la ecuación (II.34) e integrándolas se obtiene:

$$E[x_{max}] = \frac{1}{a} (\ln N_0)^{1/2} + \frac{\gamma}{2a (\ln N_0)^{1/2}} - \frac{\pi^2 + 6\gamma^2}{48a (\ln N_0)^{3/2}} \dots \dots \dots (II.36)$$

Por ejemplo, en relación con  $H_{1,3}$ , se da el valor  $(H_{máx})_{media}$  aproximadamente:

$$(H_{máx})_{media} = 0.706 \left\{ (InN_0)^{1/2} + \left( \frac{\gamma}{2\sqrt{InN_0}} \right) \right\} \dots\dots\dots (II.36')$$

$$E[x_{máx}^2] = \frac{1}{a^2} InN_0 + \frac{1}{a^2} \gamma \dots\dots\dots (II.37)$$

Donde:

$$\gamma = - \int_0^{\infty} (In\xi) e^{-\xi} d\xi = 0.57772 \dots\dots\dots (II.38)$$

$$\int_0^{\infty} (In\xi)^2 e^{-\xi} d\xi = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 \dots\dots\dots (II.39)$$

Por lo tanto, la desviación tipo estándar se calcula como sigue:

$$\sigma(x_{máx}) = \left\{ E[x_{máx}^2] - E[x_{máx}]^2 \right\}^{1/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{6a(InN_0)^{1/2}}} \dots\dots\dots (II.40)$$

Si se pone  $\mu$  como la probabilidad de que  $H_{máx}$  excede el valor arbitrariamente determinado:

$$\mu = 1 - \int_0^{x_{máx}} \rho^*(\zeta) d\zeta = 1 - [1 - P(x_{máx})]^{N_0}$$

$$\mu = 1 - \exp[-N_0 P(x_{máx})] \dots\dots\dots (II.41)$$

De la ecuación anterior, al contrario,  $(x_{m\acute{a}x})\mu$  con la probabilidad excedente de ocurrencia se da como:

$$(x_{m\acute{a}x})\mu = \frac{1}{a} \left\{ \ln \left[ \frac{N_0}{\ln \frac{1}{1-\mu}} \right] \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (II.42)$$

Por ejemplo, en relación con  $H_{1.3}$ , se da el valor  $H_{m\acute{a}x}$  como:

$$\frac{(H_{m\acute{a}x})\mu}{H_{1.3}} = 0.706 \left\{ \ln \left[ \frac{N_0}{\ln \frac{1}{1-\mu}} \right] \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (II.43)$$

Por otra parte, comparando los resultados de las ecuaciones. (II.31), (II.36) con las ecuaciones. (II.28), (II.33); las relaciones siguientes se encuentran por dimensiones, si  $N_0$  es muy grande:

$$x_{N_0} = (x_{m\acute{a}x})_{moda} < (x_{m\acute{a}x})_{media} < x_{1/N_0} \dots\dots\dots (II.44)$$

Aproximadamente se puede cambiar como sigue:

$$(x_{m\acute{a}x})_{media} = x_{1.8N_0} \quad y \quad x_{1/N_0} = x_{2.6N_0} \dots\dots\dots (II.45)$$

## II.3 DISTRIBUCIÓN DE OCURRENCIA DE PERÍODO DE OLA

La distribución de período de cada ola entre un grupo de oleaje, varía por la etapa de generación de oleaje. En caso del oleaje suficientemente desarrollado por la fuerza del viento, la función de densidad de probabilidad de los cuadrados de los períodos de la ola puede representarse aproximadamente por la distribución de Rayleigh con la ecuación (II.46):

$$\rho(T)dT = 2.7 \frac{T^3}{\bar{T}^4} e^{\left(-0.675\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right)} dT \dots\dots\dots(II.46)$$

Donde:  $\rho(T)$  es la función de densidad de probabilidad de los períodos de ola.

Sin embargo, en caso de que "swell" (oleada) habiendo propagación del huracán en el océano se superpone al "oleaje de viento" generado por viento local, coexisten las olas de período largo y las olas de período corto y resulta su distribución más amplia que la ecuación (II.46).

Prácticamente son más importantes las relaciones entre los períodos de las olas representativas mencionadas en el tema II.2. Por los resultados analíticos de los datos de observación en campo, se ha obtenido la relación siguiente:

$$\left. \begin{aligned} T_{m\acute{a}x} &= (0.6 - 1.3)T_{1,3} \\ T_{1,10} &= (0.9 - 1.1)T_{1,3} \\ T_{1,3} &= (0.9 - 1.4)\bar{T} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(II.47)$$

Teniendo gran variación entre las relaciones anteriores, la relación media se da como sigue:

$$T_{m\acute{a}x} = T_{1,10} = T_{1,3} = 1.1T \dots\dots\dots(II.48)$$

Sin embargo, en caso de oleaje en aguas intermedias se da la relación como:

$$T_{1,3} = 1.2T$$

### II.3.1 Teoría Sobre La Distribución De Período

#### Promedio del Período "zero-up-cross"

Rice, S. O. investigó el problema de cuántas veces atraviesa la superficie el oleaje irregular por el nivel cero por unidad de tiempo que da la fórmula teórica de la media de los períodos de un grupo de oleaje por el método de "zero-up-cross".

Si se supone la configuración del oleaje irregular con la ecuación (II.49), se dará la variación temporal de ella con la ecuación (II.50).

$$\eta = \eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \dots\dots\dots (II.49)$$

$$\dot{\eta}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi f_n a_n \text{sen}(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \dots\dots\dots (II.50)$$

Nota:  $\sigma_n = 2\pi f_n$

Donde:

$\sigma = \text{frecuencia angular}$

$$f_n = \text{frecuencia} \left( \left( \frac{1}{T} \right) T = \text{periodo} \right)$$

Con  $N_0^*$  se expresa el número de veces con que la configuración  $\eta(t)$  atraviesa ascendentemente por el nivel cero, que se da con la ecuación (II.51)

$$N_0^* = \int_b^{\infty} \dot{\eta} \rho(0, \dot{\eta}) d\dot{\eta} \dots\dots\dots (II.51)$$

Donde:

$\rho(\eta, \dot{\eta})$  = es la función conjunta de densidad de probabilidad de  $\eta$  y  $\dot{\eta}$ .

La configuración  $\eta$  y su pendiente,  $\dot{\eta}$  siendo claro por la forma de las ecuaciones (II.49) y (II.50), tienen el valor "cero" como el promedio de conjunto y también tienen la distribución de normal por el teorema de externo central y su variancia se da de la siguiente forma:

$$E[\eta^2] = m_0, \quad E[\dot{\eta}^2] = (2\pi)^2 m_2 \dots \dots \dots (II.52)$$

Además, la covariancia  $E(\eta, \dot{\eta})$  es cero, significando que  $\eta$  y  $\dot{\eta}$  son independientes estadísticamente, y la distribución  $\rho(\eta, \dot{\eta})$  se dará en la forma de productos de dos distribuciones normales:

$$\rho(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{4\pi^2 (m_0 m_2)^{1/2}} e^{\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2}{m_0} + \frac{\dot{\eta}^2}{4\pi^2 m_2} \right) \right]} \dots \dots \dots (II.53)$$

Se sustituye en la ecuación (II.51), integrándola:

$$N_0^* = \int_0^{\infty} \frac{\eta}{4\pi^2(m_0 m_2)^{1/2}} e^{\left(-\frac{1}{8\pi^2 m_2}\right)} d\eta \dots\dots\dots(II.54)$$

$$N_0^* = -\left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{1/2} e^{\left(-\frac{\eta^2}{8\pi^2 m_2}\right)} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{1/2}$$

El promedio de los períodos de 'zero-up-cross' se da por el recíproco de la ecuación (II.54), expresándola por:

$$T_{0z} = \frac{1}{N_0^*} = \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^{1/2} \dots\dots\dots(II.55)$$

Y:

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{e^{\left\{ \left[ -\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \right] \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12}^2 \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_1^2}}$$

Donde:

$$\rho_{12} = \frac{C_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \text{coeficiente de correlación entre } x_1 \text{ y } x_2$$



## II.4 EJERCICIOS

## Ejercicio II.1

Calcular  $H_{1.3}$ ,  $T_{1.3}$ ,  $H_{1/10}$ ,  $T_{1/10}$ ,  $H_{\max}$ ,  $\bar{H}$  y  $\bar{T}$  conforme a los datos del ológrafo escrito en la tabla II.3 y comparar las relaciones  $\frac{H_{1.3}}{\bar{H}}$ ,  $\frac{H_{\max}}{H_{1.3}}$  del ológrafo con el valor teórico de Longuet-Higgins (Distribución de Rayleigh).

No.	H(m)	T (seg.)	No.	H(m)	T (seg.)	No.	H(m)	T (seg.)	No.	H(m)	T (seg.)
1	1.385	8.533	31	1.064	3.933	61	0.075	1.833	91	1.299	1.933
2	1.724	7.567	32	1.271	5.133	62	0.357	2.733	92	0.218	3.567
3	0.696	6.467	33	0.725	4.200	63	0.535	3.267	93	0.632	7.133
4	0.700	4.233	34	0.475	4.600	64	1.496	6.400	94	1.035	6.700
5	0.653	7.867	35	0.939	8.000	65	1.407	4.367	95	0.917	6.967
6	0.800	3.933	36	1.357	5.933	66	0.725	5.500	96	1.307	4.900
7	1.785	4.967	37	0.953	6.433	67	1.246	7.733	97	1.346	5.367
8	1.553	6.133	38	0.639	7.933	68	0.725	4.033	98	0.900	3.467
9	1.399	5.033	39	0.885	4.500	69	0.571	5.067	99	0.892	5.600
10	1.949	5.000	40	0.357	5.967	70	0.350	4.767	100	0.657	3.433
11	1.082	4.267	41	0.303	2.500	71	1.999	5.233	101	0.889	4.967
12	0.393	6.267	42	0.357	2.867	72	2.106	6.167	102	0.810	9.267
13	0.850	4.567	43	0.539	4.067	73	1.171	9.600	103	1.285	7.333
14	1.028	6.467	44	0.996	6.800	74	0.668	6.700	104	0.935	4.000
15	0.857	3.633	45	0.550	2.700	75	0.393	3.067	105	0.175	6.533
16	0.428	3.767	46	1.157	6.667	76	1.100	3.867	106	0.932	5.967
17	0.496	3.200	47	0.957	4.467	77	0.443	2.400	107	1.192	5.600
18	2.274	4.467	48	1.185	6.267	78	1.357	5.733	108	1.407	7.233
19	1.535	6.300	49	0.396	3.933	79	1.571	6.467	109	0.996	10.033
20	1.211	6.133	50	1.260	5.433	80	0.671	6.533	110	1.453	8.300
21	1.339	5.667	51	0.646	5.867	81	0.511	6.300	111	1.121	7.333
22	1.314	4.667	52	0.560	2.767	82	0.710	4.733	112	0.939	6.800
23	0.814	4.567	53	1.025	13.267	83	0.618	4.367	113	1.014	6.333
24	0.364	3.033	54	0.732	6.067	84	0.464	4.233	114	0.903	3.967
25	1.678	6.933	55	0.613	8.867	85	0.871	3.233	115	1.774	5.567
26	1.828	4.467	56	1.264	5.933	86	0.868	4.433			
27	1.724	4.733	57	0.696	6.267	87	0.789	8.567			
28	1.467	4.833	58	0.818	4.800	88	0.685	5.400			
29	1.228	5.167	59	0.361	2.400	89	0.793	6.667			
30	1.114	7.500	60	0.643	3.367	90	1.892	5.833			

TABLA II.3 REGISTRO DE DATOS OBTENIDOS EN UN OLÓGRAFO

*Solución:*

*Si se cambia el orden de los valores leídos de mayor a menor de altura, el resultado se da como se muestra en la tabla II.4*

*El número total de olas es 115 y la ola de  $H_{1,10}$  y  $T_{1,10}$  se puede calcular como el promedio de 11 olas de las alturas mayores:*

$$H_{1,10} = 1.89 \text{ metros}, \quad T_{1,10} = 5.5 \text{ segundos}$$

*La ola significativa se calcula como el promedio de 33 (= 115/3) olas de las alturas mayores:*

$$H_{1,3} = 1.50 \text{ metros}, \quad T_{1,3} = 5.9 \text{ segundos}$$

*La ola de  $\bar{H}$ ,  $\bar{T}$  es:*

$$\bar{H} = 0.98 \text{ metros}, \quad \bar{T} = 5.5 \text{ segundos}$$

*La ola de  $H_{\text{máx}}$  y  $T_{\text{máx}}$  es:*

$$H_{\text{máx}} = 2.27 \text{ metros}, \quad T_{\text{máx}} = 4.5 \text{ segundos}$$

## PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL OLAJE IRREGULAR

No.	H(m)	T(seg.)	No.	H(m)	T(seg.)	No.	H(m)	T(seg.)	No.	H(m)	T(seg.)
1	2.274	4.467	31	1.264	5.933	61	0.892	5.600	91	0.632	7.133
2	2.106	6.167	32	1.26	5.433	62	0.889	4.967	92	0.618	4.367
3	1.999	5.233	33	1.246	7.733	63	0.885	4.500	93	0.571	5.067
4	1.949	5.000	34	1.228	5.167	64	0.871	3.233	94	0.56	2.767
5	1.892	5.833	35	1.214	6.133	65	0.868	4.433	95	0.55	2.700
6	1.828	4.467	36	1.192	5.600	66	0.857	3.633	96	0.539	4.067
7	1.785	4.967	37	1.185	6.267	67	0.85	4.567	97	0.535	3.267
8	1.774	5.567	38	1.175	6.533	68	0.818	4.800	98	0.511	6.300
9	1.724	7.567	39	1.171	9.600	69	0.814	4.567	99	0.496	3.200
10	1.724	4.733	40	1.157	6.667	70	0.81	9.267	100	0.475	4.600
11	1.678	6.933	41	1.121	7.333	71	0.8	3.933	101	0.464	4.233
12	1.571	6.467	42	1.114	7.500	72	0.793	6.667	102	0.443	2.400
13	1.553	6.133	43	1.100	3.867	73	0.789	8.567	103	0.428	3.767
14	1.535	6.300	44	1.082	4.267	74	0.732	6.067	104	0.396	3.933
15	1.496	6.400	45	1.064	3.933	75	0.725	4.200	105	0.393	6.267
16	1.467	4.833	46	1.035	6.700	76	0.725	5.500	106	0.393	3.067
17	1.453	8.30	47	1.028	6.467	77	0.725	4.033	107	0.364	3.033
18	1.407	4.367	48	1.025	13.267	78	0.71	4.733	108	0.361	2.4
19	1.407	7.233	49	1.014	6.333	79	0.7	4.233	109	0.357	5.967
20	1.399	5.033	50	0.996	6.800	80	0.696	6.467	110	0.357	2.867
21	1.385	8.533	51	0.996	10.033	81	0.696	6.267	111	0.357	2.733
22	1.357	5.933	52	0.957	4.467	82	0.685	5.400	112	0.35	4.767
23	1.357	5.733	53	0.953	6.433	83	0.671	6.533	113	0.303	2.500
24	1.346	5.367	54	0.939	8.000	84	0.668	6.700	114	0.218	3.567
25	1.339	5.667	55	0.939	6.800	85	0.657	5.433	115	0.075	1.833
26	1.314	4.667	56	0.935	4.000	86	0.653	7.867			
27	1.307	4.900	57	0.932	5.967	87	0.646	5.867			
28	1.299	4.933	58	0.917	6.967	88	0.643	8.867			
29	1.285	7.333	59	0.903	3.967	89	0.643	3.367			
30	1.271	5.133	60	0.900	3.467	90	0.639	7.933			

TABLA II.4 LECTURAS ORGANIZADAS DE MAYOR A MENOR ALTURA

La relación entre las olas representativas calculadas es:

$$H_{1/3} = 1.53\bar{H}, H_{1/10} = 1.26H_{1/3}, H_{max} = 1.53H_{1/3}$$

Por otra parte, los valores por teoría de Longuet-Higgins son:

$H_{1/3} = 1.60H, H_{1/10} = 1.27H_{1/3}, H_{max} = 1.53H_{1/3} (N = 100)$ . Y se encuentra que la relación obtenida por observación en campo coincide a la de la teoría.

✍ Ejercicio II.2

Deducir la relación entre  $H_{1,10}$  y  $\bar{H}$  usando la ecuación (II.23).

Solución

La ecuación (II.23) es:

$$x_{1N} = x_N + \frac{N}{a} \operatorname{Erfc}[ax_N]$$

Poniendo  $H_* = \bar{H}$  y  $a = \frac{\pi}{2}$  en la ecuación (II.18):

$$x_{110} = \left( \frac{H_{110}}{\bar{H}} \right) = x_{10} + \frac{20}{\pi} \operatorname{Erfc} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (x_{10}) \right]$$

En la ecuación (II.20):

$$x_{10} = \frac{2}{\pi} (\ln 10)^{1/2} = 1.71$$

$$\left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) x_{10} = 1.52$$

Para utilizar Tabla II.4.

$$\begin{aligned} \operatorname{Erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \{1 - \Phi(\sqrt{2}x)\} \\ \operatorname{Erfc}(1.52) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \{1 - \Phi(2.15)\} \\ \operatorname{Erfc}(1.52) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \{1 - 1.984\} \\ \operatorname{Erfc}(1.52) &= 0.0284 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{1,10}}{\bar{H}} &= (1.71 + 20) \frac{0.0284}{\sqrt{\pi}} \\ \frac{H_{1,10}}{\bar{H}} &= 2.03 \end{aligned}$$

### ✍ Ejercicio II.3

Calcular  $(H_{max})_{moda}$ ,  $(H_{max})_{media}$ ,  $(H_{max})_{\mu} = 0.01$  en caso de que el oleaje con  $H_{1,3} = 6.0$  m tenga 500 olas. (Usar las ecuaciones (II.32), (II.36') y (II.43))

Solución:

En la ecuación (II.32):

$$\begin{aligned} (H_{max})_{moda} &= 0.706(\ln N_0)^{1/2} H^{1/3} \\ (H_{max})_{moda} &= 0.706(\ln 500)^{1/2} 6^{1/3} \\ (H_{max})_{moda} &= 10.6 \text{ metros} \end{aligned}$$

En la ecuación (II.36'):

$$(H_{max})_{media} = 0.706 \left\{ (In N_0)^{1.2} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{In N_0}} \right\}^6$$

$$(H_{max})_{media} = 0.706 \left\{ (In 500)^{1.2} + \frac{0.5772}{2 \sqrt{In 500}} \right\}^6$$

$$(H_{max})_{media} = 11.1 \text{ metros}$$

En la ecuación (II.43):

$$(H_{max})_{\mu = 0.01} = 0.706 \left[ \left[ \left[ \frac{500}{In \frac{1}{1-0.01}} \right] \right] \right]^6$$

$$(H_{max})_{\mu = 0.01} = 13.9 \text{ metros}$$

#### ✎ Ejercicio II.4

Se tiene un oleaje observado con  $\bar{H} = 2 \text{ metros}$ ,  $\bar{T} = 10 \text{ segundos}$  y con 20 minutos de duración.

