

03095



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA

**MODELADO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE LA
PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN LA
VECINDAD DE POZOS PETROLEROS EN MEDIOS
HETEROGÉNEOS FRACTURADOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

(SISMOLOGÍA)

PRESENTA

RAFAEL ÁVILA CARRERA

Ciudad Universitaria; México D. F.

Diciembre 2005

m340070



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi hija Marise, con todo el amor de Padre..!

El principio de la sabiduría es el temor de Dios.

Salomón: Prov. 1,7

ÍNDICE

| | |
|--|-----|
| RESUMEN..... | i |
| ABSTRACT..... | ii |
| I. INTRODUCCIÓN..... | iii |
| II. PROPAGACIÓN Y DIFRACCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN 2 Y 3D..... | 7 |
| II.1. Difracción de ondas elásticas por una grieta..... | 7 |
| II.2. Difracción de ondas elásticas por un cilindro..... | 15 |
| II.3. Difracción de ondas elásticas por una esfera..... | 24 |
| II.4. Difracción de ondas elásticas por objetos superficiales..... | 36 |
| III. DIFRACCIÓN MÚLTIPLE Y RESPUESTA SÍSMICA DE MEDIOS HETEROGÉNEOS-FRACTURADOS..... | 44 |
| III.1. Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM)..... | 44 |
| III.2. Formulación Integral de medios fracturados..... | 46 |
| III.3. Difracción múltiple por sistemas de grietas..... | 50 |
| III.4. Difracción múltiple por sistemas de cilindros..... | 58 |
| IV. ELASTODINÁMICA DE POZO..... | 67 |
| IV.1. Propagación de ondas en la vecindad de pozos (2D)..... | 67 |
| IV.2. Propagación de ondas en la vecindad de pozos (3D)..... | 74 |
| IV.3. Registros sísmicos de onda completa..... | 79 |
| IV.4. Simulación y modelado de registros sísmicos de onda completa..... | 97 |
| IV.5. Análisis de curvas de dispersión..... | 104 |
| V. ATENUACIÓN Y Q -CODA DE REGISTROS SÓNICOS DE POZO..... | 111 |
| V.1. Evaluación de Q -coda..... | 111 |
| V.2. Metodología para extracción de Q -coda de registros sísmicos de pozo..... | 115 |
| V.3. Resultados de Q -coda y análisis de micro-sismogramas..... | 117 |
| VI. CONCLUSIONES..... | 125 |
| AGRADECIMIENTOS..... | 127 |
| REFERENCIAS..... | 128 |
| ANEXOS | |
| A) Scattering and diffraction of elastic P- and S-waves by a spherical obstacle: A review of the classical solution. | |
| B) El VPM: Una técnica variacional para simular la respuesta sísmica de valles aluviales someros. | |
| C) Respuesta sísmica y difracción por grietas con el Método Indirecto de Elementos de Frontera. | |
| D) Transient response and multiple scattering of elastic waves by a linear array of regularly distributed cylindrical obstacles: Anti-plane-S-waves analytical solution. | |

RESUMEN

El estudio de la propagación de ondas elásticas en medios fracturados y el análisis de la difracción por fracturamiento, cavidades e/o inclusiones tiene numerosas aplicaciones en ingeniería y en geofísica. Estas incluyen, la detección de cavidades en ingeniería civil, la localización de fracturas que contienen fluido en exploración petrolera y la descripción de un sistema de fracturas en experimentos de hidrofracturamiento, entre muchas otras. Por otro lado, es bien sabido que la naturaleza heterogénea de los medios fracturados es la razón principal de una serie de problemas técnicos. Sólo por mencionar algunos; la atenuación excesiva de las ondas en sismología de exploración, la caracterización de difractores en estudios sísmicos, las variaciones en la producción de hidrocarburos y sus bajas tasas de recuperación en la explotación petrolera, la incertidumbre en las estimaciones de la permeabilidad y la saturación de los fluidos en problemas de flujo, entre muchos otros. Así pues, es necesario determinar los parámetros característicos de estas heterogeneidades: geometría, orientación, distribución espacial, la respuesta sísmica y sus propiedades espectrales, con el fin de entender el comportamiento elástico de un medio fracturado o poroso. En este trabajo se presenta un conjunto de soluciones, analíticas y numéricas orientadas a estudiar el problema de la difracción, dispersión y atenuación de las ondas elásticas en medios heterogéneos fracturados. Se presentan resultados para configuraciones simples y geometrías sencillas en modelos que se complican gradualmente. Además, con el objeto de estudiar la dinámica de la propagación en pozos petroleros, se presenta un análisis y simulaciones de registros sísmicos de onda completa para varios pozos en algunos yacimientos. Las contribuciones de esta investigación arrojaron resultados valiosos en la comprensión, descripción y predicción de los efectos producidos por la presencia de fracturas y distintas heterogeneidades en la propagación de ondas. Se espera en un futuro cercano que el modelado matemático encuentre soluciones confiables que coadyuven en la toma de decisiones en varios campos de la ingeniería y la geofísica.

ABSTRACT

The study of elastic wave propagation in fractured media and the analysis of the scattering and diffraction by fractures, cavities, inclusions or vugs have numerous applications in engineering and geophysics. Some of these applications are: cavities detection in civil engineering, localization of fluid filled cracks and fractures in oil exploration and the description of cracks systems in hydrofracturing experiments. On the other hand, the heterogeneous nature of fractured media is the main reason of difficult technical problems. Just to mention some; the excessive attenuation of waves in exploration seismology, the characterization of diffractors in seismic studies, the variations on hydrocarbon production and its low recovery rates in the petroleum industry, the uncertainties in estimations of permeability and fluid saturation in flux problems, among others. Thus, in order to understand the elastic behavior of a given fractured or porous media it is necessary to determine the physical characteristics of such heterogeneities: geometry, orientation, spatial distribution, seismic response and its spectral properties. In this work, a set of analytical and numerical solutions oriented to study the problems of scattering, diffraction and attenuation of elastic waves in heterogeneous models is presented. Results for simple configurations and geometries that are gradually complicated are given. Moreover, with the goal to study the dynamics of wave propagation at the borehole's neighborhood, analyses and simulations of sonic waveforms for various wells at some reservoirs are presented. The contributions of this research appear to have some bearing on the description, understanding and assessment of the effects caused by fractures and several heterogeneities for the wave propagation phenomena. It is expected that in a near future, the mathematical modeling may find trustworthy solutions to help on crucial decisions in several fields of engineering and geophysics.

INTRODUCCIÓN

La estructura de la Tierra ha sido extensivamente estudiada usando ondas elásticas generadas por sismos naturales y fuentes hechas por el hombre. En sismología clásica la Tierra es considerada como una secuencia de estratos con diferentes propiedades elásticas, las cuales se determinan a partir de los tiempos de viaje leídos de las ondas de cuerpo y la dispersión de ondas superficiales. La visión extrema de la Tierra como un medio aleatorio es complementaria a la caracterización clásica de medio estratificado. El uso del método de reflexión con fuentes modernas ha revelado que la corteza terrestre es heterogénea en escalas de varios kilómetros a decenas de kilómetros. Los registros de pozo adquiridos en la corteza somera, exhiben fuertes heterogeneidades aleatorias en rangos de observación de longitudes de onda corta. Es en esta escala es donde el estudio de la difracción múltiple por fracturas y heterogeneidades se vuelve crucial para el correcto entendimiento del fenómeno de propagación de ondas en medios complejos.

El análisis de la difracción por fracturamiento, cavidades e/o inclusiones tiene numerosas aplicaciones tanto en ingeniería como en geofísica. Estas incluyen por ejemplo, la detección de cavidades en ingeniería civil, la localización de fracturas que contienen fluido en exploración petrolera y la descripción de un sistema de fracturas en experimentos de hidrofracturamiento (Aki *et al*, 1982, Baria *et al*, 1987, Stewart *et al*, 1981). Por otro lado, es bien sabido que la naturaleza heterogénea de los medios fracturados es la razón principal de una serie de problemas técnicos en ingeniería y geofísica. Sólo por mencionar algunos; la atenuación excesiva de las ondas en sismología de exploración, la caracterización de difractores en estudios sísmicos, las variaciones en la producción de hidrocarburos y sus bajas tasas de recuperación en la industria petrolera, las estimaciones de la permeabilidad y la saturación de los fluidos en problemas de flujo, entre muchos otros. Así pues, es necesario determinar las características físicas de estas heterogeneidades: geometría, orientación, distribución espacial, respuesta sísmica y caracterización espectral, con el fin de inferir el comportamiento sísmico de un medio fracturado o poroso.

Las ondas sísmicas son afectadas por el tipo de porosidad y por la influencia de las constantes elásticas (Choquette & Pray, 1970). Otros parámetros que afectan las propiedades de las ondas sísmicas son: el contenido de fluido, la mineralogía, la presión y la temperatura (Wang *et al*, 1991). La importancia de los modelos matemáticos en la interpretación sísmica se ilustra en Stiteler & Chacartegui, (1997). Estos autores realizaron un análisis de sismogramas sintéticos que permitió cuantificar los efectos de borde de las ondas y sus múltiples. Diversos trabajos en el campo del modelado incluyen explícitamente atenuación y anisotropía (por ejemplo Carcione, 1995; Carcione, 1996(a), 1996(b); Carrion *et al*, 1995). Otros estudios para medios porosos son: Carcione (1996(c) y (d)); Carcione & Quiroga-Goode, (1996(a) y (b)); Carcione & Seriani (1997) y Carcione & Tinivella, (2000).

Varios autores han estudiado la dispersión por inclusiones utilizando diferentes métodos numéricos. Achenbach *et al*, (1978) investigaron los efectos de una fractura con forma de moneda usando longitudes de onda menores que la dimensión de la fractura; ejemplos con dos fracturas pueden consultarse en Bostrom & Eriksson (1993). McMechan (1982) derivó las resonancias características de una cavidad llena de fluido sometida a excitación sísmica. Fehler & Aki (1978) y Fehler (1982) estudiaron interacciones de ondas elásticas con un medio fluido viscoso, y la difracción causada por una fractura con fluido utilizando un esquema de diferencias finitas (Chouet, 1986). Los trabajos de Bouchon (1985) y Campillo & Bouchon (1985) utilizan un método que combina una formulación de elementos de frontera y número de onda discreto. En estos se ha demostrado la capacidad para incluir formas arbitrarias de discontinuidades, aunque el tiempo de cómputo disponible limita el número de fracturas considerado. Técnicas diferentes buscan formalismos estadísticos que permiten la generalización de los resultados tendentes a obtener distribuciones de propiedades de medios equivalentes (Sabina & Willis, 1989).

Este trabajo de tesis se enfoca principalmente al desarrollo, experimentación y aplicación de modelos matemáticos, métodos analíticos y métodos numéricos para caracterizar y estudiar la respuesta sísmica, los patrones de difracción y la respuesta espectral, producidos por la propagación de ondas en medios que contienen fracturas. Se llevan a cabo estudios sobre aspectos fundamentales de la física de las ondas, análisis de dispersión y de atenuación de ondas sísmicas en estos medios. Parte de las investigaciones tienen como objeto entender en lo fundamental la respuesta sísmica de medios heterogéneos (fractura, cavidad, inclusión y fractura con fluido) y de medios con más de una heterogeneidad. Por otro lado, se considera como un paso esencial poder establecer relaciones entre las propiedades petrofísicas del medio y los resultados de las simulaciones matemáticas mediante los análisis y el modelado sintético de datos de registros sísmicos de onda completa. Además de estos problemas, también se estudia el análisis de dispersión y la atenuación de las ondas sísmicas en la vecindad de pozos en yacimientos fracturados.

La difracción de ondas por inclusiones cilíndricas y esféricas sólidas o líquidas puede simularse mediante técnicas analíticas basadas en los métodos de separación de variables. Para la variable radial se requieren funciones de Hankel o de Bessel. Las variables angulares requieren funciones trigonométricas y/o funciones de Legendre. Es posible inferir los efectos mediante la suma apropiada de las expansiones de funciones de onda. En el caso de formas arbitrarias y tratamiento de sistemas de grietas, el método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés) es fundamental en el desarrollo del presente trabajo. Este método de representación integral de frontera (Sánchez-Sesma & Campillo, 1991; Sánchez-Sesma & Luzón, 1995), ha sido usado para estudiar la difracción causada por un sistema simple y/o múltiple de fracturas que contienen fluido (Pointer *et al*, 1998; Peterson *et al*, 1983). En particular, el IBEM muestra sus ventajas en el tratamiento de grietas de forma arbitraria y en sistemas de grietas planas. La validación y calibración del IBEM es magnífica, pues en este trabajo de tesis se ha logrado reproducir la solución reportada por Achenbach *et al*, (1983) para una grieta bidimensional ante incidencia de ondas P planas. Los casos de inclusiones y/o heterogeneidades múltiples se resuelven empleando las interacciones entre campos difractados y objetos difractores.

Para comprender sistemas complejos de cavidades, inclusiones y/o fracturas es necesario estudiar primero el comportamiento de un solo elemento bajo condiciones del lugar (*in situ*). De tal forma que se formule un estudio gradual de los efectos de la propagación de ondas en medios con un solo difractor y después se consideren medios con un número arbitrario de heterogeneidades. Así, se busca conocer los efectos de grietas alineadas o con disposición arbitraria ante el arribo de ondas planas y superficiales. El mismo problema es tratado con una distribución de poros en los que su distancia media, tamaño y consistencia siguen criterios cuantitativos. Si bien, el problema de interés es el tridimensional, se abordan primero los casos bidimensionales. Si las discontinuidades son poros, entonces es posible que la energía sísmica en ciertas frecuencias quede atrapada y se generen resonancias. Estos fenómenos reiterados de interferencias pueden detectarse en los espectros de señales temporales y revelar la forma, dimensión y consistencia de las cavidades.

Con el objeto de validar las soluciones obtenidas y ponderar la extensión al tratamiento de problemas con sistemas de fracturas que no pueden ser modelados analíticamente, se analizan y aplican los Métodos de Diferencias Finitas, Elementos Espectrales y Pseudo-Espectral con el fin de obtener comparaciones con las soluciones analíticas propuestas. El Método de Diferencias Finitas ofrece un camino directo para calcular y resolver la ecuación de onda a partir del problema formulado en términos de ecuaciones básicas, condiciones iniciales y de frontera. Implica un mínimo de esfuerzo analítico mediante el empleo intensivo de computadoras digitales. El método es en general flexible, y puede ser aplicado a casi cualquier cuerpo inhomogéneo y de forma virtualmente arbitraria. Tiene mayores ventajas sobre otros métodos en cuanto a exactitud de resultados, facilidad en la preparación de un modelo e implementación de una fuente sísmica, también en la reducción del efecto de fronteras artificiales impuestas con un carácter finito. Todo esto sin ninguna otra habilidad que un programa de computadora. El tamaño y complejidad de un problema que puede ser resuelto con el Método de Diferencias Finitas está limitado por la capacidad de cómputo disponible. Un algoritmo eficiente debe buscar la máxima explotación de la simetría del problema, la simplificación de las ecuaciones básicas y las condiciones de frontera. Por ello es de gran importancia contar con algoritmos que minimicen la cantidad de memoria requerida y el tiempo de cómputo.

El Método Pseudo-Espectral o de Fourier utiliza una malla numérica espacial para calcular las derivadas espaciales por medio de la transformada rápida de Fourier. Las derivadas temporales, las cuales aparecen en la ecuación de onda se calculan con una diferenciación de segundo orden. El esquema requiere mucho menos puntos de discretización que otros métodos directos para lograr la misma exactitud. Sin embargo, se sabe que el Método Pseudo-Espectral puede ser más eficiente que los métodos de Diferencias Finitas, especialmente cuando se tratan modelos tridimensionales. El Método Pseudo-Espectral se utiliza en esta investigación en su forma proyectada mediante una formulación variacional. De esta forma es posible calcular la contribución de los campos generados por irregularidades cercanas a la superficie. El uso de métodos numéricos y/o estadísticos para obtener soluciones aproximadas, la mayoría de las veces, es muy costoso en términos de cómputo. Por esto se pretende emplear al Método Pseudo-Espectral, ya que entre sus

múltiples ventajas se encuentran la disminución de los tiempos de cálculo y el bajo requerimiento de memoria computacional. Habrá que tomar en cuenta que el uso de estos métodos representa una alternativa con la cual no se obtienen soluciones tan precisas, pero se reduce el tiempo de cómputo en muchos órdenes de magnitud y las soluciones son satisfactorias. Para el desarrollo de los códigos se usan técnicas de modelado que emplean una discretización de una malla bidimensional horizontal y familias de funciones ortogonales de prueba en la dirección vertical. Esto permite tratar la variabilidad del material y el cálculo del campo sísmico. Este método es explícito en el tiempo.

La precisión del cálculo numérico de sismogramas sintéticos en modelos realistas bidimensionales y tridimensionales se vuelve una necesidad para la caracterización de medios fracturados. Un arsenal de técnicas está disponible para este propósito, entre ellas sobresalen los métodos denominados “*directos*”, por su formulación y solución explícita en el dominio del tiempo. En este grupo se encuentra el Método de Elementos Espectrales (SEM, por sus siglas en inglés) (Komatitsch & Vilotte, 1998). El SEM es un método variacional que se usa para la aproximación espectral de las ecuaciones de onda elástica e inelástica 2 y 3D en medios con geometrías complejas. Una gran ventaja de este método es que incorpora de manera natural las superficies libres y representa de forma muy precisa la propagación de ondas de cuerpo y superficie. Esta técnica introduce condiciones de frontera absorbente en una forma variacional para simular dominios físicos no acotados. Se utiliza una integración con nodos Gauss-Lobato-Legendre y una interpolación del dominio físico en términos de polinomios de Lagrange. La discretización en el tiempo se lleva a cabo empleando un esquema de conservación del momento de energía que puede plantearse en un formato clásico explícito-implícito predictor/multi-corrector. El método combina la flexibilidad geométrica de un método de elemento finito de bajo orden con una tasa de convergencia rápida asociada a las técnicas espectrales incluso cuando se trata de geometrías irregulares y propiedades elásticas heterogéneas. Más aún, la solución obtenida presenta dispersión numérica muy baja.

Este trabajo de tesis está enfocado a la descripción, comprensión y predicción de los efectos que producen la presencia de fracturas y distintas heterogeneidades en la propagación de ondas elásticas. Los resultados aquí reportados muestran el enorme potencial del modelado matemático en la solución de problemas de difracción múltiple en regímenes de propagación a frecuencias características medianas y altas. Podemos afirmar que estos resultados son un magnífico punto de partida para el futuro desarrollo y aplicación de las técnicas analíticas y numéricas aquí presentadas. Además, los estudios y análisis de los datos sísmicos de onda completa mediante el modelado matemático de la propagación de ondas elásticas en pozos son muy escasos. La adquisición, manejo, procesado, modelado e interpretación de formas de onda completa en pozos es una actividad poco explotada mundialmente y su requerimiento en exploración petrolera es cada vez mayor. Por su lado, la metodología propuesta para la extracción de atenuación con base en el análisis de la coda de las formas de onda completa de pozo parece ser una técnica original y promisoría, pues los resultados obtenidos correlacionan muy bien con los registros geofísicos convencionales observados.

II. PROPAGACIÓN Y DIFRACCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN 2 Y 3D

II.1. Difracción de ondas elásticas por una grieta

Las ondas difractadas se generan cuando un obstáculo de dimensiones finitas interfiere con las ondas incidentes. Existen dos propiedades que deben ser consideradas cuando se estudia la difracción de ondas elásticas debida a una grieta. Primero, los desplazamientos y/o esfuerzos pueden ser discontinuos a través de las superficies de la grieta. Segundo, sus esquinas generan ondas difractadas. A partir de un punto de vista teórico consideraremos una grieta como una discontinuidad de espesor-cero en el interior de un sólido elástico 2D. Las superficies de la grieta se toman como superficies libres donde la tracción es nula. Una derivación detallada del resultado original de Sommerfeld se considera más allá de lo que abarca el presente capítulo. Se puede encontrar mayor información en Sommerfeld (1949). A continuación se describe la forma de la solución de Sommerfeld y como se usa esta para construir la solución analítica para una grieta finita. Esta solución se debe a Sánchez-Sesma & Iturrarán-Viveros (2001).

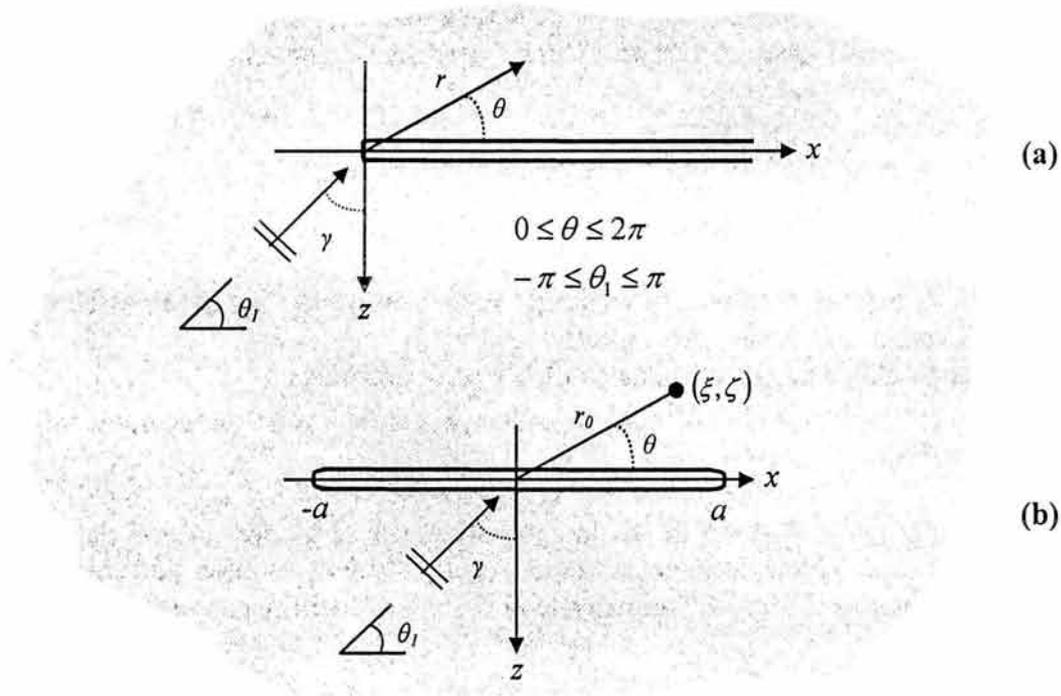


Fig. 2.1.1. Onda SH incidente sobre (a) una grieta semi-infinita y (b) una grieta finita.

Las ondas armónicas por desplazamiento anti-plano en el tiempo se definen por un desplazamiento en la dirección de y de la forma $v(x, z) \exp(-i\omega t)$ donde $v(x, z)$ satisface la ecuación de Helmholtz $\nabla^2 v + k^2 v = 0$, ∇^2 es el laplaciano bidimensional, $k = \omega/\beta =$ número de onda, $\omega =$ frecuencia angular, $\beta = \sqrt{\mu/\rho} =$ velocidad de onda de corte, $\mu =$ módulo de elasticidad de cortante y $\rho =$ densidad de masa. Considere la intersección de una grieta semi-infinita de espesor cero uniforme con el plano x - z , como se muestra en la Fig. 2.1.1(a). Una onda plana por una deformación anti-plana que incide sobre una grieta se define como

$$v^{(i)} = v_0 \exp[ikx \operatorname{sen} \gamma - ikz \operatorname{cos} \gamma] \quad (2.1.1)$$

donde γ es el ángulo de incidencia mostrado en la Fig. 2.1.1. La dependencia temporal armónica se omitirá de aquí en adelante. La presencia de la grieta provoca campos difractados y refractados. El campo total puede entonces ser expresado en la forma

$$v^{(t)} = v^{(i)} + v^{(r)} + v^{(d)} \quad (2.1.2)$$

donde $v^{(i)}$ es la onda incidente, $v^{(r)}$ es la onda geométrica reflejada y $v^{(d)}$ es el campo difractado. La ec. (2.1.2) describe el efecto total generado por la presencia de la grieta para un campo de ondas incidente. El campo $v^{(d)}$ debe satisfacer lo siguiente:

- (1) la ecuación de Helmholtz;
- (2) las caras de la grieta tienen tracciones libres, tales que

$$\frac{\partial v^{(d)}}{\partial z} = 0, \quad x > 0, \quad z = 0; \quad (2.1.3)$$
- (3) $v^{(d)}$ es finita y continua en cualquier lugar incluyendo las esquinas de la grieta, pero discontinua a través de la grieta.
- (4) la esquina de la grieta irradia energía y no la absorbe;
- (5) el campo difractado $v^{(d)}$ debe satisfacer la condición de radiación al infinito de Sommerfeld.

Para una grieta plana el método de las imágenes permite una construcción del problema ramificado para la solución de la ecuación de onda tal que la esquina de la grieta sea la rama guía. La solución clásica de Sommerfeld al problema de difracción está dado por

$$v^{(t)} = W(r, \theta - \theta_1) + W(r, \theta + \theta_1), \quad (2.1.4)$$

donde la función $W(r, \theta - \theta_1)$ tiene un periodo 4π en la variable $\theta \pm \theta_1$.

En su trabajo Sommerfeld probó que W en la ec. (2.1.4) puede representarse por una integral de Fresnel en términos de la función $F(z)$ definida por

$$F(z) = \exp(-iz^2) \int_0^{\infty} \exp(i\tau^2) d\tau \quad (2.1.5)$$

Las propiedades de la función $F(z)$ pueden encontrarse en Sánchez-Sesma & Iturrarán-Viveros (2001). Así el campo total esta dado por

$$v^{(i)} = v_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i(kr - \pi/4)} \left\{ F \left[\sqrt{2kr} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_1 - \theta}{2} \right) \right] + F \left[\sqrt{2kr} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_1 + \theta}{2} \right) \right] \right\}, \quad (2.1.6)$$

la ec. (2.1.6) es la clásica y bien conocida solución obtenida por Sommerfeld para una grieta semi-infinita. Esta solución es completa, así pues, incluye los campos incidente, reflejado y difractado.

A continuación la solución de Sommerfeld se descompone en una suma de campos incidentes, reflejados y difractados. La idea es superponer la solución para una grieta semi-infinita en el intervalo $(-a, +\infty)$ con la misma solución para otra grieta semi-infinita en el intervalo $(-\infty, +a)$. Sin embargo, la grieta finita (con extremos en $x = \pm a$) puede suponerse como el lugar geométrico del espacio donde dos grietas semi-infinitas se intersecan. Debido a que la fórmula de Sommerfeld es completa, cuando se superponen las dos soluciones para dos grietas semi-infinitas, las ondas incidentes y reflejadas se repiten en la intersección de las dos grietas, no obstante estas se eliminan. Las simetrías de los campos generados son identificadas y explotadas para construir la solución para la grieta finita. Esta construcción es iterativa y conduce a series geométricas convencionales, permitiendo el cálculo del campo total en los lados de la grieta. Identificaremos los lados de la grieta por la exposición al frente plano de ondas SH como el lado iluminado (denotado con +); y el lado opuesto como lado de sombra (denotado con -). La geometría para la incidencia de ondas planas sobre una grieta finita se muestra en la Fig. 2.1.1(b).

El campo total de desplazamientos $v^{(i)}$ para la grieta finita se construye como sigue:

- (i) Añadir el campo incidente $v^{(i)}$ en todas partes como sino existiera grieta.
- (ii) Añadir el campo reflejado $v^{(r)}$ con signo positivo para el lado iluminado y negativo en el lado de sombra. Este campo reflejado cancelará al campo incidente en el lado de sombra y completará el campo geométrico $(v^{(i)} + v^{(r)})$ en el lado iluminado.
- (iii) Añadir el campo difractado $v^{(d)}$ producido en ambos lados de la grieta.

Esta construcción permitirá encontrar una expresión simple para el campo difractado en el caso de una grieta finita. Permita definir la siguiente función auxiliar:

$$s(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i(kr - i\frac{\pi}{4})} \quad (2.1.7)$$

En el lado de sombra no hay campo incidente ni reflejado para cancelarse entre ellos. Sin embargo, el campo difractado coincide con el campo total $v^{(d)} = v^{(i)-}$. Calcularemos el campo difractado sobre el lado de sombra (p. ej. $\theta = 0$) generado en la esquina $x = -a$ de la grieta semi-infinita, de acuerdo con la formula de Sommerfeld, esto es

$$v^{(i)-} = v_0 e^{-ikaseny} s(r_1) F\left(\sqrt{2kr_1} \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}\right), \quad (2.1.8)$$

donde $r_1 = a + x$ y $\theta_1 = (\pi/2) - \gamma$. Con el objeto de calcular el campo total sobre el lado iluminado (p. ej. $\theta = 2\pi$), la ec. (2.1.6) se utiliza nuevamente:

$$v^{(i)-} = v_0 e^{-ikaseny} s(r_1) F\left(-\sqrt{2kr_1} \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}\right), \quad (2.1.9)$$

Aplicando propiedades de simetría en $F(-z)$ y usando la siguiente identidad,

$$1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta_1/2) = \cos(\theta_1) = \cos(\pi/2 - \gamma) = \operatorname{sen} \gamma, \quad (2.1.10)$$

La ec. (2.1.9) queda como

$$v^{(i)+} = 2v_0 e^{ikxseny} - v_0 e^{-ikaseny} s(r_1) F\left(\sqrt{2kr_1} \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}\right), \quad (2.1.11)$$

en el lado iluminado. El primer término de la ec. (2.1.11) es el campo incidente más el campo reflejado $v^{(i)} + v^{(r)}$ y el segundo término es el opuesto del campo difractado en el lado de sombra dado en la ec. (2.1.8). Así pues,

$$v^{(d)+} = -v^{(d)-}. \quad (2.1.12)$$

De aquí, una vez calculado el campo difractado en el lado de sombra, el correspondiente campo difractado sobre el lado iluminado se obtiene inmediatamente. Como las ondas difractadas se generan en ambos extremos de la grieta, el mismo análisis se realiza para el extremo derecho de la grieta ($x = a$). Sin embargo, el sistema de referencia cambia dependiendo del extremo izquierdo o derecho considerado. Como resultado, cuando se considera el extremo $x = a$ el ángulo de incidencia es $\theta_2 = \pi/2 + \gamma$. Así, una primera aproximación al campo difractado en el lado de sombra generado por ondas SH impuesto sobre la grieta finita esta dado por

$$v_0^{(d)-} = v_0 e^{-ikaseny} s(r_1) F\left(\sqrt{2kr_1} \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}\right) + v_0 e^{ikaseny} s(r_2) F\left(\sqrt{2kr_2} \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}\right), \quad (2.1.13)$$

donde $r_2 = a - x$ representa las ondas viajando de izquierda a derecha. El primer término en la ec. (2.1.13) corresponde a la onda difractada hacia la derecha y el segundo término a la

onda difractada hacia la izquierda. Con el objeto de tener una mejor aproximación se hace la siguiente consideración para las ondas difractadas generadas en ambas esquinas de la grieta ($x = \pm a$). Existen ondas cilíndricas que viajan a lo largo de la grieta, alcanzando esquinas opuestas de la grieta con un ángulo dado de $\gamma \rightarrow \pm\pi/2$. La pregunta que surge es, bajo que circunstancias las ondas pueden aproximarse como ondas planas para calcular ondas cilíndricas reflejadas de las orillas. Este es un punto clave que merece buena atención. Poco después de que Sommerfeld había derivado su solución clásica, Macdonald (1902) obtuvo expansiones en series de términos de funciones de Bessel para el campo total en una cuña para ambas ondas incidentes, planas y cilíndricas. La solución de Macdonald incluye el caso límite de un semi-plano, así ésta es equivalente a la fórmula de Sommerfeld. Más detalles sobre esta solución pueden encontrarse en Macdonald (1902). Cuando las ondas difractadas alcanzan una de las esquinas $\theta_1 = \pi$ o $\theta_2 = \pi$, cada reflexión de la difracción tiene una nueva amplitud y fase. Es necesario multiplicarlas por un factor Z dado por

$$Z = s(2a)F(\sqrt{4ka}), \quad (2.1.14)$$

donde la función $s(x)$ está definida en la ec. (2.1.7). El factor Z toma en cuenta las reflexiones debidas a las ondas difractadas en el lado iluminado. El siguiente paso es coleccionar todos los términos que corresponden a las ondas difractadas viajando en ambas direcciones. El campo difractado puede entonces expresarse por

$$\begin{aligned} v^{(d)-} = v_0^{(d)-} + v_1 \{ [Z + Z^3 + \dots] s(r_1) F(\sqrt{2kr_1}) - [1 + Z^2 + \dots] s(r_2) F(\sqrt{2kr_2}) \} \\ + v_2 \{ [Z + Z^3 + \dots] s(r_2) F(\sqrt{2kr_2}) - [1 + Z^2 + \dots] s(r_1) F(\sqrt{2kr_1}) \}, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

donde $v_0^{(d)-}$ esta dado por la ec. (2.1.13). Como las series de la ec. (2.1.15) son series geométricas convencionales con límite conocido, una expresión analítica para el campo difractado se puede obtener, esta se rescribe de la ec. (2.1.15) como

$$v^{(d)-} = v_0^{(d)-} + \frac{v_1 Z - v_2}{1 - Z^2} s(r_1) F(\sqrt{2kr_1}) + \frac{v_2 Z - v_1}{1 - Z^2} s(r_2) F(\sqrt{2kr_2}), \quad (2.1.16)$$

donde $v_0^{(d)-}$ esta dado por la ec. (2.1.13). Esta expresión analítica para el campo difractado para el lado de sombra de la grieta, utilizada en conjunto con las simetrías de los campos difractados y reflejados nos permite describir completamente el movimiento de ondas en ambos lados de la grieta. Una extensión de la ec. (2.1.16) para evaluar los campos lejos de la grieta es una tarea intrincada y no se abordará aquí. En su lugar seleccionamos una simple pero exacta aproximación basada en el teorema de representación de Somigliana (ver p. ej. Aki & Richards, 1980) y la ec. (2.1.16) queda como sigue

$$v^{(i)}(\xi) = - \int_a^\infty T^+(x, \xi) \Delta v(x) dS_x + v^{(i)}(\xi), \quad (2.1.17)$$

donde $T^+(x, \xi)$ es la función de tracciones de Green en el punto x sobre el lado iluminado debido a la aplicación de una fuerza unitaria en el punto ξ y $\Delta v(x) = v(x)^{(+)'} - v(x)^{(-)'}$ es el *Desplazamiento de Abertura de la Grieta* (COD, por sus siglas en inglés).

En todas las pruebas numéricas la grieta finita se ubica en un intervalo $[-a, a]$. La Fig. 2.1.2 muestra mapas de contornos de amplitudes de desplazamientos de $v^{(i)}$ dados por la ec. (2.1.17) para receptores ubicados a lo largo del eje x entre $x = -a$ y $x = a$ en el lado iluminado y en el lado de sombra (izquierda y derecha respectivamente) contra la frecuencia.

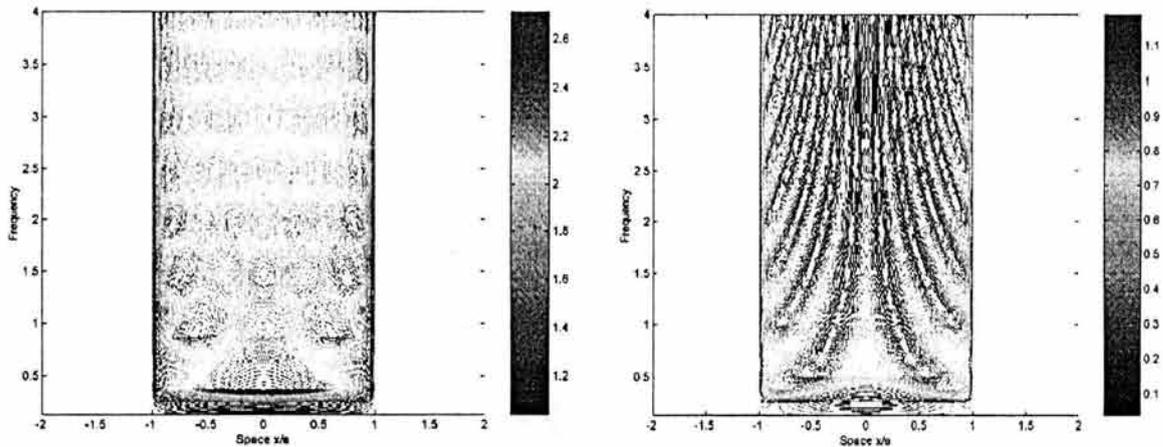


Fig. 2.1.2. Mapas de contornos para incidencia normal de ondas SH $\gamma = 0$. A la izquierda el lado iluminado y a la derecha el lado de sombra de la grieta.

Los diagramas corresponden a mapas de frecuencia-espacio ($f - x$) de las amplitudes del desplazamiento total a lo largo de ambos lados de la grieta contra la frecuencia normalizada $\eta = \omega a / \pi \beta$. La simetría en la geometría y la excitación es muy clara. Para el lado iluminado (izquierda), el número de picos crece con la frecuencia siguiendo aproximadamente una secuencia entera impar. Estos picos son débiles y muestran pequeñas fluctuaciones debido al ligero atrapamiento de la energía por la grieta.

En la Fig. 2.1.3 se ilustran patrones de radiación de ondas SH para campo lejano. La amplitud del campo difractado se grafica para los casos de una onda plana arribando a una grieta para valores de $ka = \pi, 2\pi, 4\pi$ y 6π respectivamente. Los receptores están ubicados a una distancia de $2a$ del origen. Se ha usado una discretización de la grieta para resolver la integral de la ec. (2.1.17). El número de lóbulos aumenta con la frecuencia. Estos patrones de radiación proveen información acerca de cómo las ondas difractadas se distribuyen en el espacio para una frecuencia dada y el ángulo de incidencia.

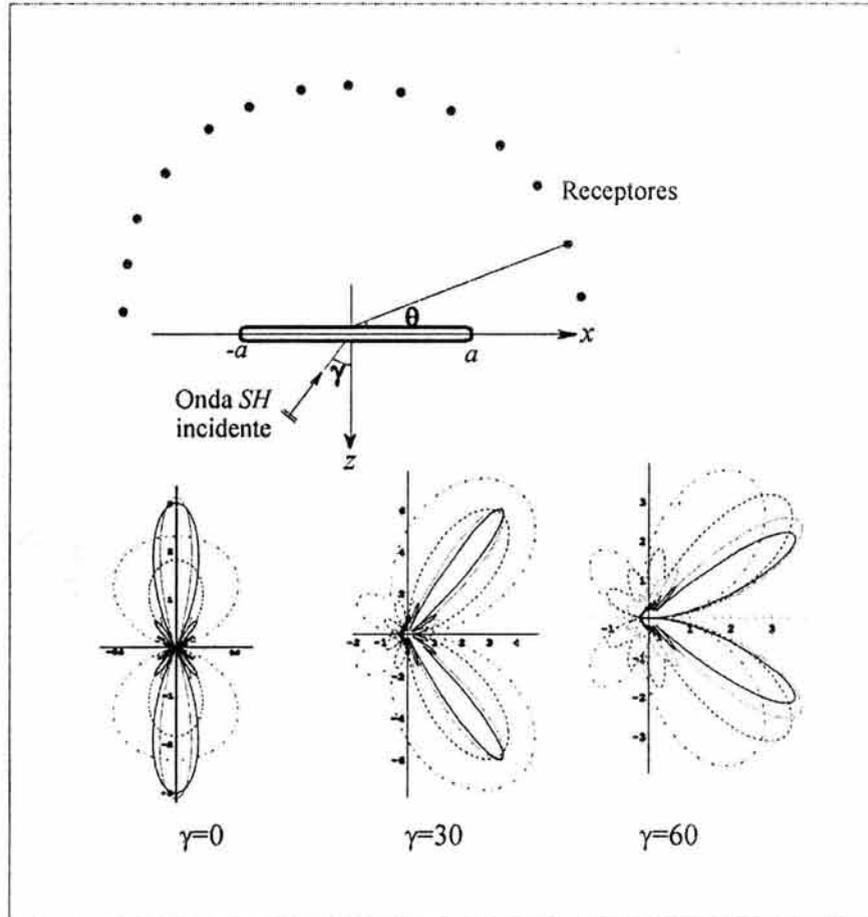


Fig. 2.1.3. Patrones de radiación de campo lejano para tres ángulos de incidencia.

Se calcularon sismogramas sintéticos a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia utilizando el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés). Las trazas corresponden al campo total de receptores ubicados a lo largo de una línea que contiene a la grieta. La variación en el tiempo del campo de onda incidente es un pulso de Ricker con periodo característico de $t_p = 0.7a/\beta$. La Fig. 2.4 muestra los sismogramas sintéticos para ambos lados de la grieta, el lado iluminado y lado de sombra, para ángulos de incidencia de $\gamma = 0^\circ$ y 30° (a y b respectivamente). Los resultados en el dominio del tiempo muestran que el campo incidente no está presente en el lado de sombra y que aparece duplicado en el lado iluminado. La amplitud de los campos difractados depende del periodo característico del pulso de Ricker y del ángulo de incidencia. Los ejemplos mostrados corresponden a longitudes de onda que son menores que el largo de la grieta (cerca de $0.7a$ para la frecuencia predominante o característica de la excitación). Para esta relativa alta frecuencia la difracción es notable y sólo para los primeros arribos desde las esquinas. La difracción es significativa en bajas frecuencias y tiene que cancelarse con el mencionado campo reflejado. De cualquier manera el COD debe ser nulo en la frecuencia cero.

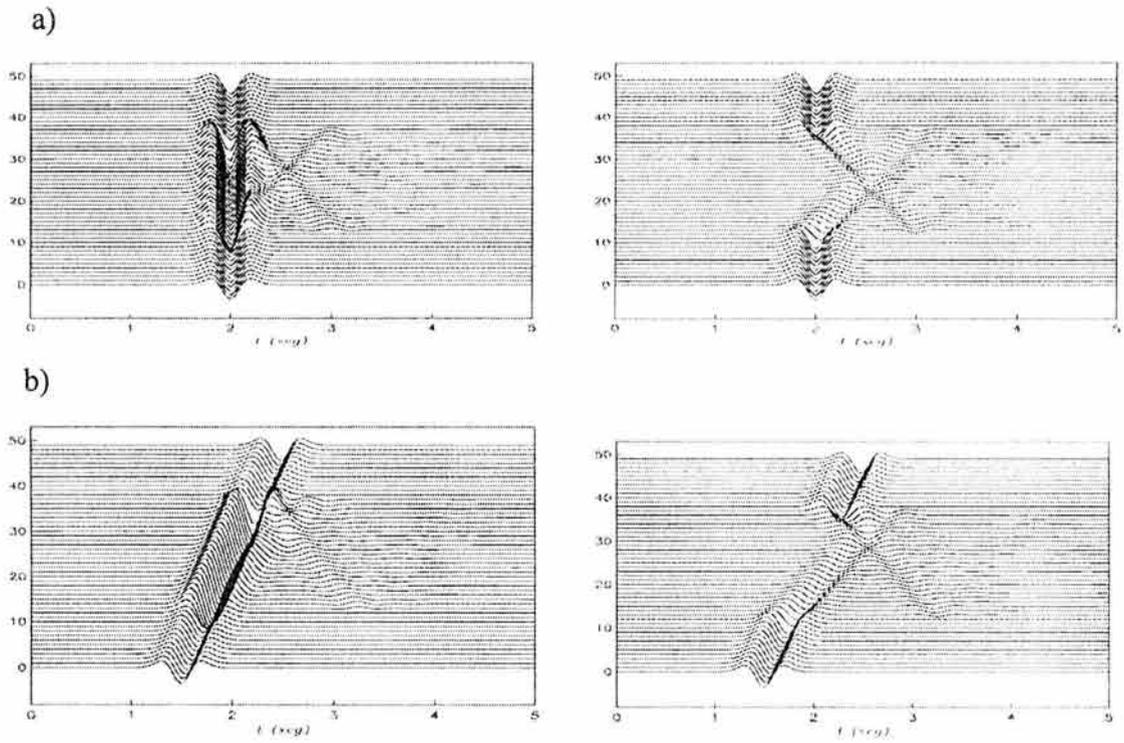


Fig. 2.1.4. Sismogramas sintéticos para $\gamma = 0^\circ$ y 30° (arriba y abajo respectivamente) sobre el lado iluminado (izquierda) y lado de sombra (derecha) en 51 receptores igualmente espaciados a lo largo del eje x .

II.2. Difracción de ondas elásticas por un cilindro

Se presenta a continuación la formulación de un modelo teórico bi- dimensional para el problema de condiciones locales definidas por fracturas o cavidades de forma cilíndrica y sección transversal circular. Esta obstrucción puede contener también un material elástico en su interior y tratarse como difractor elástico. El modelo de la Fig. 2.2.1 está formado por una obstrucción elástica de longitud infinita y sección transversal circular, incrustada en un semi- espacio elástico- lineal, isótropo y homogéneo. La excitación está dada por ondas de corte antiplanas SH con incidencia oblicua.

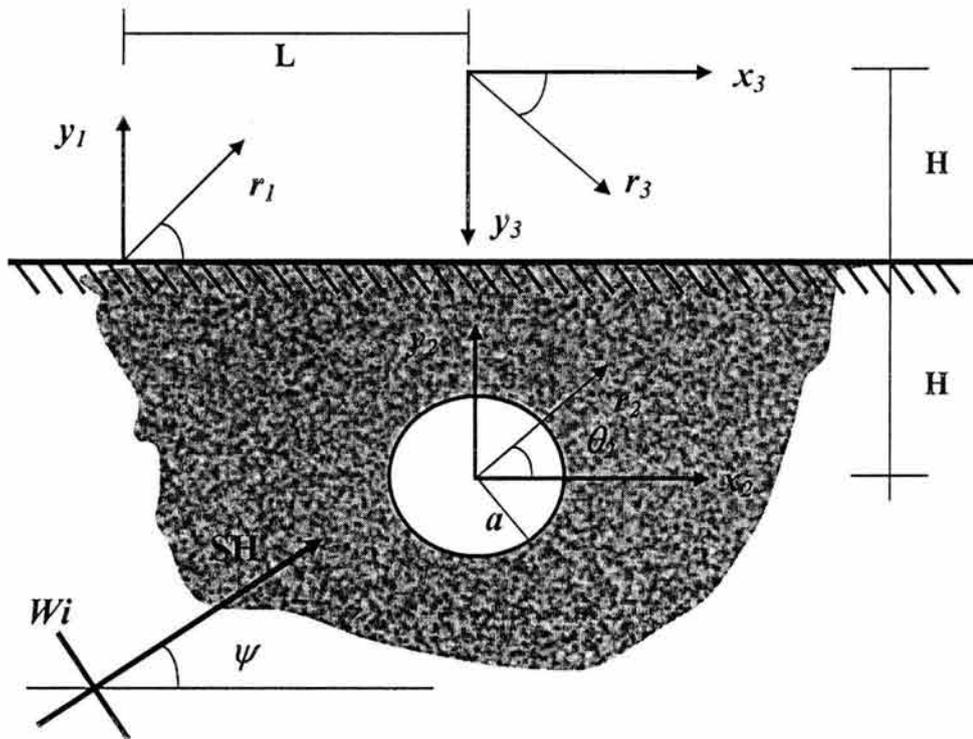


Fig. 2.2.1. Incidencia de una onda plana tipo SH sobre un cilindro difractor que puede estar vacío o relleno de un material elástico. La línea gruesa horizontal sombreada representa la superficie libre.

Múltiples aplicaciones en ingeniería y geofísica toman en cuenta la presencia de objetos enterrados o incluidos bajo una superficie libre. Del mismo modo, el modelo que aquí se resuelve analíticamente puede ser considerado sin tomar en cuenta el efecto de la presencia de una superficie libre. Esto con el objeto de estudiar la difracción solamente ocasionada por la presencia del cilindro en un espacio completo.

En un medio modelado como un sólido de Hooke, el desplazamiento W_s en la dirección de z que genera la propagación de ondas armónicas SH (estado estacionario), satisface la ecuación reducida de onda o ecuación de Helmholtz, ec. (2.2.1)

$$\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} + k_s^2 W_s = 0 \quad (2.2.1)$$

donde x, y = direcciones de referencia $k_s = \omega / \beta_s =$ número de onda de cortante. $\omega =$ frecuencia de excitación $\beta_s = \sqrt{\mu_s / \rho_s} =$ velocidad de propagación de ondas de corte, $\mu_s =$ módulo de cortante del semi- espacio y $\rho_s =$ densidad del semi- espacio.

El campo incidente sufrirá un fenómeno de difracción múltiple debido a la presencia de la superficie libre y la obstrucción. La superficie libre producirá reflexiones, mientras que la obstrucción generará tanto reflexiones como refracciones. Empleando el principio de superposición el campo total se puede construir como:

$$W_s = W^i + W^r + W_f^d + W_i^d \quad (2.2.2)$$

donde $W^i =$ campo incidente, $W^r =$ campo reflejado por la superficie libre en ausencia de la obstrucción $W_f^d =$ campo difractado por la superficie de la obstrucción (fuente) $W_i^d =$ campo reflejado por la superficie libre debido al campo W_f^d (imagen de W_f^d).

Si la excitación consiste en ondas planas armónicas de amplitud W_0 , con incidencia no vertical definida por un ángulo ψ el campo incidente en el sistema de coordenadas (x_1, y_1) está dado por la ec. (2.2.3):

$$W^i(x_1, y_1) = W_0 \exp[-ik_s(x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi)] e^{i\omega t} \quad (2.2.3)$$

donde $i = \sqrt{-1} =$ unidad imaginaria y t el tiempo. Y el campo W^r en (x_1, y_1) queda definido por la ec. (2.2.4):

$$W^r(x_1, y_1) = W_0 \exp[-ik_s(x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi)] e^{i\omega t} \quad (2.2.4)$$

Resolviendo la ec. (2.2.1) con el método de separación de variables, se encuentra que el campo difractado por la obstrucción en el sistema de coordenadas (r_2, θ_2) está dado por la ec. (2.2.5):

$$W_f^d(r_2, \theta_2) = W_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(k_s r_2) \cos n \theta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(k_s r_2) \operatorname{sen} n \theta_2 \right] e^{i\omega t} \quad (2.2.5)$$

donde A_n y B_n = coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera y $H_n^{(2)}(k_s r_2)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n . La ec. (2.2.5) satisface además la condición de irradiación al infinito ya que considera la atenuación geométrica. Parte de este campo fuente se reflejará por la superficie libre de tal suerte que es necesario introducir un campo imagen que tenga en cuenta dicha reflexión y se satisfaga por tanto la condición de superficie libre. Así el campo W_i^d en (r_3, θ_3) queda definido por la ec. (2.2.6):

$$W_i^d(r_3, \theta_3) = W_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(k_s r_3) \cos n\theta_3 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(k_s r_3) \operatorname{sen} n\theta_3 \right] e^{i\omega t} \quad (2.2.6)$$

Por tratarse de una obstrucción elástica se generará un campo refractado de ondas atrapadas dentro de la obstrucción. En (r_2, θ_2) el campo refractado está dado por la ec. (2.2.7):

$$W_c(r_2, \theta_2) = W_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(k_c r_2) \cos n\theta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_n(k_c r_2) \operatorname{sen} n\theta_2 \right] e^{i\omega t} \quad (2.2.7)$$

donde $k_c = \omega / \beta_c$, $\beta_c = \sqrt{\mu_c / \rho_c}$, μ_c = módulo de cortante de la obstrucción y ρ_c = densidad de la obstrucción. C_n y D_n = coeficientes complejos indeterminados que se determinan mediante las condiciones de frontera y $J_n(k_c r_2)$ = función de Bessel de primera especie y orden n . En lo sucesivo el factor de tiempo $e^{i\omega t}$ se sobrentiende a lo largo del trabajo.

Los coeficientes A_n , B_n , C_n y D_n que definen la solución del modelo se obtienen al satisfacer las condiciones de frontera en la interfase semiespacio-obstrucción. Suponiendo adhesión perfecta, dichas condiciones de frontera son de continuidad de desplazamientos y esfuerzos, esto es:

$$W_s(r_2, \theta_2) \Big|_{r_2=a} = W_c(r_2, \theta_2) \Big|_{r_2=a}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.2.8)$$

donde:

$$\sigma_{rz}(r_2, \theta_2) \Big|_{r_2=a} = \sigma_{rz}(r_2, \theta_2) \Big|_{r_2=a}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.2.9)$$

$$\sigma_{rz}(r_2, \theta_2) = \mu_j \frac{\partial W_j(r_2, \theta_2)}{\partial r_2}; \quad j = s, c \quad (2.2.10)$$

es el esfuerzo cortante en la dirección z producido por la propagación de ondas SH.

Para la solución del problema es necesario imponer las condiciones de frontera en la interfase semiespacio-obstrucción, para lo cual conviene expresar el campo total W_s con respecto al sistema de coordenadas (r_2, θ_2) con la ayuda del teorema de adición de Graf

(Graf, 1975). Haciendo esto y desarrollando el campo libre ($W' + W''$) en series de funciones de ondas cilíndricas es posible llegar a:

$$\begin{aligned}
 W_s(r_2, \theta_2) = & W_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2 \cos(k_s H \operatorname{sen} \psi) \exp(-ik_s L \cos \psi) \varepsilon_m (-i)^m \cos m \psi J_m(k_s r_2) + \right. \\
 & H_m^{(2)}(k_s r_2) A_m + \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(k_s r_2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[K_{nm}^+ A_n - \widehat{\delta}_{n0} L_{nm}^+ B_n \right] \cos m \theta_2 + W_0 \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 4 \operatorname{sen}(k_s H \operatorname{sen} \psi) i \exp(-ik_s L \cos \psi) (-i)^m \operatorname{sen} m \psi J_m(k_s r_2) + H_m^{(2)}(k_s r_2) B_m + \right. \\
 & \left. J_m(k_s r_2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[L_{nm}^- A_n + \widehat{\delta}_{n0} K_{nm}^- B_n \right] \operatorname{sen} m \theta_2 \right\}
 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

donde ε_m = factor de Neumann ($\varepsilon_0 = 1$ y $\varepsilon_m = 2$; $m \geq 1$), $\widehat{\delta}_{nm}$ = factor (no existe si $n = m$, =1 si $n \neq m$) y

$$K_{nm}^{+-} = \cos(n+m)\pi/2 H_{n+m}^{(2)}(2k_s H) \pm (-1)^m \cos(n-m)\pi/2 H_{n-m}^{(2)}(2k_s H) \tag{2.2.12}$$

Sustituyendo las ecs. (2.2.7) y (2.2.11) en las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.9) y empleando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas. Es posible obtener cuatro sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen los coeficientes A_n , B_n , C_n y D_n .

$$L_{nm}^{+-} = \operatorname{sen}(n+m)\pi/2 H_{n+m}^{(2)}(2k_s H) \pm (-1)^m \operatorname{sen}(n-m)\pi/2 H_{n-m}^{(2)}(2k_s H) \tag{2.2.13}$$

Sin embargo como no interesa la solución en la obstrucción sino en el espacio elástico, se pueden eliminar los coeficientes C_n y D_n obteniendo dos sistemas de ecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{nm}^+ A_n + \frac{2}{\varepsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] A_m - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_{nm}^+ B_n = \\
 -4 \cos(k_s H \operatorname{sen} \psi) * \exp(-ik_s L \cos \psi) (-i)^m \cos m \psi \quad ; \quad m = 0, 1, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_{nm}^- A_n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{nm}^- B_n + \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] B_n = \\
 -4 i \operatorname{sen}(k_s H \operatorname{sen} \psi) * \exp(-ik_s L \cos \psi) (-i)^m \operatorname{sen} m \psi \quad ; \quad m = 0, 1, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

donde la prima indica derivada con respecto al argumento y F_m = factor de obstrucción definido por:

$$F_m = \sqrt{\frac{\mu_c \rho_c}{\mu_s \rho_s} \frac{J'_m(k_c a)}{J'_m(k_s a)}} \quad (2.2.16)$$

Numéricamente los sistemas infinitos, ecs. (2.2.14) y (2.2.15), no se pueden resolver exactamente; una aproximación de la solución se obtiene al reducirlos a dimensión finita, truncando adecuadamente los órdenes m , n tal que la solución converja.

En notación matricial las ecs. (2.2.14) y (2.2.15) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} [c]_{11} & [c]_{12} \\ [c]_{21} & [c]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{I\}_1 \\ \{I\}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2.17)$$

donde:

$$[c_{mn}]_{11} = \left[(-1)^n K_{nm}^+ + \frac{2}{\varepsilon_m} \delta_{mn} D_m \right] \quad (2.2.18)$$

$$[c_{mn}]_{12} = \left[-(-1)^n L_{nm}^+ \right] \quad (2.2.19)$$

$$[c_{mn}]_{21} = \left[(-1)^n L_{nm}^- \right] \quad (2.2.20)$$

$$\{I_m\}_1 = \left\{ -4 \cos(k_s H \sin \psi) \exp(-ik_s L \cos \psi) (-i)^m \cos m \psi \right\} \quad (2.2.21)$$

$$[c_{mn}]_{22} = \left[(-1)^n K_{nm}^- + \delta_{mn} D_m \right] \quad (2.2.22)$$

$$\{I_m\}_2 = \left\{ -4i \sin(k_s H \sin \psi) \exp(-ik_s L \cos \psi) (-i)^m \sin m \psi \right\} \quad (2.2.23)$$

en donde c_{mn} = delta de Kroenecker (= 1 si $m = n$, = 0 si $m \neq n$) y D_m = coeficiente diagonal definido por :

$$\sqrt{D_m} = \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_c a)}{J'_m(k_s a) - F_m J'_m(k_c a)} \right] \quad (2.2.24)$$

Analizando el sistema matricial de ecuaciones resultante, ec. (2.2.17) se puede observar que el tipo de obstrucción, inclusión elástica o cavidad, modifica sólo los coeficientes

diagonales D_m . Así, cuando $\mu_c = 0$ se tiene el caso límite de cavidades y los coeficientes diagonales D_m de la ec. (2.2.17) se reducen a:

$$D_m|_{\mu_c=0} = \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m(k_s a)} \quad (2.2.25)$$

Una vez verificadas las funciones analíticas que se van a utilizar en la solución y cálculo de la formulación propuesta se procedió a calcular la respuesta en el tiempo para el caso en que una onda plana del tipo SH incide sobre una cavidad o inclusión elástica cilíndrica utilizando la formulación aquí presentada. La cavidad puede encontrarse en un espacio elástico infinito o en un semi-espacio elástico en presencia de una superficie libre. El resultado que se despliega en la Fig. 2.2.5 corresponde a una onda plana del tipo SH que incide sobre una cavidad cilíndrica. Los detectores se encuentran ubicados a una distancia unitaria a partir del radio r de la cavidad.

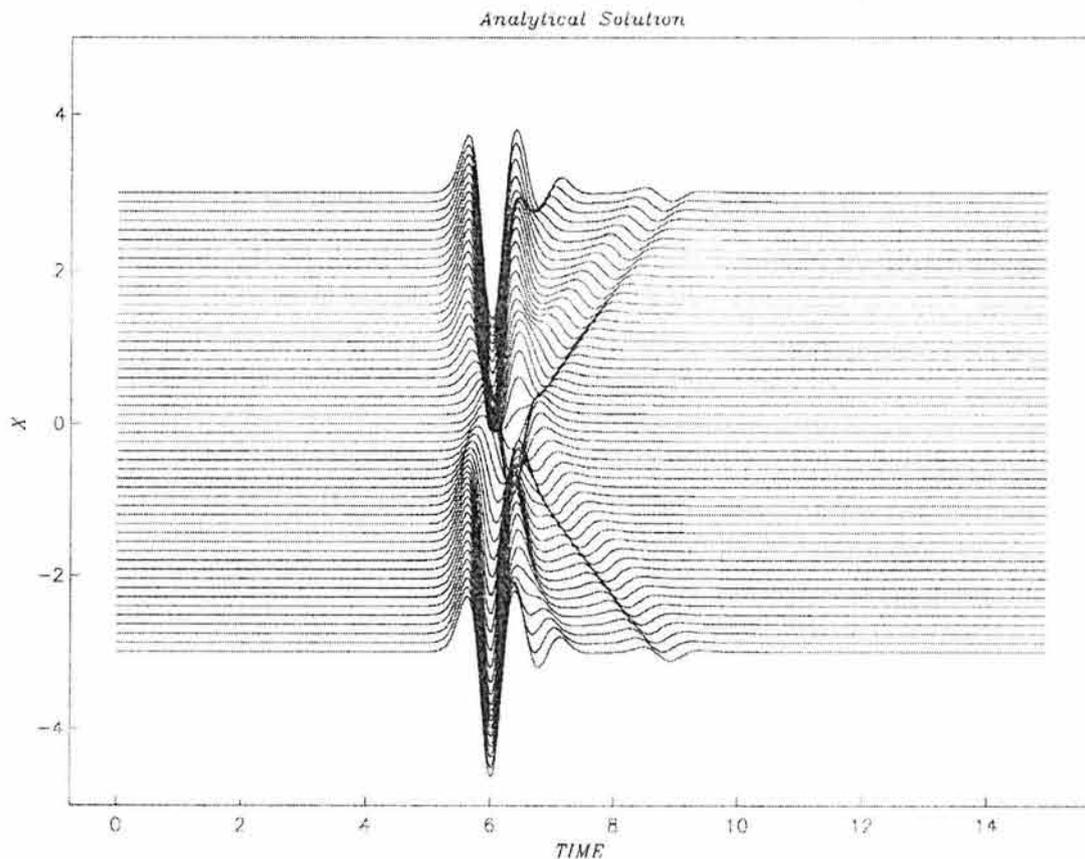


Fig. 2.2.5. Sismograma sintético a lo largo de x para una onda SH plana que incide como un pulso de Ricker de $t_p = 1.0$ s y $t_s = 6.0$ s.

Se trata de incidencia normal de una onda anti-plana con excitación dada por un pulso de Ricker con $f_c = 1.0$ Hz. y $t_s = 6.0$ s. Los parámetros elásticos del espacio infinito son unitarios en todos los casos. Los resultados en tiempo para este ejemplo son calculados con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia. Nótese como el campo incidente de onda plana es retardado al interactuar con la cavidad y se genera una onda difractada hacia el exterior del espacio.

Así mismo se procedió a calcular la respuesta en el tiempo para el caso en que una onda plana del tipo SH, incide sobre una cavidad o inclusión elástica cilíndrica en presencia de una superficie libre. La presencia de la superficie libre se toma en cuenta como parte del campo reflejado y se superpone linealmente al la solución del desplazamiento en tiempo. El resultado se despliega en la Fig. 2.2.6 y corresponde a una onda que incide sobre una cavidad cilíndrica, los detectores se encuentran ubicados sobre la superficie en la dirección x y a una distancia $H = 2a$ de la cavidad, también este caso se trata de incidencia normal.

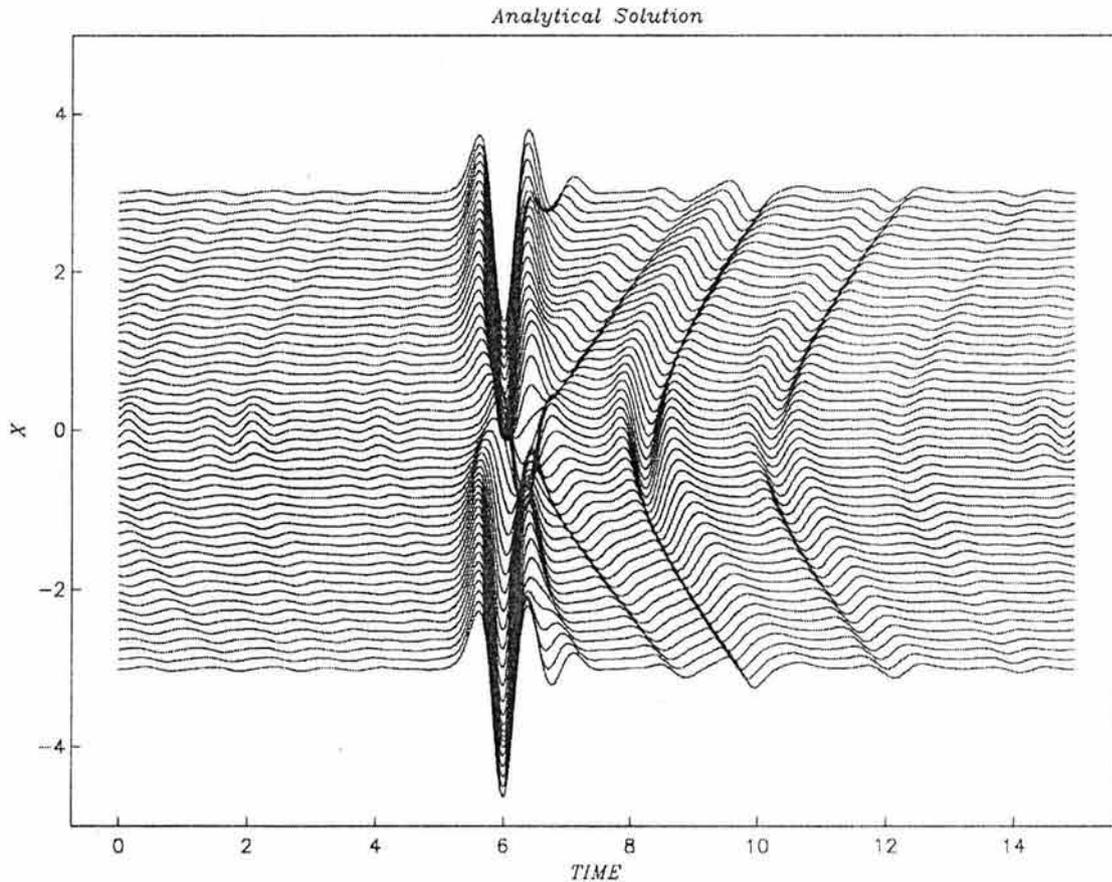


Fig. 2.2.6. Sismograma sintético a lo largo de x para una onda SH plana que incide como un pulso de Ricker de $t_p = 1.0$ s y $t_s = 6.0$ s. Los detectores se encuentran ubicados sobre la superficie libre.

Con fines de comparación y validación se realizó el cálculo del ejemplo anterior, sólo que esta vez se utilizó el Método de Elementos Espectrales (SEM por sus siglas en inglés). Este método es de alta precisión en configuraciones de este tipo y es explícito en tiempo (Komatitsch comunicación personal). En la Fig. 2.2.7 se exhiben historias de tiempo (sismogramas sintéticos) para el mismo modelo de cavidad cilíndrica empleado en la Fig. 2.2.1. De igual manera los parámetros elásticos y la distribución espacial de estaciones son las mismas que las de la Fig. 2.2.6.

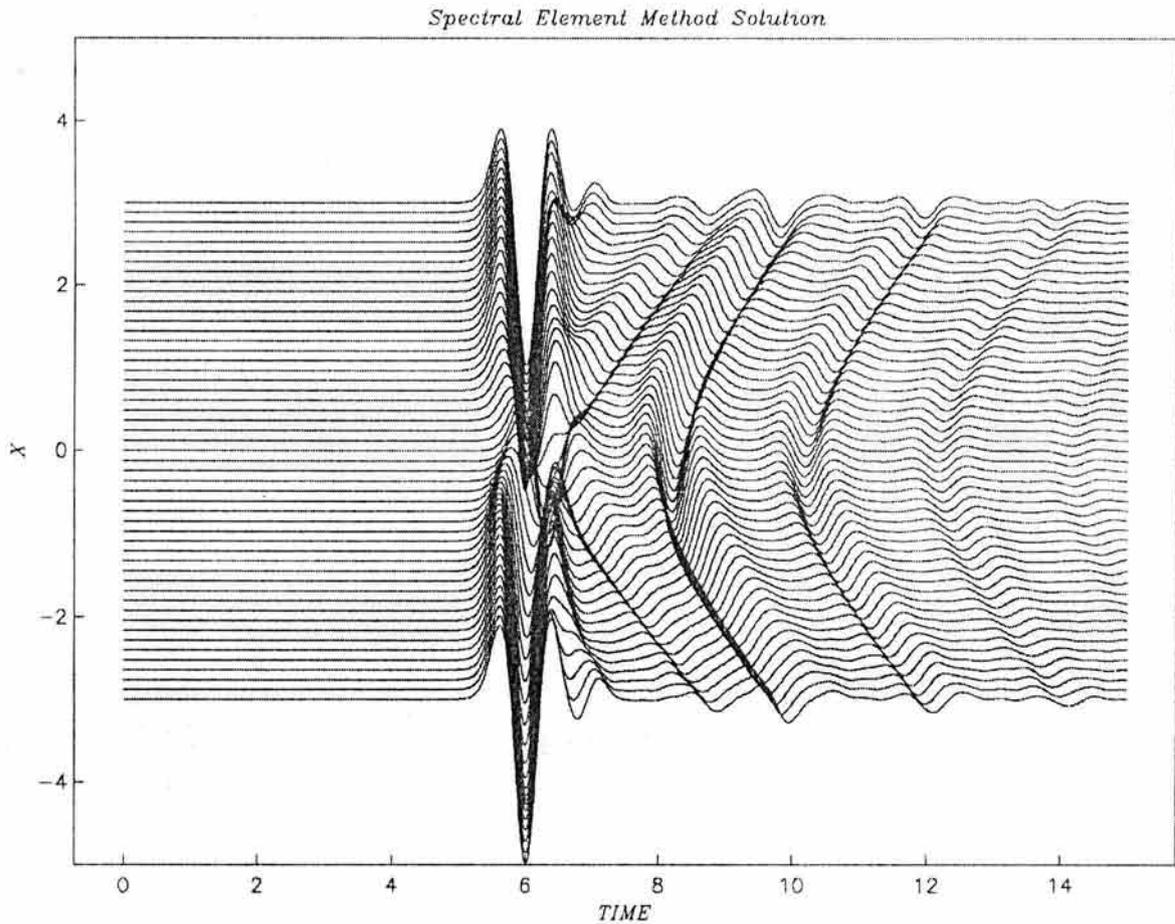


Fig. 2.2.7. El mismo caso que el de la Fig. 2.2.6 sólo que calculado con el método de elementos espectrales (SEM). Komatitsch (comunicación personal).

Es de gran interés observar que los sismogramas obtenidos con la solución analítica y el SEM ofrecen muy buenos acuerdos. La onda que incide directamente sobre la cavidad sufre un retraso considerable que se puede observar en ambos sintéticos así como la onda de difractada o de cabalgadura que se produce en el transcurso del tiempo.

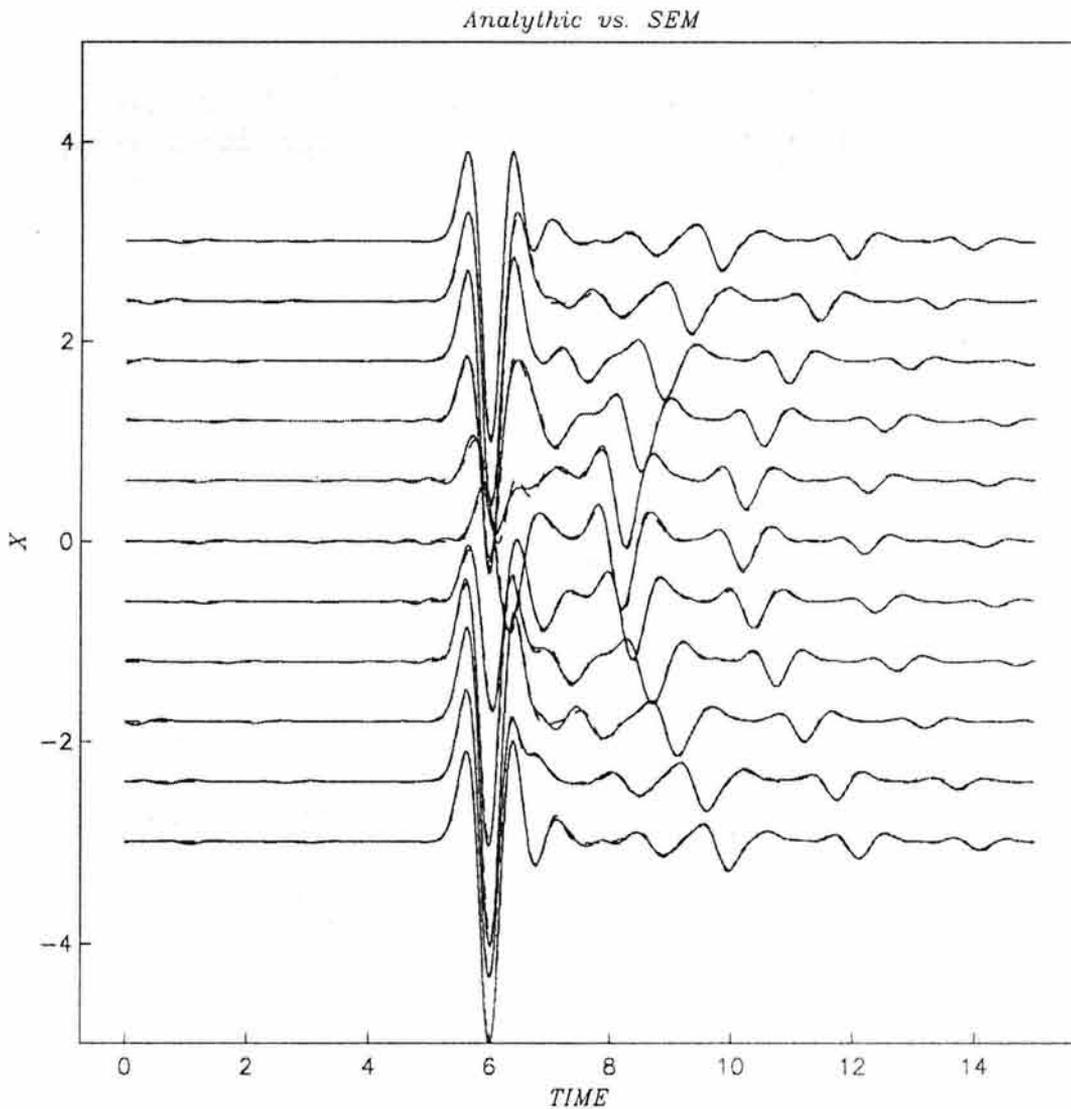


Fig. 2.2.8. Historias de tiempo para el modelo de la Fig. 2.2.1, calculados por el método analítico propuesto y el método de elementos espectrales SEM. La línea punteada corresponde a este último; Komatitsch (comunicación personal).

Con el resultado de la Fig. 2.2.8 se puede observar con mejor detalle la comparación entre ambos métodos de solución, y como se ve, el acuerdo es magnífico. Por otro lado, no hay que olvidar que la formulación analítica propuesta requiere sólo de algunos segundos en una computadora personal, mientras que el SEM tiene que ser calculado en una computadora de mayores dimensiones de memoria y por varios minutos. Aunque esto último no es mayor problema dada la disponibilidad de cómputo actual.

II.3. Difracción de ondas elásticas por una esfera

-Formulación para incidencia de ondas P

Considere el problema de una inclusión elástica o cavidad de forma esférica tridimensional en un espacio elástico homogéneo e infinito, sometida a la incidencia de ondas planas tipo P como se muestra en la Fig. 2.3.1.

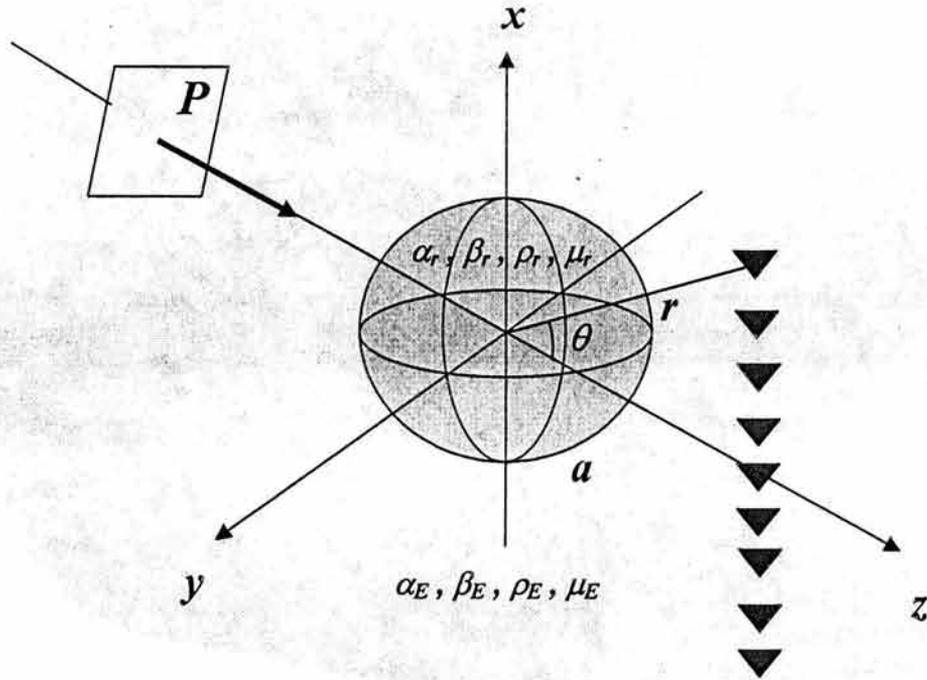


Fig. 2.3.1. Difractor tridimensional esférico sometido a la incidencia de una onda P.

Si queremos evaluar el campo total de desplazamiento en cualquier punto del espacio, tenemos que, por el principio de superposición, el campo total se puede expresar como:

$$\bar{u} = \bar{u}^{(o)} + \bar{u}^d \quad (2.3.1)$$

donde \bar{u} = campo de desplazamiento total, $\bar{u}^{(o)}$ = campo incidente y \bar{u}^d = campo difractado por la inclusión. Del potencial de desplazamiento ϕ se puede obtener el campo incidente de la siguiente forma (Knopoff, 1959 (a))

$$u^{(0)} = \nabla \phi \quad ; \quad \phi = \phi_0 e^{-iqz} \quad (2.3.2)$$

con

$$\varphi_0 = \frac{i}{q} \quad ; \quad q = \frac{\omega}{\alpha} = \text{número de onda} \quad ; \quad i = \text{unidad imaginaria} = \sqrt{-1}.$$

Como es de nuestro interés conocer el campo incidente a partir del gradiente del potencial en coordenadas esféricas se tiene que evaluar el campo como

$$u^{(0)} = \text{gra } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} e_\varphi, \quad (2.3.3)$$

expandiendo la onda plana en términos de funciones de Bessel y polinomios de Legendre (Abramowitz y Stegun, 1964)

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n j_n(qr) P_n^0(\cos \theta) \quad (2.3.4)$$

donde $j_n(qr)$ = función de Bessel de orden n y grado 0 y $P_n^0(\cos \theta)$ = polinomio de Legendre de orden n y grado $m = 0$.

Realizando la derivada y operando como indica la ec. (2.3.3) para obtener el campo incidente en la dirección radial a partir de los potenciales de desplazamiento se tiene que

$$u_r^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n q j'_n(qr) P_n^0(\cos \theta) \quad , \quad (2.3.5)$$

donde $u_r^{(0)}$ = campo incidente en la dirección radial y la correspondiente función radial

$$q j'_n(qr) = y_1^p = \frac{1}{r} [j_n(qr)n - qr j_{n+1}(qr)],$$

de igual forma, para obtener el valor del campo de desplazamiento en la dirección tangencial del movimiento se puede escribir

$$u_\theta^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n \frac{1}{r} j_n(qr) \frac{dP_n^0(\cos \theta)}{d\theta} \quad , \quad (2.3.6)$$

donde $u_\theta^{(0)}$ = campo incidente en la dirección tangencial y $y_3^p = \frac{1}{r} [j_n(qr)]$.

Ahora bien, si queremos calcular los esfuerzos en la dirección radial y tangencial a partir de los desplazamientos en las direcciones radial y tangencial respectivamente, habrá que realizar su derivada por medio de la ley de Hooke, (Mow & Pao, 1971, Mow & Workman, 1966), entonces:

$$\sigma_{rr}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_2^p P_n(\cos \theta) \quad (2.3.7)$$

donde $\sigma_{rr}^{(0)}$ = esfuerzo en la cara r y la dirección de r y la correspondiente función radial está dada por

$$y_2^p = \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(n(n-1) - \frac{k^2 r}{2} \right) j_n(qr) + 2qr j_{n+1}(qr) \right],$$

de la misma manera se obtiene el esfuerzo en la cara radial pero esta vez en la dirección tangencial

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_4^p \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \quad (2.3.8)$$

donde $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ = esfuerzo en la cara r y la dirección de θ y la correspondiente función radial dada por

$$y_4^p = \frac{2\mu}{r^2} [(n-1)j_n(qr) - qr j_{n+1}(qr)].$$

Hasta aquí solamente hemos reconocido el campo de desplazamiento incidente en términos de las coordenadas esféricas. Para evaluar el campo difractado y el campo total, se tendrá que proceder expandiendo los desplazamientos y esfuerzos para el campo difractado y el campo total de la misma forma como se realizó para el campo incidente. Solamente que para esos casos aparecen los coeficientes indeterminados que se determinaran al satisfacer las condiciones de frontera (ver anexo A).

Si las condiciones de continuidad son:

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} + u_r^{(d)} &= u_r^{(r)} \\ u_\theta^{(0)} + u_\theta^{(d)} &= u_\theta^{(r)} \\ \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(d)} &= \sigma_{rr}^{(r)} \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} + \sigma_{r\theta}^{(d)} &= \sigma_{r\theta}^{(r)}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

La ec. (2.3.9) representa la continuidad de los campos de desplazamiento y esfuerzo incidente, difractado y reflejado en las correspondientes componentes del movimiento en la frontera del difractor esférico.

Realizando las sustituciones pertinentes y tomando las ecs. (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) y (2.3.4), además evaluando en $r = a$, el sistema a resolver queda como se ilustra en la ec. (2.3.10)

$$\begin{bmatrix} y_2^{p(E)}(a) & y_2^{s(E)}(a) & \frac{-\mu_r}{\mu_e} y_2^{p(R)}(a) & \frac{-\mu_r}{\mu_e} y_2^{s(R)}(a) \\ y_4^{p(E)}(a) & y_4^{s(E)}(a) & \frac{-\mu_r}{\mu_e} y_4^{p(R)}(a) & \frac{-\mu_r}{\mu_e} y_4^{s(R)}(a) \\ y_1^{p(E)}(a) & y_1^{s(E)}(a) & -y_1^{p(R)}(a) & -y_1^{s(R)}(a) \\ y_3^{p(E)}(a) & y_3^{s(E)}(a) & -y_3^{p(R)}(a) & -y_3^{s(R)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2n+1)(-i)^n y_2^{p(0)}(a) \\ -(2n+1)(-i)^n y_4^{p(0)}(a) \\ -(2n+1)(-i)^n y_1^{p(0)}(a) \\ -(2n+1)(-i)^n y_3^{p(0)}(a) \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

donde: A_n, B_n, C_n, D_n = son coeficientes indeterminados que se determinaran al satisfacer las condiciones de frontera.

$y_1^p(a), y_2^p(a), y_3^p(a), y_4^p(a)$ = son las funciones radiales debidas a la onda P definidas con anterioridad. En este caso para el campo incidente y la región R se definen funciones de Bessel, y en la región E se definen funciones de Hankell. $y_1^s(a), y_2^s(a), y_3^s(a), y_4^s(a)$ = son las funciones radiales debidas a la onda S definidas con anterioridad. En este caso para el campo incidente y la región R se definen funciones de Bessel, y en la región E se definen funciones de Hankell. μ_E, μ_r = los módulos de rigidez al cortante para las regiones E y R respectivamente. Es notable que en este sistema sólo es necesario suprimir los coeficientes C_n y D_n para obtener el caso de una cavidad esférica de lo contrario se está tomando en cuenta el caso de una inclusión elástica. Para poder tomar en consideración el caso de que la inclusión contenga un fluido ($\mu = 0$), será necesario observar las condiciones en la frontera para las presiones y los esfuerzos. Así pues, las ecuaciones que gobiernan el fluido (Mow & Workman, 1966)

$$p = \mu_E \sum_{n=0}^{\infty} E_n j_n \left(\frac{\omega r}{c} \right) P_n^0(\cos \theta) \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_E \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{\omega}{c} j'_n \left(\frac{\omega r}{c} \right) P_n^0(\cos \theta), \quad (2.3.12)$$

donde p = presión en el fluido y E_n = coeficiente indeterminado que se determinará al satisfacer las condiciones de frontera. Así, las condiciones de frontera son:

$$p = -\sigma_{rr}; \quad \sigma_{rr} + p = 0; \quad 2\sigma_{rr}^d + p = -2\sigma_{rr}^{(0)} \quad (A)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho a_r = \rho_r(-\omega^2 u_r) \quad \rho_r(\omega^2 u_r) - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (B)$$

$$\rho_r(\omega^2 u_r^d) - \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_r(-\omega^2 u) \quad (C)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta}^d = -\sigma_{r\theta}^{(0)d}$$

donde: a_r = la aceleración en la dirección radial.

Para el caso en que la inclusión sea fluida, es necesario considerar la ecuación del fluido en el sistema de la ec. (2.3.10), quedando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que es resuelto numéricamente. Hasta aquí sólo se ha mostrado la formulación para la

incidencia de una onda plana P sobre el difractor esférico. Un compendio de las funciones radiales completas para los coeficientes de ondas P se describe en el anexo A.

-Formulación para incidencia de ondas S

Consideremos ahora el caso en el que incide una onda S (de corte) sobre una inclusión (elástica o fluida) o cavidad esférica que se encuentra dentro de un espacio tridimensional elástico homogéneo e isótropo, como el que se muestra en la Fig. 2.3.2

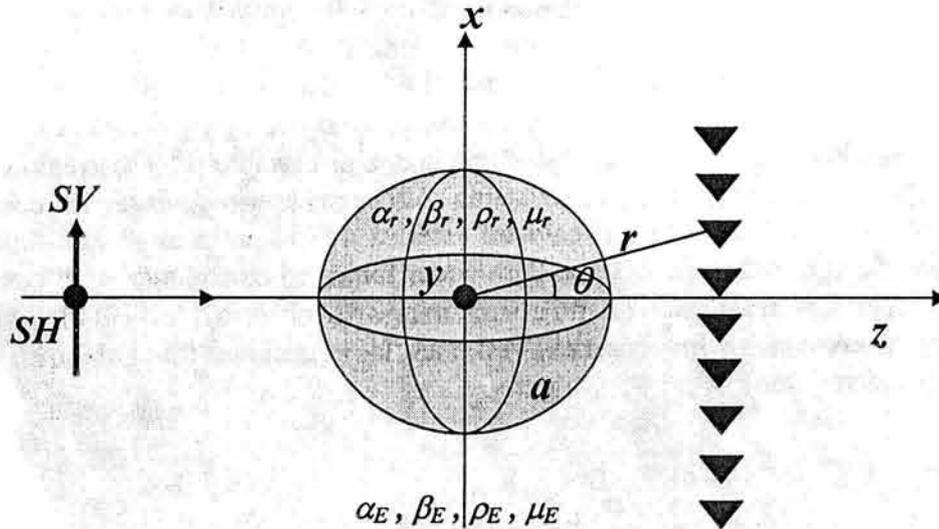


Fig. 2.3.2. Inclusión elástica esférica sometida a la incidencia de una onda plana tipo S.

El campo de desplazamiento total está definido como el campo incidente más el difractado por el principio de superposición (Knopoff, 1959 (b))

$$\bar{u} = \bar{u}^{(0)} + \bar{u}^d \quad (2.3.13)$$

donde \bar{u} = campo de desplazamiento total, $\bar{u}^{(0)}$ = campo incidente y \bar{u}^d = campo difractado por la esfera. Para construir el campo incidente a partir de los potenciales de desplazamiento para una onda tipo SV será necesario calcular la siguiente expresión

$$u^{(0)} = \nabla\phi + \nabla \times \bar{\varphi} \quad (2.3.14)$$

donde ϕ = potencial escalar y $\bar{\varphi}$ = potencial vectorial.

Como se trata de incidencia de ondas planas SV, los potenciales de desplazamiento se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 e^{-ikz}; \quad \nabla \phi = 0; \quad \phi_0 = 0 \\ \bar{\varphi} &= \varphi_y = \varphi_0 e^{-ikz}; \quad \varphi_x = \varphi_y = 0; \quad \nabla \cdot \bar{\varphi} = 0\end{aligned}\tag{2.3.15}$$

donde $k = \omega / \beta =$ numero de onda, $\omega =$ frecuencia angular, $\beta =$ velocidad de la onda SV e $i =$ unidad imaginaria $= \sqrt{-1}$.

Entonces, calculando el rotacional del potencial vectorial φ se tiene que:

$$\nabla \times \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \hat{k},\tag{2.3.16}$$

así entonces, el desplazamiento en la dirección de x queda

$$u_x^{(0)} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}; \quad u_y^{(0)} = u_z^{(0)} = 0,\tag{2.3.17}$$

derivando y considerando la onda incidente con amplitud unitaria tenemos que el desplazamiento en la dirección de x esta dado por

$$u_x^{(0)} = -\varphi_0 \frac{k}{i} e^{-ikz}; \quad \varphi_0 = \frac{i}{k}.\tag{2.3.18}$$

Entonces el desplazamiento en las tres direcciones en coordenadas esféricas se puede expresar por medio de la siguiente transformación de coordenadas:

$$u_r^{(0)} = u_x^{(0)} \sin \theta \cos \phi; \quad u_\theta^{(0)} = u_x^{(0)} \cos \theta \cos \phi \quad u_\phi^{(0)} = -u_x^{(0)} \sin \phi.\tag{2.3.19}$$

De la misma forma, para conocer el potencial de desplazamiento φ en el sistema de coordenadas esféricas, es necesario aplicar la siguiente matriz de transformación

$$\varphi_r = \varphi_y \sin \theta \sin \phi; \quad \varphi_\theta = \varphi_y \sin \theta \cos \phi; \quad \varphi_\phi = \varphi_y \cos \theta\tag{2.3.20}$$

Si recordamos la definición de la expansión de una onda plana en términos de las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre (Abramowitz & Stegun, 1964) se tiene

$$\varphi_y = \varphi_0 e^{-ikz} = \varphi_0 e^{-ikr \cos \theta} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n j_n(kr) P_n^0(\cos \theta),\tag{2.3.21}$$

entonces realizando las operaciones algebraicas y expresando el rotacional en coordenadas esféricas, podemos escribir

$$\begin{aligned} \nabla \times \varphi = & \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\varphi_\phi) - \left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\phi} \right) \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\varphi_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi_\phi) \right] \hat{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\varphi_\theta) - \frac{\partial\varphi_r}{\partial\theta} \right] \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

donde $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ = son los vectores unitarios en las direcciones r, θ y ϕ respectivamente. Resolviendo las derivadas para cada componente del movimiento es posible obtener el campo incidente en términos del sistema de coordenadas esféricas como

$$u_r^{(0)} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_1^s(r) \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \cos\phi \quad (2.3.23)$$

$$u_\theta^{(0)} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_3^s(r) P_n^0(\cos\theta) \cos\phi \quad (2.3.24)$$

$$\begin{aligned} u_\phi^{(0)} = & \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n (-y_3^s(r)) P_n^0(\cos\theta) \cos\theta \sin\phi + \\ & \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n (y_1^s(r)) P_n^1(\cos\theta) \sin\phi \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Con las correspondientes funciones de onda radiales para la incidencia de onda S dadas por

$$\begin{aligned} y_1^s(r) &= \frac{1}{r} j_n(kr) \\ y_3^s(r) &= \frac{1}{r} [-j_n(kr)n + kr j_{n+1}(kr)] \end{aligned}$$

A continuación se presentan algunos resultados para ejemplos en los que se emplean las formulaciones para incidencia de ondas P y S respectivamente. Se muestran algunos de los casos más representativos de la investigación realizada. En la Fig. 2.3.3 se despliegan los sismogramas sintéticos obtenidos para el modelo de la Fig. 2.3.1. Se trata de incidencia vertical de una onda P (arriba) y onda S (abajo), sobre una esfera hueca de radio unitario ($a=1$); son 51 receptores ubicados a una distancia paralela al eje x de $2a$ desde el origen. En estos sismogramas se utilizó al pulso de Ricker de $t_p = 1s$ y $t_s = 8s$ como excitación del campo incidente.

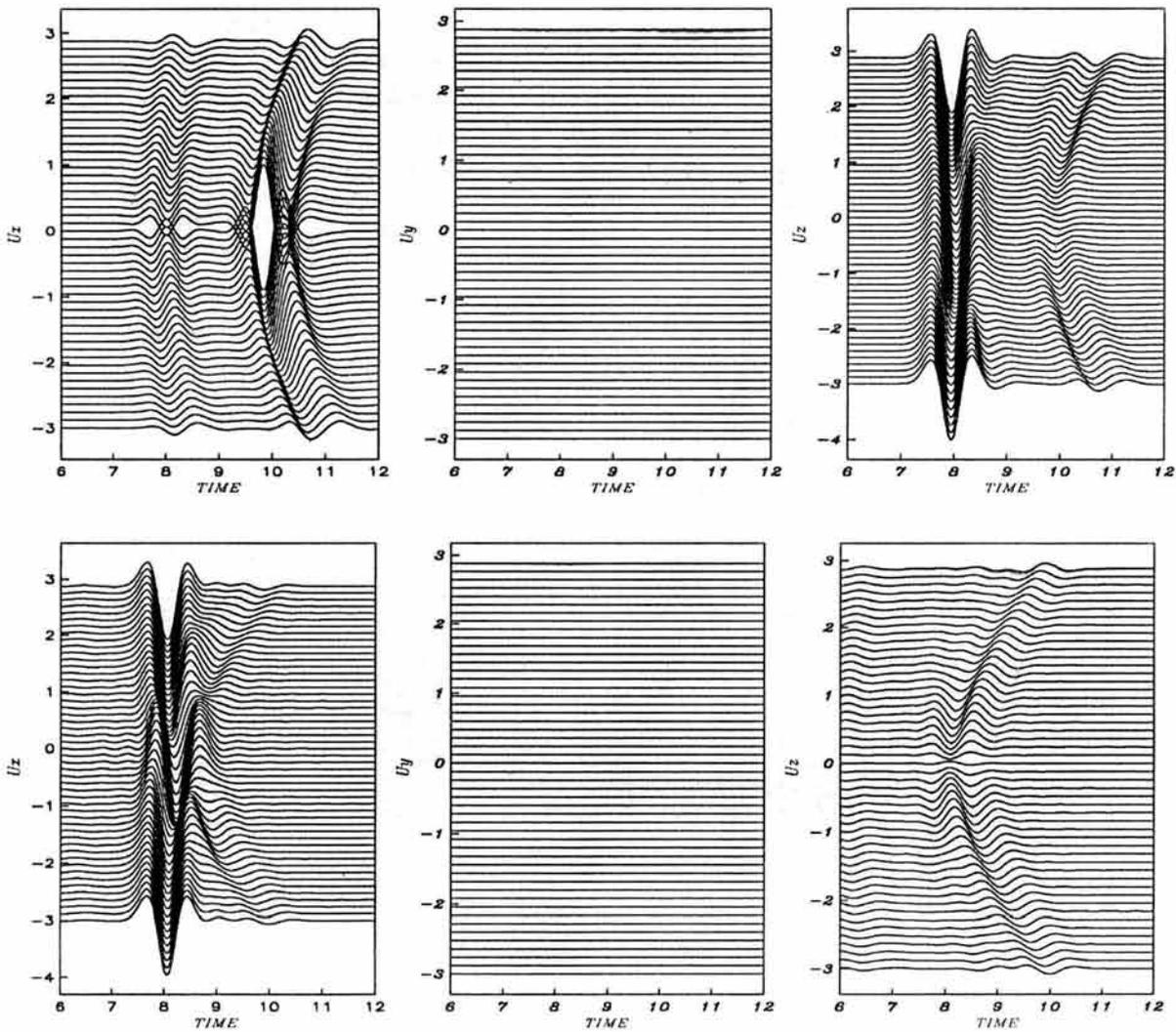


Fig. 2.3.3. Sismogramas sintéticos U_x , U_y y U_z para el modelo de la Fig. 2.3.1 de una esfera vacía. Incide una onda plana tipo P (arriba) y tipo S (abajo). La excitación es un pulso de Ricker de $t_s=8s$ y $t_p=1s$.

Es notable la presencia de las ondas difractadas que corresponden a ondas de Rayleigh que se propagan alrededor de la cavidad, estas son fácilmente identificables en la componente U_z del caso de incidencia de onda P, ya que se generan inmediatamente después de la onda directa que se observa retrasada exactamente en los detectores ubicados entre $x = -l$ y $x = l$ que es donde la cavidad influye directamente en la propagación. Existe un último tren de ondas al rededor de los 10s que se generan a partir de la cavidad, se trata de la onda S difractada generada en los extremos de la esfera y que se propaga a partir de $x = l$ y $x = -l$. Esta onda convertida resulta muy clara en la componente U_x .

En la Fig. 2.3.4 se muestra la historia en tiempo para 51 detectores ubicados paralelamente al eje x a una distancia de $z = 2a$ desde el origen. Se trata de la incidencia de una onda plana P para el modelo de la Fig. 2.3.1, en este caso se considera una inclusión elástica homogénea e isotrópica dentro de un espacio elástico homogéneo e isotrópico continuo. Como

se trata de un problema tridimensional en este ejemplo sólo se muestra la componente U_z del desplazamiento. El radio de la inclusión esférica es unitario ($a=1$), la relación entre la inclusión y el espacio elástico esta dada por sus densidades $\rho_R/\rho_E = 2.0$. Las relaciones entre las rigideces se consideraron unitarias. De la misma forma que en el ejemplo anterior se utilizó un pulso de Ricker de $t_p = 1$ s y $t_s = 5$ s como excitación.

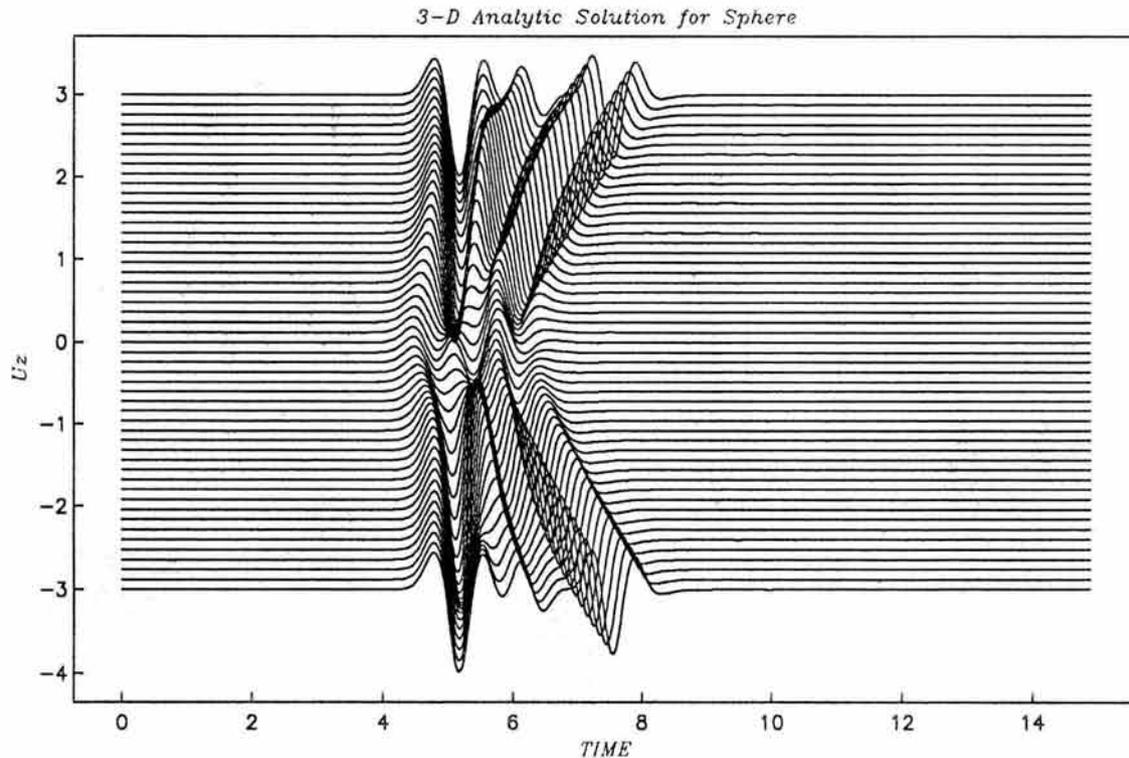


Fig. 2.3.4. Sismograma sintético U_z para el modelo de la Fig. 2.3.1. de una esfera elástica con $(\rho_R/\rho_E = 2.0)$. Incide una onda plana P. La excitación es un pulso de Ricker de $t_s = 5$ s. y $t_p = 1$ s.

A diferencia con la cavidad en este caso es claro el arribo temprano de la onda incidente hacia los detectores más cercanos del arreglo. Esto se debe a que la densidad del material en la inclusión es el doble del valor que la del espacio que la contiene, lo que provoca un aumento considerable en la velocidad de propagación. Las ondas difractadas, que corresponden a ondas de Rayleigh, que se propagan alrededor de la inclusión vuelven a aparecer para recordarnos que son un claro efecto de la geometría y de la frontera en contacto. Estas últimas se identifican al generarse inmediatamente después de la onda directa. Entre los detectores $x = -1$ y $x = 1$ se vuelve a observar la aparición de la ya discutida onda S, que de la misma manera como en el ejemplo anterior es generada en los extremos de la inclusión. Más adelante se muestra el sismograma sintético de la Fig. 2.3.5, en el cual se despliega la respuesta temporal para las tres componentes del movimiento U_x , U_y y U_z para el modelo de la Fig. 2.3.1. Nuevamente se trata de la incidencia de ondas planas tipo P (arriba) y onda S (abajo), sólo que esta vez incidiendo sobre una inclusión

esférica que contiene un fluido. Las características de la incidencia son idénticas a los dos ejemplos anteriores y los parámetros elásticos para el espacio se conservaron para identificar claramente el efecto del fluido sobre la respuesta. Para este caso se resolvió el sistema de ecuaciones formulado *ex profeso* para la inclusión fluida tomando en cuenta que $\mu = 0$.

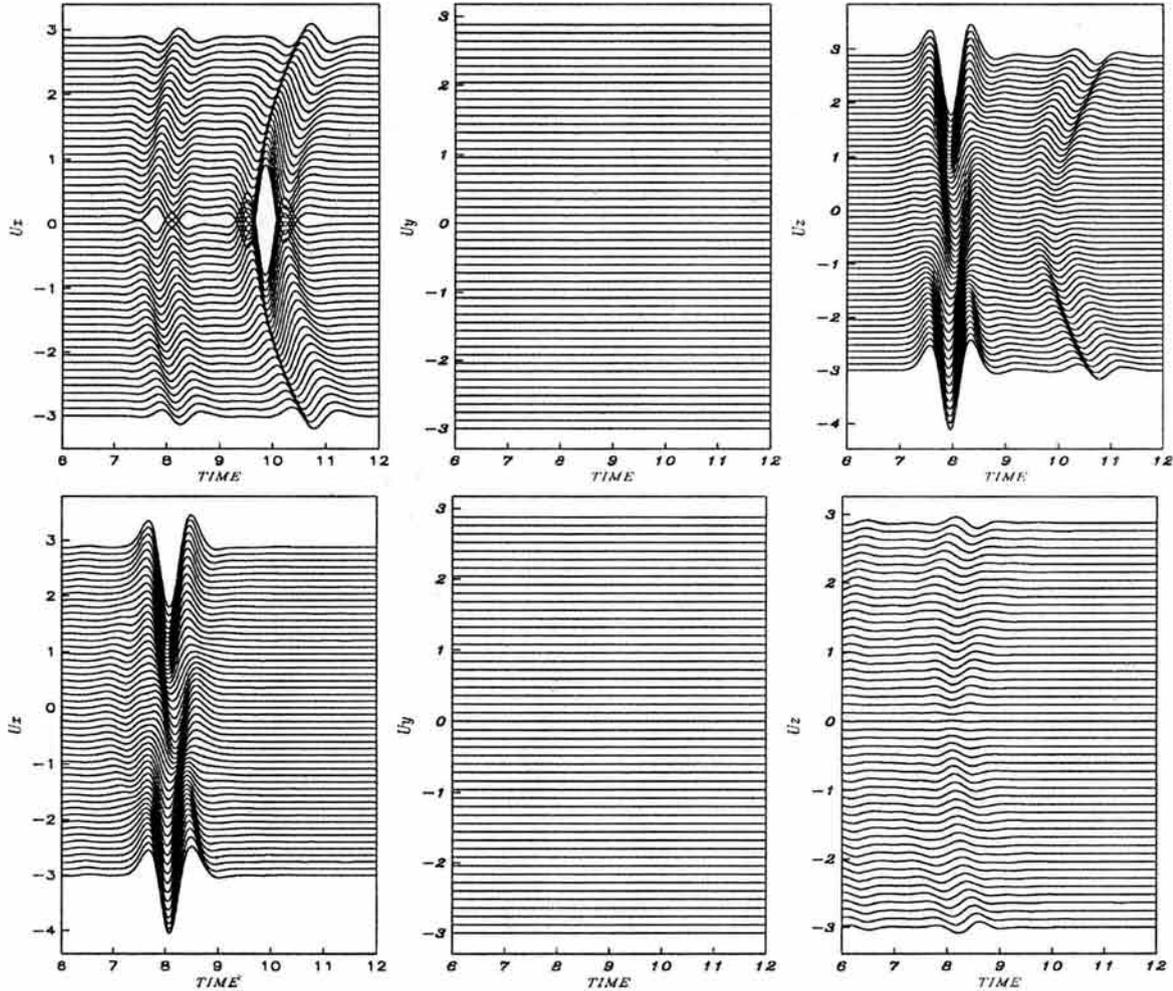


Fig. 2.3.5. Sismogramas sintéticos U_x , U_y y U_z para el modelo de la Fig. 2.3.1 de una esfera fluida. Incide una onda plana tipo P (arriba) y onda S (abajo). La excitación es un pulso de Ricker de $t_s = 8s$ y $t_p = 1s$.

El efecto de la inclusión fluida resulta muy interesante, ya que es muy claro que el frente plano de la onda se atenúa y prácticamente desaparece en el intervalo $x = -l$ y $x = l$ que es donde los receptores se encuentran exactamente enfrente de la inclusión. Este efecto es muy claro en la componente U_z del caso de incidencia de ondas S. De la misma manera que en los dos ejemplos anteriores (cavidad y esfera elástica) aparecen las ya discutidas ondas de Rayleigh y de corte generadas por la presencia de la geometría y la frontera de contacto en los extremos de la inclusión, respectivamente. Más adelante se mostrarán resultados en el

dominio de la frecuencia con el propósito de identificar claramente las diferencias entre diversas clases de inclusiones y/o materiales.

Con el objeto de diferenciar los efectos en el tratamiento de distintos tipos de materiales en las inclusiones, del efecto puramente geométrico de la cavidad y del de un fluido que afecta la propagación, se construyeron los siguientes diagramas de amplitudes que se muestran a continuación. En la Fig. 2.3.6 se ilustra la amplitud del desplazamiento vs. la frecuencia (función de transferencia) para la componente U_z del desplazamiento calculado en un solo receptor posicionado en $x = 0$ y $z = -2a$. Nuevamente se trata de incidencia de ondas planas tipo P y en este caso se muestra solamente el valor del campo difractado. Se ilustran con línea discontinua la respuesta obtenida por la presencia de una cavidad y con línea continua la de una esfera que contiene fluido.

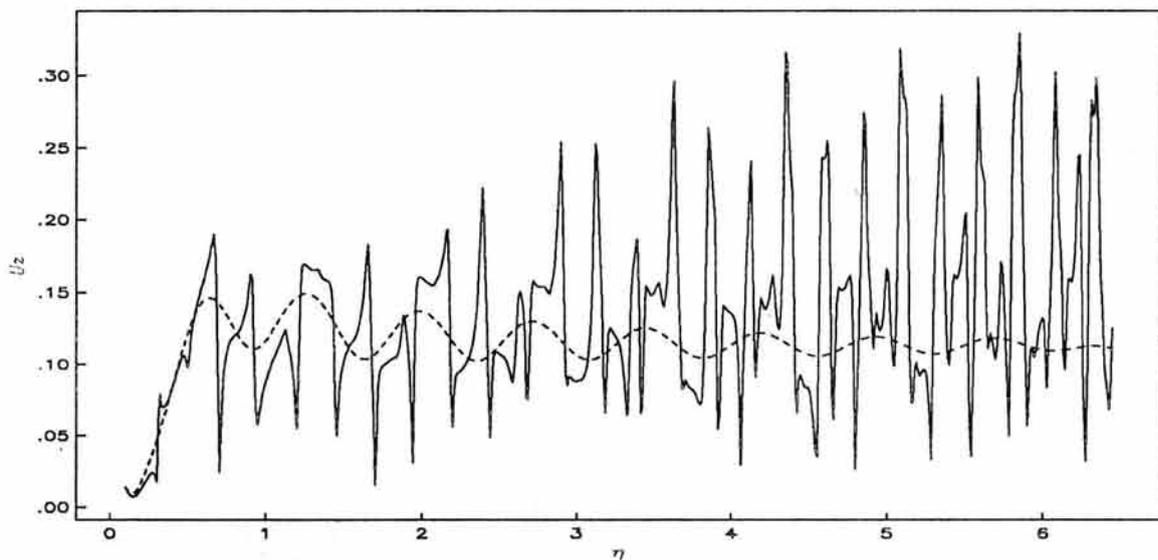


Fig. 2.3.6. Funciones de transferencia para el desplazamiento U_z para dos tipos de difractores esféricos. Esfera fluida (línea continua) y cavidad (línea discontinua). El receptor se encuentra en $x = 0$ y $z = -2a$.

Se trata de frecuencia adimensional, es decir la frecuencia normalizada al tamaño del radio de la esfera. Es claramente observable la amplificación de la respuesta en la frecuencia $\eta = 1$ para los casos de la esfera vacía y la esfera con fluido.

En la Fig. 2.3.7 se muestra un diagrama con las mismas características que el de la Fig. 2.3.6 sólo que en esta ocasión se trata de la incidencia de una onda S para el mismo receptor del ejemplo anterior ($x = 0$, $z = -2a$). Los efectos que se identificaron en el caso de la incidencia de onda P se vuelven a notar, esto es debido a que se mantuvo el intervalo de frecuencias en observación y a que la firma espectral de la esfera resulta muy estable. Aquí es muy claro el efecto de periodicidad y rizamiento en la respuesta del fluido y nuevamente el efecto gradual y periódico de la esfera vacía. Esto último se debe a que no existe atrapamiento de energía por la presencia de algún material. No debemos descartar que

siempre se observa un efecto de acumulación periódico de la energía debida a la geometría pura del difractor.

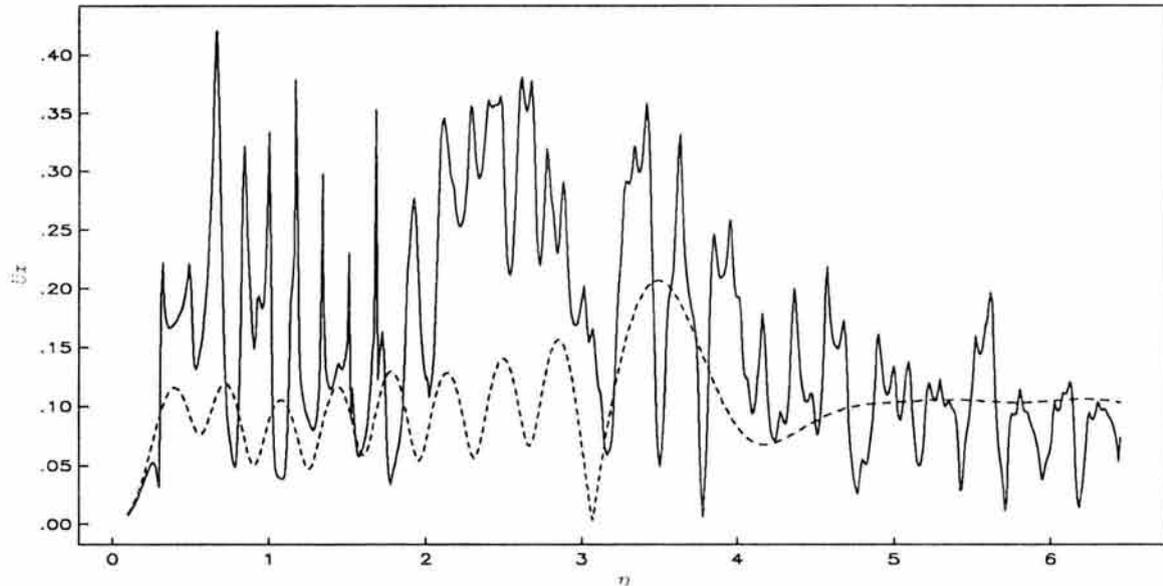


Fig. 2.3.7. Funciones de transferencia para el desplazamiento U_x para dos tipos de difractores esféricos. Esfera fluida (línea continua) y cavidad (línea discontinua). El receptor se encuentra en $x = 0$ y $z = -2a$.

Es necesario ejecutar una serie de ejemplos en los que se realicen análisis paramétricos de las constantes elásticas y las variables geométricas del problema. Estos ejemplos se pueden consultar en el anexo A de este trabajo. Sin embargo, podemos concluir que la observación de un fenómeno de dispersión y atenuación de la onda incidente es muy claro, principalmente cuando se trata de una inclusión fluida. En las frecuencias dominantes relacionadas directamente con el tamaño de la obstrucción parece haber una respuesta clara en los casos de cavidad y fluido, no así en la inclusión elástica. Esto debe ser justificado por el análisis paramétrico apropiado (ver anexo A).

II.4. Difracción de ondas elásticas por objetos superficiales

Considere un objeto difractor somero tridimensional sobre la superficie de un semiespacio elástico, como se muestra en la Fig. 2.4.1. El material interior es elástico y tiene una forma arbitraria, pero suave, descrita por el espesor $h(x,y)$. Se asume que el medio interior es mucho más blando que el del semiespacio que lo subyace.

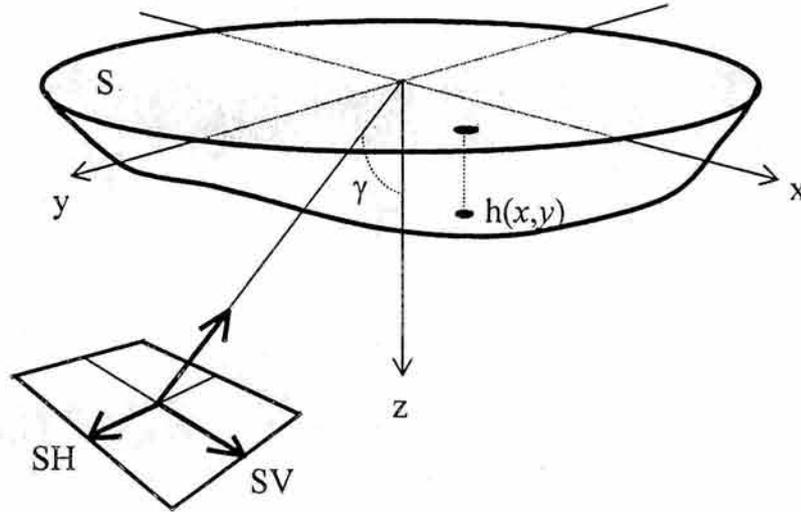


Fig. 2.4.1. Objeto tridimensional superficial sometido a la incidencia de una onda plana.

Las ecuaciones de campo en ausencia de fuerzas de cuerpo pueden escribirse, para el medio interior, por medio de la ley de Newton:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad i = 1, \dots, 3. \quad (2.4.1)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, u_i el vector de desplazamiento, x , las coordenadas cartesianas, ρ la densidad de masa y t el tiempo. En lo que sigue se pueden usar las siguientes equivalencias: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Adicionalmente, el tensor de esfuerzos está dado por la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2.4.2)$$

donde C_{ijkl} es el tensor elástico (para materiales isótropos descrito por

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})).$$

El campo de desplazamiento elástico en el medio interior se propone con la forma:

$$u_i(x, y, z, t) = u_i^{(0)}(x, y, z, t) + u'_i(x, y, z, t) \quad (2.4.3)$$

donde $u_i^{(0)}(\cdot)$ es un movimiento de referencia conocido en la interfaz $h(x, y)$ y $u'_i(\cdot)$ es el movimiento adicional que se busca en el estrato. Sustituyendo la ec. (2.4.3) en la ec. (2.4.1) se puede escribir

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2}, \quad (2.4.4)$$

con

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}, \quad (2.4.5)$$

que es el campo forzante debido al movimiento de referencia, $u_i^{(0)}(\cdot)$.

La condición de frontera libre de esfuerzos en la superficie $z = 0$ puede aproximarse como,

$$\sigma_{zj} = \sigma_{zj}^{(0)} + \sigma'_{zj} = 0 \quad (2.4.6)$$

Nótese que $\sigma_{zj}^{(0)}$ depende sólo de x , y y t .

El campo de desplazamiento buscado se escribe ahora como

$$u'_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N U_i^n(x, y, t) \varphi^n(z), \quad (2.4.7)$$

donde $U_i^n(\cdot)$ son funciones de las coordenadas horizontales (x, y) y del tiempo, mientras $\varphi^n(z)$ son funciones de prueba dadas de la profundidad. La ec. (2.4.7) expresa la solución $u'_i(\cdot)$ en términos de la combinación lineal de las funciones de prueba.

Considere ahora el operador de Galerkin,

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) dz = 0 \quad (2.4.8)$$

Esta ecuación puede ser vista como la forma fuerte del método de Galerkin para las ecuaciones elásticas a lo largo de una línea vertical con longitud $h(x, y)$. Para expresar la ec. (2.4.8) en la forma de un operador débil se integra por partes y se escribe:

$$\int_0^h \left\{ \left[\frac{\partial \sigma'_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yi}}{\partial y} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) - (\sigma'_{zi} + \sigma_{zi}^{(0)}) \frac{\partial \varphi^m}{\partial z} \right\} dz + \left[(\sigma'_{zi} + \sigma_{zi}^{(0)}) \varphi^m(z) \right]_0^h = 0 \quad (2.4.9)$$

porque $\sigma_{zi}^{(0)}$ no depende de z . De acuerdo con la ec. (2.4.6) la única contribución del segundo término en la ec. (2.4.9) proviene de $z = h$ si $\varphi^m(h) \neq 0$.

Si $\varphi^m(h) = 0$, entonces $u'_i(\cdot) = 0$ y el movimiento de referencia $u_i^{(0)}(\cdot)$ puede considerarse como el movimiento real de la interfaz objeto difractor-semiespacio. Si estos movimientos son dados y corresponden a la solución unidimensional en la interfaz, la solución en los primeros tiempos de respuesta concuerda efectivamente con la condición $u'_i(\cdot) = 0$ en $z = h$. Para tiempos de respuesta posteriores la frontera es totalmente reflejante y corresponde a una base rígida.

Entre las diversas familias de funciones completas en el intervalo $(0, h)$ se puede seleccionar la bien conocida familia de cosenos:

$$\varphi^n(z) = \cos \lambda_n z \quad (2.4.10)$$

con $\lambda_n = (2n + 1) \pi / 2h$. Es claro que $\varphi^m(h) = 0$. Más aún, estas funciones y sus derivadas (con respecto a z) forman, respectivamente, sendos conjuntos ortogonales en el intervalo de interés, esto es:

$$\int_0^h \varphi^m \varphi^n dz = \frac{h}{2} \delta_{mn} \quad (2.4.11)$$

$$\int_0^h \frac{\partial \varphi^m}{\partial z} \frac{\partial \varphi^n}{\partial z} dz = \lambda_m^2 \frac{h}{2} \delta_{mn} \quad (2.4.12)$$

$$\int_0^h \varphi^m dz = \frac{h}{2} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \quad (2.4.13)$$

$$\int_0^h \varphi^m \frac{\partial \varphi^n}{\partial z} dz = a_{mn} \quad (2.4.14)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker ($\delta_{mn} = 1$ si $m = n$; $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$) y

$$a_{mn} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } m = n, \\ -\frac{2n+1}{4} \left[\frac{1+(-1)^{m+n}}{m+n+1} - \frac{1-(-1)^{m-n}}{m-n} \right] & \text{si } m \neq n. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Estas propiedades son útiles para simplificar la "proyección" de las ecuaciones de campo de la elasticidad sobre el plano horizontal en la superficie $z = 0$.

Introduciendo la ec. (2.4.7) en la ec. (2.4.9), considerando las ecs. (2.4.2) y (2.4.3) y tomando en cuenta que, aun cuando h sea función de x y de y , se desprecian las derivadas de h , se puede escribir:

$$U_{xx}^m - \alpha^2 U_{xx}^m - \beta^2 U_{yy}^m + \beta^2 \lambda_m^2 U^m - (\alpha^2 - \beta^2) V_{xy}^m - ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) W_x^n \frac{2}{h} = \frac{1}{\rho} f_1 \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zx}^{(0)}, \quad (2.4.16)$$

$$V_{xx}^m - \beta^2 V_{xx}^m - \alpha^2 V_{yy}^m + \beta^2 \lambda_m^2 V_m^m - (\alpha^2 - \beta^2) U_{xy}^m - ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) W_y^n \frac{2}{h} = \frac{1}{\rho} f_2 \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zy}^{(0)}, \quad (2.4.17)$$

$$W_{xx}^m - \beta^2 W_{xx}^m - \beta^2 W_{yy}^m + \alpha^2 \lambda_m^2 W^m + ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) [U_x^n + V_y^n] \frac{2}{h} = \frac{1}{\rho} f_3 \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zz}^{(0)}, \quad (2.4.18)$$

que es un grupo de ecuaciones diferenciales parciales acopladas y "proyectadas". Aquí $U_1^n = U^n$, $U_2^n = V^n$, $U_3^n = W^n$ y los subíndices de U , V y W significan derivadas parciales. Las derivadas espaciales se calculan usando la transformada de Fourier mediante el algoritmo FFT. La matriz a_{mn} resulta de la integral de $\varphi^n(z)$ y de su derivada, como se indica en las ecs. (14) y (15).

Puede verificarse que el acoplamiento entre las funciones horizontales en varios órdenes ($n = 0, 1, \dots, N$) surge después de la primera derivada "variacional" con respecto a z . Por otra parte, la segunda derivada de, digamos, U^m respecto a z está dada por el producto $-\lambda_m^2 U^m$.

Con objeto de introducir amortiguamiento, la forma más sencilla consiste en tomar el operador $\partial/\partial t + \gamma$ en lugar de la derivada en el tiempo. Por ejemplo, bajo esta consideración, la segunda derivada U'' puede leerse como

$$U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial U}{\partial t} + \gamma^2 U \quad (2.4.19)$$

y, discretizando, en el tiempo j tenemos:

$$(U''_j) = \left[\left(1 + \gamma \Delta t + \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2 \right) U^{j+1} - 2U^j + \left(1 - \gamma \Delta t + \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2 \right) U^{j-1} \right] \Delta t^{-2} \quad (2.4.20)$$

Puede mostrarse que $\gamma \approx \pi f_p / Q$ para un factor de calidad Q en la vecindad de la frecuencia f_p . De la ec. (2.4.20) y sus equivalentes para V'' y W'' , es posible calcular las funciones U , V y W en los puntos de la malla horizontal en el tiempo $j+1$ en función de sus valores en el tiempo $j-1$ y las derivadas espaciales en el tiempo j .

El cálculo de las derivadas horizontales se lleva a cabo con el algoritmo FFT usando todos los puntos de la malla, esto es, en un esquema global. Este enfoque pseudoespectral requiere, por lo menos, entre 2 y 3 puntos en la malla por longitud de onda mínima (las diferencias finitas pueden requerir hasta 8 puntos para obtener la misma exactitud). Finalmente, las ecs. (2.4.3) y (2.4.7) permiten calcular los desplazamientos en la superficie.

Si se escoge un conjunto de funciones de prueba tales que $\varphi''(h) \neq 0$ es posible introducir condiciones de frontera absorbente aproximadas en términos de una sustitución apropiada del esfuerzo en profundidad. La familia de cosenos

$$\varphi''(z) = \cos \frac{n\pi z}{h}, \quad (2.4.21)$$

cumple con las condiciones de ortogonalidad y es completa en $(0, h)$. En $z = h$ su valor es $(-1)^n$.

La solución es relativamente sencilla en el dominio de la frecuencia. Supóngase un medio estratificado como el de la Fig. 2.4.2, sometido a un campo incidente de ondas planas SH.

El campo está dado por:

$$v^{(i)} = v_0(\omega) e^{-ikx} e^{+i\eta_E z} e^{+i\omega t} \quad (2.4.22)$$

donde,

$$k = \frac{\omega}{\beta_E} \operatorname{sen} \gamma \quad \text{y} \quad \eta_E = \frac{\omega}{\beta_E} \cos \gamma \quad (2.4.23)$$

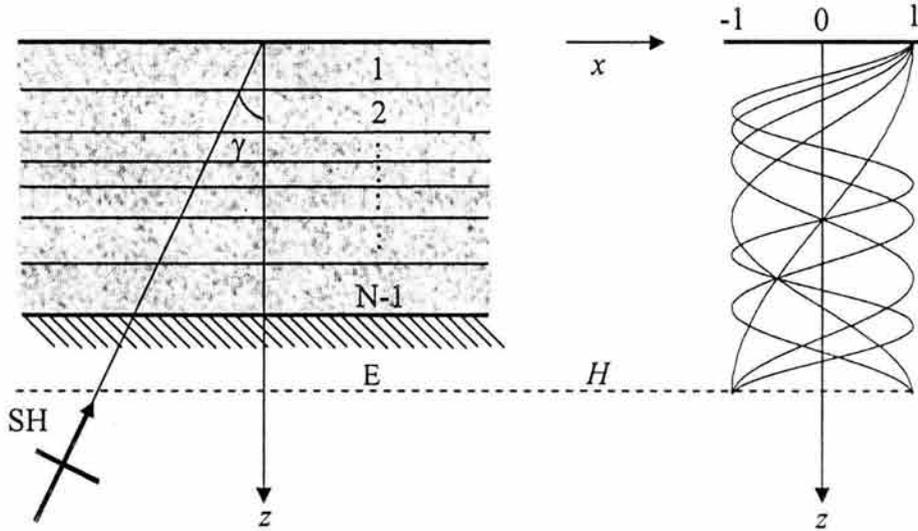


Fig. 2.4.2. Medio estratificado sometido a la incidencia de un campo de onda plana SH (izq.). Familia de funciones de prueba utilizadas para fronteras absorbentes (der.).

siendo k el número de onda horizontal y η_E el número de onda vertical; ω es la frecuencia angular y β_E la velocidad de fase de las ondas SH en el semiespacio E . Si se define al desplazamiento como un movimiento de referencia conocido, $V^{(i)}$, debido solamente al campo incidente, más un desplazamiento, $V(z)$, dado, en función de la profundidad, se puede escribir:

$$v = (V^{(i)} + V(z)) e^{-ikz} e^{+i\omega t} \quad (2.4.24)$$

es decir, $V^{(i)} = v_0(\omega) e^{+i\eta_E z}$ y $V(z)$ como el desplazamiento que será calculado utilizando una formulación de Galerkin de forma débil, en la cual se incluye a las funciones de prueba de la ec. (2.4.21). De esta manera, $V(z)$ se escribe como:

$$V(z) = \sum_{n=0} A_n \phi^n(z). \quad (2.4.25)$$

Recordando la ecuación en el dominio de la frecuencia, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 v = 0 \quad (2.4.26)$$

y, adoptando un esquema de Galerkin de forma fuerte, sustituyendo la ec. (2.4.24) en la ec. (2.4.26) y operando las derivadas queda:

$$\int_0^h \left[-k^2 \mu (V^{(i)} + V) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V^{(i)}(z)}{\partial z} + \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 (V^{(i)} + V) \right] \varphi^m(z) dz = 0, \quad (2.4.27)$$

la cual es una integral sólo en la dirección vertical, que se resuelve por partes e incluye los valores de los coeficientes A_n de la ec. (2.4.25), los cuales son las incógnitas del sistema dado por:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left[-k^2 \mu \sum A_n \varphi^n \varphi^m - \mu \sum A_n \varphi_z^n \varphi_z^m + \rho \omega^2 \sum A_n \varphi^n \varphi^m \right] dz + \left(\mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)_h \varphi^m(h) \\ & = \int_0^h +k^2 \mu V^{(i)} \varphi^m dz + \mu \frac{\partial V^{(i)}}{\partial z}(h) \varphi^m(h) + \int_0^h \mu \frac{\partial V^{(i)}}{\partial z} \varphi_z^m dz - \int_0^h \rho \omega^2 V^{(i)} \varphi^m dz \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

que es un sistema cerrado en forma débil en el cual las derivadas parciales de V en $z = h$ son

$$\left(\mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)_h = -i \omega \rho_E \beta_E V_h \quad (2.4.29)$$

La ec. (2.4.28) representa un sistema de m por n ecuaciones que se resuelve numéricamente. Cabe resaltar que esta ecuación contiene la información detallada de cada estrato en cuestión y que la responsabilidad de la reconstrucción de las ondas reflejadas y transmitidas se deja únicamente a las funciones de prueba. Así se tiene una representación aproximada de los coeficientes de reflexión y transmisión en cada intervalo del medio estratificado y, a su vez, una buena aproximación de las fronteras absorbentes en la base del modelo.

Un ejemplo de la aplicación de estas fronteras se da en la Fig. 2.4.3, donde se muestra la función de transferencia del desplazamiento para un modelo de 3 estratos con las mismas propiedades (prueba de transparencia), ante incidencia vertical de ondas SH. La grafica ilustra el método propuesto con línea discontinua y con línea continua la solución exacta.

Como se puede observar la aproximación es buena. Esto corrobora que la base de funciones es la correcta y que con un orden no mayor a $n=20$ se puede obtener una buena representación de los desplazamientos en el tiempo, además de que posiblemente pueden suprimir la condición de base rígida del método aquí presentado. Los resultados mostrados en este capítulo corresponden a la formulación original (base rígida), que utiliza la familia de funciones de la ec. (2.4.10). La formulación correspondiente a la familia de funciones de la ec. (2.4.21) ha sido extendida a casos bidimensionales para estudiar los efectos de dispersión producidos por grietas o cavidades (Iturrarán-Viveros, *et al* 2004).

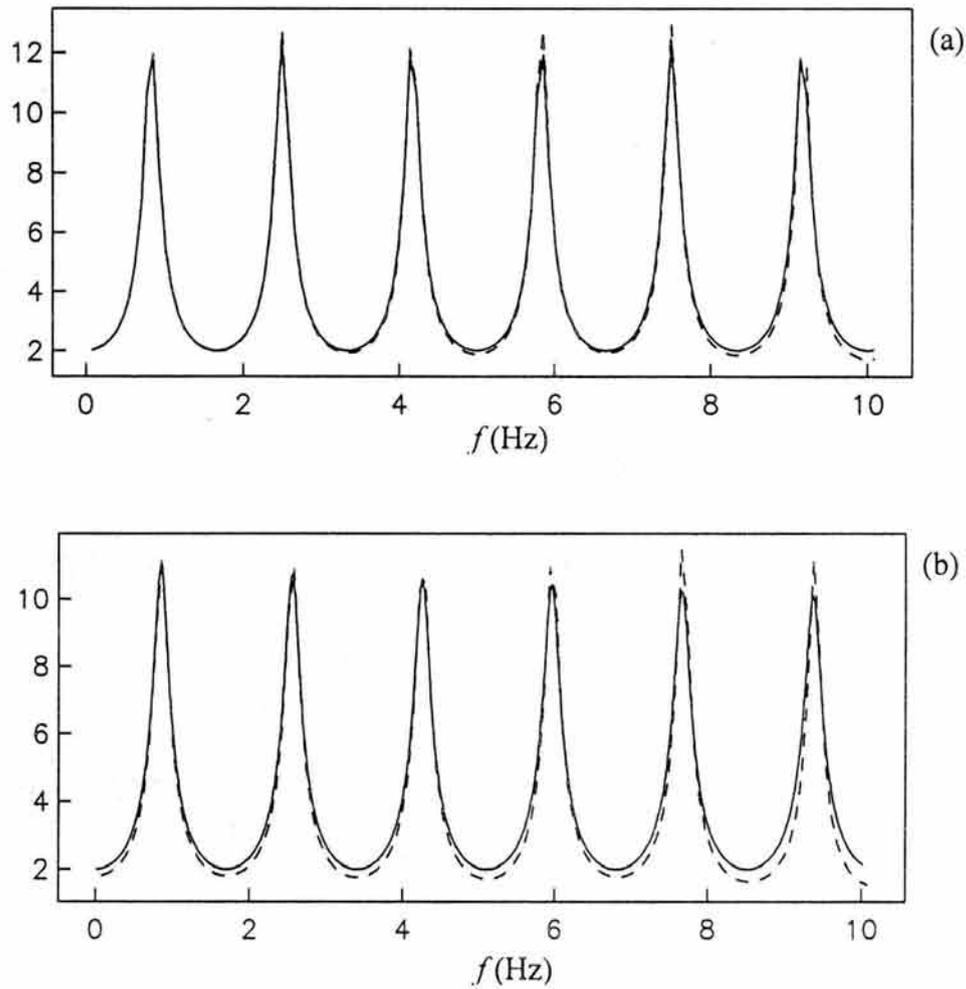


Fig. 2.4.3. Función de Transferencia del desplazamiento para 3 estratos. $\rho/\rho_E = 0.4$, $\beta/\beta_E = 0.4$ y $h = 300$ m. (a) Incidencia normal de ondas SH ($\gamma = 0^\circ$).
(b) Incidencia oblicua ($\gamma = 30$)

Existen varias aplicaciones ingenieriles para el método numérico presentado en este capítulo. Sin embargo nuestro interés está enfocado al fenómeno de propagación de ondas producido por un objeto de forma irregular ante incidencia de ondas elásticas y su respuesta en superficie. Una aplicación directa de este método se muestra en el cálculo de la respuesta sísmica de valles aluviales someros, (ver anexo B) donde se describen con buen detalle una serie de resultados y validaciones contra otras técnicas numéricas.

III. DIFRACCIÓN MÚLTIPLE Y RESPUESTA SÍSMICA DE MEDIOS HETEROGÉNEOS FRACTURADOS

III.1. Método Indirecto de Elementos de Frontera

Sea un dominio V , delimitado por su frontera S . Si este dominio esta formado por un material elástico, el campo de desplazamientos armónicos puede ser escrito, despreciando las fuerzas de cuerpo, por

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (3.1.1)$$

donde $u_i(\mathbf{x})$ es la i -ésima componente de desplazamiento en \mathbf{x} , $G_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$ es el tensor de Green, el cual representa el desplazamiento en la dirección i en el punto \mathbf{x} debido a la aplicación de una fuerza unitaria en dirección j en el punto ξ , y $\phi_j(\xi)$ es la densidad de fuerza en la dirección j . El producto $\phi_j(\xi) dS_\xi$ en la integral representa a una distribución de fuerzas sobre la superficie S . El subscrito en la diferencial muestra la variable sobre la cual es realizada la integración. Esta representación integral se puede obtener a partir de la identidad de Somigliana (Sánchez–Sesma & Campillo, 1991). Kupradze (1963) demostró que si $\phi_j(\xi)$ es continua a lo largo de S , entonces el campo de desplazamientos es continuo a través de S . De esta manera, el cálculo de esfuerzos y tracciones se realiza mediante la aplicación directa de la Ley de Hooke y la ecuación de Cauchy (excepto en singularidades de frontera, esto es cuando \mathbf{x} es igual a ξ sobre la superficie S). Mediante un proceso límite basado en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir las tracciones para \mathbf{x} sobre S como

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (3.1.2)$$

donde t_i = i -ésima componente de tracción asociada a la dirección normal $n(\mathbf{x})$, frontera suave, $c = 0.5$ si \mathbf{x} tiende a S desde dentro de la región, $c = -0.5$ si \mathbf{x} tiende a S desde fuera de la región y $c = 0$ si \mathbf{x} no esta contenida en S . $T_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$ = tensor de Green de tracciones, es decir, la tracción en la dirección i en el punto \mathbf{x} , sobre la frontera con normal asociada $n(\mathbf{x})$, debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en ξ sobre S .

Funciones de Green bi-dimensionales

En un medio infinito, elástico, homogéneo e isótropo, las funciones de Green para dependencia tiempo-armónico $e^{i\omega t}$, donde $i^2 = -1$, $\omega =$ frecuencia angular, y $t =$ tiempo, pueden expresarse como

$$G_{ij} = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}), \quad (3.1.3)$$

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[-4B + \lambda \frac{D(\omega r / \alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[-4B + \frac{D(\omega r / \beta)}{2\beta^2} \right] \times \left[\gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij} \right] \right\} +, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\mu}{r} \left\{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \right\}$$

donde

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_0^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (3.1.5)$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_2^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (3.1.6)$$

$$C = \frac{D(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r / \beta)}{\beta^2}, \quad (3.1.7)$$

$$D(p) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p), \quad (3.1.8)$$

λ y μ son las constantes de Lamé, ρ es la densidad de masa, α y β corresponden a las velocidades de propagación de ondas P y S, respectivamente; $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$, $\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$, δ_{ij} es la delta de Kronecker y $H_m^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de segunda especie y orden m .

III.2. Formulación Integral de medios fracturados

A partir de la configuración mostrada en la Fig. 3.2.1, resulta conveniente dividir el dominio en dos regiones (R y E), donde se establezcan las condiciones de frontera adecuadas para representar al problema. En la Fig. 3.2.2 se muestran estas regiones, en donde $\partial R = \partial_1 R \cup \partial_2 R \cup \partial_3 R$ para la región R , y $\partial E = \partial_1 E \cup \partial_2 E$ para la región E .

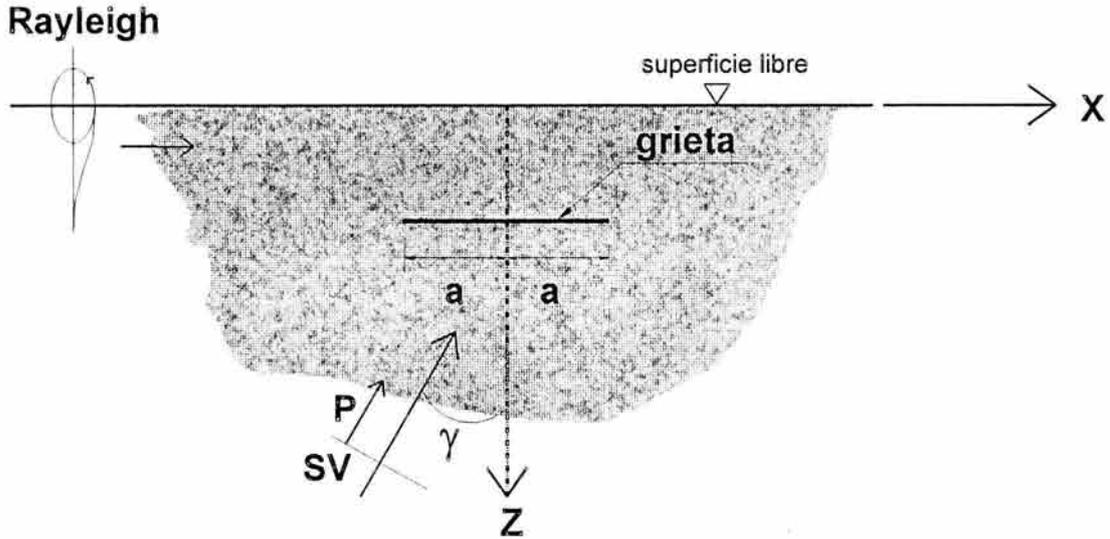


Fig. 3.2.1. Semiespacio elástico que contiene una grieta ante la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh.

De acuerdo con la Fig. 3.2.2, en $\partial_3 R$ (superficie libre) se tiene que las tracciones son nulas, por lo tanto éstas pueden escribirse como

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R. \quad (3.2.1)$$

En las regiones R y E de interfaz continua, o no agrietada, los desplazamientos y tracciones están dados por

$$u_i^R(\mathbf{x}) = u_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (3.2.2)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E. \quad (3.2.3)$$

En la discontinuidad o grieta las tracciones son nulas. En el caso de difracción múltiple (presencia de varias grietas) esta condición se mantiene simultáneamente para todas las grietas, y por lo tanto se tiene que:

$$t_i^E(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (3.2.4)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (3.2.5)$$

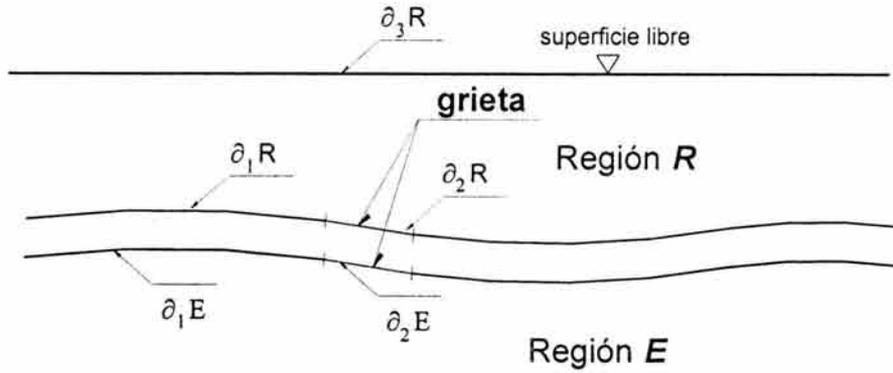


Fig. 3.2.2. Configuración por regiones (R y E).

Considerando las condiciones de frontera (ecs. 3.2.1 a 3.2.5) y los campos incidente, reflejado y difractado, se tiene

$$u_i^{dR}(\mathbf{x}) + u_i^{oR}(\mathbf{x}) = u_i^{dE}(\mathbf{x}) + u_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (3.2.6)$$

$$t_i^{dR}(\mathbf{x}) + t_i^{oR}(\mathbf{x}) = t_i^{dE}(\mathbf{x}) + t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (3.2.7)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (3.2.8)$$

$$t_i^E(\mathbf{x}) = t_i^{oE}(\mathbf{x}) + t_i^{dE}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (3.2.9)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R, \quad (3.2.10)$$

donde

$t_i^{o*}(\mathbf{x})$ = tracciones de campo libre en la región R , sin considerar la presencia de la grieta,

$t_i^{d*}(\mathbf{x})$ = tracciones de campo difractado en la región R , producidos por la presencia de la grieta, y * corresponde a las regiones E o R .

Sustituyendo las ecs. (3.1.1) y (3.1.2) en las ecuaciones (3.2.6) a (3.2.10) se tiene

$$\int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) G_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) G_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = u_i^{oE}(\mathbf{x}) - u_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad (3.2.11)$$

$$\mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E,$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - c\phi_i^E(\mathbf{x}) - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = t_i^{oE}(\mathbf{x}) - t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E,$$

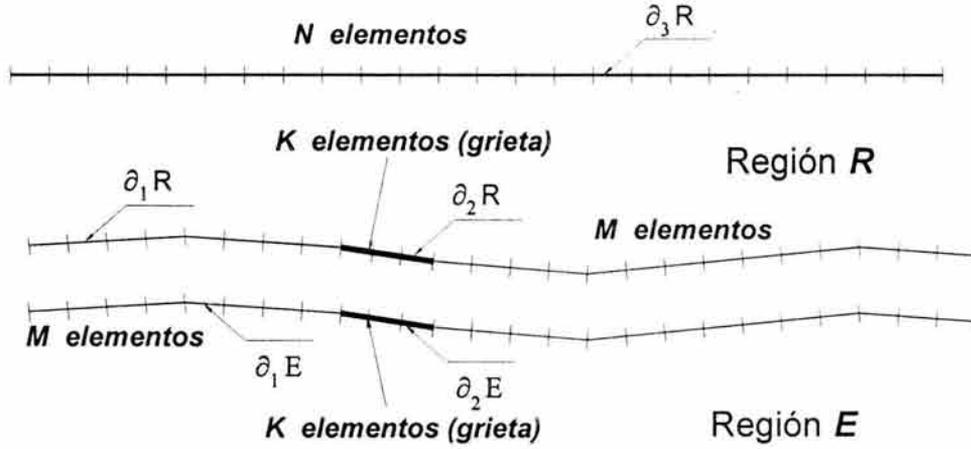
$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (3.2.13)$$

$$c\phi_i^E(\mathbf{x}) + \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (3.2.14)$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (3.2.15)$$

Esquema de discretización

Discretizando las fronteras de las regiones R y E , (Fig. 3.2.3) y suponiendo $\phi =$ constante sobre cada elemento, las ecs. (3.2.11) a (3.2.15) se pueden escribir como


 Fig. 3.2.3. Esquema de discretización en la frontera de las regiones R y E .

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) g_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) g_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (3.2.16)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (3.2.17)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, N, \quad (3.2.18)$$

$$\sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oE}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K, \quad (3.2.19)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K. \quad (3.2.20)$$

Estas integrales son calculadas numéricamente, excepto cuando $\mathbf{x} = \xi$ donde las integrales se anulan. En ese caso

$$t_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi_p) = (\pm) \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad l = R, E, \quad (3.2.21)$$

las ecs. (3.2.16)-(3.2.20) representan el sistema de ecuaciones integrales a resolver.

III.3. Difracción múltiple por sistemas de grietas

Con el objeto de validar algunos de los resultados calculados con la formulación integral de medios fracturados, éstos se comparan con los obtenidos por Achenbach *et al.* (1983). Con el código MIEF se calculan los desplazamientos horizontales en el punto A localizado en la superficie libre (Fig. 3.3.1). La grieta tiene una longitud total $2a$ y se localiza a una profundidad d de la superficie libre. Achenbach y sus colaboradores utilizaron incidencia normal de ondas P y SV generadas en la superficie libre, que viajan hacia el interior del semiespacio.

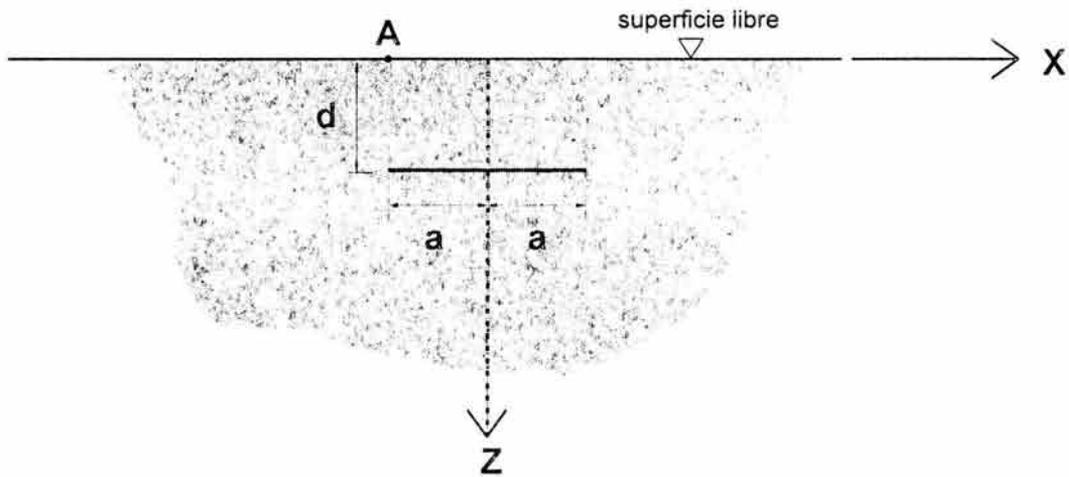


Fig. 3.3.1. Problema seleccionado para validación, estudiado originalmente por Achenbach *et al.* (1983).

En el modelo se emplearon las mismas propiedades elásticas y características geométricas del modelo utilizado por Achenbach *et al.* (1983). Con el propósito de validar el modelo aquí propuesto, se consideraron diferentes relaciones $d/2a$. Los resultados de los desplazamientos horizontales adimensionales U_L se graficaron *versus* la frecuencia adimensional $\omega d/C_R$ donde C_R = velocidad de ondas de Rayleigh. Se empleó una relación de Poisson $\nu = 0.3$, $d/2a = 0.2, 0.4, 0.6$ y 1.0 y un rango de frecuencia adimensional definida en $0 \leq \omega d/C_R \leq 3.0$. Los desplazamientos adimensionales en la superficie libre se determinaron por

$$U_L = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d}{b} \frac{1}{(k_L d) \text{sen}(k_L d)} \left| \frac{u_{xs}}{F} \right|, \quad (3.3.1)$$

u_{xs} es el desplazamiento en frecuencia obtenido para incidencia de ondas P generado en el interior del medio, $b = 2a$, $k_L = \omega/\alpha$ = número de onda y F = factor que depende de la

relación $d/2a$ considerada. La expresión anterior fue desarrollada por Achenbach *et al.* (1983).

En la Fig. 3.3.2 se presentan los desplazamientos adimensionales medidos en el punto A para $d/2a = 0.2, 0.4, 0.6$ y 1.0 . Las curvas muestran diferentes ordenadas espectrales máximas (picos espectrales), asociados a resonancias del estrato aparente ubicado entre la cara superior de la grieta y la superficie libre. Esta frecuencia de resonancia corresponde a su frecuencia fundamental. Para $d/2a = 0.2$ se observa que la ordenada espectral máxima se presenta a frecuencias menores que para las otras relaciones de $d/2a$ estudiadas. Esto se debe a la poca profundidad de este estrato con respecto a los otros casos.

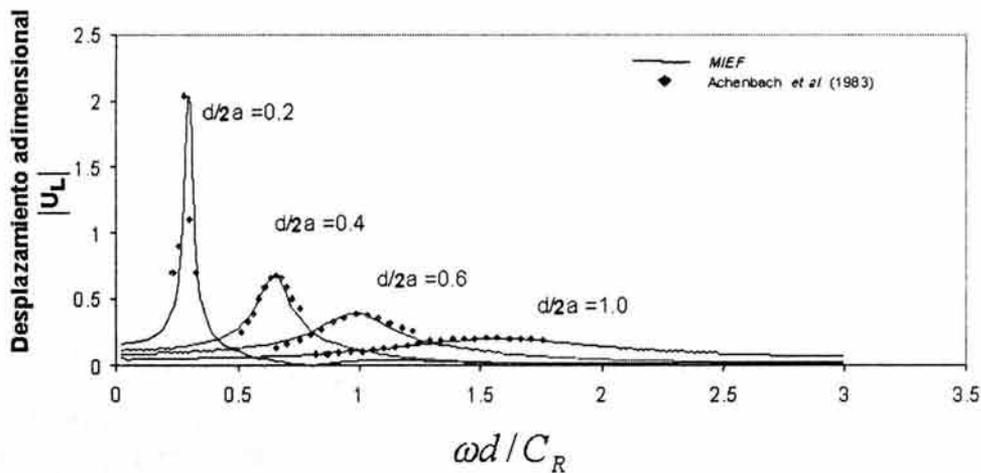


Fig. 3.3.2. Desplazamientos adimensionales U_L para el modelo de la Fig. 3.3.1, las curvas con línea continua son resultados del presente estudio, los rombos los de Achenbach *et al.* (1983).

A medida que incrementa la relación $d/2a$ (p. ej. $d/2a = 1.0$) las curvas de los máximos se tornan menos agudas y por lo tanto es más difícil determinar su frecuencia de resonancia ω . Se observa que ambas soluciones concuerdan satisfactoriamente para todas las relaciones $d/2a$. En la Fig. 3.3.3 se grafican las frecuencias de resonancia *versus* las relaciones $d/2a$. Aquí igual que en la Fig. 3.3.2 los resultados obtenidos tienen un excelente acuerdo con los calculados por Achenbach *et al.* (1983).

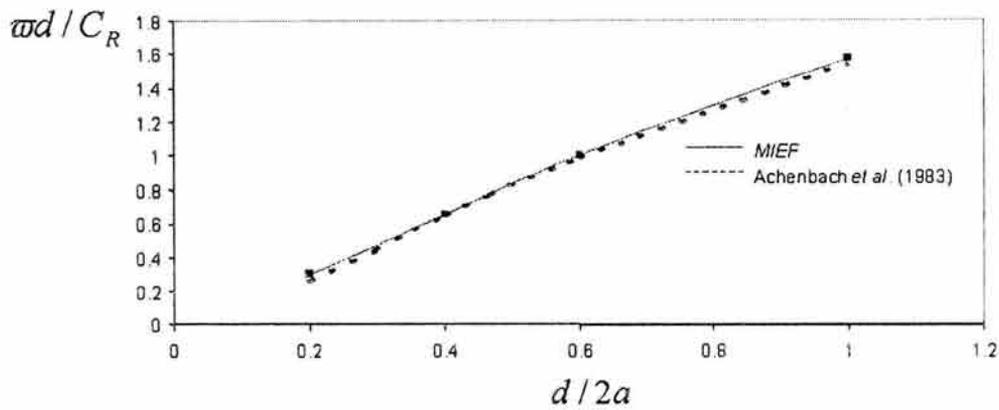


Fig. 3.3.3. Curva que relaciona la frecuencia de resonancia $\omega d/C_R$ y $d/2a$. La línea continua representa los resultados del presente estudio, la línea punteada los de Achenbach *et al.* (1983).

Empleando el código MIEF se obtuvieron desplazamientos adimensionales U_L para receptores en la superficie libre, cara superior e inferior de la grieta, para la frecuencia adimensional $\omega d/C_R = 0.30468$ (Fig. 3.3.4), correspondientes al punto donde se localiza el desplazamiento espectral máximo de la Fig. 3.3.2. Se observa que a esta frecuencia se tienen seis puntos en los cuales se presentan los mayores desplazamientos. Dos de ellos están ubicados sobre la superficie libre, otros dos sobre la cara superior de la grieta y los restantes sobre la parte inferior de ésta. Los resultados son simétricos con respecto al eje x , debido a la geometría de la grieta e incidencia vertical de la onda P. Puede observarse que los mayores desplazamientos ocurren en la superficie libre y a distancias x menores de a , los cuales varían según la frecuencia que se analice.

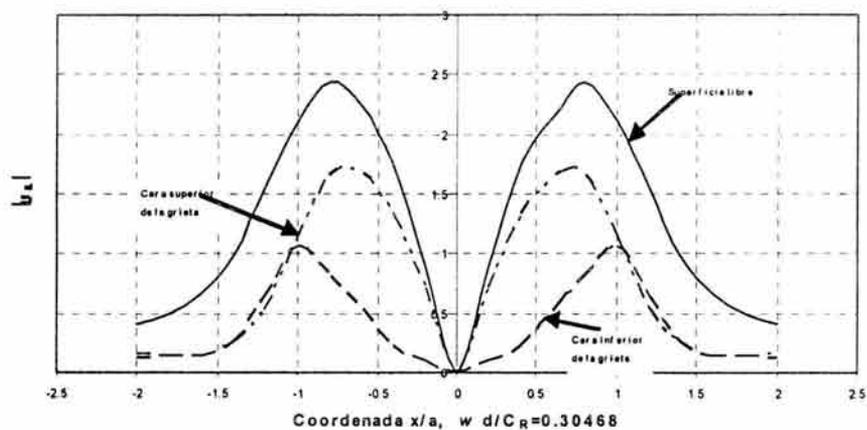


Fig. 3.3.4. Desplazamiento horizontal U_L en la superficie libre, cara superior e inferior de la grieta para la frecuencia adimensional $\omega d/C_R = 0.30468$.

Para ilustrar la aplicación del MIEF a problemas de propagación de ondas elásticas en medios que contienen grietas, se analizaron varios casos. En cada uno de ellos se obtienen sismogramas sintéticos para los desplazamientos horizontales u en dirección x y verticales w en dirección z . Estos sismogramas se obtienen en el dominio del tiempo mediante el empleo de la transformada discreta de Fourier. Finalmente, se calcularon los sismogramas sintéticos que ilustran el fenómeno de reflexión y difracción múltiple debido a la incidencia de ondas de Rayleigh en un medio con varias grietas.

Los casos estudiados en la Fig. 3.3.5 corresponden a relaciones de $d/2a = 0.2$ y 0.4 con ángulos de incidencia de ondas P y SV de $\gamma = 0^\circ$ y 30° . La velocidad de propagación de ondas S considerada es $\beta = 1$ cm/seg y la relación de Poisson es $\nu = 0.3$. Los sismogramas sintéticos se calcularon a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia para 41 receptores ubicados en la superficie libre. Se empleó como excitación temporal un pulso Ricker con un periodo característico $t_p = 1.0$ s.