Estimar  $H_{1.3}$ ,  $T_{1.3}$ ,  $H_{1.10}$ ,  $T_{1.10}$ ,  $H_{max}$  y  $T_{max}$  Usar las ecuaciones. (II.3), (II.3'), (II.47) y (II.48) y

Tabla II.2

#### SOLUCIÓN:

El número de olas registradas es:

$$N_0 = \frac{(20)(60 \text{ seg.})}{10 \text{ seg.}} = 120$$

$$H_{1.3} = 1.60 \bar{H} = (1.60)(2.0) = 3.20 \text{ metros}$$

$$H_{1.10} = 2.03 \bar{H} = (2.03)(2.0) = 4.06 \text{ metros}$$

$$(H_{max})_{media} = 1.61 H_{1.3} = (1.61)(3.2) = 5.15 \text{ metros}$$

$$T_{max} = T_{1.10} = T_{1.3} = 1.1 \bar{T} = 11 \text{ segundos}$$

# **CAPITULO III**



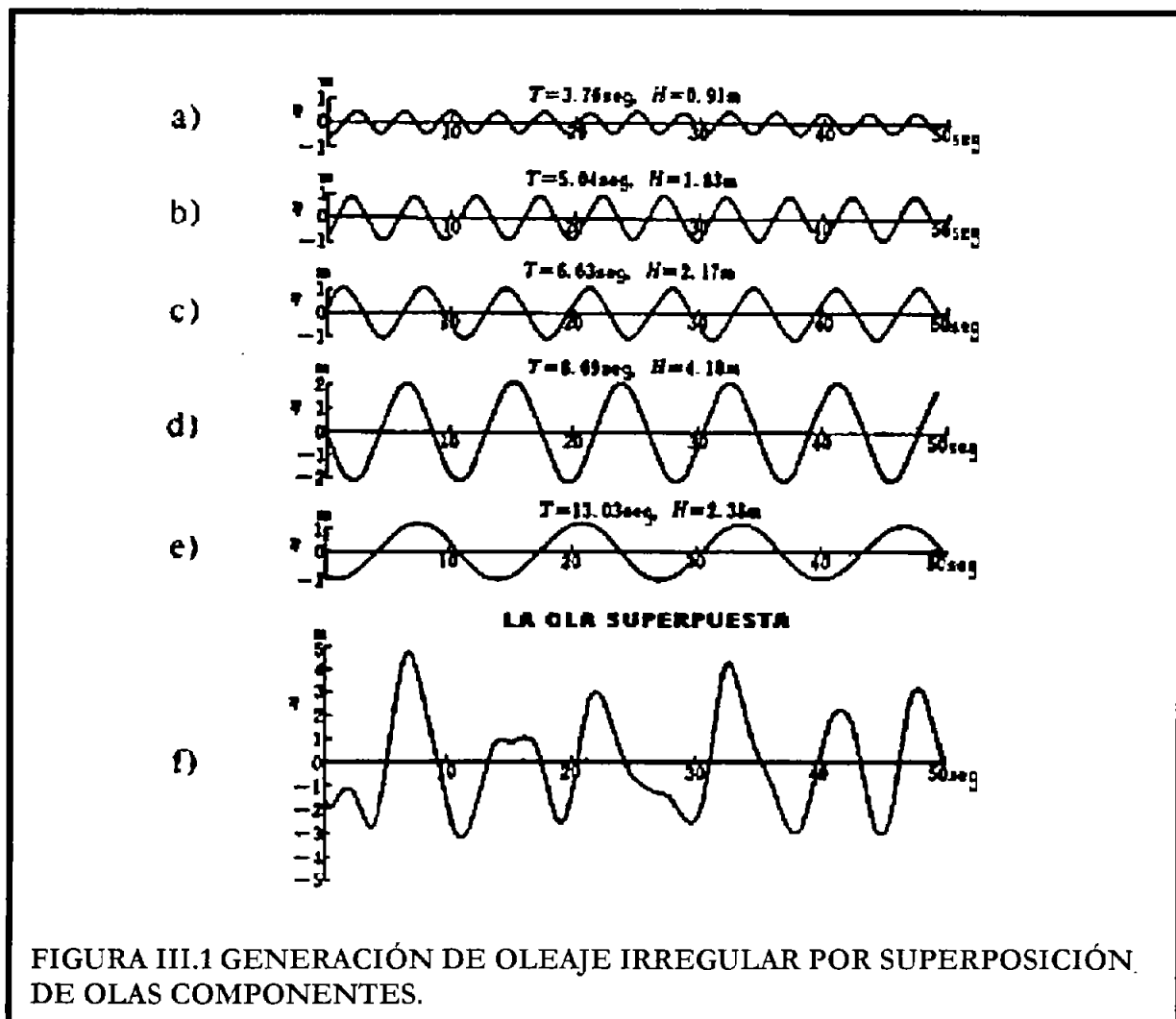
## **ESPECTROS DEL OLEAJE IRREGULAR.**

### III. ESPECTROS DE OLAJE IRREGULAR

#### III.1. ESPECTRO POTENCIAL DEL OLAJE

La característica de altura del oleaje irregular figurado como el de la Figura II.1 se expresa por el uso de las olas representativas, como *la ola significativa*.

Sin embargo, para expresar su característica más significativa se usa el espectro potencial en que se considera que el oleaje irregular es el resultado de la superposición de las olas de seno infinitas con los períodos diferentes y el espectro indica cuánta es la energía de cada ola de seno (*se llama la ola componente*) con cada frecuencia. Se considera en la Figura III.1 un ejemplo:

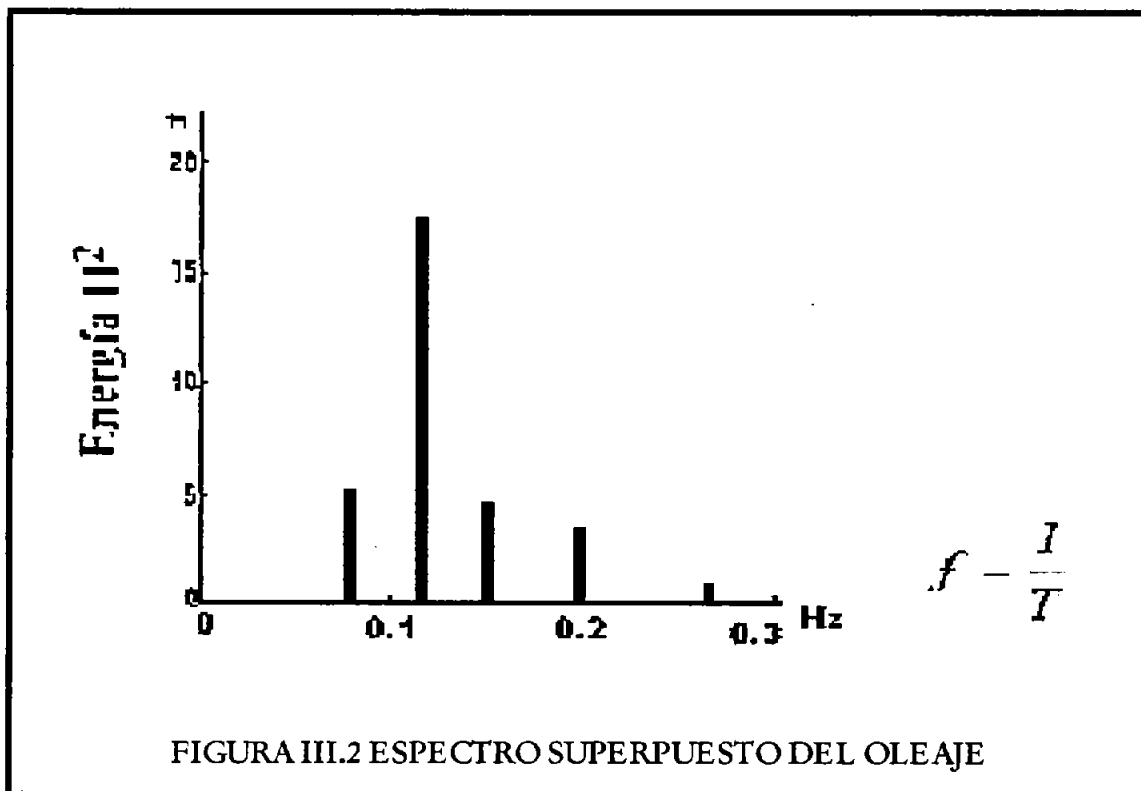




Se generan cinco olas componentes, Figuras: III.1 a), III.1 b), III.1 c), III.1 d), III.1 e) con  $T = 3.76, 5.04, 6.63, 8.69$  y  $13.03$  segundos respectivamente superponiéndolas una sobre la otra, se puede conseguir la ola irregular que se indica en la Figura III.1 f).

Aún la irregularidad de su configuración es incompleta comparado con la de la Figura II.1, si aumentan el número de las olas componentes, se puede obtener la configuración de oleaje aproximado al real.

La energía de ola proporciona el cuadro de las alturas y en la Figura III.2 se encuentra la gráfica que relaciona el cuadro de altura con la frecuencia de cada ola, que corresponde el espectro del oleaje superpuesto de la Figura III.1 f).



Si se hace la operación contraria, serán descompuestos los oleajes teniendo la irregularidad como en la Figura II.1 de las olas de seno que tienen diferentes frecuencias, es decir:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \dots \dots \dots (III.1)$$

Donde:

$a_n$  : Amplitud.

$f_n$  : Frecuencia.

$\varepsilon_n$  : Diferencia de fase de la ola de número  $n$ .

Aunque en la Figura III.2 se suponen las olas componentes de número finito, la ecuación (III.1) supone que las olas componentes son de números infinitos, por lo que la amplitud de cada una de las que la componen es infinitamente pequeña y es insignificante pensar en la energía de cada ola componente solitaria.

Por lo tanto se deben de tomar en cuenta todas las olas que la componen entre frecuencia  $f$  y  $f + \delta f$  expresando la energía de todas las olas arriba mencionadas con la función  $S(f)$  en la ecuación (III.2):

$$\sum_f^{f+\delta f} \frac{1}{2} a_n^2 = S(f) \delta f \dots \dots \dots (III.2)$$

La función  $S(f)$  expresa la distribución de energía de oleaje, llamándose como la densidad de espectro potencial de oleaje o el espectro de oleaje.

Para calcular  $S(f)$  usando los datos de oleaje registrado, es común que al principio se calcule su función de auto-correlación de la configuración de oleaje y después la transformada de Fourier, generalmente es necesario usar computadora para calcularlo o en algunas ocasiones, se usa un aparato especial de análisis espectral.

El resultado de análisis espectral de la Figura II.1, se indica en la Figura III.3, en la que puede encontrarse que la energía máxima de oleaje se concentra alrededor de  $f = 0.1\text{Hz}$  o  $T = 10\text{segundos}$  en donde el espectro de oleaje  $S(f)$  se expresa con unidades de  $\text{m}^2\text{-segundos}$ ,  $\text{cm}^2\text{-segundos}$ .

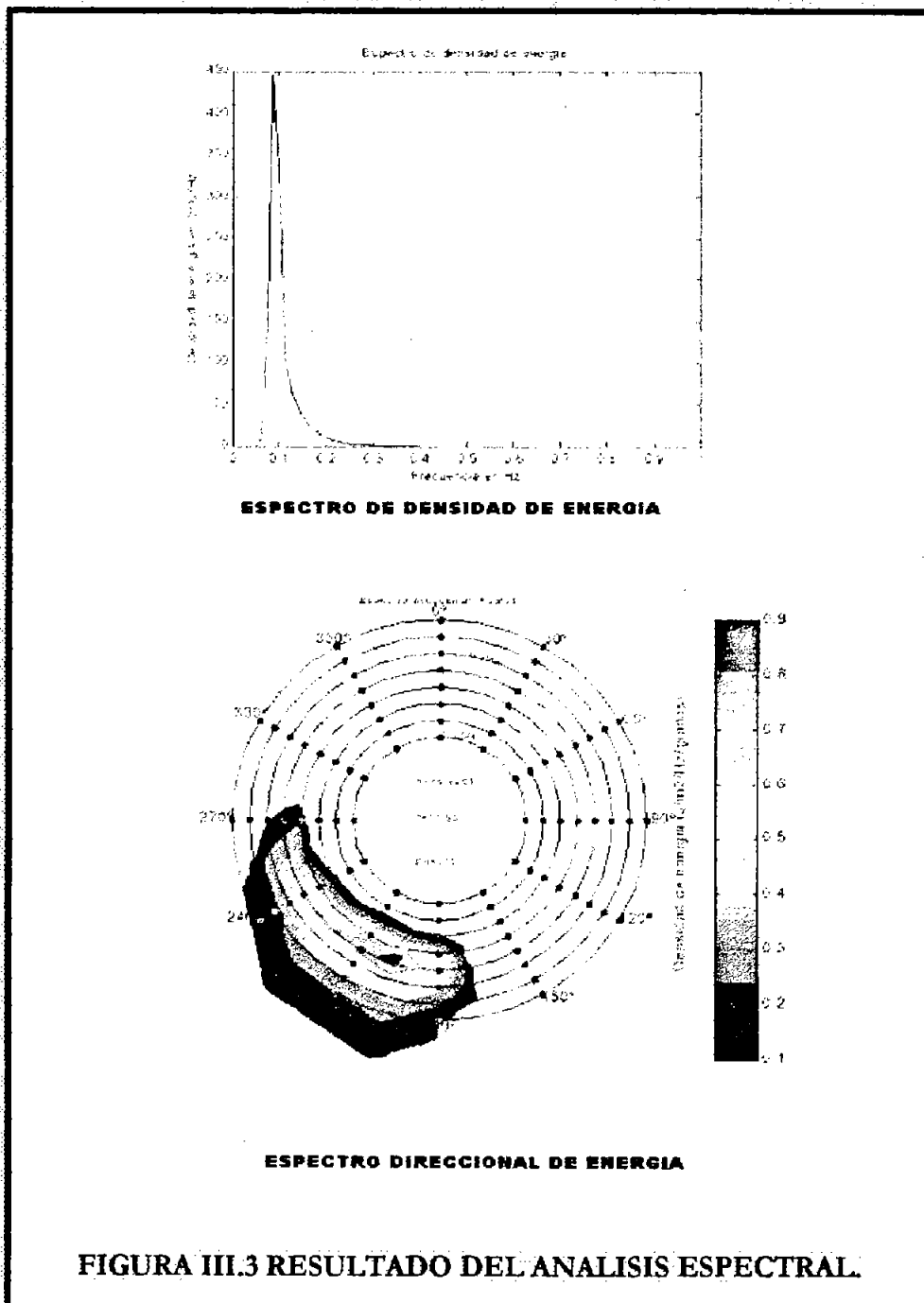


FIGURA III.3 RESULTADO DEL ANALISIS ESPECTRAL.

### III.2 ESPECTROS FRECUENCIALES TEÓRICOS DE OLAJE

Sobre la forma funcional de espectro potencial de "oleaje de viento", varias fórmulas se han propuesto en base del análisis en los datos obtenidos por la observación de oleaje y de la consideración teórica.

De esas formulas se tienen las siguientes:

#### a) *El espectro por Pierson-Moskowitz*

Este indica el espectro en estado perfectamente desarrollado del oleaje en el océano, en condición de que el viento con velocidad constante sople a la distancia muy larga, expresado por la ecuación (III.3):

$$S(f) = \frac{8.10 * 10^{-3} g^2}{(2\pi)^4 f^5} e^{\left[ -0.74 \left( \frac{g}{2\pi U_{19.5} f} \right)^4 \right]} \dots\dots\dots(III.3)$$

Donde:

$U_{19.5}$  = es la velocidad en la altura 19.5 m sobre el nivel del mar (*m. seg*).

#### b) *El espectro por Bretchneider*

Este se usa en el caso de haberse dado la altura y el periodo de ola representante, para estimar la forma de su espectro.

Sin embargo, la fórmula original por Bretchneider no concuerda con la definición de la ecuación (III.2), por lo tanto Mitsuyasu ha corregido el número dado por la ecuación (III.4):

$$S(f) = 0.257 (H_{1.3})^2 (T_{1.3})^{-4} f^5 e^{\left[ 1.03 (T_{1.3} f)^{-4} \right]} \dots\dots\dots(III.4)$$

En la forma antes descrita, se ha considerado que el espectro tiene un máximo de energía en la frecuencia  $f_p$  relacionado con  $T_{1,3}$  como sigue:

$$f_p = \frac{1}{1.05T_{1,3}} \dots\dots\dots(III.5)$$

En el oleaje real aparecen más de dos máximos de espectro cuando se suponen "oleaje por viento" y la "oleada". Además, en aguas intermedias o someras cerca de la costa, la parte de la frecuencia mayor tiene la forma proporcionada a:  $f^{-4}$  o  $f^{-3}$ . Por lo tanto, la forma de espectro de oleaje real no concuerda siempre con las ecuaciones (III.3) y (III.4).

a) *Espectro de JONSWAP (The Joint North Sea Wave Project) por Hasselmann K.*

$$S(f) = \alpha(H_{1,3})^2 T_p^{-4} f^{-5} e^{[-1.25(T_p f)^{-4}] \gamma} e^{\left[ -\frac{(T_p f - 1)^2}{2\sigma^2} \right]} \dots\dots\dots(III.6)$$

Donde:

Donde:  $T_p$  = período pico del registro,  $H_{1,3}$  : altura de ola significativa

$$\alpha = \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \dots\dots\dots(III.7)$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_a; f \leq f_p \\ \sigma_b; f \geq f_p \end{cases} \dots\dots\dots(III.8)$$

$$\sigma = 1 \text{ a } 7 \text{ (promedio 3.3)}$$

$$\sigma_a = 0.07, \quad \sigma_b = 0.09$$

Este espectro ha introducido un parámetro  $\gamma$ , que indica el factor de cresta, que coincide con la ecuación (III.4) cuando  $\gamma = 1$ . El máximo del espectro de JONSWAP con  $\gamma = 3.3$ , que indica el promedio de  $\gamma$  observado, es aproximadamente 2.2 veces mayor que el de la ecuación (III.4).

### III.3. RELACIÓN ENTRE ESPECTRO Y ALTURA O PERÍODO DE OLA.

Se integra la densidad espectral de energía de oleaje por todas las extensiones de frecuencia, expresando a  $m_0$ :

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(f) df \dots\dots\dots(III.9)$$

Desde las definiciones de las ecuaciones (III.1) y (III.2), hay la relación siguiente:

$$m_0 = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \eta^2 dt = \eta^2 \dots\dots\dots(III.10)$$

Donde:

$m_0$  = es la cantidad proporcionada a la energía total de oleaje y tiene unidad de  $m^2, cm^2$ .

La energía de oleaje es proporcional al cuadrado de la altura de la ola, por lo tanto se puede relacionar con la altura de la ola.

Considerando teóricamente, y comparando con los datos obtenidos por observación, se da la relación siguiente:

$$H_{1.3} = 4.0 \sqrt{m_0} \dots\dots\dots(III.11)$$

Esta relación es casi válida mientras que se defina la ola por el método de "zero-up-cross", aún cuando la forma espectral de oleaje sea considerablemente diferente de las de las ecuaciones (III.3) y (III.4).

Por otra parte, el período definido por el método de "zero-up-cross", se calcula por la ecuación (III.12) dado por la teoría estadística:

$$\tilde{T} = \frac{m_0}{m_2} \dots \dots \dots (III.12)$$

Donde:

$$m_2 = \int_0^{\infty} f^2 S(f) df$$

No obstante al calcularse  $\tilde{T}$  sobre el espectro real observado, usando la ecuación (III.12), ello da el valor mayor de 10-25 % que el obtenido directamente por la configuración de oleaje.

Respecto al oleaje en el mar, el período medio será adecuado considerarse aproximadamente el valor mayor de 20 % del de la ecuación (III.12).

Mientras, la frecuencia en donde tiene el espectro su valor máximo, se da aproximadamente el valor recíproco del período de la ola significativa  $T_{1/3}$ , o un poco más pequeño.

La relación de las ecuaciones (III.11) y (III.12), se usan cuando se estiman la altura y el período de oleaje, el espectro de que se ha transformado por refracción, difracción, etc.

### III.4 ESPECTROS DIRECCIONALES TEÓRICOS DE OLEAJE

Lo que se indica en el subtema III.3, es el tratamiento en el caso del oleaje observado en un punto. Sin embargo en caso de considerar la transformación de oleaje con propagación, refracción, difracción, etc., se necesita describir la situación en que el oleaje se propaga en el plano. Al mirar el oleaje real, la cresta de la ola no sigue continuamente, sino que se corta a un valor menor de la longitud de ola y cada cresta de ola tiene la dirección mutuamente diferente. La columna de las olas irregulares tal como se presentan en la Figura II.1 se ha podido considerar como la suma de las olas de componentes infinitos, que se han inducido en la Figura III.3.

Tomándolo en forma extensiva, se puede considerar como el resultado de la superposición de las olas infinitas de la amplitud pequeña con dirección diferente, la cual se puede expresar en la forma siguiente:

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[(\mathfrak{R}_n \cos \theta)x + (\mathfrak{R}_n \sin \theta)y - 2\pi f_n t + \varepsilon_n] \dots \dots \dots (III.13)$$

Donde:

$\theta_n =$  La dirección de propagación de ola con número  $n$ .

$\mathfrak{R}_n =$  El número de ola correspondiente a la frecuencia de ola con número  $n$ .

$$\mathfrak{R}_n = \frac{2\pi}{L_n}$$



La energía del oleaje correspondiente, contiene su componente no sólo con frecuencia diferente, sino también con dirección diferente de propagación, por lo tanto se considera el componente de ola con la frecuencia  $f_n = f \sim f + \delta f$  y la dirección  $\theta_n = \theta \sim \theta + \delta \theta$  la energía de la cual se expresa como sigue:

$$\sum_f^{f+\delta f} \sum_\theta^{\theta+\delta\theta} \frac{1}{2} a_n^2 = S(f_n, \theta_n) \delta f \delta \theta \dots \dots \dots (III.14)$$

Este  $S(f, \theta)$  es el espectro general de oleaje, llamado espectro de bi-dimensiones o espectro direccional, mientras el de la ecuación (III.2) se llama espectro frecuencial.

El espectro direccional se expresa frecuentemente separado por la conveniencia con el espectro frecuencial  $S(f)$  y la función direccional de distribución  $G(\theta)$  es:

$$\left. \begin{aligned} S(f, \theta) &= S(f)G(\theta) \\ \int_{-\pi}^{\pi} G(\theta) d\theta &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III.15)$$

Por la forma de función  $G[\theta]$ , se considera como sigue:

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta; \quad \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0; & \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III.16)$$

O la forma con  $\cos^{2S} \left( \frac{\theta}{2} \right)$ , relacionada no sólo a  $\theta$  sino también a  $f$ .

a) *Espectro direccional de oleaje propuesto por Mitsuyasu*

Mitsuyasu, H. planteó el espectro direccional de oleaje en base al resultado de la observación detallada usando un ológrafo de tipo "cloverleaf buoy" (boya en forma de trébol) cuya función direccional es la siguiente:

$$G(f, \theta) = G_0 \cos^{2S} \left( \frac{\theta}{2} \right) \dots \dots \dots (III.17)$$

Donde:

$$G_0 = \text{es una constante para satisfacer } \int G(f, \theta) d\theta = 1$$

Por lo tanto:

$$G_0 = \left[ \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^{2S} \left( \frac{\theta}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \dots \dots \dots (III.18)$$

Si:

$$\theta_{\min} = -\pi \text{ y } \theta_{\max} = \pi, G_0$$

Entonces se puede calcular de la forma siguiente:

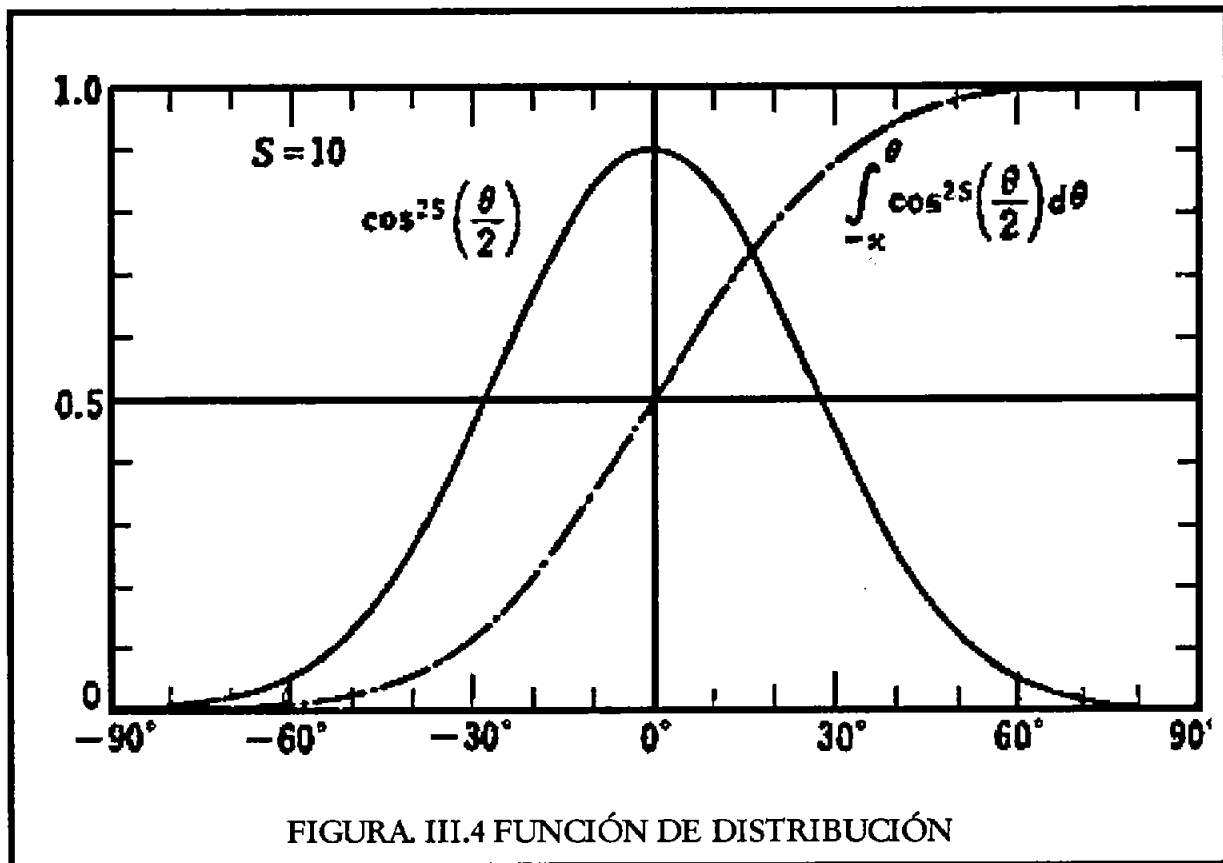
$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2S-1} \frac{\Gamma^2(S+1)}{\Gamma(2S+1)} \dots \dots \dots (III.19)$$

Donde:

$\Gamma =$  es la función de gama.

Y si  $S = 10, G = 0.9033$  por otra parte la función direccional  $\cos^{2S}(\theta/2)$ , se puede expresar en la línea continua mostrada en la Figura III.4, en la cual se expresa el valor integrado entre  $\theta = -\pi$  y  $\pi$  de  $G(f, \theta)$  por la línea punteada.

Se encuentra en dicha línea punteada que en el caso de esta función direccional, alrededor de 80% de energía se contiene entre  $\theta = +30^\circ$  y  $-30^\circ$



La propuesta por Mitsuyasu, tiene la característica propia en el tratamiento del parámetro  $S$  que representa el grado concentrado de la función direccional y el parámetro  $S$  tiene su valor máximo alrededor de la frecuencia en que hay la mayor energía de espectro frecuencial, saliendo del punto,  $S$  se disminuye gradualmente; es decir alrededor del mayor de  $S(f)$

Dicha fórmula original por Mitsuyasu es destinada a "oleaje de viento" en la cual se ha relacionado con la velocidad de viento  $U$ .

Sin embargo, la forma de dicha expresión es inconveniente para usarse en el campo de la ingeniería, por lo que Goda cambió la fórmula original a la siguiente, teniendo  $S_{m\acute{a}x}$ , el mayor de  $S$  por el parámetro principal:

$$S = \begin{cases} S_{m\acute{a}x} \left( \frac{f}{f_p} \right)^5; & f \leq f_p \\ S_{m\acute{a}x} \left( \frac{f}{f_p} \right)^{-2.5}; & f \geq f_p \end{cases} \dots\dots\dots (III.20)$$

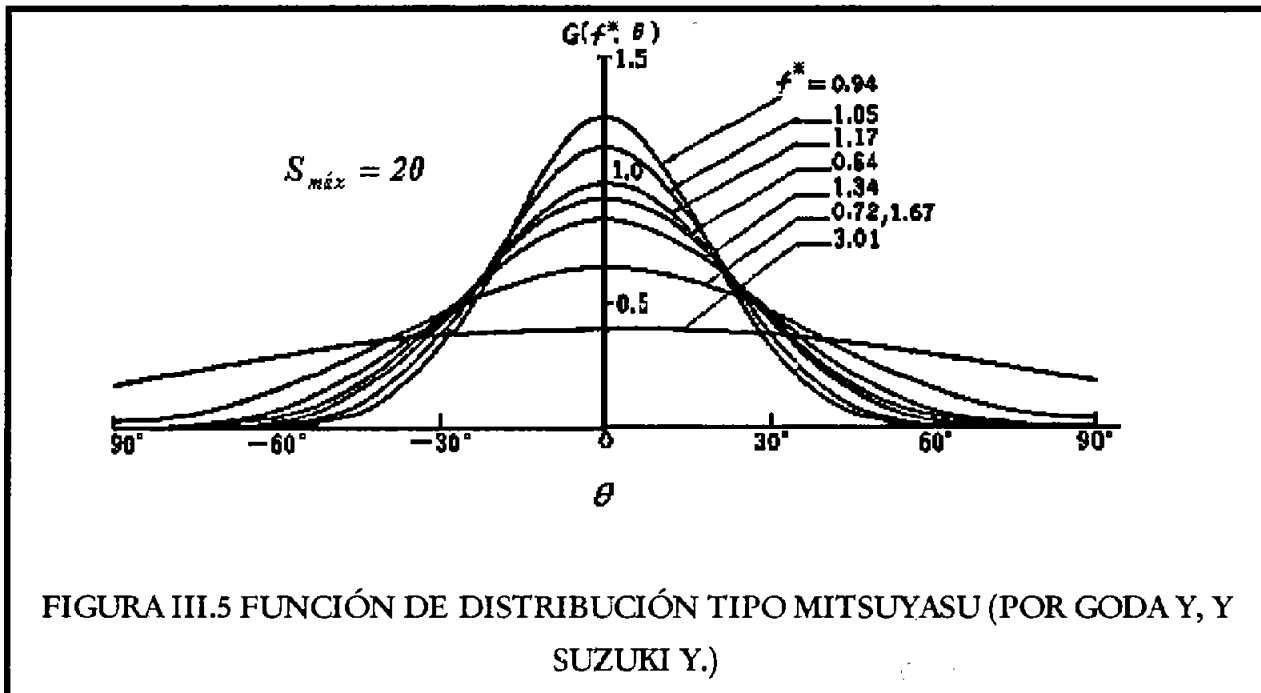
Donde:

$f_p$  = es la frecuencia en donde hay la mayor energía del espectro frecuencial y puede calcularse por la ecuación siguiente:

$$f_p = \left( \frac{1}{1.05T_{1/3}} \right) \dots\dots\dots (III.21)$$

Por ejemplo, calculando la función direccional por cada frecuencia non-dimensional y  $f_s = \frac{f}{f_p}$  en caso de  $S_{m\acute{a}x} = 20$  el resultado se gráfica de la forma indicada en la Figura III.5, donde la

extensión de distribución direccional de oleaje se ha considerado como  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  valor de  $G_\theta$  se ha obtenido por cálculo numérico.



b) Estimación sobre el parámetro de grado de concentración direccional de  $S_{máx}$ .

La característica del espectro direccional tiene una influencia grande en la refracción y la difracción del oleaje, por lo que es necesario estimar cuidadosamente el parámetro  $S_{máx}$  que representa el mayor grado de concentración de la distribución direccional.

Se ha aclarado, en el resultado de la observación por Mitsuyasu, que  $S_{máx}$  sigue aumentando cuanto más disminuye el valor de  $\frac{2\pi f_p U}{g}$ , un parámetro indicando el grado de desarrollo de "oleaje de viento", lo que se expresa en la ecuación siguiente:

$$S_{máx} = 11.5 \left[ \frac{2\pi f_p U}{g} \right]^{-2.5} \dots \dots \dots (III.22)$$

Donde:

$U$  = es la velocidad del viento.

Por otra parte, según las ecuaciones relativas al desarrollo de "wind wave" (oleaje con viento) por Wilson W. S., que se usan popularmente en el caso de la predicción del oleaje, la disminución de

$\frac{2\pi f_p U}{g}$  se puede relacionar con la de  $\frac{H_0}{L_0}$  la esbeltez de la ola profunda

$$\frac{gH_{1.3}}{U^2} = 0.30 \left\{ 1 - \frac{1}{\left[ 1 + 0.004 \left( \frac{gF}{U^2} \right)^{1.2} \right]^2} \right\}$$

$$\frac{gT_{1.3}}{2\pi U} = 1.37 \left\{ 1 - \frac{1}{\left[ 1 + 0.008 \left( \frac{gF}{U^2} \right)^{1.3} \right]^5} \right\}$$

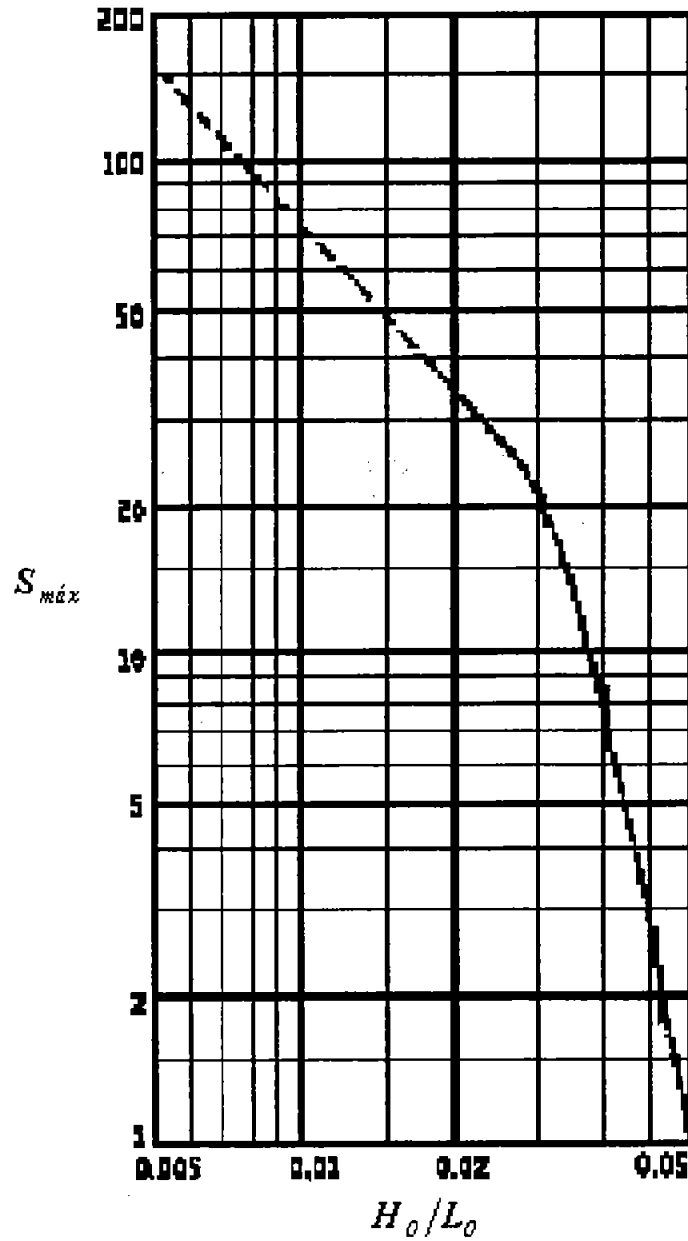


FIGURA III.6 RELACIÓN ENTRE  $S_{máx}$  Y  $H_0/L_0$  (POR GODA Y. Y SUZUKI Y.)

Por lo tanto relacionando las ecuaciones de Wilson W. S. con la ecuación (III.9), se ha calculado la relación entre  $S_{m\acute{a}x}$  y  $H_0/L_0$ , graficada en la Figura III.6.

Sin embargo, al valor  $H_0/L_0 < 0.026$ , no se le puede aplicar dicha ecuación, por lo que la línea punteada, indicada en la Figura III.6 se ha obtenido por la inducción, prolongando la tendencia de variación de inclinación de la línea llena de  $H_0/L_0 \geq 0.026$

La Figura III.6 ha supuesto la relación entre  $S_{m\acute{a}x}$  y  $H_0/L_0$ , por otra parte los datos en caso de oleaje en el mar actual se prevé tener los valores fluctuantes considerablemente arriba o abajo desde esta línea curva supuesta, lo que se debe a que la ecuación por Wilson, W. S. ha sido el promedio de los datos observados.

Por tanto, al considerar la fluctuación de estos datos puede ser mejor que se use el valor siguiente para  $S_{m\acute{a}x}$ , hasta haber sido observado muchos espectros direccionales y aclararse en detalle las características:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{Oleaje de viento} \\ 2) \text{Swell con la distancia corta de decaimiento (esbeltez comparativamente grande)} \\ 3) \text{Swell con la distancia larga de decaimiento (esbeltez pequeña)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_{m\acute{a}x} = 10 \\ S_{m\acute{a}x} = 25 \\ S_{m\acute{a}x} = 75 \end{array} \dots (III.23)$$

El valor estimado  $S_{m\acute{a}x}$  en la ecuación (III.23) ó la Figura III.6 corresponde al del oleaje en aguas profundas.

En la zona de aguas someras donde se construyen las estructuras, por la influencia de refracción, las direcciones de oleaje tienden a uniformarse y las líneas de cresta a unirse lateral y longitudinalmente, cuya transformación varía en forma diferente conforme a la batimetría del fondo del mar, a lo que corresponde la transformación del espectro direccional.



En caso de que la configuración del fondo del mar puede ser como iso-batimétrico lineal, la transformación de la función direccional por traslación de oleaje a la zona de aguas someras, se puede expresar por incremento aparente de  $S_{m\acute{a}x}$  como se muestra en la Figura III.7, en que  $(\alpha_p)_0$  es ángulo incidente del oleaje por la línea iso-batimétrica en la zona de aguas profundas y  $L_0$  indicado en el eje de las abscisas, es la longitud de oleaje profundo correspondiente a período de oleaje significativo.

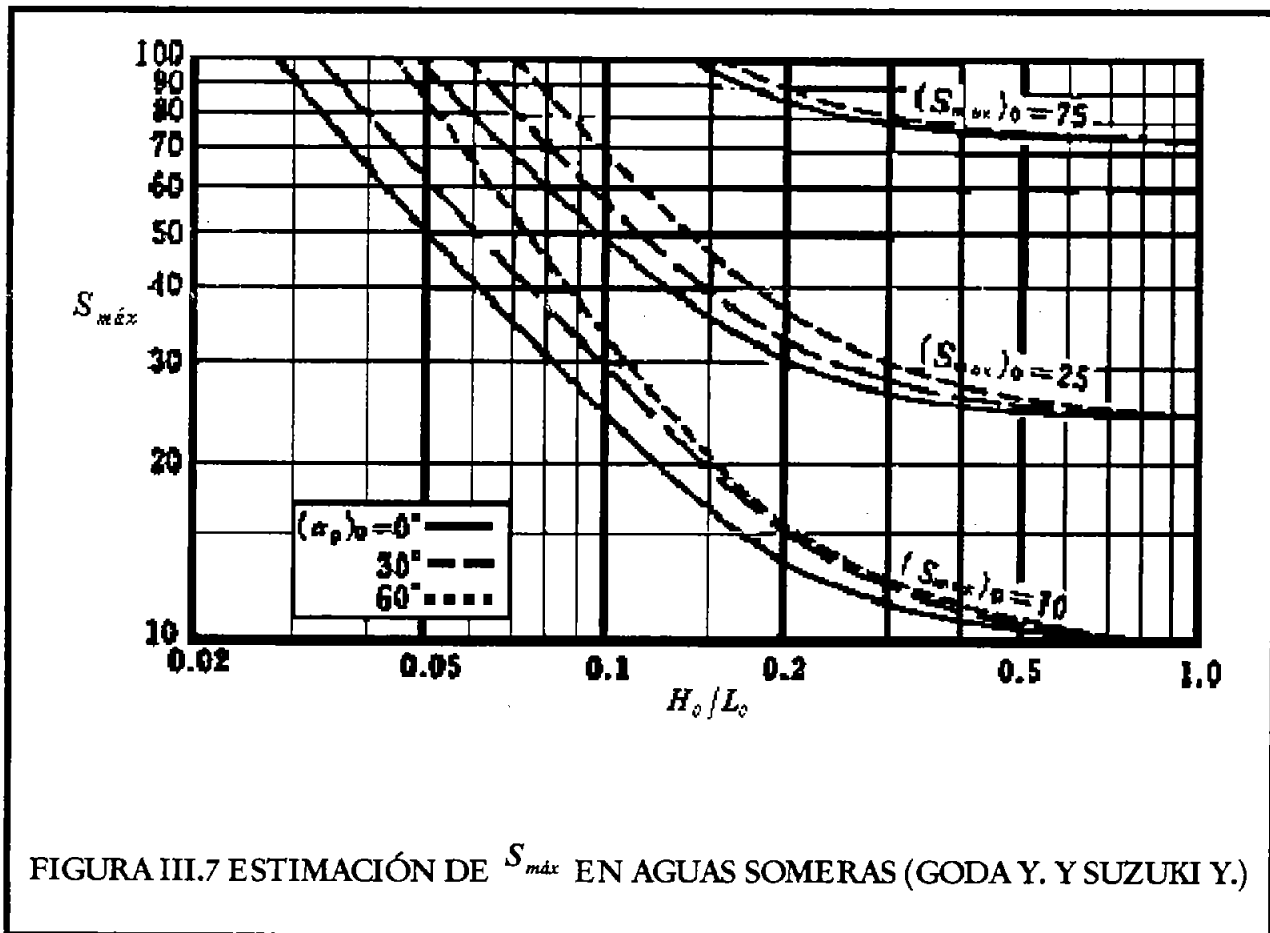


FIGURA III.7 ESTIMACIÓN DE  $S_{m\acute{a}x}$  EN AGUAS SOMERAS (GODA Y. Y SUZUKI Y.)