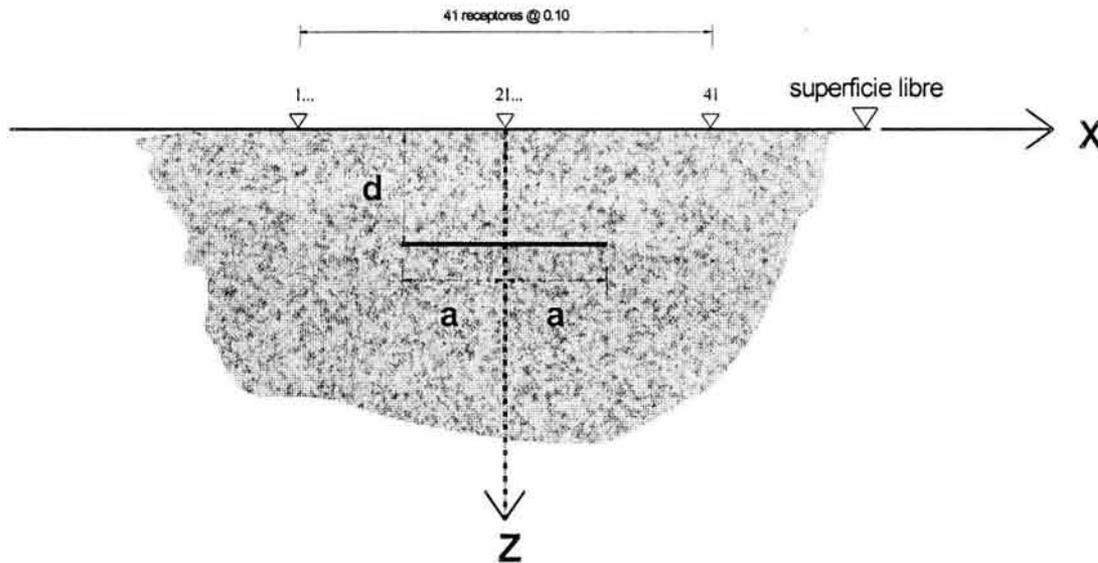


Fig. 3.3.5. Modelo considerado para la construcción de sismogramas sintéticos.

De la Fig. 3.3.6 a la Fig. 3.3.9 se muestran los desplazamientos verticales w y horizontales u para relaciones $d/2a = 0.2$ y 0.4 (izquierda y derecha respectivamente). La Fig. 3.3.6 corresponde a incidencia vertical de ondas P. Puede apreciarse que para los receptores alejados de la zona de la grieta los desplazamientos verticales son mayores que para aquellos que se encuentran en la zona de ésta. Esto se debe a que la grieta actúa como una barrera, ocasionando que la onda incidente sea dispersada y que las amplitudes de los desplazamientos disminuyan considerablemente (cerca de un 50% de la onda incidente). Este efecto también se observa en el caso de incidencia oblicua de ondas P con $\gamma = 30^\circ$ (Fig. 3.3.7). Para la componente horizontal es notable la aparición de patrones sucesivos de ondas difractadas generadas a partir de la grieta. Por simetría en la Fig. 3.3.6 son fácilmente identificables, en tanto que en la Fig. 3.3.7 estos patrones de difracción no aparecen con la misma definición.

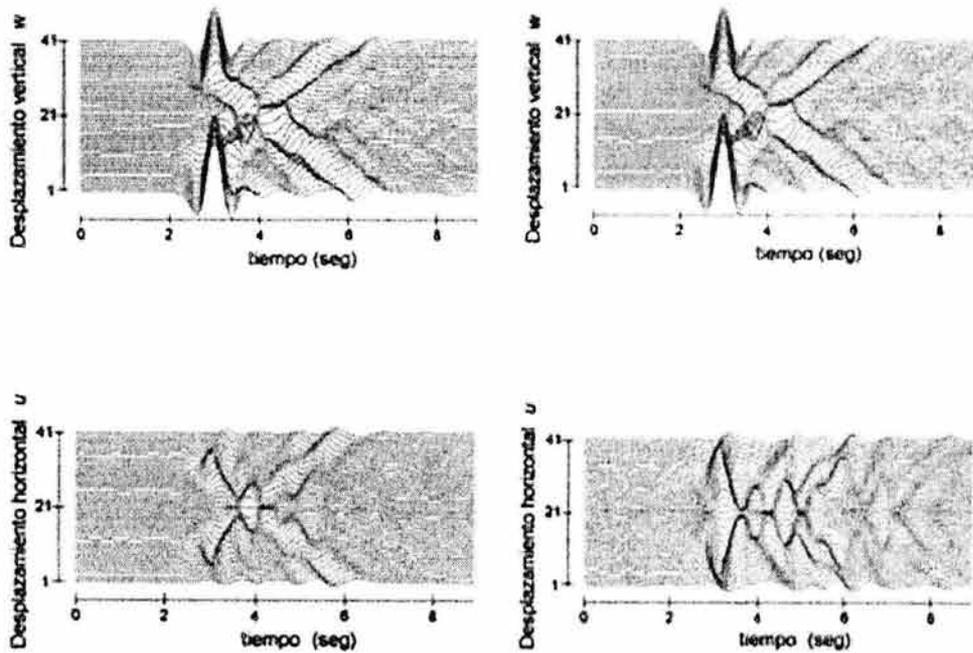


Fig. 3.3.6 Sismogramas sintéticos para el modelo de la Fig. 3.3.5, para las relaciones de profundidad $d/2a = 0.2$ y 0.4 (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia normal de ondas P.

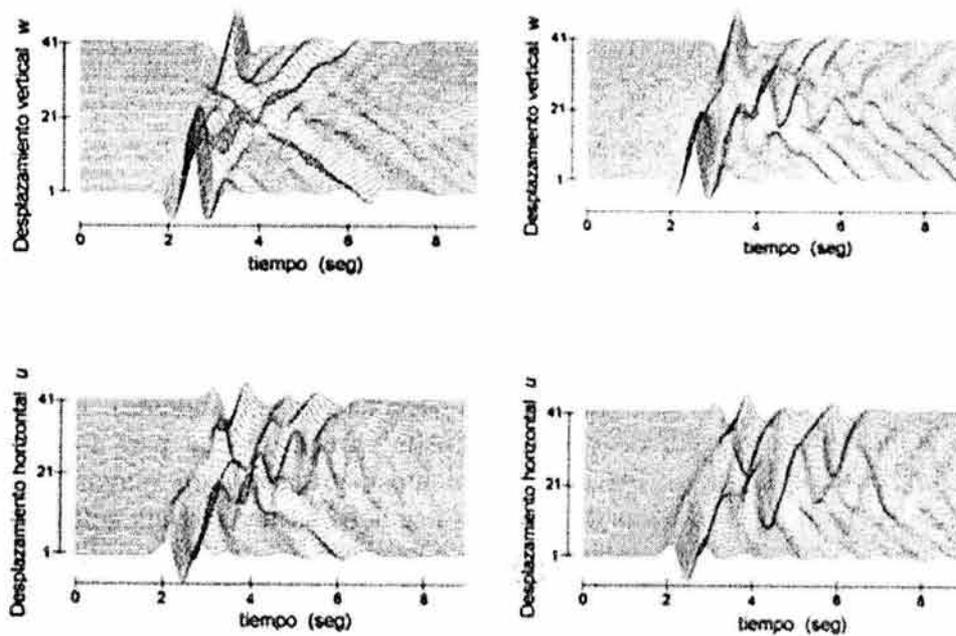


Fig. 3.3.7. Sismogramas sintéticos para el modelo de la Fig. 3.3.5, para las relaciones de profundidad $d/2a = 0.2$ y 0.4 (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia oblicua de ondas P.

En la Fig. 3.3.8 se presentan los resultados obtenidos para incidencia vertical de ondas SV. Se aprecia que las amplitudes de la onda difractada en la componente horizontal son mayores en el caso de la relación $d/2a = 0.4$. Para esta misma componente las máximas amplitudes ocurren fuera de la zona de la grieta. Es notable que la perturbación generada por la grieta es más prolongada para $d/2a = 0.4$ en ambas componentes. Ahora, en los sismogramas de la componente vertical una vez más son fácilmente identificables los patrones de difracción de la ondas generadas por la grieta en ambos casos.

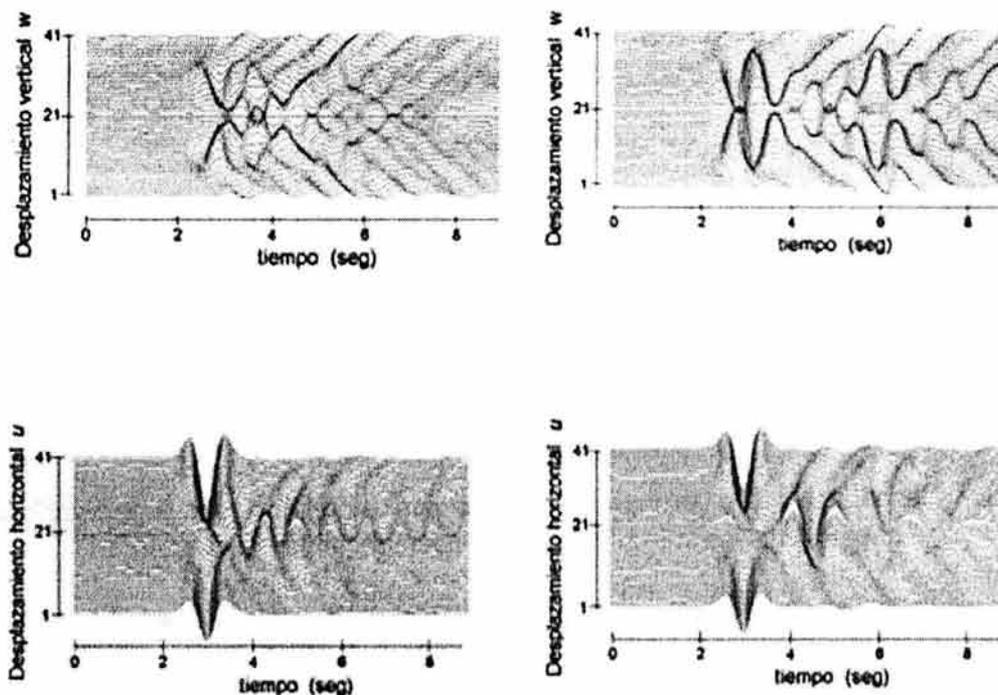


Fig. 3.3.8. Sismogramas sintéticos para el modelo de la Fig. 3.3.5, para las relaciones de profundidad $d/2a = 0.2$ y 0.4 (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia normal de ondas S.

Los resultados para la incidencia de ondas de Rayleigh se ilustran en la Fig. 3.3.9. Para grietas someras ($d/2a = 0.2$) la interacción de ésta con la superficie libre provoca una reflexión de ondas muy marcada, la cual es registrada por la línea de receptores localizados antes de la primera punta de la grieta. La velocidad con que esta onda se desplaza en la superficie libre (tanto la incidente como la reflejada) corresponde a la velocidad característica de las ondas de Rayleigh (0.92cm/s para la relación de Poisson considerada). Así también se aprecia una disminución de las amplitudes w en $|x| \leq a$. Para $d/2a = 0.4$ la reflexión casi no se aprecia. Esto se debe a que la grieta es más profunda y la onda de Rayleigh no alcanza a ser afectada, debido al decaimiento exponencial de los desplazamientos w y u con respecto a la profundidad. En estos dos casos, existe difracción de ondas hacia el interior del dominio estudiado, sin embargo, ésta es mayor para la grieta más superficial ($d/2a = 0.2$). A medida que la grieta se localiza a mayores profundidades, cercanas o mayores a una longitud de la onda de Rayleigh, la difracción de tales ondas es nula.

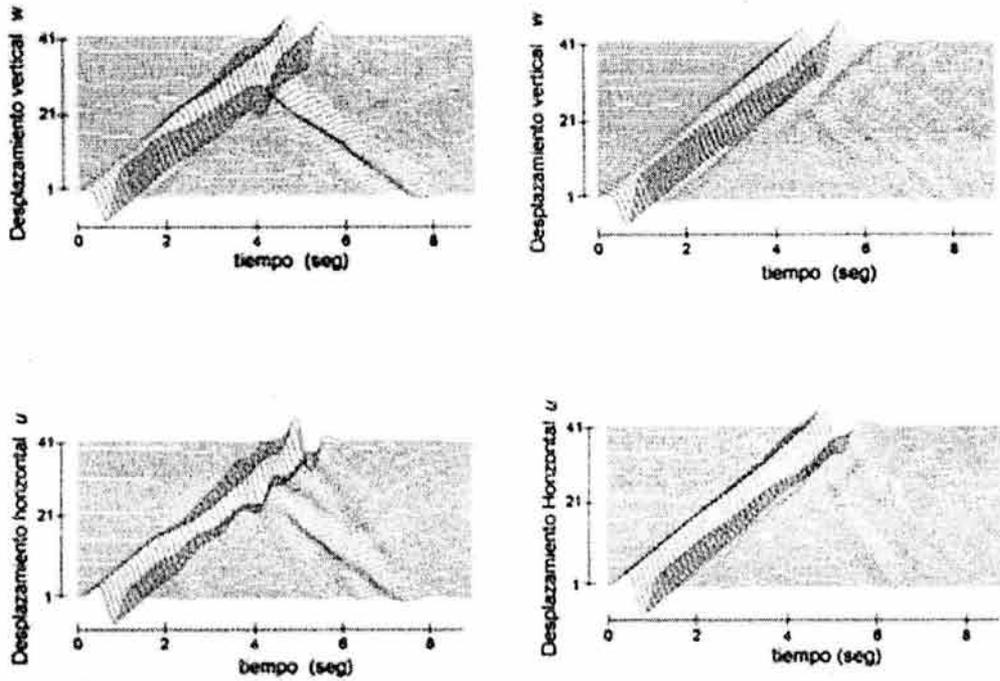


Fig. 3.3.9. Desplazamientos verticales y horizontales calculados en la superficie libre para el problema de la Fig. 3.3.5. Incidencia de ondas de Rayleigh.

Finalmente en la Fig. 3.3.10 se muestra un modelo que presenta a una onda de Rayleigh que incide en un medio con 3 grietas. El primer caso estudiado, caso a), corresponde a 3 grietas horizontales ($\theta = 0^\circ$) localizadas a una profundidad $d/2a = 0.2$, mientras que el caso b) corresponde a estas 3 grietas con $\theta = 60^\circ$ y una profundidad $d/2a = 0.1$. Los resultados para los desplazamientos verticales son presentados en la Fig. 3.3.11. Los cálculos fueron realizados para 51 receptores ubicados sobre la superficie libre igualmente espaciados a $\Delta x = 0.24$. De manera general para los casos estudiados se presenta una disminución considerable en la amplitud de la onda, la cual claramente se observa en el receptor 51, en comparación con el receptor 1. Sin embargo, para $\theta = 0^\circ$ existe una mayor interacción de la onda incidente con las grietas. Ahí se observa que la difracción generada por cada grieta da como resultado en una onda de Rayleigh reflejada, moviéndose a su velocidad característica pero en dirección contraria a la onda incidente. Esta onda de Rayleigh reflejada es muy notoria para las primeras dos grietas, sin embargo, para la tercera es casi nula, debido a que para ésta la amplitud de la onda incidente ya ha sido reducida por la interacción con las grietas anteriores (teniendo ahora menos influencia a la profundidad de la grieta). Por mediciones tomadas directamente de los sismogramas mostrados en esta figura (Fig. 3.3.11), se observa que la onda de Rayleigh reflejada es generada en el vértice opuesto de la grieta donde incide la onda. Por otro lado, para $\theta = 60^\circ$ la reflexión de ondas de Rayleigh casi no se aprecia. Esto se debe a que la inclinación de la grieta ayuda a disipar la energía hacia el interior del medio y no hacia la superficie libre. La onda que incide sobre la primera grieta es reducida en amplitud, la cuál al incidir sucesivamente en las siguientes grietas prácticamente no se ve afectada. La serie de resultados aquí presentada ya ha sido

publicada en revistas internacionales. Un artículo completo puede ser consultado en el anexo C de este trabajo de tesis.

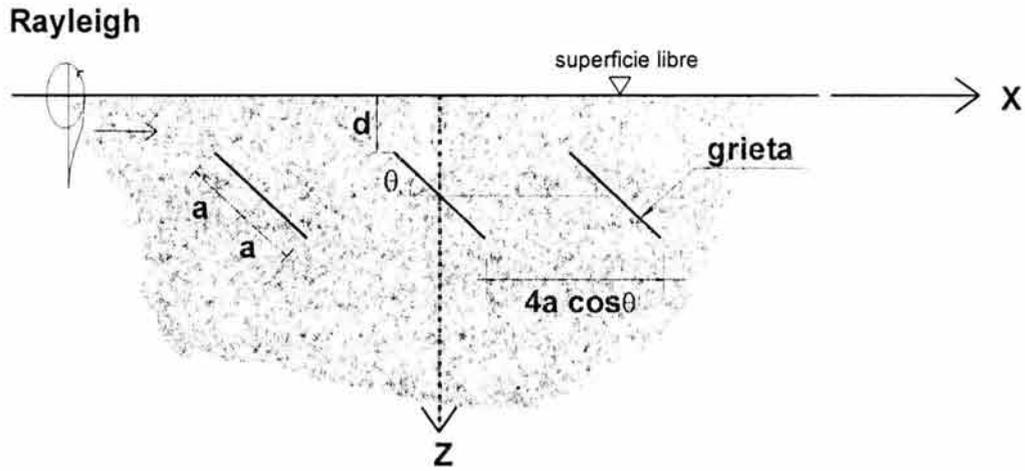


Fig. 3.3.10. Modelo de 3 grietas en un semiespacio elástico para el caso de incidencia de onda de Rayleigh.

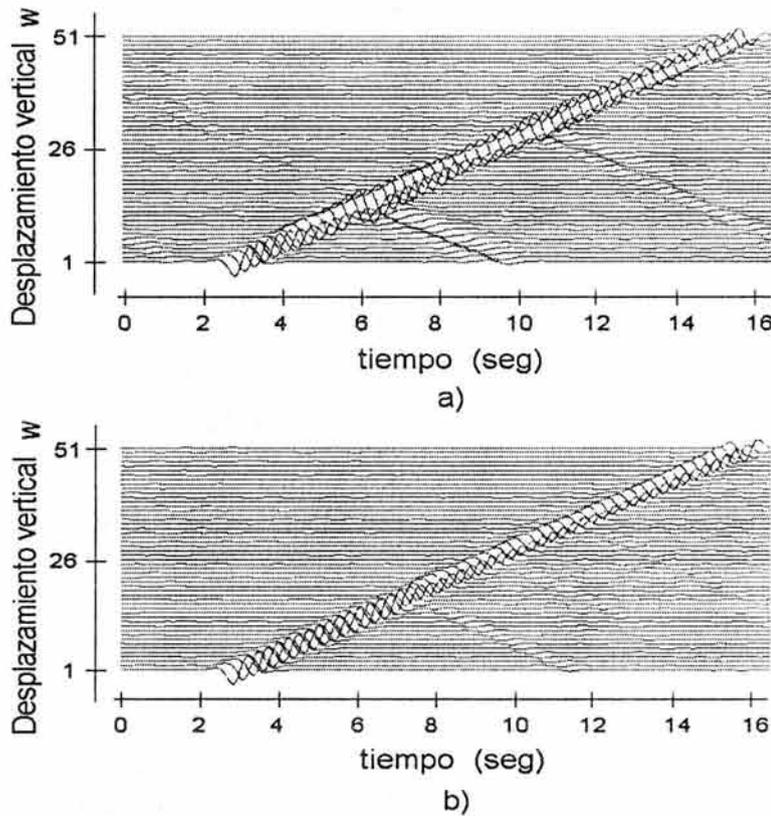


Fig. 3.3.11. Sismogramas sintéticos. Desplazamientos verticales para el modelo de la Fig. 3.3.10. Incidencia de onda de Rayleigh. a) tres grietas horizontales, b) tres grietas inclinadas $\theta = 60^\circ$.

III.4. Difracción múltiple por sistemas de cilindros

En un espacio elástico lineal, isótropo y homogéneo el desplazamiento w en la dirección de z , que genera la propagación de ondas armónicas antiplanas S, satisface la ecuación reducida de onda de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0 \quad (3.4.1)$$

donde x, y = coordenadas cartesianas, $k = \omega / \beta$ = número de onda de cortante, ω = frecuencia de excitación, β = velocidad de propagación de ondas de cortante.

Si la excitación consiste en una onda plana S de intensidad w_0 y ángulo de incidencia ψ la cual se propaga de frente al arreglo de inclusiones elásticas tal y como se muestra en la Fig. 3.4.1. Tal onda incidente está dada en el sistema de referencia (x_1, y_1) referido al primer obstáculo por

$$w^i(x_1, y_1) = w_0 \exp[-ik(x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi)] \quad (3.4.2)$$

De aquí en adelante, el factor de tiempo $\exp(i\omega t)$ (en el que $i = \sqrt{-1}$, y t = tiempo) será omitido. La presencia de una línea de cilindros elásticos produce difracción y dispersión del campo de ondas incidente. La solución sin embargo está dada por:

$$w = w^i(x_1, y_1) + \sum_{j=1}^{NS} w_j^s(r_j, \theta_j) \quad (3.4.3)$$

en donde $w_j^s(r_j, \theta_j)$ representa la onda difractada por el j -ésimo difractor cilíndrico en términos del j -ésimo sistema de coordenadas cilíndricas (r_j, θ_j) ; y NS = número de difractores.

Con la ayuda del método de separación de variables, el campo difractado para cada difractor se puede escribir como:

$$w_j^s(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(kr_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(kr_j) \sin n\theta_j \quad (3.4.4)$$

donde A_n^j, B_n^j = coeficientes complejos indeterminados que se determinarán al satisfacer las condiciones de frontera; y $H_n^{(2)}(.)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n . El sistema de ecuaciones de la ec. (3.4.4) forma un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda en regiones no acotadas, y satisfacen la condición de Sommerfeld de irradiación al infinito.

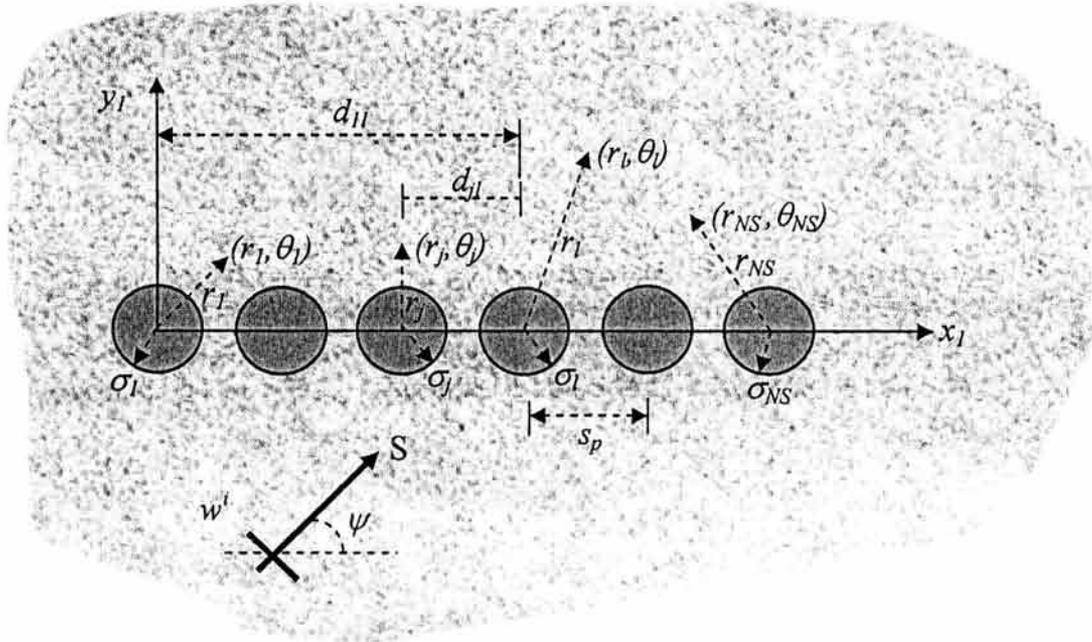


Fig. 3.4.1. Arreglo de cilindros elásticos regularmente distribuidos, sistema de referencia e incidencia de una onda plana S.

Por tratarse de obstrucciones elásticas se refracta parte de la onda incidente, generándose una onda estacionaria dentro de cada cilindro. Resolviendo la ec. (3.4.1) con el método de separación de variables, se encuentra que el campo refractado en el j -ésimo cilindro se puede expresar en el sistema de coordenadas (r_j, θ_j) como

$$w_j(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j J_n(k_c r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j J_n(k_c r_j) \sin n\theta_j \quad (3.4.5)$$

donde $C_n^j, D_n^j =$ coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera y $J_n(\cdot) =$ función de Bessel de primera especie y orden n ; el subíndice c indica cilindro. Las funciones $J_n(k_c r_j) \cos n\theta_j$ y $J_n(k_c r_j) \sin n\theta_j$ forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda en regiones acotadas. Los coeficientes A_n^j, B_n^j, C_n^j , y D_n^j que definen la solución del problema se obtienen al satisfacer las condiciones de frontera. Suponiendo, adhesión perfecta, las condiciones de frontera que se deben satisfacer en las interfaces medio-obstrucción son de continuidad de desplazamientos y esfuerzos, esto es:

$$w(r_l, \theta_l)_{r_l=a} = w_l(r_l, \theta_l)_{r_l=a} \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad y \quad l = 1, 2, \dots, NS \quad (3.4.6)$$

$$\mu_s \left. \frac{\partial w(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \right|_{r_l=a} = \mu_c \left. \frac{\partial w_l(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \right|_{r_l=a} \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad y \quad l = 1, 2, \dots, NS \quad (3.4.7)$$

donde a = radio de los cilindros.

Para obtener la solución del problema es necesario imponer las condiciones de frontera en cada uno de los cilindros, para lo cual conviene representar el campo total, ec. (3.4.2) con respecto a un sistema de coordenadas cualquiera (r_l, θ_l) . Para esto las ecs. (3.4.3) y (3.4.4) se deben referir al sistema l usando el teorema de adición de Graf; en el anexo D se presentan las formulas explícitas para llevar a cabo las transformaciones de coordenadas. Así, el campo total w referido al sistema de coordenadas (r_l, θ_l) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w(r_l, \theta_l) = & w_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m H_m^{(2)}(kd_{ol}) \cos m\theta_{ol} J_m(kr_l) \cos m\theta_l + \right. \\ & \left. 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m H_m^{(2)}(kd_{ol}) \text{sen} m\theta_{ol} J_m(kr_l) \text{sen} m\theta_l \right] + \\ & (1 - \delta_{l1}) \sum_{j=1}^{l-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \cos m\theta_l + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m L_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \text{sen} m\theta_l \right] + \\ & \sum_{m=0}^{\infty} A_m^l H_m^{(2)}(kr_l) \cos m\theta_l + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^l H_m^{(2)}(kr_l) \text{sen} m\theta_l + \\ & (1 - \delta_{lNS}) \sum_{j=l+1}^{NS} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \cos m\theta_l + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} L_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \text{sen} m\theta_l \right] \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

donde

$$K_m^n(\cdot) = H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \quad (3.4.9)$$

$$L_m^n(\cdot) = -H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \quad (3.4.10)$$

ε_m = factor de Neumann ($\varepsilon_0 = 1$ y $\varepsilon_m = 2$, $m \geq 1$), d_{jl} = distancia centro a centro entre el j -ésimo cilindro y el l -ésimo cilindro y δ_{jl} = delta de Kroeneker (= 1 si $l = j$; = 0 si $l \neq j$).

Sustituyendo las ecs. (3.4.5) y (3.4.8) en las ecuaciones (3.4.6) y (3.4.7) y empleando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, es posible obtener cuatro sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen los coeficientes A_n^j , B_n^j , C_n^j , y D_n^j . Sin embargo, como no interesa la solución en los cilindros, sólo en el medio elástico, se

pueden eliminar los coeficientes C_n^j y D_n^j , obteniéndose dos sistemas de ecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$(1-\delta_{ll})(-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(kd_{jl}) A_n^j + \frac{2}{\varepsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)'}(ka) - F_m H_m^{(2)}(ka)}{J_m'(ka) - F_m J_m(ka)} \right] A_m^l +$$

$$(1-\delta_{lNS}) \sum_{j=l+1}^{NS} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(kd_{jl}) A_n^j =$$

$$-2w_o(-i)^m \cos m\psi, \quad l=1,2,\dots,NS \quad y \quad m=0,1,\dots,\infty \quad (3.4.11)$$

$$(1-\delta_{ll})(-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(kd_{jl}) B_n^j + \left[\frac{H_m^{(2)'}(ka) - F_m H_m^{(2)}(ka)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(ka)} \right] B_m^l +$$

$$(1-\delta_{lNS}) \sum_{j=l+1}^{NS} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(kd_{jl}) B_n^j =$$

$$-2w_o(-i)^m \operatorname{sen} m\psi, \quad l=1,2,\dots,NS \quad y \quad m=0,1,\dots,\infty \quad (3.4.12)$$

donde

$$F_m = \sqrt{\frac{\mu_c \rho_c}{\mu \rho} \frac{J_m'(k_c a)}{J_m(k_c a)}} \quad (3.4.13)$$

la prima indica derivada con respecto al argumento.

Resolviendo los sistemas de ecs. (3.4.11) y (3.4.12) el problema está resuelto. Numéricamente dichos sistemas no pueden ser resueltos exactamente; una aproximación de la solución se obtiene al reducirlos a dimensión finita, truncando adecuadamente los órdenes m y n , tal que la solución converja. Analizando los sistemas de ecuaciones resultantes, se puede observar que el tipo de difractor, cilindro elástico, rígido o cavidad, modifica sólo los coeficientes diagonales.

A continuación se muestran algunos de los resultados más significativos y contundentes obtenidos mediante las técnicas analíticas descritas en este capítulo. Con el objeto de mostrar los resultados de una manera sencilla y clara se muestran las configuraciones del modelo correspondiente a cada caso y se describen con detalle el análisis de cada uno de ellos. Se utilizaron 8 términos en las expansiones consideradas aquí, obteniendo hasta cuatro dígitos de exactitud en los rangos de frecuencias estudiados. Se dan resultados para la incidencia de ondas S planas. Los ángulos de incidencia son de 90° y 75° para los casos de incidencia normal y oblicua, respectivamente. Los campos de onda dependen de las frecuencias normalizadas que se construyen como:

$$\eta_k = \frac{ka}{\pi} \frac{2a}{\lambda_k} \quad (3.4.14)$$

donde $\lambda_k = a$ a la longitud de onda de las ondas incidentes S. Así que la frecuencia normalizada es la relación entre el diámetro del cilindro y la longitud de onda. En los resultados de las Figs. 3.4.2, 3.4.3 y 3.4.4 se mantuvo un número constante de 8 cilindros y una relación de masa de $\rho_s/\rho_p = 0.65$. En la Fig. 3.4.2 se muestran las amplitudes del desplazamiento normalizadas, w (para $y/a = 150$) vs. x/a para diferentes separaciones entre los cilindros. Aquí la frecuencia normalizada es 0.5. Es muy claro que las máximas reducciones ocurren cerca del centro del modelo. Este hecho sugiere el modelo se comporta como una fractura simple en largas distancias y no como un grupo de obstáculos independientes.

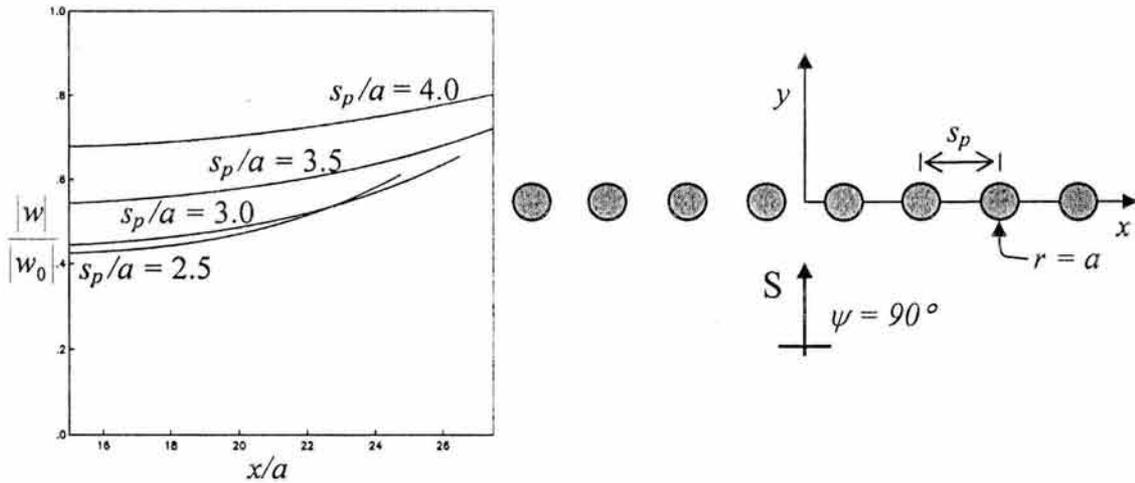


Fig. 3.4.2 Amplitudes del desplazamiento normalizadas para $y/a = 150$ con $NS = 8$ cilindros rígidos con $\rho_c/\rho = 1.538$ y $\mu_c \rightarrow \infty$. Diferentes separaciones, s_p/a , y frecuencia normalizada de $\eta_k = 0.5$. Incidencia normal de ondas S.

Puede observarse que las máximas reducciones de la amplitud ocurren en el centro del arreglo. Este efecto se aprecia claramente en la Fig. 3.4.2 para la separación normalizada $s_p/a = 3$. En este caso el efecto reductor del sistema es del orden del 55%, siendo de alrededor del 60% para una separación de $s_p/a = 2.5$. Este hecho sugiere que el sistema se comporta como una unidad singular para distancias lejanas y no como un grupo de difractors independientes. En el anexo D se ofrecen resultados para puntos de observación más cercanos que los mostrados en la Fig. 3.4.2 y resulta claro que en puntos de observación cercanos al arreglo de cilindros el campo reducido muestra gran variabilidad, en contraste con las variaciones suaves del campo observadas a largas distancias. Como se esperaba, cuando los obstáculos están ubicados cerradamente, teniendo por lo menos una separación de un radio entre ellos, las reducciones de amplitud máxima toman lugar. Así, cuando la separación crece las reducciones son menores.

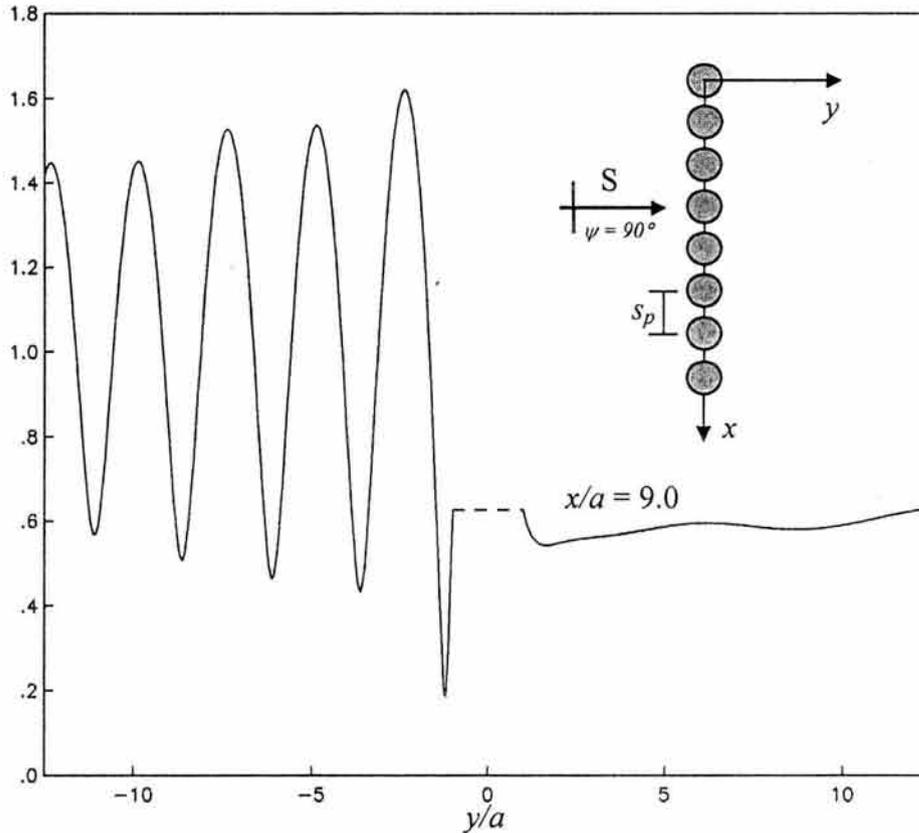


Fig. 3.4.3. Amplitudes del desplazamiento normalizadas para $x/a = 9$ y $s_p/a = 3.0$. Frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. Incidencia normal de ondas S.

En la Fig. 3.4.3 se muestra un arreglo con 8 cilindros rígidos dentro de un diagrama que grafica las amplitudes normalizadas del campo de desplazamientos a lo largo de la línea $x/a = 9.0$, esto es antes de la mitad del arreglo, con una separación entre cilindros de $s_p/a = 3.0$ y frecuencia adimensional $\eta_k = 0.4$. La respuesta mostrada corresponde a un arreglo con $\rho_c/\rho = 1.538$ y $\mu_c \rightarrow \infty$. Es claro el fuerte efecto de atenuación producido por el arreglo de cilindros rígidos; en el anexo D se muestran resultados para diferentes tipos de materiales dentro de los cilindros y se discuten las implicaciones en los cambios de las respuestas. De los grupos de resultados analizados, parece ser que el tipo de material de relleno no es relevante para obtener reducciones de la amplitud en el lado opuesto a la incidencia, esto es después del arreglo. Sin embargo este tipo de resultados se deben verificar con series de experimentos en el dominio del tiempo. Dichos resultados se ilustran más adelante.

Para mostrar los efectos de difracción en el lado de incidencia, se calcularon amplitudes del desplazamiento normalizadas para 8 cilindros rígidos (Fig. 3.4.4). La distancia entre los centros de los difractores es de $s_p/a = 4.0$ para una frecuencia normalizada de $\eta_k = 0.4$.

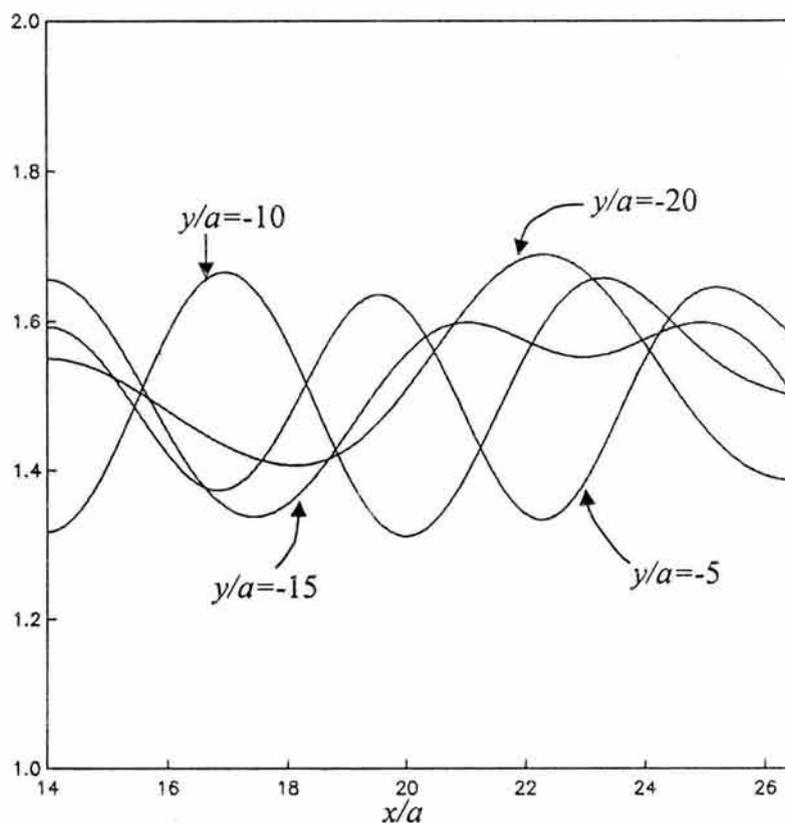


Fig. 3.4.4. Amplitudes del desplazamiento normalizadas para $y/a = -20, -15, -10, -5$, para, $s_p/a = 4.0$, y frecuencia normalizada de $\eta_k = 0.4$. Incidencia normal de ondas S.

El arreglo de obstáculos rígidos claramente muestra los efectos de amplificación del campo incidente en todos los sitios de medición, observando una amplitud máxima en $x/a = 22.25$, para $y/a = -20$.

Con el objeto de mostrar la respuesta temporal de este tipo de modelos, se realizaron varios cálculos en los que se obtienen sismogramas sintéticos sobre una línea de receptores a una distancia dada del renglón de obstrucciones cilíndricas por el lado opuesto a la incidencia. Esto con la finalidad de observar los efectos dispersivos por la presencia de estos difractores. En la Fig. 3.4.5 se muestra la configuración de un modelo que contiene 2 cavidades del mismo radio $r = a = 1$, con una separación de $s_p/a = 4.0$ desde sus respectivos centros. Se trata de la incidencia de un campo plano de ondas S con un ángulo de llegada de 90° . En la Fig. 3.4.6 se presenta el mismo arreglo que el de la Fig. 3.4.5, sólo que con un ángulo de inclinación de la onda plana incidente de 75° . En ambos casos la onda plana S incidente esta construida por medio de un pulso de Ricker de $t_p = 1.5$ s. Aquí se pueden observar las fases de llegada r_1, c_1, r_2, c_2 debidas a las cavidades 1 y 2 respectivamente. La letra r significa "reflejada", y la letra c "cabalgada", siguiendo la notación propuesta por Benites *et al.*, (1992). En esta ocasión y a diferencia de los ejemplos presentados en los ejemplos del capítulo II, donde se incluía un solo difractor, se presentan las fases r_{21}, r_{12} ,

r_{121} y r_{212} separadas por intervalos de tiempo de aproximadamente $2a / \beta$, las cuales corresponden a ondas reflejadas entre las fronteras de las dos cavidades. Los índices están relacionados con el orden con el cual cada reflexión toma lugar. Por ejemplo r_{21} , indica que la onda fue reflejada primero por la cavidad 2 y después por la cavidad 1 antes de alcanzar su estación particular. De la misma manera, para r_{121} . A estas fases se les llama “fases interactivas” (Benites *et al*, 1992).

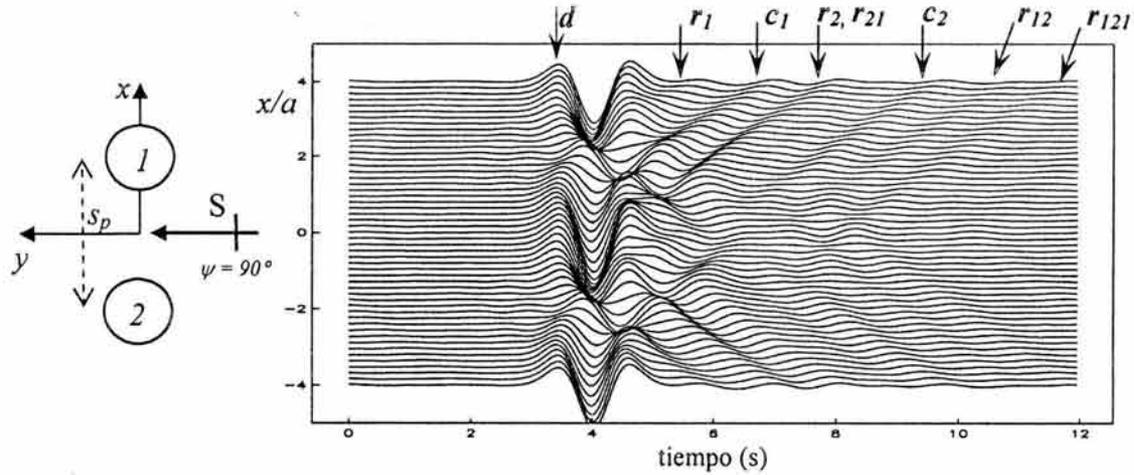


Fig. 3.4.5. Sismogramas sintéticos para el modelo que se muestra a la izquierda. Incidencia normal de una onda plana S con un pulso de Ricker $t_p = 1.5$ s. Los receptores se encuentran localizados a una distancia $y/a=1.5$.

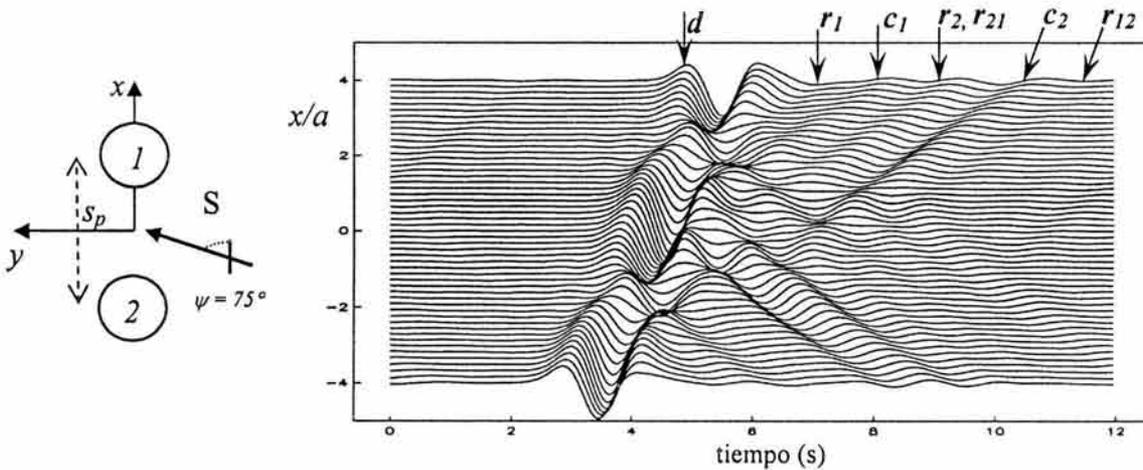


Fig. 3.4.6. Sismogramas sintéticos para el modelo que se muestra a la izquierda. Incidencia oblicua de una onda plana S ($\psi = 75^\circ$), con un pulso de Ricker $t_p = 1.5$ s. Los receptores se encuentran localizados a una distancia $y/a=1.5$.

Un serie de resultados en los que se incluyen diferentes grupos y tipos de materiales de relleno en los cilindros se pueden consultar en el anexo D. Dicho conjunto de resultados incluyen también historias de tiempo (*snapshots*) para describir el movimiento y difracción de las ondas incidentes en todo el espacio de cálculo. Es necesario resaltar la importancia de este tipo de soluciones analíticas. La formulación presentada en este capítulo, propone caminos sencillos y prácticos para el cálculo de la respuesta sísmica para medios heterogéneos que pueden ser modificados en su complejidad gradualmente. Así, las formulaciones analíticas proponen caminos directos y con poco esfuerzo de cómputo para lograr entender los fenómenos de difracción de las ondas elásticas por la presencia de obstrucciones regulares de forma sencilla. Es muy importante lograr identificar las ventajas y limitaciones de estas técnicas ya que de ello depende su uso racional en la solución de un problema en específico. Se prevé que en el futuro las investigaciones serán enfocadas al estudio de varios difractores con posiciones arbitrarias en el espacio y que puedan incluir distintos tipos de materiales. Es obvio que los problemas se tornan más caros computacionalmente en 3D, y que será necesario adoptar medidas estadísticas para su tratamiento.

IV. ELASTODINÁMICA DE POZO

IV.1. Propagación de ondas en la vecindad de pozos (2D)

Considere la sección transversal de un pozo cilíndrico lleno de fluido embebido en un espacio elástico, homogéneo e isótropo como el que se muestra en la Fig. 4.1.1. A partir de la formulación presentada en los capítulos II.2 y III.4, en donde se revisó el teorema de adición de Graf, sabemos que una fuente puntual excéntrica ubicada en el punto I , se puede representar por medio del campo de presiones en el interior como

$$p^{(0)} = D(\omega)H_0^{(2)}(q_R r_1) \exp(i\omega t), \quad (4.1.1)$$

donde $D(\omega)$ puede ser un coeficiente función de la frecuencia angular ó un coeficiente constante. Así pues, la fuente en el punto I se puede expresar en términos de soluciones de la ecuación de onda referida al origen 0 mediante una expansión de ondas cilíndricas de la siguiente forma:

$$H_0^{(2)}(q_R r_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(q_R r) J_m(q_R d) \cos m\theta, \quad (4.1.2)$$

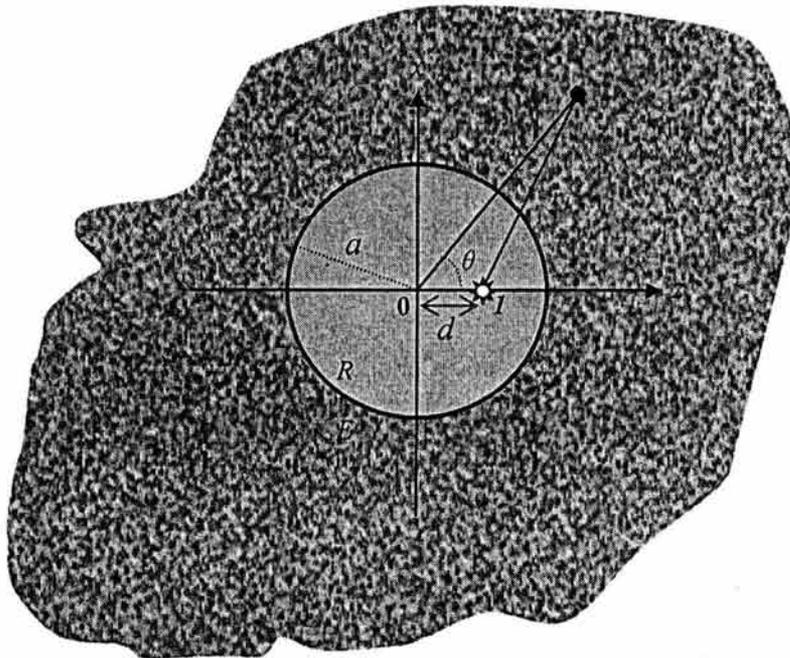


Fig. 4.1.1. Sección transversal de un pozo con fluido y fuente puntual excéntrica

donde $r_1 = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta}$, $q_R = \omega/\alpha_f =$ número de onda compresional en la región R , $\omega =$ frecuencia angular, $\alpha_f =$ velocidad de propagación de ondas P en el fluido, $r =$ distancia al punto de observación y $d =$ distancia de excentricidad de la fuente puntual. De aquí en adelante el término de propagación armónica $\exp(i\omega t)$ será omitido.

Utilizando el principio de superposición lineal, el campo de desplazamiento dentro del pozo $p^{(r)}$ se puede expresar mediante la suma de los campos producidos por la fuente puntual y el campo difractado por la pared, esto es

$$p^{(r)} = p^{(0)} + p^{(d)}. \quad (4.1.3)$$

Sustituyendo las ecs. (4.1.1) y (4.1.2) en la ec. (4.1.3), tenemos que el campo dentro del fluido del pozo se puede escribir como

$$p^{(r)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(q_R r) J_m(q_R d) \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(q_R r) \cos m\theta \quad ; \quad |r| > |d|. \quad (4.1.4)$$

Para conocer los desplazamientos en el medio elástico, será necesario establecer las expresiones a través de sus potenciales. Calculando el campo de desplazamientos a partir de estos potenciales y por tratarse de un problema bidimensional, se usa ϕ_m , para el potencial escalar y ψ_m para el potencial vectorial. Entonces, dichos campos se pueden escribir de la siguiente forma

$$\phi_m = \phi_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(2)}(q_E r) \cos m\theta, \quad (4.1.5)$$

$$\psi_m = \psi_0 \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(kr) \sin m\theta. \quad (4.1.6)$$

Utilizando el teorema de Helmholtz en coordenadas cilíndricas y reduciendo los términos que no contribuyen a la solución en el plano de propagación x - z . Los desplazamientos están dados por

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta}, \quad (4.1.7)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r}. \quad (4.1.8)$$

De la misma manera se pueden obtener las expresiones para los esfuerzos por medio de la ley de Hooke en coordenadas cilíndricas (Avilés & Sánchez-Sesma, 1983) como

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad (4.1.9)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (4.1.10)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (4.1.11)$$

Sustituyendo las ecs. (4.1.5) y (4.1.6) en las ecuaciones (4.1.7) y (4.1.8), se tiene que los desplazamientos se pueden escribir por

$$u_r = \sum_{m=0}^{\infty} B_m q_E H_m^{(2)}(q_E r) \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{m}{r} H_m^{(2)}(kr) \cos m\theta \quad (4.1.12)$$

$$u_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{m}{r} H_m^{(2)}(q_E r) (-\text{sen}m\theta) - \sum_{m=0}^{\infty} C_m k H_m^{(2)}(kr) \text{sen}m\theta. \quad (4.1.13)$$

De las expresiones (4.1.11) y (4.1.12) podemos identificar que las funciones $y_1^p(*) = q_E H_m^{(2)}(q_E r)$ y $y_1^s(*) = k H_m^{(2)}(kr)$ y que representan las funciones radiales para ondas P y ondas S, respectivamente. De la misma manera y utilizando las definiciones para las funciones radiales anteriores, se pueden obtener los esfuerzos a partir de las ecs. (4.1.9), (4.1.10) y (4.1.11) como

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} (B_m y_1^p(q_E r) + C_m y_2^s(kr)) \cos m\theta - \right. \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{m^2}{r^2} H_m^{(2)}(q_E r) + C_m \frac{m}{r} y_1^s(kr) \right) \cos m\theta + \right. \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{1}{r} y_1^p(q_E r) + C_m \frac{m}{r^2} H_m^{(2)}(kr) \right) \cos m\theta \right] + \\ & 2\mu \left[\sum_{m=0}^{\infty} (B_m y_1^p(q_E r) + C_m y_2^s(kr)) \cos m\theta \right] \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & (\lambda + 2\mu) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{m^2}{r^2} H_m^{(2)}(q_E r) + C_m \frac{m}{r} y_1^s(kr) \right) (-\cos m\theta) + \right. \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{1}{r} y_1^p(q_E r) + C_m \frac{m}{r^2} H_m^{(2)}(kr) \right) \cos m\theta \right] + \\ & \left. \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m y_1^p(q_E r) + C_m \frac{1}{r} y_1^s(kr) \right) \cos m\theta \right] \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & \mu \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{m}{r} y_1^p(q_E r) + C_m y_1^s(kr) \right) (-\text{sen} m\theta) - \right. \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{m}{r^2} H_m^{(2)}(q_E r) + C_m \frac{1}{r} y_1^s(kr) \right) (-\text{sen} m\theta) + \right. \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m \frac{m}{r} y_1^p(q_E r) + C_m \frac{m^2}{r^2} H_m^{(2)}(q_E r) \right) (-\text{sen} m\theta) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Estas son las expresiones para obtener los esfuerzos sólo en los términos del tensor que tienen contribución en el modelo considerado. Note que por simetría $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$.

Para obtener los valores de los campos de desplazamientos y esfuerzos en todo el dominio de estudio, será necesario establecer las condiciones de continuidad en la frontera sólido-fluido. Asumiendo que el fluido y el medio elástico se encuentran en contacto perfecto y continuo en la pared del pozo, se tiene que:

$$\begin{aligned} u_r^E &= u_r^{(0)f} + u_r^{(d)f} \\ \sigma_{rr}^E &= -(p_m^{(0)} + p_m^{(d)}) \\ \sigma_{r\theta}^E &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Finalmente, valuando en la pared del pozo $r = a$, agrupando y contrayendo los términos por familias se puede construir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\rho_R \omega^2} y_1^p(q_R a) & y_1^p(q_E a) & \frac{m}{r} H_m^{(2)}(ka) \\ -J_m(q_R a) & -\{\lambda y_{pp}(q_E a) + 2\mu y_1^p(q_E a)\} & -2\mu y_2^s(ka) \\ 0 & -\{\mu y_{pq}(q_E a)\} & -\{\mu y_{sk}(ka)\} \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{bmatrix} \\ & = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\rho \omega^2} \varepsilon_m q_R H_m^{(2)}(q_R a) J_m(q_R d) \\ \varepsilon_m H_m^{(2)}(q_R a) J_m(q_R d) \\ 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

donde las funciones radiales se definen de la siguiente forma

$$y_1^p(q_E a) = q_E H_m^{(2)}(q_E a) = H_m^{(2)}(q_E a) \frac{m}{a} - q_E H_{m+1}^{(2)}(q_E a), \quad (4.1.19)$$

$$y_{pp}(q_E a) = -q_E^2 H_m^{(2)}(q_E a), \quad (4.1.20)$$

$$y_1^{p'}(q_E a) = \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m}{a^2} - q_E^2 \right) H_m^{(2)}(q_E a) + \frac{q_E}{a} H_{m+1}^{(2)}(q_E a), \quad (4.1.21)$$

$$y_{ss}(ka) = 0, \quad (4.1.22)$$

$$y_2^s(ka) = \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m}{a^2} \right) H_m^{(2)}(ka) - \frac{mk}{a} H_{m+1}^{(2)}(ka), \quad (4.1.23)$$

$$y_1^s(ka) = k H_m^{(2)}(ka) = H_m^{(2)}(ka) \frac{m}{a} - k H_{m+1}^{(2)}(ka), \quad (4.1.24)$$

$$y_{pq}(q_E a) = \left(\frac{2m^2}{a^2} - \frac{m}{a^2} \right) H_m^{(2)}(q_E a) - 2q_E \frac{m}{a} H_{m+1}^{(2)}(q_E a), \quad (4.1.25)$$

$$y_{sk}(ka) = \left(\frac{2m^2}{a^2} - \frac{2m}{a^2} - k^2 \right) H_m^{(2)}(ka) + 2 \frac{k}{a} H_{m+1}^{(2)}(ka), \quad (4.1.26)$$

$$y_1^{s'}(ka) = \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m}{a^2} - k^2 \right) H_m^{(2)}(ka) + \frac{k}{a} H_{m+1}^{(2)}(ka). \quad (4.1.27)$$

Así, el sistema de la ec. (4.1.18) se resuelve numéricamente para cada m . La convergencia del sistema dependerá del número de términos a utilizar en las expansiones y las funciones radiales y de la frecuencia a resolver.

La Fig. 4.1.2 muestra la respuesta en tiempo graficada en trazas sintéticas calculadas para el campo de desplazamiento en la dirección radial. 51 detectores ubicados en $y = 2a$ y $-3a \leq x \leq 3a$ son mostrados y la fuente puntual se localiza en el origen. Las propiedades normalizadas del fluido del pozo son: $\alpha_f = 1.0$ y $\rho_f = 1.0$; y en el sólido elástico $\alpha_E = 2.0$, $\beta_E = 1.0$ y $\rho_E = 1.0$. En este resultado se puede observar como la fuente localizada en el centro del modelo sólo provoca la propagación de ondas P dentro del fluido y en el medio elástico. De esta forma el modelo resulta simétrico, y sólo se pueden generar modos de propagación de ondas P.

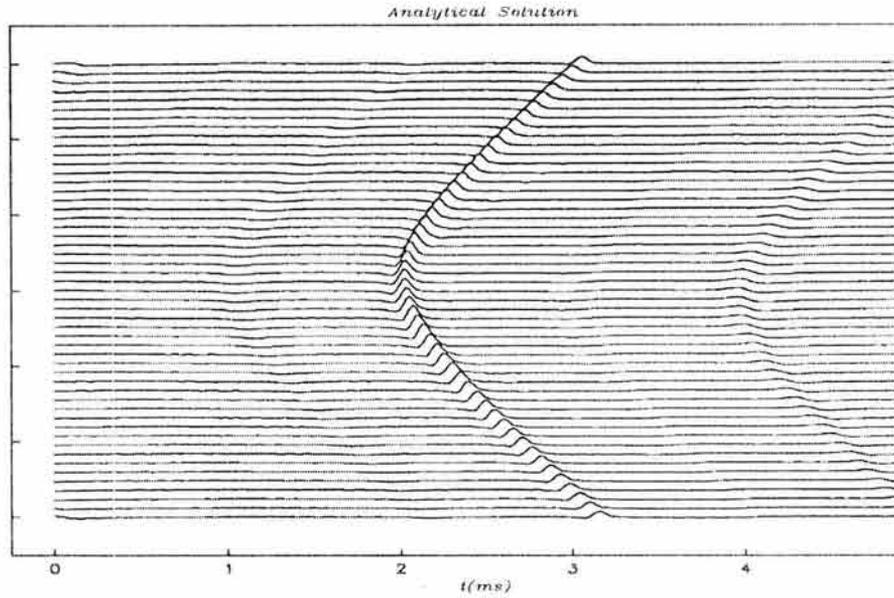


Fig. 4.1.2. Sismograma sintético para el modelo de la Fig. 4.1.1. Fuente puntual centrada.

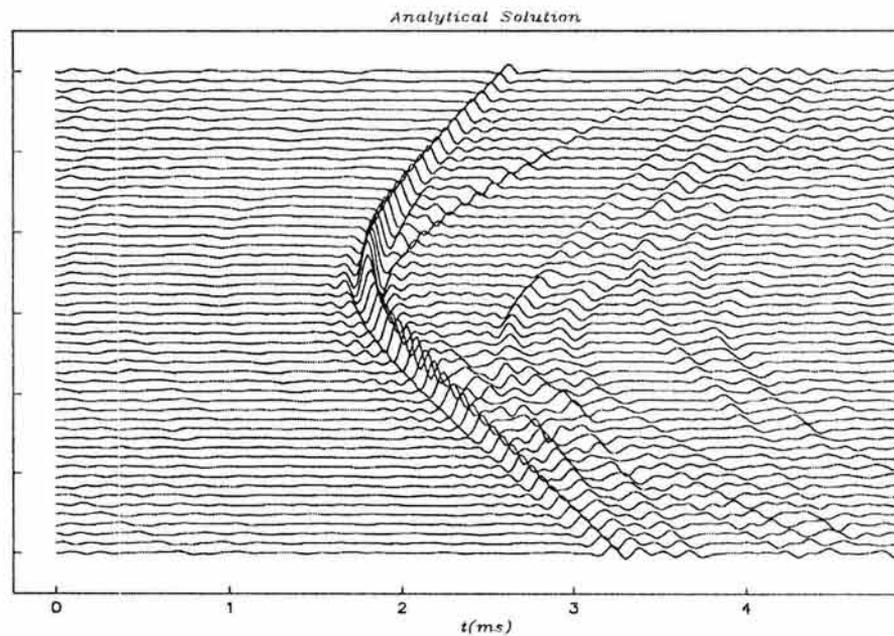


Fig. 4.1.2. Sismograma sintético para el modelo de la Fig. 4.1.1. Fuente puntual excéntrica ubicada en $x = 0.5$.

En la Fig. 4.1.2 se muestran los sismogramas sintéticos para un modelo con fuente puntual excéntrica $x = 0.5a$. La distribución de receptores y las propiedades elásticas y acústicas en el espacio y el pozo, son las mismas que en el ejemplo anterior. Resultan muy claras las diferencias entre ambas respuestas. Ahora es muy notoria la aparición de modos de

propagación convertidos (onda S) que viajan a menor velocidad en el medio elástico, por la interacción entre la fuente puntual excéntrica y la pared del pozo. Ahora el movimiento generado dentro del fluido es asimétrico. Este nuevo frente de ondas muestra su aparición inmediatamente después del primer arribo del campo original de ondas P. Existe un claro efecto de imagen observado por los receptores ubicados en el lado opuesto del arreglo, además de un efecto de atrapamiento de la energía dentro del pozo debido a la presencia del fluido y a los fuertes contrastes en los parámetros elásticos y acústicos del modelo.

IV.2. Propagación de ondas en la vecindad de pozos (3D)

Permítase escribir una ecuación de onda inhomogénea con fuente puntual en el origen y dependencia armónica en el tiempo de $\exp(i\omega t)$ como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 4\pi c^2 \delta(x) \exp(i\omega t). \quad (4.2.1)$$

La solución de esta ecuación para un espacio homogéneo e infinito se obtiene por medio del potencial ϕ , el cual se puede escribir como un potencial de desplazamiento para una onda esférica afectada por un decaimiento de la amplitud por la distancia como

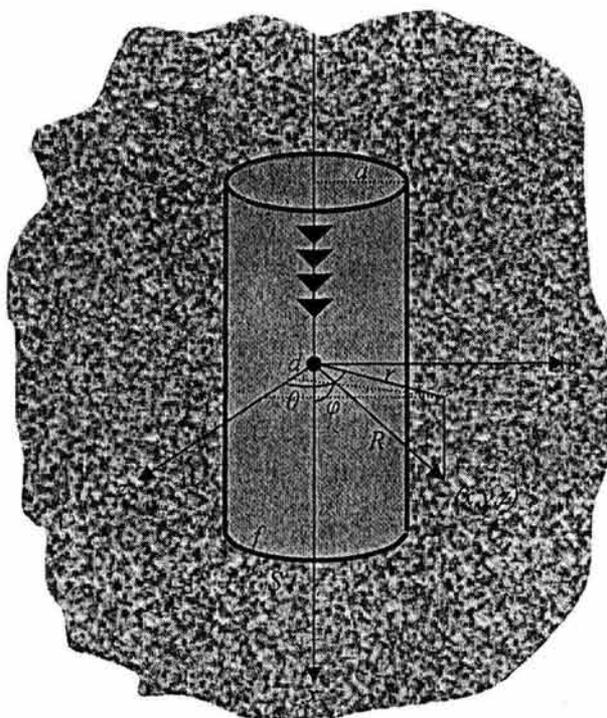


Fig. 4.2.1. Esquema tridimensional de un pozo con fluido y fuente esférica en el origen.

$$\phi = \frac{1}{R} \exp - i\omega \left(\frac{R}{c} - t \right), \quad (4.2.2)$$

donde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia al punto de observación y c = velocidad de propagación de la onda esférica en el fluido. Sabemos que la solución ϕ representa una onda armónica esférica que se propaga en la dirección de R como se muestra en la Fig. 4.2.1. Para manejar expresiones compactas de la función de Green para desplazamientos y esfuerzos para fuentes móviles con velocidad constante.

La ec. (4.2.2) representa la función de Green escalar y es posible de ser expresada como una descomposición de ondas planas por medio de la integral de Weyl; (ver Aki & Richards, 1980), omitiendo el término temporal de la siguiente forma

$$\phi = \frac{1}{R} \exp - i\omega \left(\frac{R}{c} - t \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_x x - ik_y y - i\gamma|z|)}{i\gamma} dk_x dk_y, \quad (4.2.3)$$

donde k_x y k_y son las componentes en x e y , respectivamente del número de onda $K = (k_x, k_y, \gamma)$ y el número de onda vertical esta dado por

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}; \quad \text{Im}(\gamma) \leq 0. \quad (4.2.4)$$

Si suponemos que la fuente se mueve con velocidad constante sobre el eje de las x , debemos integrar sobre todos los puntos del eje x , tomando en cuenta la posición de la fuente. Esta integración se efectúa como

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \exp\left(-i\frac{\omega}{c} R\right) \exp(ikx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_y y - i\gamma|z|)}{i\gamma} dk_x dk_y \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx - ik_x x) dk \quad (4.2.5)$$

Resolviendo la integración para una serie de fuentes sobre el eje de las x , se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx - ik_x x) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(k - k_x)x) dk = 2\pi\delta(k - k_x). \quad (4.2.6)$$

La ec. (4.2.6) es una solución que se atribuye a Lamb (1904). Así entonces, sustituyendo la ec. (4.2.6) en la ec. (4.2.5) se tiene que

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_y y - i\gamma|z|)}{i\gamma} dk_y \delta(k_x - k) dk_x, \quad (4.2.7)$$

y sustituyendo la ec. (4.2.4) en la ec. (4.2.7) se puede escribir

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-ik_y y - i\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) - k^2 - k_y^2}|z|\right)}{i\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) - k^2 - k_y^2}} dk_y. \quad (4.2.8)$$

La integral de la ec. (4.2.8), es la descomposición en ondas planas del campo de ondas irradiado por la fuente puntual móvil. Esta ecuación puede ser expresada por funciones de Hankel usando la representación de Lamb (1904), e integrando sobre k_y como

$$\Phi(k) = -i\pi H_0^{(2)}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} r\right); \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (4.2.9)$$

Expresando la ec. (4.2.9) como una serie de Fourier, podemos escribir

$$\phi(x, y, z, \omega) = \frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\eta r) \exp(-ikx) dk; \quad \eta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \quad (4.2.10)$$

si queremos discretizar el potencial de desplazamiento de la fuente (campo incidente), podemos expresar la ec. (4.2.10) como

$$\phi(x, y, z, \omega) = \frac{-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_0^{(2)}(\eta r) \exp(-ik_n x) \Delta k. \quad (4.2.11)$$

Entonces, si se desea mover la fuente del origen una distancia d , como se ilustra en la Fig. 4.2.1 sobre alguno de los ejes x o y , con el objeto de tener una fuente excéntrica; habrá que recurrir al teorema de adición de Graf, y escribir

$$H_0^{(2)}(\eta r) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(\eta r) J_m(\eta d) \cos m\theta; \quad |r| > |d|. \quad (4.2.12)$$

Finalmente, el campo de desplazamientos generado dentro del cilindro fluido representado por $p^{(r)}$, se puede expresar como la superposición lineal de la fuente puntual y el campo difractado (reflejado) por la pared del pozo como

$$p^{(r)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(\eta r) J_m(\eta d) \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(\eta r) \cos m\theta. \quad (4.2.13)$$

Hasta ahora sólo hemos logrado expresar el campo de desplazamientos (presiones) en el interior del pozo y nos resta formular las soluciones en el espacio completo, esta formulación se presenta de manera compacta a continuación.

En el dominio de la frecuencia-número de onda axial, el campo difractado en la región elástica exterior al pozo (región S), puede expresarse en forma similar a la del campo incidente como

$$\begin{aligned}
 \phi^s(\omega, r, \theta, \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(2)}(\eta r) \cos m\theta \\
 \psi^s(\omega, r, \theta, \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(2)}(\nu r) \sin m\theta . \\
 \chi^s(\omega, r, \theta, \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\nu r) \cos m\theta
 \end{aligned}
 \tag{4.2.14}$$

En donde el superíndice S , se refiere a la región donde se evalúan los potenciales e indica que los valores de las velocidades en el sólido deben ser utilizadas. El número de onda efectivo para las ondas de corte $\nu = \sqrt{(\omega^2/\beta^2) - \gamma^2}$; $\text{Im}(\nu) < 0$. A_m, B_m , y C_m son hasta ahora coeficientes indeterminados que se determinarán a partir de las condiciones de frontera apropiadas. En conjunto con el factor $\exp i(\omega t - \gamma z)$, la función de Hankel de segunda especie orden m de la ec. (4.2.14) representa ondas divergentes que se irradian hacia el espacio elástico. Debido a la simetría de la fuente con respecto al plano $x - z$, las ecs. (4.2.14) involucran ambos términos, $\sin(m\theta)$ y $\cos(m\theta)$, pero no al mismo tiempo.

No importando si la fuente se encuentra afuera del pozo o dentro de él, el campo difractado (reflejado) en el fluido consiste en ondas de cuerpo, que pueden ser representadas por

$$\phi^f(\omega, r, \theta, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m J_m(\eta r) \cos m\theta ,
 \tag{4.2.15}$$

con el superíndice f que significa fluido.

Las constantes indefinidas A_m, B_m, C_m y D_m de las ecs. (4.2.14) y (4.2.15) se obtienen al imponer condiciones de continuidad de desplazamientos y esfuerzos en la interfaz entre el fluido y el sólido, como $u_r^S = u_r^f, \sigma_{rr}^S = \sigma_{rr}^f$ y $\sigma_{r\theta}^S = \sigma_{r\theta}^f = 0$. Note que como asumimos un fluido sin viscosidad, los desplazamientos tangenciales en la frontera del sólido (p. ej. u_θ^S, u_z^S) deben ser diferentes de aquellos en el fluido (p. ej. u_θ^f, u_z^f). La imposición de las cuatro condiciones de frontera para cada índice de suma m , nos permite conformar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Cómo este procedimiento es directo y ya ha sido estudiado con anterioridad por otros autores, no se muestra el desarrollo en este capítulo, mayor detalle puede encontrarse en Tadeu *et al* (2001).

Habiendo determinado los coeficientes mediante la solución del sistema de ecuaciones, podemos calcular los movimientos asociados con el campo difractado en términos de las bien conocidas ecuaciones que relacionan los potenciales y los desplazamientos. En esencia, esto requiere de la consideración de las ecs. (4.2.15) y (4.2.16) y también de (4.2.13) para el caso en el que la fuente se considere dentro del pozo fluido. Así mismo debemos tomar las derivadas parciales para ir de los potenciales a los desplazamientos. Después de haber realizado este procedimiento, podemos obtener expresiones para el campo difractado en el sólido y el fluido en la forma

$$\begin{aligned}
 u_r(\omega, r, \theta, \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m(r) \cos m\theta \\
 u_\theta(\omega, r, \theta, \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} g_m(r) \operatorname{sen} m\theta . \\
 u_z(\omega, r, \theta, \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} h_m(r) \cos m\theta
 \end{aligned}
 \tag{4.2.16}$$

En donde las funciones f_m, g_m y h_m están dadas por:

Para el sólido:

$$\begin{aligned}
 f_m(r) &= \left[H_m^{(2)}(\eta r) \frac{m}{r} - \eta H_{m+1}^{(2)}(\eta r) \right] A_m + \frac{m}{r} H_m^{(2)}(\nu r) B_m \\
 &\quad - i\gamma \left[H_m^{(2)}(\nu r) \frac{m}{r} - \nu H_{m+1}^{(2)}(\nu r) \right] C_n ,
 \end{aligned}
 \tag{4.2.17}$$

$$\begin{aligned}
 g_m(r) &= -H_m^{(2)}(\eta r) \frac{m}{r} A_m - \left[H_m^{(2)}(\nu r) \frac{m}{r} - \nu H_{m+1}^{(2)}(\nu r) \right] B_m \\
 &\quad + i\gamma H_m^{(2)}(\nu r) \frac{m}{r} C_n ,
 \end{aligned}
 \tag{4.2.18}$$

$$h_m(r) = -i\gamma H_m^{(2)}(\eta r) A_m + \nu^2 H_m^{(2)}(\nu r) C_n ,
 \tag{4.2.19}$$

y para el fluido:

$$f_m(r) = \left[J_m(\eta r) \frac{m}{r} - \eta J_{m+1}(\eta r) \right] D_m ,
 \tag{4.2.20}$$

$$g_m(r) = -J_m(\eta r) \frac{m}{r} D_m ,
 \tag{4.2.21}$$

$$h_m(r) = -i\gamma J_m(\eta r) \frac{m}{r} D_m .
 \tag{4.2.22}$$

De estas expresiones debemos considerar que sólo en el eje del pozo, y cuando $m = 0$, los términos sobreviven. De otra forma, en puntos lejos del eje del pozo los desplazamientos también son función de los términos no-axisimétricos con $m > 0$.

IV.3. Registros sínicos de onda completa

En esta sección se presentará el Registro Sínico Dipolar de Onda Completa (Dipole Shear Sonic Imager, DSI por sus siglas en inglés), una de las principales herramientas utilizadas en la industria petrolera y en geofísica de exploración para determinar propiedades elásticas y de propagación a partir de mediciones de variaciones en la presión en función del tiempo (formas de onda) en el interior de un pozo exploratorio. La descripción de la herramienta que se presenta en este capítulo, corresponde a una compilación de varias fuentes, entre las cuales se destaca la información proporcionada por la compañía Schlumberger (Pablo Saldungaray, comunicación personal).

Dentro de las múltiples aplicaciones del modelado y las formulaciones matemáticas y numéricas presentadas en los capítulos anteriores, se encuentra la correcta interpretación y simulación matemática de algunos experimentos registrados con herramientas sínicas DSI para algunas formaciones tipo. La herramienta DSI combina la nueva tecnología dipolar con los últimos desarrollos de la herramienta monopolar en un sólo sistema, proveyendo del mejor método disponible en la actualidad para obtener lentitudes de ondas compresional, de corte y Stoneley. (La lentitud es el recíproco de la velocidad y corresponde al intervalo de tiempo de tránsito medido por herramientas sínicas convencionales.)

La tecnología dipolar permite medir ondas de corte en formaciones de rocas “suaves” y “duras” limitándose sólo por la física del pozo. Las herramientas monopolares sólo pueden detectar velocidades de onda de corte mayores que las velocidades del fluido del pozo, esto es, solamente rocas “duras”. El DSI ahora sobrepasa esta barrera de la velocidad del fluido.

El DSI es una herramienta multi-receptor con un arreglo lineal de ocho receptores un transmisor monopolar y dos transmisores dipolares. El arreglo de receptores provee más muestras espaciales del campo de propagación de ondas para el análisis de las formas de onda completa. El arreglo entre transmisores y receptores permite la medición de componentes de onda que se propagan a mayor profundidad en la formación. A continuación se enlistan algunas mejoras recientes de la herramienta:

- La nueva sonda y las técnicas rápidas de reducción de datos han permitido el doble del máximo de velocidad de registro en la mayoría de los casos.
- Un regulador de poder intercambiable permite la operación y la reducción de requerimientos de potencia a un tercio, ofreciendo mayores opciones de combinación con otras herramientas.
- Una interfase adicional humana de ingeniería permite la adquisición en campo con calidad y eficiencia.
- Un nuevo manejador del transmisor de baja frecuencia mejora la relación señal-ruido y provee registros en formaciones extremadamente lentas y agujeros muy grandes.
- Las técnicas óptimas de procesamiento de formas de onda tienen mejor funcionamiento y resolución vertical.

- Utiliza nuevos productos de respuesta para lentitudes de ondas de Stoneley con el objeto de evaluar fracturas e indicar permeabilidad.

En suma a las nuevas características dipolares, la adquisición de velocidades de onda de Stoneley utiliza un pulso de energía monopolar de baja frecuencia para mediciones de alta calidad de onda de Stoneley. La permeabilidad derivada de la onda de Stoneley es útil para evaluar fracturas y también para investigar en la formación a mayor profundidad.

Una nueva técnica para detectar el arribo de la onda compresional provee mediciones que son compatibles con registros sínicos previos. La resolución vertical para la onda compresional del sínico es de 6 pulgadas. Su arreglo de procesadores de alta velocidad utiliza el método de Coherencia Tiempo-Lentitud (STC, por sus siglas en inglés) para determinar valores de lentitudes de ondas P, S y de Stoneley. Un grupo de filtros pasa banda permite la utilización de un rango de frecuencia óptimo para cada modo de propagación. El proceso provee tiempos de tránsito sin ambigüedad, aún en las condiciones de pozo más difíciles. Los valores resultantes son entradas útiles para la determinación de propiedades mecánicas, evaluación de formaciones y aplicaciones sísmicas. La herramienta DSI es completamente compatible, ofreciendo ahorros sustanciales de tiempo y mediciones convencionales sínicas con previos registros sínicos en agujeros abiertos y entubados.