El resultado de esta calculación indica que la influencia del ángulo incidente  $(\alpha_p)_0$  de oleaje profundo a  $S_{m\acute{a}x}$  es pequeña, por lo que parece que la Figura III.7 se puede aplicar aproximadamente al caso de la configuración general de fondo de mar.

### c) Curva acumulada de energía del oleaje

La característica de espectro direccional se puede expresar distribuyendo la energía de oleaje totalmente por cada dirección. Para este objeto, se define como sigue,  $P_E(\theta)$ , el valor acumulado de proporción de energía:

$$P_E(\theta) = \frac{1}{m_0} \int_{-\pi/2}^{\theta} \int_0^{\infty} S(f, \theta) df d\theta \dots \dots \dots (III.24)$$

Donde:

$m_0$  = indica el valor representativo de la energía total de oleaje y se expresa como sigue:

$$m_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} S(f, \theta) df d\theta \dots \dots \dots (III.25)$$

La razón de que la extensión de la dirección de la componente del oleaje entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  en la definición arriba descrita, se debe a que, en el diseño, desaparece el componente cuya dirección es contraria a la principal.

La Figura III.8 es el resultado del cálculo sobre el valor acumulado de proporción de energía usando la ecuación (III.4) para  $S(f)$ , espectro frecuencial y la ecuación (III.6) para el parámetro del grado de concentración direccional, donde se grafican las curvas acumuladas de la función direccional de  $S_{m\acute{a}x} = 5, 10, 25$  y  $75$  y de SWOP, que será mencionado más adelante.

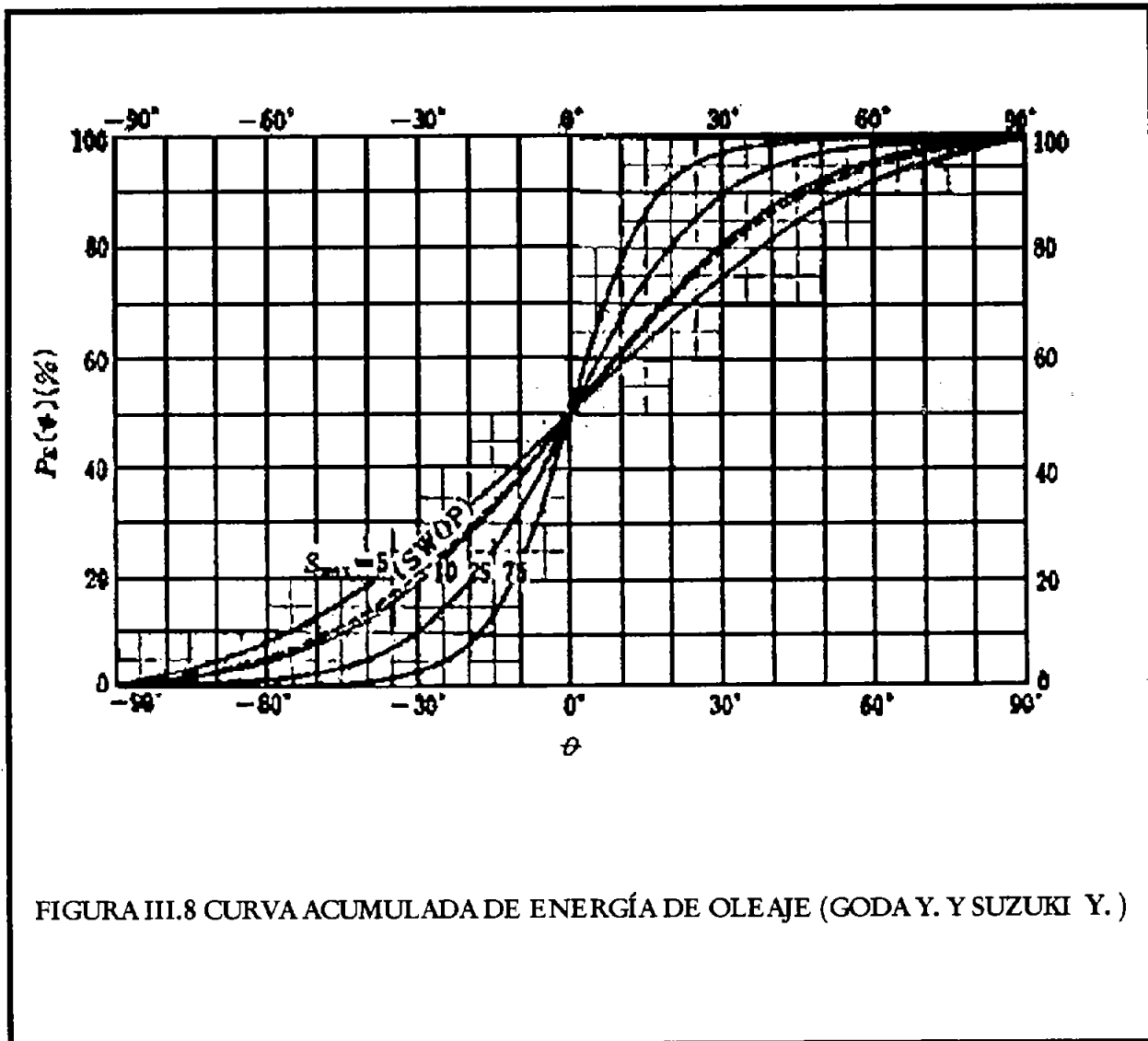


FIGURA III.8 CURVA ACUMULADA DE ENERGÍA DE OLAJE (GODA Y. Y SUZUKI Y.)

### d) Otras funciones direccionales

La forma siguiente de la función direccional del espectro es la que se usó primero:

$$G(f, \theta) = G(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta; & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0; & |\theta| > \pi/2 \end{cases} \dots\dots\dots (III.26)$$

Esta función es conocida por haberse adoptado en el método de PNJ de predicción del oleaje. Por ser sencilla la fórmula, entre las otras, se usa muchas veces, sin embargo, no se ha fundamentado por medio de observaciones.

En cambio, la función direccional siguiente de SWOP, se ha conocido bien por haberse fotografiado estereofónicamente la superficie de mar y analizándolo en diagrama iso-altímetro; se ha obtenido la forma siguiente:

$$G(\omega, \theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \left[ 0.5 + 0.82e^{\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \right]} \right] \cos 2\theta + 0.32e^{\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \right]} \cos 4\theta \right\}; \theta \leq \frac{\pi}{2} \dots (III.27)$$

Donde:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega_0 = \frac{g}{U_{5.0}};$$

Y:

$U_{5.0}$  = la velocidad del viento a 5 metros de altura del nivel del mar.

Esta función direccional tiene la característica de que el componente de oleaje con la frecuencia alta tiene el grado bajo de concentración sobre la dirección, así como en el caso de la función propuesta por Mitsuyasu.

Las funciones direccionales de las ecuaciones (III.26) y (III.27) son casi de la misma forma que la función direccional indicada por Mitsuyasu en el caso de  $S_{m\acute{a}x} = 10$ , por la razón de que se ha supuesto que el oleaje de viento sea de  $S_{m\acute{a}x} = 10$

Aunque la función direccional propuesta por Mitsuyasu cambia característicamente su distribución direccional de energía por frecuencia, si se anula dicha diferencia, la fórmula simplificada en la ecuación (III.28), se puede usar también para expresar la característica direccional de la energía total:

$$G(f, \theta) \equiv G(\theta) = \begin{cases} \frac{2\ell!!}{\pi(2\ell-1)!!} \cos^{2\ell} \theta; & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0; & |\theta| > \pi/2 \end{cases} \dots\dots\dots(III.28)$$

Donde:

$$2\ell!! = 2\ell(2\ell-2)\dots\dots\dots 4 \times 2$$

$$(2\ell-1)!! = (2\ell-1)(2\ell-3)\dots\dots\dots 3 \times 1$$

La relación entre  $\ell$  y  $S_{m\acute{a}x}$  es aproximadamente como sigue:

$$\ell = 0.11S_{m\acute{a}x}; \quad \ell \geq 2 \dots\dots\dots(III.29)$$

Por lo tanto:  $S_{m\acute{a}x} = 25$  y  $75$  que se propusieron en la ecuaci3n (III.24), corresponden a

$\ell = 3$  y  $8$  respectivamente.

## III.5 EJERCICIOS

## Ejercicio III.1

Calcular  $S_{m\acute{a}x}$  en caso de que el oleaje en aguas profundas con  $H_{1,3} = 5\text{m}$  y  $T_{1,3} = 10$  segundos, llegue al lugar en la que se tiene una profundidad  $h = 15\text{metros}$ . Usar Figuras III.6 y III.7.

## SOLUCIÓN:

Calculo de  $L_0$  y la relación  $\frac{H_0}{L_0}$ , para utilizar las Figuras III.6 y III.7

$$L_0 = (1.56)(10^2) = 156\text{metros}$$

$$\frac{H_0}{L_0} = 0.03$$

En la Figura III.6  $S_{m\acute{a}x} = 20$  (en aguas profundas)

En la Figura III.7  $S_{m\acute{a}x} \approx 20 - 50$  (a 10 m de profundidad)

## Ejercicio III.2

Estimar la proporción de la energía contenida entre  $\theta = -15^\circ$   $\theta = 15^\circ$  en caso de  $S_{m\acute{a}x} = 10$  del oleaje. Usar Figura III.8

De la figura III.8 se tiene:

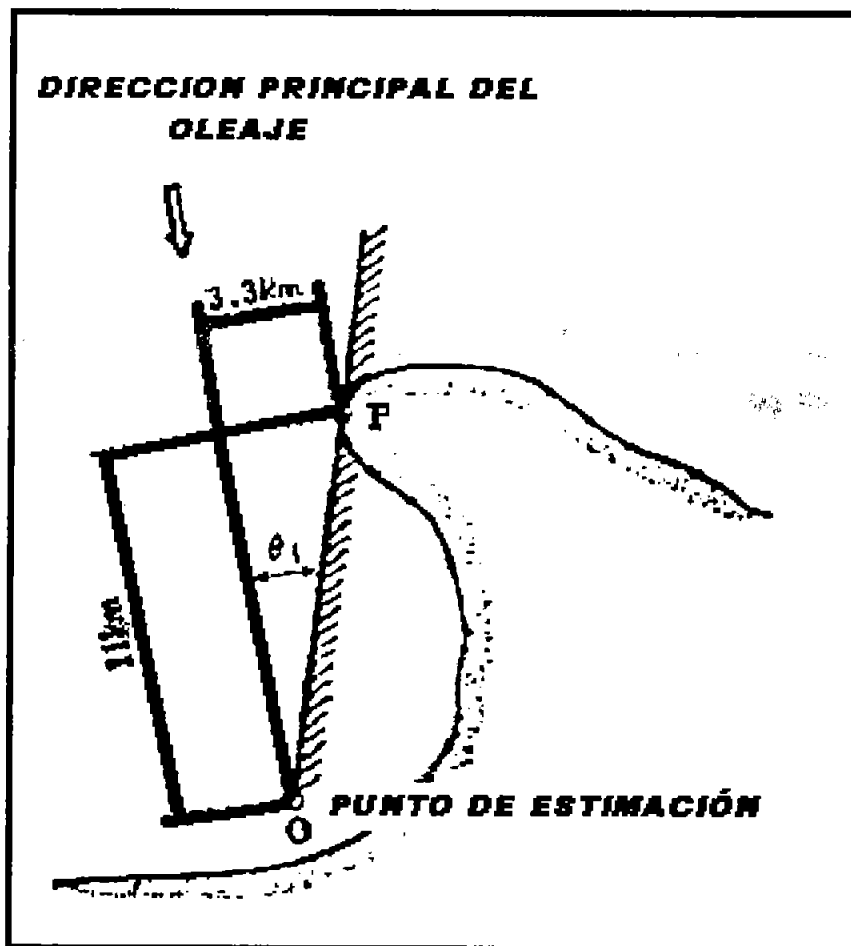
$$P_E(15^\circ, S_{m\acute{a}x} = 10) = 67\%$$

$$P_E(-15^\circ, S_{m\acute{a}x} = 10) = 33\%$$

$$\Delta P_E(\theta = -15^\circ - 15^\circ) = 34\%$$

## Ejercicio III.3

Estimar la proporción de la altura de oleaje de oleaje de viento en el punto 0 en aguas profundas de la siguiente figura:



Solución:

$$\theta_1 \tan^{-1} \frac{3.3}{11} = 17^\circ$$

$$\Delta P_E (\theta = -90^\circ - 17^\circ) = 0.685$$

$$K_d = \frac{H_d}{H_0} = \sqrt{\Delta P_E} = 0.83$$



# CAPITULO IV



## ANÁLISIS DEL OLEAJE IRREGULAR.

## IV. ANÁLISIS DE OLEAJE IRREGULAR

### IV.1 ANÁLISIS DE CANTIDAD ESTADÍSTICA DE OLEAJE

#### IV.1.1. *Análisis De Registro Análogo*

El registro del ológrafo se obtiene generalmente por la forma sucesiva de olas, impresas con un registrador con pluma. A un registro como el anterior se le llama análogo. Cuando se hace análisis sobre oleaje irregular, es mejor transformar a un registro digital y después calcular varios valores estadísticos y espectrales.

Sin embargo, a veces hay que leer un registro análogo de oleaje para tener varias informaciones, por lo tanto, aquí se explican los métodos analíticos del caso arriba mencionado:

- A. *En el registro de oleaje se traza la línea del nivel medio de mar, a ojo. En el caso de fluctuar lentamente, el nivel medio de mar por la influencia de la marea, es adecuado aplicar una línea inclinada o una línea curva.*
- B. *Definir cada ola por el método de "zero-up-cross" por lo que obedeciendo exactamente a la línea cero, que se ha determinado, hay que contar todas las olas que la tracen aún cuando sean pequeñas.*
- C. *Leyendo la altura y el período de cada ola para ponerlos en la forma indicada en la tabla IV.1, se calculan  $H_{m\acute{a}x}, T_{m\acute{a}x}, H_{1/10}, T_{1/10}, H_{1.3}, T_{1.3}, \bar{H}, \bar{T}$ .*

Entre los valores arriba mencionados, la ola significativa es más importante, por lo que si queremos comprender solamente la situación de oleaje, con el valor de la ola significativa es suficiente.

<i>NUMERO DE OLA</i>	<i>H (m)</i>	<i>T (s)</i>	<i>ORDEN MAYOR</i>
1	0.54	4.2	21
2	2.05	8.0	12
3	4.52	6.9	2
4	2.58	11.9	8
5	3.20	7.3	4
6	1.87	5.4	17
7	1.90	4.4	16
8	1.00	5.2	20
9	2.05	6.3	13
10	2.37	4.3	10
11	1.03	6.1	19
12	1.95	8.0	15
13	1.97	7.6	14
14	1.62	7.0	18
15	4.08	8.2	3
16	4.89	8.0	1
17	2.43	9.0	9
18	2.83	9.2	7
19	2.94	7.9	6
20	2.23	5.3	11
21	2.98	6.9	5

TABLA IV.1 REGISTRO DE OLEAJE

Existe un método llamado "EL MÉTODO DE TUCKER". Este método tiene su base teórica, en la teoría de la distribución de Rayleigh para el espectro con banda estrecha, cuyo método concreto es el siguiente:

1. Se traza la línea de nivel medio de mar y se leen la amplitud del máximo positivo A, la amplitud del segundo máximo positivo B, y la amplitud del máximo negativo C y la amplitud del segundo máximo negativo D como se observa en la Figura IV.1.

2. Se definen las alturas siguientes usando A, B, C y D

$$H_1 = A + C, \quad H_2 = B + D \dots \dots \dots (IV.1)$$

3. La desviación estándar de oleaje  $\eta_{rms}$ , se puede deducir mediante la ecuación siguiente:

$$\eta_{rms} = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \dots \dots \dots (IV.2)$$

Donde:

$$\eta_1 = \frac{H_1}{2\sqrt{2InN_0} \left[ 1 + \frac{0.289}{InN_0} - \frac{0.249}{(InN_0)^2} \right]} \dots \dots \dots (IV.3)$$

$$\eta_2 = \frac{H_2}{2\sqrt{2InN_0} \left[ 1 - \frac{0.211}{InN_0} - \frac{0.103}{(InN_0)^2} \right]} \dots \dots \dots (IV.4)$$

4. Si se puede tener el valor  $\eta_{rms}$  (es igual a  $m_0^{1/2}$ ), también se pueden deducir  $H_{1/10}, H_{1.3}, \bar{H}$ , etc

Por otra parte, el promedio de período  $\bar{T}$  se puede calcular dividiendo el tiempo de registro entre  $N_0$ .

Los valores de  $H_{m\acute{a}x}, T_{m\acute{a}x}$ , se obtienen directamente del registro del oleaje.

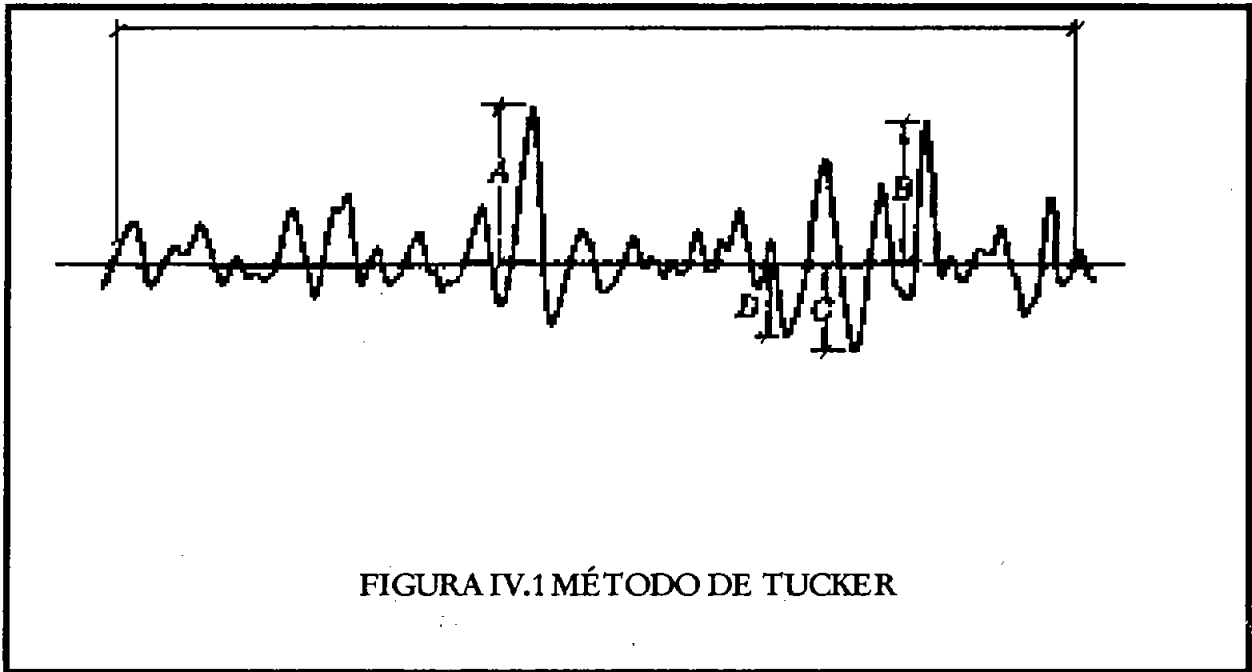


FIGURA IV.1 MÉTODO DE TUCKER

La Figura IV.2 es un ejemplo en que el método de Tucker se ha aplicado a los registros de la configuración de oleaje y por la razón de que " $\eta$ " ha tenido la distribución más extendida que la normal. La ecuación (IV.2) ha tendido a dar los valores mayores que en actual y se ha informado que será adecuado usarse 0.88 veces del valor obtenido por la ecuación (IV.2) para estimar  $\eta_{rms}$ , etc.

Además, este método usa solamente 4 amplitudes mayores, por lo tanto tiene gran variedad estadística del valor estimado y es necesario considerar aproximadamente el 10% de la desviación estándar aún haciéndose la corrección arriba dicha.