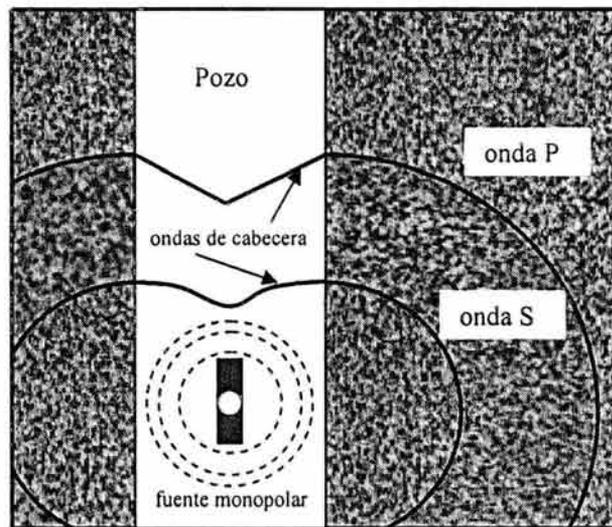


Fig. 4.3.1. Propagación de ondas de cuerpo con una fuente monopolar en formaciones rápidas.

Las propiedades mecánicas de la roca pueden ser caracterizadas por la densidad y las constantes dinámicas de elasticidad. Estas últimas controlan las velocidades a las cuales viajan las ondas P y S (ondas de cuerpo). En rocas saturadas con fluido, estas propiedades dependen del porcentaje de saturación, el tipo de fluido presente, el arreglo de los granos de la roca y el grado de cementación intergranular. Rocas "suaves" o pobremente consolidadas exhiben rigideces más pequeñas. Como resultado las ondas de sonido viajan más lentamente en rocas "suaves" que en rocas "duras".

Registro monopolar

En la herramienta sínica convencional (monopolar), una fuente omni-direccional crea un impulso de onda compresional en el fluido del pozo el cual se propaga hacia afuera en la formación. Al tiempo que el pulso entra en la formación, éste crea una ligera bolsa de compresión uniforme alrededor del pozo (ver Fig. 4.3.1) y a su vez excita ondas de compresión y de corte. Al momento que las ondas de compresión y de corte se propagan en la formación se generan ondas de cuerpo en el fluido del pozo. Estas son las ondas de cuerpo que los receptores detectan, en lugar de las ondas de compresión y de corte de la formación (Fig. 4.3.1).

Este fenómeno se ilustra en la Fig. 4.3.2. que contiene un diagrama en el que se muestra el registro de 8 trazas para un ejemplo en una formación “dura” y compacta. Se nota muy claramente el arribo de las diferentes fases de propagación y las velocidades se pueden leer directamente del microsismograma.

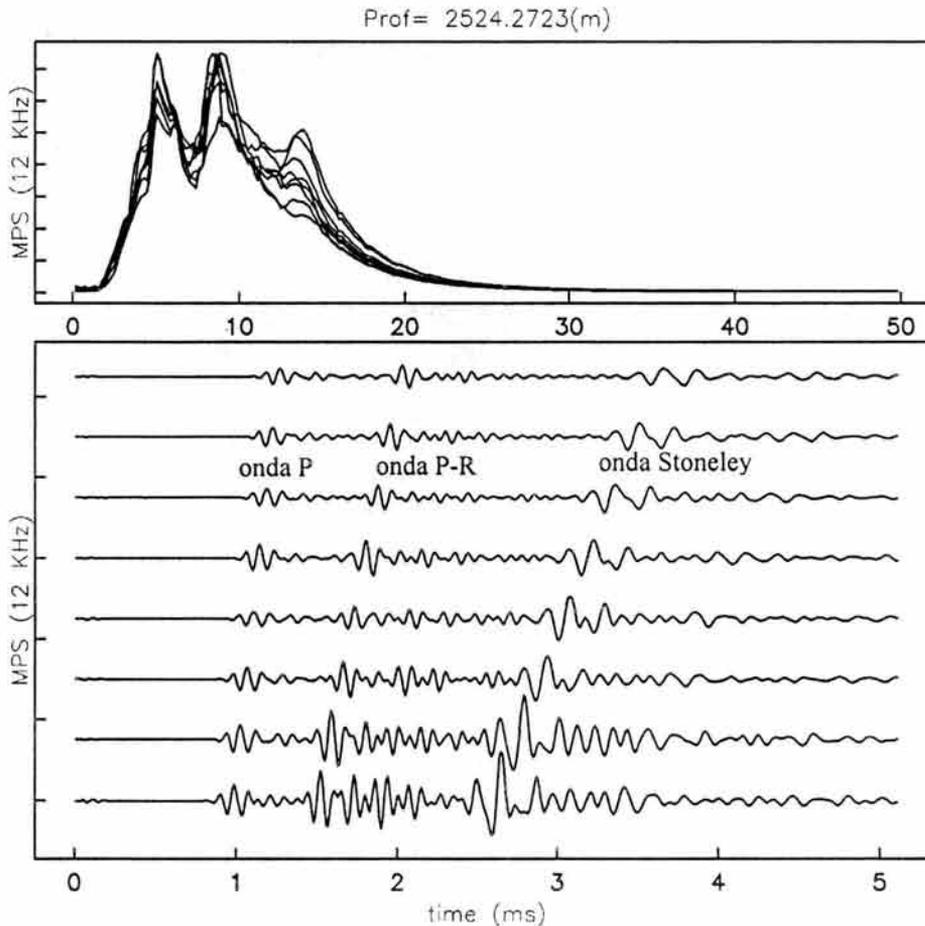


Fig. 4.3.2. Formas de onda típicas registradas por una herramienta monopolar para formaciones rápidas (abajo). Se indican los arribos de ondas P, S (Pseudo-Rayleigh) y de Stoneley. Espectro de amplitudes de Fourier para cada traza (arriba).

Las denominadas ondas de cabecera se crean únicamente cuando las ondas de la formación se propagan hacia arriba del pozo y viajan a mayor velocidad que las ondas en el fluido. Las ondas P de la formación son siempre más veloces que las ondas del fluido, aunque ese no siempre es el caso de las ondas S (o Pseudo-Rayleigh). En formaciones “lentas” o pobremente consolidadas, la velocidad de cortante es usualmente menor que la velocidad del fluido. Así, aunque la onda de cuerpo compresional y su onda de cabecera existan en el fluido; la perturbación de la onda de corte existirá sobre la pared del agujero y no se generará onda de cabecera S. En este caso particular, los modos compresionales y del fluido son la única información que lleva la forma de onda.

Los registros de ondas guiadas (de cabecera y Stoneley) son los registros más complicados. Las ondas guiadas de pozo vienen de reflexiones de la fuente atrapadas en el pozo. La onda de Stoneley, es una onda guiada superficial que viaja más lentamente que las ondas del fluido. Ambas son dispersivas, esto es, que su velocidad es función de la frecuencia.

Registro dipolar

Una herramienta dipolar utiliza una fuente direccional y varios receptores. La fuente dipolar se comporta como un pistón creando un incremento en la presión sobre un lado del agujero y una disminución en el otro. Esto causa una pequeña flexión en la pared del pozo, como se ilustra en la Fig. 4.3.3, en donde la fuente mostrada excita directamente ondas de compresión y de corte en la formación.

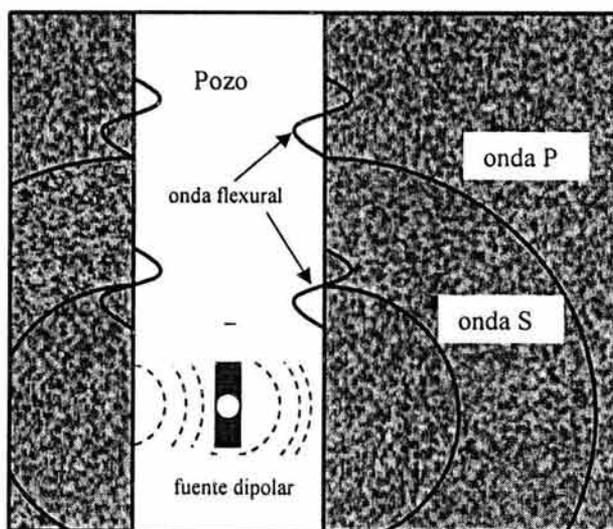


Fig. 4.3.3. Propagación de ondas de cuerpo con una fuente dipolar en formaciones rápidas.

La propagación de esta onda flexural es coaxial en el pozo, mientras que el desplazamiento se efectúa en ángulos rectos con respecto al eje del pozo, en la dirección del transductor es colineal. La fuente opera en baja frecuencia, usualmente por debajo de los 4kHz donde la excitación de estas ondas es la óptima. Una nueva opción es una fuente operando por debajo de 1kHz. Con una mejor relación señal ruido, por arriba de los 20-dB, esta fuente ofrece muy buenos resultados en agujeros extremadamente grandes y formaciones muy lentas. Así, la profundidad de investigación se incrementa.

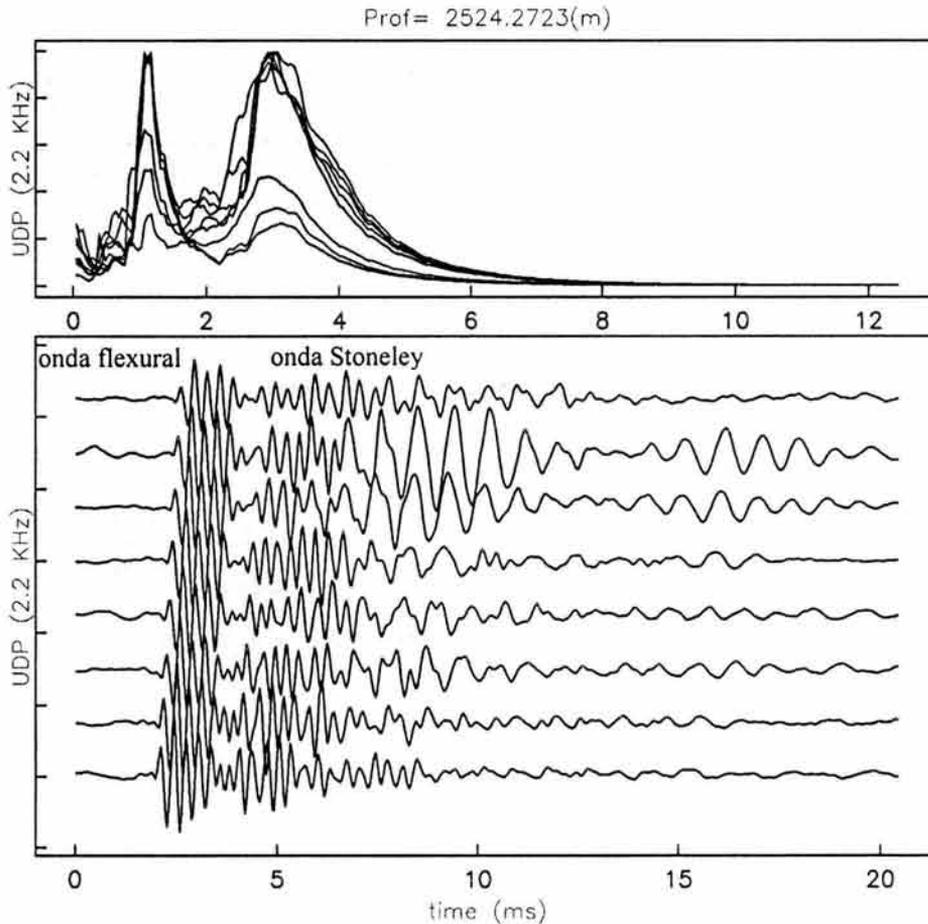


Fig. 4.3.4. Formas de onda típicas registradas por una herramienta dipolar para formaciones rápidas (abajo). Se indican los arribos de corte (flexural) y de Stoneley. Espectro de amplitudes de Fourier para cada traza (arriba).

Aunque las ondas compresional y de corte se irradian directamente hacia la formación, existe una onda de corte/flexural añadida a la propagación hacia arriba del pozo (ver Fig. 4.3.3). Esto crea un cambio de presión “tipo dipolar” en el fluido del pozo y es esta diferencia de presión la que los receptores direccionales detectan. La onda de corte/flexural, iniciada por la acción de flexión del pozo es dispersiva, en bajas frecuencias viaja a la misma velocidad que la onda de corte; en frecuencias más altas viaja a menor velocidad. A diferencia de las herramientas monopolares convencionales, la herramienta dipolar puede medir onda de corte/flexural aún en formaciones “lentas”.

En formaciones “lentas” la onda de corte/flexural tiene corta duración y se concentra en bajas frecuencias. Además de esta onda, existe un arribo de onda compresional en alta frecuencia que se registra al principio del micro-sismograma.

Especificaciones y descripción de la herramienta DSI

La herramienta DSI combina telemetría de alta velocidad y simultáneamente un rango de 12-bits de digitalización en un arreglo de ocho receptores. La sonda incorpora ambos transmisores monopolar y dipolar-cruzado con un arreglo de ocho estaciones configurables electrónicamente para recepción monopolar o dipolar. Existe una unidad de procesamiento y adquisición de datos de última generación. La herramienta DSI es combinable con la mayoría de las herramientas. La Fig. 4.3.5 muestra la configuración de la herramienta y la tabla 4.3.1 las especificaciones de funcionamiento de la herramienta.

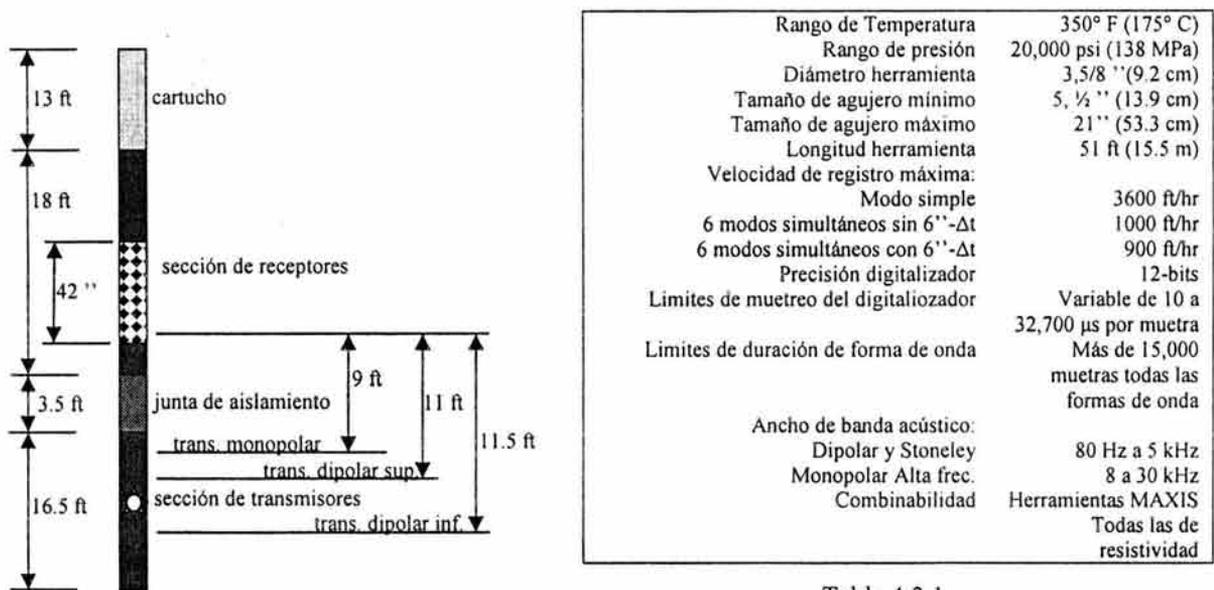


Tabla 4.3.1

Fig. 4.3.5. Esquema y dimensiones de la sonda utilizada en los registros sónicos DSI (izq).
Tabla 4.3.1, definiciones de la herramienta (der.)

La sección de transmisores contiene tres elementos: un transductor cerámico omnidireccional monopolar y dos transductores uni-direccionales electrodinámicos orientados perpendicularmente uno del otro. Se prefieren transductores de banda ancha más que una fuente simple de banda limitada. Ellos permiten examinar el espectro completo de frecuencias sin problemas de enmascaramiento de fases en sus frecuencias resonantes y no están sujetos a reducir la salida debido a envejecimiento. Un pulso de baja frecuencia se maneja en el transductor monopolar para excitar la onda de Stoneley, y para mediciones de onda compresional se emplea un pulso de alta frecuencia. Un pulso de baja frecuencia se genera en cada transductor dipolar para la creación de ondas de corte. Una nueva opción de la fuente en baja frecuencia de ondas de corte provee una excitación por debajo de 1kHz

para agujeros extremadamente grandes y formaciones muy lentas. Existe un junta de aislamiento que filtra mecánicamente y conserva las señales que viajan hacia arriba de la herramienta.

La sección de receptores contiene ocho estaciones igualmente espaciadas a 6 pulgadas (.1524m). Cada estación contiene dos pares de hidrófonos: uno orientado en dirección paralela al transmisor dipolar superior y el otro orientado en dirección paralela al transmisor dipolar inferior. Las salidas de cada par se restan para la recepción del dipolar y se suman para la recepción monopolar. Los receptores se calibran cuidadosamente durante la manufactura de la herramienta.

El cartucho de adquisición contiene todos los circuitos para desempeñar el control automático de ganancias, digitizar las ocho formas de onda por separado pero al mismo tiempo, apilar estas formas de onda para más de un disparo y entonces transmitir las señales hacia la unidad en superficie. Se presentan detectores para los niveles de umbral de amplitudes de tiempos cruzados para cada forma de onda. Estos se utilizan para la detección del primer arribo de onda compresional y permiten obtener la lentitud de la onda compresional de manera similar al esquema de detección de umbrales de las herramientas analógicas convencionales.

La disposición de una cabina rápida ha duplicado la velocidad de registro a 3600 ft/hr en el modo de adquisición simple. Así, cuando la herramienta se opera en el modo de adquisición multimodal más común, la velocidad de registro se compara a la de las herramientas de porosidad nucleares, resultando así una combinación favorable para evaluar multiporosidad. Programas de administración del requerimiento de potencia y reguladores de carga intercambiables mejoran enormemente el uso combinado de la herramienta. Esta característica es particularmente interesante en agujeros difíciles y muy profundos.

Las profundidades de investigación para herramientas sónicas dependen del tipo de formación, lentitudes de onda compresional y de corte, el espaciamiento del transmisor al receptor, longitud de onda del modo considerado, el tipo de onda (de cabecera o guiada), la frecuencia de la señal y los tipos de señal. La frecuencia determina la longitud de onda que se maneja para la profundidad de investigación y el tipo de medición. Longitudes de onda sónica típicas a diferentes frecuencias y lentitudes se muestran en la tabla 4.3.2. De esta tabla se ve que las frecuencias bajas penetran a mayor profundidad dentro de la formación y ayudan a leer más allá de las zonas de alteración de la pared del pozo.

Simulaciones numéricas verificadas por mediciones en modelos a escala han mostrado que el efecto de excentricidad es pequeño en comparación al radio del pozo. Sólo existen pequeños cambios en el carácter de las formas de onda dipolares o en los valores del procesamiento STC de las lentitudes. Excentricidad grande, del orden de 2 a 4'' en un pozo de 12'' aumenta la amplitud de la onda flexural en relación a la amplitud compresional. Para la herramienta DSI la variación de la lentitud de corte estimada es de 2% sobre las lentitudes en un rango normal.

| Lentitud Δt ($\mu\text{sec}/\text{ft}$) | Δt 1 kHz (ft) | Δt 2 kHz (ft) | Δt 5 kHz (ft) | Δt 10 kHz (ft) |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 50 | | | | 2 |
| 100 | | 5 | 2 | 1 |
| 200 | 5 | 2.5 | 1 | 0.5 |
| 400 | 2.5 | 1.25 | 0.5 | |

Tabla 4.3.2. Valores comunes de longitudes de onda sónica.

La herramienta DSI tiene varios modos de operación en la adquisición de datos, cualquiera de ellos puede combinarse para adquirir formas de onda digitales sobre cada intervalo de registro de 6''. Para las formas de onda se digitalizan ocho canales simultáneamente con un rango dinámico de 12-bits. Para los modos dipolar superior y dipolar inferior, se registran ocho formas de onda dipolares provenientes del disparo de cualquiera de los transmisores dipolares a $40\mu\text{s}$ por muestra y 512 muestras por forma de onda. Para el modo dipolar cruzado se puede realizar una adquisición estandar de 32 formas de onda totales, en-línea y línea-cruzada para ambos transmisores. Para el modo Stoneley se registran 8 formas de onda monopulares provenientes del disparo del transmisor monopolar en baja frecuencia a $40\mu\text{s}$ por muestra y 512 muestras por forma de onda. En el modo P y S se graban 8 formas de onda monopolar provenientes de disparos del transmisor monopolar en alta frecuencia con $10\mu\text{s}$ por muestra y 512 muestras por forma de onda. Existe un modo denominado *Modo de Primer Movimiento*, aquí se registran 8 grupos de datos de umbrales cruzados provenientes de disparos del transmisor monopolar en alta frecuencia y del pulso primario de la onda compresional para detección de los primeros arribos.

Procesado STC de formas de onda

Las formas de onda adquiridas y los datos de umbrales-cruzados se procesan para extraer lentitudes. Las formas de onda digitales para los modos dipolar, Stoneley y P y S se procesan mediante una técnica denominada *Coherencia de Lentitudes y Tiempo* (Slowness-Time-Coherence, STC por sus siglas en inglés).

El procesado STC es una técnica de análisis de formas de onda completa con el objeto de encontrar todos los modos de propagación de una traza registrada. El procesado STC adopta un algoritmo de semblanza similar al utilizado en las aplicaciones sísmicas para detectar arribos que son coherentes a través del arreglo de receptores y estimar su lentitud. El algoritmo de STC es directo, como se ilustra en la Fig. 4.3.6 una ventana de tiempo predeterminada se mueve a través de las formas de onda sobreponiendo valores potenciales de tiempos de arribo. Para cada posición temporal se desplaza una ventana a lo largo del arreglo de trazas. Comienza con un desplazamiento de la onda más rápida esperada y continua, paso a paso, a la onda más lenta esperada. Para cada uno de estos desplazamientos se calcula una función de coherencia para medir la similitud de ondas dentro de la ventana. Cuando la ventana temporal y el desplazamiento corresponden al tiempo de arribo y la lentitud de una componente en particular, las formas de onda dentro de la ventana son casi idénticas, permitiendo un alto valor de coherencia. De esta manera el

grupo de formas de onda del arreglo se examinan sobre un rango posible de tiempos de arribo y lentitudes para componentes de onda. La ec. (4.3.1) muestra una expresión con la cual se puede calcular la semblanza para un arreglo de formas de onda dado

$$\rho^2(s, \tau) = \frac{\frac{1}{M} \int_{=0}^{\tau_w} \left[\sum_{m=1}^M r_m [t + s(z_m - z_1) + \tau] \right]^2 dt}{\sum_{m=1}^M \int_{=0}^{\tau_w} \{r_m [t + s(z_m - z_1) + \tau]\}^2 dt} \quad (4.3.1)$$

Donde $\rho^2(s, \tau)$ es la semblanza, $T_w =$ ancho de la ventana igual a la duración esperada de los arribos, $r_m(t) =$ grupo de formas de onda, $s =$ lentitud y $\tau =$ tiempo de comienzo del primer arribo de la ventana. Mayor detalle sobre el tratamiento de esta expresión se puede encontrar en Kimball & Marzetta, (1984).

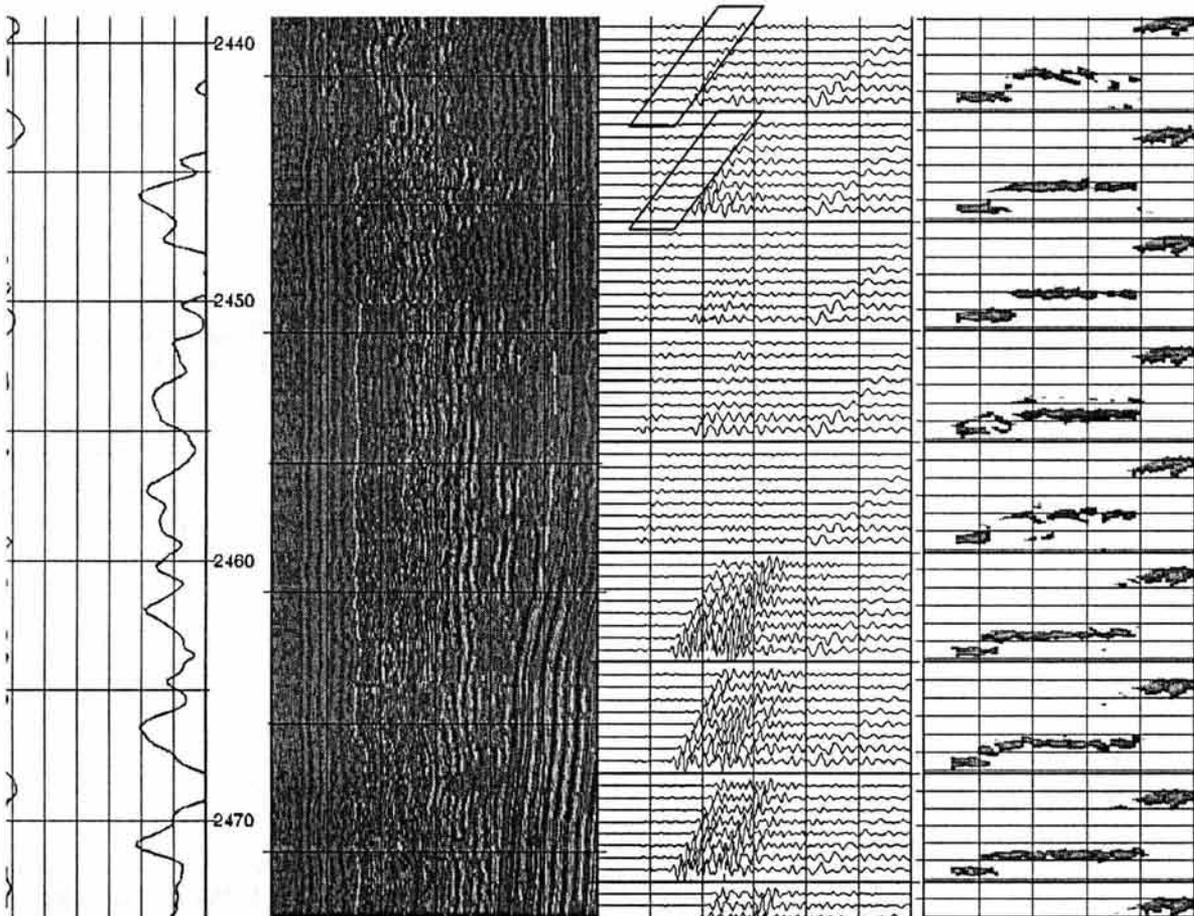


Fig. 4.3.6. Velocidades de P y S, registro VDL, formas de onda para 8 receptores y mapas de tiempo-lentitud en un intervalo de pozo en una formación rápida.

El proceso STC produce mapas de contornos como los que muestra la Fig. 4.3.6. Las regiones de gran coherencia corresponden a arribos particulares de las formas de onda. La lentitud y el tiempo de arribo para cada pico de coherencia se calculan con las

características de propagación esperadas de los arribos buscados. Los valores que mejor acuerden con las características esperadas se retienen. De esta manera la clasificación de arribos produce un registro continuo de lentitudes de componentes de onda *versus* la profundidad. El registro de lentitudes tiene una resolución vertical de 3.5ft.

Comúnmente las ondas dispersivas exhiben picos múltiples a lo largo del espectro en frecuencia. Otros parámetros inflexibles de procesado pueden conducir a resultados de calidad pobre o interpretaciones imprecisas debido a que los datos caen fuera de la ventana de procesamiento. Expandiendo los límites del procesado STC, los arribos tardíos de ondas flexurales pueden medirse en formaciones “lentas” o alteradas a través de filtros que se crean por las bajas frecuencias de la ventana. La coherencia de cada arribo funciona como un indicador de calidad del registro, valores altos implican mediciones repetidas o mejoradas. La proyección de los contornos máximos de coherencia contra el eje de las lentitudes del plano STC también provee de un excelente control de calidad del registro.

Cuando se procesan formas de onda dipolares uno de los picos de coherencia corresponderá al modo flexural dispersivo. La lentitud de este pico siempre es mayor (más lento) que la lentitud verdadera de corte. En formaciones “rápidas” un filtro de baja frecuencia pasa bandas generalmente produce un pico de coherencia muy cercano a la lentitud verdadera de corte. En formaciones “lentas”, el cortante de la formación debe ser estimado de datos flexurales.

Las lentitudes resultantes tienden a corresponder a la componente de mayor amplitud. Aún pensando que la naturaleza de baja frecuencia de la fuente tiende a minimizar la dispersión, todavía se necesita de alguna corrección para obtener el valor verdadero del cortante de la formación. Una corrección precalculada derivada de datos generados por modelado numérico se incluye en el procesado para corregir los efectos causados por la dispersión de ondas flexurales. El monto de esta corrección depende de la señal de respuesta de la fuente, de las características del filtro STC, del tamaño del agujero y de la lentitud de corte. Esta corrección es pequeña para formaciones “rápidas” y promedia un 5% en formaciones “lentas”.

Toma del registro y compensación de pozo

Al momento de la toma del registro la sonda se desplaza desde el fondo del pozo hacia arriba, el intervalo de muestreo espacial es de 6 pulgadas (.1524m) y al mismo tiempo se realiza una compensación de pozo por medio del procesado del arreglo de receptores (calculado a partir de una posición de la herramienta) y un arreglo de formas de onda del pseudo-transmisor (calculado de varias posiciones de la herramienta) promediando sus resultados. Esta técnica se ilustra en la Fig. 4.3.7 y se efectúa utilizando resultados del modo monopolar P y S. Por otro lado, no existen bases teóricas para la compensación de pozo del modo de Stoneley o del modo dipolar.

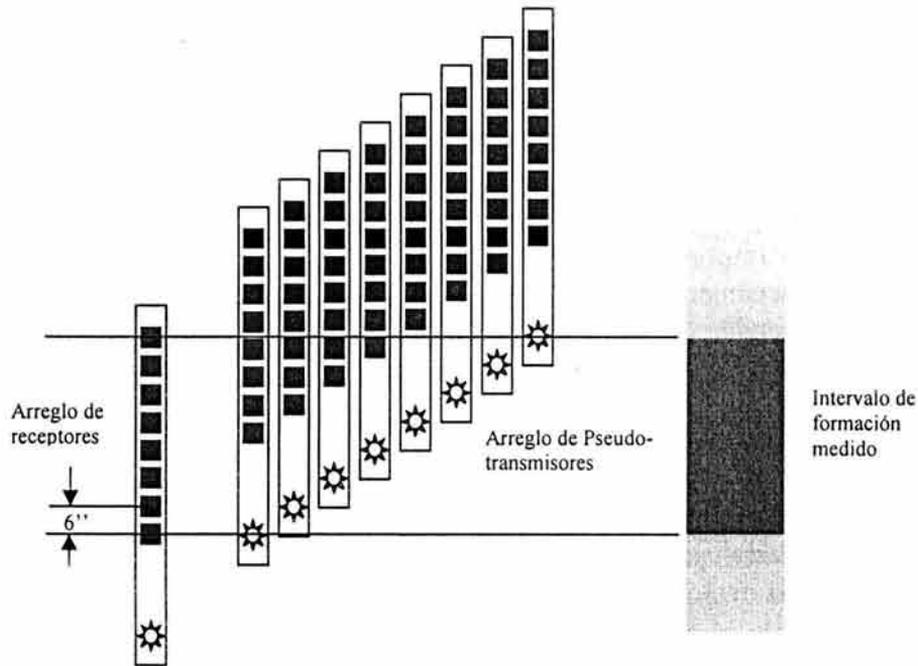


Fig. 4.3.7. Diagrama de la toma del registro y compensación del pozo con procesado STC.

Una nueva técnica llamada *Tiros Múltiples* de SCT (MSSTC) promedia la coherencia en varios arreglos de cinco receptores cubriendo el intervalo medido con las posiciones múltiples de los transmisores en el pozo. De esta forma la resolución está controlada por la longitud del sub-arreglo, no obstante se preserva una buena relación señal-ruido. El efecto de compensación de pozo puede alcanzarse mediante el promedio de resultados del modo transmisor y el modo receptor para una resolución vertical ligeramente mayor a 2ft.

Aplicaciones del DSI

Las aplicaciones clave para la medición DSI, a parte de los usos tradicionales de los datos compresionales, incluyen

- *Análisis de propiedades mecánicas*: Aplicaciones que incluyen estabilidad del agujero, estabilidad de perforación o análisis de arenas y predicción de fracturamiento hidráulico.
- *Evaluación de formaciones*: Aplicaciones que incluyen detección de gas, detección de fracturamiento natural y evaluación e indicadores cualitativos de permeabilidad.
- *Interpretación geofísica*: Aplicaciones que incluyen sismogramas sintéticos, secciones sísmicas verticales (VSP) y calibración de entradas de la variación de la amplitud con el offset (análisis AVO).

- *Anisotropía de cortante de la formación:* Combinando la anisotropía con otras entradas de petrofísica, geología e ingeniería de yacimientos, puede revelarse la conexión entre fracturas alineadas y direcciones de flujo de fluidos.

-Análisis de propiedades mecánicas-

Tres conceptos son importantes en aplicaciones de propiedades mecánicas: fuerza de la roca, esfuerzos, y mecanismos de fallamiento. Estos tres conceptos contribuyen a explicar o predecir cuando, donde, cómo y porque puede ocurrir el fallamiento mecánico en la formación. Las formas de onda DSI se utilizan para obtener información cuantitativa de los módulos elásticos. Estos módulos son críticos para obtener la fuerza de la roca y estimar la magnitud de los esfuerzos de la formación. Se consideran varios modelos de fallamiento cuando se evalúa la falla mecánica de una roca. En la tabla 4.3.3 se enlistan algunos de los módulos elásticos que se calculan directamente de las velocidades compresional y de corte y de la densidad volumétrica. Por otro lado sabemos que se pueden calcular más módulos elásticos a partir de la evaluación petrofísica.

| | | | |
|-------|-----------------------------|--|---|
| ν | Relación de Poisson | $\frac{\text{Defromación lateral}}{\text{Deformación longitudinal}}$ | $\frac{1 \left(\frac{DTS}{DTC} \right)^2 - 1}{\left(\frac{DTS}{DTC} \right)^2 - 1}$ |
| G | Módulo de cortante | $\frac{\text{Esfuerzo aplicado}}{\text{Deformación de corte}}$ | $\frac{\rho_b}{DTS^2} \times a$ |
| E | Módulo de Young | $\frac{\text{Esfuerzo uniaxial}}{\text{Deformación normal}}$ | $2G(1 + \nu)$ |
| K_b | Módulo volumétrico | $\frac{\text{Presión hidrostática}}{\text{Deformación volumétrica}}$ | $\rho_b \left(\frac{1}{DTC^2} - \frac{4}{3DTS^2} \right) \times a$ |
| C_b | Compresibilidad volumétrica | $\frac{\text{Defromación volumétrica}}{\text{Presión hidrostática}}$ | $\frac{1}{K_b}$ |

Nota: coeficiente $a = 1.34 \times 10^{10}$ si ρ_b en g/cm^3 y DT en $\mu s/ft$.

Tabla 4.3.3. Propiedades elásticas y dinámicas a partir del registro DSI.

-Estabilidad del agujero-

La estabilidad de la pared del pozo proporciona un problema en la determinación de la presión del lodo a utilizar apropiada para mantener el pozo estable durante el proceso de perforación. La excesiva baja presión del lodo induce a fallamiento de corte y colapso; excesiva alta presión del lodo induce a fracturamiento hidráulico y pérdida de circulación. El problema está particularmente acentuado en agujeros altamente desviados donde la ventana de seguridad es muy reducida. Puntos de entubamiento precisos, pesos del lodo y parámetros de perforación pueden ser seleccionados del registro de estabilidad de pozo.

El cálculo del impacto integrado de las propiedades mecánicas utiliza lentitudes de onda compresional y de corte del DSI junto con la densidad volumétrica para derivar la mecánica de la roca, estabilidad del pozo y fuerza de arenas. En algunos ejemplos, el ingeniero de perforación usa como guía un registro continuo de pesos del lodo para aplicarlos en la

estimación de la eficiencia y seguridad de la perforación y así nuclear en una zona complicada e inestable.

-Estabilidad de la perforación y análisis de arenas-

Una aplicación importante del análisis de propiedades mecánicas es la identificación de zonas que pueden producir arena durante la producción de hidrocarburo. El contraste entre contenido débil y más componentes arenosos y predicciones cuantitativas de decaimiento de presión pueden ser elementos relevantes en la planeación y conclusión de un programa de perforación. En algunos ejemplos en intervalos de gas y areniscas, las arenas se pueden identificar mediante bajas lecturas del registro de rayos gamma y las constantes elásticas a partir de los tiempos de viaje de ondas P y S desplegados continuamente a través de las series de arena-lutita. Las mediciones DSI se utilizan con el esfuerzo de carga y la presión de poro para dar un esquema completo de las constantes elásticas y los esfuerzos, necesarios para los análisis de arenas, estabilidad de pozo y perforación.

-Determinación de apertura de fractura hidráulica-

Una estimación precisa de la apertura de la fractura hidráulica se alcanza comúnmente cuando el fracturamiento hidráulico es crítico en el diseño de la estimulación de fracturas. Además de la determinación de la apertura de la fractura hidráulica pueden determinarse también la presión de bombeo y el tratamiento de volúmenes requeridos para alcanzar los resultados deseados.

El factor limitante más importante del crecimiento vertical en la determinación de la altura de fracturas hidráulicas es el esfuerzo *in-situ* y sus diferencias. Estas diferencias pueden estimarse de los módulos elásticos dinámicos calculados a partir de las formas de onda del DSI. Esto combinado con un análisis petrofísico ofrece un esquema de la distribución de esfuerzos *in-situ* y alrededor de las formaciones contenedoras de hidrocarburos.

-Litología y detección de gas-

En formaciones sedimentarias la velocidad del sonido depende de muchos parámetros, principalmente del material de la matriz y de la porosidad distribuida. La aplicación precisa de datos de onda de corte en la evaluación de formaciones es útil para identificar materiales de la matriz y fluidos en los poros.

Desde la introducción de los registros sínicos dipolares las experiencias de registro en formaciones "suaves" han mostrado que V_p/V_s aumenta con la falta de consolidación de los sedimentos. En diagramas-cruzados de V_p/V_s versus Δt , el cual es función de la porosidad, el eje horizontal puede verse como el eje de porosidad. En tales diagramas la graficación de caliza y dolomita son líneas horizontales y reflejan una relación constante con V_p/V_s . En tanto las arenas con saturación de agua despliegan un incremento de V_p/V_s cuando la porosidad aumenta y cuando la compactación y el esfuerzo efectivo disminuyen. El

comportamiento observado en los datos de campo puede ajustarse con la teoría de Biot-Gassman, asumiendo una relación empírica entre Δt y la porosidad, o con el mismo módulo de cortante G , y la porosidad. Esto provee de un tren promediado para areniscas mojadas. Un tren similar, puede observarse para lutitas con forma muy parecida y un offset más alto de valores V_p/V_s .

-Evaluación de fracturas-

Existe considerable interés en el registro monopolar de la onda de Stoneley por su potencial en la observación de fracturas. Esas aplicaciones donde la reflectividad de la onda de Stoneley se usa para localizar fracturas permeables requieren de ondas de Stoneley de alta calidad disponibles en los datos DSI.

Cuando una onda de Stoneley se encuentra con una fractura abierta que intersecta la pared del pozo, algo de su energía se refleja debido al gran contraste de impedancia acústica creado por la fractura. Básicamente esta técnica de procesamiento de las formas de onda de Stoneley se utiliza para medir el coeficiente de reflexión (a partir de la relación de la energía reflejada e incidente) y para determinar la abertura de la fractura.

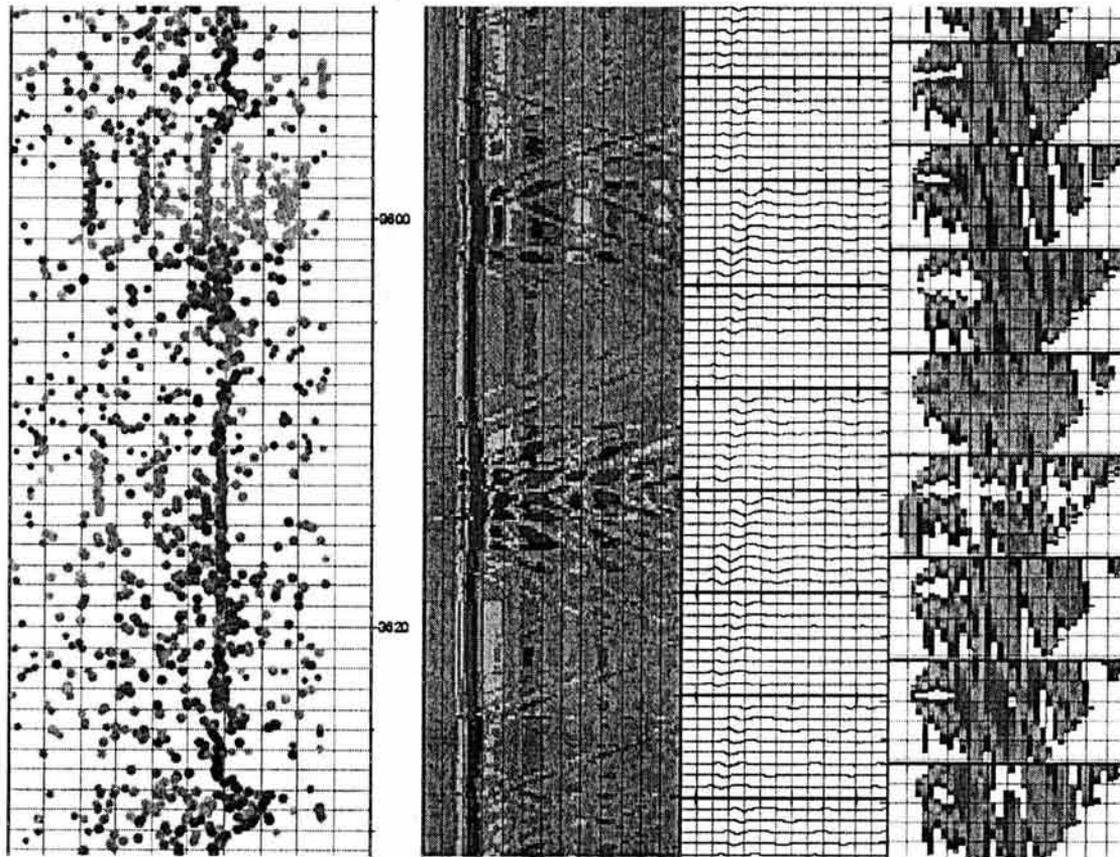


Fig. 4.3.8. Registros de puntos, de densidad variable, formas de onda y planos STC, para un pozo en roca "dura" fracturada. Datos para el registro monopolar en modo Stoneley.

En la Fig. 4.3.8 se muestra el resultado de este procesamiento en un pozo perforado a través de rocas duras fracturadas. El despliegue mostrado es un registro de puntos de coherencia (valores picos del plano de STC), el registro de densidad variable para las formas de onda de Stoneley considerando solamente el primer receptor y, en la última pista, los mapas de STC para las correspondientes formas de onda. Varias reflexiones se observan en el registro de Densidad Variable, viajando hacia abajo cuando la herramienta se encuentra por debajo del reflector y viajando hacia arriba cuando la herramienta se localiza encima de la fractura. Existe un registro del coeficiente de reflexión asociado a la onda de Stoneley y generalmente se presenta en una pista por separado. Este registro muestra las reflexiones significativas contra la profundidad. El coeficiente de reflexión de ondas Stoneley indica que las fracturas están abiertas y valores grandes significan fracturas más permeables.

-Indicación de Permeabilidad-

La onda de Stoneley responde a varios factores incluyendo la permeabilidad de la matriz y las fracturas abiertas. Esto puede ser visto como un pulso de presión guiado por el pozo creando movimiento del fluido hacia zonas con permeabilidad efectiva. Este movimiento causa reducción en el nivel de energía de Stoneley y también es afectado por el tamaño del agujero, la formación y las características de la herramienta. Con ondas de Stoneley de alta calidad provenientes de la herramienta DSI y en combinación con el registro digital moderno, filtrado y las nuevas técnicas de procesado, la energía de Stoneley y la velocidad pueden calcularse para indicar zonas de permeabilidad. La nueva excitación de baja frecuencia produce ondas Stoneley de muy alta calidad con una excelente relación señal-ruido. En yacimientos carbonatados, buena porosidad no necesariamente indica buena permeabilidad debido a la ausencia de conexión entre vóculos y fracturas.

-Anomalías relacionadas con presencia de Gas-

Adicionalmente a los usos tradicionales de los registros sónicos en geofísica, el DSI es útil para muchas otras aplicaciones sísmicas, incluyendo correlaciones sísmicas de onda de corte, sismogramas sintéticos de onda de corte, interpretación de VSP y modelos utilizados para analizar offset a partir de datos VSP. Las mediciones DSI también proveen datos para distinguir anomalías de amplitud relacionadas con gas que se utilizan como entrada para análisis de AVO.

La relación de Poisson, ν , describe la cantidad que un material aumenta en ancho sobre un eje cuando se comprime por una cierta cantidad en el otro eje. Esto relaciona directamente a la compresibilidad de la roca con la rigidez. Medidas precisas de pozo de velocidades de onda compresional y de corte junto con el cálculo de las relaciones de Poisson son útiles en la interpretación de secciones sísmicas. Numéricamente, en términos de velocidades compresional V_p y de corte V_s , la relación de Poisson se define como

$$\nu = \frac{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2 - 2}{2\left[\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2 - 1\right]} \quad (4.3.2)$$

La relación de Poisson y V_p/V_s muestran efectos similares. El gas en la formación causa que la velocidad compresional sea lenta. Las ondas de corte, sin embargo, son menos afectadas por el gas. Cuatro variables independientes existen en una interfase reflectora/refractora entre dos medios isótropos:

- La relación de velocidades de onda P entre los dos medios acotados
- La relación de densidades entre los dos medios acotados
- Relación de Poisson en el medio superior
- Relación de Poisson en el medio inferior

Se pueden obtener varias conclusiones a partir de las mediciones de las relaciones de Poisson para rocas sedimentarias. Primero, sedimentos no consolidados someros tienden a mostrar valores de relaciones de Poisson muy altos de 0.4 y mayores. Segundo, la relación de Poisson tiende a disminuir cuando la porosidad disminuye y los sedimentos se vuelven más consolidados. Tercero, alta porosidad en areniscas saturadas con sal tienden a mostrar valores altos de relaciones de Poisson de 0.3 a 0.4. Y cuarto, areniscas de alta porosidad saturadas con gas tienden a mostrar relaciones de Poisson anómalas. Sin embargo, los cálculos de relaciones de Poisson de mediciones de ondas de corte y compresionales provenientes del DSI pueden ayudar al geofísico a identificar anomalías relacionadas con la presencia de gas.

-Mediciones de anisotropía de cortante-

Las propiedades físicas del subsuelo se asumen comúnmente como isótropas, estos es, independientes de la dirección. Esta hipótesis es conveniente para el uso de modelos teóricos, pero no siempre refleja la realidad. Por ejemplo, granos alargados depositados por agua fluyendo o por viento constante tienen direcciones preferenciales en el plano de depósito. La estratificación fina hace que la mayoría de los parámetros en la dirección vertical sean diferentes de aquellos en la dirección horizontal. Micro-fracturas paralelas controladas por el campo de esfuerzos regional induce otra orientación preferencial, la cual es anisótropa en lugar de isótropa.

Hasta hace poco, la anisotropía fue generalmente ignorada desde que sus efectos fueron mostrados en los datos rutinarios. Cuando esto apareció, los efectos fueron mal interpretados como tiempos de tránsito muy rápidos en una dirección, o que no ajustaban con las líneas sísmicas en las intersecciones. Sin embargo, la adquisición mejorada, procesado en sísmica de pozo y el creciente interés en estudiar la geología compleja, han permitido a los analistas de yacimientos reconsiderar la importancia de la anisotropía.

Combinando las mediciones de anisotropía con las entradas provenientes de petrofísica, geología e ingeniería de yacimientos se puede revelar la conexión entre fracturas alineadas y direcciones de flujo de fluidos.

En general, existen dos tipos de alineamiento en los materiales-- el horizontal y el vertical-- y ellos provocan dos tipos de anisotropía. Dos modelos convencionales simplificados (Fig. 4.3.9) se han propuesto para describir como las propiedades elásticas (p. ej. velocidad y rigidez) varían en estos dos tipos de anisotropía.

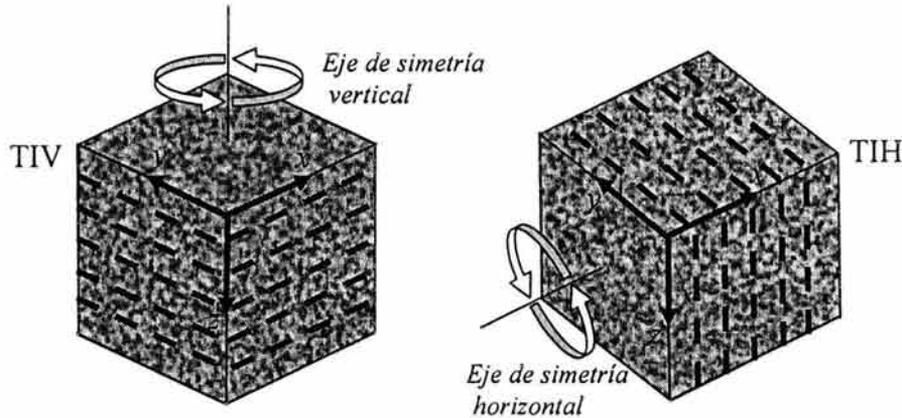


Fig. 4.3.9. Modelos convencionales de anisotropía.

En el caso más simple horizontal, o caso estratificado, las propiedades elásticas pueden variar verticalmente de estrato a estrato pero no horizontalmente. Este tipo de material es llamado transversalmente isótropo (TIV) con un eje vertical de simetría. El eje de simetría es un eje al rededor del cual el material puede ser rotado sin cambiar la descripción de sus propiedades. Las ondas generalmente viajan más rápido horizontalmente a lo largo de los estratos que en dirección vertical. Detectar y cuantificar este tipo de anisotropía es importante para propósitos de correlación tales como la comparación de registros sísmicos en pozos verticales y desviados, imágenes de sísmica de pozos y de superficie, y estudios de variación de la amplitud con el offset.

El caso más simple del segundo tipo de anisotropía corresponde a un material con debilidades alineadas verticalmente, p. ej. grietas, fracturas, ó distinta distribución de esfuerzos horizontales. Las propiedades elásticas varían en la dirección a través de las fracturas pero no a lo largo del plano de fractura. Tal tipo de material es llamado transversalmente isótropo con un eje de simetría horizontal (TIH).

Las ondas que viajan a lo largo de la dirección de las fracturas —en una roca competente— generalmente viajan más rápido que las ondas atravesando las fracturas. La identificación y medición de este tipo de anisotropía proporciona información a cerca de los esfuerzos en la roca, la densidad de fracturas y su orientación. Estos parámetros son importantes para el

diseño y proyección de fracturamiento hidráulico y el correcto entendimiento de la anisotropía horizontal y vertical. Casos más complejos, tales como estratos inclinados, rocas con estratos fracturados o rocas con múltiples grupos de fracturas, pueden ser entendidos en términos de la superposición de los efectos de estos modelos de anisotropía individual.

Ambos tipos de anisotropía (TIV y TIH) pueden ser detectados por la herramienta DSI. La evidencia más común para anisotropía estratificada de TIV proviene de mediciones diferentes de velocidad de ondas P medidas verticalmente en pozos altamente desviados u horizontales dentro de la misma formación –más rápida horizontalmente que verticalmente. Pero lo mismo puede mencionarse para las velocidades de onda S. Por años, cuando estas discrepancias aparecían en las velocidades sísmicas registradas entre secciones desviadas y verticales, los intérpretes de registros buscaban explicaciones en fallas de la herramienta o condiciones del registro. Ahora, esa anisotropía es mejor entendida y las discrepancias pueden ser vistas como información petrofísica adicional. Los intérpretes de registros esperan anisotropía y buscan correlaciones entre anisotropía elástica y anisotropía de otras mediciones de registros, tal como el de resistividad.

La anisotropía elástica inducida por fracturas o esfuerzos ha sido también detectada por registros sísmicos a través de la separación de la onda S. En una formación con anisotropía TIH, las ondas de corte generadas por transmisores en la herramienta DSI se dividen en polarización rápida y lenta. La onda que se propaga hacia arriba en el pozo en este caso es más precisa y se llama onda flexural pero, para propósitos de este ejemplo, se comporta como una onda de corte. La onda de corte rápida alcanza el receptor antes que la onda lenta. También la cantidad de energía de onda S que llega a los receptores varía con el azimut de la herramienta, esto es, cuando la herramienta se mueve hacia arriba rotando en su camino.

Finalmente, podemos concluir que la herramienta DSI provee del mayor avance en las técnicas actuales de medición de lentitudes de la formación. Con el estado del arte del modelado numérico, modelos a escala de laboratorio, electrónica flexible y adaptiva en el pozo y el poder de combinación de la tecnología monopolar- dipolar transmisor - receptor, muchas de las limitaciones de las generaciones pasadas en sistemas de registro han sido vencidas.

La combinación de las mediciones monopolar-compresional y dipolar-de corte proveen datos sísmicos esenciales en formaciones rápidas y lentas. Estos nuevos datos proveen medidas no disponibles con anterioridad y como resultado, se abre una puerta a nuevas respuestas para geocientíficos e ingenieros de análisis e interpretación.

IV.4. Simulación y modelado de registros sínicos de onda completa

Un objetivo central y parte de la contribución del presente trabajo de tesis es el de calcular simulaciones analíticas y numéricas y llevarlas a su validación directa contra datos reales. La idea es reproducir sintéticamente algunos grupos de formas de onda registrados en formaciones homogéneas e isotrópicas, y gradualmente observar las respuestas de formaciones en rocas más complejas y diferentes condiciones de pozo. Con el objeto de mostrar resultados provenientes de micro-sismogramas sintéticos utilizando las formulaciones desarrolladas en este trabajo, se ilustran ejemplos de algunos registros sínicos de onda completa observados en sitios típicos de pozos mexicanos. Un grupo de pozos en los que se observan diferentes propiedades elásticas en las formaciones y características del fluido y del agujero fueron seleccionados para su modelado. Así, en este grupo de resultados se exhiben cálculos para formaciones rápidas homogéneas y muy rápidas con fracturamiento.

Los micro-sismogramas sintéticos se calcularon utilizando un código que resuelve la difracción de ondas dentro de un pozo cilíndrico con fuente puntual en 3D (Tadeu *et al.*, 2001). El código hace uso de la formulación en el número de onda discreto desarrollada en el capítulo IV.2. El modelo se formula como un problema de difracción de ondas elásticas producidas por una fuente puntual monopolar en el fluido. La fuente se localiza en el centro del pozo. Los receptores se encuentran localizados por encima de la fuente, alineados sobre el eje vertical y equi-espaciados entre sí. El medio de propagación se define como elástico, homogéneo e isotrópico, con el propósito de observar el campo de presiones producido en el fluido debido a la presencia del agujero. Los micro-sismogramas sintéticos se calculan mediante la convolución espectral de la función de transferencia obtenida para este modelo y una función de excitación dada por un pulso de Ricker (ver Cap II). De esta forma, mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier es posible sintetizar las respuestas en el dominio del tiempo. Aunque el código permite calcular fuentes dipolares, en este capítulo, sólo se abordan ejemplos para datos y modelos que utilizan fuentes monopulares en formaciones rápidas.

Resulta conveniente seleccionar un intervalo del registro DSI en el que se tenga buena calidad de las formas de onda, es decir, una sección de pozo que presente alta calidad de las fases de onda P, onda S (Pseudo-Rayleigh) y de Stoneley. Es deseable que la formación de roca sea competente, esto es, buen agujero y claridad de resultados en los mapas STC. Este último proceso es fundamental en la selección del grupo de formas de onda y el intervalo de interés a estudiar. Cuando se observan grupos de contornos bien definidos en los diagramas de STC y se tiene información disponible de otros registros para ese intervalo, resulta muy atractivo efectuar el modelado. Debemos recordar que aunque nuestro modelo logra reproducir muchos de los parámetros observados en los datos reales, algunas condiciones de pozo como: presión, temperatura, heterogeneidades y anisotropía de la formación no son consideradas. Por otro lado, conocer los límites y las restricciones del modelo aumentan su probabilidad de éxito, el ajuste entre la respuesta del modelo y las formas de onda observadas depende de la selección óptima de los parámetros de entrada.

El código hace uso de seis parámetros de entrada mismos que se obtienen de un previo proceso STC de las formas de onda adquiridas en campo. Estos valores son: la velocidad de onda P de la formación V_p , velocidad de onda S de la formación V_s , densidad de la formación ρ , velocidad del fluido V_f , densidad del fluido ρ_f y radio del pozo r . Los parámetros de propagación se obtienen directamente de lecturas de los diagramas de coherencia tiempo-lentitud, el radio del agujero es un dato convencional, la densidad del fluido se obtiene de registros de perforación, y la densidad de formación se calcula de un registro de porosidad.

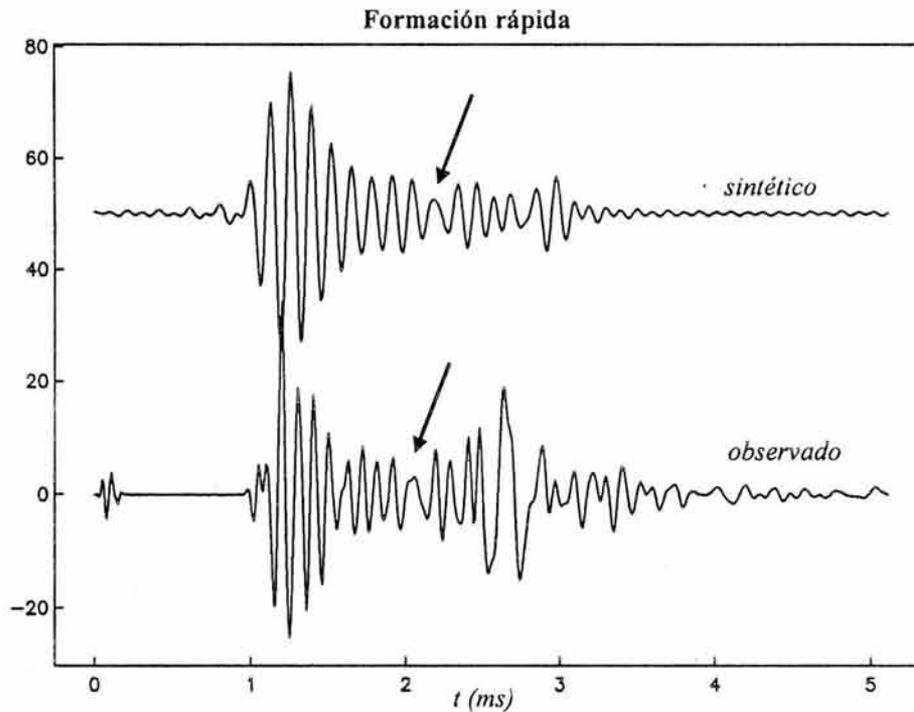


Fig. 4.4.1. Micro-sismograma sintético para una formación rápida (arriba). Forma de onda monopolar para un receptor sónico a 1900m de profundidad (abajo).

Los micro-sismogramas de la Fig. 4.4.1 corresponden a las formas de onda sintéticas (arriba) y observadas (abajo), obtenidas para una formación rápida, es decir que la velocidad de onda de corte de la formación es mayor que la velocidad de onda compresional del fluido, esto es $V_s > V_f$. Los parámetros utilizados en el modelo son: $V_p = 2930$ m/s, $V_s = 1437$ m/s, $V_f = 1088$ m/s, $\rho = 2.37$ g/cm³, $\rho_f = 1.4$ g/cm³ y $r = .177$ m. Se puede observar el buen acuerdo entre las dos trazas. Primero, el arribo de la onda P que aparece inmediatamente después del tiempo de origen en la traza observada, no se muestra de manera definida en la traza sintética ya que esta última no presenta un primer arribo de onda P definido. Sin embargo, la onda S (Pseudo-Rayleigh) que aparece en el registro observado poco después de 1.0ms se logra reproducir muy bien en el registro sintético, en donde el tiempo de arribo de esta fase es bastante parecido al arribo de onda S original. Por su parte la onda de Stoneley, aunque con menor amplitud, se logra identificar claramente en el resultado sintético con algún retraso en tiempo respecto del arribo original. Segundo, las

amplitudes relativas entre las fases Pseudo-Rayleigh y Stoneley observadas en la traza original se reproducen de forma excelente por la traza sintética, inclusive en el diagrama se ha señalado con una flecha el correspondiente cambio de fase de onda Pseudo-Rayleigh a Stoneley que logra reproducir el registro sintético. Y tercero, como característica remarcable de la buena simulación de este ejemplo, el registro sintético logra reproducir de forma magnífica el decaimiento en la amplitud de la coda de ambas fases (Pseudo-Rayleigh y Stoneley) siendo el ajuste casi idéntico para la coda de la onda de corte. El decaimiento de la coda de las fases Pseudo-Rayleigh y de Stoneley será crucial en la interpretación de valores de atenuación como se verá más adelante en el capítulo V.

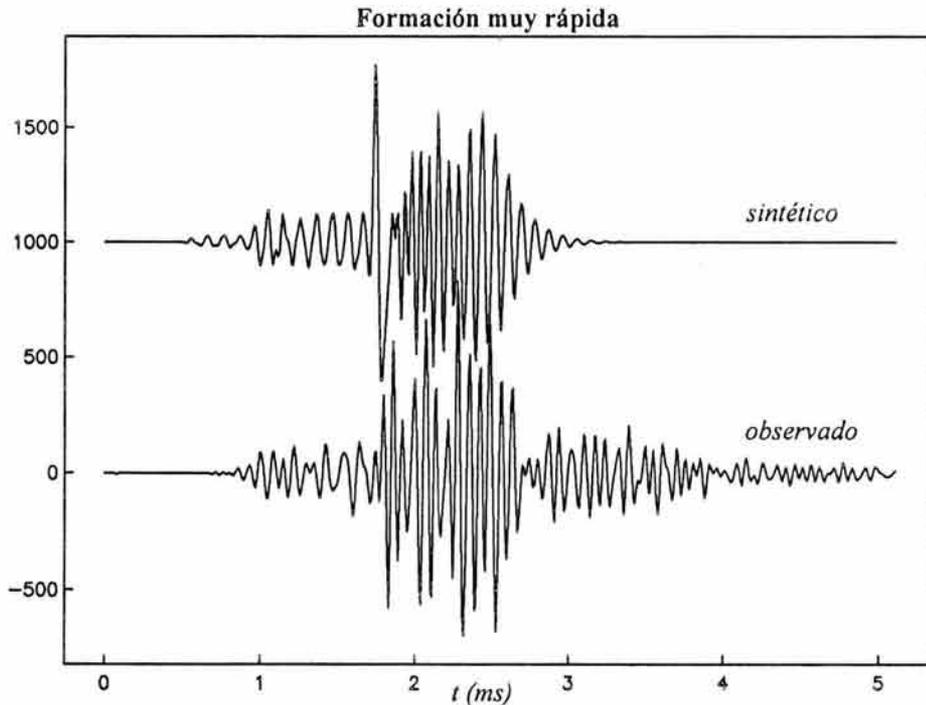


Fig. 4.4.2. Micro-sismograma sintético para un modelo de pozo tridimensional con fuente puntual en el origen (arriba). Forma de onda monopolar para el primer receptor (offset = 2.74m = 9ft) para una formación muy rápida ($V_s \gg V_f$) (abajo).

En la Fig. 4.4.2 se muestran las formas de onda sintética (arriba) y observada (abajo) obtenidas para una formación muy rápida. Los valores en las propiedades elásticas son susceptibles de comparación para el caso de un modelo de pozo rígido debido al alto contraste entre las velocidades del sólido y el fluido. Los parámetros utilizados en el modelo son: $V_p = 6220$ m/s, $V_s = 3242$ m/s, $V_f = 1604$ m/s, $\rho = 2.55$ g/cm³, $\rho_f = 1.0$ g/cm³ y $r = .1016$ m. Se puede observar el enorme parecido entre las dos trazas. Aunque el primer arribo de la onda P no es muy claro en ambos micro-sismogramas, se logra observar un buen acuerdo en el primer tren de ondas P que aparecen antes de 1.0ms. Este primer grupo de ondas se reproduce satisfactoriamente en la traza sintética, no obstante existe una pequeña diferencia en el tiempo de llegada entre ambos micro-sismogramas. La onda S (Pseudo-Rayleigh) que aparece en los datos al rededor de 1.8ms se observa afectada por la

presencia de la fase de Stoneley, que se presenta interactuando con la onda S y no se aprecia claramente. Sin embargo, en la traza sintética la onda de Stoneley es muy clara y aparece con anterioridad a la fase de Pseudo-Rayleigh. Este resultado muestra con certeza que la fase de Stoneley se encuentra inmersa en la fase Pseudo-Rayleigh como se muestra en la forma de onda real. Es muy notable y como siguiente punto de comparación que las amplitudes relativas entre las fases P, Pseudo-Rayleigh y Stoneley, observadas en la traza original se reproducen de forma satisfactoria por la traza sintética. Finalmente y no obstante que el registro sintético no logra reproducir la coda de la onda de Stoneley debido a su aparición temprana, el decaimiento de la amplitud de la fase Pseudo-Rayleigh es muy similar al presentado por la traza original. Existe un grupo de ondas de coda al final del registro observado que se atribuyen al atrapamiento de energía de onda de Stoneley de baja frecuencia. Esta energía de coda no se logra reproducir en el resultado sintético. El decaimiento de la coda de la fase de Stoneley es muy importante debido a su relación con la presencia de fracturas y heterogeneidades como se verá más adelante.

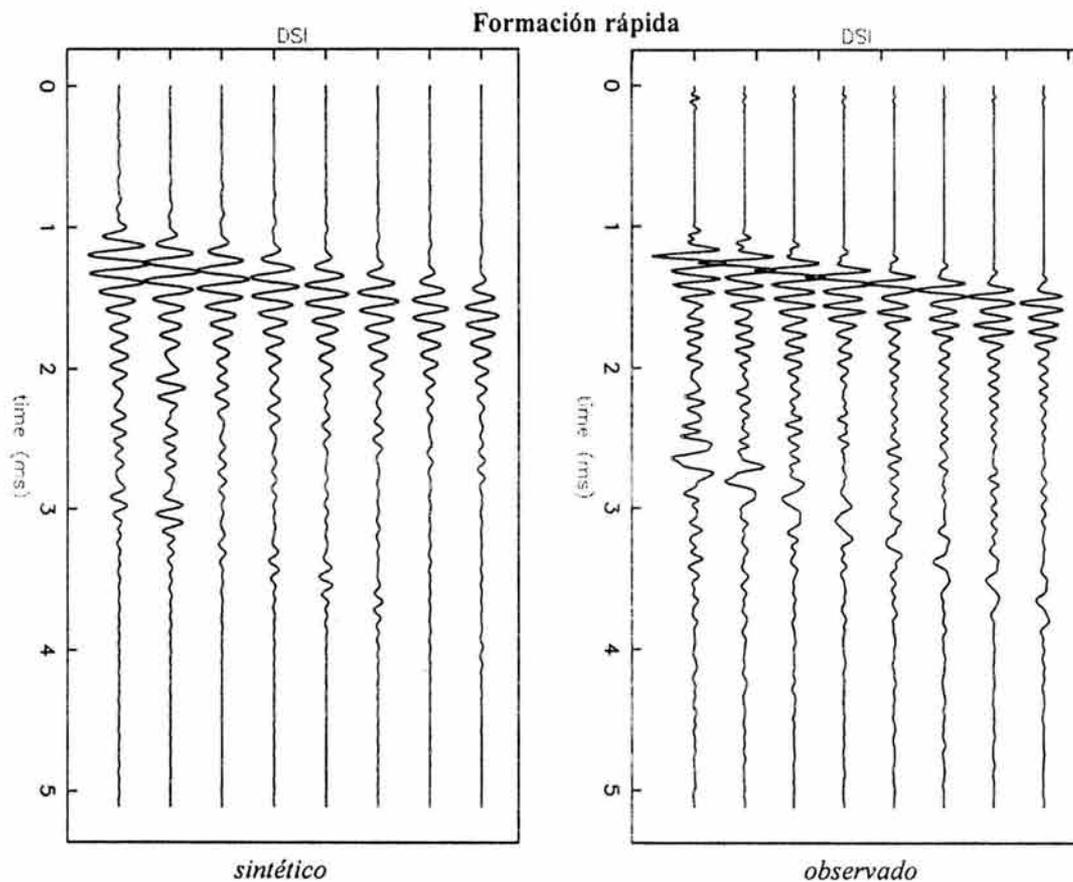


Fig. 4.4.3. Micro-sismograma sintético para el modelo de la Fig. 4.2.1. (izq.) y formas de onda completa del registro DSI para una formación rápida (der.).

Existen varias características en los micro-sismogramas sintéticos que se deben atender durante la simulación de registros sónicos de onda completa si se pretende obtener una buena comparación con las formas de onda reales. Tales características resultan

fundamentales en términos de una buena reproducción y entendimiento de la realidad. Sin llegar a un detalle riguroso, se propone que un buen registro sintético debe contener, en buena medida, aproximaciones aceptables en: 1) los tiempos de arribo de las diferentes fases, 2) la velocidad de propagación, 3) las amplitudes relativas entre las fases, 4) contenido de frecuencia y 5) el decaimiento de la energía y la duración. En la Fig. 4.4.3 se muestra una comparación entre el micro-sismograma sintético calculado para el modelo tridimensional de pozo fluido con fuente puntual en el origen ilustrado en la Fig. 4.2.1 y las formas de onda completa obtenidas del registro DSI para una formación rápida. Los parámetros utilizados en el modelo son: $V_p = 2930$ m/s, $V_s = 1437$ m/s, $V_f = 1088$ m/s, $\rho = 2.37$ g/cm³, $\rho_f = 1.4$ g/cm³ y $r = .177$ m. Se trata de una formación de arenas muy homogéneas y bien consolidadas que se utilizó como base de comparación debido a su analogía con el medio elástico, homogéneo e isótropo, que representa la solución analítica estudiada. Los micro-sismogramas de ambos diagramas corresponden a 8 receptores alineados con el eje vertical del pozo y la distancia entre ellos es $\Delta z = .1524$ m. La distancia fuente-primer receptor (offset) es de 2.74m = 9ft. Se puede observar el excelente acuerdo en las características generales de las formas de onda entre ambas gráficas. Aunque no es muy claro el arribo del tren de ondas P, en ambos diagramas, el arribo de la onda Pseudo-Rayleigh en el micro-sismograma sintético es excelente ya que reproduce muy bien la llegada de este tren de ondas a rededor de 1.0ms. De la misma forma, la pendiente del grupo de ondas Pseudo-Rayleigh que representa la velocidad de propagación de la onda de corte está muy bien reproducida en las trazas obtenidas analíticamente. Las amplitudes relativas y el contenido de frecuencia que se observan en el registro DSI se han logrado representar con buena aproximación para las fases obtenidas con el modelado, aunque las amplitudes de la onda de Stoneley en algunas trazas sintéticas se ven reducidas para este ejemplo. No obstante que la duración es muy parecida entre ambos micro-sismogramas, el decaimiento de la amplitud contra el espacio (dispersión geométrica) de los sintéticos se encuentra mejor representado que el decaimiento temporal de la coda. En particular, la coda de la fase Pseudo-Rayleigh en las trazas sintéticas exhibe una excelente aproximación a las observaciones.

Se debe mencionar que la función seleccionada como excitación temporal en el modelo propuesto corresponde a un pulso de Ricker. Los valores de fase y periodo han sido controlados arbitrariamente para un mejor ajuste. A priori se sabe que esta señal no corresponde a la forma temporal real de la fuente de la herramienta. La forma temporal de la fuente utilizada en el transmisor monopolar no es publicada por el fabricante. No obstante el uso de la ondícula de Ricker resulta suficiente para reproducir en buena medida las observaciones.

En la Fig. 4.4.4. se ilustra nuevamente una comparación entre resultados sintéticos y los registros sísmicos de onda completa observados para una formación muy rápida, es decir $V_s \gg V_f$. A la izquierda se despliega el resultado de la simulación analítica del modelo con los siguientes valores: $V_p = 6220$ m/s, $V_s = 3242$ m/s, $V_f = 1604$ m/s, $\rho = 2.55$ g/cm³, $\rho_f = 1.0$ g/cm³ y $r = .1016$ m. Los ocho receptores del modelo se encuentran alineados con el eje vertical del pozo y la distancia entre ellos es $\Delta z = .1524$ m. La distancia fuente-primer receptor (offset) es de 2.74m = 9ft. Estos parámetros han sido extraídos de la información

cada traza analítica para las fases inhomogéneas se logran reproducir de manera aceptable en comparación a las formas de onda observadas. El decaimiento debido a la dispersión geométrica es un elemento de comparación exitosa de la simulación aquí presentada. Se nota que la respuesta espacial de los receptores reproduce muy bien el campo de ondas que se dispersa con la distancia. Por otro lado, el decaimiento de la coda para las fases inhomogéneas --Pseudo-Rayleigh y Stoneley-- debe trabajarse más, ya que en esta ocasión se trata de una formación extremadamente rápida y con presencia de fracturamiento y fluidos. Es bien sabido que una buena parte de la energía de la coda responde a los efectos de las heterogeneidades del medio. Aun así, el modelo homogéneo aquí presentado ofrece una buena aproximación del comportamiento esperado en condiciones ideales.

Con el modelo homogéneo tridimensional que utiliza una fuente monopolar centrada en un pozo fluido se han logrado reproducir en buena medida las respuestas de formaciones rápidas y muy rápidas a distintas condiciones de pozo. A medida que se incrementa la complejidad de la roca de las formaciones, el modelo homogéneo resulta restringido para ofrecer resultados de micro-sismogramas sintéticos orientados hacia casos reales. Sin embargo, la experiencia adquirida con los resultados desarrollados en este capítulo ha sido fundamental para mejorar el entendimiento y sentar las bases de interpretación de la propagación y dispersión de ondas en la vecindad de pozos. Por otro lado, resulta deseable considerar casos en los que se traten fuentes dipolares y formaciones lentas, además de describir los resultados en términos de curvas de dispersión. Estos últimos análisis se presentan a continuación.

IV.5. Análisis de curvas de dispersión

La propagación y características de dispersión de ondas guiadas en un pozo lleno de fluido se estudian en este apartado por medio de curvas de dispersión y modelado de las formas de onda de registros sínicos. Las características de dispersión de la onda Pseudo-Rayleigh y Stoneley en un pozo con fuente monopolar y dipolar se comparan con curvas de dispersión obtenidas con modelos sintéticos. Los micro-sismogramas teóricos de la propagación elástica en un pozo fluido se calculan usando la formulación que utiliza una suma del número de onda discreto como se presentó en el Cap. IV.II. Mediante la selección apropiada de los parámetros del modelo se obtienen resultados muy similares a las formas de onda acústicas registradas para varios sitios de pozos en formaciones lentas, rápidas y muy rápidas. El radio efectivo del agujero es un factor importante que gobierna las amplitudes relativas de los modos generados sintéticamente. La relación de Poisson de la formación es el factor primario para determinar la amplitud relativa de los modos porosos "leaky" consecuentes al arribo compresional en formaciones lentas. La atenuación afecta la duración y el decaimiento de las ondas guiadas.

Con el objeto de interpretar los registros sínicos de onda completa de manera apropiada, se necesita de una base sólida para entender la propagación y las diferentes ondas elásticas que se propagan en un pozo con fluido. En este capítulo se propone examinar las características de dispersión de ondas guiadas y de cuerpo para observaciones y modelado a través de curvas de dispersión. Dado un modelo, las curvas de dispersión se obtienen por medio de un método de inversión que selecciona amplitudes buscando minimizar el error.

Aunque existen en la literatura un gran variedad de métodos numéricos para modelar y predecir comportamientos de fenómenos lineales. Aquí se usa el método de Prony para extraer la información relevante de los frentes de onda de las fases que se propagan en el pozo. El método de Prony es una técnica para el modelado de datos digitales que usa una combinación de exponenciales. Sin embargo no es una técnica de aproximación espectral. El método tiene una relación más cercana con los algoritmos lineales de predicción usados por los métodos de estimación recursiva. El método de Prony busca ajustar un modelo exponencial determinista a los datos. La idea es utilizar un análisis de mínimos cuadrados para ajustar aproximadamente un modelo exponencial en casos en donde hay un mayor número de puntos de datos que un número de términos exponenciales inferido.

Existen tres pasos esenciales en el método de Prony: 1) Determinar la predicción lineal que ajusta los datos disponibles, 2) las raíces de un polinomio formado por los coeficientes de la predicción lineal proveerán las estimaciones de frecuencias de amortiguamiento y sinusoidales de cada término exponencial y 3) la solución del segundo grupo de ecuaciones lineales proveerán estimaciones de la amplitud exponencial y de fase inicial sinusoidal. Asumiendo que se tiene un número de N muestras complejas en los datos, $x(1), x(2), \dots, x(n)$, el método Prony estimará $x(n)$ con un modelo exponencial complejo de p -términos como

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^p A_k \exp[(\alpha_k + i2\pi f_k)(n-1)T + i\theta_k], \quad (4.5.1)$$

para $1 \leq n \leq N$ donde T es el intervalo de muestreo en segundos, A_k es la amplitud del exponencial complejo, α_k es el factor de amortiguamiento en segundos⁻¹, f_k es la frecuencia sinusoidal en Hz y θ_k es la fase inicial sinusoidal en radianes. Los parámetros son completamente arbitrarios. En el caso de muestras de datos reales, las exponenciales complejas deben ocurrir en parejas de complejos conjugados de igual amplitud, eso reduce la ec. (4.5.1) a

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^{p/2} 2A_k \exp[\alpha_k(n-1)T] \cos(2\pi f_k(n-1)T + \theta_k), \quad (4.5.2)$$

para $1 \leq n \leq N$. Si el número de exponenciales complejos p es par, entonces existen $p/2$ cosenos amortiguados. Si p es non, entonces hay $(p-1)/2$ cosenos amortiguados más un exponencial puro amortiguado.

A continuación se presentan resultados para el procesado de datos que incluyen registros sintéticos generados con el modelo de pozo fluido en un medio homogéneo y formas de onda completa para formaciones lentas, rápidas y muy rápidas. En todos los casos se utilizaron los siguientes parámetros para la obtención de las correspondientes curvas de dispersión: $N = 512 =$ muestras por traza, $\Delta t = 10 \times 10^{-6}$ s = intervalo de muestreo, $N_f = 200 =$ número de frecuencias, $N_r = 8 =$ número de receptores y $\Delta z = .1524$ m = intervalo espacial entre receptores. El método de Prony se aplicó de manera indistinta, no importando si los datos provenían de micro-sismogramas sintéticos o de formas de onda de registros DSI. Una ventaja adicional en los resultados obtenidos a través de las simulaciones numéricas es que los parámetros del modelo pueden ser modificados con bastante flexibilidad. Por ejemplo, el número de receptores, el intervalo de muestreo y el número de puntos se pueden controlar para ofrecer mayor información al método de inversión.

En la Fig. 4.5.1 se muestran las curvas de dispersión resultado de procesar tres grupos de formas de onda: (a) micro-sismogramas sintéticos, (b) formas de onda monopolar y (c) formas de onda dipolar. Los parámetros del modelo son: $V_p = 2930$ m/s, $V_s = 1437$ m/s, $V_f = 1088$ m/s, $\rho = 2.37$ g/cm³, $\rho_f = 1.4$ g/cm³ y $r = .177$ m. Se trata de una formación rápida de arenas muy homogéneas y bien consolidadas que se utilizó como base de comparación por su analogía con el medio elástico, homogéneo e isótropo. El arribo cercano a los 250 μ s/ft es la onda de Stoneley; los arribos cercanos a los 200 μ s/ft se interpretan como modos normales del pozo cercanos a la frecuencia de corte, donde viajan a la lentitud de ondas de corte de la formación (modo de Pseudo-Rayleigh) y el tercer arribo cercano a los 100 μ s/ft es la onda compresional. Las líneas sólidas representan líneas de

lentitud constante, calculadas teóricamente haciendo que el determinante del sistema de ecuaciones en el método de Prony se igual a cero; es decir no se incluye el término de fuente. Como resultado, los segmentos Stoneley y Pseudo-Rayleigh muestran una inclinación en los diagramas frecuencia-lentitud en ambos casos (a) sintético y (b) observado. Esto indica que existe una fuerte dispersión de estos frentes de onda y también que el modelo sintético es bastante aceptable.

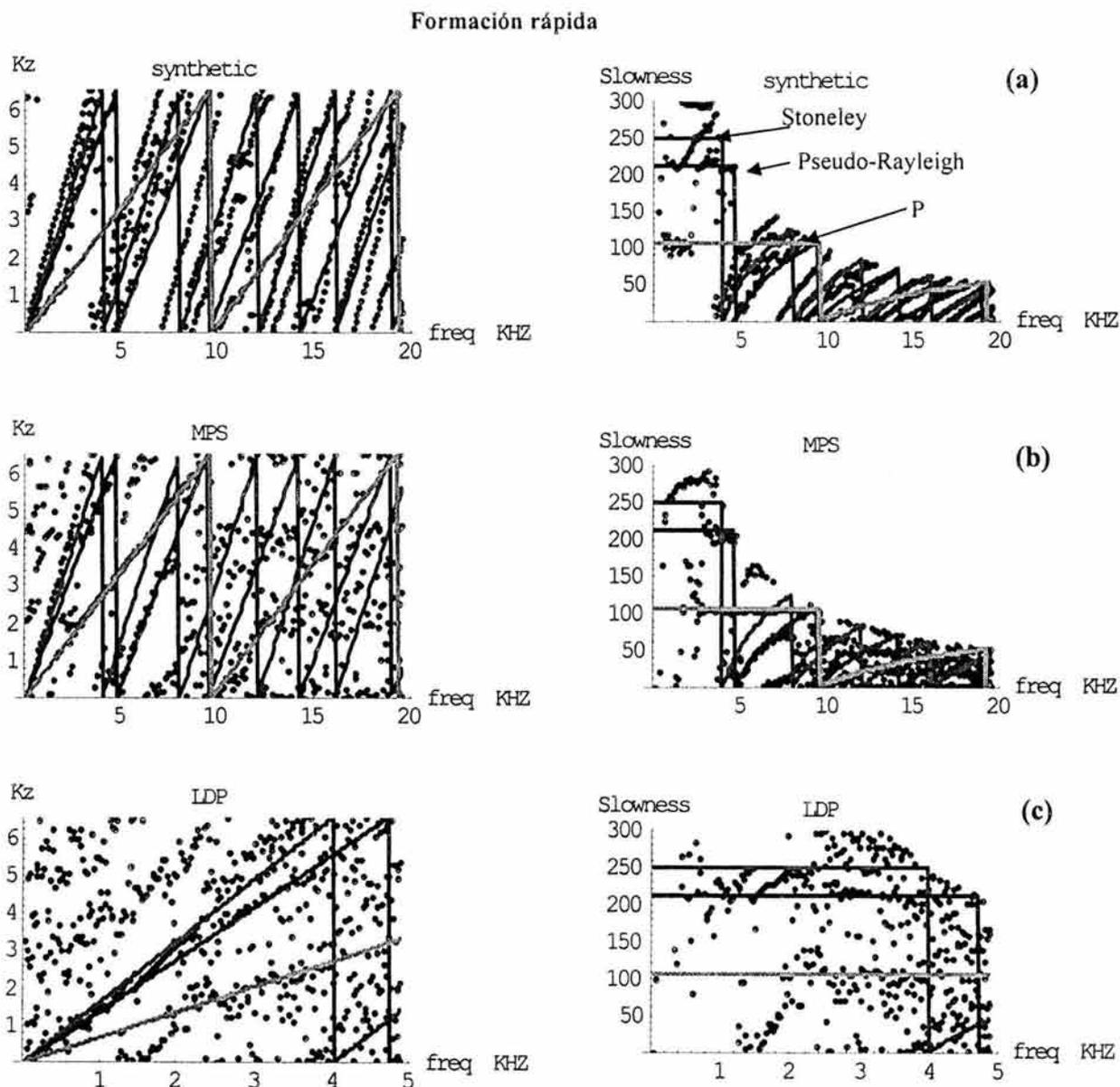


Fig. 4.5.1. Curvas de dispersión resultado de procesar (a) datos de micro-sismogramas sintéticos monopolares, (b) formas de onda monopolar y (c) formas de onda dipolar. Las propiedades elásticas corresponden a una formación rápida. Diagramas frecuencia-lentitud (der.) y diagramas frecuencia-número de onda (izq.)

Debemos recordar de la teoría que las ondas inhomogéneas como las de Stoneley y Pseudo-Rayleigh son ondas no dispersivas en un semi-espacio elástico homogéneo e isótropo debido a que no tienen dependencia con la frecuencia y no existe una coordenada de longitud horizontal. Esto sugiere que la dispersión de estos modos observada en el pozo tendrá que ser atribuida a parámetros físicos de la geometría y del medio. Debemos suponer que los patrones inclinados mostrados por los datos respecto de la línea sólida teórica (de lentitud constante) proponen valores de dispersión linealmente asociados con el ángulo medido entre ellas. Sin embargo, esta hipótesis debe ser validada cuantitativamente. Las líneas sólidas verticales se interpretan directamente como las frecuencias de corte, estas son producidas por el *aliasing* del pozo. Teóricamente la física del pozo y la presencia de la herramienta prevén la dispersión. Cerca de la frecuencia de corte la mayor parte de la energía de los modos está en la formación, lejos del pozo, así se espera que la propagación no se vea afectada por la presencia de la herramienta. A frecuencias mayores de la de corte, la energía modal se incrementa gradualmente y se concentra en el pozo, donde se somete a difracción y absorción por la herramienta. Una explicación de este fenómeno es que efectivamente la herramienta atenúa estos modos a frecuencias más altas de la de corte, dejando remanentes que se concentran cerca de la frecuencia de corte y que viajan con lentitud de onda S de la formación.

Para el caso del segmento P se puede apreciar un ajuste muy bueno entre las líneas teóricas y los datos observados. En contraste, el procesado de los micro-sismogramas sintéticos no refleja un buen ajuste en las lentitudes de la onda P. No obstante se pueden apreciar mejores trenes de puntos alineados en los datos sintéticos para el diagrama frecuencia-número de onda. Por su parte, los diagramas de la Fig. 4.5.1(c) corresponden al procesado de formas de onda observadas para una fuente dipolar. Nuevamente se presentan las líneas sólidas de lentitud constante para los modos Stoneley, Pseudo-Rayleigh y P, respectivamente. Es notable que los datos muestran una gran dispersión. Las inclinaciones de los tres modos son muy pronunciadas, particularmente para Stoneley y Pseudo-Rayleigh. No obstante en este caso se logra observar una mejor alineación de patrones en los diagramas frecuencia-número de onda.

En la Fig. 4.5.2 se muestran curvas de dispersión ahora para una formación de contraste muy alto de velocidades con respecto al fluido (formación muy rápida). Los valores correspondientes son: $V_p = 6220$ m/s, $V_s = 3242$ m/s, $V_f = 1604$ m/s, $\rho = 2.55$ g/cm³, $\rho_f = 1.0$ g/cm³ y $r = .1016$ m. De la interpretación petrofísica disponible podemos decir que se trata de una formación carbonatada con presencia de fracturamiento. Se nota que la solidez y compactación de la formación de calizas aumenta considerablemente los valores de velocidades de las ondas de cabecera. En los resultados del procesado de la Fig. 4.5.2(a), se puede observar para el segmento de Stoneley un excelente ajuste entre los datos de los micro-sismogramas y las líneas de lentitud constante. Esto refleja la óptima selección de este modo por el método de Prony y por lo tanto un buen control de calidad en el modelado. De la misma forma, se pueden seguir patrones muy continuos para los modos de Pseudo-Rayleigh y Stoneley, no obstante que los resultados sintéticos exhiben una fuerte dispersión del modo de Pseudo-Rayleigh. Es notable la similitud entre los resultados del proceso para

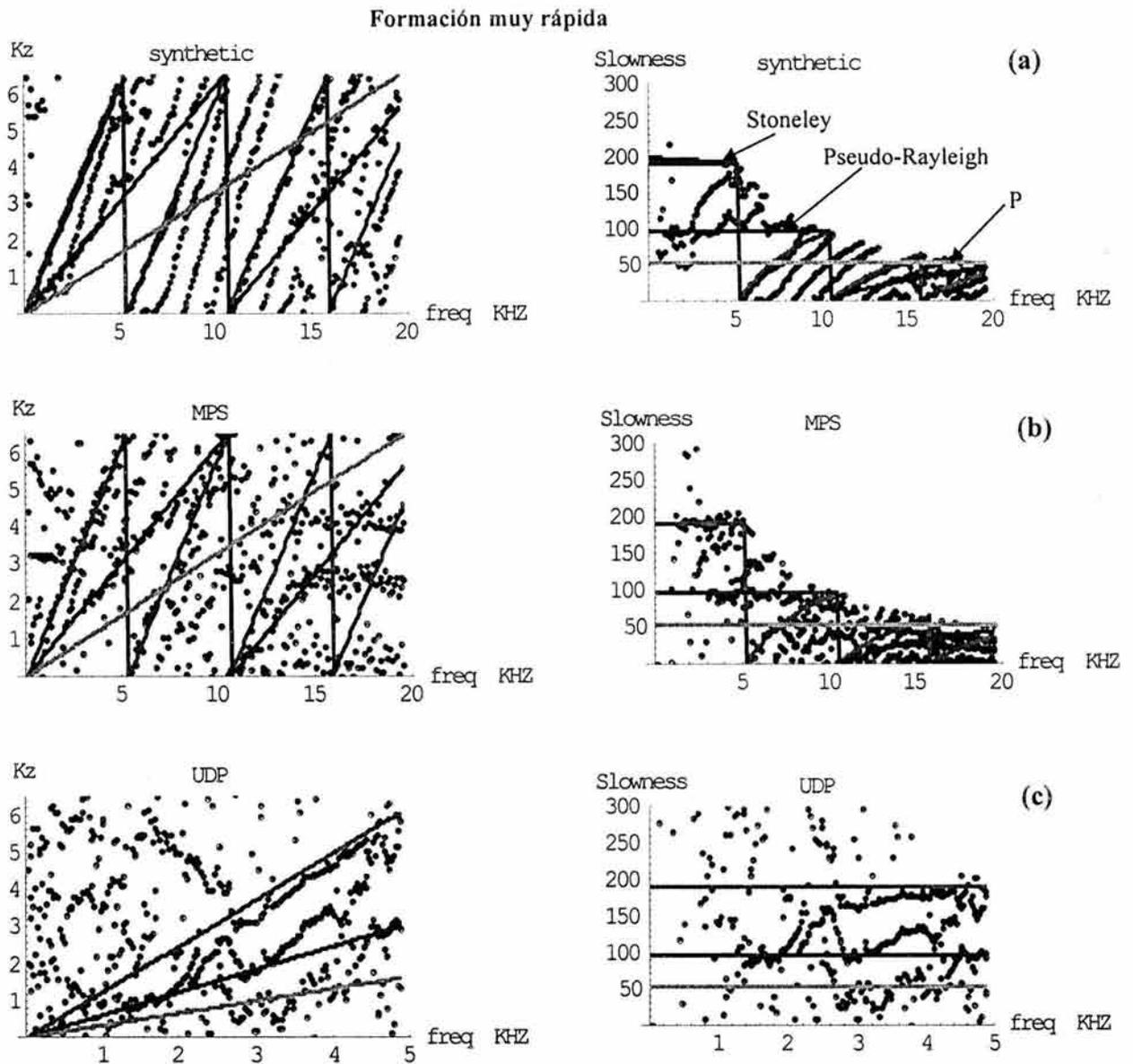


Fig. 4.5.2. Curvas de dispersión resultado de procesar (a) datos de micro-sismogramas sintéticos monopolares, (b) formas de onda monopolar y (c) formas de onda dipolar. Las propiedades elásticas corresponden a una formación muy rápida. Diagramas frecuencia-lentitud (der.) y diagramas frecuencia-número de onda (izq.)

las formas de onda observadas en la Fig. 4.5.2(b). Aquí se refleja el buen ajuste con respecto a las curvas de dispersión de los datos sintéticos. Aunque mostrando un menor patrón continuo de puntos, la fase de Stoneley corresponde muy bien con el valor teórico calculado de $200 \mu\text{s}/\text{ft}$ de lentitud. El arribo cercano a los $100 \mu\text{s}/\text{ft}$ corresponde a la onda Pseudo-Rayleigh, que como se mencionó, presenta una fuerte variación de las lentitudes con respecto de la frecuencia. Es notable que el arribo al rededor de $50 \mu\text{s}/\text{ft}$ de la línea sólida teórica no es detectado por el proceso, en su lugar se pueden observar varios trenes de puntos bien alineados que corresponden a arribos y atrapamiento de modos compresionales dentro del fluido del pozo.

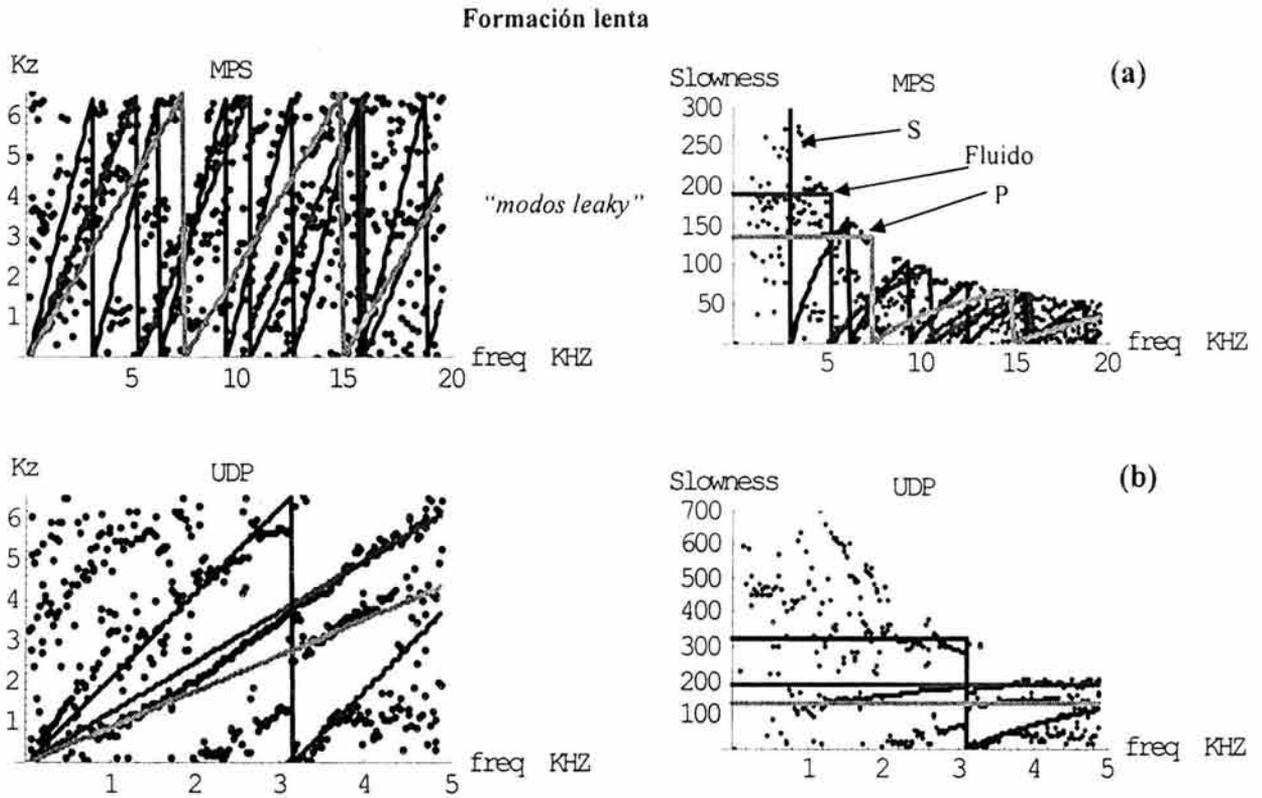


Fig. 4.5.3. Curvas de dispersión resultado de procesar (a) formas de onda monopolar y (b) formas de onda dipolar. Las propiedades elásticas corresponden a una formación lenta. Diagramas frecuencia-lentitud (der.) y diagramas frecuencia-número de onda (izq.)

La Fig. 4.5.2(c) corresponde al proceso de formas de onda dipolares. Nuevamente se muestran líneas de lentitud constante para los tres modos de propagación estudiados. Este resultado refuerza las interpretaciones anteriores y muestra buena respuesta del método de Prony y patrones de puntos muy bien definidos que se pueden asociar a dispersión de modos guiados. Ambos diagramas (frecuencia-numero de onda y frecuencia-lentitud) ofrecen una resolución similar.

Las curvas de dispersión de la Fig. 4.5.3 corresponden al procesado de las formas de onda observadas (a) para fuente monopolar y (b) dipolar. En este ejemplo se trata una formación lenta, es decir que la velocidad de onda de corte de la formación es menor que la velocidad de onda compresional del fluido, esto es $V_f > V_s$. Los parámetros utilizados en el proceso son: $V_p = 2257$ m/s, $V_s = 952$ m/s, $V_f = 1604$ m/s, $\rho = 2.05$ g/cm³, $\rho_f = 1.0$ g/cm³ y $r = .203$ m. Con esta diferencia de velocidades y altos contrastes los modos de propagación corresponden únicamente a modos compresionales y de Stonely. El modo que se propaga a baja frecuencia es el modo compresional normal. La lentitud de este modo varía desde la lentitud compresional de la formación virgen y la frecuencia de corte, hasta la lentitud del fluido del pozo en frecuencias mayores. Los siguientes modos son modos superiores de propagación de onda compresional. Aunque en los diagramas frecuencia-lentitud no se aprecian patrones de alineamientos claros, en los correspondientes diagramas frecuencia-

número de onda sí. Las curvas de dispersión ilustradas en la Fig. 4.5.3(b) muestran mejores resultados del procesamiento utilizando fuente dipolar. Aquí se pueden observar arribos más claros de los modos de propagación de onda compresional viajando desde lentitudes de P en la formación en baja frecuencia hasta lentitudes de P en el fluido en alta frecuencia. Este patrón es muy marcado en el diagrama de frecuencia-lentitudes. Se pueden seguir hasta cuatro tendencias claras en los datos que muestran la propagación de modos superiores dispersivos con muy baja velocidad antes de los 3 kHz. Estos corresponden a la onda de Stoneley y modos normales porosos “leaky” débiles, debido al valor de la relación de Poisson en este intervalo. Los denominados modos “leaky” o porosos son modos con número de onda complejo o frecuencia compleja. El procesado puede detectar estas “ondas-porosas” por su buena precisión. Sin embargo, los resultados del procesado de datos sintéticos se pueden mejorar agregando más receptores al modelo.

En este capítulo se ha logrado aplicar satisfactoriamente el método de Prony para la predicción lineal de 1) datos de registros sínicos de onda completa y 2) micro-sismogramas sintéticos para el modelo homogéneo. Los cálculos de números de onda asociados a frecuencias temporales y curvas de dispersión en distintos ejemplos de pozos tipo son muy útiles para observar dispersión. Con particular interés se ha modelado la propagación de ondas de cuerpo de la formación, tal como la onda P, que se formuló como un exponencial complejo en el método de inversión. Este modelo ajusta muy bien a la onda compresional de la formación. Se presentaron varios ejemplos en los que se ilustra la buena resolución de esta técnica para estimar dispersión de forma precisa en formaciones rápidas, muy rápidas y lentas. Aunque la interpretación de las curvas de dispersión ofrecida en esta sección no se asoció con términos de petrofísica, la discusión ofrecida aquí mejorará el entendimiento de la propagación de ondas elásticas en la vecindad de pozos en medios geológicos complejos.

V. ATENUACIÓN Y Q -CODA DE REGISTROS SÓNICOS DE POZO

V.1. Evaluación de Q -coda

Una de las medidas más comunes en sismología e ingeniería sísmica para extraer información de la fuente, trayecto y efecto del sitio, además de la heterogeneidad o características de fracturamiento del medio de propagación es la atenuación. Esta medida generalmente se caracteriza por el llamado factor de calidad (Q), el cual indica el decaimiento de la amplitud de una onda propagándose a través de un material. En sismología ha sido muy frecuente la aplicación de métodos de evaluación de la atenuación a partir de los sismogramas registrados en sismos fuertes. Los efectos de la fuente, trayecto y del sitio ahora pueden ser aislados mediante la extracción de diferentes medidas de atenuación a partir de los registros. Uno de los métodos más utilizados ha sido el método de normalización de coda, el cual permite calcular la atenuación de la coda (Q_c^{-1}) utilizando relaciones entre las envolventes de onda-S directas y de coda. Por otro lado, para la obtención de medidas de atenuación a partir de los sismogramas de pozo, frecuentemente ha sido aplicado el método de relaciones espectrales para dos receptores dada una banda de frecuencia. Esta bien conocida metodología ha sufrido modificaciones y mejoras con el objeto de ofrecer medidas más realistas de Q en diferentes rocas. Desafortunadamente las relaciones espectrales a diferentes distancias no han resultado confiables ya que arrojan resultados de Q por debajo de los estimados en laboratorio y experimentos controlados. En este capítulo se propone un nuevo método para extraer la atenuación de la coda Q_c^{-1} a partir de los micro-sismogramas de pozo. El estudio se fundamenta en la física de la propagación y el origen de la adquisición y la toma de registros sónicos de onda completa. De esta manera el método propuesto logra medir valores de Q_c^{-1} para las diferentes fases presentes en la propagación de ondas en pozos en formaciones rápidas y lentas. El método además de ofrecer una alternativa de cálculo de la atenuación intrínseca del material, logra separar el fenómeno de dispersión geométrica por utilizar la información proveniente de un solo receptor.

Si dado un volumen de cierto material, este es sometido a la aplicación cíclica de esfuerzos a una frecuencia ω , entonces la medida adimensional de la fricción interna (o anelasticidad) está dada por (Aki & Richards, 1980):

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{\Delta E}{2\pi E}, \quad (5.1.1)$$

donde E es el máximo de energía de deformación ubicado en el volumen y $-\Delta E$ es la energía perdida en cada ciclo debido a las imperfecciones en la elasticidad del material. Esta definición muy raramente tiene un uso directo ya que sólo en experimentos muy especiales es posible tener un elemento de material con ondas de esfuerzo de amplitud y periodo constantes. Más comúnmente uno puede observar (i) el decaimiento temporal de la

amplitud de una onda en un número de onda dado ó (ii) el decaimiento espacial de una onda propagandose en una frecuencia dada. La situación más común en sismología relaciona a la atenuación de una señal compuesta por un rango de frecuencias y se hace la hipótesis de que la atenuación es un fenómeno lineal, en el sentido de que la onda puede resolverse en sus componentes de Fourier, cada uno de los cuales puede estudiarse en términos de (i) o (ii) y que la subsecuente síntesis de Fourier da el efecto de atenuación correcto en las actuales señales sísmicas.

En cualquier caso (i) o (ii) para un medio con una relación lineal esfuerzo-deformación, la amplitud de la onda A es proporcional a $E^{1/2}$. Por ejemplo, A puede representar la máxima velocidad de partícula, o una componente de esfuerzo. También asumimos que $Q \gg 1$ así que picos sucesivos tendrán casi la misma energía de deformación. Así:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \frac{\Delta A}{A}, \quad (5.1.2)$$

de la cual se pueden obtener las fluctuaciones de la amplitud debidas a atenuación. Así en el caso (i), preguntamos cual es $A = A(t)$, dado que inicialmente $A = A_0$ y A decae como una fracción de π/Q a tiempos sucesivos $2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \dots, 2n\pi/\omega$? Claramente,

$$A(t) = A_0 \left(1 - \frac{\pi}{Q}\right)^n \dots \dots t = 2n\pi/\omega, \quad (5.1.3)$$

Así

$$A(t) = A_0 \left(1 - \frac{\omega t}{2Qn}\right) \rightarrow A_0 \exp\left[\frac{-\omega t}{2Q}\right], \quad (5.1.4)$$

(para n grande y tiempos t grandes). De las observaciones de decaimientos exponenciales de la amplitud $A(t)$, usamos la ec. (5.1.4) par definir el valor temporal de Q . Estamos forzados a obtener el resultado de (5.1.4) para el uso discreto de tiempos ya que tal es el caso de los experimentos en (i). Para el caso (ii) sin embargo la derivación de la forma $A = A(x)$ para la distancia x , es más sencilla ya que un pico de onda en particular puede ser seguido a lo largo de una distancia dx y el decaimiento gradual espacial de A puede observarse. Asumimos aquí que la dirección de máxima atenuación es sobre el eje x , el cual también es la dirección de propagación. Entonces $\Delta A = (dA/dx)\lambda$, donde λ es la longitud de onda dada en términos de ω y de la velocidad de fase c por $\lambda = 2\pi c/\omega$. La ec. (5.1.2) llega a ser $dA/dx = -(\omega/2cQ)A$ con la solución exponencial de decaimiento

$$A(x) = A_0 \exp\left[-\frac{\omega x}{2cQ}\right], \quad (5.1.5)$$

De las observaciones de decaimiento exponencial para valores de $A(x)$, usamos (5.1.5) para definir el valor espacial de Q . Por supuesto que cualquier decaimiento espacial debido a dispersión geométrica debe ser estudiado también. Debido a la física del fenómeno que rige a la propagación de ondas en pozo y a la mayor cantidad de información adquirida para un solo receptor, se propone el siguiente análisis del decaimiento exponencial de la amplitud en términos de las definiciones de (i).

Tomando las definiciones para medir la atenuación por medio de (i), es bien sabido que en la literatura existe un considerable grupo de métodos para describir el decaimiento en las amplitudes de la coda de los sismogramas. En sismología, dependiendo de las características físicas, la historia de la región de interés y la disponibilidad de mediciones, se pueden ajustar metodologías convenientes para extraer información de la atenuación de coda a partir de las trazas disponibles. Los modelos fenomenológicos para sismogramas de alta frecuencia de sismos locales descritos por Sato & Felher (1998) pueden usarse para estimar las características de difracción de la litosfera a partir de los datos sísmicos. Los dos parámetros más comúnmente usados son el coeficiente de difracción total y la atenuación de coda. El coeficiente de difracción total se define a partir del concepto de sección cruzada de difracción diferencial para un difractor simple adimensional, y es el parámetro que gobierna la fuerza de excitación de la coda-S en sismología observacional. La atenuación de coda Q_c^{-1} empíricamente caracteriza el decaimiento exponencial de la amplitud de la envolvente de la coda con el incremento del tiempo. El cambio temporal de la atenuación de la coda se ha propuesto como un indicador precursor de la ocurrencia de sismos grandes.

La densidad de energía de ondas de coda en una banda de frecuencia teniendo una frecuencia central f , se escribe como la suma de los cuadrados de la velocidad de partícula de la coda $\dot{u}_i^{coda}(t, f)$ como

$$E^{coda}(t, f) = \left\langle \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_0}{2} |\dot{u}_i^{coda}(t, f)|^2 + \text{elas. energy} \right\rangle_T \quad (5.1.6)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \rho_0 \left\langle |\dot{u}_i^{coda}(t, f)|^2 \right\rangle_T$$

donde ρ_0 es la densidad de masa, elas. energy = la energía potencial acumulada en el medio, y $\langle \dots \rangle_T$ es un promedio móvil sobre varios ciclos alrededor del tiempo t . Como fue reportado por Rautian & Khalturin (1978) para una región dada, la coda-S tiene un decaimiento común para un lapso de tiempo mayor que dos veces el tiempo de viaje de onda-S. La forma de esta curva de decaimiento se cuantifica usando un parámetro conocido como *atenuación de coda*. Para análisis prácticos de datos de una sola estación usamos las bases teóricas de modelos de difractores simples y múltiples en la ec. (5.1.6) para escribir la amplitud del cuadrado de la velocidad de la coda (envolvente MS) o su raíz cuadrada (envolvente RMS), en una banda de frecuencia con frecuencia central f vs. el tiempo como el producto de una potencia del lapso del tiempo y un factor de decaimiento exponencial como:

$$\langle |u^{coda}(t, f)|^2 \rangle_T \propto \frac{1}{t^n} \exp[-Q_c^{-1}(f)2\pi ft], \quad (5.1.7)$$

donde la potencia n es 1-2 dependiendo del dominio de las ondas superficiales, difusivas o de cuerpo. Recientemente muchos investigadores ubican a $n = 2$ por el decaimiento geométrico en el modelo de difracción simple. El término de decaimiento exponencial caracterizado por la atenuación de la coda Q_c^{-1} es independiente de la fuente y de la posición del receptor, pero depende de la banda de frecuencia. Es posible medir Q_c^{-1} a partir de análisis de registros obtenidos en una sola estación. Lo que permite mediciones aún en regiones con poca cobertura de estaciones. La atenuación de coda Q_c^{-1} caracteriza la coda del sismograma en su decaimiento de la amplitud con el paso del tiempo. Q_c^{-1} grande significa decaimiento rápido de la amplitud. Así, mientras la ec. (5.1.7) es válida para una sola frecuencia, la atenuación de coda es comúnmente medida en un ancho de banda de un octavo, filtrando los sismogramas (Tsujiura, 1978). Si hacemos el ancho de banda muy pequeño, la envolvente de coda filtrada cambia rápidamente y la estimación estable de Q_c^{-1} se complica. Estimaciones de Q_c^{-1} se hacen típicamente de gráficas del logaritmo del producto del intervalo de tiempo transcurrido a la potencia correcta (1-2) y el cuadrado (MS) de la amplitud de velocidades en la coda sobre varios ciclos contra la ventana de tiempo de observación. Entonces podemos estimar Q_c^{-1} directamente del gradiente de decaimiento usando el método de mínimos cuadrados.

En algunos estudios, la estimación se estabiliza usando datos de grupos de sismogramas y simultáneamente encontrando el gradiente de decaimiento que mejor ajuste los datos (Fehler *et al.*, 1988). Exámenes de datos sobre un amplio rango de intervalos de tiempo demostraron que las envolventes de coda no pueden ser descritas por un solo valor de Q_c^{-1} (Rautian & Khalturin, 1978). Hasta ahora la dependencia del decaimiento de la coda con el intervalo de tiempo es todavía un tema no resuelto, la ventana de tiempo de observación a utilizar sigue siendo una interrogante.

En sismología se reporta el cambio de Q_c^{-1} con el tiempo en algunos periodos de observación (meses ó años) y estos cambios han sido utilizados como indicadores de precursores para ocurrencia de temblores grandes, inclusive un decaimiento en el valor de Q_c^{-1} a demostrado ser precursor de erupciones volcánicas.

V.2. Metodología para extracción de Q -coda de registros sísmicos de pozo

La adquisición de micro-sismogramas de pozo se realiza mediante la repetición experimental a distintas profundidades (cada .1524m) de una emisión impulsiva de una onda compresional registrada en una serie de 8 receptores por medio de una sonda de registro sísmico. La distancia fuente-primer receptor (off-set) en la sonda es de 2.7m y la distancia entre cada receptor es de .1524m. Dicha herramienta, registra la propagación de las ondas a través del fluido de perforación y de la formación, con una profundidad de investigación de hasta 1.5 a 2m para las mayores longitudes de onda, dado el decaimiento exponencial contra la distancia de las fases inhomogéneas. Así pues, para el caso monopolar, los sismogramas registran la variación del campo de presiones a frecuencias altas, donde la frecuencia central de la fuente compresional es $f_c = 12\text{kHz}$. Los registros están caracterizados por 512 muestras con un intervalo de tiempo de $1 \times 10^{-6}\text{s}$ y duraciones de hasta de $5 \times 10^{-3}\text{s}$. Si nuestro objetivo es obtener estimaciones reales de la atenuación, será importante establecer los siguientes criterios para su correcta medición.

Dado que en la propagación de ondas en pozo además de reflexiones ocurren fenómenos de refracción, es decir propagación de ondas guiadas y/o de tubo, será importante medir el decaimiento de cada fase por separado. Comúnmente pueden estudiarse dos casos: A) El de formaciones *rápidas* donde la velocidad del fluido de perforación es mayor que la velocidad de onda de corte de la formación, así se producen reflexiones de onda-P compresional y de fases guiadas de Pseudo-Rayleigh y de Stoneley, y B) formaciones *lentas* en donde la velocidad del fluido es mayor que el de la velocidad de onda-S de la formación. En este caso sólo se producen reflexiones de las fases compresionales y de Stoneley a distintas penetraciones dado que no se cumplen las condiciones para la existencia de ondas de Pseudo-Rayleigh. Para este estudio sólo se presentará el caso de formaciones rápidas, dado que son los casos más comunes y donde la roca presenta porosidad secundaria o fracturamiento.

A continuación se presenta el método para extraer Q_c^{-1} para las fases guiadas de Pseudo-Rayleigh y de Stoneley. Estas fases tienen un rango de observación que garantiza su propagación e interacción con las heterogeneidades de la formación:

- 1) Del registro continuo contra profundidad de los micro-sismogramas de primer receptor (registro VDL), seleccionar un intervalo de interés en donde se observe buena calidad en la adquisición y una buena continuidad vertical.
- 2) Es conveniente observar los registros seleccionados de manera gráfica y calcular su espectro de amplitudes por medio de la aplicación de la transformada rápida de Fourier. Esto permitirá identificar las frecuencias características de propagación de los distintos modos útiles para el filtrado posterior.
- 3) Realizar el apilamiento de una serie de 10 o 12 micro-sismogramas con una alineación vertical que busque concentrar la aparición de las diferentes fases de propagación y concentrar su efecto.

- 4) Realizar el filtrado del micro-sismograma apilado a la frecuencia característica de la fase que se desea estudiar. Para ondas Pseudo-Rayleigh filtrar en alta frecuencia (12kHz). Stoneley filtrar a baja frecuencia (1.5kHz). Recordar que la fuente monopolar es disparada a los 12kHz.
- 5) Obtener la envolvente MS y/o RMS del micro-sismograma filtrado.
- 6) Establecer la ventana de observación del intervalo de tiempo en el que se identifica el decaimiento de la amplitud de la fase estudiada.
- 7) Realizar el promedio móvil de las amplitudes sobre varios ciclos de la señal y graficar su logaritmo.
- 8) Calcular el gradiente de decaimiento por medio de un ajuste con el método de mínimos cuadrados o de regresión lineal. La pendiente del mejor ajuste de los datos corresponderá al valor de la atenuación de la coda de la fase correspondiente aislada en tiempo y frecuencia.

Una vez calculadas las atenuaciones de coda de las fases Pseudo Rayleigh Q_{cPR}^{-1} y de Stoneley Q_{cSI}^{-1} se pueden asignar los valores estimados a la profundidad o CDP correspondiente y así establecer las curvas de atenuación de coda contra la profundidad en un registro más que puede ser presentado en una pista extra de los registros sínicos ver Fig. 5.3.4.

Una opción muy conveniente para establecer mediciones de las heterogeneidades y fracturamiento o de las irregularidades de la formación, sería obtener el campo residual o difractado para analizar el decaimiento de la energía de la coda. Esto se logra efectuando un promedio de las trazas apiladas y la sustracción lineal a cada una de ellas. Se propone que el primer receptor de las mediciones es el que mejor calidad de la información contiene dada una menor relación señal-ruido.

Es posible obtener mediciones de Q_c^{-1} contra la frecuencia, para esto se deberá tomar en cuenta que el rango de observación del filtrado de la fase de extracción de coda está restringido por la concentración energética en la frecuencia para la fuente. En este método se espera que la atenuación tenga el mismo valor alrededor de la frecuencia característica del modo de propagación como se muestra en la Fig. 5.3.3.

V.3. Resultados de Q -coda y análisis de micro-sismogramas

Con el objeto de resaltar las características más importantes en la aplicación de la metodología propuesta, se han calculado algunos ejemplos para extracción de atenuación de coda Q_c^{-1} para las fases inhomogéneas de Pseudo-Rayleigh y de Stoneley. La Fig. 5.3.1 muestra un micro-sismograma típico para formaciones rápidas de la herramienta monopolar. Aquí se indican las fases de propagación reconocidas y se exhibe su corta duración. Se trata del registro del primer receptor a la profundidad indicada, también se menciona la frecuencia característica de la fuente monopolar (12kHz).

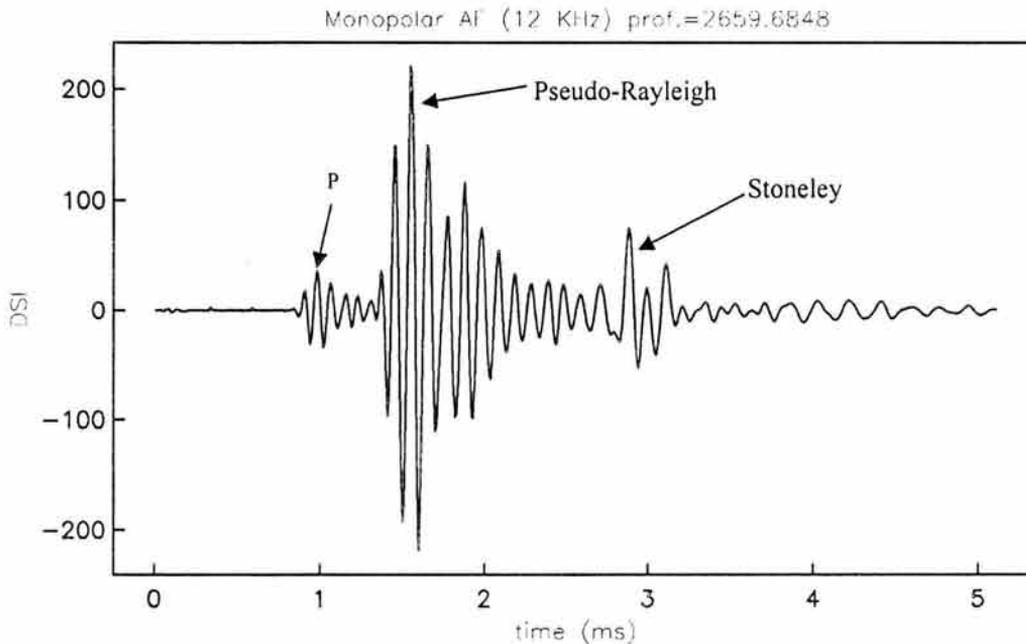


Fig. 5.3.1. Micro-sismograma monopolar registrado a una profundidad de $d = 2659.6848$ m para una formación areno-arcillosa saturada con hidrocarburos.

La Fig. 5.3.2 presenta la síntesis gráfica de la metodología de extracción de Q_c^{-1} propuesta en la sección anterior. La idea fundamental es esquematizar paso a paso el método para la estimación de la atenuación de coda. El procedimiento se puede seguir de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba para los pasos 1) a 8) respectivamente. La gráfica final es el mejor ajuste de los datos en escala logarítmica para las amplitudes filtradas a la frecuencia característica f y una ventana de tiempo de decaimiento. Es preciso mencionar que se adoptaron dos filtros pasa bandas para cada una de las fases estudiadas. El de 8-16 kHz para ondas de Pseudo-Rayleigh y el de 1-3 kHz para las de Stoneley, en ambos casos se obtuvieron magníficos resultados. La dependencia de los valores de atenuación con la ventana de observación temporal resultó muy importante. Ha sido necesario en este trabajo ubicar con mucha precisión los valores de la máxima amplitud hasta el final de la fase de

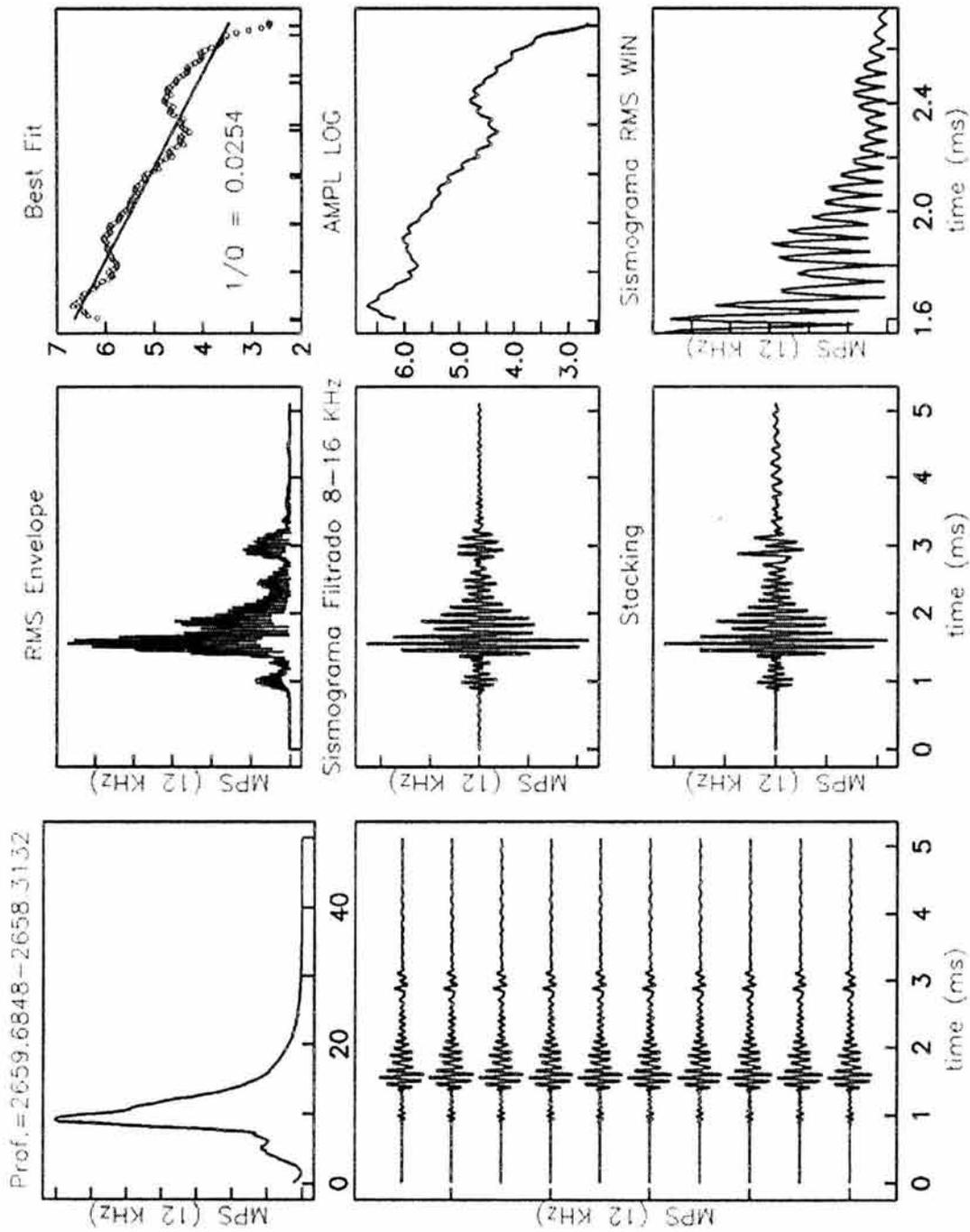


Fig. 5.3.2. Esquematización del método propuesto. Los pasos 1) a 8) se pueden correlacionar con las graficas de izquierda a derecha y de abajo a arriba. Se muestran los micro-sismogramas filtrados para ondas de Pseudo-Rayleigh a 12 kHz y de Stoneley a 1.5 kHz.

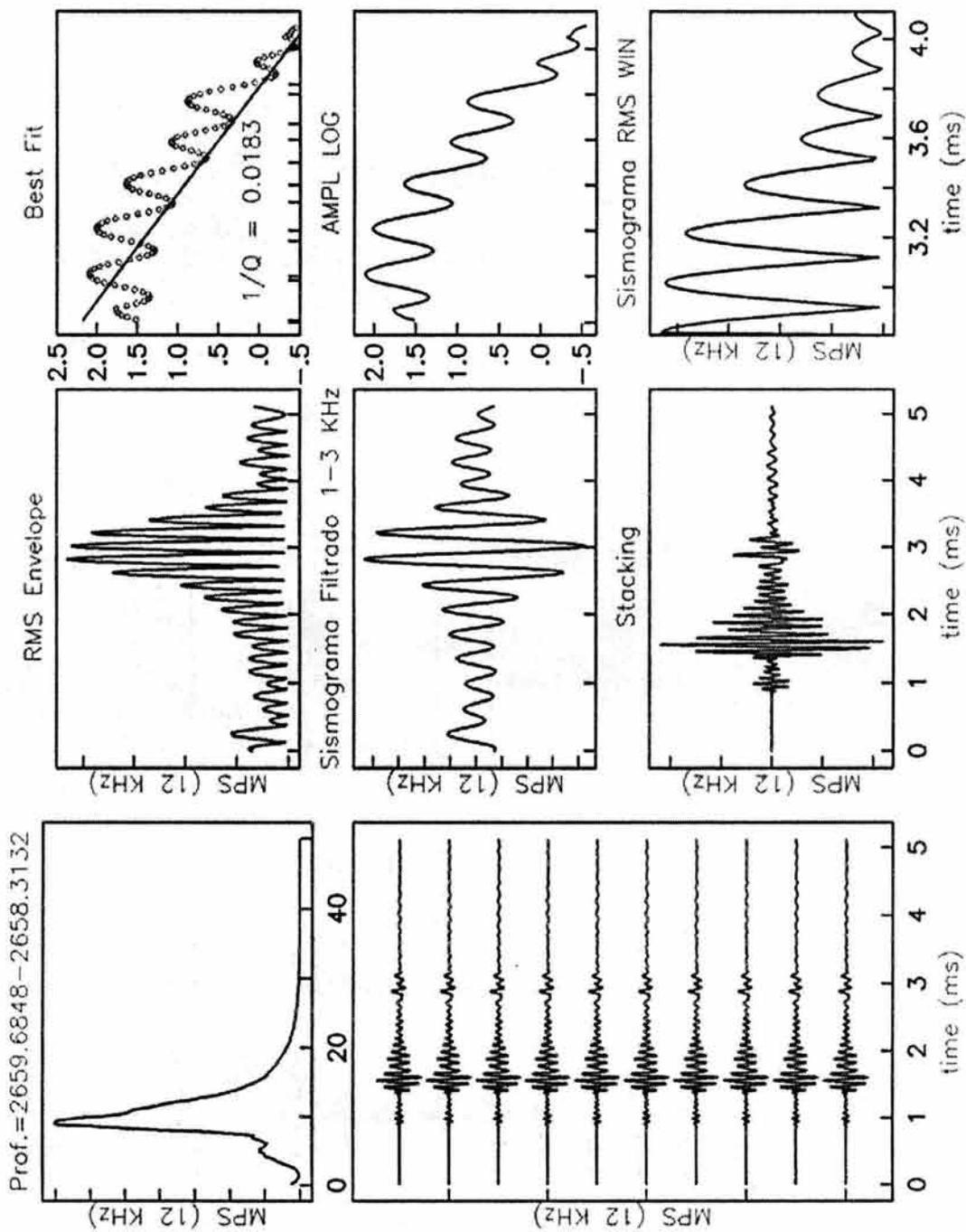


Fig. 5.3.2 (continuación)

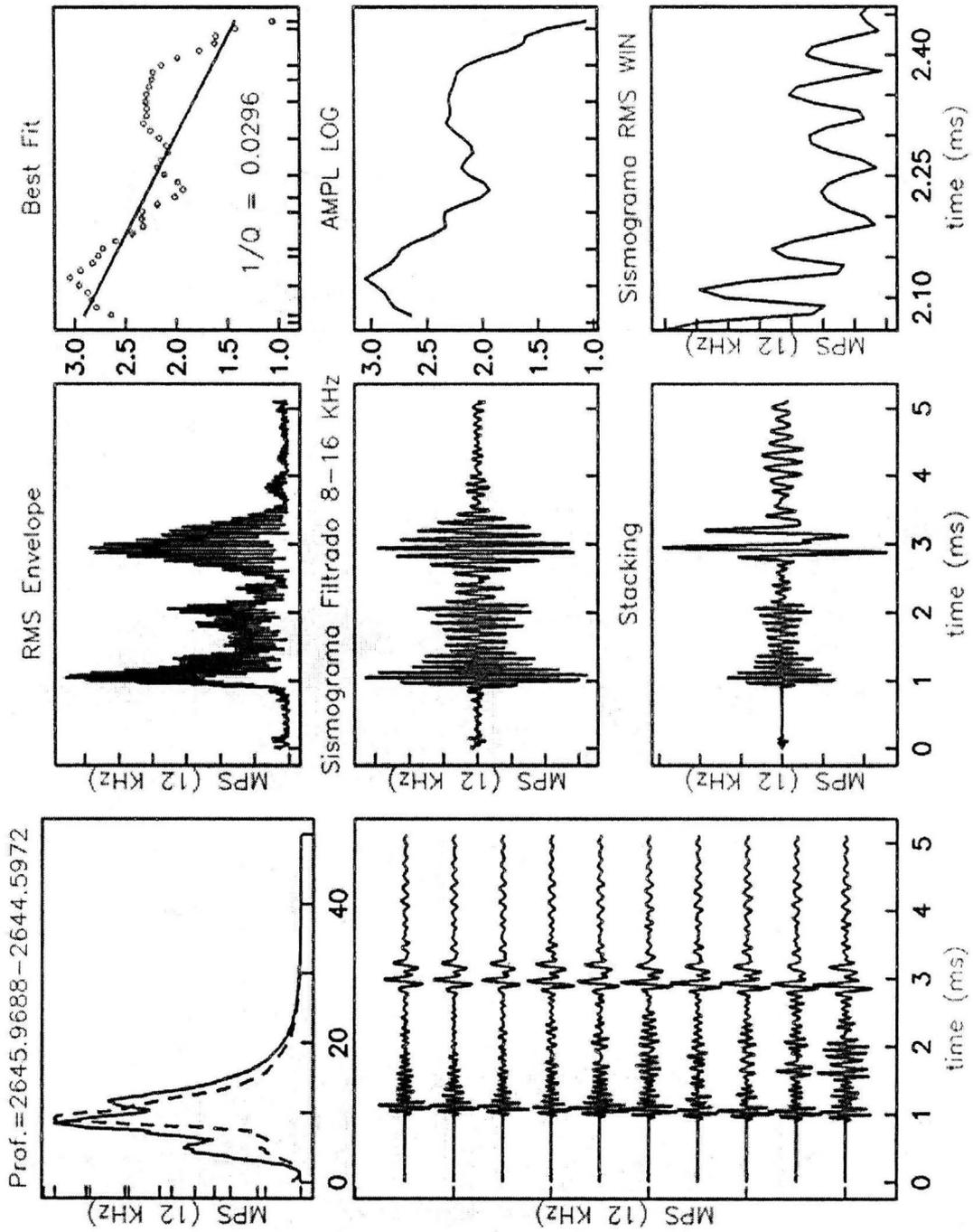


Fig. 5.3.2 (continuación)

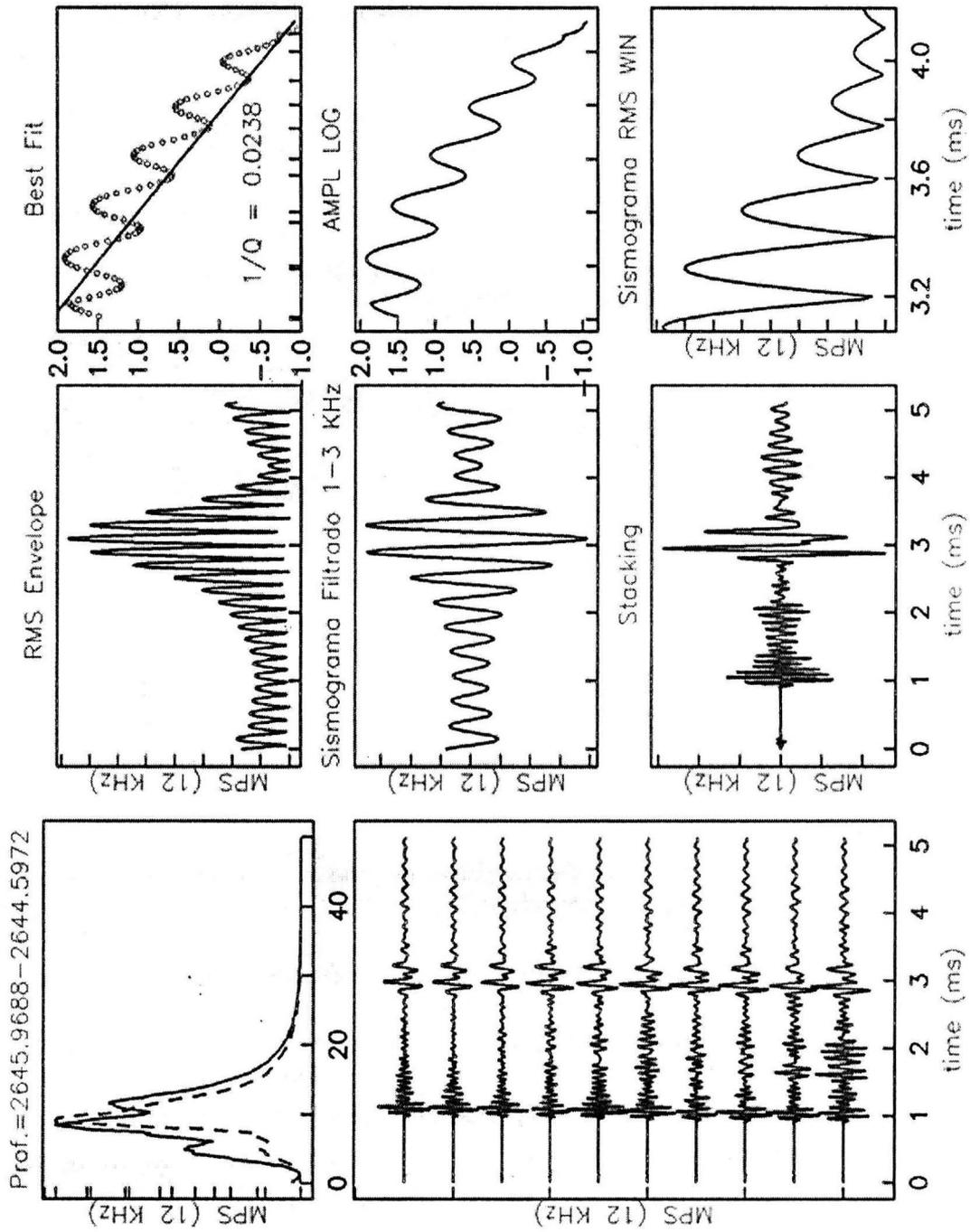


Fig. 5.3.2 (continuación)

observación. No obstante la complejidad en algunos casos, las envolventes RMS han sido fundamentales para la correcta definición de las ventanas de tiempo.

La Fig. 5.3.3 muestra la variación con la frecuencia de la atenuación de coda calculada sólo para el modo Pseudo-Rayleigh. Las frecuencias corresponden a la frecuencia central de una ventana de observación del filtro pasa banda. Aunque las ventanas se encuentran restringidas por el contenido de frecuencia central del modo de propagación de Pseudo-Rayleigh, se logra calcular la dependencia con la frecuencia para algunos valores determinados.

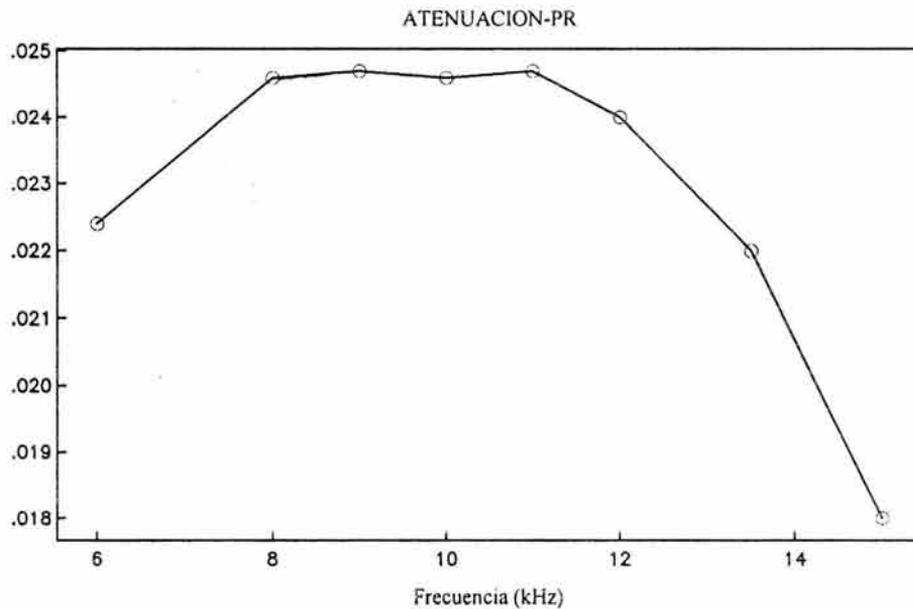


Fig. 5.3.3. Atenuación de coda para la fase Pseudo-Rayleigh contra frecuencia. Calculados para un solo receptor a una profundidad $d = 2659.6848$ m.

Finalmente la Fig. 5.3.4 muestra una sección de pozo en una formación rápida en arenas arcillosas. Aquí se despliegan los registros convencionales incluyendo una interpretación petrofísica. Las curvas de atenuación a la derecha son el resultado de la aplicación iterativa del método propuesto a cada profundidad. Se puede observar cómo la mejor resolución vertical, la muestra la atenuación de coda para Pseudo-Rayleigh Q_{cPR}^{-1} , esto se debe al mayor contenido de frecuencias y a la ventana de observación. La curva de atenuación de coda de ondas Stoneley Q_{cST}^{-1} exhibe una buena respuesta y es acorde a la atenuación detectada por las ondas Pseudo-Rayleigh, sólo que de manera más suave con respecto a la profundidad.

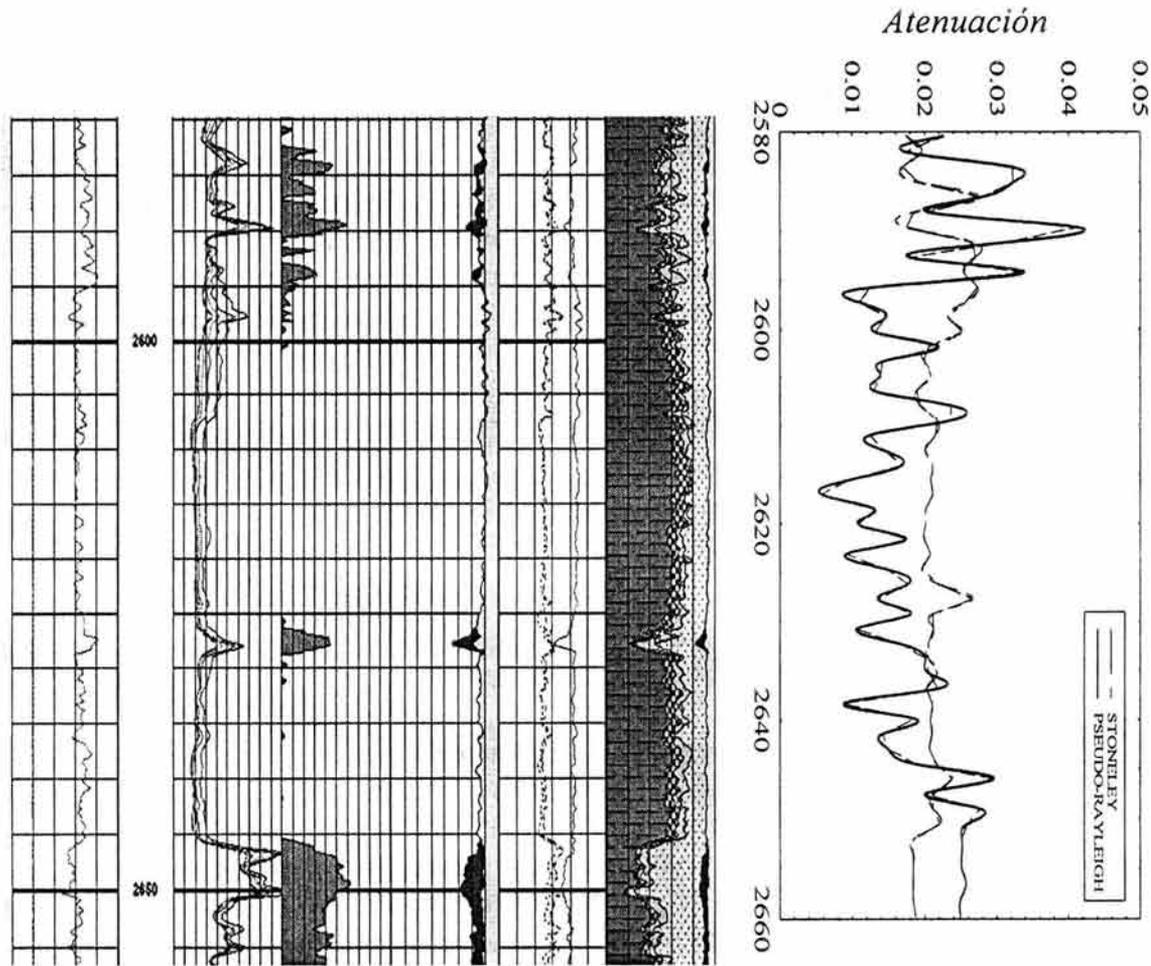


Fig. 5.3.4. Registros geofísicos de Rayos Gamma, Caliper, Electromagnéticos, Saturación de Hidrocarburos, Contenido de Gas, Saturación de Agua, Porosidad Neutrón y Porosidad Sónico. La interpretación petrofísica para el pozo y la respuesta de la atenuación calculada con la metodología propuesta para las fases de Pseudo-Rayleigh y de Stoneley en una formación rápida.

También se muestran líneas suavizadas para ambas respuestas. La correlación con los registros geofísicos y la interpretación petrofísica para ambas curvas de atenuación son magníficas. Por otro lado, será conveniente en el futuro establecer escalas independientes para cada valor medido de atenuación y poder incluir la atenuación de ondas compresionales.

En este capítulo se ha presentado un método para extraer la atenuación de la coda para las fases de propagación inhomogéneas en un pozo. El procedimiento aquí presentado busca establecer mediciones de la atenuación más realistas en comparación con los experimentos y observaciones de laboratorio. Con este método se evade el efecto de dispersión geométrica ya que se trata de información proveniente de un solo receptor y la repetición iterativa de un experimento de medición. Aunque los registros de pozo corresponden a diferencias de presión, las trazas contienen información de las velocidades de propagación

de la formación, lo que permite la directa adecuación de la teoría de modelos difusivos y de difracción simple.

Generalmente en sismología el método de normalización de coda ha sido usado para estimar Q_c^{-1} . Este método utiliza la información proveniente de la coda de onda-S directa en relación con la coda del sismograma como una función de la distancia fuente-receptor. Por tal motivo este método no puede ser utilizado para analizar registros sísmicos de onda completa, además de que la velocidad de la onda-S proveniente de los registros sísmicos se toma de un modo flexural en registros dipolares, los modos Pseudo-Rayleigh y de Stoneley no permiten relacionar sus envolventes.

Usualmente ha sido calculada la atenuación de las ondas de cuerpo ondas-P Q_p^{-1} de los micro-sismogramas de pozo, no obstante que su propagación esta fuertemente contenida en el fluido de perforación. Comúnmente se ha utilizado el método de las relaciones espectrales de dos receptores a diferentes distancias, el cual no ha mostrado ser confiable y arroja valores subestimados de Q_c^{-1} . La atenuación estimada de la relación espectral de distintos offsets está influenciada por la dispersión geométrica resultando una mediada que no es puramente proveniente de la inelasticidad del medio.

El Q del medio heterogéneo estará mejor representado en la coda de los micro-sismogramas, y aún más en la coda de las fases de tubo y ondas guiadas para una serie de micro-sismogramas apilados con buena correlación vertical para la misma distancia fuente receptor. La obtención del registro apilado de una docena de micro-sismogramas toma ventaja del método de adquisición de los datos y de la resolución en el intervalo de muestreo vertical (.1524m). La envolvente MS o RMS del micro-sismograma apilado es proporcional a la densidad de energía y la observación del decaimiento en una ventana de frecuencia y tiempo dados ofrecen una medida directa de la inelasticidad de la formación ya que se miden modos de propagación inhomogéneos. La atenuación Q_c^{-1} para Pseudo-Rayleigh o Stoneley arrojan resultados similares con respecto a la profundidad y su uso puede ser llevado a la obtención de cross-plots contra porosidades o permeabilidades u otros registros y reforzar la interpretación petrofísica.

De todo lo anterior, es preferible para el caso de los registros sísmicos adoptar un análisis de Q^{-1} proveniente de las definiciones de (i). Muchas ventajas pueden ser identificadas y en particular la evasión la dispersión geométrica espacial y la suposición de que la dirección máxima de atenuación espacial no coincide con la dirección de propagación. Estas hipótesis refuerzan el método propuesto como una mejor forma de responder a la anisotropía del material en la vecindad del pozo. La variación con la profundidad de los valores de atenuación obtenidos con este método corresponde muy bien con los registros geofísicos de pozo, lo cual indica su enorme potencial de aplicación como técnica de análisis de la propagación en pozo. El tratamiento intensivo de una mayor cantidad de datos y de diferentes litologías en las formaciones sigue siendo parte del desarrollo actual y establecer las ventajas y limitaciones de estas técnicas son temas de un futuro cercano.

VI. CONCLUSIONES

Se ha presentado un trabajo de tesis en el que se abordó el desarrollo, experimentación y aplicación de modelos matemáticos, métodos analíticos y métodos numéricos para caracterizar y estudiar la respuesta sísmica, los patrones de difracción y la respuesta espectral producidos por la propagación de ondas en medios heterogéneos o con fracturamiento. Se presentaron estudios fundamentales de la física de las ondas, análisis de dispersión y atenuación de ondas elásticas en medios complejos. Parte de las investigaciones trataron aspectos básicos de la respuesta sísmica de medios con fracturas, cavidades, inclusiones y fracturas con fluido. Un tema central de este trabajo fue el establecer relaciones entre las propiedades físicas del medio y los resultados de las simulaciones matemáticas mediante los análisis y el modelado sintético de datos de registros sísmicos de onda completa. Además de estos problemas, también se estudió la dispersión y atenuación de onda de las ondas sísmicas en la vecindad de pozos en formaciones fracturadas.

La difracción de ondas planas por inclusiones cilíndricas y esféricas sólidas o líquidas se simuló mediante técnicas analíticas basadas en los métodos de separación de variables. Para comprender sistemas complejos de cavidades, inclusiones y/o fracturas es necesario estudiar primero el comportamiento de un solo elemento, como se mostró en el capítulo II. Allí, se presentaron varias formulaciones para el cálculo de la propagación de ondas elásticas en medios 2 y 3D. Posteriormente se consideraron casos con un número arbitrario de heterogeneidades. Con el objeto de validar las soluciones obtenidas y extender los problemas a sistemas de fracturas e inclusiones que no pueden ser modelados analíticamente, se realizaron comparaciones con los métodos de Diferencias Finitas (FDM), de Elementos Espectrales (SEM), Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM) y Pseudo-Espectral (PS) con excelentes resultados. Los resultados numéricos que se obtuvieron en la etapa de modelado y de los estudios de difracción por fracturamiento y presencia de heterogeneidades se compararon con soluciones exactas. El acuerdo obtenido fué magnífico.

En el caso de formas arbitrarias y tratamiento de sistemas de grietas, el Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM) exhibió su flexibilidad y capacidad de cálculo. En particular el IBEM mostró su potencial en la solución de problemas de difracción múltiple y la correcta calibración de resultados. Los casos de inclusiones y/o heterogeneidades múltiples se resolvieron con el IBEM empleando las interacciones entre campos difractados y objetos difractores. La evidencia de la exactitud del IBEM es magnífica, pues en el capítulo III se logró reproducir la solución desarrollada por Achenbach *et al* (1983) para una grieta bidimensional ante incidencia de ondas P. Así mismo, se estudiaron los efectos de grietas alineadas y con disposición determinista ante el arribo de ondas planas y superficiales. El mismo problema se resolvió analíticamente para un arreglo regular de difractores cilíndricos en los que su distancia media, tamaño y consistencia siguieron criterios cuantitativos. Al estudiar objetos de forma arbitraria y problemas de difracción múltiple de ondas, ha sido posible identificar que la energía sísmica en ciertas frecuencias queda

atrapada y se generan resonancias. Estos fenómenos reiterados de interferencias se vieron reflejados claramente en los espectros de señales temporales y revelaron algunas características físicas de los difractors (forma, dimensión y material de relleno).

Como parte de la búsqueda de la contribución y originalidad de este trabajo de tesis se presentó un segundo grupo de resultados en el capítulo IV. Allí se describieron las formulaciones analíticas en 2 y 3D utilizadas para calcular las respuestas sintéticas de micro-sismogramas. Además se mostró un estudio integral de la dinámica de propagación de ondas en la vecindad de pozos a través del análisis e interpretación de los registros DSI. Las investigaciones se concentraron en la descripción, comprensión y predicción de los efectos que se producen por la presencia de fracturas y heterogeneidades en la propagación de ondas elásticas a condiciones reales de pozo. El análisis de los datos sísmicos de onda completa por medio del modelado matemático es muy escaso en la literatura. Los resultados reportados en este capítulo contribuyen a cerrar esta brecha en la comprensión del fenómeno y optimar el uso de los datos de campo para su mejor aprovechamiento. El tratamiento de las formas de onda completa en pozos es una actividad poco explotada mundialmente y su uso correcto es una creciente necesidad en exploración petrolera.

Por su parte, la metodología propuesta en el capítulo V para la extracción de atenuación con base en el análisis de coda de las formas de onda, parece ser una técnica original y promisoría, pues los resultados obtenidos correlacionan muy bien con los registros observados por otras herramientas. Los valores de atenuación de coda de ondas inhomogéneas parecen ser más realistas que los reportados con las técnicas de relaciones espectrales. Los micro-sismogramas apilados con buena correlación vertical mostraron que la metodología propuesta es robusta y que toma ventaja del método de adquisición de registros DSI. Las atenuaciones de coda Pseudo-Rayleigh y Stoneley ofrecen una medida directa de la inelasticidad de la formación y su uso puede ser extrapolado, junto con otros registros, a la estimación de porosidades y permeabilidades.

El impacto general de este trabajo de tesis es de primer orden ya que logra establecer una teoría fundamental para el uso de las simulaciones analíticas y numéricas en la respuesta sísmica de medios heterogéneos fracturados. Con esto se busca que el modelado matemático encuentre mayor confiabilidad y apoye la toma de decisiones en varios campos de la ingeniería y la geofísica. Los resultados obtenidos han mostrado el enorme potencial de las técnicas y formulaciones utilizadas en la solución de problemas de difracción en regímenes de propagación a frecuencias medianas y altas. El nivel de contribución y la novedad de las aportaciones buscan establecer una base de referencia para el futuro desarrollo y aplicación del modelado matemático en problemas reales de geofísica de exploración.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer el apoyo incondicional y enorme ayuda a mi mentor el Dr. Francisco J. Sánchez-Sesma, director del presente trabajo de tesis. A mi colega y amigo el Dr. James H. Spurlin, sin su guía y consejo este trabajo no hubiera sido posible. A mis sinodales y miembros del comité doctoral: Dr. Pedro Anguiano Rojas, Dr. Federico J. Sabina Císcar, Dr. Shri Krishna Singh Singh, Dr. Javier Pacheco Alvarado, Dr. Carlos Valdés González y la Dra. Elena Kazatchenko. A mí asesor interno en el IMP, el Dr. Gerardo F. Ronquillo Jarillo.

Extiendo un agradecimiento muy especial a mi amada esposa Alexandra Salinas Gueiros, ya que su apoyo, ánimo y paciencia fueron fundamentales durante el desarrollo del presente trabajo de tesis.

Esta tesis estuvo parcialmente auspiciada por El Instituto Mexicano del Petróleo (Programa de Becas, Competencia de Exploración y Programa de investigación en YNF) y por CONACYT bajo la licencia NC-204.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M. & Irene A. Stegun, 1964. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, Applied mathematics series 55.
- Achenbach, J. D., Gautsen A. K. & H. McMaken, 1978. Diffraction of point-source signals by a circular crack. *Bull. Seism. Soc. Am.* **68**, 889-906.
- Achenbach, J. D., Lin, W. & L. M. Keer, 1983. Surface waves due to scattering by a near-surface parallel crack, *IEEE trans. Sonics and ultrasonics.* **30**, 270-276.
- Aki, K., Fehler, M., Aamodt, R. L., Albright, J. N., Potter, R. M., Pearson, C. M. & J. W. Tester, 1982. Interpretation of seismic data of hydraulic fracturing experiments at the Fenton Hill, New Mexico, hot dry rock geothermal site. *J. Geophys. Res.*, **87**, 936-944.
- Aki, K. & P. G. Richards, 1980. *Quantitative Seismology*. W. H. Freeman and Co. New York.
- Avilés, J. & F. J. Sánchez-Sesma, 1983. Piles as barriers for elastic waves, *J. Geotech. Engineer.*, **109**, pp. 1133-1146.
- Baria, R., Green A. S. & R. Jones, 1987. Anomalous seismic events observed at the CSM HDR project, *Workshop on Forced Fluid Flow Through Strong Fractured Rock Masses*. Comm. of the Eur. Communities, Garchy.
- Benites, R., Aki, K. & K. Yomohida, 1992. Multiple scattering of SH waves in 2-D media with many cavities. *Pageoph.*, **133**, 353-390.
- Bouchon, M., 1985, A simple complete numerical solution to the problem of diffraction of SH waves by an irregular interface. *J. Acoust. Soc. Am.* **77**, 1-15.
- Bostrom, A. & A. S. Eriksson, 1993. Scattering by two penny-shaped cracks with spring boundary conditions. *Proc. R. Soc. Lond.* **443**, 183-201.
- Campillo, M. & M. Bouchon, 1985, Synthetic SH seismograms in a laterally varying medium by discrete wavenumber method. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **83**, 307-317.
- Carcione, J. M., 1995. Constitutive model and wave equation for linear, viscoelastic, anisotropy media. *Geophys.*, **60**, 537-548.

- Carcione, J. M., 1996 (a). Wave propagation in anisotropy, saturated porous media: plane wave theory and numerical simulation. *J. Acous. Soc. Am.*, **99**, 2655-2666.
- Carcione, J. M., 1996 (b). Plane-layered models for the analysis of wave propagation in reservoir environments. *Geophys. Prosp.*, **44**, 3-26.
- Carcione, J. M., 1996 (c). Viscoelastic effective rheologies for modeling wave propagation in porous media. *Geophys. Prosp.*, **44**, 75-98.
- Carcione, J. M., 1996 (d). Elastodynamics of a non-ideal interface: Application to crack and fracture scattering. *J. Geophys. Res.*, **101**, 28177-28188.
- Carcione, J. M., & G. Quiroga-Goode, 1996 (a). Some aspects of the physics and numerical modeling of Biot compressional waves. *J. Comput. Acous.*, **3**, 261-280.
- Carcione, J. M., & G. Quiroga-Goode, 1996 (b). Full frequency range transient solution for compressional waves in a fluid-saturated viscoelastic porous medium. *Geophys. Prosp.*, **44**, 99-129
- Carcione, J. M., & G. Seriani, 1998. Seismic and ultrasonic velocities in permafrost. *Geophys. Prosp.*, **46**, 441-454.
- Carcione, J. M., & Tinivella, U., 2000, Bottom simulating reflectors: Seismic velocities and AVO effects. *Geophys.*, **65**, 54-67
- Carrion, P., Comelli, P., & J. M., Carcione, 1995. Imaging of subsalt. *57th Ann. Internat. Mtg. Europ. Assoc. Expl. Geophys.*, Expanded Abstract.
- Choquette P. W., & L. C., Pray, 1970. Geologic nomenclature and classification of porosity in sedimentary carbonates. *AAPG Bull.*, **54**, 207-250.
- Chouet, B., 1986. Dynamics of a fluid-driven crack in three dimensions by finite difference method. *J. Geophys. Res.*, **91**, 13967-13992.
- Fehler, M., 1982. Interaction of seismic waves with a viscous liquid layer. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 55-72.
- Fehler, M. & K. Aki, 1978. Numerical study of diffraction of plane elastic waves by a finite crack with application to location of magma lens. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 573-598.
- Fehler, M., Roberts, P. & T. Fairbanks, 1988. A temporal change in coda wave attenuation observed during an eruption of Mount St. Helens. *J. Geophys. Res.*, **93**, 4367-4373.
- Graff, K. F., 1975, *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press.
- Iturrarán-Viveros, U., Sánchez-Sesma, F. J. & F. Janod, 2004. Scattering of elastic waves in heterogeneous media using the direct solution method. *Geophys. J. Int.*, **156**, 222.