Basta solamente calcular las dimensiones de las olas representativas para deducir la situación de oleaje por el registro de ológrafo.

Sin embargo, para investigar las características estadísticas más detalladas del oleaje, será necesario haber calculado las distribuciones de altura y período de ola respectivamente y la distribución conjunta de los dos, en el caso de que sea conveniente procesar los datos no por los valores absolutos sino en forma non-dimensionada dividida por  $\bar{H}$  y para sumar muchos datos.

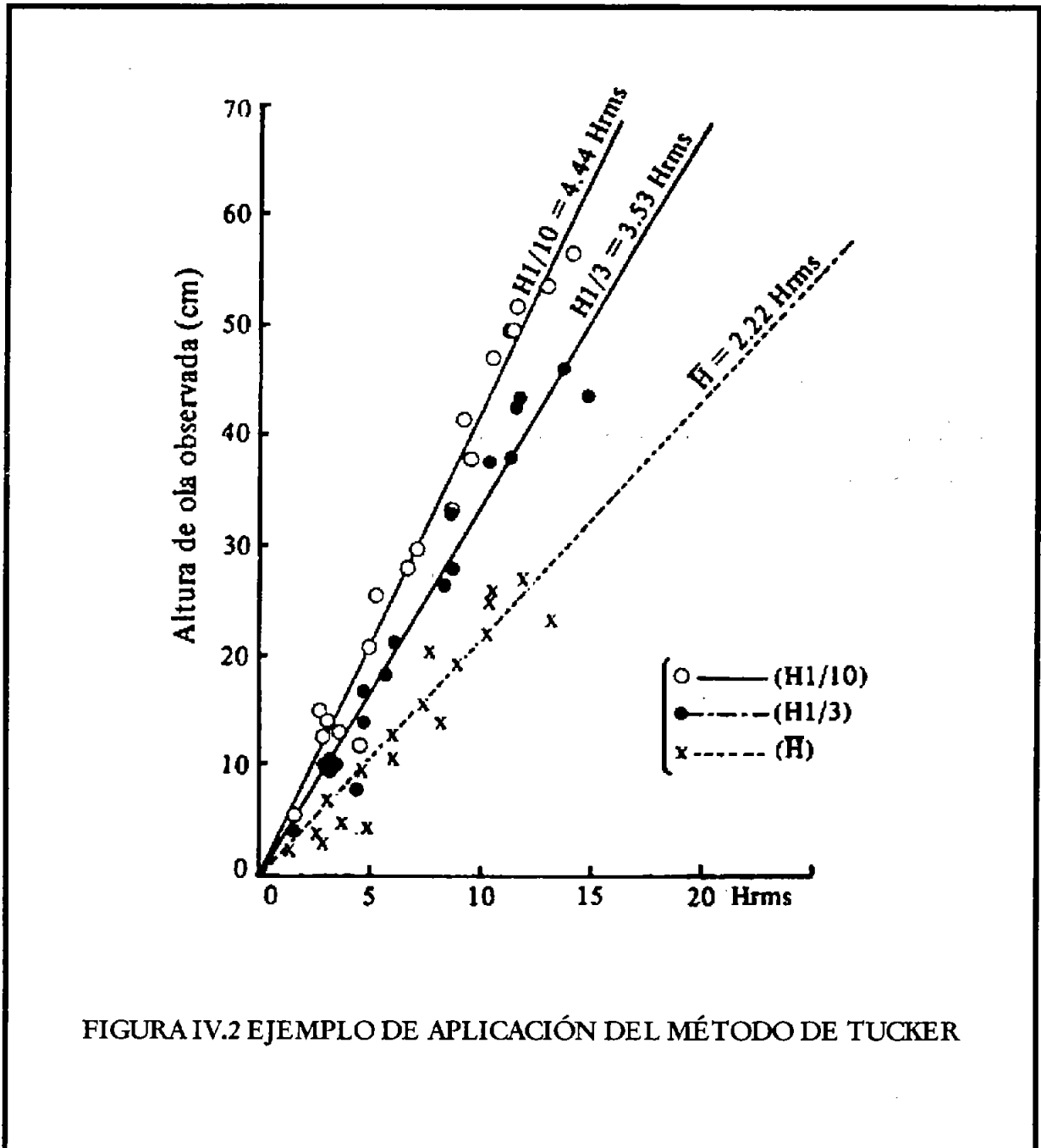


FIGURA IV.2 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO DE TUCKER

## IV. 1.2. ANÁLISIS DE REGISTRO DIGITAL

A la lectura del registro del ológrafo cada tiempo constante definido, y la transformación del dato al valor digital, se llama registro digital.

Este registro digital permite que por medio de la computadora, se calculen diversos valores estadísticos del oleaje más rápidamente.

En el cálculo del espectro es indispensable transformar a un valor digital. Tal transformación es preferible hacerse directamente en el proceso de salida del aparato de medición, porque si se transforma posteriormente, de análogo a digital, los datos que se registran primero en el oscilógrafo o registrador de tipo análogo de datos, se disminuye la precisión por la influencia del error de lectura y/o de ruido.

En la Figura IV.3 se muestra un ejemplo del procedimiento en que se analizan los datos digitales del oleaje, usando la computadora:

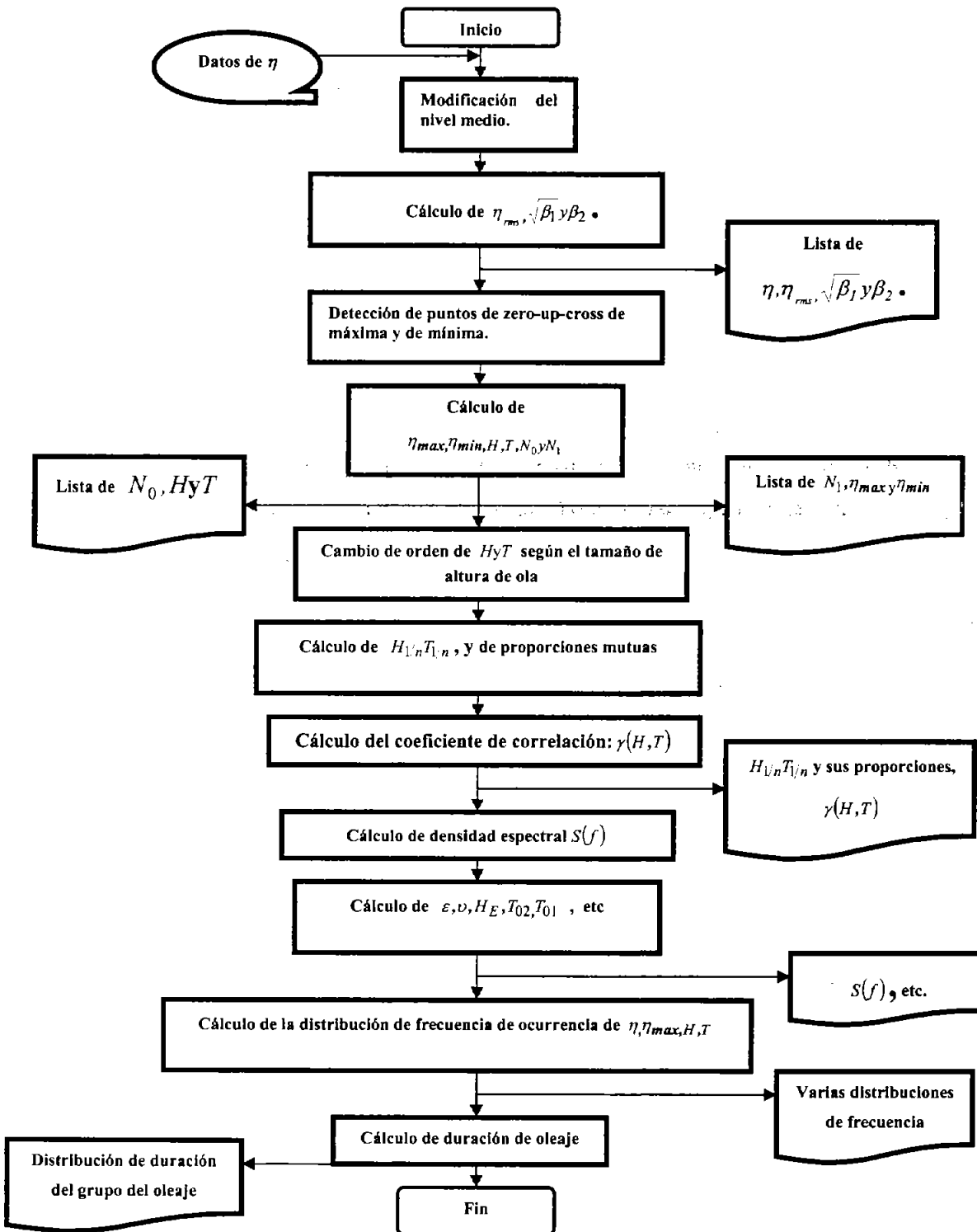


FIGURA IV.3 EJEMPLO DEL PROCEDIMIENTO DEL ANÁLISIS DEL OLAJE.



(1) Longitud de tiempo de registro e intervalo de tiempo del muestreo del registro.

Normalmente la longitud del tiempo de registro en cada observación del oleaje en campo, es de 20 minutos, lo que se ha determinado por dos puntos de vista:

- 1º.** Esta es la longitud de tiempo que se contienen 120 olas, cuando el período medio del oleaje es 10 segundos, y en consideración de la variedad estadística, pueden considerar que se mantiene la precisión necesaria prácticamente, si se contienen más de 100 olas.
- 2º.** Por otra parte, si se destina la duración más larga de observación, ocurrirá la situación de que entre esta duración cambia la característica del oleaje, por la consideración de su variedad temporal.

Sin embargo, en ensayos hidráulicos con oleaje irregular, es deseable generar aproximadamente más de 200 olas según el objetivo de la investigación.

También, en la observación del oleaje en campo, cuando se piensa que el oleaje es, aproximadamente estacionario, en muy largo tiempo como en caso de "swell (oleada)", será mejor registrarlo más de 30 minutos.

Por otra parte, es mejor cuanto más corto sea el muestreo de registro de la configuración de oleaje, por ejemplo menos de una décima del período de ola significativa y si es posible como una vigésima. No obstante, aunque se hace más corto el muestreo que el mencionado anteriormente, la información no aumenta demasiado, solamente aumenta la cantidad de datos y generalmente no es recomendable.

Si se hace más largo el muestreo, se tendrá problemas. Por ejemplo, dejar pasar inadvertidas las olas menores, estimar menos los máximos positivo y negativo de la superficie de oleaje, resultando calcular las alturas más pequeñas que las actuales. Una vez que se determina el largo y el muestreo temporal de registro, se calcula el número de los datos en cada observación.

Cuando esta cantidad es difícil reprocesar, para el cálculo se incrementa el muestreo temporal o se disminuye el largo del registro.

(2) Modificación del nivel medio de mar

La modificación más simple se realiza por la *media aritmética*. Sin embargo, si se considera que hay influencia de la marea, suponiendo que el nivel medio de mar varía en forma de línea recta o en forma de línea parabólica, se determinan las constantes de las líneas por *el método de mínimos cuadrados*.

La modificación, en caso de suponer la variación de línea, se hace como sigue:

$$\bar{\eta} = A_0 + A_1 n; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad \dots \dots \dots (IV.5)$$

Donde:

$$A_0 = \frac{N_2 Y_0 - N_1 Y_1}{N_0 N_2 - N_1^2}, \quad A_1 = \frac{N_0 Y_1 - N_1 Y_0}{N_0 N_2 - N_1^2} \quad \dots \dots \dots (IV.6)$$

$$N_r = \sum_{n=1}^N \eta^r, \quad Y_r = \sum_{n=1}^N \eta^r \eta_n \quad \dots \dots \dots (IV.7)$$

$N$  = número de datos

En el caso de suponer la variación de línea parabólica:

$$\bar{\eta} = B_0 + B_1\eta + B_2\eta^2; \quad \eta = 1, 2, 3, \dots, N \quad \dots\dots\dots(IV.8)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{\Delta} [Y_0(N_2N_4 - N_3^2) + Y_1(N_1^2N_3 - N_1N_4) + Y_2(N_1N_3 - N_2^2)] \\ B_1 &= \frac{1}{\Delta} [Y_0(N_2N_3 - N_1N_4) + Y_1(N_1N_2 - N_0N_3) + Y_2(N_1N_2 - N_0N_3)] \\ B_2 &= \frac{1}{\Delta} [Y_0(N_1N_3 - N_2^2) + Y_1(N_1N_2 - N_0N_3) + Y_2(N_0N_2 - N_1^2)] \\ \Delta &= N_0N_2N_4 + 2N_1N_2N_3 - N_2^3 - N_0N_3^2 - N_1^2N_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots(IV.9)$$

En caso de que se sobrepongan la ondulación notable con el período largo al registro, el filtro numérico es uno de los métodos que pueden removerlo.

De todos modos, la modificación del nivel medio de mar es indispensable en el procedimiento de los datos de oleaje.

(3) El tratamiento de los puntos del método "zero-up-cross", máximo y mínimo.

Los puntos de 'zero-up-cross' en el registro digital se juzgan por la condición siguiente:

$$(\eta_i)(\eta_{i+1}) < 0 \quad \text{y} \quad \eta_{i+1} > 0 \dots\dots\dots(IV.10)$$

Donde:

$\eta_i$  es el valor del dato con número  $i$  (se ha modificado del nivel medio de mar).

El lugar (el tiempo) del punto de "zero-up-cross" se calcula por repartición proporcional entre  $\eta_i$  y  $\eta_{i+1}$  usando dos puntos colindantes de 'zero-up-cross' obtenido del procedimiento arriba mencionado, se calcula el período de 'zero-up-cross' de cada ola.

A continuación, la condición del punto máximo de la configuración de oleaje se da enseguida:

$$\eta_{i-1} < \eta_i \quad \text{y} \quad \eta_i > \eta_{i+1} \dots \dots \dots (IV.11)$$

El tiempo en el que ocurre el valor máximo y su desplazamiento, se pueden deducir por la aplicación de la línea parabólica, es decir:

$$\eta_{max} = C - \frac{B^2}{4A} \quad , \quad t_{max} = t_i - \frac{\Delta t B}{2A} \dots \dots \dots (IV.12)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}) \\ B &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_{i-1}), C = \eta_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (IV.13)$$

Cuando se calcula la altura de "zero-up-cross" al principio, se buscan dos puntos del desplazamiento máximo y el mínimo entre dos puntos colindantes de 'zero-up-cross' y aplicando las ecuaciones. (IV.12) y (IV.13) se pueden deducir  $\eta_{max}$  y  $\eta_{min}$ .

Por tal procedimiento, se puede reducir la disminución aparente de la altura de ola, aún ampliándose en cierto grado el intervalo temporal de lectura de la configuración del oleaje.

(4) Cálculo de coeficiente de correlación entre la altura y el período de oleaje.

Este dato no siempre se necesita, no obstante será mejor calcularlo como una información para diversas investigaciones, ya que se ha conocido que hay correlación alta entre sí. En este caso, será deseable calcular el coeficiente de correlación no sólo para todas las olas, sino también para las olas que se han destinado para calcular la ola significativa.

(5) Cálculo de diversas cantidades referentes al espectro.

Los valores de espectro frecuencial se pueden deducir por el método explicado en la sección siguiente, por cuyos resultados, se calculan los parámetros del ancho del espectro es:

$$\varepsilon = \left[ 1 - \frac{m_2^2}{(m_0 m_4)} \right]^{1/2}, \quad \gamma = \left[ 1 - \frac{m_0 m_2}{(m_1^2 - 1)} \right]^{1/2},$$

El paramétrico del ancho de agudeza de cresta de espectro es:

$$Q_p = \left[ 1 - \frac{2}{m_0^2} \int_0^\infty f S^2(f) df \right]$$

Ellos se utilizan en el estudio en teoría de cantidades estadísticas de oleaje.

(6) Expresión de la distribución de ocurrencia.

Si se han obtenido las distribuciones de la ocurrencia en tabla sobre  $\eta_i, \eta_{m\acute{a}x}, H$  y  $T$ , tabla de correlación entre  $H$  y  $T$  es posible compararla con las teorías ya mencionadas. La distribución de estadísticas ocurrencia es sobre los valores normalizados usando el valor medio. La forma posterior se usa, por ejemplo, puede expresar en dos formas, es decir, una es sobre los valores absolutos de las cantidades estadísticas, cuando se calculan las sobre muchos registros.

## IV.2 ANÁLISIS DE ESPECTRO FRECUENCIAL

### IV.2.1. TEORÍA DE DEDUCCIÓN DEL ESPECTRO

La fórmula fundamental para calcular el espectro frecuencial por  $\eta(t)$ , la configuración del oleaje observada en un punto es la ecuación (III.2), fórmula de definición del espectro.

Sin embargo esta ecuación contiene la amplitud  $a_n$  de las olas componentes infinitas y en esta forma no se puede proceder en la actual.

Aquí, se trata de deducir el espectro original del oleaje que ha producido la configuración de la superficie del mar cuando se ha dado la serie temporal de configuración  $\eta(\Delta t), \eta(2\Delta t), \dots, \eta(N\Delta t)$ . Por conveniencia, se supone que  $N$  es número par.

Si se hace el análisis armónico con la serie temporal de la configuración de oleaje, se puede expresar como la serie finita de Fourier:

$$\eta(t_s) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\mathfrak{R}=1}^{N/2} \left( A_{\mathfrak{R}} \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_s + B_{\mathfrak{R}} \operatorname{sen} \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_s \right) + \frac{A_{N/2}}{2} \cos \pi t_s, \dots (IV.14)$$

Donde:

$$t_s = \frac{t}{\Delta t}$$

$$t_s = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

Si se definen los coeficientes de Fourier en la ecuación (IV.14) como sigue:  $\eta(t_s)$  coincide con  $\eta(\eta\Delta t)$ , la configuración original del oleaje en cada punto,  $t_s = 1, 2, 3, 4, \dots, N$

$$A_{\mathfrak{R}} = \frac{2}{N} \sum_{t_*=1}^N \eta(t_*) \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_*; \quad 0 \leq \mathfrak{R} \leq N/2 \dots\dots\dots (IV.15)$$

$$B_{\mathfrak{R}} = \frac{2}{N} \sum_{t_*=1}^N \eta(t_*) \text{sen} \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_*; \quad 1 \leq \mathfrak{R} \leq N/2 - 1 \dots\dots\dots (IV.16)$$

Lo que no se debe olvidar, cuando se hace el análisis armónico con la variación irregular, es que el objeto mismo es la variable de probabilidad y de vez en cuando que se disponga la muestra con la serie temporal diferente  $\eta(t)$  se obtienen los valores diferentes de  $A_{\mathfrak{R}}$  y  $B_{\mathfrak{R}}\eta(t)$ , se puede considerar como proceso de probabilidad estacionaria que tiene la Distribución Normal.

Cuando N, el número de datos leídos de la configuración de oleaje es bastante grande,  $A_{\mathfrak{R}}$  y  $B_{\mathfrak{R}}$  obedecen a la distribución de normal con cero de promedio por teorema central de limite y su varianza se puede calcular como sigue:

Primero se calcula  $A_{\mathfrak{R}}^2$  en caso de  $\mathfrak{R} \neq 0$ ,  $\frac{N}{2}$

$$A_{\mathfrak{R}}^2 = \frac{4}{N^2} \left\{ \sum_{t_*=1}^N \eta(t_*) \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_* \right\}^2 =$$

$$A_{\mathfrak{R}}^2 = \frac{4}{N^2} \left\{ \sum_{t_*=1}^N \eta^2(t_*) \left( \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_* \right)^2 + 2 \sum_{t_*=1}^{N-1} \sum_{t_*=1}^{N-\zeta} \eta(t_*) \eta(t_* + \zeta) \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_* \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} (t_* + \zeta) \right\} \dots\dots\dots (IV.17)$$

Aquí, se supone que  $N \rightarrow \infty$ , se trata de calcular la esperanza; en esta condición, la esperanza de:

$$\left( \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_* \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Y:

$$\left( \cos \frac{2\pi \mathfrak{R} t_*}{N} \right) \left( \operatorname{sen} \frac{2\pi \mathfrak{R} t_*}{N} \right) = 0$$

Por lo tanto:

$$E[A_{\mathfrak{R}}^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N^2} \left\{ \sum_{t_*=1}^N \eta^2(t_*) + 2 \sum_{t_*=1}^{N-1} \sum_{t_*=1}^{N-t_*} \eta(t_*) \eta(t_* + \zeta_*) \cos \frac{2\pi \mathfrak{R}}{N} t_* \right\} \dots \dots (IV.18)$$

Introduciendo la función de auto-correlación:

$$E[A_{\mathfrak{R}}^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \left\{ \psi(0) + 2 \sum_{\zeta_*=1}^{N-1} \psi(\zeta_*) \cos \frac{2\pi \mathfrak{R}}{N} t_* \right\} \dots \dots \dots (IV.19)$$

La ecuación arriba mencionada se puede transformar como sigue, ya que  $\cos \theta$  es la función par de  $\theta$ .

$$E[A_{\mathfrak{R}}^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{\zeta_*=-\infty}^{\infty} \psi(\zeta_*) \cos \frac{2\pi \mathfrak{R}}{N} t_* \dots \dots \dots (IV.20)$$

$$E[A_{\mathfrak{R}}^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N \Delta t} \sum_{\zeta_*=-\infty}^{\infty} \psi(\zeta_*) (\cos 2\pi \mathfrak{f}_{\mathfrak{R}} \zeta_*) \Delta t$$

Donde:

$$f_{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{R}}{(N * \Delta t)} = \frac{\mathfrak{R}}{t_0}, \quad \zeta_* = \zeta_* \Delta t \dots \dots \dots (IV.21)$$

$t_0$  = es la duración registrada de oleaje.