- Kimball, C. V. & T. L. Marzetta., 1984. Semblance processing of borehole acoustic array data. *Geophys.*, **49**, 274-281.
- Knopoff, L., 1959 (a). Scattering of compression waves by spherical obstacles. *Geophys.*, **24**, 30-39.
- Knopoff, L., 1959 (b). Scattering of shear waves by spherical obstacles. *Geophys.*, **24**, 209-219.
- Komatitsch, D. & J. P. Vilotte, 1998. The Spectral Element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 368-392.
- Kupradze, V. D., 1963. *Dynamical problems in elasticity, Progress in Solid Mechanics*, I. N. Sneddon y R. Hill (Editores), North-Holland, Amsterdam. Vol. III.
- Lamb, H. 1904. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philos. Trans. R. Soc.*, London, Ser. A, **203**, 1-24
- Macdonald, H. M., 1902. *Electric Waves*, Cambridge University Press, Cambridge.
- McMechan, G. A., 1982. Resonant scattering by fluid-filled cavities, *Bull Seism. Soc. Am.*, **74**, 1143-1153.
- Mow, C. C. & Y. H. Pao, 1971. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. A reported prepared for United States Air Force Project Rand.
- Mow, C. C. & J. W. Workman, 1966. Dynamic stress around a fluid-filled cavity. *J. Appl. Mech.* Transactions of the ASME. 793-799.
- Palaz, I. & J. Marfurt, 1997. *Carbonate Seismology*, Society of Exploration Geophysicists.
- Peterson, B., V. K. Varadan, & V. V. Varadan, 1983. Scattering of elastic waves by a fluid inclusion, *J. Acoust. Soc. Am.*, **73**, 1487-1493.
- Pointer, T., Liu, E., Hudson, J. A., 1998. Numerical modeling of seismic waves scattered by hydrofractures: application of the indirect boundary element method, *Geophys J. Int.*, **135**, 289-303.
- Rautian, T. G. & V. I. Khalturin, 1978. The use of the coda for determination of the earthquake source spectrum, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 923-948.

- Sabina, F. J. & J. R. Willis, 1989. *A simple self-consistent analysis of dispersion and attenuation of elastic waves in a porous medium*. Elastic Wave Propagation., M. F. McCarthy, M. A. Hayes Eds., Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 327-332.
- Sánchez-Sesma F. J. & M. Campillo, 1991. Diffractions of P , SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 2234-2253.
- Sánchez-Sesma F. J. & F. Luzón, 1995. Seismic response of three dimensional alluvial valleys for incident P , S and Rayleigh waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 269-284.
- Sánchez-Sesma F. J. & U. Iturrarán-Viveros, 2001. Scattering and diffraction of SH waves by a finite crack: an analytical solution. *Geophys. J. Int.*, **145**, 749-758.
- Sato, H. & M. Fehler, 1998. *Seismic Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth*, AIP series in Modern Acoustics and Signal Processing, Springer.
- Sommerfeld, A., 1949. *Optics*, Vol. IV, *Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, New York.
- Stiteler, T. & C. Chacartegui, 1997. Platform seismic sequence attributes, Maracaibo basin, Venezuela. In Palaz & Marfurt, **24**, 425.
- Stewart, R. R., Turpening, R. M. & M. N. Toksoz, 1981. Study of a subsurface fracture zone by vertical seismic profile, *Geophys. Res. Lett.*, **8**, 1132-1135.
- Tadeu, A. J. B., Godinho, L. M. C. & J. M. P. António, 2001. Benchmark solutions for 3-D scattering from cylindrical inclusions, *J. Comp. Acoust.*, **9**, 1311-1327.
- Tsujiura, M., 1978. Spectral analysis of the coda waves from local earthquakes, *Bull. Earthq. Inst. Univ. Tokyo*, **53**, 1-48.
- Wang, Z. & W. K. Hirsche, 1991. Seismic velocities in carbonate rocks. *J. Canadian Petrol. Tech*, **30**, 112-122.

ANEXO A

Scattering and diffraction of elastic P- and S-waves by a spherical obstacle: A review of the classical solution

R. Ávila-Carrera¹ and F. J. Sánchez-Sesma²

1. Instituto Mexicano del Petróleo; Eje Central Lázaro Cárdenas 152; Gustavo A. Madero 07730; México D.F., Mexico. E-mail: rcarrer@imp.mx

2. Instituto de Ingeniería, UNAM; Circuito Escolar s/n; Coyoacán 04510; México D.F., Mexico. E-mail: sesma@servidor.unam.mx

Accepted... Received...; in original form...

Abbreviated title: Scattering of elastic waves by a spherical obstacle.

Corresponding Autor: Francisco J. Sánchez-Sesma; Instituto de Ingeniería, UNAM; Circuito Escolar s/n; Coyoacán 04510; México D.F., Mexico, Tel.: 01(55)5622-3422, Fax. 01(55)5616-28-94, e-mail: sesma@servidor.unam.mx

SUMMARY

An analysis of the scattering and diffraction of longitudinal and transverse elastic waves by a single spherical obstacle using a classical analytic solution is reviewed. Our aim is to re-derive the solution for this canonical problem and to gather a complete catalog for the coefficients involved in the series' expansions of scattered waves for the incidences of plane P- or S-waves, respectively. Our motivation to regard an old, classical problem is based upon our perception that this solution for the seismic response of a single spherical object, computed by analytical means, is not widely known. The most representative works in the field were developed during the second half of the last century. Important books cover the subject but left aside the cases of incoming S-waves. In several recent publications the coefficients for incident P- and S-waves have been presented separately and it is rare to find them in a single manuscript. Some of the classical papers are frequently plagued by misprints and none offers an analysis of the transient response. In this work a classical solution is constructed as the superposition of both incident and diffracted fields. The incident field is assumed to be plane P- or S-waves. It is given as an expansion of spherical wave functions. The corresponding expansion coefficients are tested directly by comparisons between the series' summation and the explicit exact expressions. The diffracted field by the obstacle is calculated from the expansions of spherical functions with the appropriate boundary conditions at the scatterer-matrix interface. The spherical obstacle is either a cavity; an elastic inclusion or a fluid-filled zone. A complete set of wave functions is given in terms of Bessel and Hankel radial functions. Legendre and trigonometric functions are used for the angular (latitude and longitude) coordinates. In order to provide useful information to calibrate and approximate the seismic response for real objects, results in time and frequency domains are depicted. Diffracted displacement amplitudes *versus* normalized frequency and radiation patterns for various scatterer-matrix properties, in low, intermediate and high

frequencies are reported. To study the propagation features synthetic seismograms for some relevant cases are computed as well.

Key words: Scattering, diffraction, spherical obstacle, elastic waves, Bessel and Hankel functions, seismic response.

1. Introduction

The scattering of a plane wave by a single spherical obstacle is the archetype of many scattering problems in several branches of physics (*i.e.*, acoustics, optics, hydrodynamics) and geophysics (*i.e.*, vulcanology, seismology). For example, the goal of exploration geophysics is to detect objects, and spherical objects provide a good approximation for the real ones. At least, the analytic formulation of a single sphere could be used to construct more complicated solutions. The subject is of interest in the petroleum industry. In many oil reservoirs, carbonate rocks conform a very heterogeneous medium and this may be the reason for low recovery rates. In order to obtain reliable estimates of both permeability and fluid saturation during reservoir characterisation, reasonable knowledge of the inclusions' physical properties is mandatory. Assuming that the fluid is trapped within vugs (cavities filled by hydrocarbons), it is reasonable to accept that seismic energy, for certain frequencies, might get trapped through fluid resonance. Certainly, at first glance, it appears that such resonances are difficult to observe because of the huge differences of impedance (the product of mass density and wave speed) between the rock and the fluid.

Most of the exact solutions for scattering problems can be very helpful because of their simplicity and usefulness. Despite the restriction that just few types of obstacles are available to be expressed in exact analytical terms, the insight gained by analytical solutions is significant. Such is the case of the sphere, the so called perfect shape by Aristotelians. The subject is not new and considerable amount of work has been reported in the literature (*i.e.*, Rayleigh, 1872; Wolf, 1945; Morse & Feshbach, 1953; Bouwkamp, 1954). In elasticity, the scattering problem for the sphere has been studied by Takeuchi (1950), Ying & Truell (1956), Knopoff (1959a) and Pao & Mow (1963) for P-wave incidence. The books by Mow & Pao (1971), Pao & Mow (1973) and Eringen & Suhubi (1975) cover the subject reasonably well but they leave aside the case of incoming S-waves. The classic paper by Einspruch, Witterholt & Truell (1960) presents, with some misprints, the scattering of a plane transverse wave by a rigid, elastic, empty or fluid-filled sphere. The same problem was rigorously examined by Knopoff (1959b) and by Mow (1965) for a perfectly rigid sphere. Several studies of geophysical interest have been carried out by Aki (1969, 1973, 1980) in his pioneering analysis of coda-waves (literally, the tail of seismograms). Aki developed a theory of attenuation of seismic waves in the lithosphere that included multiple scattering. Chapman & Phinney (1970) considered the diffraction of P-waves by the core and inhomogeneous mantle of the Earth. Cormier & Richards (1977) used full wave theory to study the inner core boundary. The amplitudes of backscattered P-waves returned by a spherical inclusion in elastic solids have been studied by Gaunard & Uberall (1979a, 1979b, 1980) in terms of the so-called Resonance Scattering Theory (RST) and by McMechan (1982) in view of some applications to the core of Mars and a magma chamber.

A very elegant formulation that uses the equivalent source method and Born approximation (low contrast between materials properties) was presented by Wu & Aki (1985) for the scattering characteristics of elastic waves by an elastic heterogeneity. Diffraction of elastic waves by penny-shaped cracks has been dealt using a variety of analytical techniques (e. g. Bostrom & Eriksson, 1993). The works of Morozhnik (1983a; 1983b) have been focused in the vector scattering problem of low contrast spherical inclusions. An analysis of the asymptotic solutions and theoretical and numerical results has been reported by Korneev & Johnson (1993a, 1993b, 1996). Most recent works show a wide and growing number of applications. For example, echo resonance in magma cavities (Montalto *et al.*, 1995), the analysis of elastic wave propagation (Gritto *et al.*, 1995, 1999), acoustic wave scattering by cylindrical and spherical shells (Veksler *et al.*, 1999a, 1999b) and Veksler *et al.* (2000). These works show the growing interest on wave scattering by spheres and cylinders. However, most studies are done in frequency domain and little is presented of time domain response. The lack of a complete and reviewed coefficient catalog for the series' expansions in the vector case was a powerful motivation to gather the solutions for the scattering and diffraction of P- and S-waves by a spherical obstacle.

In this work, we study the scattering of elastic P- and S-waves by a single spherical obstacle in frequency and time domains. We treat low Rayleigh, $(\eta\pi) \ll 1$, intermediate Mie, $(\eta\pi) = 1$ and high Ray, $(\eta\pi) \gg 1$, frequencies, where $\eta = ka/\pi =$ dimensionless frequency, $a =$ radius of the sphere, and $k =$ shear wavenumber. The analytical solution for this canonical 3D problem is constructed as the superposition of both incident and diffracted fields. The incident field for P- or S-waves is given as an expansion of spherical wave functions. The spherical expansion coefficients for the P-wave incident field are easily calculated from the scalar displacement potential.

The coefficients for the S-wave incidence are quite more complicated than the P-wave case, since they must be extracted from a vector potential. We adapted instead the coefficients reported by Knopoff (1959b) and verified them with the exact plane wave solution. The diffracted field by the obstacle is then obtained in terms of expansions of spherical functions for all participant waves. We provide a complete set of radial functions for the incident and diffracted fields, in terms of spherical Bessel and Hankel functions, respectively. Legendre and trigonometric functions are used to include the corresponding angular contributions to these fields. Boundary conditions at the scatterer-matrix interface are defined by continuity of displacements and tractions when the obstacle is an elastic inclusion; for a cavity, null tractions at the surface must be enforced; and, finally, for the fluid-filled sphere the conditions are null tangential tractions and continuity of normal traction and displacement. The resulting linear systems are then solved.

In order to show the validity of the formulation presented here some previous results reported in the literature are reproduced. Spectral amplitudes *versus* normalized frequency are obtained at some locations for both P- and S-waves incidences. Radiation patterns varying the scatterer-matrix properties in a wide range of frequencies at several distances are given. To illustrate propagation features and study the seismic response of different kinds of spherical obstacles synthetic seismograms for relevant cases are depicted.

2. Formulation of the Scattering Problem

2.1 P-wave incidence.

Let us consider the problem of a spherical obstacle (elastic, cavity or fluid-filled) contained in a three-dimensional, homogeneous, isotropic and infinite elastic space, subjected to a plane P-wave incident field, as shown in Fig. 1. Let us evaluate the total displacement field at a given point of the elastic space (region E). Because of the superposition principle, the total displacement field can be expressed as

$$u_i^{(t)} = u_i^{(0)} + u_i^{(d)}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

where $u_i^{(t)}$ is the total displacement field, $u_i^{(0)}$ is the incident field, and $u_i^{(d)}$ is the diffracted field by the inclusion (region R) due to the incident field. From the displacement potential, ϕ , it is possible to obtain the incident field for the P-wave

$$u_i^{(0)} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}; \quad \phi = \phi_0 e^{-iqz} e^{i\omega t}, \quad (2)$$

with

$$\phi_0 = \frac{i}{q}; \quad q = \frac{\omega}{\alpha} = \text{P-wavenumber}, \quad \omega = \text{angular frequency}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\lambda_E + 2\mu_E}{\rho_E}} = \text{P-wave velocity},$$

$\lambda_E, \mu_E =$ Lamé constants, $\rho_E =$ mass density of the elastic region E , $i =$ imaginary unit $= \sqrt{-1}$, $t =$ time, and $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$. In the following, the time-dependent term $e^{i\omega t}$ will be omitted. It is also possible to write in vector notation that $\mathbf{u}^{(0)} = \nabla \phi = \text{grad } \phi$. In fact, our interest is to know the incident field calculated from the gradient of ϕ in spherical coordinates. This is obtained as follows

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} e_\phi, \quad (3)$$

where e_r, e_θ and e_ϕ are unit vectors in the spherical system r, θ and ϕ , respectively.

The displacement potential ϕ of (2) can be expanded in terms of Bessel and Legendre spherical functions as (Abramowitz & Stegun, 1964):

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n j_n(qr) P_n^0(\cos \theta), \quad (4)$$

where $j_n(qr) =$ spherical Bessel function of first kind and order n , and $P_n^0(\cos \theta) =$ Legendre function of order n and degree $m = 0$. For the computation of the P-wave incident displacement field, it is necessary to calculate the first derivatives with respect to both r and θ . For

convenience, we will adopt the notation proposed by Knopoff (1959a) and Takeuchi & Saito (1972). Then the incident displacements are

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_1^{p(0)}(r) P_n^0(\cos\theta), \quad \text{and} \\ u_{\theta}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_3^{p(0)}(r) \frac{dP_n^0(\cos\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

for the radial and tangential directions, respectively. Note that $u_{\phi}^{(0)} = 0$ for construction. $y_1^{p(0)}(r)$ and $y_3^{p(0)}(r)$ are the longitudinal radial functions defined in Appendix A.

We are also interested in the computation of the tractions for the radial and tangential directions of spherical surface. Thus, applying Hooke's law (Mow & Pao, 1971, Mow & Workman, 1966), we have

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_2^{p(0)}(r) P_n^0(\cos\theta) \quad \text{and} \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n y_4^{p(0)}(r) \frac{dP_n^0(\cos\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (6)$$

where stresses $\sigma_{rr}^{(0)}$ and $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ are the radial and tangential components of the traction on the surface with radius r (and obviously, with normal e_r). The radial spherical functions $y_2^{p(0)}(r)$ and $y_4^{p(0)}(r)$ are obtained from the corresponding derivatives of displacements (see Appendix A).

Up to here we have only expanded the incident displacement field in spherical functions using spherical coordinates. To evaluate the diffracted and refracted fields (the refracted field is indeed the total field within the sphere R), we must expand the displacements and the stresses for each field following the same algebraic formulation used for the incident field. The unknown coefficients will be appearing and they will be determined from the corresponding boundary conditions. In Appendix A, we illustrate the structure for the diffracted and total fields, showing all the participant waves for both displacements and stresses.

The continuity conditions at $r = a$ for an elastic obstacle are

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(d)} &= \sigma_{rr}^{(r)} \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} + \sigma_{r\theta}^{(d)} &= \sigma_{r\theta}^{(r)} \\ u_r^{(0)} + u_r^{(d)} &= u_r^{(r)} \\ u_{\theta}^{(0)} + u_{\theta}^{(d)} &= u_{\theta}^{(r)} \end{aligned} \quad (7)$$

where the superscripts (d) and (r) stand for diffracted and refracted fields, respectively. These conditions have to be enforced for each term, once the solutions have been developed in terms of

expansions in spherical coordinates for the diffracted and refracted fields as shown in (5) and (6). Using the expressions in (7) and evaluating in $r = a$, the system of equations to solve, for each order n is

$$\begin{bmatrix} y_2^{p(E)}(a) & y_2^{s(E)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_2^{p(R)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_2^{s(R)}(a) \\ y_4^{p(E)}(a) & y_4^{s(E)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_4^{p(R)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_4^{s(R)}(a) \\ y_1^{p(E)}(a) & y_1^{s(E)}(a) & -y_1^{p(R)}(a) & -y_1^{s(R)}(a) \\ y_3^{p(E)}(a) & y_3^{s(E)}(a) & -y_3^{p(R)}(a) & -y_3^{s(R)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2n+1)(-i)^n y_2^{p(0)}(a) \\ -(2n+1)(-i)^n y_4^{p(0)}(a) \\ -(2n+1)(-i)^n y_1^{p(0)}(a) \\ -(2n+1)(-i)^n y_3^{p(0)}(a) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

where A_n, D_n, E_n, F_n are the unknown coefficients. $y_1^{p(*)}(a), y_2^{p(*)}(a), y_3^{p(*)}(a), y_4^{p(*)}(a)$ are the radial functions at $r = a$ with the same form as that for the incidence of P-waves. These functions have been defined in Appendix A. The superscripts R or E stand for the region where the correspondent function is defined (Fig. 1). For region R , spherical Bessel functions are used, while for region E , spherical Hankel functions need to be applied. On the other hand, $y_1^{s(*)}(a), y_2^{s(*)}(a), y_3^{s(*)}(a), y_4^{s(*)}(a)$ are the radial functions at $r = a$ associated to the converted S-wave and they are also defined in Appendix A. In the same way as for the P-wave radial functions, these functions have been defined for region R , using Bessel functions while for region E , they are given in terms of Hankel functions. In (8), μ_R and μ_E are the elastic shear moduli for the R and E regions, respectively. Since the boundary conditions for a cavity ($\rho_R = 0$) are null tractions acting at the surface of the sphere, the expressions for stress components in (7) must be set to zero. This is achieved by omitting coefficients E_n and F_n in (8). Thus, the linear system (8) is reduced to two equations.

For the case in which the spherical cavity is filled with fluid ($\mu_R = 0$), it will be necessary to observe the boundary conditions for pressure and stresses. The equations that govern the fluid are (Mow & Workman, 1966)

$$\begin{aligned} p &= \mu_E \sum_{n=0}^{\infty} I_n j_n \left(\frac{\omega r}{c} \right) P_n^0(\cos \theta) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu_E \sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{\omega}{c} j_n' \left(\frac{\omega r}{c} \right) P_n^0(\cos \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

where p is the fluid pressure and $p = -\sigma_{rr}^{(i)}$, I_n is the unknown coefficient that will be determined when the boundary conditions are satisfied and $c =$ sound velocity of the filler fluid. Then, the boundary conditions for the fluid obstacle at $r = a$ are

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(d)} + p &= -\sigma_{rr}^{(0)}, \\ \rho_r \left(\omega^2 u_r^{(d)} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} &= -\rho_r \left(\omega^2 u_r^{(0)} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(d)} &= -\sigma_{r\theta}^{(0)}, \end{aligned} \quad (10)$$

with $\sigma_{r\theta}^{(i)} = 0$. In this case of a fluid inclusion, it is necessary to consider the fluid equation in (8). The system will have order three and will be solved exactly.

2.2 S-wave incidence.

Let us consider the case in which an elastic S-wave arrives at a spherically symmetric obstacle as shown in Fig. 1. The sphere can be of three different types: 1) an elastic material with properties different from the surrounding medium (matrix), 2) a cavity, with zero values for the elastic constants inside the sphere, and 3) a fluid-filled sphere. The matrix is considered as an elastic, homogeneous and isotropic three dimensional media. In similar way as it was defined for the P-wave incidence, the total displacement field for an incoming S-wave is given by the superposition principle represented in (1). To construct the S-wave incidence in terms of displacement potentials it will be necessary to calculate

$$\mathbf{u}^{(0)} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (11)$$

where ϕ is the scalar potential and $\boldsymbol{\psi}$ is the vector potential. As we are dealing with a plane S-wave propagating in the positive direction of z-axis and polarized in the positive direction of x-axis, we have

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 e^{-ikz}; \quad \nabla\phi = 0; \quad \phi_0 = 0, \\ \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\psi}_y = \psi_0 e^{-ikz}; \quad \psi_x = \psi_y = 0; \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

where $k = \omega/\beta$ is the shear wavenumber, ω is the angular frequency, $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ is the S-wave velocity, and $i = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit.

Then, calculating the curl of the vector potential $\boldsymbol{\psi}$, we have that the displacement for the x-direction is

$$u_x^{(0)} = \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad (13)$$

with $u_y^{(0)} = u_z^{(0)} = 0$. Doing the derivation and considering the incident wave with unitary amplitude, the displacement field for the three directions of movement, written in spherical coordinates, are

$$u_r^{(0)} = u_x^{(0)} \sin\theta \cos\phi; \quad u_\theta^{(0)} = u_x^{(0)} \cos\theta \cos\phi; \quad u_\phi^{(0)} = -u_x^{(0)} \sin\phi. \quad (14)$$

Now, it is convenient to write the expressions in (14) as spherical expansions in terms of Bessel and Legendre functions. Einspruch, Witterholt & Truell (1960) displayed most of the basic vector

solutions for the incident S-wave displacement field to construct a general expansion in spherical coordinates. However, the definitions of the vector spherical harmonics at the first part of their study have misprints and some inconsistencies in their trigonometric functions, specially into the so-called Hansen vectors **L**, **M**, and **N**. On the other hand, the basic vector solutions for the spherical coordinate system are given in Morse & Feshbach (1953) and Knopoff (1959b) and they are right. Therefore, the incident field of S-waves can be written as a sum of spherical wave functions, as follows

$$\begin{aligned}
u_r^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n y_1^{s(0)}(r) P_n^1(\cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \\
u_\theta^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n y_3^{s(0)}(r) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_1^{t(0)}(r) \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \\
u_\phi^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-y_3^{s(0)}(r)) \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\sin\phi}{\cos\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (-y_1^{t(0)}(r)) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\sin\phi}{\cos\phi},
\end{aligned} \tag{15}$$

with

$$B_n = \left((-i)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{1}{k} \right) ; \quad C_n = iB_n, \tag{16}$$

where $u_r^{(0)}$, $u_\theta^{(0)}$ and $u_\phi^{(0)}$ are the incident fields for the radial, tangential and azimuthal directions, respectively. The radial functions $y_1^{s(0)}(r)$, $y_3^{s(0)}(r)$ and $y_1^{t(0)}(r)$ are defined in Appendix A. $P_n^1(\cos\theta)$ is the Legendre function of order n and degree $m = 1$. Since the incident fields are plane waves, only one azimuthal term appears (for P-waves just $m = 0$ was required, while for SV- or SH-waves, $m = 1$ is enough). Note that for the incidence of SV- or SH-waves, the azimuthal terms are given by the upper and lower trigonometric functions, respectively. The coefficients B_n and C_n are different from those of the P-wave incidence. On the other hand, we have tested the coefficients in (16), verifying them with the plane wave exact solution given by (14) and (13).

To write the part of the incident stress field that contributes to the tractions in the r , θ , and ϕ directions, we adopt the same formulation as that developed for the displacements. Using the B_n and C_n coefficients defined above and applying Hooke's law, we are able to write the incident stress field as a sum of spherical wave functions as

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n y_2^{s(0)}(r) P_n^1(\cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \\
\sigma_{r\theta}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n y_4^{s(0)}(r) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_2^{t(0)}(r) \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\phi},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\sigma_{r\phi}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(-y_4^{s(0)}(r) \right) \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\sin\phi}{\cos\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(-y_2^{i(0)}(r) \right) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^1(\cos\theta) \frac{\sin\phi}{\cos\phi},$$

where $\sigma_{rr}^{(0)}$, $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ and $\sigma_{r\phi}^{(0)}$ are the radial, incident-field stress tensor components (tractions) for the directions r , θ , and ϕ , respectively. Again, the radial functions $y_2^{s(0)}(r)$, $y_4^{s(0)}(r)$ and $y_2^{i(0)}(r)$ are defined in Appendix A. $P_n^1(\cos\theta)$ is the Legendre function of order n and degree $m = 1$. The incidence of SV- or SH-waves is associated to the azimuthal terms (upper and lower, odd or even, trigonometric functions, respectively). There are other components of the stress tensor in spherical coordinates associated to the displacements in (15), but for convenience we omit further mention in this work (the reader is referred to Takeuchi & Saito, 1972, for details). In order to solve a linear system that will be established from boundary conditions, we only require three components of the stress tensor.

To evaluate the corresponding diffracted and total fields, we must expand in spherical wave functions the displacements and stresses for each of these fields. Therefore the incidence is given by a plane S-wave polarized in the positive directions of x - and y - axes as depicted in Fig. 1, the produced diffracted fields are of three types, one from the diffraction of P-waves and two from diffracted S-waves. We show in Appendix A the structure of the diffracted and total fields with all participant waves for both displacements and stresses.

Once the forms for refracted and diffracted fields have been established, the unknown coefficients will appear and they need to be determined from the corresponding boundary conditions. The continuity conditions for the stresses and displacements at the elastic sphere interface ($r = a$) for incident S-waves are given by

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(d)} &= \sigma_{rr}^{(r)} \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} + \sigma_{r\theta}^{(d)} &= \sigma_{r\theta}^{(r)} \\ \sigma_{r\phi}^{(0)} + \sigma_{r\phi}^{(d)} &= \sigma_{r\phi}^{(r)} \\ u_r^{(0)} + u_r^{(d)} &= u_r^{(r)}, \\ u_\theta^{(0)} + u_\theta^{(d)} &= u_\theta^{(r)} \\ u_\phi^{(0)} + u_\phi^{(d)} &= u_\phi^{(r)} \end{aligned} \quad (18)$$

where the superscripts (d) and (r) stand for diffracted and refracted fields, respectively.

For instance, if we take a look at the continuity conditions for P-wave incidence, we can find that the components in the ϕ direction are not present as in this case. Here, we are taking into account the additional terms for displacements and tractions in the latitudinal and azimuthal components. Once the solutions have been developed in terms of the expansions in spherical coordinates for the incident, diffracted and refracted fields, and including the continuity conditions in (18), the system of equations can be constructed. One can recognize that the latitudinal and azimuthal operators will force the coupling terms for the calculation of the unknown coefficients following (18). If we develop and evaluate the solution at $r = a$, the systems of equations to solve are

$$\begin{bmatrix}
y_2^{p(E)}(a) & y_2^{s(E)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_2^{p(R)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_2^{s(R)}(a) \\
y_4^{p(E)}(a) & y_4^{s(E)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_4^{p(R)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_4^{s(R)}(a) \\
y_1^{p(E)}(a) & y_1^{s(E)}(a) & -y_1^{p(R)}(a) & -y_1^{s(R)}(a) \\
y_3^{p(E)}(a) & y_3^{s(E)}(a) & -y_3^{p(R)}(a) & -y_3^{s(R)}(a)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_n \\
D_n \\
E_n \\
F_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-B_n y_2^{s(0)}(a) \\
-B_n y_4^{s(0)}(a) \\
-B_n y_1^{s(0)}(a) \\
-B_n y_3^{s(0)}(a)
\end{bmatrix},
\tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}
y_2^{i(E)}(a) & \frac{-\mu_R}{\mu_E} y_2^{i(R)}(a) \\
y_1^{i(E)}(a) & -y_1^{i(R)}(a)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_n \\
H_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-C_n y_2^{i(0)}(a) \\
-C_n y_1^{i(0)}(a)
\end{bmatrix},$$

where A_n , D_n , E_n , F_n , G_n , and H_n are the unknown coefficients, B_n and C_n are the complex coefficients defined in (16), the radial functions $y_1^{s(*)}(a)$, $y_2^{s(*)}(a)$, $y_3^{s(*)}(a)$, $y_4^{s(*)}(a)$ are due to the contribution of all (incident, diffracted and refracted) S-waves, the radial functions $y_1^{i(*)}(a)$, $y_2^{i(*)}(a)$ are due to the contribution of *toroidal* modes. All these groups of radial functions are defined in the Appendix A.

In a similar manner as that for P-wave incidence, the superscripts R or E stand for the region in which the corresponding function is defined (Fig. 1). For region R spherical Bessel functions of first kind and order n are used. For region E , spherical Hankel functions must be applied. It is remarkable that only when we deal with the incident field, the radial functions for the region E are Bessel functions. Now the radial functions $y_1^{p(*)}(a)$, $y_2^{p(*)}(a)$, $y_3^{p(*)}(a)$, and $y_4^{p(*)}(a)$ are aimed to represent converted P-waves.

In (19) μ_E and μ_R are shear moduli for E and R regions, respectively. To obtain the spherical cavity case, the boundary conditions are null tractions acting at the surface of the sphere with $\rho_R = 0$. The expressions for stress components in (18) must be set to zero. Thus, the linear system is reduced to order two, with a coupling equation that contains the *toroidal* contribution. This is achieved by omitting coefficients E_n , F_n , and H_n in (19). For the case in which the spherical cavity is filled with fluid ($\mu_R = 0$), as for the P-wave incidence case, it is necessary to observe the boundary conditions for pressure and stresses. The appropriate equations that govern the fluid are

$$p = \mu_E \sum_{n=1}^{\infty} I_n j_n \left(\frac{\omega r}{c} \right) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi,
\tag{20}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_E \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{\omega}{c} j'_n \left(\frac{\omega r}{c} \right) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi,$$

where p is the fluid pressure and $p = -\sigma_{rr}^{(i)}$, I_n is the unknown coefficient that will be determined from boundary conditions, and $c =$ sound velocity of the filler fluid. Note that the azimuthal terms and the Legendre functions are defined with degree $m = 1$ again, following the azimuthal decomposition for the S-waves. Then, the boundary conditions for the fluid-solid interface at $r = a$ are

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(d)} + p &= -\sigma_{rr}^{(0)}, \\
\rho_r (\omega^2 u_r^{(d)}) - \frac{\partial p}{\partial r} &= -\rho_r (\omega^2 u_r^{(0)}), \\
\sigma_{r\theta}^{(d)} &= -\sigma_{r\theta}^{(0)},
\end{aligned} \tag{21}$$

with $\sigma_{r\theta}^{(l)} = 0$. As we are treating with a fluid inclusion, it is necessary to consider the fluid conditions (20) in the linear system (19). As the equations for the region R in (19) are governed by the shear moduli ratio, these terms must be set to zero. This is equivalent to omit coefficients D_n , E_n , and F_n . The systems will have again order three for each n .

3. Numerical Results

In order to illustrate some relevant features of the analytic formulations reviewed in previous sections, several computations were performed and the results are presented here. Our aim is to provide useful information to calibrate and approximate the seismic response for real objects. The results for a single sphere allow us establishing the basic solutions to construct more complicated formulations, and provide good approximations to observe the scattering behavior for real diffractors in several geophysical problems.

Fig. 2 illustrates the spherical components of a plane S-wave $\mathbf{u} = e_x \exp(-ikz)$ computed in two ways, one using the appropriate spherical expansions (15) and (17), with n going from 0 to 30, and the exact solution given by (14) from direct calculation of displacements and stresses in spherical coordinates. The calculation position was $x = y = z = 1$. The whole components of the stress tensor and displacement field are compared with the exact solution. Results are displayed against kz and they show that the spherical wave expansion is correctly performed up to arguments kr of about 30. A reasonable rule of thumb to obtain reliable representations is then to use for computation of diffracted waves a maximum order n with the same numerical value of ka . Similar results can be obtained for an incoming P-wave using (5) and (6).

Different kinds of materials inside the spherical obstacle, including a cavity, have also been analyzed. Results are somewhat similar to calculations reported in the literature (*i. e.* Gaunard & Uberall, 1979a; 1979b; McMechan, 1980). We believe that it is crucial to understand, with detail, how the propagation and scattering patterns change with the variation of the involved parameters. For example, Figs. 3a and 3b show the scattering patterns for the diffracted field in the radial direction u_r . Calculations for $r = 2a$, $5a$ and $10a$, with several values of dimensionless frequency $ka = 0.25$, 0.5 , 1.0 and 5.0 are depicted in a figure array. The coefficients for the incidence of P-waves and the corresponding partially diffracted P- and S-waves (P-P and P-S, respectively) have been calculated separately. The results correspond to a water-filled sphere (solid line), a cavity (long dashed line) and an elastic sphere with $\mu_R/\mu_E = 0.5$ (short dashed line). Figs. 3c and 3d show the scattering patterns for the incidence of S-waves and the partially diffracted S- and P-waves (S-S and S-P), respectively. The calculations were performed using the same parameters as these for P-wave incidence. In all examples the surrounding medium (matrix) properties that we adopted are similar to those reported by Gaunard & Uberall, (1979a) and correspond with those of the aluminum ($\rho_E = 2.7 \text{ g/cm}^3$, $\alpha_E = 6.42 \times 10^5 \text{ cm/s}$, $\beta_E = 3.04 \times 10^5 \text{ cm/s}$).

The dimensionless frequency $\eta = ka/\pi$ (the relationship diameter/wavelength $\eta = 2a/\lambda$, where λ = shear wavelength) allows to establish the various scattering regimes: low-Rayleigh ($ka \ll 1$), intermediate-Mie ($ka = 1$) and high-ray ($ka \gg 1$). While the first corresponds to large wavelengths and allows for equivalent medium approximations, the last corresponds to ray theory in which relatively simple geometrical descriptions are adequate. Various interesting results emerge from the three models involved by each frame in Fig. 3. First, at low frequencies ($ka = 0.25$, $ka = 0.5$) more energy of the incident P-wave field is converted to scattered S-waves than to P-waves, while at intermediate and high frequencies ($ka = 1.0$, $ka = 5.0$) the scattered P-wave field is dominant. Second, at low frequencies the amplitudes of the scattered P-waves in the forward and backward directions are comparable, whereas most of the scattered S-wave fields lie in the forward direction. At high frequencies, the amplitudes of the scattered S-waves are several times lower than the scattered P-waves. So, we can accept only generating forward-scattered P-waves. In Figs. 3c and 3d we can observe that at low frequencies ($ka = .25$, $ka = .5$) the energy of the incident S-wave field is preserved into scattered S-wave fields. Nevertheless, a considerable amount of scattered energy is converted to P-waves. At high frequencies ($ka = 1.0$; $ka = 5.0$) the same effect can be identified. At low frequencies, the amplitudes of the scattered S- and P-waves in the forward and backward directions are comparable, whereas at high frequencies, the amplitudes of the scattered S-waves are larger in the forward direction. Note that the amplitude of the scattered S-waves is three to four times larger than the scattered P-waves. In terms of the shapes and amplitudes of the scattering diagrams, there are characteristic differences between the fluid-filled, cavity and the proposed elastic models that must be studied with detail in further studies. It is remarkable that the diffracted field distance-dependence is easily observed at the horizontal rows frames. The amplitude attenuation effects are geometrical, even stronger than the inverse of distance.

We have made several computations in which elastic, fluid and cavities were considered and compared with some results obtained from the Resonant Scattering Theory (RST) by Gaunard & Uberall (1979a). Displacement amplitudes for the diffracted fields have been computed to show back scattering characteristics. Fig. 4 shows the modulus of the rotated diffracted field u_z (see Appendix B) for P-wave incidence, and u_x for S-wave incidence. The receiver is located at $x = 0$ and $z = -7$ ($r = 7$ and $\theta = \pi$ in spherical coordinates). Results are displayed against η . The incident field is given by a plane P-wave over a water-filled sphere ($\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$, $\alpha = 1.493 \times 10^5 \text{ cm/s}$) in an aluminum matrix. Adding twelve terms ($n = 12$) to the series of non mode-converted P-wave contribution P-P (top) and mode-converted P-S (bottom) into the diffracted field suffices to produce an accurate graph compared with the reported by RST, for the range $0 < \eta < 7$. Note that the solid line represents the fluid-filler response, the long-dash line corresponds to an empty sphere, and the short-dash line is due to an elastic sphere with properties $\mu_R/\mu_E = 0.5$. Similar plots have been reported by Gaunard & Uberall (1979a) for the cavity and the fluid inclusion.

The P-S coefficients are offered in the same range of frequencies as for P-P case. The similarity of spectral characteristics for both P-P and P-S plots is remarkable (mode-excitation, periodicity and amplitudes). For example, the periodicity effect is preserved for both plots and mainly in the fluid case. We must note that the energy is well concentrated in recursive patterns of spectral spikes (*resonant modes*, adopting the engineering term). From Fig. 4, it is possible to compare the frequency responses of mode-converted and non mode-converted coefficients when the excitation

is given by a plane P-wave. Although the observation point is located over a nodal axis the behavior of the given frequency responses are representative of all locations.

In Fig. 5 the same kind of results were computed for the incidence of a SV-wave. The corresponding coefficients S-S and S-P were calculated in order to know the spectral characteristics of the response. The receiver is located also at $x = 0$ and $z = -7$. Twelve terms were used ($n = 12$) to compute non mode-converted partial S-wave contributions S-S (top) and mode-converted S-P (bottom) to the diffracted field. Again, the solid line represents the fluid-filler response, the long dashed line corresponds with an empty sphere and, the short dashed line for and elastic sphere with properties given by $\mu_R/\mu_E = 0.5$. Remarkably, the fluid response for the S-S coefficients is very strong and rippled for all frequencies, as compared with those of the cavity and elastic cases. The S-P coefficients show the same excited modes and weak amplitude rapidly attenuated with respect to frequency. Unfortunately, RST does not consider the case of an incoming S-wave. Similar results on this matter are due to Korneev & Johnson (1996) for some deterministic models. Now it is possible with these results to establish a comparison for the back-scattered field between non mode-converted and mode-converted S-waves. Even though the spectral plots are completely different from those of the P-wave calculations, the same resonances are excited by an incident shear wave as by an incident compressional wave. This fact was predicted by McMechan (1982) based upon qualitative considerations without contributions for the vector problem. If we take a look over the first resonant modes, $0 < \eta < 2$, it will be easy to note that normalized frequency includes a broad resolution for the three cases. Such fact occurs when the frequency is adequate and sufficiently low for the fluid and elastic diffractors. The plots tend to follow the cavity response.

In our computations we have included a broad range of parameter relationships and locations (not shown here). In the cases of fluid-filled sphere and cavity, those computations show spectral plots similar to those sketched here. The results illustrate that the spectra are the same at forward and backward-scattering zones, as was mentioned by RST. Obviously, the total fields for the computation of the whole seismic response in time domain follow similar behavior. For convenience, only the diffracted fields for a nodal axis receiver have been depicted. The computation of an elastic sphere with different contrasts, including attenuation, is matter of future research.

In order to observe the propagation features and to continue with the study of incident elastic P- and S-waves over an empty, fluid-filled and elastic sphere, configurations for geophysical applications has been experimented in time domain. A three-dimensional behavior is offered with the aim to give a better understanding of the time-space complexity in the models. Synthetic seismograms are helpful to imagine and understand diffraction effects and polarization patterns directly in time domain. Traces were obtained by convolution with a Ricker wavelet followed by an inverse Fourier transform. Taking into account that the normalized frequency is the ratio between the diameter of sphere and incident wave-length $\eta = 2a/\lambda = ka/\pi$, we must warranty the computation of stable solutions when the convolution is performed. Such is made making the Ricker wavelet characteristic frequency (ω_c) to be contained at the same range of η . In the synthetic seismograms presented here $\omega_c = 1/\pi$ and $t_p = 1$ s were assumed. If we are interested to observe the fluid resonance, it is convenient to look at high frequencies for both P- and S-wave

incidences, where the fluid spectra are strong and rippled. On the other hand, the resonance of the solid shows a relatively smoothed behavior for both incidences.

Fig. 6 shows synthetic seismograms for two components of displacement (U_x and U_z). We omit the displacement along the y -axis, U_y , for P- and SV-wave incidences because $U_y = 0$. For the SH-wave incidence the results (not shown here) are similar. Fig. 6a depicts the P-wave incidence upon an elastic (top), cavity ($\rho_R = 0$) (middle) and water-filled (bottom) sphere plotted *versus* time. Matrix properties are those of aluminum. For the elastic case, the parameters are $\rho_R/\rho_E = 1.0$ and $\mu_R/\mu_E = 0.5$. The excitation is given by a Ricker wavelet with $t_s = 5$ s and $t_p = 1$ s, and it is the same for all examples. The receiver configuration (A-A') is illustrated in Fig. 1. There are 51 receivers at $x = \pm 3a$ and $z = 2a$, to observe propagation and diffraction effects after the interaction between the incoming wave and the spherical obstacle. Normal P-wave incidence clearly shows how the incident field is delayed by the presence of an empty sphere at the U_z component. The diffracted field across the cavity model is the result of scattered waves generated at the surface of the sphere, see both U_x and U_z . The traces for the water-filled model again show the diffracted field as mainly composed of the waves scattered by the cavity and the appearing of resonant fluid P-waves at 8 s. In the elastic case, it is possible to observe a strong and delayed amplification of the incident field at U_z , due to the soft properties of the sphere.

Fig. 6b shows synthetic seismograms for two components of displacement U_x and U_z over the section B-B' illustrated in Fig. 1. In this result, a P-wave arrives at an elastic (top), cavity with $\rho_R = 0$ (middle), and water-filled (bottom) sphere, with the same properties as those for Fig 6a. Along the three cases the direct wave is easily seen. Again a set of propagating fluid-generated waves appears at 8.5 s. The diffracted wave appears clearly for the cavity and the fluid-filled sphere. Note that the diffracted wave in the elastic sphere appears with a very strong attenuation over the first half of receivers.

Fig. 6c shows synthetic seismograms for two components of displacement U_x and U_z in a similar configuration as that of Fig. 6a. In this result, an SV-wave arrives at an elastic (top), cavity with $\rho_R = 0$ (middle), and water-filled (bottom) sphere. The parameters and properties for the model and the excitation are similar to those of the Fig 6a. Again the incident field appears to be delayed for the three cases. For the elastic case, a large amplification occurs and a strong scattered wave is generated. The cavity and elastic cases are very similar, if the amplification effect by the soft material of the elastic sphere is neglected. In the fluid-filled case a very strong attenuation at the central receivers is observed and it is due to the presence of the fluid. We must note a strong train of fluid field generated P-waves propagating around 7 s at both components of the bottom plot.

Fig. 6d shows synthetic seismograms for two components of displacement U_x and U_z over the section B-B' illustrated in Fig. 1. A SV-wave arrives at an elastic (top), cavity with $\rho_R = 0$ (middle), and water-filled (bottom) sphere, with the same properties as those for Fig 6a. Again, along the three cases the direct wave is easily seen. The cavity generated diffracted wave is not so clear, as compared with the 6b plot, due to the polarization of the incident field and the receivers position. However, some diffracted waves can be followed from the U_z component for the three cases. If we look at the fluid-filled sphere seismogram we can recognize a train of P-waves generated at 9 s by the presence of the fluid.

4. Conclusions

We have presented a review of the analytic solution for the scattering of P- and S-waves by a single spherical obstacle. The spherical expansion of plane P- and S-waves in terms of Bessel functions and Legendre polynomials using the relations for the displacements and stresses was shown. Computations were compared and verified with the theoretical exact solutions. Due to the lack of a trustworthy set of coefficients for the scattering of elastic P- and S-waves by a spherical inclusion in the literature, we give a complete and revised table of coefficients for the expansion of plane P- and S-waves in spherical coordinates. Several calculations with different orders were computed to analyze the optimum number for which the order n must be fixed to obtain an accurate approximation of the harmonic wave solution. According to Takeuchi & Saito (1972), we have identified that n must be at least the maximum number of dimensionless frequencies in the calculation (the maximum value of the normalized argument). They suggest a method where a fixed order is sufficiently big with respect to the argument. In this value, the functions are very close to zero. If the calculations imply very high frequencies ($\eta \gg 1$), the optimum order to consider must be higher than the maximum frequency calculated. We believe that a reasonable rule of thumb to obtain reliable representations is then to use for computation of diffracted waves a maximum order n with the same numerical value of ka .

Results from different kinds of materials inside the spherical obstacle, including a cavity, were analyzed. On this matter, we studied how the propagation and scattering patterns change with the variation of parameters in the model. We performed some calculations in which the radial diffracted field was computed at several distances for low, intermediate and high frequencies. A number of interesting observations emerge from the calculations of P- and S- waves scattering patterns. At low frequencies, more energy of the incident P-wave field is converted to scattered S-wave fields. The amplitudes of the scattered P-wave fields in the forward and backward directions are comparable, whereas most of the scattered S-wave fields lie in the forward direction. At high frequencies, the amplitudes of the scattered S-wave fields are several times lower than the scattered P-wave field, so we can accept only generating a forward-scattered P-wave field. From the S-wave scattering patterns we can say that at low frequencies the energy of the incident S-wave field is preserved into scattered S-wave fields, as well as at high frequencies. Nevertheless, a considerable amount of energy is converted to scattered P-wave fields. The amplitudes of the scattered S- and P-wave fields in the forward- and backward- directions are comparable, whereas at high frequencies, the amplitudes of the scattered S-wave fields lie in the forward direction. For instance of the shapes and amplitudes of the scattering diagrams, there are relevant differences between the fluid-filled, cavity and elastic proposed models that must be studied with detail in future research.

We made several computations in which elastic, fluid and cavities were included comparing with some results obtained from the well-known Resonant Scattering Theory by Gaunard & Uberall (1979a). Diagrams for the displacement amplitudes for the diffracted field showing back scattering characteristics were computed. They showed that considerable simplification could be introduced by analyzing each individual partial wave (or normal mode) to use one, and only one term of the expansion. In other words, they simplify their formulation to solve the inverse problem by studying only one term ($n = 0$ or $n = 1$) from all orders in the expansions to represent partial diffracted waves. They propose that each of these modal contributions can be decomposed

into two portions. The first one is the smooth “background” obtained from the same formulae but assuming that the filler density vanishes ($\rho_f = 0$, vacuum), and the second is the difference between the two complex quantities mentioned above. The total diffracted and background fields are operated to obtain set of modal resonance.

It is clear that simplified analysis as proposed by Gaunard & Uberall (1980), offers a unified and systematic method suitable to determine the material properties of fluids filling spherical cavities, but the RST does not seem to be robust to treat any elastic filler material. In spite of this, if we are interested in the study of the transient response characterization of the material filler, we must remark that the whole diffracted spectral signal contains all the main information about the filler and even more if we are looking at the end of the spectra. RST lies in the assumption that the identification resonances are obtained from any mode n , and that their locations at certain frequencies will determine the P-wave velocity of the filler. These assumptions make the RST an old-fashioned theory, and more from a time domain analysis of scattering and diffraction. The parametric analysis shows that the locations of the observation points are very relevant, and even more if we are interested in a rigorous study of attenuation. The phases of the filler-material sign are spectrally stable and conserve their shapes among the whole space. McMechan (1982) has mentioned that the spectral signals conserve their main phases, but not their amplitudes for different spatial observation points. This means that the possibility to treat or consider a cluster of spherical inclusions based on the canonical solution by a single obstacle is still open. From these results we can observe that it is extremely necessary to compute series of multiple examples in 3D to establish a complete data set and robust characterization of the phenomenon.

The numerical results calculated for the scattered waves from a spherical inclusion display a rich variety of interesting phenomena. With the aim to provide useful information to calibrate and approximate the seismic response for real objects and observe the propagation and diffraction effects, we made several examples in which P- and S-waves arrive on elastic, fluid-filled or empty sphere. A forward scattering cross section was performed and synthetic seismograms were plotted. The seismograms of the incident P-wave for the water-filled model show that the diffracted field is mainly composed of creeping waves across the fluid sphere and surface scattered waves from the sphere edges. It is remarkable that for the fluid-filled sphere a considerable delay of the incident field appears to be the same for all kind of diffractors. From the S-wave synthetic seismograms we can clearly observe the time delay of the incident wave and the generation of a scattered surface wave from the edges of the empty sphere. Results for the water-filled sphere show that the diffracted field suffers a strong attenuation effect due to the presence of the fluid. An important mode conversion from incident S- to scattered P-waves can be interpreted as a compressional wave generated by the fluid-filler inside the sphere. With the S-wave experiments we have identified the strong presence of attenuation over the incident wave field mainly when the obstacle is a fluid filled one.

Results presented in this paper should also be applicable, in at least an approximate manner, to problems involving scattering from heterogeneities more complicated than a simple sphere. Scattering by a sphere serves as a canonical problem for a general class of objects with relatively simple and smooth boundaries. It is expected that many of the scattering phenomena associated with the spherical obstacle will also apply to a wider class of heterogeneities including P- and S-wave solutions. The analytical solution can serve as a starting point for an investigation of various approximations that are typically made in the interpretation of scattered seismic waves.

The main multiple scattering methods commonly neglect the high-frequency terms of the basic solutions in 2- and 3-D. Generally, they adopt low contrast in the property ratios of the models or low frequency approximations. In spite of this, we believe that the analytic solutions offer a trustworthy path to compute the scattering and seismic response by single or multiple heterogeneities. A formulation that uses the basic analytical solutions for the diffracted field by a single spherical scatterer, should have direct applications and excellent results in real problems of engineering and physics. We believe that the set of results offered here could help the geophysicists and engineers to approach this canonical problem and look for the particular applications they may have in mind. Constructing more complicated formulations or approximate solutions aimed to understand real problems should start with this classical solution.

5. Acknowledgements

Thanks are given to Federico J. Sabina-Císcar and Carlos Valdés-González for their assistance and invaluable discussion on the formulation presented here. We also thank S. K. Singh, V. Levin, S. Chávez-Pérez and G. Quiroga-Goode, for their comments and suggestions to improve this work. This research was partially supported by CONACYT project NC-204 and by the Instituto Mexicano del Petróleo under grant YNF-D1341.

6. References

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1964. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics series 55.
- Aki, K., 1969. Analysis of seismic coda of local earthquakes as scattered waves, *J. Geophys. Res.*, 74, 615--631.
- Aki, K., 1973. Scattering of P waves under the Montana LASA, *J. Geophys. Res.*, 78, 1334--1346.
- Aki, K., 1980. Scattering and attenuation of shear waves in the lithosphere, *J. Geophys. Res.*, 85, 6496--6504.
- Aki, K. & Richards, P.G., 1980. *Quantitative seismology, Theory and methods*, W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- Bostrom, A. & Eriksson, A., 1993. Scattering by two penny-shaped cracks with spring boundary conditions, *Proc. R. Soc. Lond.*, 443, 183--201.
- Bouwkamp, C.J., 1954. Diffraction theory, *Repts. Prog. Physics.*, 17, 35--100.
- Chapman, C.H. & Phinney, R.A., 1970. Diffraction of P waves by the core and an inhomogeneous mantle, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 21, 185--205.
- Cormier, V.F. & Richards, P.G., 1977. Full wave theory applied to a discontinuous velocity increase: The inner core boundary, *J. Geophys.*, 43, 3--31.

Einspruch, N.G., Witterholt, E.J. & Truell, R., 1960. Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium, *J. Appl. Phys.*, 31, 806--818.

Eringen A.C. & Suhubi, E.S., 1975. *Elastodynamics*, Academic Press, New York.

Fung, Y.C., 1965. *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

Gaunard, G.C. & Uberall, H., 1979(a). Numerical evaluation of modal resonances in the echoes of compressional waves scattered from fluid-filled spherical cavities in solids, *J. Appl. Phys.*, 50, 4642--4660.

Gaunard, G.C. & Uberall, H., 1979(b). Deciphering the scattering code contained in the resonance echoes from fluid-filled cavities in solids, *Science*, 206, 61--64.

Gaunard, G.C. & Uberall, H., 1980. Identification of cavity fillers in elastic solids using the resonance scattering theory, *Ultrasonics*, 261--269.

Gritto, R., Korneev, V.A. & Johnson, L.R., 1995. Low frequency elastic wave scattering by an inclusion: Limits of applications, *Geophys. J. Int.*, 120, 677--692.

Gritto, R., Korneev, V.A. & Johnson, L.R., 1999. Nonlinear three-dimensional inversion of low frequency scattered elastic waves, *Pure Appl. Geophys.*, 156, 557--589.

Knopoff, L., 1959(a). Scattering of compression waves by spherical obstacles, *Geophys.*, 24, 30--39.

Knopoff, L., 1959(b). Scattering of shear waves by spherical obstacles, *Geophys.*, 24, 209--219.

Korneev, V.A. & Johnson, L.R., 1993(a). Scattering of elastic waves by a spherical inclusion-I. Theory and numerical results, *Geophys. J. Int.*, 115, 230--250.

Korneev, V.A. & Johnson, L.R., 1993(b). Scattering of elastic waves by a spherical inclusion-II. Limitations of asymptotic solutions, *Geophys. J. Int.*, 115, 251--263.

Korneev, V.A. & Johnson, L.R., 1996. Scattering of P and S waves by a spherically symmetric inclusion, *Pure Appl. Geophys.*, 147, 675--718.

McMechan, G.A., 1982. Resonant scattering by fluid-filled cavities, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 1143--1153.

Montalto, A., Logo, V. & Patane, G., 1995. Echo-resonance and hydraulic perturbations in magma cavities – application to the volcanic tremor of the Etna (Italy) in relation to its eruptive activity, *Bull. Vulcanol.*, 4, 219--228.

Morochnik, V.S., 1983(a). Scattering of shear elastic waves by a low-contrast spherical inclusion, *Izvestia Acad. Nauk USSR, Fizika Zemil*, 6, 41--49. (in Russian)

- Morochnik, V.S., 1983(b). Scattering of compressional elastic waves by a low-contrast spherical inclusion, *Izvestia Acad. Nauk USSR, Fizika Zemil* 7, 65--72. (in Russian)
- Morse, P.M. & Feshbach, H., 1953. *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York.
- Mow, C.C., 1965. Transient response of a rigid spherical inclusion in an elastic medium, *J. Appl. Mech.*, 32, 637--642.
- Mow, C.C. & Pao, Y.H., 1971. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*, A report prepared for United States Air Force Project Rand.
- Mow, C.C. & Workman, J.W., 1966. Dynamic stresses around a fluid-filled cavity, *J. Appl. Mech.*, 793--799.
- Pao, Y.H. & Mow, C.C., 1963. Scattering of a Plane Compressional Wave by a Spherical Obstacle, *J. Appl. Phys.*, 34, 493
- Pao, Y.H. & Mow, C.C., 1973. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Crane & Russak, New York.
- Rayleigh, Lord, 1872. Investigation of the disturbance produced by a spherical obstacle on the waves of sound, *Proc. London Math. Soc.*, 4, 253--283.
- Takeuchi, H., 1950. Diffraction of elastic waves by an elastic sphere, *Geophys. notes*, 3, 1--28
- Takeuchi, H. & Saito, M., 1972. Seismic surface waves, *Methods in computational physics*, 1, II, B. A. Bolt, ed., Academic Press, New York and London.
- Veksler, N.D., Izbicki, J.L. & Conoir, J. M., 1999(a). Elastic wave scattering by a cylindrical shell, *Wave motion*, 3, 195--209.
- Veksler, N.D., Izbicki, J.L. & Conoir, J. M., 1999(b). Flexural waves in the acoustic wave scattering by a liquid-filled shell, *Acoust. Phys.*, 3, 279--288.
- Veksler, N.D., Lavie, A. & Dubus, B., 2000. Peripheral waves generated in a cylindrical shell with hemispherical endcaps by a plane acoustic wave at axial incidence, *Wave motion*, 4, 349--369.
- Wolf, A., 1945. Motion of a rigid sphere in an acoustic wave field, *Geophys.*, 10, 91.
- Wu, R. & Aki, K., 1985. Scattering characteristics of elastic waves by an elastic heterogeneity, *Geophys.*, 50, 582--595.
- Ying, C.F. & Truell, R., 1956. Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.*, 27, 1086--1097

Appendix A

Expressions for the incident, diffracted and total displacement and stress fields in terms of radial functions and spherical harmonics.

To construct the diffracted and refracted fields, it is possible to use a complete set of wave functions that solves the Navier equation. The displacements in spherical coordinates are given by Takeuchi & Saito (1972) and Aki & Richards (1980):

$$u_r = \sum A_{nm} y_1^{p(*)}(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi) \quad (A)$$

$$+ \sum B_{nm} y_1^{s(*)}(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi)$$

$$u_\theta = \sum A_{nm} y_3^{p(*)}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m(\cos \theta)) f_m(\phi)$$

$$+ \sum B_{nm} y_3^{s(*)}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m(\cos \theta)) f_m(\phi) \quad (B)$$

$$+ \sum C_{nm} y_1^{t(*)}(r) \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) (\text{sig} \cdot m) f_m(\phi)$$

$$u_\phi = \sum A_{nm} y_3^{p(*)}(r) \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) (\text{sig} \cdot m) g_m(\phi)$$

$$+ \sum B_{nm} y_3^{s(*)}(r) \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) (\text{sig} \cdot m) g_m(\phi) \quad (C)$$

$$+ \sum C_{nm} (-y_1^{t(*)}(r)) \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m(\cos \theta)) g_m(\phi)$$

where $\sum = \sum_{n=0}^N = \sum_{m=0}^n$; $f(m) = \cos m\phi$, $g(m) = \sin m\phi$ and $\text{sig} = 1$, if the incidence is for P- or

SV-waves; or $f(m) = \sin m\phi$, $g(m) = \cos m\phi$, and $\text{sig} = -1$ if the incidence is an SH-wave. A_{nm} , B_{nm} and C_{nm} , are the unknown coefficients for P-, SV- and SH-waves, respectively. n is the radial expansion index and its order is N , m is the azimuthal decomposition index.

The associated stresses to these components of displacements are:

$$\sigma_{rr} = \sum A_{nm} y_2^{p(*)}(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi)$$

$$+ \sum B_{nm} y_2^{s(*)}(r) P_n^m(\cos \theta) f_m(\phi)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum A_{nm} \left(y_4^{p(*)}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) f_m(\phi)$$

$$+ \sum B_{nm} \left(y_4^{s(*)}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) f_m(\phi)$$

$$+ \sum C_{nm} \left(y_2^{t(*)}(r) \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) f_m(\phi)$$

$$\sigma_{r\phi} = \sum A_{nm} \left(y_4^{p(*)}(r) \left(\frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (-\text{sig} \cdot m) \right) g_m(\phi)$$

$$+ \sum B_{nm} \left(y_4^{s(*)}(r) \left(\frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (-\text{sig} \cdot m) \right) g_m(\phi)$$

$$+ \sum C_{nm} \left((-y_2^{t(*)}(r)) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) g_m(\phi)$$

The radial functions are expressed as:

$$y_1^{p(*)}(r) = q j'_n(qr) = \frac{1}{r} (n \xi_n(qr) - qr \xi_{n+1}(qr))$$

$$y_2^{p(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left(\left(n(n-1) - \frac{1}{2} k^2 r^2 \right) \xi_n(qr) + 2qr \xi_{n+1}(qr) \right)$$

$$y_3^{p(*)}(r) = \frac{1}{r} \xi_n(qr)$$

$$y_4^{p(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} ((n-1)\xi_n(qr) - qr \xi_{n+1}(qr))$$

$$y_1^{s(*)}(r) = \frac{1}{r} (-n(n+1)\xi_n(kr))$$

$$y_2^{s(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} (-n(n+1)((n-1)\xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr)))$$

$$y_3^{s(*)}(r) = i \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_n(kr)) = \frac{1}{r} (-(n+1)\xi_n(kr) + kr \xi_{n+1}(kr))$$

$$y_4^{s(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left(- \left(n^2 - 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2 \right) \xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr) \right)$$

$$y_5^{s(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} (n(n+1)(n \xi_n(kr) - kr \xi_{n+1}(kr)))$$

$$y_6^{s(*)}(r) = -\frac{2\mu}{r^2} (-(n+1) \xi_n(kr) + kr \xi_{n+1}(kr))$$

$$y_1^{i(*)}(r) = \frac{1}{r} (kr \xi_n(kr))$$

$$y_2^{i(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{1}{2} kr (n-1) \xi_n(kr) - \frac{1}{2} k^2 r^2 \xi_{n+1}(kr) \right)$$

$$y_3^{i(*)}(r) = \frac{2\mu}{r^2} (kr \xi_n(kr))$$

where: $\xi_n(*) = j_n(*)$ = spherical Bessel function of first kind and order n (for region R), and $\xi_n(*) = h_n^{(2)}(*)$ = spherical Hankel function of second kind and order n (for region E).

The calculation of the radial functions is based on recursive methods. For spherical Bessel functions of the first kind should be performed in decreasing sense to avoid rounding errors.

Appendix B

Expressions of stresses and displacements for the total field in spherical coordinates.

The transformations for the displacement and stress fields in cartesian coordinates, adopting the system proposed in Fig. 1, can be written as follows:

$$u_i' = \beta_{ij} u_j,$$

for the vector displacement u_i , and

$$\sigma_{ij}' = \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{kl},$$

for the stress tensor σ_{ij} (Fung, 1965),

with:

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

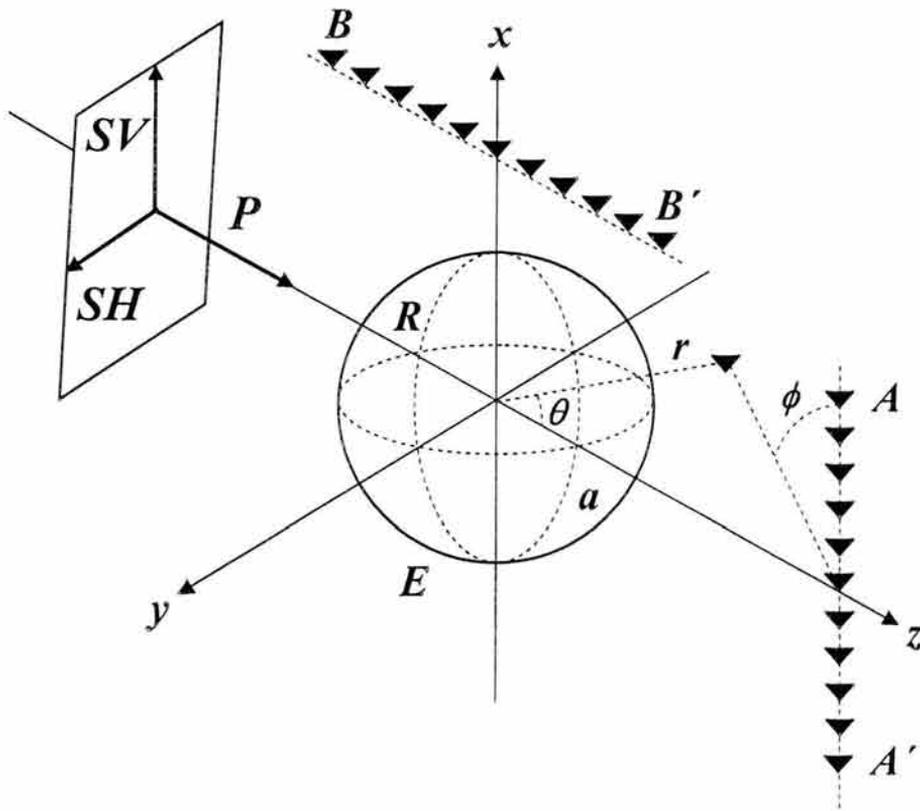


Fig. 1. Spherical diffractor under incidence of elastic plane P-, SV-, or SH-waves.

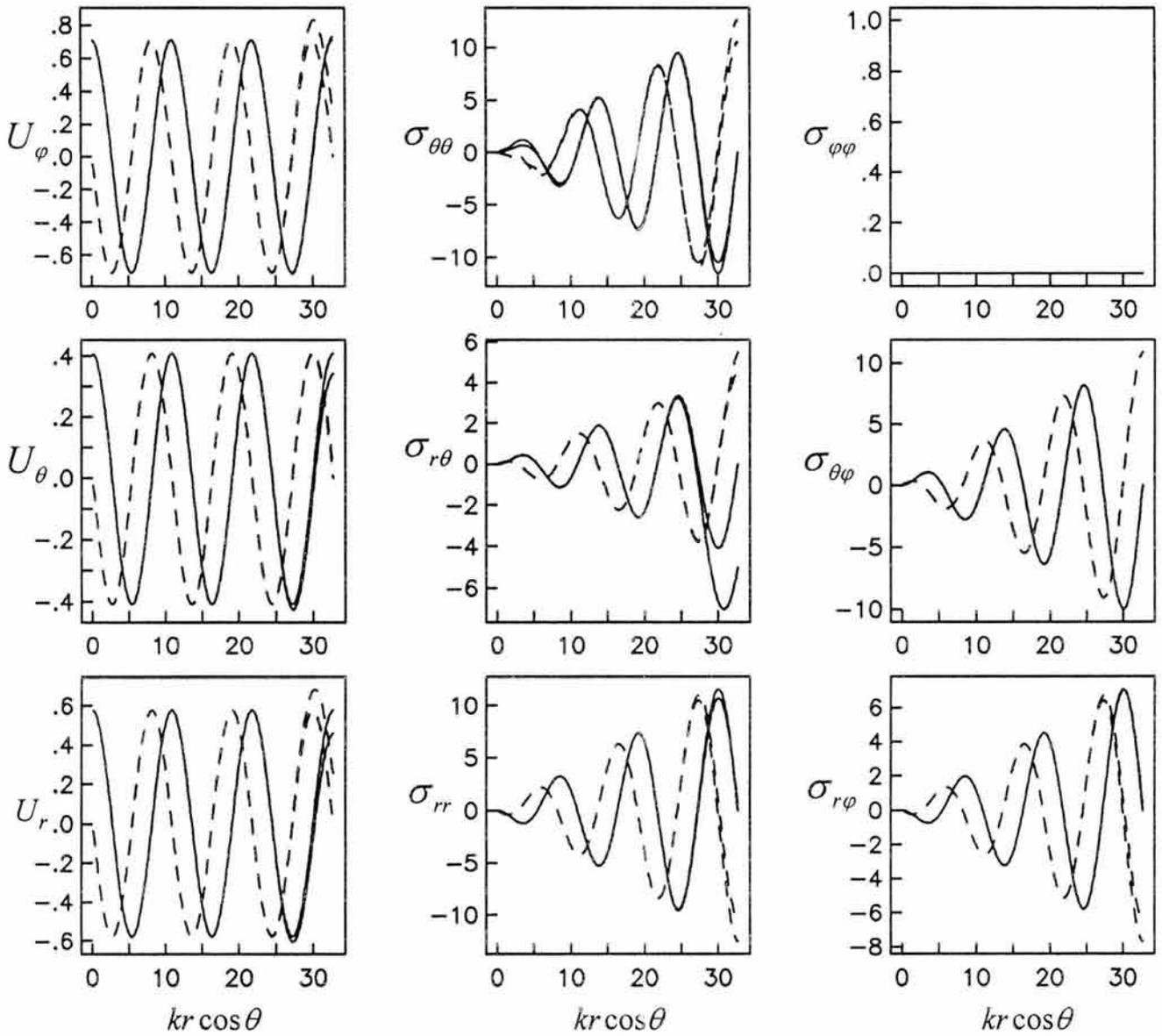


Fig. 2. Analytic expansion of an exact plane SV-wave in terms of Bessel functions and Legendre polynomials for $n = 30$. The spherical components of displacement and the stress tensor versus kz are shown. Solid lines correspond to the real part and dashed lines to the imaginary part, for both analytic and exact solutions.

P - P

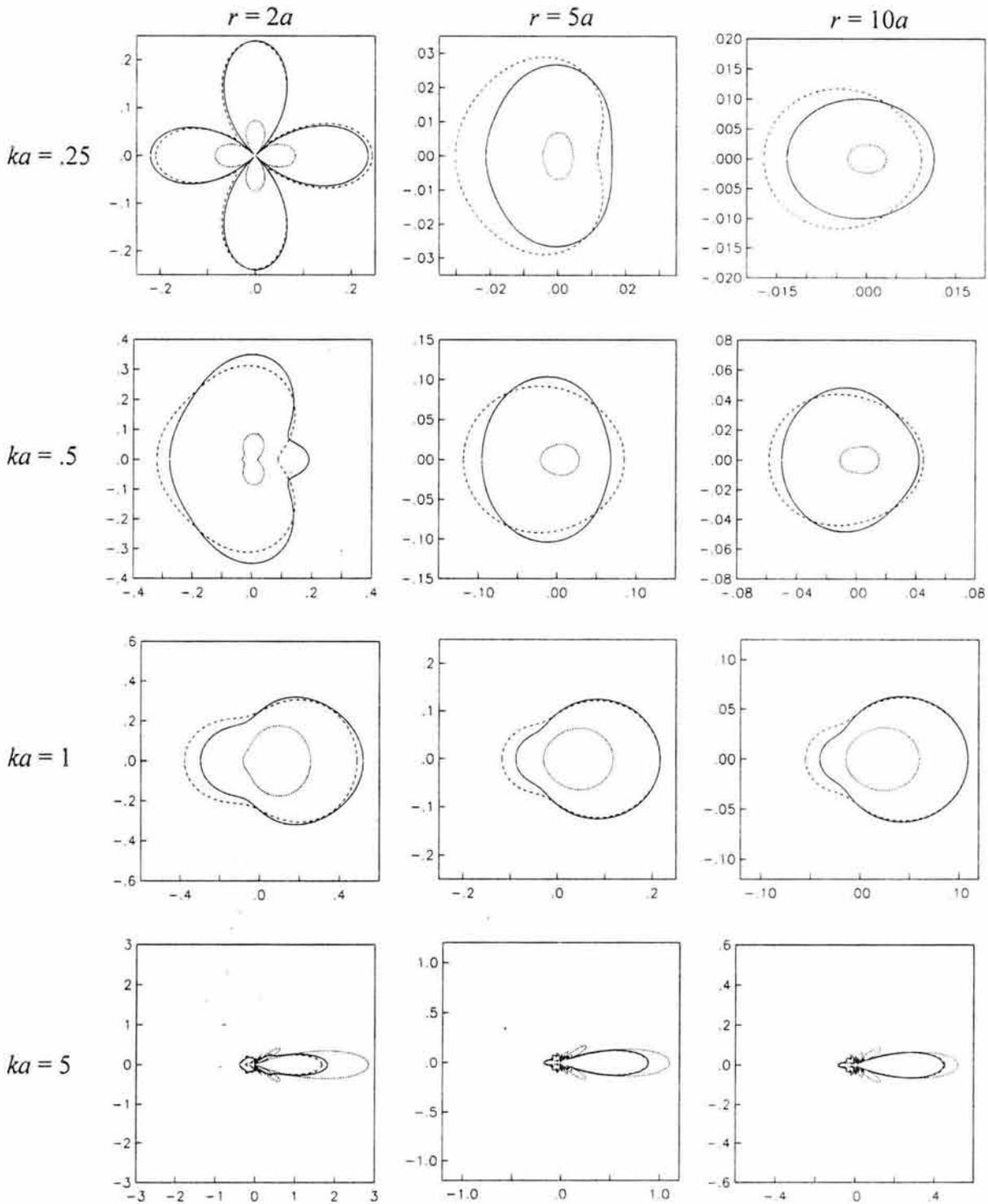


Fig. 3a. Array of frames for scattering patterns U_r given by P-P coefficients are depicted. Horizontal frames correspond to $r = 2a$, $5a$ and $10a$. Vertical frames are given for $ka = .25$, $.5$, 1.0 and 5.0 . Computations are performed for a water-filled sphere (solid line), a cavity (long dashed line) and elastic sphere (short dashed line). Matrix properties correspond with those of the aluminum.

P - S

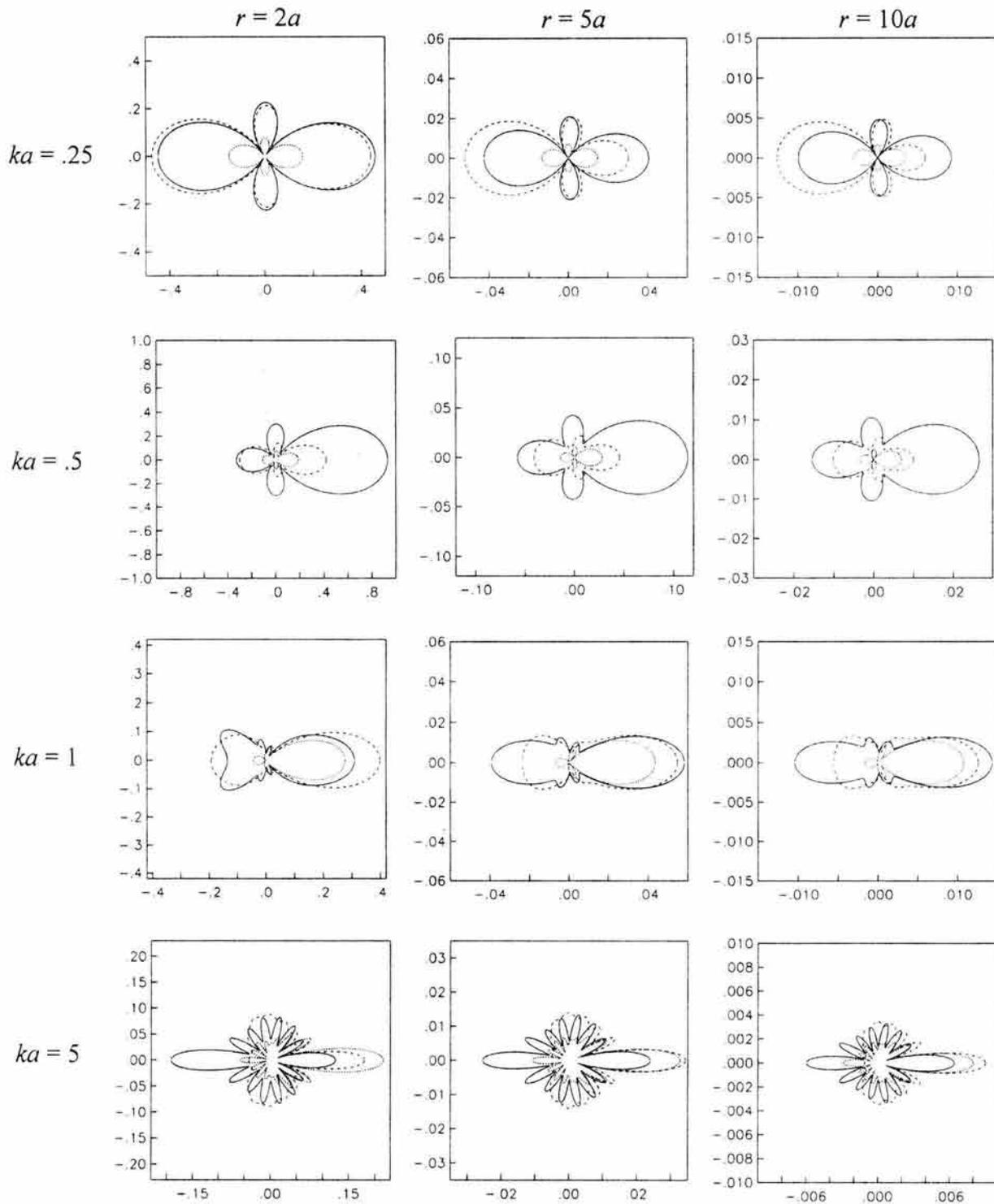


Fig. 3b. Same as Fig. 3a for U_r , computed with P-S coefficients.

S - S

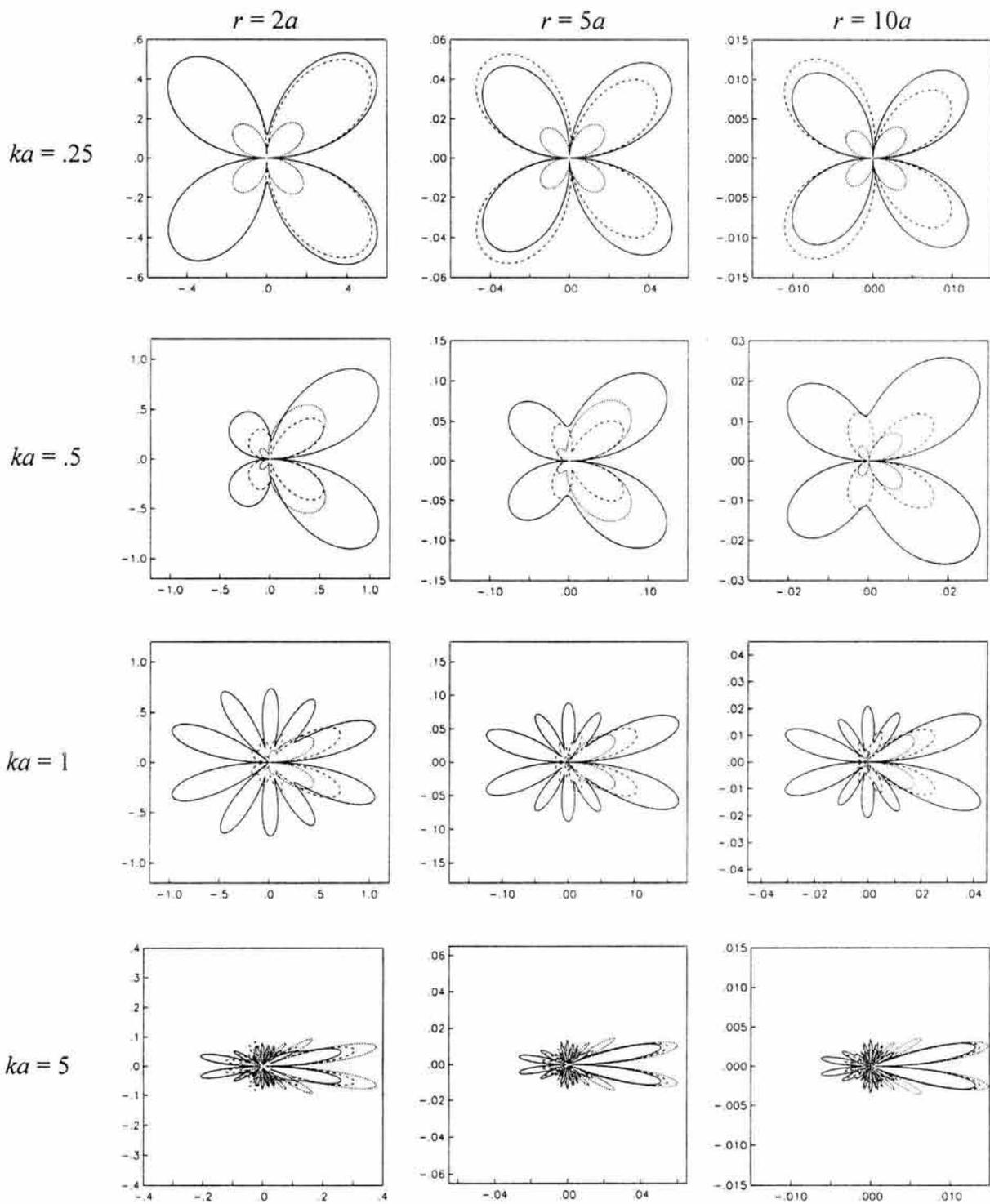


Fig. 3c. Same as Fig. 3a for U_r , computed with S-S coefficients.

S - P

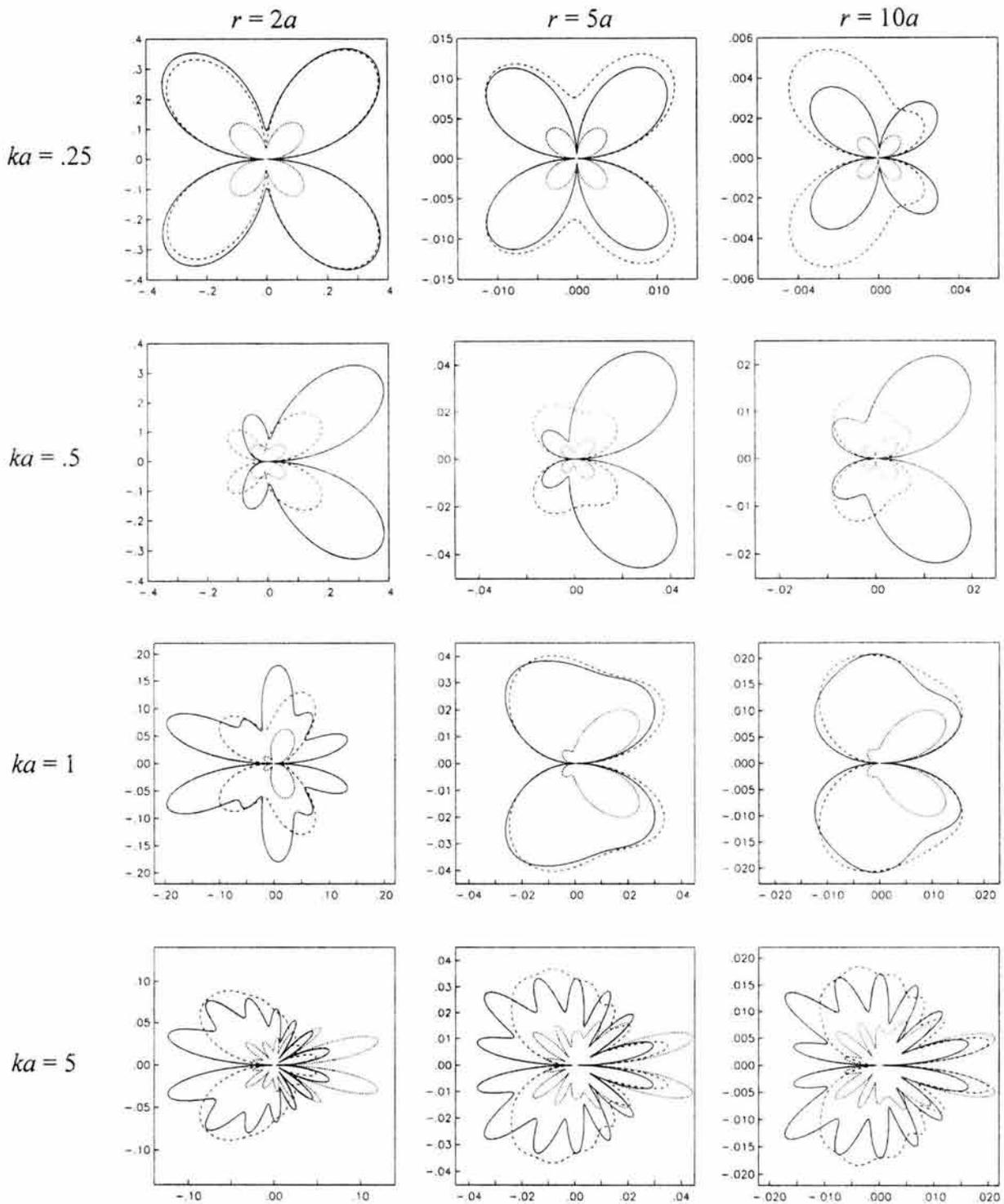


Fig. 3d. Same as Fig. 3a for U_r computed with S-P coefficients.

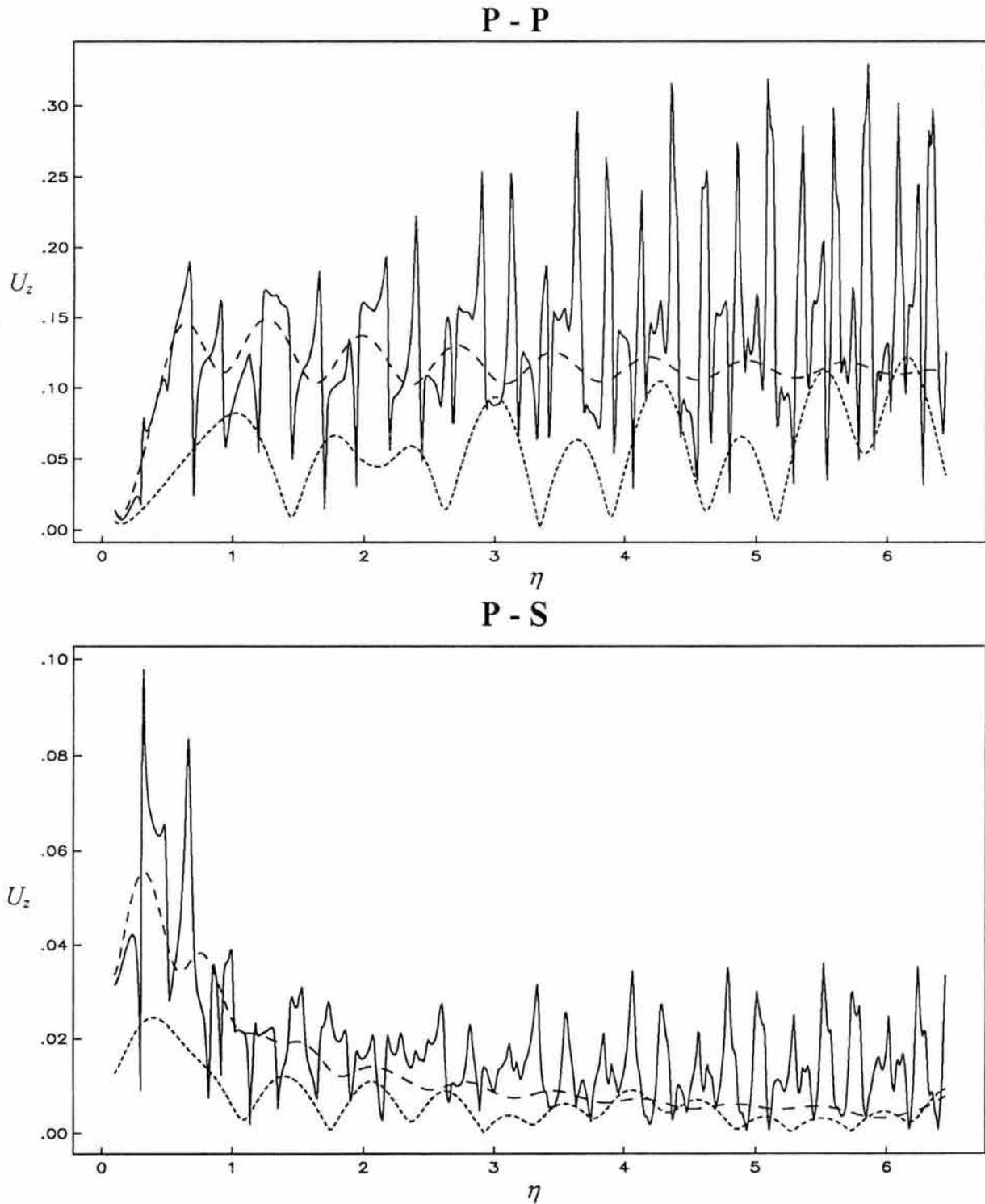
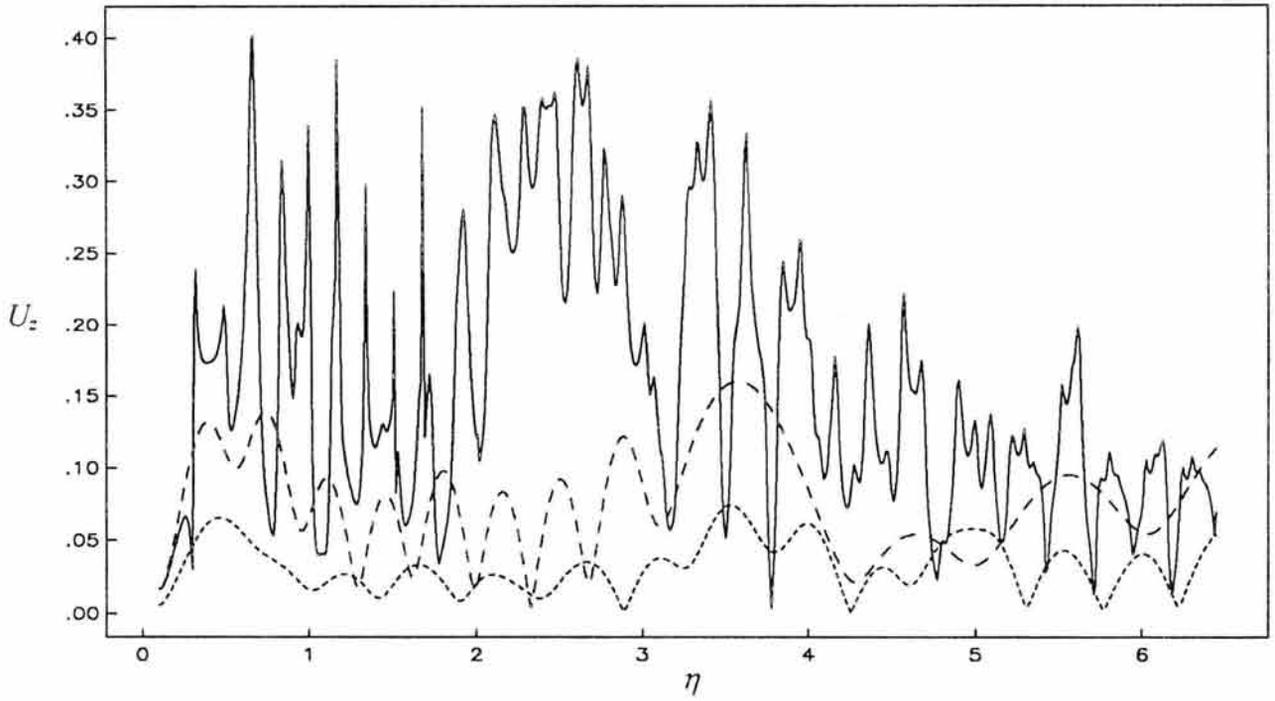


Fig. 4. Modulus of summed ($n = 12$) back scattered field U_z . P-P coefficients (top) and P-S coefficients (bottom) versus η . A water-filled sphere (solid line), a cavity (long dashed line) and elastic sphere (short dashed line) are given. Matrix properties correspond with those of aluminum. The observation point is at $x = 0$ and $z = -7a$.

S - S



S - P

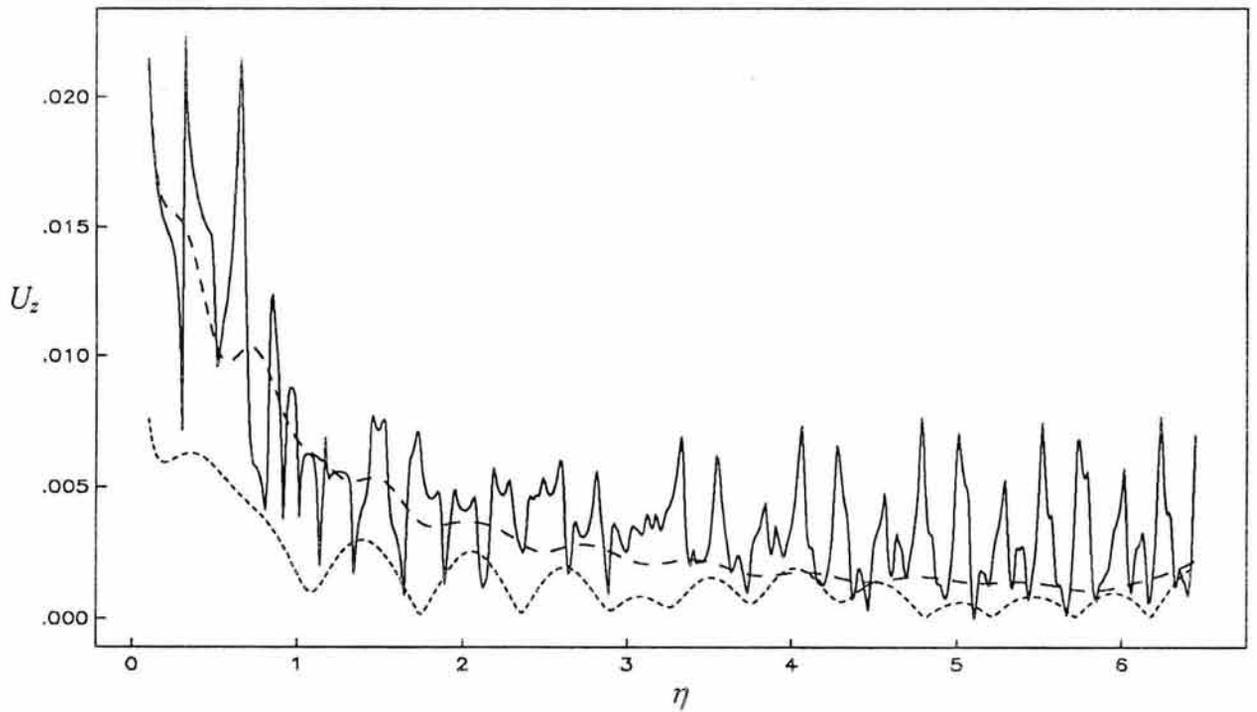


Fig. 5. Same as Fig. 4 calculated for non-mode converted S-S coefficients (top) and mode converted S-P coefficients (bottom).

P-WAVE INCIDENCE (A-A')

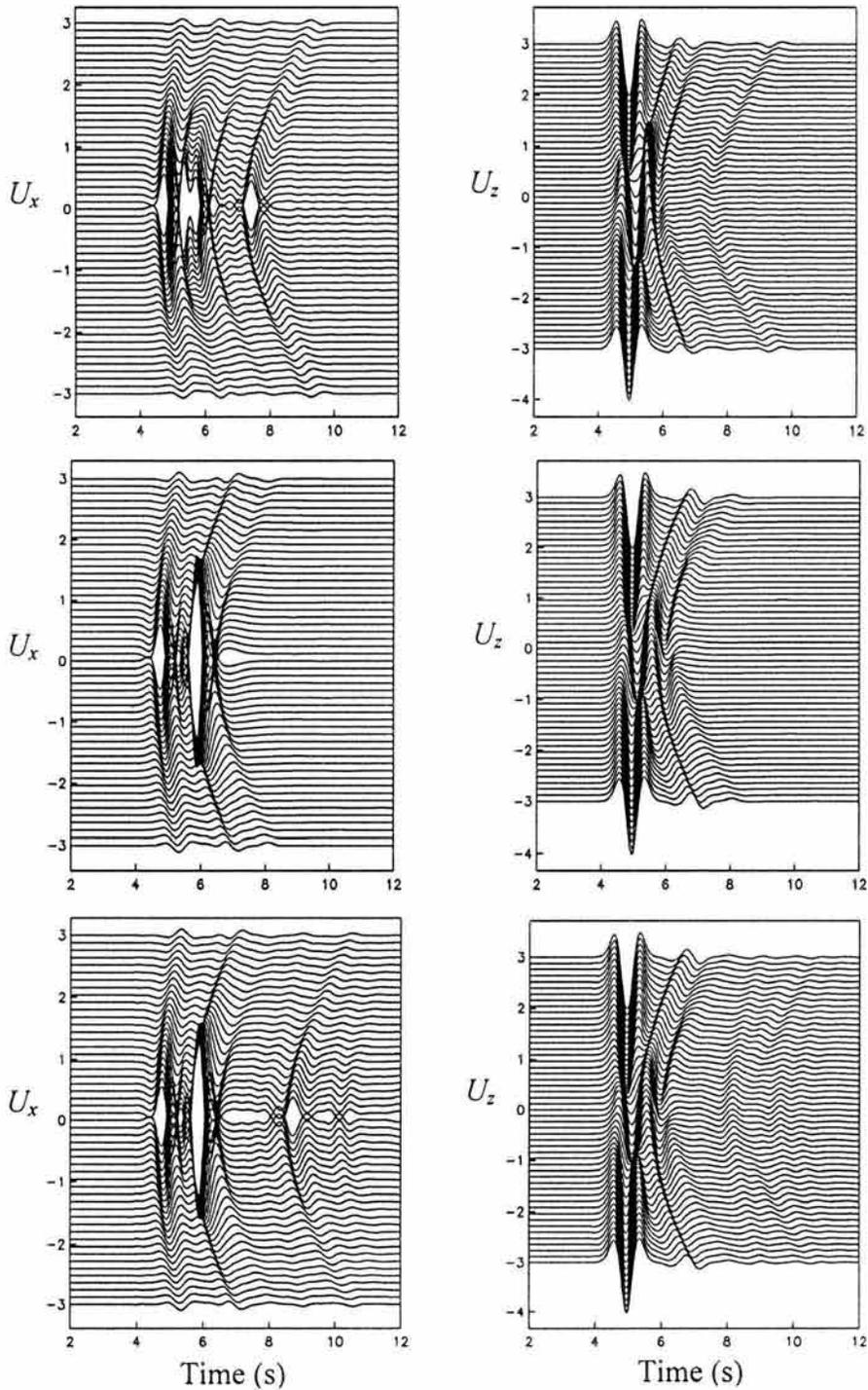


Fig. 6a. Synthetic seismograms recorded at A-A' array of receivers for U_x and U_z are shown. P-wave incidence upon an elastic sphere (top), a cavity (middle) and a water-filled sphere (bottom) are plotted *versus* time. Matrix properties correspond with those of aluminum. Source is given by a Ricker wavelet with $t_p = 1$ s and $t_s = 5$ s.

P-WAVE INCIDENCE (B-B')

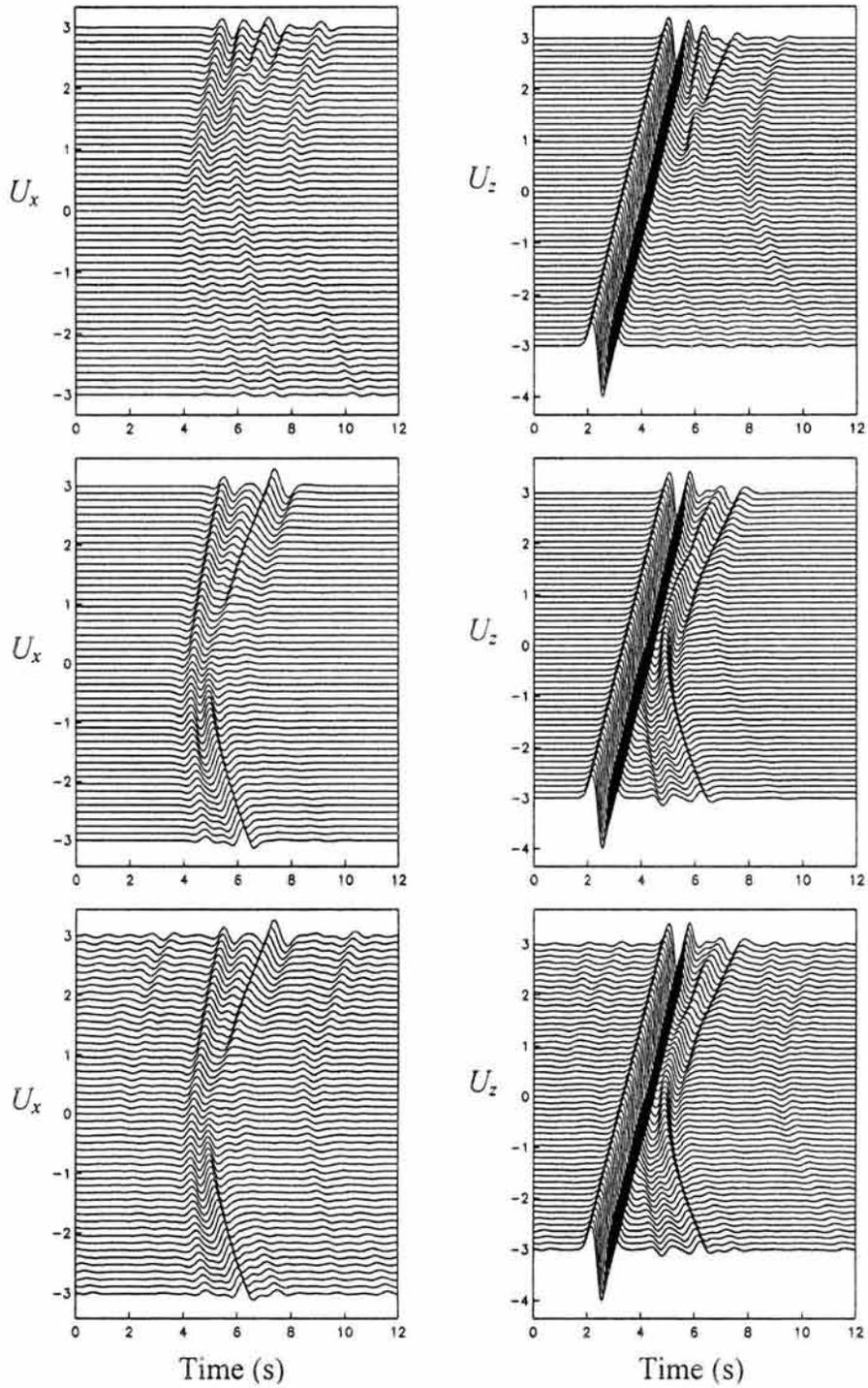


Fig. 6b. Same as Fig. 6a recorded at B-B'.

S-WAVE INCIDENCE (A-A')

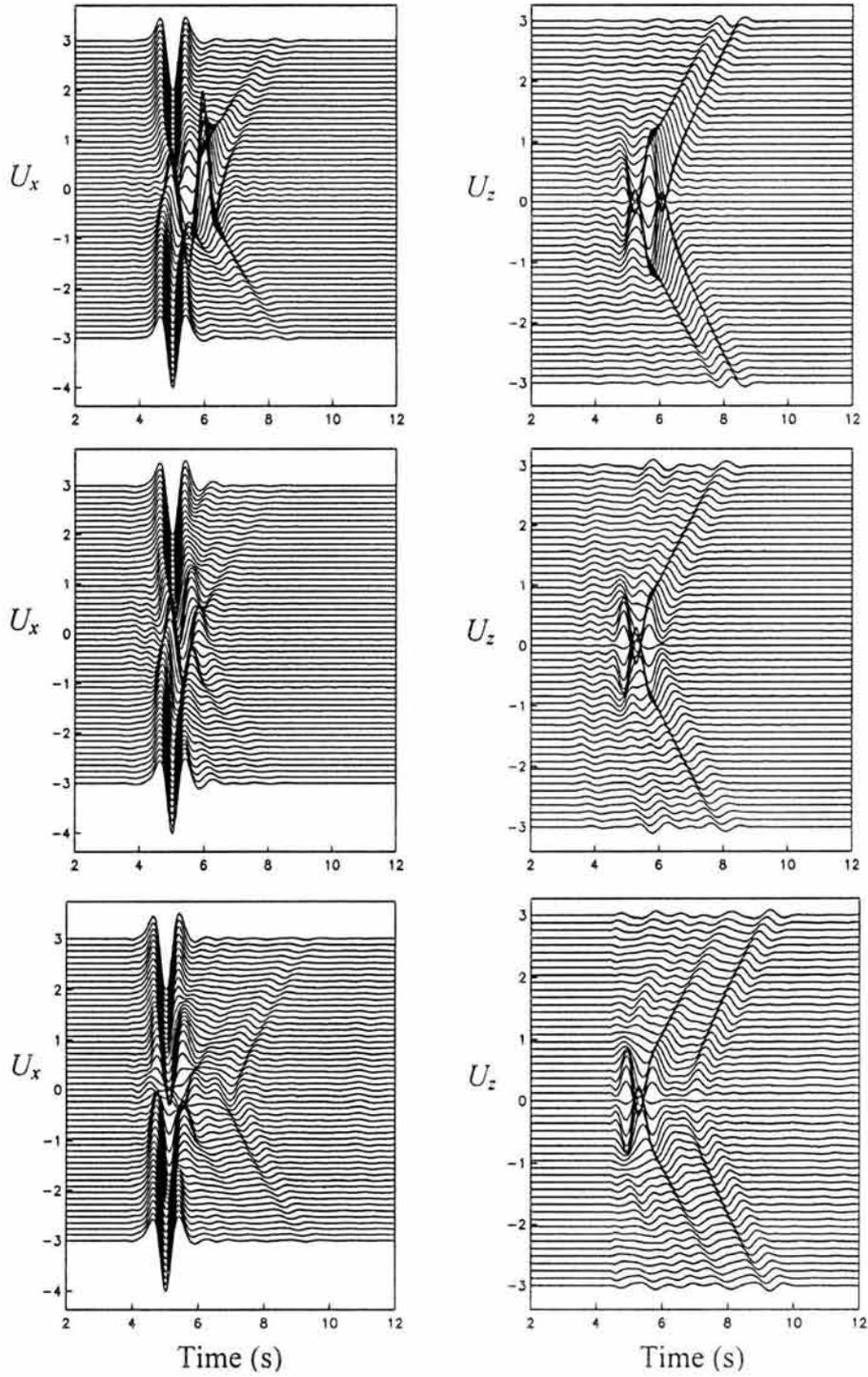


Fig. 6c. Same as Fig. 6a for a S-wave incidence.

S-WAVE INCIDENCE (B-B')

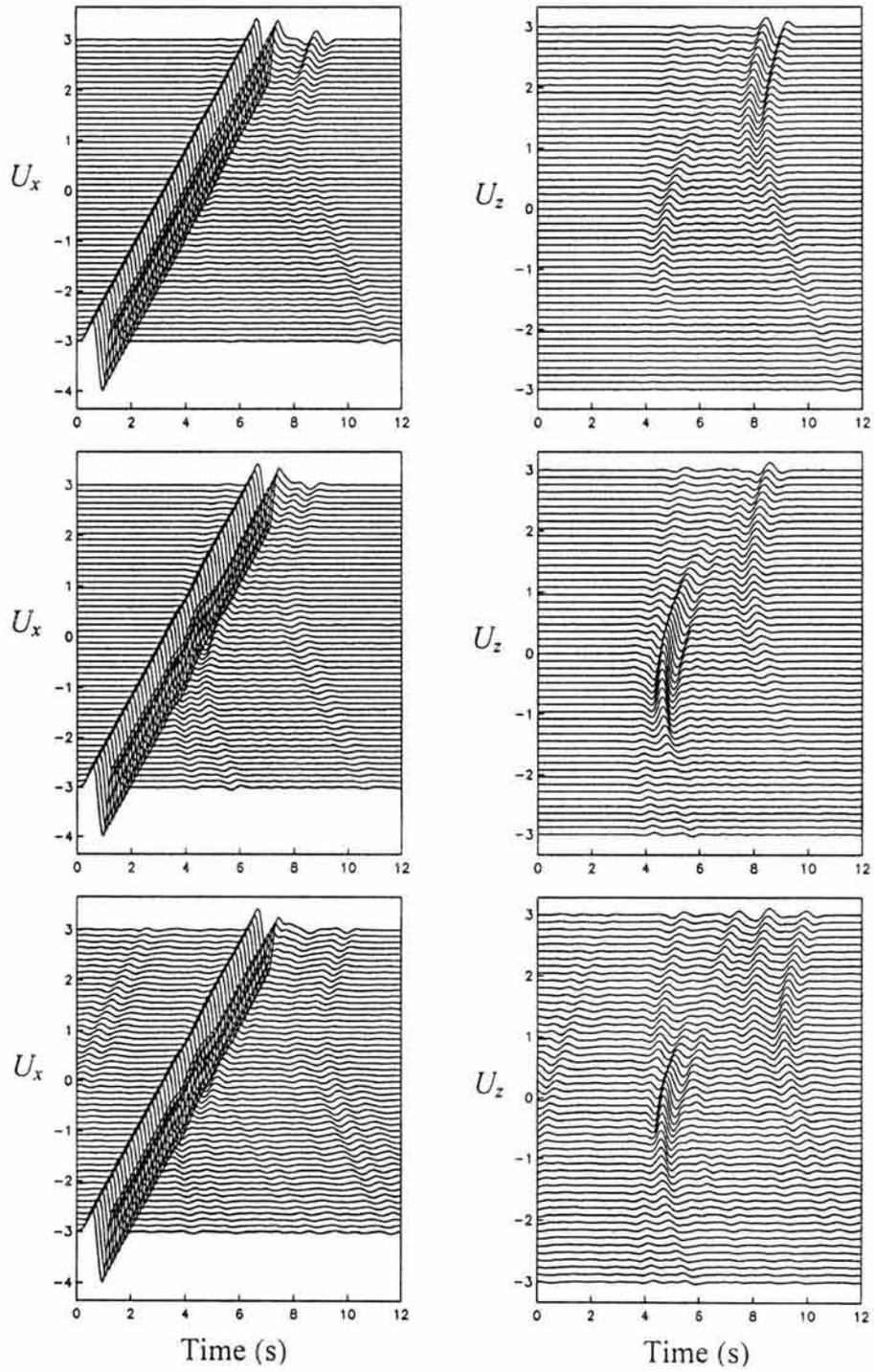


Fig. 6d. Same as Fig. 6c recorded at B-B'.

ANEXO B

EL VPM: UNA TÉCNICA VARIACIONAL PARA SIMULAR LA RESPUESTA SÍSMICA DE VALLES ALUVIALES SOMEROS

Rafael Ávila^(1,2), Víctor J. Palencia⁽³⁾ y Francisco J. Sánchez Sesma⁽¹⁾

RESUMEN

Se presenta el Método de Proyección Variacional (VPM, por sus siglas en inglés) para calcular la respuesta sísmica tridimensional de valles aluviales someros. La solución está basada en una formulación variacional de Galerkin de forma débil para el problema de un estrato irregular de geometría suave que sobreyace a un semiespacio elástico. La formulación de Galerkin se aplica mediante una familia de funciones de prueba para establecer la dependencia respecto a la profundidad. Las ecuaciones diferenciales parciales de la elasticidad dinámica se "proyectan" al plano horizontal en superficie donde se resuelven usando un esquema pseudoespectral. Aquí, las ecuaciones son resueltas con diferencias finitas para las derivadas en el tiempo y transformada rápida de Fourier para las derivadas horizontales en el espacio. La irradiación de energía al semiespacio se incluye aproximadamente usando como solución de referencia la respuesta unidimensional en cada sitio. Se dan ejemplos del comportamiento numérico del método y de su exactitud para modelos de valles someros en 2 y 3 dimensiones. Se discute la factibilidad de mejorar el método, particularmente en las condiciones de frontera en la base del modelo.

SUMMARY

The Variational Projection Method (VPM) to compute the seismic response of three dimensional (3D) shallow alluvial valleys is presented. The solution is based on a weak-form variational Galerkin formulation of the problem for a smooth irregular layer overlaying an elastic half-space. The Galerkin method is applied by means of a simple set of trial functions for depth dependence. The partial differential equations of dynamic elasticity in space and time are "projected" into the horizontal free surface plane and are then solved using a pseudospectral scheme: finite differences in time and fast Fourier transform (FFT) to compute spatial horizontal derivatives. By using as reference the 1D solution, the radiation conditions are approximately fulfilled. Numerical examples of the performance and accuracy of the method in 2 and 3D are given. Possible improvements of the method are discussed as well.

Artículo recibido el 2 de octubre de 2001 y aprobado para su publicación el 28 de noviembre de 2002. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

⁽¹⁾ Instituto de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Apdo. 70-472, Coyoacán 04510 México DF., México. rcarrer@imp.mx, sesma@servidor.unam.mx

⁽²⁾ Instituto Mexicano del Petróleo, Eje Central Lázaro Cárdenas 152, Col. San Bartólo Atepehuacan, Gustavo A. Madero 07730 México D.F., México. rcarrer@imp.mx

⁽³⁾ División de Matemáticas e Ingeniería, UNAM – Campus Acatlán, Alcanfores y San Juan Totoltepec, Santa Cruz Acatlán, 53150 Naucalpan, Estado de México, México. palencia@servidor.unam.mx

INTRODUCCIÓN

Los efectos de sitio pueden producir grandes variaciones espaciales del movimiento sísmico del suelo y ocasionar mayores daños en ciertas zonas. En las últimas tres décadas se han realizado esfuerzos significativos que han ayudado a la caracterización de tales efectos (ver p ej Sánchez-Sesma, 1987; Aki, 1988; Luco *et al.*, 1990). La gran importancia de la amplificación local fue evidente, de nuevo, por el daño producido en varios sismos importantes. Por ejemplo: La ciudad de México en 1985, San Francisco en 1989, y Kobe en 1995. En la actualidad las bases físicas del problema de la amplificación son bien conocidas (ver p ej Singh *et al.*, 1995). Los trabajos más importantes al respecto han estado concentrados en el problema bidimensional. Esto ofreció algunas explicaciones a las observaciones. Sin embargo, con objeto de mejorar los estudios cuantitativos de la respuesta de un sitio, es deseable que en el modelado se tome en cuenta la naturaleza tridimensional del problema. La variabilidad espacial y la polarización del movimiento del suelo observadas en la Ciudad de México han sido interpretadas como efectos 3D (Pérez-Rocha *et al.*, 1991).

Se han propuesto varios métodos para estudiar la propagación de ondas sísmicas en valles aluviales en 3D (ver p ej Sánchez-Sesma y Luzón, 1995). En términos generales el Método de Elementos de Frontera (BEM) permite obtener resultados confiables. En algunas circunstancias un análisis con BEM garantiza una buena descripción de los efectos 3D de configuraciones simplificadas. Este método proporciona muy buenos resultados, útiles para calibrar otros procedimientos. Entre sus limitaciones se encuentra su restricción al tratamiento de medios homogéneos pues, salvo por algunos casos (Sánchez-Sesma *et al.*, 2001), no se cuenta en general con las funciones de Green para medios heterogéneos. Los elementos finitos y las diferencias finitas permiten tratar materiales heterogéneos y pueden manejar virtualmente cualquier configuración geométrica. De hecho las simulaciones más realistas, hasta ahora, son las efectuadas con el método de diferencias finitas. El estudio de Frankel (1993) de la respuesta del valle de San Bernardino en California y las simulaciones de Olsen *et al.*, (1995) para la cuenca de Los Ángeles, ilustran bien este hecho. Las soluciones rigurosas (Horike *et al.*, 1990) y aproximadas (Graves y Clayton, 1992) para estructuras del basamento elásticas y acústicas respectivamente, también ilustran las grandes dificultades en la simulación del problema. Si bien sus resultados son alentadores, las simulaciones exactas pueden ser muy costosas, en términos de tiempo de procesamiento, aun con el empleo de supercomputadoras (ver p ej Furumura y Takenaka, 1996; Olsen *et al.*, 1997). Por ello creemos que existe un grupo de procedimientos prácticos simplificados que deben tomarse en cuenta para el cálculo de los efectos de sitio en valles aluviales someros.

En este trabajo presentamos al VPM como un método práctico para simular en forma aproximada la respuesta sísmica de valles aluviales someros en 3D. Este método ya ha sido aplicado en el cálculo de la respuesta sísmica tridimensional para algunas zonas del valle de Osaka Japón, durante el sismo de Hyogo-Ken Nanbu (Kobe) del 17 de Enero de 1995 (Sánchez-Sesma *et al.*, 1996) y considerando la respuesta del basamento (Perrot *et al.*, 1995). Nuestra aproximación busca vencer las dificultades de cálculo antes mencionadas. El diseño toma en cuenta una estructura fina como la observada en la respuesta en frecuencia de los modelos 2D en valles aluviales, (Sánchez-Sesma *et al.*, 1993) la cual nos indica que existe un fuerte

acoplamiento entre la respuesta 1D y las ondas superficiales generadas localmente en este tipo de configuraciones. Con este fin se propuso una aproximación experimental que usa expansiones de modos locales (Ávila *et al.*, 1993). Por otra parte, se ha mostrado que las formulaciones variacionales del tipo Galerkin son eficientes y exactas para los problemas de la propagación de ondas (p ej Faccioli *et al.*, 1996). Una formulación de Galerkin de forma débil es la base de un método riguroso en el dominio de la frecuencia llamado Método de Solución Directa (DSM) (Geller *et al.*, 1990; Geller y Ohminato, 1994; Geller y Hatori, 1995). Con el DSM se han resuelto un grupo de problemas de interés sísmológico con gran exactitud.

Con el fin de aprovechar la extensión lateral del problema, usamos una formulación variacional débil y aplicamos localmente el método de Galerkin para "proyectar" el campo de ecuaciones de la elasticidad dinámica dentro de un plano horizontal sobre la superficie del modelo. Usamos también una familia completa de funciones de prueba que cumplen condiciones de ortogonalidad, para establecer la dependencia con la profundidad. En consecuencia, nuestro Método de Proyección Variacional produce un grupo de ecuaciones "proyectadas" en las cuales la dependencia de las coordenadas horizontales y el tiempo se preservan. Estas ecuaciones se resuelven entonces con el método pseudoespectral: las derivadas en el tiempo se aproximan con un esquema centrado de segundo orden, mientras que las derivadas espaciales se calculan usando transformadas de Fourier. Aplicamos este procedimiento para los sedimentos y suponemos una variación suave de la interfaz valle-basamento. El problema puede ser formulado de dos maneras: (1) por especificación del movimiento en la interfaz (usando teoría de rayos y el método de Haskell), lo cual significa que las reflexiones tardías corresponderán al basamento rígido y la energía perdida por radiación hacia el medio exterior puede ser tomada en cuenta sólo aproximadamente con operadores de tiempo; y (2) por especificación de algunos esfuerzos en la interfaz en términos de fronteras parcialmente reflejantes. Estos dos caminos proporcionan resultados alentadores, pero establecer cuál es el mejor es materia de nuestra investigación en la actualidad. La formulación aquí presentada generó cálculos que resultaron ser mucho más rápidos que los procedimientos ya existentes. Damos algunos ejemplos del comportamiento numérico y de la exactitud del VPM para modelos de valles aluviales en 2 y 3D, así como algunas comparaciones con soluciones conocidas, como las del Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM).

MÉTODO DE PROYECCIÓN VARIACIONAL

Formulación del problema

Considere un valle aluvial somero tridimensional sobre la superficie de un semiespacio elástico, como se muestra en la Fig. 1. El material de los sedimentos es elástico y tiene una forma arbitraria, pero suave, descrita por el espesor $h(x,y)$. Se asume que los sedimentos son mucho más blandos que el semiespacio que los subyace.

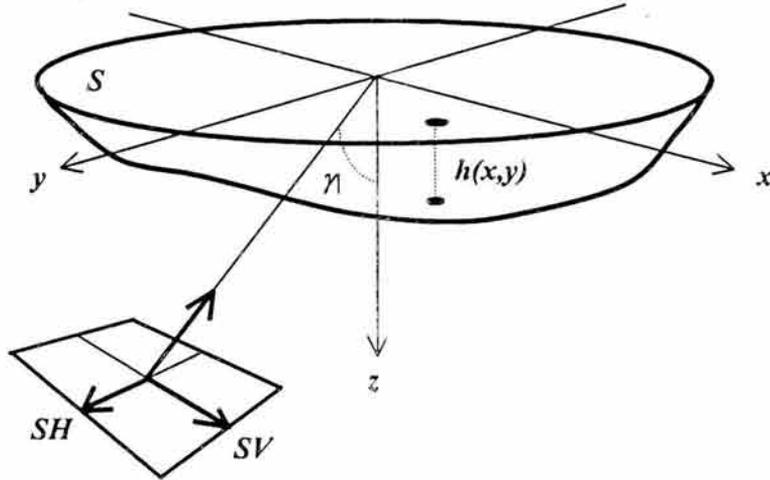


Figura 1. Valle aluvial sometido a la incidencia de una onda plana.

Las ecuaciones de campo en ausencia de fuerzas de cuerpo pueden escribirse, para los sedimentos, por medio de la ley de Newton:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad i = 1, \dots, 3. \quad (1)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, u_i el vector de desplazamiento, x_i las coordenadas cartesianas, ρ la densidad de masa y t el tiempo. En lo que sigue se pueden usar las siguientes equivalencias: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Adicionalmente, el tensor de esfuerzos está dado por la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2)$$

donde C_{ijkl} es el tensor elástico (para materiales isotrópicos $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$).

El campo de desplazamiento elástico en los sedimentos se propone con la forma:

$$u_i(x, y, z, t) = u_i^{(0)}(x, y, z, t) + u'_i(x, y, z, t). \quad (3)$$

donde $u_i^{(0)}(\cdot)$ es un movimiento de referencia conocido en la interfaz $h(x, y)$ y $u'_i(\cdot)$ es el movimiento adicional que se busca en el estrato. Sustituyendo la ec. (3) en la ec. (1) se puede escribir

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2}, \quad (4)$$

con

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2} \quad (5)$$

que es el campo forzante debido al movimiento de referencia, $u_i^{(0)}(\cdot)$.

La condición de frontera libre de esfuerzos en la superficie $z=0$ puede aproximarse como,

$$\sigma_{zj} = \sigma_{zj}^{(0)} + \sigma'_{zj} = 0. \quad (6)$$

Nótese que $\sigma_{zj}^{(0)}$ depende sólo de x , y y t .

El campo de desplazamiento buscado se escribe ahora como

$$u'_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N U_i^n(x, y, t) \varphi^n(z), \quad (7)$$

donde $U_i^n(\cdot)$ son funciones de las coordenadas horizontales (x, y) y del tiempo, mientras $\varphi^n(z)$ son funciones de prueba dadas de la profundidad. La ec. (7) expresa la solución $u'_i(\cdot)$ en términos de la combinación lineal de las funciones de prueba.

Formulación de Galerkin de forma débil

Considere ahora el operador de Galerkin,

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) dz = 0. \quad (8)$$

Esta ecuación puede ser vista como la forma fuerte del método de Galerkin para las ecuaciones elásticas a lo largo de una línea vertical con longitud $h(x, y)$. Para expresar la ec. (8) en la forma de un operador débil se integra por partes y se escribe:

$$\int_0^h \left\{ \left[\frac{\partial \sigma'_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yi}}{\partial y} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) - (\sigma'_{zi} + \sigma_{zi}^{(0)}) \frac{\partial \varphi^m}{\partial z} \right\} dz + [(\sigma'_{zi} + \sigma_{zi}^{(0)}) \varphi^m(z)]_0^h = 0 \quad (9)$$

porque $\sigma_{zi}^{(0)}$ no depende de z . De acuerdo con la ec. (6) la única contribución del segundo término en la ec. (9) proviene de $z = h$ si $\varphi^m(h) \neq 0$.

Las ecuaciones proyectadas

Si $\varphi^m(h) = 0$, entonces $u'_i(\cdot) = 0$ y el movimiento de referencia $u_i^{(0)}(\cdot)$ puede considerarse como el movimiento real de la interfaz valle-basamento. Si estos movimientos son dados y corresponden a la solución unidimensional en la interfaz, la solución en los primeros tiempos de respuesta concuerda efectivamente con la condición $u'_i(\cdot) = 0$ en $z = h$. Para tiempos de respuesta posteriores la frontera es totalmente reflejante y corresponde a una base rígida.

Entre las diversas familias de funciones completas en el intervalo $(0, h)$ se puede seleccionar la bien conocida familia de cosenos:

$$\varphi^n(z) = \cos \lambda_n z \quad (10)$$

con $\lambda_n = (2n + 1)\pi / 2h$. Es claro que $\varphi^m(h) = 0$. Más aún, estas funciones y sus derivadas (con respecto a z) forman, respectivamente, sendos conjuntos ortogonales en el intervalo de interés, esto es:

$$\int_0^h \varphi^m \varphi^n dz = \frac{h}{2} \delta_{mn}, \quad (11)$$

$$\int_0^h \frac{\partial \varphi^m}{\partial z} \frac{\partial \varphi^n}{\partial z} dz = \lambda_m^2 \frac{h}{2} \delta_{mn}, \quad (12)$$

$$\int_0^h \varphi^m dz = \frac{h}{2} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)}, \quad (13)$$

$$\int_0^h \varphi^m \frac{\partial \varphi^n}{\partial z} dz = a_{mn}, \quad (14)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker ($\delta_{mn} = 1$ si $m = n$; $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$) y

$$a_{mn} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } m = n, \\ -\frac{2n+1}{4} \left[\frac{1+(-1)^{m+n}}{m+n+1} - \frac{1-(-1)^{m-n}}{m-n} \right] & \text{si } m \neq n. \end{cases} \quad (15)$$

Estas propiedades son útiles para simplificar la "proyección" de las ecuaciones de campo de la elasticidad sobre el plano horizontal en la superficie $z = 0$.

Introduciendo la ec. (7) en la ec. (9), considerando las ecs. (2) y (3) y tomando en cuenta que, aun cuando h sea función de x y de y , se desprecian las derivadas de h , se puede escribir:

$$U_{ii}^m - \alpha^2 U_{xx}^m - \beta^2 U_{yy}^m + \beta^2 \lambda_m^2 U^m - (\alpha^2 - \beta^2) V_{xy}^m - ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) W_x^n \frac{2}{h} \\ = \frac{1}{\rho} f_1 \frac{4(-1)^m}{\pi 2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zx}^{(0)}, \quad (16)$$

$$V_{ii}^m - \beta^2 V_{xx}^m - \alpha^2 V_{yy}^m + \beta^2 \lambda_m^2 V^m - (\alpha^2 - \beta^2) U_{xy}^m - ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) W_y^n \frac{2}{h} \\ = \frac{1}{\rho} f_2 \frac{4(-1)^m}{\pi 2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zy}^{(0)}, \quad (17)$$

$$W_{ii}^m - \beta^2 W_{xx}^m - \beta^2 W_{yy}^m + \alpha^2 \lambda_m^2 W^m + ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) [U_x^n + V_y^n] \frac{2}{h} \\ = \frac{1}{\rho} f_3 \frac{4(-1)^m}{\pi 2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zz}^{(0)}, \quad (18)$$

que es un grupo de ecuaciones diferenciales parciales acopladas y "proyectadas". Aquí $U_1^n = U^n$, $U_2^n = V^n$, $U_3^n = W^n$ y los subíndices de U , V y W significan derivadas parciales. Las derivadas espaciales se calculan usando la transformada de Fourier mediante el algoritmo FFT. La matriz a_{mn} resulta de la integral de $\varphi^n(z)$ y de su derivada, como se indica en las ecs. (14) y (15).

Puede verificarse que el acoplamiento entre las funciones horizontales en varios órdenes ($n = 0, 1, \dots, N$) surge después de la primera derivada "variacional" con respecto a z . Por otra parte, la segunda derivada de, digamos, U^m respecto a z está dada por el producto $-\lambda_m^2 U^m$.

Con objeto de introducir amortiguamiento, la forma más sencilla consiste en tomar el operador $\partial/\partial t + \gamma$ en lugar de la derivada en el tiempo. Por ejemplo, bajo esta consideración, la segunda derivada U_{ii}^n puede leerse como

$$U''_n = \frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial U^n}{\partial t} + \gamma^2 U^n \quad (19)$$

y, discretizando, en el tiempo j tenemos:

$$(U''_n)^j = \left[\left(1 + \gamma \Delta t + \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2 \right) U^{n,j+1} - 2U^{n,j} + \left(1 - \gamma \Delta t + \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2 \right) U^{n,j-1} \right] \Delta t^{-2}. \quad (20)$$

Puede mostrarse que $\gamma \approx \pi f_p / Q$ para un factor de calidad Q en la vecindad de la frecuencia f_p . De la ec. (20) y sus equivalentes para V''_n y W''_n , es posible calcular las funciones U , V y W en los puntos de la malla horizontal en el tiempo $j+1$ en función de sus valores en el tiempo $j-1$ y las derivadas espaciales en el tiempo j .

El cálculo de las derivadas horizontales se lleva a cabo con el algoritmo FFT usando todos los puntos de la malla, esto es, en un esquema global. Este enfoque pseudoespectral requiere, por lo menos, entre 2 y 3 puntos en la malla por longitud de onda mínima (las diferencias finitas pueden requerir hasta 8 puntos para obtener la misma exactitud). Finalmente, las ecs. (3) y (7) permiten calcular los desplazamientos en la superficie.

Condiciones de frontera absorbente.

Si se escoge un conjunto de funciones de prueba tales que $\varphi^m(h) \neq 0$ es posible introducir condiciones de frontera absorbente aproximadas en términos de una sustitución apropiada del esfuerzo en profundidad. La familia de cosenos:

$$\varphi^n(z) = \cos \frac{n\pi z}{h} \quad (21)$$

cumple con las condiciones de ortogonalidad y es completa en $(0, h)$. En $z = h$ su valor es $(-1)^n$.

La solución es relativamente sencilla en el dominio de la frecuencia. Supóngase un medio estratificado como el de la Fig. 2, sometido a un campo incidente de ondas planas SH .

El campo está dado por:

$$v^{(i)} = v_0(\omega) e^{-ikx} e^{+i\eta_E z} e^{+i\omega t}, \quad (22)$$

donde,

$$k = \frac{\omega}{\beta_E} \text{sen} \gamma \quad y \quad \eta_E = \frac{\omega}{\beta_E} \text{cos} \gamma, \quad (23)$$

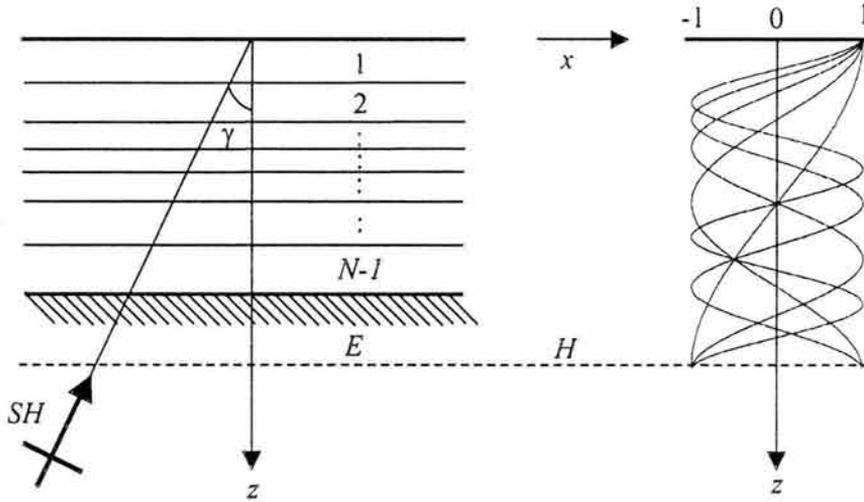


Figura 2. Medio estratificado sometido a la incidencia de un campo de onda plana SH (izq.).
Familia de funciones de prueba utilizadas para fronteras absorbentes (der.).

siendo k el número de onda horizontal y η_E el número de onda vertical; ω es la frecuencia angular y β_E la velocidad de fase de las ondas SH en el semiespacio E . Si se define al desplazamiento como un movimiento de referencia conocido, $V^{(i)}$, debido solamente al campo incidente, más un desplazamiento, $V(z)$, dado, en función de la profundidad, se puede escribir:

$$v = (V^{(i)} + V(z)) e^{-ikx} e^{+i\omega t} \quad (24)$$

es decir, $V^{(i)} = v_0(\omega) e^{+i\eta_E z}$ y $V(z)$ como el desplazamiento que será calculado utilizando una formulación de Galerkin de forma débil, en la cual se incluye a las funciones de prueba de la ec. (21). De esta manera, $V(z)$ se escribe como:

$$V(z) = \sum_{n=0} A_n \phi^n(z). \quad (25)$$

Recordando la ecuación en el dominio de la frecuencia, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 v = 0 \quad (26)$$

y, adoptando un esquema de Galerkin de forma fuerte, sustituyendo la ec. (24) en la ec. (26) y operando las derivadas queda:

$$\int_0^h \left[-k^2 \mu (V^{(i)} + V) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V^{(i)}(z)}{\partial z} + \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 (V^{(i)} + V) \right] \varphi^m(z) dz = 0, \quad (27)$$

la cual es una integral sólo en la dirección vertical, que se resuelve por partes e incluye los valores de los coeficientes A_n de la ec. (25), los cuales son las incógnitas del sistema dado por:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left[-k^2 \mu \sum A_n \varphi^n \varphi^m - \mu \sum A_n \varphi_z^n \varphi_z^m + \rho \omega^2 \sum A_n \varphi^n \varphi^m \right] dz + \left(\mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)_h \varphi^m(h) \\ & = \int_0^h +k^2 \mu V^{(i)} \varphi^m dz + \mu \frac{\partial V^{(i)}}{\partial z}(h) \varphi^m(h) + \int_0^h \mu \frac{\partial V^{(i)}}{\partial z} \varphi_z^m dz - \int_0^h \rho \omega^2 V^{(i)} \varphi^m dz \end{aligned} \quad (28)$$

que es un sistema cerrado en forma débil en el cual las derivadas parciales de V en $z = h$ son

$$\left(\mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)_h = -i \omega \rho_E \beta_E V_h. \quad (29)$$

La ec. (28) representa un sistema de m por n ecuaciones que se resuelve numéricamente. Cabe resaltar que esta ecuación contiene la información detallada de cada estrato en cuestión y que la responsabilidad de la reconstrucción de las ondas reflejadas y transmitidas se deja únicamente a las funciones de prueba. Así se tiene una representación aproximada de los coeficientes de reflexión y transmisión en cada intervalo del medio estratificado y, a su vez, una buena aproximación de las fronteras absorbentes en la base del modelo.

Un ejemplo de la aplicación de estas fronteras se da en la Fig. 3, donde se muestra la función de transferencia del desplazamiento para un modelo de 3 estratos con las mismas propiedades (prueba de transparencia), ante incidencia vertical de ondas SH . La grafica ilustra el método propuesto con línea discontinua y con línea continua la solución exacta.

Como se puede observar la aproximación es buena. Esto corrobora que la base de funciones es la correcta y que con un orden no mayor a $n = 20$ se puede obtener una buena representación de los desplazamientos en el tiempo, además de que posiblemente pueden suprimir la condición de base rígida del VPM. Los resultados mostrados en este artículo corresponden a la formulación original (base rígida), que utiliza la familia de funciones de la ec. (10). La formulación correspondiente a la familia de funciones de la ec. (21) está siendo extendida a casos bidimensionales para estudiar los efectos de dispersión producidos por grietas o cavidades (Iturrarán-Viveros, comunicación personal).

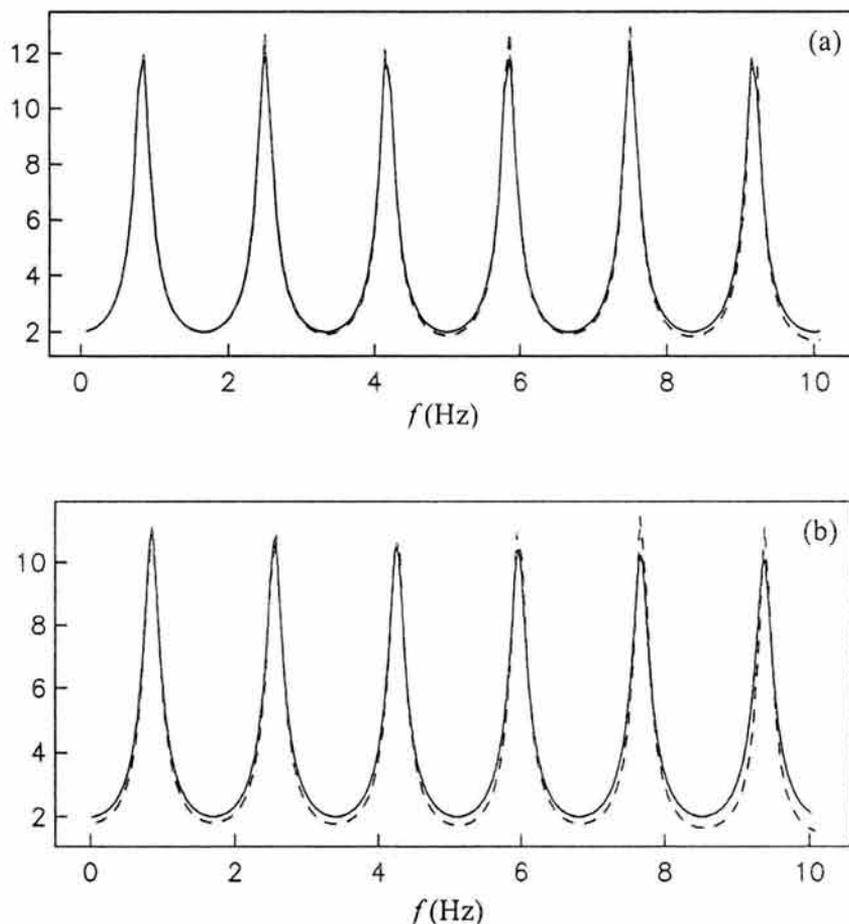


Figura 3. Función de Transferencia del desplazamiento para 3 estratos. $\rho/\rho_E = 0.4$, $\beta/\beta_E = 0.4$ y $h = 300$ m. (a) Incidencia normal de ondas SH ($\gamma = 0^\circ$). (b) Incidencia oblicua ($\gamma = 30^\circ$)

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se realizaron algunas pruebas y comparaciones en el caso bidimensional, para verificar el comportamiento numérico, los tiempos de cálculo y la exactitud del método propuesto. Se tomaron como referencia otras técnicas de solución como las correspondientes a las funciones de Green y al Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM).

La Fig. 4 muestra el modelo de un valle en forma trapezoidal propuesto por Kawase y Aki (1989) que se tomó para comparar al VPM contra un método que utiliza funciones de Green. La Fig. 5 muestra los sismogramas sintéticos obtenidos para el modelo del valle citado.

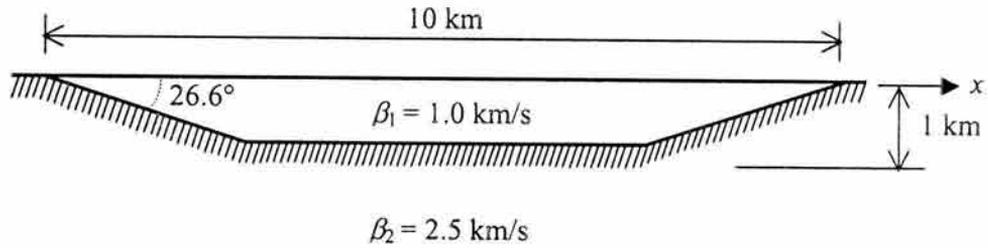


Figura 4. Modelo de valle trapezoidal

Esta figura muestra las ondas generadas por las esquinas del depósito propagándose horizontalmente, las cuales corresponden al modo fundamental de las ondas de Love como lo señalaron Kawase y Aki (1989). La amplitud de las ondas de Love es menor que la de la onda directa. Sin embargo, estas ondas superficiales hacen que la duración total de los registros se vea prolongada. Los intervalos de tiempo entre el arribo de la onda directa y la onda de Love son menores de 10 segundos cerca de las esquinas. Los sismogramas corresponden a una incidencia vertical de ondas SH y un pulso de Ricker con $f_c = 0.25$ Hz (4s). Es notable la similitud de ambos sintéticos.

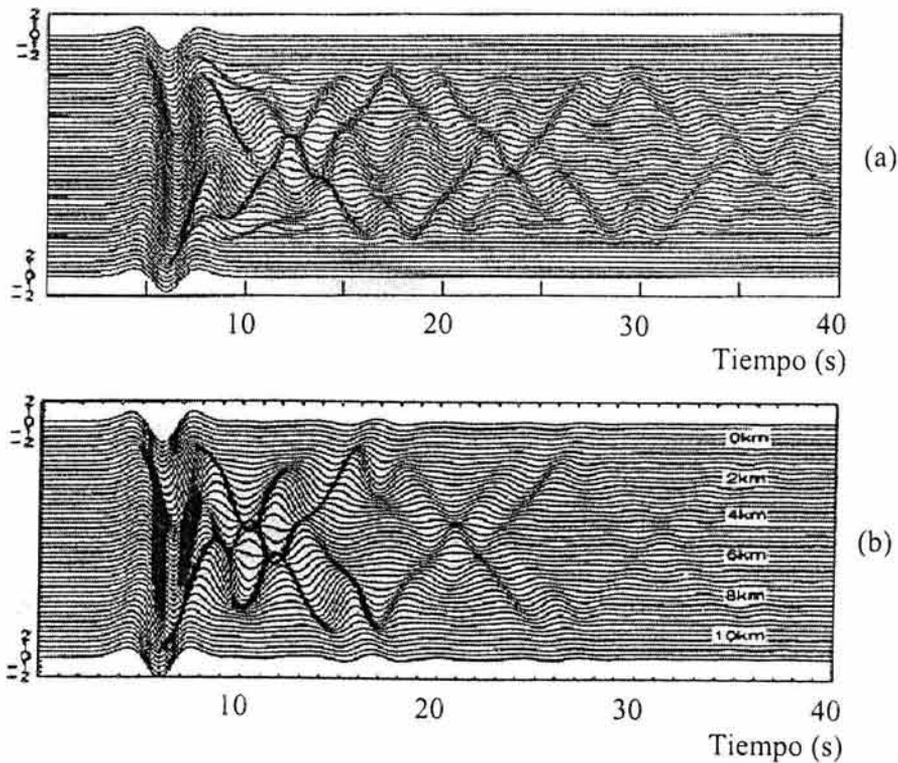


Figura 5. (a) Sismograma sintético a lo largo de la superficie del depósito de la Fig. 4. (b) El mismo caso que (a), obtenido con el método de funciones de Green utilizado por Kawase y Aki (1989).

La Fig. 6 muestra la respuesta para un pulso de Ricker con un frecuencia central $f_c = 0.5\text{Hz}$. Las condiciones son las mismas que en la Fig. 5. La amplitud máxima de la onda de Love decrece porque la energía se dispersa entre el modo fundamental y el primer modo superior, como lo demuestran Kawase y Aki (1989).

Si se observa con detenimiento la Fig. 6 podemos resaltar que los sismogramas sintéticos obtenidos con el VPM ofrecen una buena similitud en la respuesta del depósito con respecto del método de referencia. Sin embargo, aunque las trazas representan correctamente la propagación de las ondas dentro del valle, estas muestran un rizamiento a lo largo de toda la respuesta. Esto se debe a que la frecuencia del pulso de Ricker es más alta y nos acercamos a los límites de estabilidad del método (condición de Courant). Por otra parte, la formulación rígida del VPM no permite la correcta absorción de la energía dentro del valle.

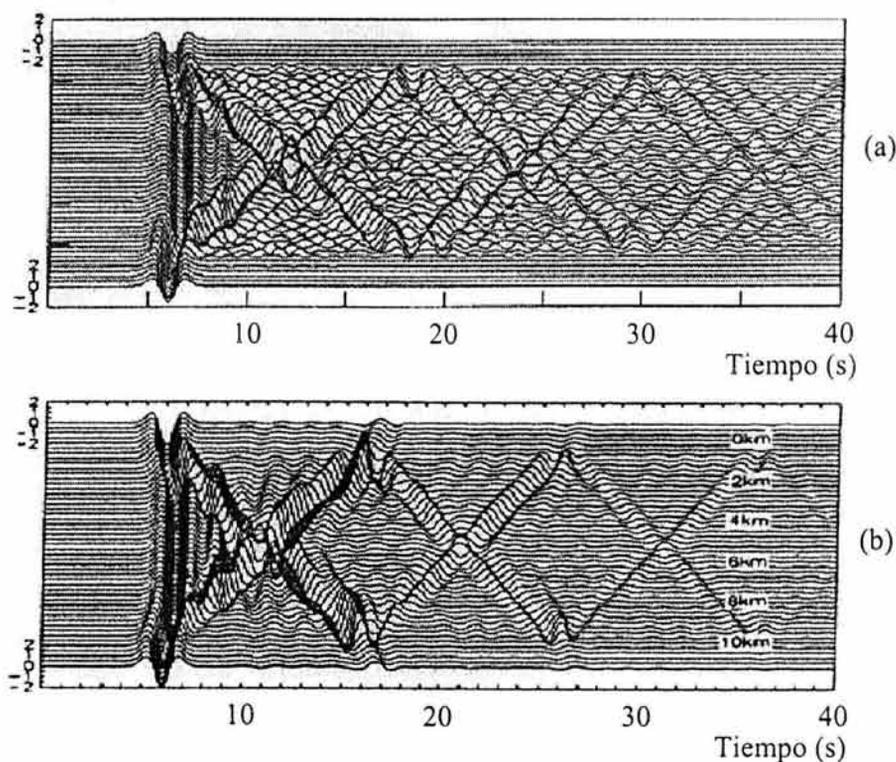


Figura 6. (a) Sismograma sintético a lo largo de la superficie del depósito de la Fig. 4. (b) El mismo caso que (a), obtenido con un método de funciones de Green.

Enseguida se considera el caso de incidencia de una onda plana SV . La Fig. 7 muestra la respuesta del depósito de la Fig. 4 para una onda de este tipo que incide verticalmente con $f_c = 0.25\text{Hz}$. Es muy clara la aparición de trenes sucesivos de ondas en la zona de transición (componente horizontal) y en la parte plana (componente vertical). La diferencia entre la incidencia de ondas SH y SV se debe principalmente al hecho de que las velocidades de fase y de grupo del modo fundamental de la onda de Rayleigh son considerablemente mayores que las de

las ondas de Love para la frecuencia correspondiente. La onda de Rayleigh generada en las esquinas necesitó solamente 5 segundos para alcanzar la esquina opuesta.

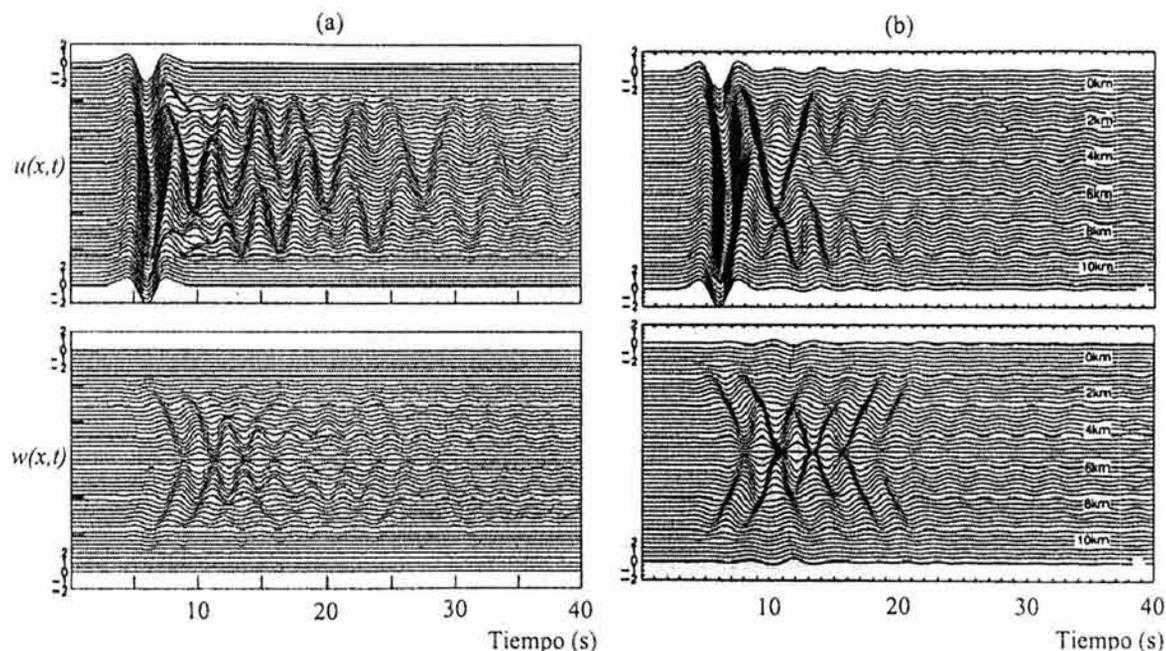


Figura 7. Historias de tiempo de las componentes horizontal u , y vertical w . (a) Método propuesto; (b) Método de funciones de Green.

Si se analiza la Fig. 8 se puede ver que ante la incidencia de una onda con un contenido de frecuencia más alto ($f_c = 0.5\text{ Hz}$) existen ondas de Rayleigh claramente definidas. En este caso el VPM logra reproducir el modo fundamental y el primer modo superior, aunque se nota un tercer frente de ondas. Éste no corresponde a los resultados observados por el método de funciones de Green. De lo anterior resulta claro que aunque el VPM ofrece una velocidad de proceso muy alta, los resultados obtenidos presentan sólo buenas aproximaciones de la realidad. Así, para el mejoramiento de esta técnica es necesario depurar las condiciones de frontera, principalmente en la base del modelo.

También se realizaron algunas comparaciones para el caso tridimensional de un modelo como el de la Fig. 9, que consiste en un valle aluvial somero de forma irregular, ante la incidencia de ondas SH . Las velocidades de la onda S en los sedimentos y el semiespacio son $\beta_R = 1\text{ km/s}$ y $\beta_E = 2.5\text{ km/s}$ respectivamente, los coeficientes de Poisson son $\nu_R = 0.35$ y $\nu_E = 0.25$ y las densidades están relacionadas por $\rho_R = 0.8\rho_E$, donde ρ_E es la densidad del basamento. El factor de calidad en el basamento es de $Q = 100$. Este modelo fue propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995) quienes enfatizan la buena resolución y calidad de los resultados. Por ello se eligió como un buen modelo de comparación.

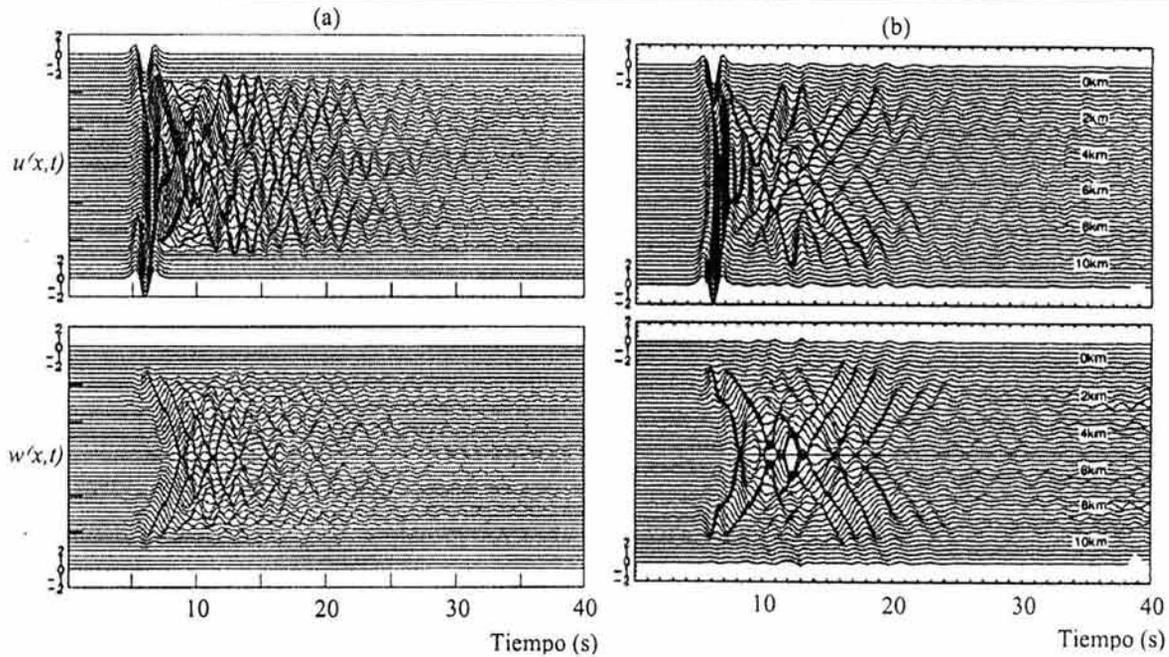


Figura 8. Respuestas u y w para el valle de la Fig. 4. Incidencia vertical de ondas SV con un pulso de Ricker $f_c = 0.5\text{ Hz}$ (2s). (a) VPM; (b) Funciones de Green.

La Fig. 10 contiene los sismogramas sintéticos obtenidos para un arreglo de detectores ubicados a lo largo de los ejes x e y mostrando las componentes del movimiento en la dirección de v y las componentes horizontal u , y vertical w , a lo largo del eje y . Se trata de una incidencia oblicua de ondas SH con un ángulo de incidencia $\gamma = 30^\circ$. Se utilizó un pulso de Ricker con un período $t_p = 3\text{ s}$. Aquí se presentan los resultados obtenidos con el método propuesto y con el IBEM. En general se observa una buena similitud entre los dos. Los resultados son muy alentadores ya que el VPM representa correctamente la onda incidente y su respuesta unidimensional al entrar en contacto con el valle. Sin embargo, la reproducción de las ondas superficiales de Love resulta más compleja debido a la concentración de energía por la geometría del valle y la formulación rígida del VPM. Por otra parte, el VPM necesitó sólo algunos minutos para su cálculo en una estación de trabajo mientras que el IBEM requirió de 5 días de CPU en la misma estación. Esto hace al VPM un método poderoso, más aún por su formulación directa en el tiempo y su buena resolución 3D, la cual se ilustra a continuación en la Fig. 11.

La Fig. 11 muestra las simulaciones dinámicas para cuatro tiempos de visualización ($U_1 = 6$, $U_2 = 7$, $U_3 = 8$ y $U_4 = 9\text{ s}$) en las componentes u , v y w del desplazamiento, para una onda SH que incide con un ángulo de incidencia $\gamma = 30^\circ$. Se puede observar que el movimiento refleja mayores amplitudes alrededor de los 8s para los tres casos mostrados. Estas instantáneas en el tiempo permiten observar los efectos locales que afectan a la propagación de ondas dentro del medio de interés. Así, se pueden obtener resultados confiables de la respuesta sísmica del terreno

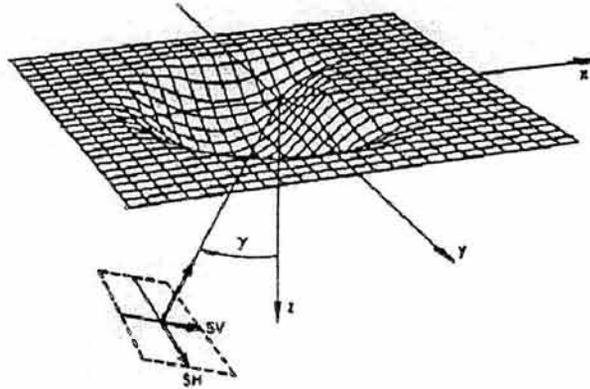


Figura 9. Modelo de valle aluvial somero propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995).

para un sitio específico. Por otra parte, habrá que resaltar su aplicación para analizar efectos azimutales en la propagación y generación de ondas superficiales en un valle de nuestro interés, como el de la Ciudad de México.

El objetivo de mostrar las simulaciones dinámicas para el movimiento es que esto permite realizar un análisis tridimensional directamente en el tiempo. La irradiación de energía hacia el semiespacio, la propagación, amortiguamiento y dispersión de las ondas dentro y fuera del valle, constituyen características de suma importancia para la comprensión del fenómeno sísmico. Si se establece una comparación con los análisis de frecuencias de otros autores, se podría entender este fenómeno en mejores condiciones.

Los casos de incidencia *SH* tratados por medio del VPM muestran una buena correlación con la emisión tardía de pulsos difractados mostrados por el IBEM. Sánchez-Sesma y Luzón (1995) resaltan esta emisión típica de energía difractada, no obstante que un valle con estas características presenta una atenuación geométrica muy fuerte.

Se ha observado que la rapidez de cálculo del VPM sobrepasa por mucho a la de otros métodos y que su aproximación es aceptable para la mayoría de los casos mostrados. Por ello se espera aplicar con éxito el VPM en el futuro, en casos de valles más complejos preferentemente correspondientes a casos realistas como podría ser, eventualmente, el Valle de México. Con esto se pretende aprovechar las ventajas de formulación y facilidad de operación del VPM ante el modelado sísmico de un problema real.

Sin embargo, la investigación en este campo es aún incipiente. Se requiere, mediante el uso de los correspondientes operadores de interfaz, revisar las aproximaciones que pueden proporcionar diversas familias de funciones de prueba y adecuar el problema en el dominio del tiempo para el caso de fronteras absorbentes o dinámicas. Los resultados deberán verificarse contra casos reales.