Por la función de Wiener-Khintchine, se puede encontrar la relación siguiente entre la varianza de  $A_{\mathfrak{R}}$  y la función de densidad del espectro:

$$E[A_{\mathfrak{R}}^2] = \frac{2}{N\Delta t} S_0(f_{\mathfrak{R}}) = \frac{1}{N\Delta t} S(f_{\mathfrak{R}}); \quad 1 \leq \mathfrak{R} \leq \frac{N}{2} - 1 \dots \dots \dots (IV.22)$$

Donde:

$S_0(f)$  es la función de densidad del espectro definido entre  $-\infty < f < \infty$  y es igual a:

$$\frac{S(f)}{2}$$

Asimismo, la varianza de  $B_{\mathfrak{R}}$  también se puede calcular con:

$$E[B_{\mathfrak{R}}^2] = \frac{1}{N\Delta t} S(f_{\mathfrak{R}}); \quad 1 \leq \mathfrak{R} \leq \frac{N}{2} - 1 \dots \dots \dots (IV.23)$$

$(A_0)(A_{N/2})$  se introducen como sigue:

$$E[A_0^2] = \frac{2}{N\Delta t} S(f_0), \quad E[A_{N/2}^2] = \frac{2}{N\Delta t} S(f_{N/2}) \dots \dots \dots (IV.24)$$

Por lo que se ha mencionado anteriormente, se ha deducido que los coeficientes de Fourier del oleaje irregular, son las variables aleatorias de la distribución normal con el valor de la media igual a

cero y la varianza  $\frac{S(f)}{(N)(\Delta t)}$ .

Ahora, para saber la correlación entre  $A_{\mathfrak{R}}$  y  $B_{\mathfrak{R}}$  se calcula la covarianza:

$$E[A_{\mathfrak{R}}B_{\mathfrak{R}}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} \left\{ \sum_{t_*=1}^N \eta(t_*) \cos \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_* \right\} \left\{ \sum_{t_*=1}^N \eta(t_*) \sen \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} t_* \right\}$$

$$E[A_{\mathfrak{R}}B_{\mathfrak{R}}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N} \left\{ \sum_{\zeta_*=0}^{N-1} \psi(\zeta_*) \sen \frac{2\pi\mathfrak{R}}{N} \zeta_* \right\} \dots \dots \dots (IV.25)$$

Considerando que  $\psi(\zeta_*)$  se puede expresar como la transformación del coseno de  $S(f)$ , segundo miembro de la ecuación (IV.25) converge a cero, es decir,  $A_{\mathfrak{R}}$  y  $B_{\mathfrak{R}}$  son independientes estadísticamente.

Con base de las descripciones arriba mencionadas, se supone el método de “deducción de la densidad de espectro”.

Al principio, se introduce la variable que se define como sigue:

$$I_{\mathfrak{R}} = \begin{cases} N(A_{\mathfrak{R}}^2 + B_{\mathfrak{R}}^2); & 1 \leq \mathfrak{R} \leq \frac{N}{2} - 1 \\ NA_0^2 & ; \quad \mathfrak{R} = 0 \\ NA_{N/2}^2 & ; \quad \mathfrak{R} = \frac{N}{2} \end{cases} \dots \dots \dots (IV.26)$$

La variable  $I_{\mathfrak{R}}$  es la suma cuadrada de dos variables independientes de probabilidad que conforman con la distribución normal, por lo que, es la variable de probabilidad que se conforma con la distribución de  $x^2$  con 2 números de grados de libertad, no obstante, en el caso  $\mathfrak{R} = 0$  y  $N/2$  con 1.

Cuando  $x_i^2$  es la variable de la distribución normal con media cero y varianza  $\sigma^2$ , la distribución de  $x^2$  (Chi-cuadrado), es la distribución con que se forma la variable definida como sigue:

$$x_r^2 = \sum_{i=1}^r \frac{x_i^2}{\sigma^2} \dots\dots\dots(IV.27)$$

La función de densidad de probabilidad se expresa como sigue:

$$p(x_r^2) = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} (x_r^2)^{r/2-1} e^{-x_r^2/2} \dots\dots\dots(IV.28)$$

Donde:

$\Gamma(x)$  = es la función gamma.

El número del término  $\gamma$  en la ecuación (IV.28) se conoce como el número de grados de libertad de la distribución de  $x^2$ .

Usando  $x_r^2, I_{\mathfrak{R}}$  se expresa como sigue:

$$I_{\mathfrak{R}} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} S(f_{\mathfrak{R}})x_2^2; & 1 \leq \mathfrak{R} \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{2}{\Delta t} S(0)x_1^2; & \mathfrak{R} = 0 \\ \frac{2}{\Delta t} S(f_{N/2})x_1^2; & \mathfrak{R} = \frac{N}{2} \end{cases} \dots\dots\dots(IV.29)$$

Por el cálculo de la distribución de  $x^2$ , la esperanza y la varianza de  $I_{\mathfrak{R}}$  se puede obtener como sigue:

$$E[I_{\mathfrak{R}}] = \frac{2}{\Delta t} S(f_{\mathfrak{R}}); \quad 0 \leq \mathfrak{R} \leq N/2 \dots\dots\dots(IV.30)$$

$$Var[I_{\mathfrak{R}}] = \frac{4}{(\Delta t)^2} S^2(f_{\mathfrak{R}}); \quad 0 \leq \mathfrak{R} \leq N/2 \dots\dots\dots(IV.31)$$

La curva de la variable  $I_{\mathfrak{R}}$  (definido por la ecuación (IV.26) dibujado sobre el eje de frecuencia  $f_{\mathfrak{R}}$  se llama "periodograma", o  $I_{\mathfrak{R}}$  mismo se llama "periodograma". El resultado de la ecuación (IV.30) indica que por la esperanza de "periodograma", puede deducirse la densidad del espectro en  $f = f_{\mathfrak{R}}$

Sin embargo la ecuación (IV.31) indica que  $I_{\mathfrak{R}}$  mismo varía mucho y la desviación típica y la media de  $I_{\mathfrak{R}}$  tienen completamente el mismo valor, además esta característica no varía aún cuando el valor de  $N$  aumenta.

Por lo tanto, sólo si se calculan los coeficientes de Fourier obteniendo el "periodograma", los resultados varían fuertemente con cada frecuencia y los valores reducidos de la densidad de espectro tienen confianza muy baja.

La variación del "periodograma" se ha conocido desde hace mucho tiempo y varios métodos se han inventado para disminuir la variación y aumentar el grado de confianza en el estimado de la densidad de espectro.

Uno de estos métodos es el propuesto por Blackman y Tukey, como un método práctico, y se llama el "método de función de auto-correlación". Otro método, es el que tiene una suposición de que  $S(f)$  varía sólo lentamente alrededor de  $f = f_{\mathfrak{R}}$  usa el promedio de cercanía, se llama el método del "periodograma moderado" (este método usa generalmente el FFT (Fast Fourier Transform) cuando se calcula el "periodograma. Hay varios métodos para obtener el promedio en relación de la densidad.

Aquí, se explica el método del promedio, que es fundamental. En este método, se calcula el promedio de los valores de:

$$I_j \left( j = \mathfrak{R} - \left[ \frac{n-1}{2} \right], \mathfrak{R} + \left[ \frac{n}{2} \right] \right)$$

Y se obtiene el estimado  $\hat{S}(f_{\mathfrak{R}})$  de la densidad de espectro con:

$$\hat{S}(f_{\mathfrak{R}}) = \frac{1}{\eta} \sum_{j=\mathfrak{R}-\left[\frac{\eta-1}{2}\right]}^{\mathfrak{R}+\left[\frac{\eta}{2}\right]} I_j \frac{\Delta t}{2} \dots \dots \dots (IV.32)$$

Donde:  $\left[ \frac{\eta}{2} \right]$  = es el entero máximo que no excede  $\frac{\eta}{2}$ . Cada "periodograma"

$I_{\mathfrak{R}}$  es estadísticamente independiente entre sí, y se reconoce la siguiente relación:

$$S(f_j) \cong S(f_{\mathfrak{R}}); \quad \mathfrak{R} - \left[ \frac{(\eta-1)}{2} \right] \leq j \leq \mathfrak{R} + \left[ \frac{\eta}{2} \right] \dots \dots \dots (IV.33)$$

$\hat{S}(f_{\text{R}})$  resulta ser la suma de  $\eta$  del valor de Chi-cuadrado con 2 grados de libertad, por lo que, tiene la distribución de Chi-cuadrado con  $2\eta$  grados de libertad, es decir:

$$\hat{S}(f_{\text{R}}) = \frac{S(f_{\text{R}})x_{2\pi}^2}{2\eta} \dots\dots\dots (IV.34)$$

Con la condición de  $N \gg \eta$ , si se aumenta el número de  $N$  y  $\eta$ , la varianza de  $\hat{S}(f_{\text{R}})$  sigue disminuyéndose en razón inversa a  $\eta$ , lo cual resulta elevar el grado de confianza.

Para estimar cuantitativamente el grado de confianza de  $\hat{S}(f_{\text{R}})$  se usa el límite de confianza a base de la distribución de Chi-cuadrado, debido a que, al principio se determina la probabilidad de que el valor real de la densidad del espectro (el valor de la población) se encuentre entre algún límite arriba y abajo del estimado, después se deduce el existente usando la tabla de la distribución de Chi-cuadrado.

Por ejemplo, calculemos la extensión de la confianza con 95% en caso de calcular la densidad de espectro usando 20 periodogramas. Como la libertad de la distribución de Chi-cuadrado es  $2\eta = 40$ , podemos calcular de la tabla de distribución de Chi-cuadrado los valores  $a, b$  que tienen las relaciones  $P(x_{40}^2 < b) = 0.975$  y  $P(x_{40}^2 > a) = 0.025$  respectivamente. Y nos queda:

$$a = 24.433 \left( \frac{a}{2\eta} = 0.6111 \right), \quad b = 59.342 \left( \frac{b}{2\eta} = 1.484 \right)$$

Por lo tanto, el valor real de la densidad del espectro se estima con la probabilidad de 95%, encontrada entre las extensiones que siguen:

$$0.611\hat{S}(f_{\text{R}}) < S(f_{\text{R}}) < 1.484\hat{S}(f_{\text{R}})$$

Por la variación de los valores estimados de densidad del espectro, aunque se haya calculado el espectro, el espectro real tiene la posibilidad de tener la forma arbitraria entre el ancho de confianza establecida arriba y abajo de la curva punteada, por lo que el punto máximo de espectro puede existir en el lugar diferente del punto máximo de la curva del estimado. Sin embargo, el espectro real no puede desviarse al límite arriba o abajo de la curva estimada sobre toda la región de frecuencia.

Tal movimiento total desviado del espectro produce el cambio del valor integrado  $m_0 = \eta_{rms}^2$ , por otra parte el cambio de  $m_0$ , es la función de largo del registro de oleaje y su margen se limita.

Para mejorar el grado de confianza en el valor estimado del espectro, puede aumentar el número de los periodogramas con los cuales se calcula su promedio, y resulta aumentar el grado de libertad de la estimación del espectro. Sin embargo, lo que produce la caída de calidad del análisis.

La calidad de análisis arriba mencionada, indica que se pueden discernir los valores de los espectros vecinos, cuyo índice es el intervalo mínimo de dos valores estimados de los espectros independientes, llamado como "ancho de banda".

En el caso del suavizado del espectro, por promedio simple en la ecuación (IV.32) el ancho de banda es el siguiente:

$$f_B = f_{\eta+\eta} - f_{\eta} = \frac{\eta}{(N)(\Delta t)} = \frac{\eta}{t_0} \dots\dots\dots(IV.35)$$

Por lo tanto, cuanto más pequeño es  $f_B$ , la calidad de análisis llega a ser grande.

El valor  $t_0$ , el denominado en el segundo miembro de la ecuación (IV.35) es la longitud de registro de oleaje y en caso de que este sea constante,  $f_B$  será proporcional a  $\eta$ ; es decir, la calidad de análisis tiene la correlación contraria con  $\eta$ . Por otra parte, el grado de confianza del estimado de espectro aumenta proporcionalmente con el número  $\eta$ , por lo tanto, cuando la longitud de registro sea constante, son incompatibles el aumento de grado de confianza y el de calidad de análisis, cuya contradicción se llama "*Principio de incertidumbre de Grenander*".

El ancho mínimo de banda  $f_{B\ min}$  es;  $f_{B\ min} = \frac{1}{t_0}$ , indica la ola componente con el período de la longitud del registro.

## IV.2.2. CÁLCULO DE ESPECTRO POR MÉTODO DEL PERIODOGRAMA SUAVIZADO

Hay dos métodos para calcular la densidad del espectro frecuencial por el registro dado del oleaje, mencionados anteriormente, es decir, *el método de la función de auto-correlación y el método de suavización del periodograma*, los cuales tienen la misma base teórica y también su calidad de análisis y su límite de confianza son iguales.

La diferencia entre los dos métodos es sólo el orden del cálculo, viéndolo desde el punto de vista del resultado, es la función suavizada que se usa.

Hay muchos libros en que se explica el método de la función de auto-correlación, por lo tanto aquí se explica principalmente el cálculo por el método de periodograma suavizado, refiriéndose a los problemas que hay que ponerles atención.

### (1) Longitud e intervalo de tiempo de los datos analizados

La calidad del análisis indicado en la ecuación (IV.35), es determinada una parte por la longitud del registro y los datos que se usan serán, en general, de tiempo largo si es posible, por otra parte,  $\Delta t$  es necesario que sea aproximadamente  $1/10$  a  $1/20$  del período de la ola significativa.

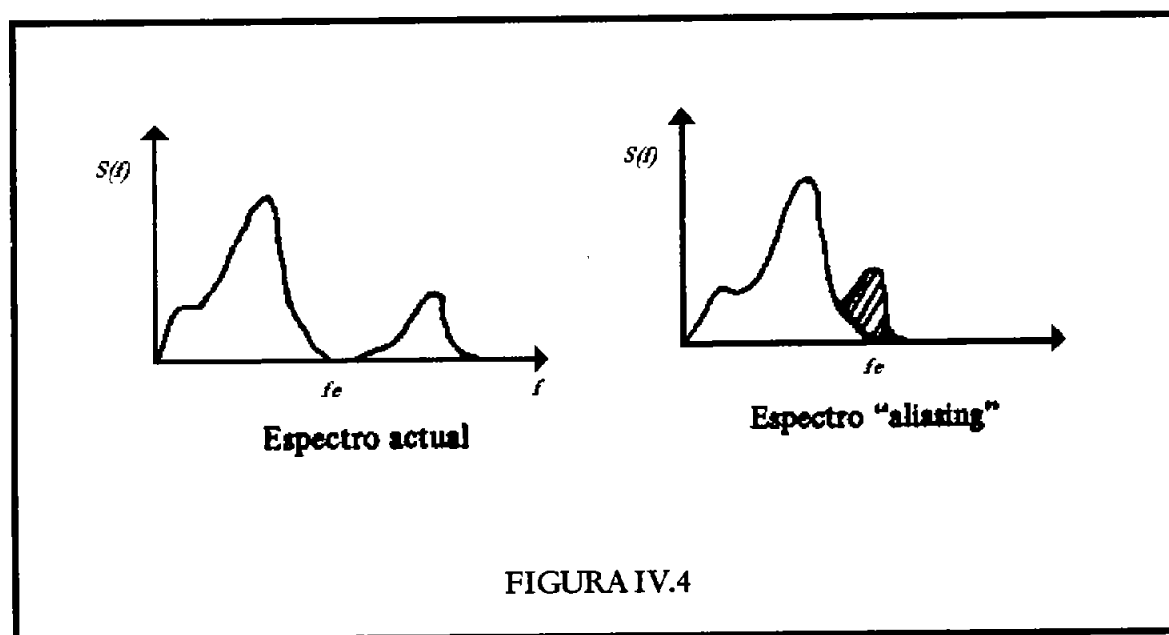
Si se determina  $\Delta t$  una vez, la frecuencia máxima de espectro que puede analizarse se determina consecuentemente como sigue:

$$f_c = \frac{1}{2} \Delta t \dots \dots \dots (IV.36)$$



Lo anterior se conoce como frecuencia de "Nyquist" y a veces se expresa por el símbolo  $f_N$ .

En la ola componente de la frecuencia arriba mencionada, se hace un muestreo dos veces cada ola. La frecuencia tiene el prefijo duplicado, es por la razón de que la energía de ola con la frecuencia  $f > f_c$  se acumula la de la ola con la frecuencia en forma  $0 < f < f_c$  duplicada con el eje de simetría  $f = f_c$ , cuyo fenómeno se llama "aliasing".



En el caso de oleaje del mar, la mayor parte de la frecuencia de energía del espectro disminuye aproximadamente con la forma  $f^{-5}$ , por lo que la influencia de "aliasing" no es tan grave problema si se selecciona el intervalo temporal de muestreo  $\Delta t$  como se mencionó antes, nada más, alrededor de  $f = f_c$  tiene la tendencia de aumentar un poco el valor estimado por la influencia de "aliasing".

(2) Corrección de nivel medio de mar.

Esta corrección es importante en el caso de la estimación del espectro. Si no se sustrae el valor del nivel medio en forma precisa, o se queda la influencia de "corriente de deriva" de nivel medio, resulta del aumento de la densidad espectral alrededor de  $f = 0$  que afecta a las otras frecuencias. Por lo tanto se necesita hacer precisamente la corrección de nivel medio del mar.

(3) "Data Window"

En los datos del oleaje hechos corregidos por el nivel medio, se hacen algunas modificaciones en general antes de realizar el análisis armónico.

Este procesamiento se expresa como sigue:

$$\eta(t_s) \rightarrow b(t_s) \eta(t_s); \quad t_s = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad \dots \dots \dots (IV.37)$$

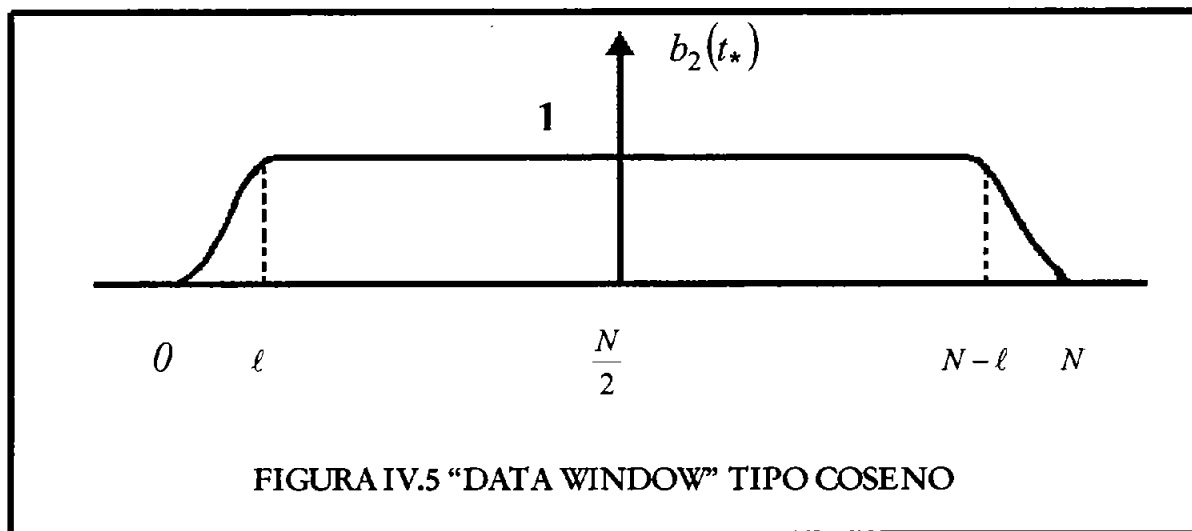
El coeficiente  $b(t_s)$  se denomina "data window", y generalmente tiene la forma de que disminuye los valores de la parte inicial y final gradualmente. Se usan las formas siguientes:

a) "Window" tipo trapecio:  $[0 \leq \ell \leq N/2]$

$$b_1(t_*) = \begin{cases} \frac{t_*}{\ell}; & 0 \leq t_* < \ell \\ 1; & \ell \leq t_* \leq N - \ell \\ \frac{(N - t_*)}{\ell}; & N - \ell < t_* \leq N \end{cases} \dots\dots\dots (IV.38)$$

b) "Window" tipo coseno

$$b_2(t_*) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\pi t_*}{\ell} \right]; & 0 \leq t_* < \ell \\ 1; & \ell \leq t_* \leq N - \ell \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\pi (N - t_*)}{\ell} \right]; & N - \ell < t_* \leq N \end{cases} \dots\dots\dots (IV.39)$$



El "data window" es un método para disminuir en todo lo posible, la influencia de "fuga". Este fenómeno ocurre cuando se calcula el periodograma en caso de que el espectro tenga el valor máximo agudo, teniendo el resultado de que haya alguna energía alrededor del máximo. El método de "data window" revela su eficacia cuando se mezcla la componente de la ola regular con la frecuencia constante en el registro del oleaje. Se recomienda "data window"  $b_2(t_*)$  con  $\ell = 0.1N$  como consecuencia del cálculo numérico.

Sin embargo, si se usa "data window" disminuye un poco la libertad del espectro estimado. Por lo que es mejor no usarlo en caso del espectro continuo, por su menor eficacia. La razón de disminución del grado de libertad se calcula como sigue:

$$\frac{I}{K_b} = \frac{\left[ \int_0^N b^2(t_*) dt_* \right]^2}{\int_0^N b^4(t_*) dt_*} \dots \dots \dots (IV.40)$$

La razón es casi igual, tanto para  $b_1$  como para  $b_2$ , y si  $\ell = 0.1N$  se tiene el valor  $\frac{I}{K_b} = 0.9$ . Si se usa "data window" disminuye el nivel de energía total, por lo que se requiere la corrección de multiplicar  $\frac{N}{\sum b^2(t_*)}$  del periodograma.

(4) Cálculo del coeficiente de Fourier

Este se calcula por método de "Fast Fourier Transform", (F.F.T.). El método general de F.F.T. no puede usarse sino para el caso de  $N = 2^m$ . Hay dos métodos; el primero es obtener los datos del número que se necesita y el segundo es añadir "0" con el número necesario en el fin del registro con la longitud de tiempo arbitraria, la adición de "0" debe procesarse después de multiplicarse el data window, también afecta la disminución del nivel de energía total.

(5) Cálculo del "Periodograma"

Si se calculan  $A_{\mathfrak{R}}$ ,  $B_{\mathfrak{R}}$  (coeficientes de Fourier por el método de F.F.T.) e  $I_{\mathfrak{R}}$  por la ecuación (IV.26), añadiendo la corrección contra la influencia de "data window" y el número de datos a la energía total como sigue:

$$I_{\mathfrak{R}} = \alpha(A_{\mathfrak{R}}^2 + B_{\mathfrak{R}}^2) \dots \dots \dots (IV.41)$$

Donde:

$$B_{\mathfrak{R}} = 0$$

Si:

$$\mathfrak{R} = 0, \quad \frac{N_2}{2}$$

Entonces:

$$\alpha = \frac{N_2^2}{NU}, \quad U = \frac{\left\{ \sum_{t=1}^N b^2(t) \right\}}{N} \dots \dots \dots (IV.42)$$

$N_2$  = número de datos que se usan en el cálculo de F.F.T.

(6) Suavización del "Periodograma"

La ecuación (IV.32) es el método de suavización en forma simple. Sin embargo, la ecuación general para estimar la densidad espectral suavizada del periodograma se expresa como sigue:

$$\hat{S}(f_{\mathfrak{R}}) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=\mathfrak{R}-\left[\frac{\eta-1}{2}\right]}^{\mathfrak{R}+\left[\frac{\eta}{2}\right]} K(f_{\mathfrak{R}} - f) I_j \dots \dots \dots (IV.43)$$

Donde:

$$\sum_{j=\mathfrak{R}-\left[\frac{\eta-1}{2}\right]}^{\mathfrak{R}+\left[\frac{\eta}{2}\right]} K(f_{\mathfrak{R}} - f) = 1 \dots \dots \dots (IV.44)$$

Esta "función de suavización"  $K(f)$  se llama también "función de densidad" o simplemente "filtro". La variable  $K(f)$ , es la misma que el "espectro window" en el método de auto correlación de función.

Para "la filtración se usan, generalmente los siguientes tipos de filtro.

a) Filtro tipo rectángulo:

$$K_j(f_j) = \frac{1}{\eta}; -\left[\frac{\eta-1}{2}\right] \leq j \leq \left[\frac{\eta}{2}\right] \dots \dots \dots (IV.45)$$

b) Filtro tipo triángulo:

$$K_2(f_j) = \frac{1}{K_2} \left\{ 1 - \frac{|j|}{\left[ \frac{(\eta-1)}{2} \right]} \right\}, \left[ \frac{(\eta-1)}{2} \right] \leq j \leq \left[ \frac{\eta}{2} \right] \dots \dots \dots (IV.46)$$

c) Filtro tipo parábola:

$$K_3(f_j) = \frac{1}{K_3} \left\{ 1 - \left( \frac{j}{\left[ \frac{(\eta-1)}{2} \right]} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (IV.47)$$

Donde:

$K_2$  y  $K_3$  = son las constantes para satisfacer la ecuación (IV.44)

En la aplicación actual, el número  $\eta$  para suavizar es impar.

La frecuencia  $f_{\mathfrak{R}}$ , en que se calcula el espectro, tiene un intervalo para el caso  $(N+1)$  de  $K_1 \left( \frac{(N+1)}{2} \right)$  en caso de  $K_2$  y  $K_3$ .

Existe un método que usa el filtro  $K_1$ , y en este  $\eta$  es par y los últimos dos lados de  $\eta$  tienen  $K_1 = \frac{1}{2} \eta$  en donde se doblan los dominios colindantes del "filtro".

El grado de libertad del "filtro tipo rectángulo" es  $2\eta$  y su ancho de banda se calcula con la ecuación (IV.35).

En el caso de otros "filtros", se calcula el grado equivalente de libertad como sigue:

$$\gamma = \frac{2}{\sum_{j=[(\eta-1)/2]}^{[\eta/2]} K^2(f_j)} \dots\dots\dots (IV.48)$$

Si  $\eta$  es grande,  $K_2(f)$  y  $K_3(f)$  se calculan aproximadamente como sigue:

$$\gamma = 1.5\eta; \text{ filtro tipo triángulo} \dots\dots\dots (IV.49)$$

$$\gamma = \frac{5}{3}\eta; \text{ filtro tipo triángulo} \dots\dots\dots (IV.50)$$

Cuando se usa el "data window", citado anteriormente, los valores multiplicados por  $1/K$ , cambian a los grados equivalentes finales de libertad. Asimismo sobre el ancho de banda, se calcula su valor equivalente como sigue:

$$f_B = \frac{3\eta}{4N\Delta t}; \text{ filtro tipo triángulo} \dots\dots\dots (IV.51)$$

$$f_B = \frac{5\eta}{6N\Delta t}; \text{ filtro tipo triángulo} \dots\dots\dots (IV.52)$$

Cabe mencionar; que aunque se dobla su región cada  $1/2$ , en el filtro tipo triángulo o tipo parábola, los estimados colindantes no son independientes estadísticamente. En el procedimiento de suavización del periodograma, hay que determinar  $\eta$  (número de suavización), considerando el grado equivalente de libertad y la calidad de análisis.

Para aumentar el grado de libertad es necesario disminuir  $\Delta t$  y aumentar  $N$  y  $\eta$ . Sin embargo, sólo amplifica la región frecuencial del espectro estimado hacia el lado de alta frecuencia.



El aumento de  $\eta$  resulta de la disminución de la calidad de análisis inversamente proporcional alrededor del máximo del espectro del oleaje. Es necesario aumentar el tiempo de registro de oleaje principalmente como se indica en la ecuación (IV.35).

### (7) Corrección final de nivel de energía

Puede ser insuficiente la corrección del nivel de energía contra el uso del "data-window" aunque se aplique la ecuación (IV.42) conforme al registro del oleaje. También, ocurre a veces, una diferencia pequeña entre el valor original de energía y el del espectro calculado por el método de "doble filtración" o el procedimiento alrededor de  $\mathfrak{R} = 0$  y  $\mathfrak{R} = \frac{N_2}{2}$  lo que es inconveniente.

Por lo tanto es deseable haber calculado  $m_0 = \eta_{rms}^2$ . Posteriormente, la proporción del valor anterior con el integrado del espectro estimado y hacer la corrección final por la multiplicación de la proporción.

## IV.3 EJERCICIOS

## Ejercicio IV.1

Estimar  $H_{1,3}, T_{1,3}$  en caso de  $A = 2.8$  metros,  $B = 2.3$  metros,  $C = 2.7$  metros  $D = 2.1$  metros  $N_0 = 120$  y 20 minutos de duración de observación.

## SOLUCIÓN

De la ecuación (IV.1) se tiene:

$$H_1 = A + B = 5.5 \text{ metros}$$

$$H_2 = B + D = 4.4 \text{ metros}$$

De las ecuaciones (IV.3) y (IV.4) se obtiene:

$$\eta_1 = \frac{5.5}{2\sqrt{2 \ln 120} \left[ 1 + \frac{0.289}{\ln 120} - \frac{0.249}{(\ln 120)^2} \right]} = 0.85 \text{ metros}$$

$$\eta_2 = \frac{4.4}{2\sqrt{2 \ln 120} \left[ 1 - \frac{0.211}{\ln 120} - \frac{0.103}{(\ln 120)^2} \right]} = 0.75 \text{ metros}$$

De la ecuación (IV.2) se tiene:

$$\eta_{rms} = \sqrt{m_0} = \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2) = 0.80 \text{ metros}$$

De las ecuaciones (II.15) y (II.26) se tiene:

$$H_{1/3} = 1.6 \bar{H} = 1.6(2\pi m_0)^{1/2} = 3.2 \text{ metros}$$

Por la condición de  $N_0 = 120$  y 20 minutos de duración de observación, se obtiene:

$$\bar{T} = \frac{1200}{120} = 10 \text{ segundos}$$

En la ecuación (II.6)

$$T_{1/3} = 1.1 \bar{T} = 11 \text{ segundos}$$

#### ✍ Ejercicio IV.2

Despejar el número de las variables siguientes manteniendo su precisión necesaria para el espectro.

Condiciones:

- ⇒  $\Delta t = 0.5 \text{ segundos}$
- ⇒  $T^* = 20 \text{ minutos}$
- ⇒ La forma de "filtro tipo triángulo"

Las variables que se despejan:

- a)  $N$ ; el número de los datos que se usan para calcular el espectro frecuencial.
- b)  $f_c$ ; frecuencia de "Nyquist".
- c)  $\eta$ ; el número de "periodograma" que se usa para suavización.
- d)  $\gamma$ ; el grado equivalente de libertad.
- e)  $f_B$ ; el ancho de banda.

**SOLUCIÓN:**

a) El tiempo de observación es  $(20)(60 \text{ segundos}) = 1200 \text{ segundos}$

b) El número de datos es  $1200 \text{ segundos} / 0.5 \text{ segundos} = 2400$

Entonces:

$$N = 2^m = 2^{11} = 2048$$

b) De la ecuación (IV.36), se tiene:

$$f_c = \frac{1}{(2)(0.5)} \text{ segundos} = 1 \text{ segundo}^{-1}$$

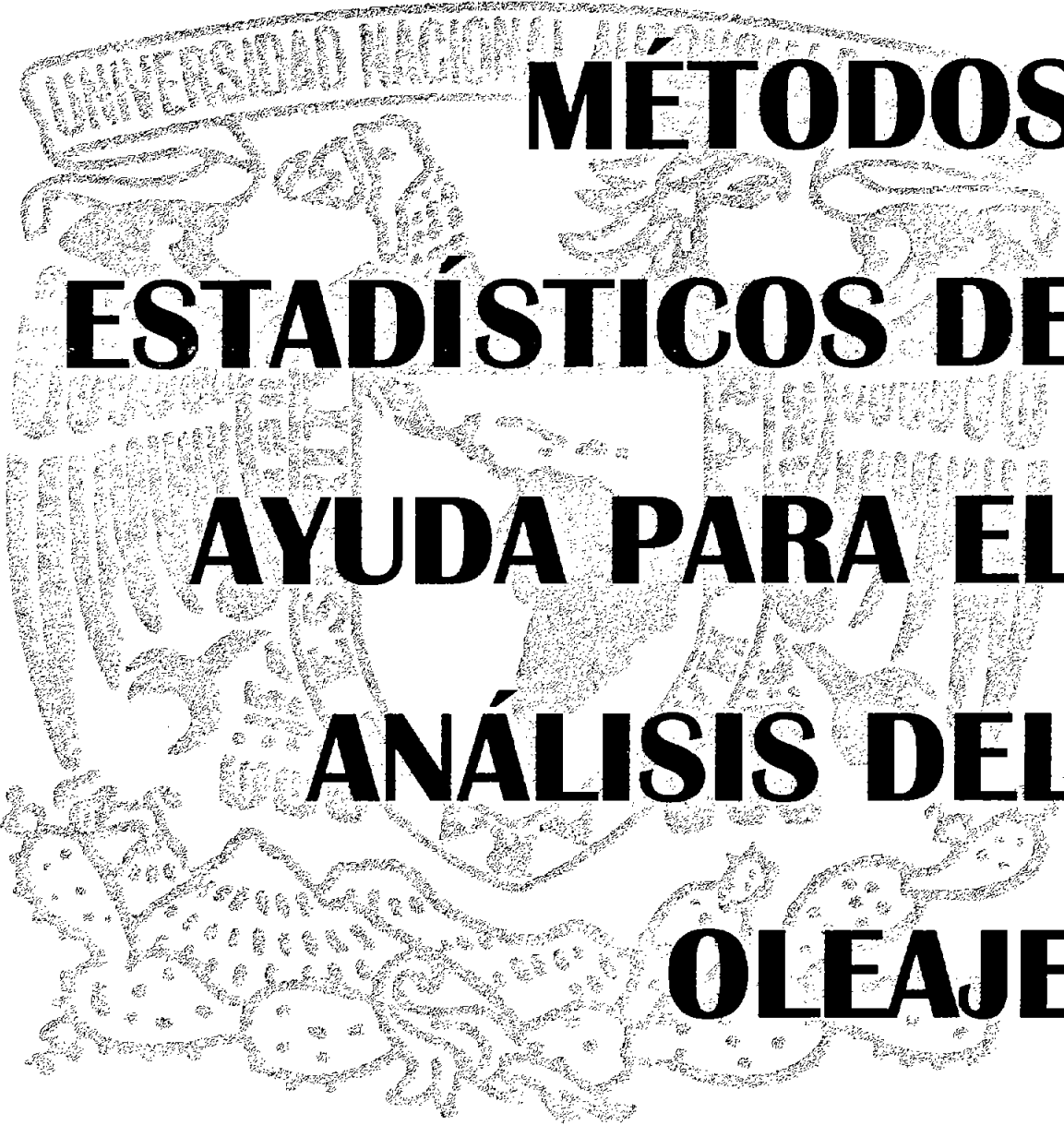
c),d) Con la ecuación (IV.49), para ser  $\gamma = 40$  aproximadamente:

$$\eta = 25 \quad \text{y} \quad \gamma = 37.5$$

e) De la ecuación (IV.51), se tiene:

$$f_B = \frac{(3)(25)}{(4)(2048)(0.5)} = 0.012 \text{ segundos}^{-1}$$

# CAPITULO V



# MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE AYUDA PARA EL ANÁLISIS DEL OLEAJE IRREGULAR.

## V. MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE AYUDA PARA EL ANÁLISIS DEL OLAJE IRREGULAR

### V.1 ANÁLISIS DE FOURIER.

#### V.1.1. PREPARACIÓN PRELIMINAR PARA LA TEORÍA DE LAS SERIES DE FOURIER.

$$\left. \begin{aligned}
 \int_t^{t+2p} \cos \frac{\eta\pi t}{p} dt &= 0, \quad \eta \neq 0 \\
 \int_t^{t+2p} \operatorname{sen} \frac{\eta\pi t}{p} dt &= 0 \\
 \int_t^{t+2p} \cos \frac{m\pi t}{p} \cos \frac{\eta\pi t}{p} dt &= 0, \quad m \neq \eta \\
 \int_t^{t+2p} \cos^2 \frac{\eta\pi t}{p} dt &= p, \quad \eta \neq 0 \\
 \int_t^{t+2p} \cos \frac{m\pi t}{p} \operatorname{sen} \frac{\eta\pi t}{p} dt &= 0 \\
 \int_t^{t+2p} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{p} \operatorname{sen} \frac{\eta\pi t}{p} dt &= 0, \quad m \neq \eta \\
 \int_t^{t+2p} \operatorname{sen}^2 \frac{\eta\pi t}{p} dt &= p, \quad \eta \neq 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (V)$$

### V.1.2 EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN POR LAS SERIES DE FOURIER

Suponiendo que la función  $f(t)$ , con período arbitrario  $2P$ , puede desarrollarse en las series siguientes:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} \frac{\pi t}{p} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{p} + \dots + a_n \cos \frac{\eta\pi t}{p} + \dots + b_1 \text{sen} \frac{\pi t}{p} + b_2 \text{sen} \frac{\eta\pi t}{p} + \dots + b_n \text{sen} \frac{\eta\pi t}{p} + \dots$$

Ahora, se determinan los coeficientes de la función arriba mencionada, usando las fórmulas de la ecuación (V.1):

$$\int_d^{d+2p} f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_d^{d+2p} dt + a_1 \int_d^{d+2p} \cos \frac{\pi t}{p} dt + \dots + a_n \int_d^{d+2p} \cos \frac{\eta\pi t}{p} dt + \dots$$

$$b_1 \int_d^{d+2p} \text{sen} \frac{\pi t}{p} dt + \dots + b_n \int_d^{d+2p} \text{sen} \frac{\eta\pi t}{p} dt + \dots$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(t) dt$$

$$\int_d^{d+2p} f(t) dt \cos \frac{\pi t}{p} dt = \frac{a_0}{2} \int_d^{d+2p} \cos \frac{\eta\pi t}{p} dt + a_1 \int_d^{d+2p} \cos \frac{\eta\pi t}{p} dt \cos \frac{\pi t}{p} dt + \dots$$

$$a_n \int_d^{d+2p} \cos^2 \frac{\eta\pi t}{p} dt + \dots + b_1 \int_d^{d+2p} \text{sen} \frac{\pi t}{p} \cos \frac{\pi t}{p} dt \dots$$

$$b_n \int_d^{d+2p} \text{sen} \frac{\eta\pi t}{p} dt + \cos \frac{\pi t}{p} dt + \dots$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(t) dt \cos \frac{\pi t}{p} dt$$

Por el mismo procedimiento:

$$b_n = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(t) \operatorname{sen} \frac{\eta \pi t}{p} dt$$

☞ Ejemplo:

Obtener la ecuación desarrollada por Fourier de la función periódica definida como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; -\pi \leq t \leq 0 \\ \operatorname{sent} & ; 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

La mitad del periodo es  $p = \pi$ , poniendo  $d = -\pi$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \cos \eta t dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cos \eta t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sent} * \cos \eta t dt \\ & \left[ \operatorname{sent} \cos \eta t = \frac{1}{2} \{ \cos(1-\eta)t + \cos(1+\eta)t \} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos(1-\eta)t}{1-\eta} + \frac{\cos(1+\eta)t}{1+\eta} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos(1-\eta)\pi}{1-\eta} + \frac{\cos(1+\eta)\pi}{1+\eta} - \left( \frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{1+\eta} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\cos \eta \pi}{1-\eta} + \frac{\cos \eta \pi}{1+\eta} - \frac{2}{1-\eta^2} \right) \\ &= \frac{\cos \eta \pi + 1}{\pi(1-\eta^2)} \quad \eta \neq 1 \end{aligned}$$



$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sent} \cos t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen} 2t dt$$

$$= \frac{1}{4\pi} [-\cos 2t]_0^{\pi} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen} \eta t dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen} \eta t \text{sen} \eta t dt$$

$$\left( \text{sentsent} = \frac{1}{2} \{ \cos(1-\eta)t - \cos(1+\eta)t \} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\text{sen}(1-\eta)t}{1-\eta} - \frac{\text{sen}(1+\eta)t}{1+\eta} \right]_0^{\pi} = 0 \quad \eta \neq 1$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ t - \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\text{sent}}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} \dots \right)$$

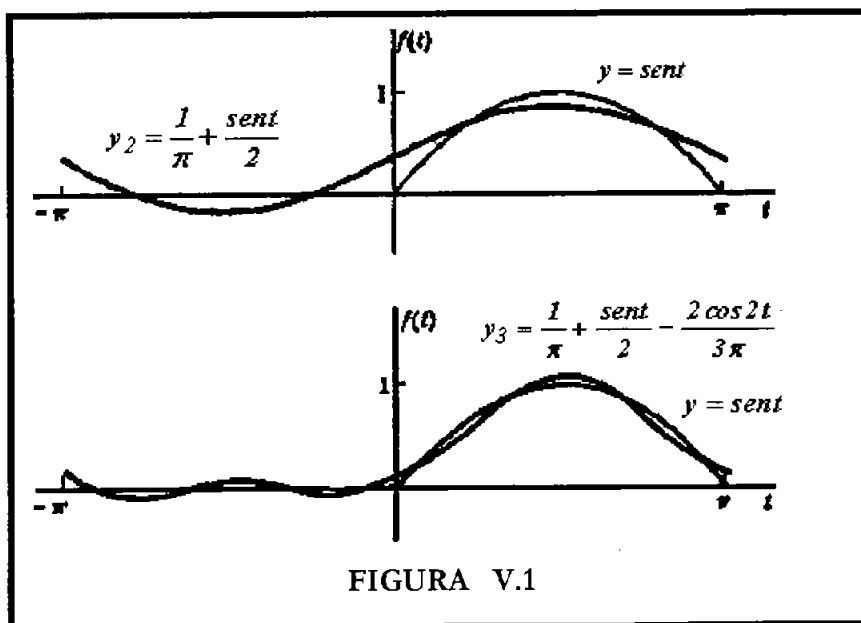


FIGURA V.1

## V.2 FUNCIÓN DE AUTO-CORRELACIÓN Y FUNCIÓN DE DENSIDAD DEL ESPECTRO.

### V.2.1 DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE AUTO-CORRELACIÓN.

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

La función de auto-correlación, de la variable aleatoria  $x(t)$ , indica la dependencia del valor en el otro con la diferencia de tiempo  $\tau$  de la variable.

El valor  $\psi(\tau)$  es siempre función par y tiene máxima en  $\tau=0$

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= \psi(-\tau) \\ \psi(0) &\geq \psi(\tau)\end{aligned}$$

### V.2.2. DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DEL ESPECTRO FRECUENCIAL

La función de densidad de espectro de variable aleatoria, expresa la componente frecuencial de la variable por el promedio cuadrado.

Dicho promedio cuadrado, con las frecuencias entre  $f$  y  $f + \Delta f$ , se puede obtener calculando el promedio cuadrado de las salidas que han pasado por filtro de banda. Cuando el tiempo registrado  $T$  se acerca a infinito, se obtiene el promedio más preciso.

### V.2.3. RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN DE AUTO-CORRELACIÓN Y FUNCIÓN DE DENSIDAD DE ESPECTRO

Por la condición de estacionariedad:

$$E[\eta(t+\tau)\eta(t)] = E[\eta(\tau)\eta(0)] \equiv \psi(\tau); \quad -\infty < t < \infty \dots\dots\dots (V.1)$$

Donde:

$$E[\eta(t+\tau)\eta(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j(t+\tau)\eta_j(t) \dots\dots\dots (V.2)$$

Por la condición de ergodicidad:

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)\eta(t+\tau) dt \dots\dots\dots (V.3)$$

En la condición arriba mencionada, hay la relación siguiente:

$$\psi(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau df \dots\dots\dots (V.4)$$

Por la teoría de transformación de Fourier, en la condición de que el valor integrado de  $|\psi(\tau)|^2$  en toda extensión de  $\tau$  sea finito, la función  $S(f)$  se puede expresar como sigue:

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \dots\dots\dots (V.5)$$

Las ecuaciones (V.4) y (V.5) se conocen como la relación de "Wiener-Khintchine". Sin embargo, si quiere expresarlas por las formas más generales, las ecuaciones siguientes, en que se definen  $\tau$  y  $f$  en la región  $(-\infty, \infty)$ , tienen la forma simétrica.

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) e^{i2\pi f\tau} df \\ S_0(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \end{aligned} \dots\dots\dots (V.6)$$

Donde:

$S_0(f)$  es el espectro frecuencial con la frecuencia definida en región  $(-\infty, \infty)$ .

Si se calcula la auto-correlación de la configuración del oleaje:

$$\eta(t) = \sum a_n \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n);$$

$$\begin{aligned}
\psi(\tau) &= \lim_{t_0} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_m \cos[2\pi f_n(t+\tau) + \varepsilon_n] \cos(2\pi f_m t + \varepsilon_m) dt \\
&= \lim_{t_0} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_m \cos[2\pi f_n + \varepsilon_n] \cos(2\pi f_m t + \varepsilon_m) \cos 2\pi f_n \tau \\
&\quad - \sin[2\pi f_n t + \varepsilon_n] \cos(2\pi f_m t + \varepsilon_m) \sin 2\pi f_n \tau dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos 2\pi f_n \tau \dots\dots\dots (V.7)
\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (V.7) en la ecuación (V.5), se tiene:

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

$$\begin{aligned}
S(f) &= 2 \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos 2\pi f_n \tau \cos 2\pi f \tau \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_0^{\infty} [\cos 2\pi(f_n + f)\tau + \cos 2\pi(f_n - f)\tau] d\tau \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 \delta(f_n - f) = \frac{1}{df} \sum_f^{f+df} \frac{1}{2} a_n^2
\end{aligned}$$

$$m_0 = \bar{\eta}^2 = \psi(0) = \int_0^{\infty} S(f) df$$

### V.3. DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO

Sean  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, n$  variables independientes distribuidas normalmente con media 0 y varianza 1

Considérese la variable aleatoria:

$$x^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$$

Donde:

$x^2$  se llama Chi-cuadrado

Podemos demostrar que para  $x \geq 0$ :

$$P(x^2 \leq x) = \frac{1}{2^{\pi/2} \Gamma(n/2)} \int_0^x u^{(n/2)-1} e^{-u/2} du$$

$$P(x^2 \leq x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

La distribución definida por la ecuación arriba mencionada es la distribución Chi-cuadrado y  $n$  es el número de grado de libertad.

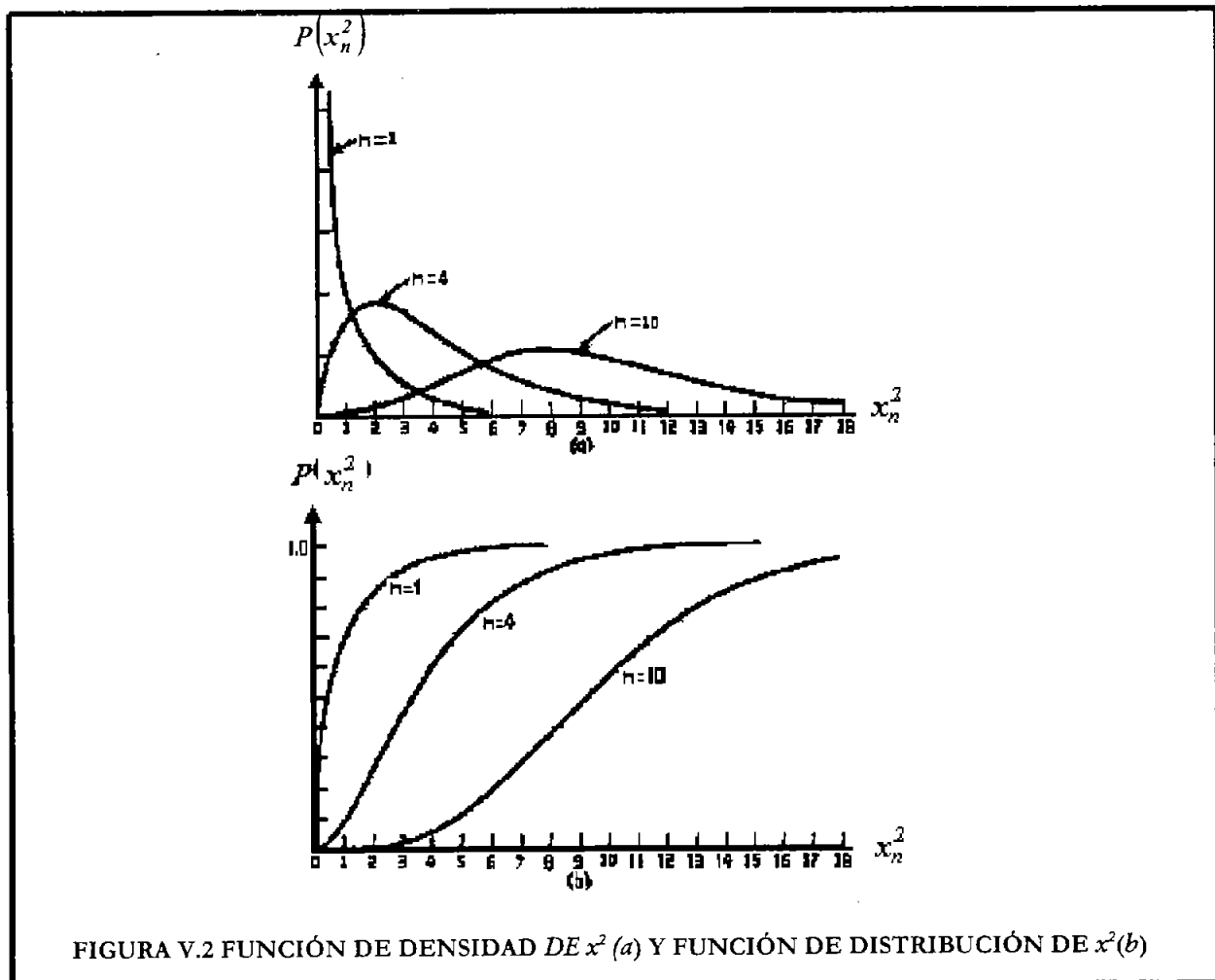
La distribución anteriormente mencionada tiene la función de densidad correspondiente dada por:

$$P(x^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^2 ((n/2)) e^{-x^2/2}$$

Media:  $\mu = n$

Varianza:  $\sigma^2 = 2n$

$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$   $n > 0$ , es la función gamma



## V.4 NYQUIST FREQUENCY O FOLDING FREQUENCY

La Figura V.3 muestra el registro continuo con intervalo de tiempo de muestreo  $h$  segundos.



FIGURA V.3 MUESTREO DEL REGISTRO CONTINUO

Por lo tanto, el número de muestreo cada segundo es  $1/h$ . Para obtener la componente frecuencial del registrado original, es necesario hacer un muestreo por lo menos dos veces cada período de ola, resultando que la frecuencia máxima analizable es  $1/2h$  Hz.

$$f_c = \frac{1}{2h}$$

Donde:

$f_c$  =llama "Nyquist frequency"o "folding frequency"

Los componentes con más de  $1/2h$  Hz de frecuencia se superponen a los de la frecuencia  $\theta$  a  $1/2h$



Las frecuencias mayores que se hacen "aliasing" con  $f$  ( $0 \leq f \leq f_c$ ) son:

$$(2f_c \pm f), (4f_c \pm f), \dots, (2nf_c \pm f)$$

$$\cos 2\pi(2f_c \pm f)t = \cos 2\pi \left( \frac{n}{h} \pm f \right) mh$$

$$t = mh, \quad f_c = 1/2h$$

$$= \cos 2mn\pi \cos 2\pi f mh \pm \sin 2mn\pi \sin 2\pi f mh$$

$$= \cos 2\pi f mh$$

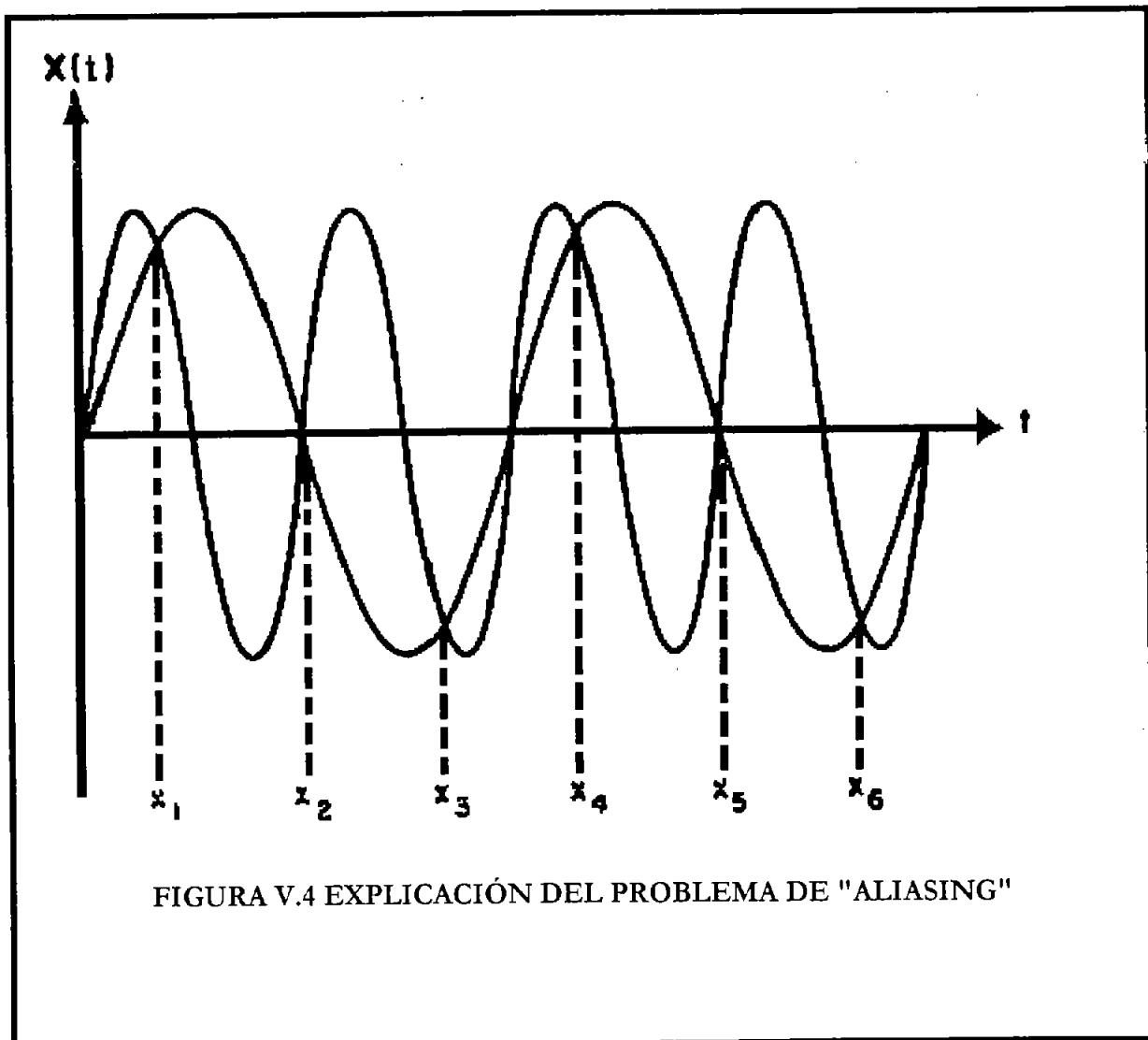


FIGURA V.4 EXPLICACIÓN DEL PROBLEMA DE "ALIASING"

## V.5 TABLAS DE LAS DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS

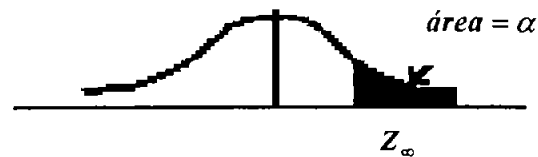
TABLA V.1 LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL

$$p = (z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3986	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3966	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3884	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2017	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1605	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1282	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1097	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0051
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.4880	0.0478	0.0468	0.4590	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.3390	0.3320	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.1670	0.0163	0.1580	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.1220	0.0119	0.1160	0.1130	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

TABLA V.2 LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL (INTEGRADO)

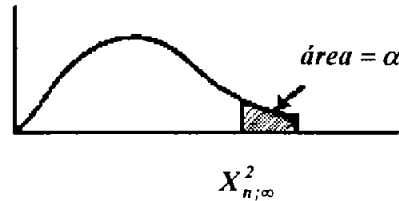
$$\alpha = \int_{z_{\infty}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \text{Prob}[z > z_{\infty}]$$



$z_{\infty}$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4413	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3481
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2141
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1167
0.9	0.1141	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1517	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0961	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0801	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0217	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0221	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0076	0.0073	0.0071	0.0070	0.0068	0.0066	0.0063
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0041
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.003	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.002	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

TABLA V.3 LA DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE CHI-CUADRADO

El valor  $x_{n;\alpha}^2$  que corresponde a  $Prob[x_n^2 > x_{n;\alpha}^2] = \alpha$



		$\alpha$								
$n$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.00390	0.01580	2.71	3.84	5.02	6.63	7.18
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1030	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.1150	0.2160	0.3520	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.08	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.08	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.6*	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.88	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65

Para:  $n > 120$  
$$x_{n;\alpha}^2 \approx n \left[ 1 - \frac{2}{9n} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9n}} \right]^3$$

# CAPITULO VI



**CONCLUSIONES.**

## VI. CONCLUSIONES

Al término de este trabajo se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Por lo complicado que es pronosticar el oleaje por su irregularidad, se concluye que; el periodo, altura y amplitud de ola en el mar es muy variable comparándolo con un oleaje regular.
- Existen varios métodos para calcular el oleaje significativo que es el que nos representa la altura y el periodo del oleaje irregular
- Es necesario contar con registros de oleaje (datos de campo), los cuales servirán como base para llevar a cabo el análisis del oleaje irregular.
- Hay métodos diferentes para el análisis del oleaje irregular uno de ellos es el método estadístico con sus diferentes formas de predecir mediante fórmulas de la estadística, otro método llamado el espectral, o sea la relación directa que existe con la ola y su energía generada; que nos da como resultado la forma en como se halla distribuido el oleaje mediante diferentes espectros, y se tiene también el método analítico mediante programas computacionales; por lo que hay diferentes opciones para escoger la mas adecuada en cada caso. Por ser esta tesis un trabajo general, y no algo totalmente particular, estos métodos nos darán ciertas bases para poder decidir cual utilizar en cada caso en específico, porque no es lo mismo un oleaje en la costa que un oleaje mar adentro, más sin embargo, lo preocupante es como va llegar ese oleaje a las costas para así poder decidir la construcción de cualquier obra marítima con respecto al oleaje que se generará.
- La evolución de estos métodos, hasta llegar al analítico, a partir de métodos empíricos mediante formulaciones matemáticas, que actualmente nos ayudan a comprender como son aplicables con fórmulas estadísticas al oleaje irregular.
- La falta de recursos para obtener datos de campo, hace que los métodos de análisis del oleaje irregular una parte fundamental en el proyecto y diseño de las obras marítimas.
- La aplicación de los métodos de análisis de oleaje irregular, actualmente pueden utilizarse para comparar las condiciones pasadas y presentes, en una misma zona de estudio, y observar si existen cambios significativos debido ala muy marcada variación climática.

# BIBLIOGRAFIA

 ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS.

C.R. Wyle. Edición III

 ANALYSIS AND MEASUREMENT PROCEDURE.

Julius S. Bendat y Allan G. Piersol, Random

 COSTA Y PUERTO

Shokokusha, Japón. Sato S. y Goda Y. Edición 1981

 INTRODUCCION DEL ANALISIS DEL ESPECTRO FRECUENCIAL

Yorihiko Osak. Edición 1985

 RANDOM SEAS AND DESIGN OF MARITIME STRUCTURES

University of Tokyo Press. Goda Y. Edicion 1985

 THE FAST FOURIER TRANSFORM.

Brigham E. Oran. Prentice-Halt. Edición 1974