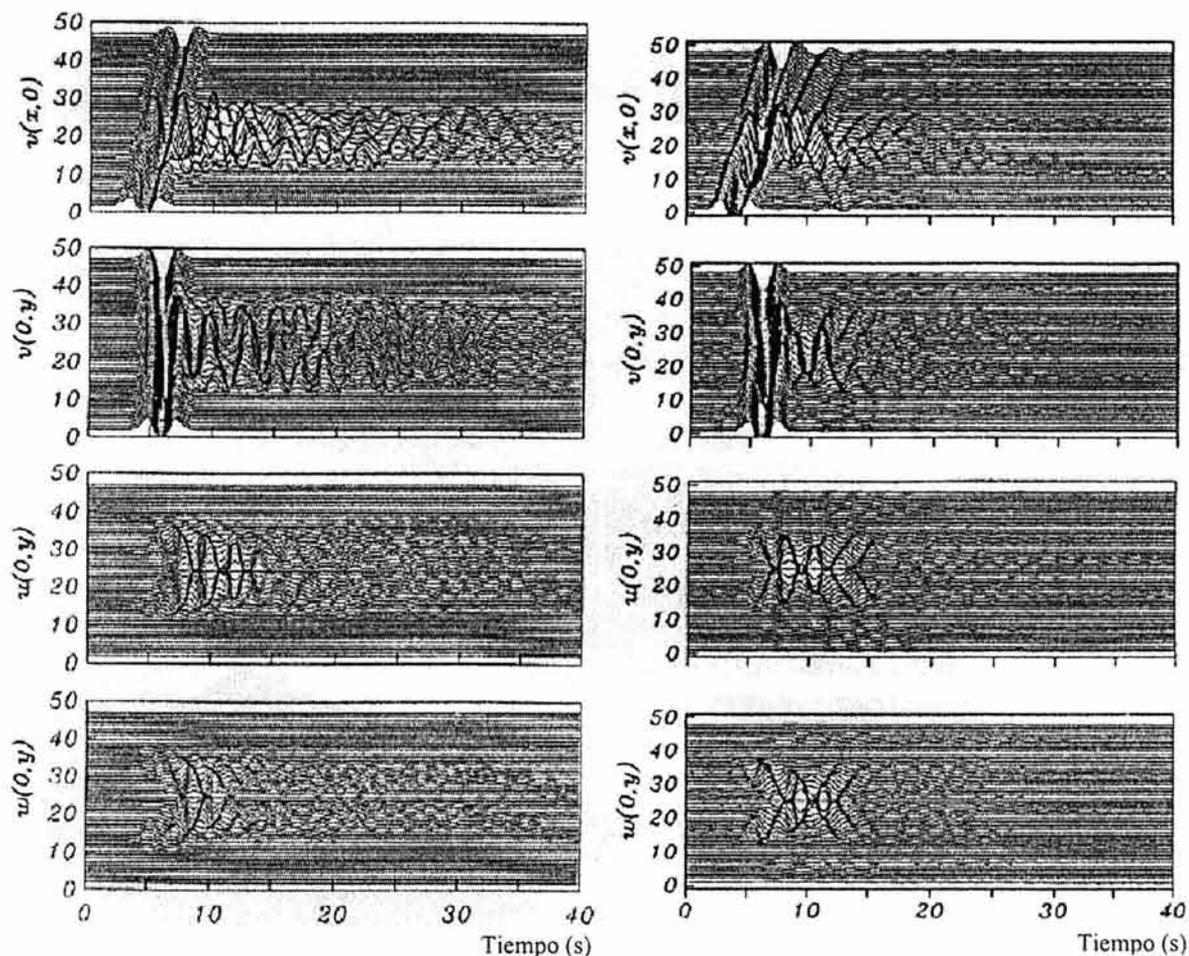


Figura 10. Sismogramas sintéticos para el modelo de la Fig. 9 obtenidos con: (a) VPM y (b) el método indirecto de elementos de frontera (IBEM).

CONCLUSIONES

Se ha presentado el Método de Proyección Variacional (VPM). Éste calcula la respuesta sísmica tridimensional de valles aluviales someros. El problema se resuelve mediante una aproximación basada en una formulación variacional de Galerkin de forma débil. Se supone un depósito con geometría irregular, de forma suave, donde se aplica el método de Galerkin por medio de un grupo de funciones de prueba para establecer la dependencia con la profundidad. Así se obtiene un grupo de ecuaciones diferenciales que se acoplan y se "proyectan" en el plano horizontal sobre la superficie del modelo donde se resuelven usando un esquema pseudoespectral. Esta aproximación se aplicó a dos modelos de valles aluviales en 2D y 3D, respectivamente. Se utilizó el modelo propuesto por Kawase y Aki (1989), quienes resuelven el problema para el caso bidimensional utilizando un grupo de funciones de Green para explicar las largas duraciones de

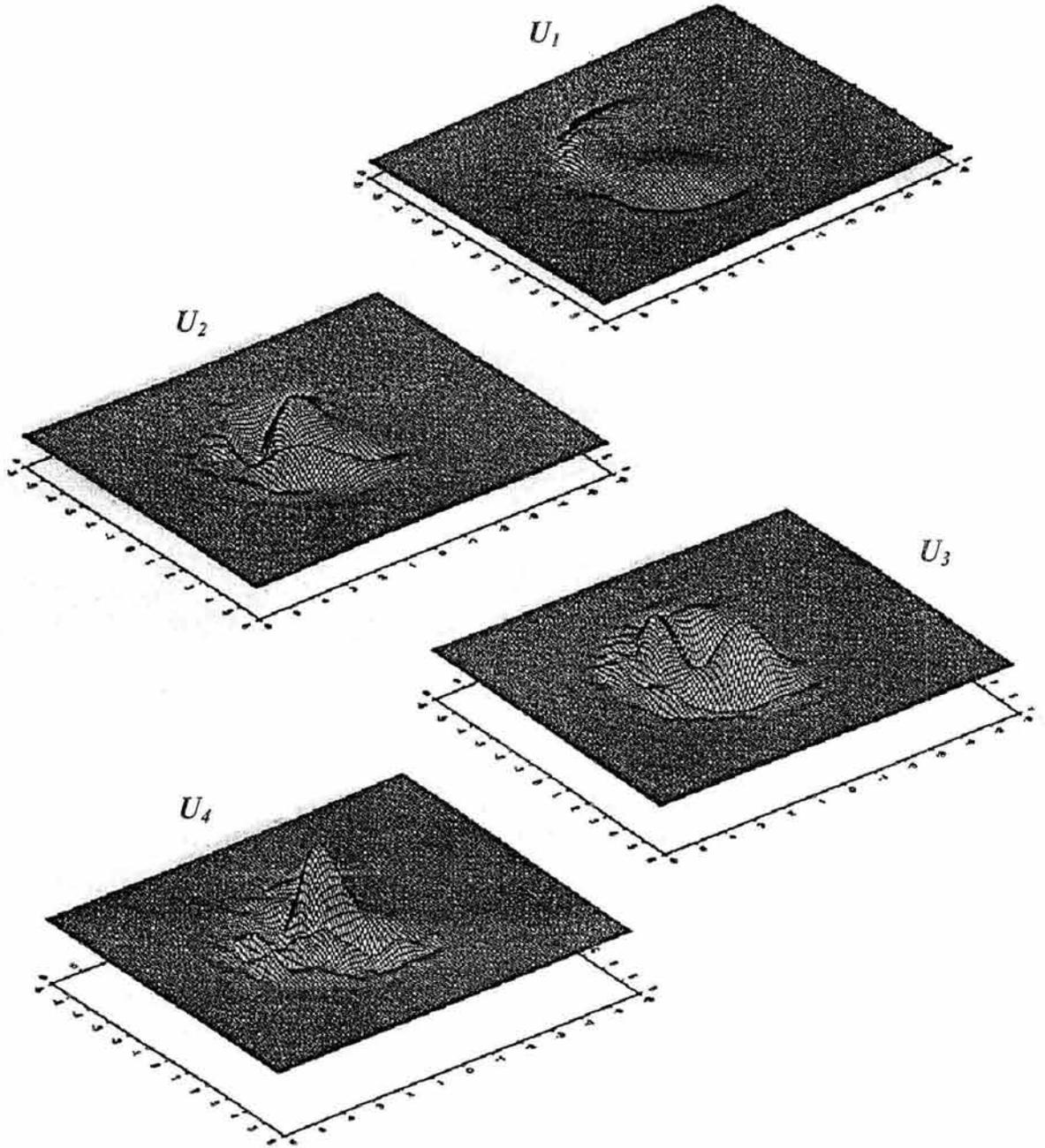


Figura 11. (a) Simulación dinámica, en la componente u , para el modelo de la Fig. 9 en cuatro tiempos de visualización.

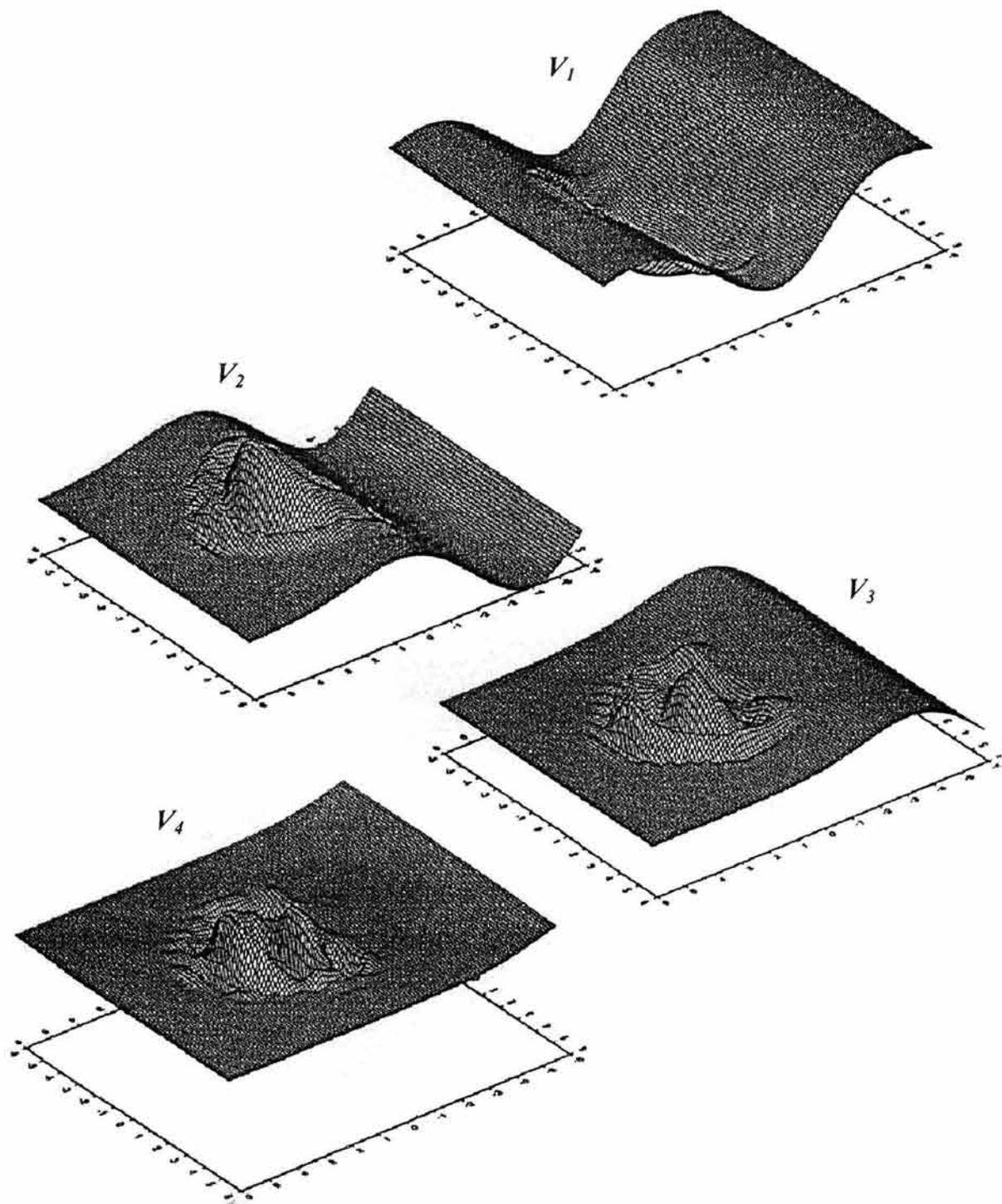


Fig. 11 (b) Componente v .

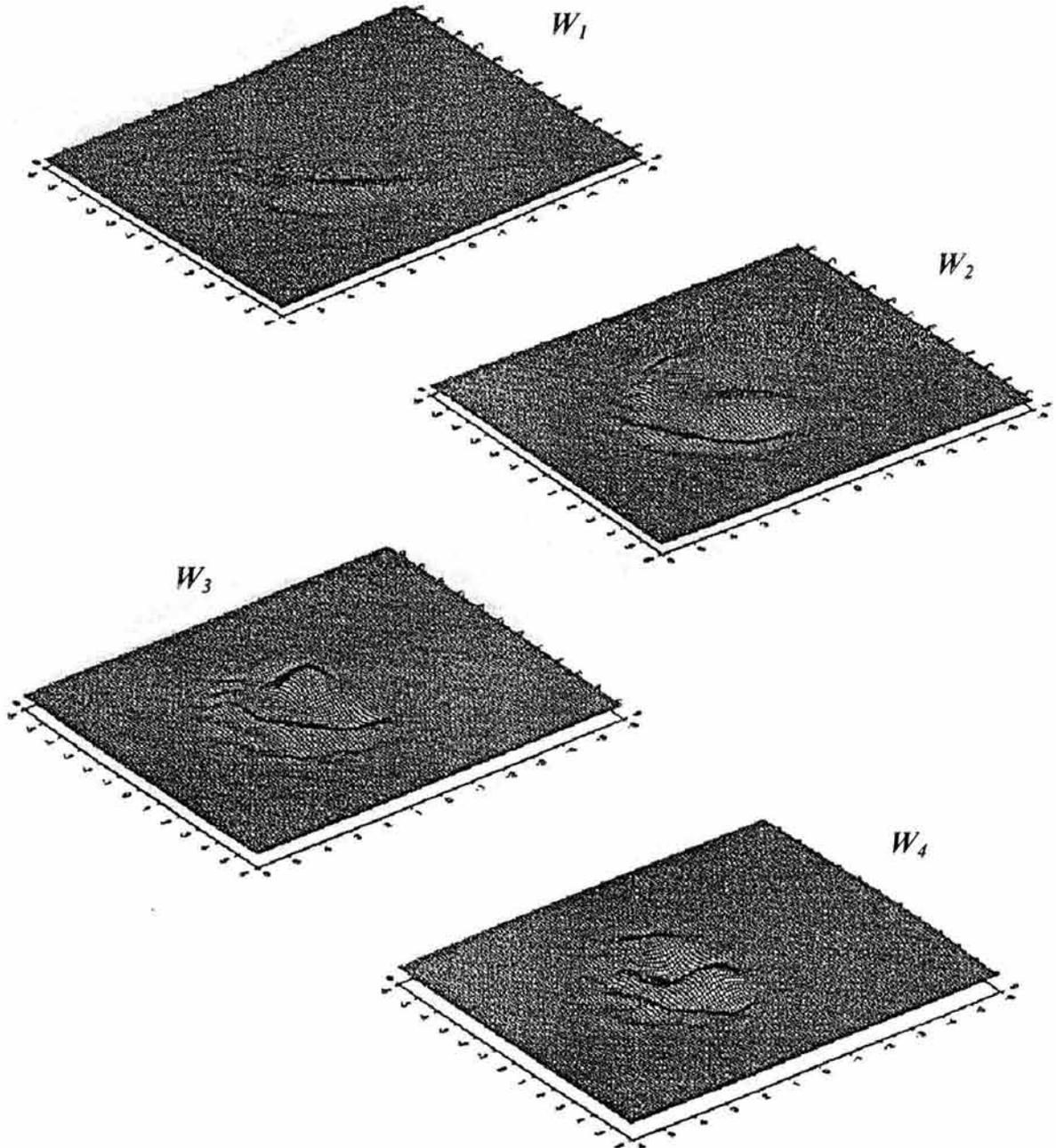


Figura 11. (c) Componente w .

los registros de la Ciudad de México. En este caso el acuerdo entre los resultados obtenidos por ambos métodos fue satisfactorio. Así mismo se realizaron algunos cálculos tomando el modelo

tridimensional propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995) para observar la aproximación de resultados entre el método propuesto y el IBEM. El VPM mostró rapidez en los cálculos y buena aproximación en los resultados. El VPM ofrece una buena alternativa para la simulación del movimiento del terreno y constituye una herramienta que puede emplearse para obtener una aproximación práctica y cuantitativa del estudio de la respuesta sísmica de un sitio. El método se encuentra aún en desarrollo y restan algunos puntos importantes que deben resolverse antes de poder aplicarlo para la simulación de casos más realistas. Particularmente, se deben optimar las condiciones de frontera absorbente y así mejorar la solución en el dominio del tiempo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a G. Quiroga-Goode, R. Martin, y K. Irikura por la lectura crítica de este manuscrito y sus comentarios. A J. Bielak, E. Faccioli y R. Geller, por sus sugerencias (sus trabajos proporcionaron ideas para la formulación del método aquí presentado). Parte de los cálculos fue hecha en la CRAY-YMP de la UNAM, México. Este trabajo estuvo auspiciado en parte por DGAPA-UNAM., México, (proy. IN-104998), la Japanese Society for the Promotion of Science, CONACYT, México; por Cray Research Inc., y el Instituto Mexicano del Petróleo.

REFERENCIAS

- Aki, K (1988), "Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane *SH* waves", *Journal Geophysical Research*, Vol. 75, pp. 933-954.
- Ávila, R, M Suárez y F J Sánchez-Sesma (1993), "Simulación de la propagación de ondas sísmicas en configuraciones irregulares con un método pseudo-espectral", *Memorias del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Puerto Vallarta, Jal., México, pp. 182-189.
- Faccioli, E, F Maggio, A Quarteroni y A Tagliani (1996), "Spectral domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations", *Geophysics*, Vol. 61, No. 4, pp.1160-1174.
- Frankel, A (1993), "Three-dimensional simulations of ground motion in the San Bernardino Valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault", *Bulletin of Seismological Society of America*,. Vol. 83, 1020-1041.
- Furumura, K y H Takenaka (1996), "2.5 modelling of elastic waves using the pseudospectral method", *Geophysical Journal International*, Vol. 124, pp. 820-832.
- Geller, R J, T Hara y S Tsuboi (1990), "On the equivalence of two methods for computing partial derivatives of seismic waveforms", *Geophysical Journal International*, Vol. 102, pp. 499-502.
- Geller, R J y T Ohminato (1994), "Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the Direct Solution Method", *Geophysical Journal International*, Vol. 116, pp. 421-446.
- Geller, R J y T Hatori (1995), "DSM synthetic seismograms using analytical trial functions: plane-layered, isotropic, case", *Geophysical Journal International*, Vol. 120, pp. 163-172.

- Graves, R W y R Clayton (1992), "Modeling path effects in three dimensional basin structures", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol. 82, pp. 81-103.
- Horike, C (1990), "A finite element method for solving Helmholtz type equations in wave guides and other unbounded domains", *Mathematics of Computation*, Vol. 39, pp. 209-324.
- Kawase, H y K Aki (1989), "A study on the response of a soft basin for incident *S*, *P* and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol. 79, pp. 1361-1382.
- Luco, J E, H I Wong y F C P De Barros (1990), "Three-dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 799-817.
- Olsen, K B, R J Archuleta y J R Matarese (1995), "Three-dimensional simulation of a magnitude 7.75 earthquake on the San Andreas fault", *Science*, Vol. 270, pp. 1628-1632.
- Olsen, K B, R Madariaga y R J Archuleta (1997), "Three-dimensional dynamic simulation of the 1992 Landers Earthquake", *Science*, Vol. 278, pp. 834-838.
- Pérez-Rocha, L E, F J Sánchez-Sesma y E Reinoso (1991), "Three-dimensional site effects in Mexico City: evidences from accelerometric network observations and theoretical results", *Memorias, 4th International Conference on Seismic Zonation*, Stanford, California, agosto 25-29, Vol. II, pp. 327-334.
- Perrot, J, F J Sánchez-Sesma, K Irikura, J L Rodríguez-Zúñiga y R Ávila (1995), "Simulation of seismic response of Osaka basin during the January 17, 1995 Kobe earthquake using the Variational Projection Method", *Memorias, AGU Fall meeting*, San Francisco.
- Sánchez-Sesma, F J (1987), "Site effects on strong ground motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 6, pp. 124-132.
- Sánchez-Sesma, F J, R Madariaga y K Irikura (2001), "An approximate elastic 2D Green's function for a constant-gradient medium", *Geophysical Journal International*, Vol. 146, pp.237-248.
- Sánchez-Sesma, F J, J Ramos y M Campillo (1993), "An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident *P*, *S* and Rayleigh waves", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, pp. 279-295.
- Sánchez-Sesma, F J y F Luzón (1995), "Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident *P*, *S*, and Rayleigh waves", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol. 85, pp. 269-284.
- Sánchez-Sesma, F J, K Irikura, J Perrot, J L Rodríguez-Zúñiga y R Ávila (1996), "The Variational Projection Method: A new technique to simulate the seismic response of shallow alluvial valleys", *Memorias, 11th World Conference on Earthquake Engineering*, Acapulco, México, Artículo No.946, CD-ROM.
- Singh, S K, R Quaas, M Ordaz, F Mooser, D Almora, M Torres y R Vázquez (1995), "Is there a truly "hard" rock site in the Valley of Mexico?", *Geophysical Research Letters*, Vol. 22, pp. 481-484.

ANEXO C

RESPUESTA SÍSMICA Y DIFRACCIÓN POR GRIETAS CON EL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

A. Rodríguez-Castellanos⁽¹⁾, R. Ávila-Carrera⁽¹⁾ y F. J. Sánchez-Sesma⁽²⁾

RESUMEN

La presencia de grietas en materiales elásticos provoca dispersión y difracción durante la propagación de ondas. En algunos problemas de ingeniería, bajo ciertas condiciones, las amplitudes de los desplazamientos en superficie muestran picos, los cuales han sido atribuidos a resonancias locales del estrato contenido entre la cara superior de la grieta y la superficie libre. Para muchas aplicaciones, tales como pruebas no destructivas o exploraciones petroleras, el campo difractado producido durante la propagación de ondas proporciona valiosa información para la detección y caracterización de grietas u otras heterogeneidades. En este trabajo empleamos el Método Indirecto de Elementos de Frontera (MIEF) para estudiar la difracción de ondas P, SV y de Rayleigh en un medio agrietado. Este método se basa en una representación integral del campo elástico difractado usando fuentes de frontera de capa simple. Nuestro método es validado comparando los resultados obtenidos con otros existentes en la literatura. Los resultados, en frecuencia, muestran la existencia de picos de resonancia que varían según la profundidad de la grieta, estando mas definidos para el caso de grietas muy superficiales. Esto mismo puede observarse en los resultados en tiempo.

SUMMARY

The presence of subsurface cracks may give rise to scattered body and surface waves. For example, in some engineering problems, under certain conditions the amplitude spectra of those waves clearly show conspicuous resonance peaks, which are associated to the trapped energy of the layer located between the upper crack face and the free surface. For many applications such as non-destructive testing or in oil exploration the scattered field yields valuable information to detect cracks and other scatterers from surface waves. We use the Indirect Boundary Element Method to study scattering of P, SV and Rayleigh in a cracked medium. The method is based on the integral representation for scattered elastic waves using single layer boundary sources. We test our method by comparing the results to those previously published. Diffraction by multiple cracks with different configurations is presented. Results in frequency and time domains are displayed. In frequency domain, conspicuous peaks are seen, which are more defined for the case of shallower cracks than for deeper ones. We have found that there are more wave interactions for the case of deeper cracks than for shallower ones. This is due to the wave has more distance to recover its wave front.

Artículo recibido el 25 de abril de 2003 y aprobado para su publicación el 17 de junio de 2004. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

⁽¹⁾ Instituto Mexicano del Petróleo; Eje Central Lázaro Cárdenas 152; Col. San Bartolo Atepehuacan; Gustavo A. Madero 07730 México D.F., México. arcastel@imp.mx, rcarrer@imp.mx

⁽²⁾ Instituto de Ingeniería, UNAM; Ciudad Universitaria, Apdo. 70-472; Coyoacán 04510 México D.F., México. sesma@servidor.unam.mx

INTRODUCCIÓN

La presencia de grietas en elementos estructurales o componentes mecánicos es relativamente frecuente en diversas instalaciones industriales. Tales grietas son ocasionadas por cargas excesivas, fatiga del material y defectos inherentes al proceso de fabricación e instalación. Estas irregularidades son motivo de estudio para investigadores e ingenieros del área estructural y mecánica. Las herramientas comunes de la resistencia de materiales (e.g. Timoshenko, 1963) en ocasiones resultan insuficientes para el análisis del comportamiento de medios agrietados. Entonces es necesario emplear los criterios desarrollados en la mecánica de la fractura.

Las ideas fundamentales sobre el comportamiento de sólidos agrietados se deben a A. Griffith, quién las introdujo mediante un planteamiento energético (Griffith, 1921). Años más tarde Irwin (1948) y Orowan (1948) sentaron las bases para establecer a la mecánica de la fractura como una disciplina de la ingeniería. Casi una década después Irwing (1957) introdujo un concepto fundamental en la mecánica de la fractura, relacionando la energía de deformación liberada, propuesta por Griffith, con el Factor de Intensidad de Esfuerzos (FIE). Este parámetro es fundamental en la mecánica de la fractura lineal elástica pues permite conocer la intensidad de los esfuerzos desarrollados en la vecindad de la punta de una grieta. Además, el FIE es determinante en el crecimiento de las grietas en los sólidos. Si este crecimiento es rápido se puede tener el denominado comportamiento frágil.

Al mismo tiempo fueron introducidos a la mecánica de la fractura conceptos como velocidades de propagación de ondas en sólidos, evaluación de la energía cinética en un cuerpo agrietado y velocidades límite de propagación de grietas (Mott (1948), Roberts y Wells (1954) y Stroh (1957), respectivamente). Con lo que se inició el estudio de problemas relacionados con los efectos dinámicos en sólidos agrietados, sentando las bases de la Dinámica de la Fractura.

Una importante contribución a la dinámica de la fractura fue realizada por Yoffé (1951) quién determinó el campo de esfuerzos en la vecindad de la punta de una grieta propagándose en una región infinita. Otros investigadores como Craggs (1960), Broberg (1960), Baker (1962) y Freund (1972) estudiaron el problema de curvatura, ramificación y arresto de grietas, además de la difracción de ondas en sólidos debido a la presencia de grietas estacionarias o propagándose.

Paralelamente, se han desarrollado métodos numéricos para la solución de problemas en dinámica de la fractura y específicamente para aquellos relacionados con la interacción de ondas en medios agrietados. Estos métodos han servido para simular componentes o sistemas agrietados sujetos a diferentes condiciones de carga y de frontera. Por ejemplo, Chen (1975) fue quién inicialmente aplicó el método de diferencias finitas a problemas de propagación de ondas en medios agrietados. En su trabajo reporta la solución del problema de una placa con dimensiones finitas, que posee una grieta central, sujeta a una carga súbita de tensión. Chen comparo sus resultados con los reportados por Baker (1962), quién solucionó analíticamente el mismo problema pero formulado en un medio infinito. Los resultados obtenidos coinciden satisfactoriamente hasta cierto punto, dado que en el problema desarrollado por Baker no se contempla la reflexión de ondas en las fronteras por haber considerado un dominio infinito. Ahora es bien sabido que la aplicación del método de diferencias finitas se reduce a geometrías

sencillas, resultando poco atractivo para problemas con mayor complejidad geométrica (Kanninen, 1978). Frangi (1998) y Rodríguez *et al.* (1999) resolvieron el mismo problema mediante el método de elementos de frontera y el método de elementos finitos, respectivamente. Ellos observaron que el comportamiento del sistema analizado se basa principalmente en la interacción de ondas entre las fronteras de la placa y las superficies de la grieta. Esta interacción da resultado a la generación de fuertes alteraciones al comportamiento del FIE.

A principios de los 90's fue desarrollada una formulación denominada Método Indirecto de Elementos de Frontera (MIEF), la cual ha sido aplicada exitosamente en la propagación de ondas SH, P, SV y de Rayleigh en medios elásticos (e.g. Sánchez-Sesma *et al.* 1991, 1993 y 1995; Luzón *et al.* 1997; Vai *et al.* 1999). Este método se emplea en este trabajo con el propósito de analizar la respuesta sísmica y difracción por una o varias grietas en un medio elástico, ante incidencia de ondas P, SV y Rayleigh. El método se basa en una representación integral del campo elástico difractado en términos de fuentes de frontera de capa simple, la cual se deriva de la identidad de Somigliana. La introducción de las condiciones de frontera conduce a una ecuación integral del tipo Fredholm de segunda clase de fuentes de frontera. Se emplea un esquema de discretización basado en una integración numérica y analítica de las funciones exactas de Green para desplazamientos y tracciones.

METODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

Representación integral

Sea un dominio V , delimitado por su frontera S . Si este dominio esta formado por un material elástico, el campo de desplazamientos armónicos puede ser escrito, despreciando las fuerzas de cuerpo, por

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (1)$$

donde $u_i(\mathbf{x})$ es la i -ésima componente de desplazamiento en \mathbf{x} , $G_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$ es el tensor de Green, el cual representa el desplazamiento en la dirección i en el punto \mathbf{x} debido a la aplicación de una fuerza unitaria en dirección j en el punto ξ , y $\phi_j(\xi)$ es la densidad de fuerza en la dirección j . El producto $\phi_j(\xi) dS_\xi$ en la integral representa a una distribución de fuerzas sobre la superficie S . El subscrito en la diferencial muestra la variable sobre la cual es realizada la integración. Esta representación integral se puede obtener a partir de la identidad de Somigliana (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991). Kupradze (1963) demostró que si $\phi_j(\xi)$ es continua a lo largo de S , entonces el campo de desplazamientos es continuo a través de S . De esta manera, el cálculo de esfuerzos y tracciones se realiza mediante la aplicación directa de la Ley de Hooke y la ecuación de Cauchy (excepto en singularidades de frontera, esto es cuando \mathbf{x} es igual a ξ sobre la superficie S).

Mediante un proceso límite basado en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir las tracciones para \mathbf{x} sobre S como

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (2)$$

donde $t_i = i$ -ésima componente de tracción asociada a la dirección normal $n(\mathbf{x})$, frontera suave, $c = 0.5$ si \mathbf{x} tiende a S desde dentro de la región, $c = -0.5$ si \mathbf{x} tiende a S desde fuera de la región y $c = 0$ si \mathbf{x} no está contenida en S . $T_{ij}(\mathbf{x}; \xi) =$ tensor de Green de tracciones, es decir, la tracción en la dirección i en el punto \mathbf{x} , sobre la frontera con normal asociada $n(\mathbf{x})$, debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en ξ sobre S .

Funciones de Green bidimensionales

En un medio infinito, elástico, homogéneo e isótropo, las funciones de Green para dependencia tiempo-armónico $e^{i\omega t}$, donde $i^2 = -1$, $\omega =$ frecuencia angular, y $t =$ tiempo, pueden expresarse como

$$G_{ij} = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}), \quad (3)$$

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[-4B + \lambda \frac{D(\omega r / \alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[-4B + \frac{D(\omega r / \beta)}{2\beta^2} \right] \times \left[\gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij} \right] \right\} + \frac{\mu}{r} \left\{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \right\}, \quad (4)$$

donde

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_0^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_2^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (6)$$

$$C = \frac{D(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r / \beta)}{\beta^2}, \quad (7)$$

$$D(p) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p), \quad (8)$$

λ y μ son las constantes de Lamé, ρ es la densidad de masa, α y β corresponden a las velocidades de propagación de ondas P y S, respectivamente; $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$, $\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$, δ_{ij} es la delta de Kronecker y $H_m^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de segunda especie y orden m .

Formulación del problema

A partir de la configuración mostrada en la fig. 1, resulta conveniente dividir el dominio en dos regiones (R y E), donde se establezcan las condiciones de frontera adecuadas para representar al problema. En la fig. 2 se muestran estas regiones, en donde $\partial R = \partial_1 R \cup \partial_2 R \cup \partial_3 R$ para la región R , y $\partial E = \partial_1 E \cup \partial_2 E$ para la región E .

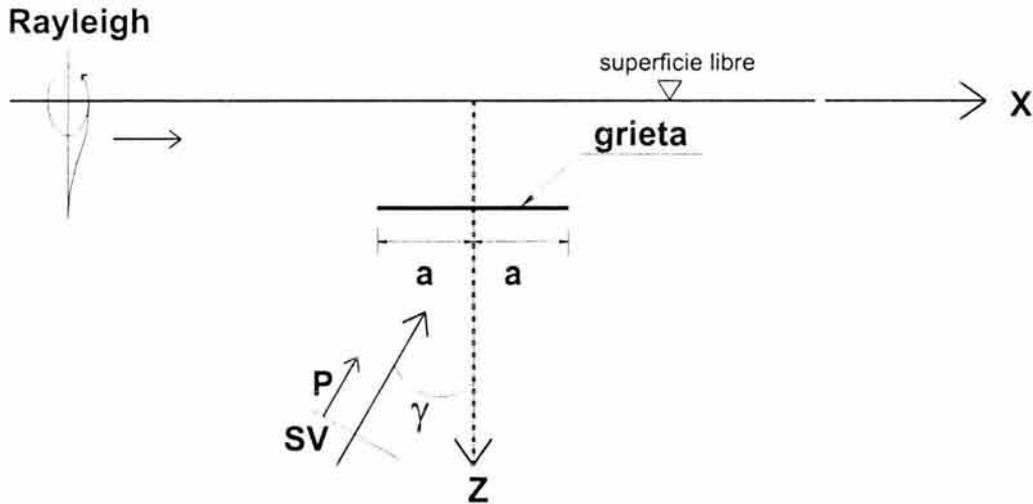


Figura 1. Semiespacio elástico que contiene una grieta ante la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh.

De acuerdo con la fig. 2, en $\partial_3 R$ (superficie libre) se tiene que las tracciones son nulas, por lo tanto éstas pueden escribirse como

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R. \quad (9)$$

En las regiones R y E de interfaz continua, o no agrietada, los desplazamientos y tracciones están dados por

$$u_i^R(\mathbf{x}) = u_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (10)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E. \quad (11)$$

En la discontinuidad o grieta las tracciones son nulas. En el caso de difracción múltiple (presencia de varias grietas) esta condición se mantiene simultáneamente para todas las grietas, y por lo tanto se tiene que:

$$t_i^E(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (12)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (13)$$

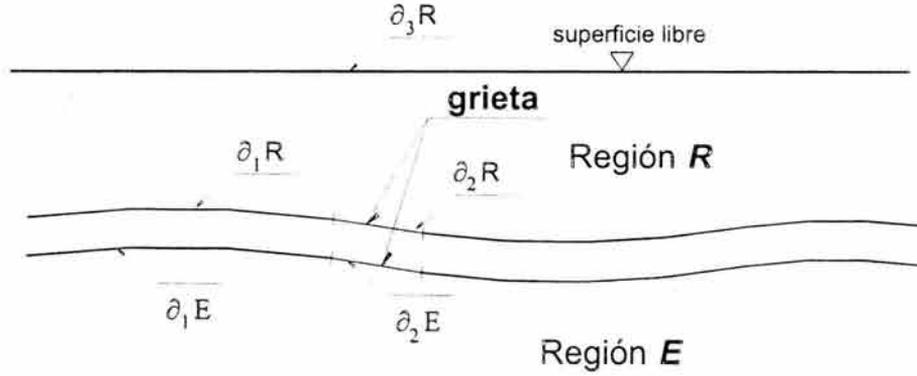


Figura 2. Configuración por regiones (R y E).

Considerando las condiciones de frontera (ecs. 9 a 13) y los campos incidente, reflejado y difractado, se tiene

$$u_i^{dR}(\mathbf{x}) + u_i^{oR}(\mathbf{x}) = u_i^{dE}(\mathbf{x}) + u_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (14)$$

$$t_i^{dR}(\mathbf{x}) + t_i^{oR}(\mathbf{x}) = t_i^{dE}(\mathbf{x}) + t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (15)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (16)$$

$$t_i^E(\mathbf{x}) = t_i^{oE}(\mathbf{x}) + t_i^{dE}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (17)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R, \quad (18)$$

donde

$t_i^{o*}(\mathbf{x})$ = tracciones de campo libre en la región R , sin considerar la presencia de la grieta, $t_i^{d*}(\mathbf{x})$ = tracciones de campo difractado en la región R , producidos por la presencia de la grieta, y * corresponde a las regiones E o R .

Sustituyendo las ecs. 1 y 2 en las ecuaciones 14 a 18 se tiene

$$\int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) G_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) G_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = u_i^{oE}(\mathbf{x}) - u_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (19)$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - c\phi_i^E(\mathbf{x}) - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = t_i^{oE}(\mathbf{x}) - t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

$\mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E,$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (21)$$

$$c\phi_i^E(\mathbf{x}) + \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (22)$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (23)$$

Esquema de discretización

Discretizando las fronteras de las regiones R y E , (fig. 3) y suponiendo ϕ = constante sobre cada elemento, las ecs. 19 a 23 se pueden escribir como

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) g_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) g_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (24)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (25)$$

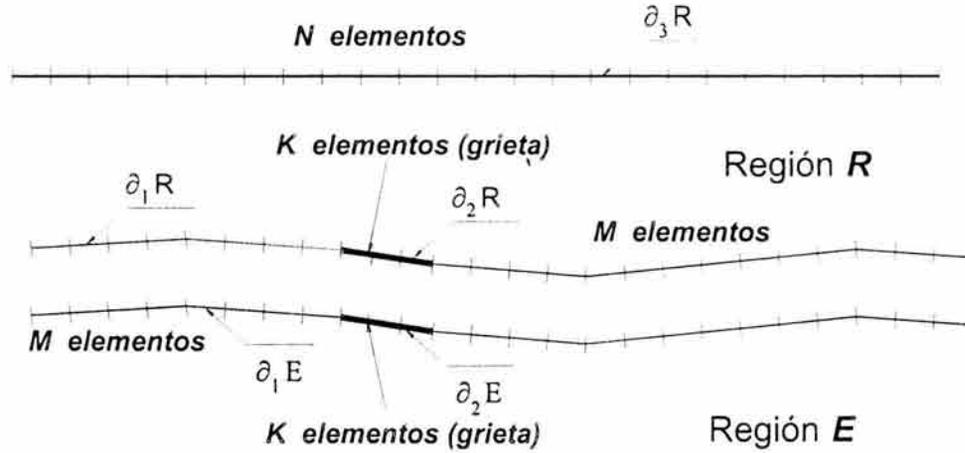


Figura 3. Esquema de discretización en la frontera de las regiones R y E .

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, N, \quad (26)$$

$$\sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oE}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K, \quad (27)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K. \quad (28)$$

Estas integrales son calculadas numéricamente, excepto cuando $\mathbf{x} = \xi$ donde las integrales se anulan. En ese caso

$$t_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi_p) = (\pm) \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad l = R, E, \quad (29)$$

las ecs. 24-28 representan el sistema de ecuaciones integrales a resolver.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Con el objeto de validar algunos de los resultados calculados con nuestro método, éstos son comparados con los obtenidos por Achenbach *et al.* (1983). Con el código MIEF son calculados los desplazamientos horizontales en el punto A localizado en la superficie libre (fig. 4). La grieta tiene una longitud total $2a$ y se localiza a una profundidad d de la superficie libre. Achenbach *et*

al. utilizaron una incidencia normal de ondas P y SV generadas en la superficie libre y que viajan hacia el interior del semiespacio.

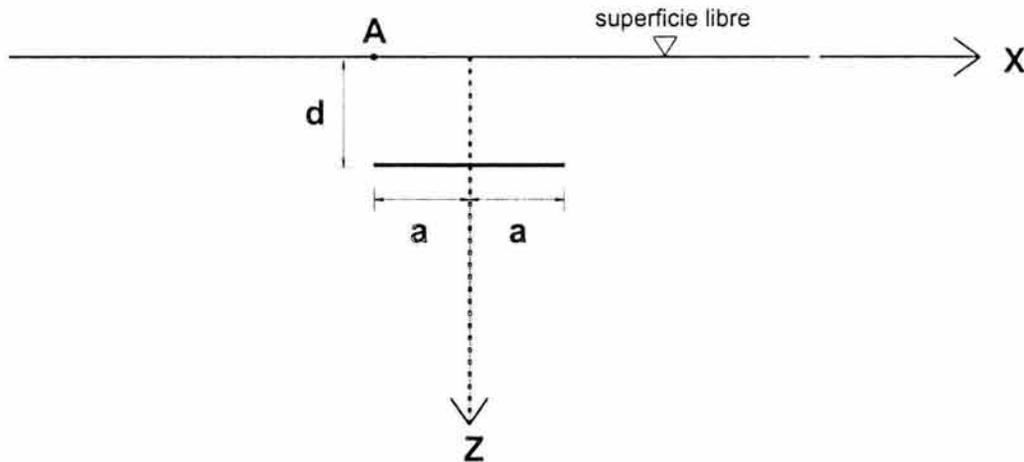


Figura 4. Problema seleccionado para validación, estudiado originalmente por Achenbach *et al.* (1983).

En nuestro modelo se emplearon las mismas propiedades elásticas y características geométricas del modelo utilizado por Achenbach *et al.* (1983). Con el propósito de validar el modelo aquí propuesto, se consideraron diferentes relaciones $d/2a$. Los resultados de los desplazamientos horizontales adimensionales U_L se graficaron *versus* la frecuencia adimensional $\omega d/C_R$ donde C_R = velocidad de ondas de Rayleigh. Se empleó una relación de Poisson $\nu = 0.3$, $d/2a = 0.2, 0.4, 0.6$ y 1.0 y un rango de frecuencia adimensional definida en $0 \leq \omega d/C_R \leq 3.0$. Los desplazamientos adimensionales en la superficie libre se determinaron por

$$U_L = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d}{b} \frac{1}{(k_L d) \text{sen}(k_L d)} \left| \frac{u_{xs}}{F} \right|, \quad (30)$$

u_{xs} es el desplazamiento en frecuencia obtenido para incidencia de ondas P generado en el interior del medio, $b = 2a$, $k_L = \omega \alpha$ = número de onda y F = factor que depende de la relación $d/2a$ considerada. La expresión anterior fue desarrollada por Achenbach *et al.* (1983).

En la fig. 5 se presentan los desplazamientos adimensionales medidos en el punto A para $d/2a = 0.2, 0.4, 0.6$ y 1.0 . Las curvas muestran diferentes ordenadas espectrales máximas (picos espectrales), asociados a resonancias del estrato aparente ubicado entre la cara superior de la grieta y la superficie libre. Esta frecuencia de resonancia corresponde a su frecuencia fundamental. Para $d/2a = 0.2$ se observa que la ordenada espectral máxima se presenta a frecuencias menores que para las otras relaciones de $d/2a$ estudiadas. Esto se debe a la poca profundidad de este estrato con respecto a los otros casos.

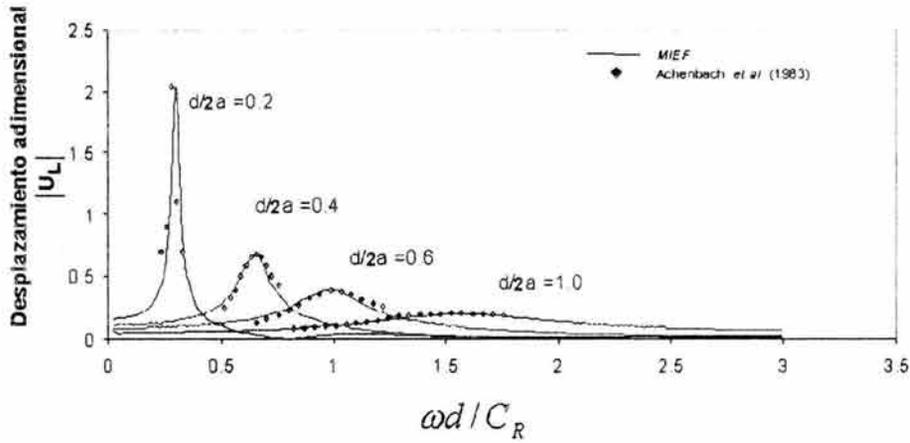


Figura 5. Desplazamientos adimensionales U_L para el modelo de la fig. 4, las curvas con línea continua son resultados del presente estudio, los rombos los de Achenbach *et al.* (1983).

A medida que incrementa la relación $d/2a$ (p. ej. $d/2a = 1.0$) las curvas de los máximos se tornan menos agudas y por lo tanto es más difícil determinar su frecuencia de resonancia $\tilde{\omega}$. Se observa que ambas soluciones concuerdan satisfactoriamente para todas las relaciones $d/2a$. En la fig. 6 se grafican las frecuencias de resonancia *versus* las relaciones $d/2a$. Aquí igual que en la fig. 5 los resultados obtenidos tienen un excelente acuerdo con los calculados por Achenbach *et al.* (1983).

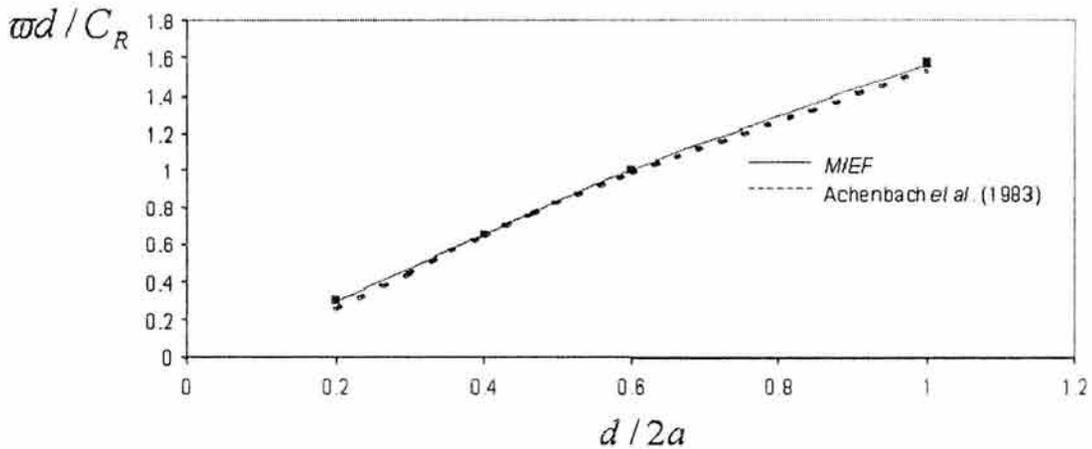


Figura 6. Curva que relaciona la frecuencia de resonancia $\tilde{\omega}d/C_R$ y $d/2a$. La línea continua representa los resultados del presente estudio, la línea punteada los de Achenbach *et al.* (1983).

Empleando el código MIEF se obtuvieron desplazamientos adimensionales U_L para receptores en la superficie libre, cara superior e inferior de la grieta, para la frecuencia adimensional $\omega d / C_R = 0.30468$ (fig. 7), correspondientes al punto donde se localiza el desplazamiento espectral máximo de la fig. 5. Se observa que a esta frecuencia se tienen seis puntos en los cuales se presentan los mayores desplazamientos. Dos de ellos están ubicados sobre la superficie libre, otros dos sobre la cara superior de la grieta y los restantes sobre la parte inferior de ésta. Los resultados son simétricos con respecto al eje x , debido a la geometría de la grieta e incidencia vertical de la onda P. Puede observarse que los mayores desplazamientos ocurren en la superficie libre y a distancias x menores de a , los cuales varían según la frecuencia que se analice.

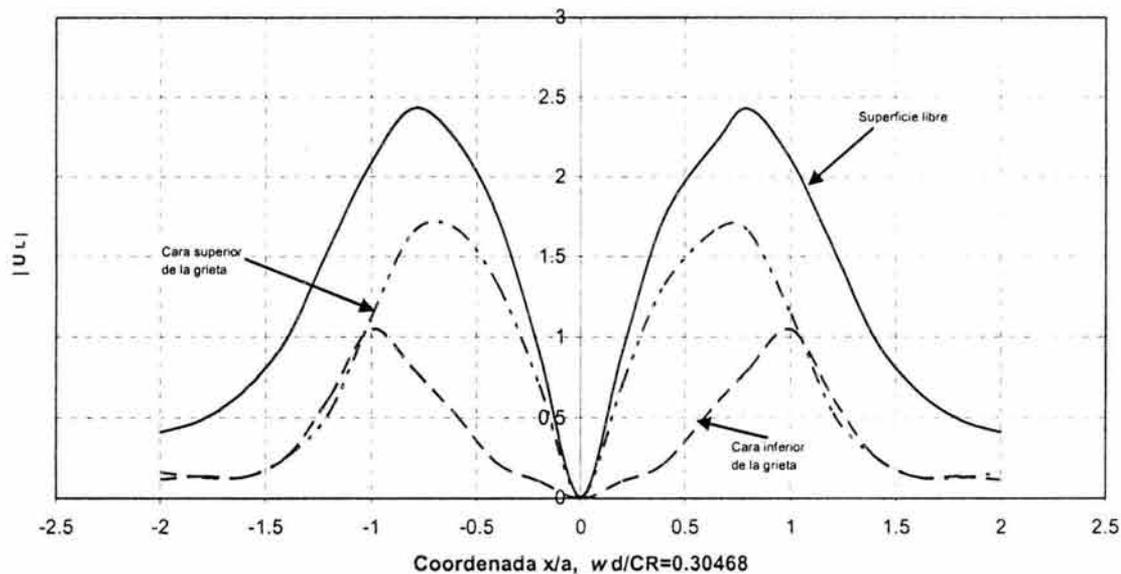


Figura 7. Desplazamiento horizontal U_L en la superficie libre, cara superior e inferior de la grieta para la frecuencia adimensional $\omega d / C_R = 0.30468$.

Para ilustrar la aplicación del MIEF a problemas de propagación de ondas elásticas en medios que contienen grietas, se analizaron varios casos. En cada uno de ellos se obtienen sismogramas sintéticos para los desplazamientos horizontales u en dirección x y verticales w en dirección z . Estos sismogramas se obtienen en el dominio del tiempo mediante el empleo de la transformada discreta de Fourier. Finalmente, se calcularon los sismogramas sintéticos que ilustran el fenómeno de reflexión y difracción múltiple debido a la incidencia de ondas de Rayleigh en un medio con varias grietas.

Los casos estudiados en la fig. 8 corresponden a relaciones de $d/2a = 0.2$ y 0.4 con ángulos de incidencia de ondas P y SV de $\gamma = 0^\circ$ y 30° . La velocidad de propagación de ondas S considerada es $\beta = 1$ cm/seg y la relación de Poisson es $\nu = 0.3$. Los sismogramas sintéticos se

calcularon a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia para 41 receptores ubicados en la superficie libre. Se empleó como excitación temporal un pulso Ricker con un periodo característico $t_p = 1.0$ seg.

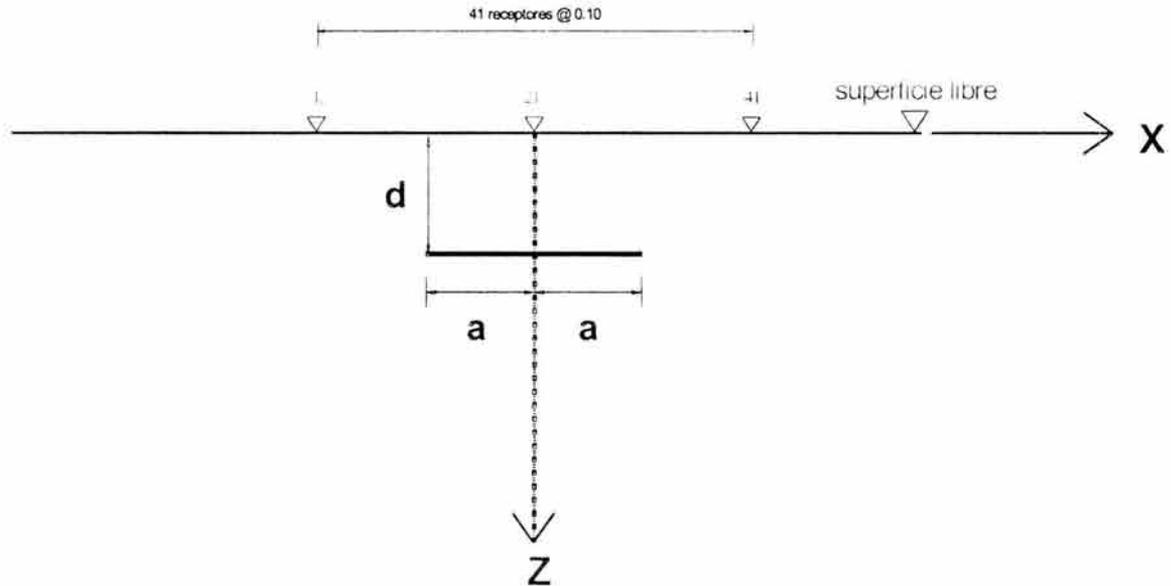


Figura 8. Modelo considerado para la construcción de sismogramas sintéticos.

De la fig. 9 a la fig. 12 se muestran los desplazamientos verticales w y horizontales u para relaciones $d/2a = 0.2$ y 0.4 (izquierda y derecha respectivamente). La fig. 9 corresponde a incidencia vertical de ondas P. Puede apreciarse que para los receptores alejados de la zona de la grieta los desplazamientos verticales son mayores que para aquellos que se encuentran en la zona de ésta. Esto se debe a que la grieta actúa como una barrera, ocasionando que la onda incidente sea dispersada y que las amplitudes de los desplazamientos disminuyan considerablemente (cerca de un 50% de la onda incidente). Este efecto también se observa en el caso de incidencia oblicua de ondas P con $\gamma = 30^\circ$ (fig. 10). Para la componente horizontal es notable la aparición de patrones sucesivos de ondas difractadas generadas a partir de la grieta. Por simetría en la fig. 9 son fácilmente identificables, en tanto que en la fig. 10 estos patrones de difracción no aparecen con la misma definición.

En la fig. 11 se presentan los resultados obtenidos para incidencia vertical de ondas SV. Se aprecia que las amplitudes de la onda difractada en la componente horizontal son mayores en el caso de la relación $d/2a = 0.4$. Para esta misma componente las máximas amplitudes ocurren fuera de la zona de la grieta. Es notable que la perturbación generada por la grieta es más prolongada para $d/2a = 0.4$ en ambas componentes. Ahora, en los sismogramas de la componente vertical una vez más son fácilmente identificables los patrones de difracción de las ondas generadas por la grieta en ambos casos.

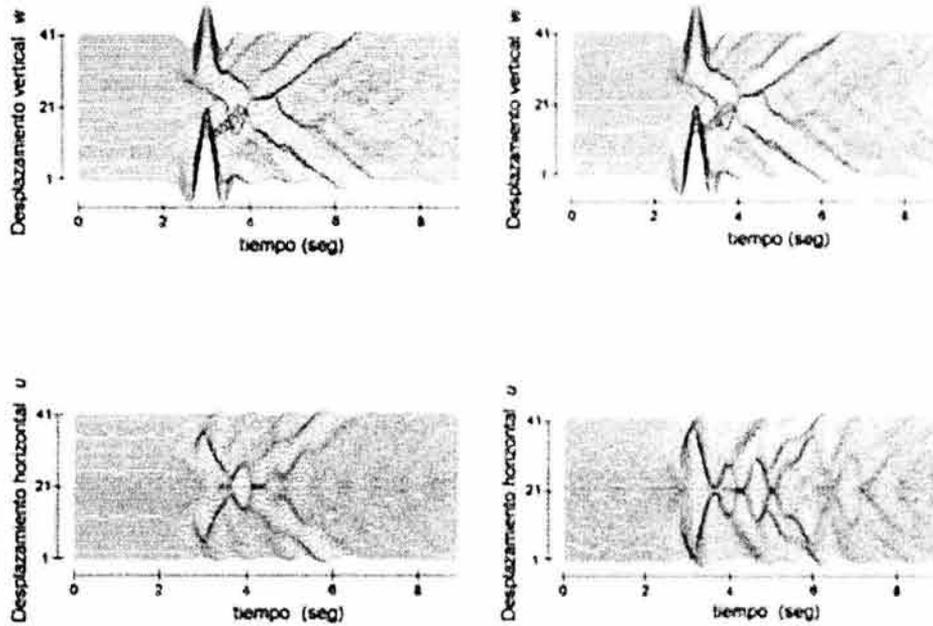


Figura. 9 Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig. 8, para las relaciones de profundidad $d/2a = 0.2$ y 0.4 (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia normal de ondas P.

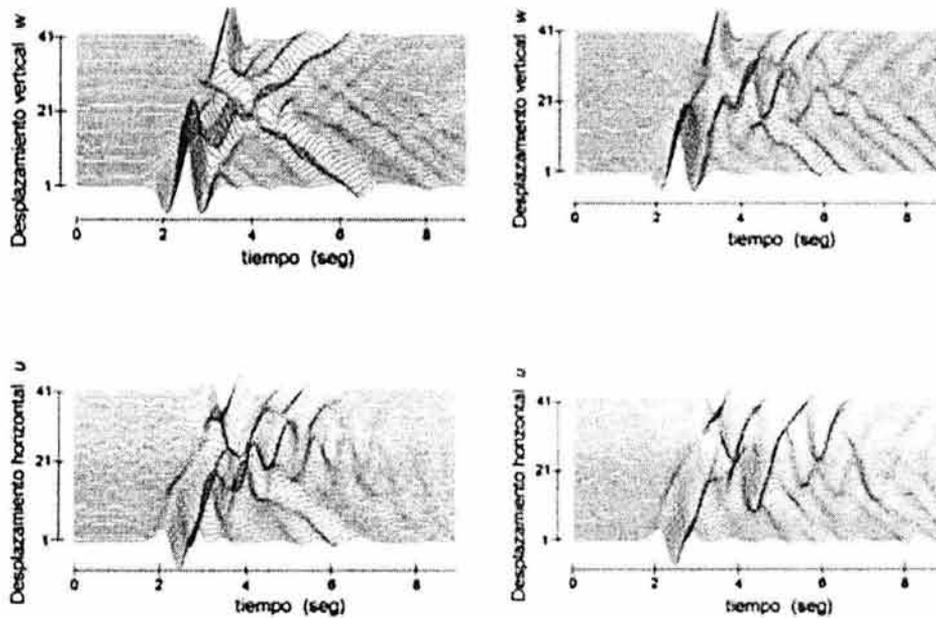


Figura. 10 Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig. 8, para las relaciones de profundidad $d/2a = 0.2$ y 0.4 (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia oblicua de ondas P.

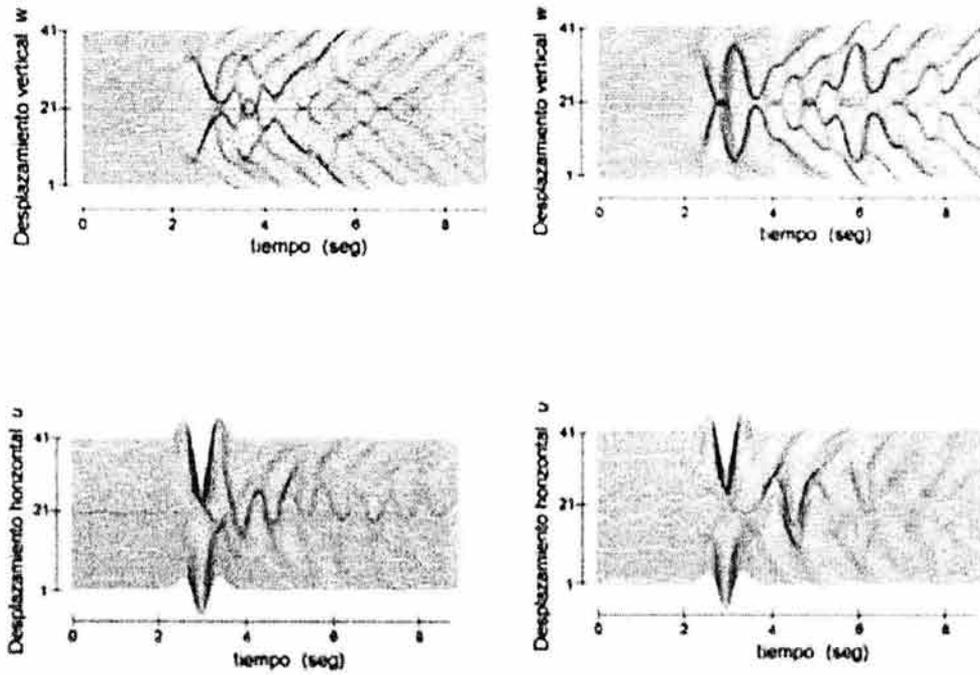


Figura. 11. Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig. 8, para las relaciones de profundidad $d/2a = 0.2$ y 0.4 (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia normal de ondas S.

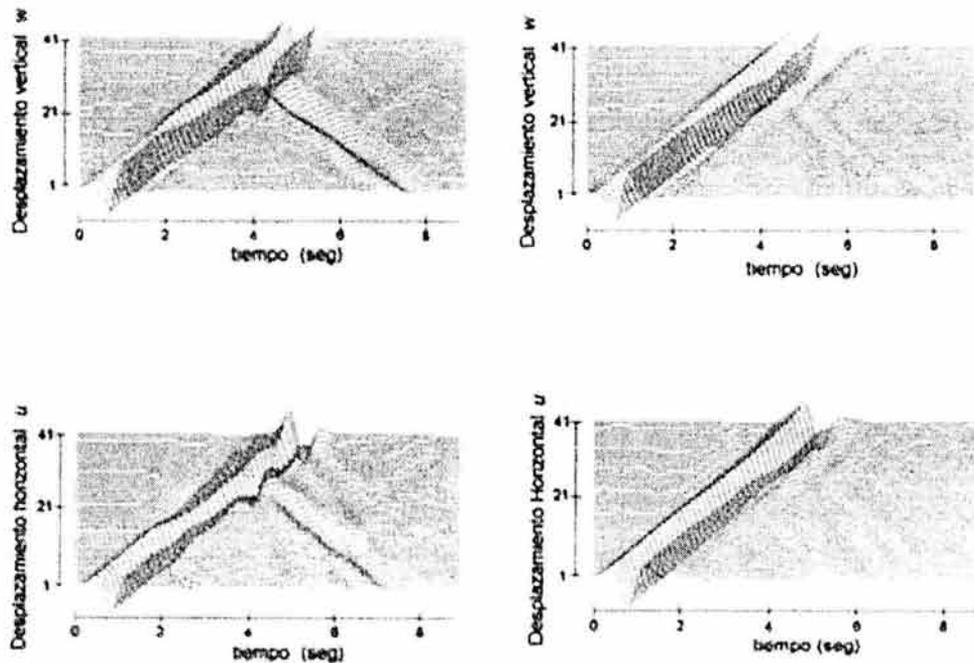


Figura. 12. Desplazamientos verticales y horizontales calculados en la superficie libre para el problema de la fig.8. Incidencia de ondas de Rayleigh.

Los resultados para la incidencia de ondas de Rayleigh se ilustran en la fig. 12. Para grietas someras ($d/2a = 0.2$) la interacción de ésta con la superficie libre provoca una reflexión de ondas muy marcada, la cual es registrada por la línea de receptores localizados antes de la primera punta de la grieta. La velocidad con que esta onda se desplaza en la superficie libre (tanto la incidente como la reflejada) corresponde a la velocidad característica de las ondas de Rayleigh (0.92cm/seg para la relación de Poisson considerada). Así también se aprecia una disminución de las amplitudes w en $|x| \leq a$. Para $d/2a = 0.4$ la reflexión casi no se aprecia. Esto se debe a que la grieta es más profunda y la onda de Rayleigh no alcanza a ser afectada, debido al decaimiento exponencial de los desplazamientos w y u con respecto a la profundidad. En estos dos casos, existe difracción de ondas hacia el interior del dominio estudiado, sin embargo, ésta es mayor para la grieta más superficial ($d/2a = 0.2$). A medida que la grieta se localiza a mayores profundidades, cercanas o mayores a una longitud de la onda de Rayleigh, la difracción de tales ondas es nula.

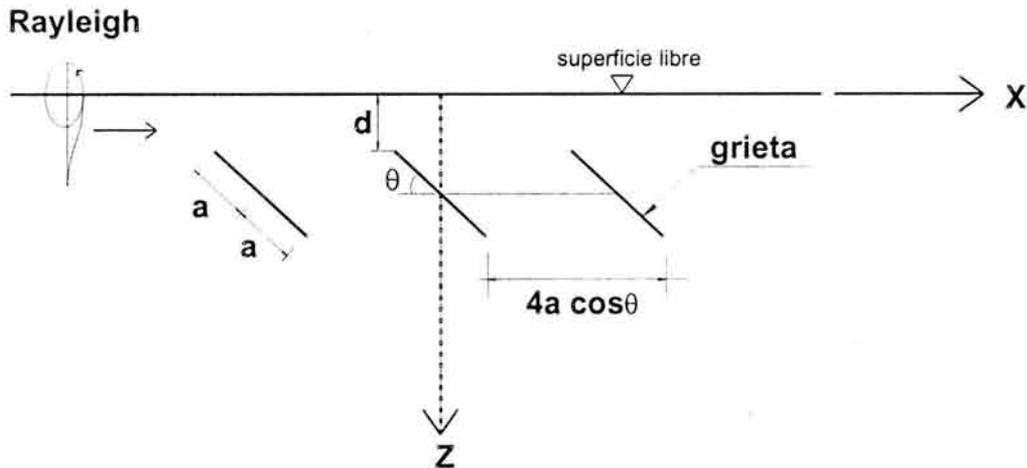


Figura 13. Modelo de 3 grietas en un semiespacio elástico para el caso de incidencia de onda de Rayleigh.

Finalmente en la fig. 13 se muestra un modelo que presenta a una onda de Rayleigh que incide en un medio con 3 grietas. El primer caso estudiado, caso a), corresponde a 3 grietas horizontales ($\theta = 0^\circ$) localizadas a una profundidad $d/2a = 0.2$, mientras que el caso b) corresponde a estas 3 grietas con $\theta = 60^\circ$ y una profundidad $d/2a = 0.1$. Los resultados para los desplazamientos verticales son presentados en la fig. 14. Los cálculos fueron realizados para 51 receptores ubicados sobre la superficie libre igualmente espaciados a 0.24. De manera general para los casos estudiados se presenta una disminución considerable en la amplitud de la onda, la cual claramente se observa en el receptor 51, en comparación con el receptor 1. Sin embargo, para $\theta = 0^\circ$ existe una mayor interacción de la onda incidente con las grietas. Ahí se observa que la difracción generada por cada grieta da como resultado en una onda de Rayleigh reflejada, moviéndose a su velocidad característica pero en dirección contraria a la onda incidente. Esta onda de Rayleigh reflejada es muy notoria para las primeras dos grietas, sin embargo, para la tercera es casi nula, debido a que para ésta la amplitud de la onda incidente ya ha sido reducida

por la interacción con las grietas anteriores (teniendo ahora menos influencia a la profundidad de la grieta). Por mediciones tomadas directamente de los sismogramas mostrados en esta figura (fig. 14), se observa que la onda de Rayleigh reflejada es generada en el vértice opuesto de la grieta donde incide la onda. Por otro lado, para $\theta = 60^\circ$ la reflexión de ondas de Rayleigh casi no se aprecia. Esto se debe a que la inclinación de la grieta ayuda a disipar la energía hacia el interior del medio y no hacia la superficie libre. La onda que incide sobre la primera grieta es reducida en amplitud, la cuál al incidir sucesivamente en las siguientes grietas prácticamente no se ve afectada.

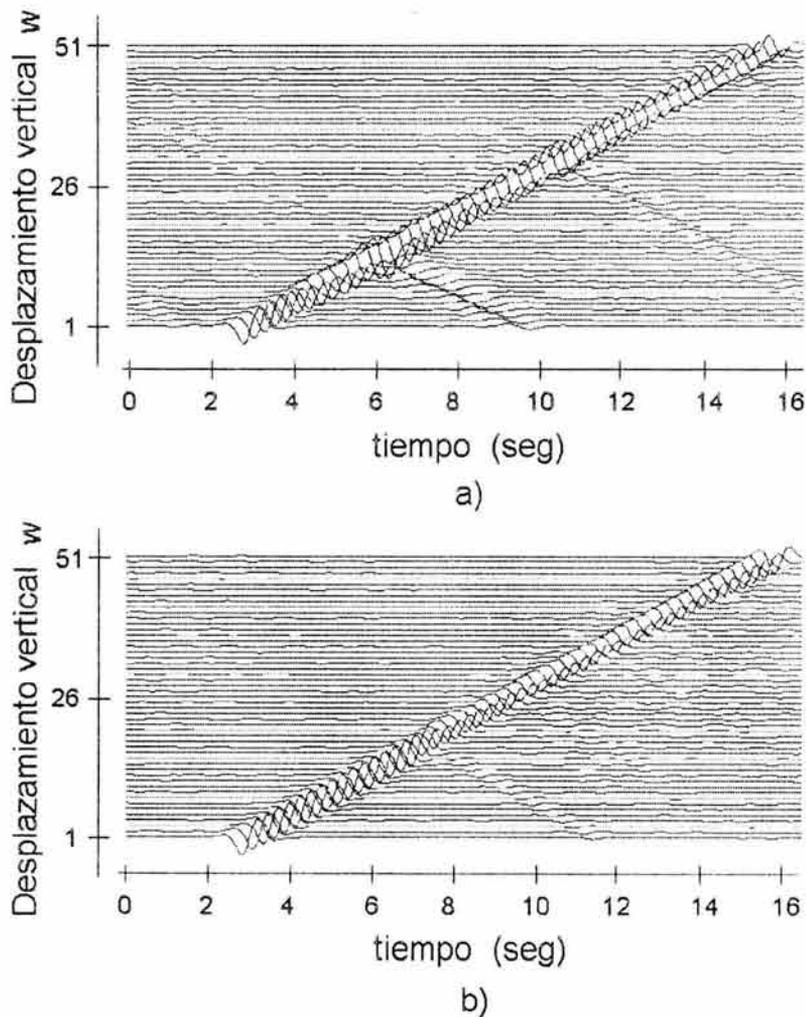


Figura. 14. Sismogramas sintéticos. Desplazamientos verticales (modelo de la fig.13). Incidencia de onda de Rayleigh. a) tres grietas horizontales, b) tres grietas inclinadas $\theta = 60^\circ$.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se mostró la aplicación del método indirecto de elementos frontera MIEF para calcular la respuesta sísmica y difracción de un medio que contiene una o varias grietas bajo la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh. Esta técnica numérica se basa en una representación integral del campo difractado y puede ser vista como una realización numérica del principio de Huygens, dado que las ondas difractadas son construidas por medio del campo creado por una serie de fuentes puntuales localizadas en la frontera. Este método se validó comparando los resultados con los obtenidos por Achenbach *et al.* (1983) para el caso de incidencia de ondas P. También se efectuó el análisis en el dominio del tiempo para el caso de incidencia de ondas P, SV y Rayleigh. Las ordenadas máximas obtenidas en la respuesta aparecen en las frecuencias que coinciden con la frecuencia fundamental de un estrato aparente contenido entre la cara superior de la grieta y la superficie libre del modelo estudiado. Se ha observado que para el análisis en el dominio del tiempo y para incidencias de ondas P y SV, la grieta actúa como una barrera, ocasionando reflexiones hacia el interior del medio y que las amplitudes medidas en la superficie libre, detrás de la grieta, sean afectadas solamente por ondas difractadas por ella. En el caso de ondas de Rayleigh la profundidad y orientación de las grietas es un factor muy importante en la reducción de las amplitudes de la onda incidente. Mediante la colocación de receptores en superficie libre se observa que para grietas paralelas a ésta se presentan ondas reflejadas generadas en el extremo opuesto de la grieta de donde incide la onda de Rayleigh. Estas reflexiones, al ir atravesando el modelo, cada vez son más pequeñas. Para grietas inclinadas, dichas reflexiones pueden favorecer a la disminución de las amplitudes de los desplazamientos en la superficie libre, dado que existe una fuerte difracción de ondas hacia el interior del medio.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a M. Suárez por la lectura crítica de este manuscrito y sus comentarios. A U. Iturrarán-Viveros y R. Vai, sus trabajos proporcionaron ideas para la formulación del modelo aquí presentado. Parte de los cálculos fueron realizados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, coordinación de Ingeniería Sismológica. Este trabajo estuvo auspiciado por el Instituto Mexicano del Petróleo (Dirección Ejecutiva de Ingeniería y La Competencia de Exploración) y por CONACYT, proyecto (NC-204); México.

REFERENCIAS

- Achenbach, J D, W Lin y L M Keer (1983), "Surface waves due to scattering by a near-surface parallel crack", *IEEE trans. Sonics and Ultrasonics*, Vol. SU-30, pp. 270-276.
- Baker, B R (1962), "Dynamic stresses created by a moving crack", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME, Vol. 29, pp. 449-458.
- Broberg, K B (1960), "The propagation of a brittle crack", *Artkiv for Fysik*, Vol. 18, pp. 159-192.

- Chen, Y M (1975), "Numerical computation of dynamic stress intensity factor by a Lagrangian Finite-Difference Method (the HEMP Code)", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 7, pp. 653-660.
- Craggs, J W (1960), "On the propagation of a crack in an elastic-brittle material", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, pp. 66-75.
- Frangi, A (1998), "Some developments in the symmetric Galerkin Boundary Element Method", *Tesis de Doctorado*, Politecnico de Milano.
- Freund, L B (1972), "Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-III . Stress Wave loading", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 21, pp. 47-61.
- Griffith, A A (1921), "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. A221, pp. 163-197.
- Irwin, G R (1948), "Fracture Dynamics", *Fracturing of Metal*, American Society for Metals, Cleveland, pp. 147-166.
- Irwin, G R (1957), "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364.
- Kanninen, M F (1978), "A critical appraisal of solution techniques in dynamic fracture mechanics", *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 612-634.
- Kupradze, V D (1963), *Dynamical problems in elasticity*, In *Progress in Solid Mechanics*, I. N. Sneddon y R. Hill (Editores), North-Holland, Amsterdam. Vol. III.
- Luzón, F, F J Sánchez-Sesma, J L Rodríguez-Zuñiga, A M Posadas, J M García, J Martín, M D Romacho y M Navarro (1997), "Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by three-dimensional topographies", *Geophys. Int. Journal*, Vol. 129, pp. 571-578.
- Mott, N F (1948), "Fracture of metals: Theoretical considerations", *Engineering*, Vol. 165, pp. 16-18.
- Orowan, E (1948), "Fracture and strength of solids", *Reports on Progress in Physics*, Vol. XII, p. 185.
- Roberts, D K y A A Wells (1954), "The velocity of brittle fracture", *Engineering*, Vol. 178, pp. 820-821.
- Rodríguez-Castellanos, A., L H Hernández, F J Sánchez-Sesma y G Urriolagoitia (1999), "Evaluación del factor de intensidad de esfuerzos bajo condiciones de carga dinámica", *International Materials Research Congreso*, Cancún, México, agosto.
- Sánchez-Sesma, F J y M Campillo (1991), "Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features; a boundary integral formulation", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 81, No. 6, pp. 1-20.
- Sánchez-Sesma, F J, J Ramos-Martínez, y M Campillo (1993), "An indirect boundary element methods applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, pp. 279-295.

Sánchez-Sesma, F J y F Luzón (1995), "Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 85, No. 1, pp. 269-284.

Stroh, A N (1957), "A Theory of the fracture of metals", *Advances in Physics*, Vol. 6, pp. 418-465.

Timoshenko, S (1963), *Strength of materials, Part I Elementary theory and problems*, tercera edición, D. Van Nostrand Company Inc, New York.

Vai, R, J M Castillo-Covarrubias, F J Sánchez-Sesma, D Komatitsch, y J P Vilotte.(1999), "Elastic wave propagation in an irregularly layered medium", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 18, pp. 11-18.

Yoffé, E H (1951), "The moving Griffith crack", *Philosophical Magazine*, Vol. 42, pp. 739-750.

ANEXO D

Transient response and multiple scattering of elastic waves by a linear array of regularly distributed cylindrical obstacles: Anti-plane-S-waves analytical solution

Rafael Ávila-Carrera¹, Francisco J. Sánchez-Sesma² & Javier Avilés³

1. Instituto Mexicano del Petróleo; Eje Central Lázaro Cárdenas 152; Gustavo A. Madero; México D.F., México.
E-mail rcarrer@imp.mx

2. Instituto de Ingeniería, U.N.A.M.; Circuito Escolar S/N; Coyoacán; México D.F., México.
E-mail sesma@servidor.unam.mx

3. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua; Paseo Cuauhnáhuac 8532; Jiutepec, Morelos. México.
E-mail javiles@tajin.imta.mx

Abstract

An analytical solution for the transient response and multiple scattering of elastic waves by a linear array of regularly distributed cylindrical obstacles is studied. The excitation is given by anti-plane harmonic S-waves. The scatterers are cylindrical obstacles of an elastic material and their properties are different from those of the surrounding medium. Cavities and rigid obstacles are also treated. The formulation is two-dimensional and is constructed by the superposition of the incident field and the waves diffracted by each obstacle. The exact solution is obtained by imposing continuity conditions for the displacements and tractions at the scatterer-matrix interfaces with the aid of the well-known Graf's addition theorem. Using this theorem the total field can be referred to any coordinate system, which allows us to solve the problem in a closed form. The diffracted and reflected fields by each obstacle are constructed as expansions of cylindrical wave functions. Some numerical results are calculated for different values of the main parameters involved. Diagrams for the amplitude displacement fields and their spatial variation of some relevant examples are studied. It is shown that a double effect is produced by the presence of particular material filler: amplifications at the incidence side and reductions at the opposite side or *viceversa*. Synthetic seismograms and snapshots are also computed in order to exhibit the complex features of the wave propagation within this heterogeneous model.

Keywords: Multiple scattering, Transient response, Analytical solution, Elastic waves, Cylindrical obstacles, Cavities, Rigid obstacles, Snapshots.

1. Introduction

Mathematical and numerical modeling has been fundamental for several branches of science and engineering. In particular, geophysical modeling is crucial to understand and delineate the basic features of hydrocarbon reservoirs in the field. The use of analytical formulations, when their construction is reliable, has allowed establish benchmark solutions for a given problem. Most of these formulations have been employed, among other uses to: 1) build basic solutions for more complicated problems, 2) validation and calibration of new results and 3) trustworthy data field

interpretation. For scattering problems, the exact solutions have been very helpful due to their simplicity and usefulness. Despite the restriction that just few types of obstacles are available to be expressed in exact analytical terms, the insight gained by their application is significant. The problem of multiple scattering of elastic waves by a set of flexible inclusions was formally treated for the first time by Foldy (1945) and Lax (1951) for scalar waves, and subsequently studied extensively in many circumstances by other authors, e.g. Waterman and Truell (1961), Frisch (1968), Varadan *et al.* (1978), Varadan and Varadan (1980), Kikuchi (1981), and Avilés and Sánchez-Sesma (1983). Most recent publications deal the subject in 3D. For example, asymptotic solutions of the dispersion equations in the long and short-wavelength regimes by Kanaun *et al.* (2004), the acoustic wave propagation by cylindrical shells by Veksler *et al.* (2000), and the elastic wave scattering by spheres by Gritto *et al.* (1995, 1999). Some analytical solutions in 2D for the time response of a single cavity are presented by Davis *et al.* (2001), and by Yin-Bin *et al.* (2000) for the viscoelastic case. The books by Tsang *et al.* (2000), Ishimaru (1997) and Sheng (1995) cover the subject reasonably well but they leave aside the analysis of time response. On the other hand, numerical techniques such as finite-difference and finite-element methods face some limitations regarding the time and core of computation required when dealing with realistic scattering problems even with state-of-the-art-computers.

Our previous work, Avilés and Sánchez-Sesma (1983) faced several of those limitations given the computational conditions at that time. Frequency domain results and their discussion were presented for just rigid arrays of scatterers. In this paper a review of the theoretical analysis developed by early 80's to solve the transient response and multiple scattering of anti-plane incoming S-waves by an array of cylindrical cavities, elastic inclusions or rigid obstacles is conducted. Here, we present a closed form analytical solution for the problem of multiple diffraction of elastic waves and a detailed description of the wave propagation, both in time and frequency domains. Our solution is constructed as a superposition of incident and diffracted fields by each obstacle. Continuity and equilibrium conditions are enforced at all the scatterers-matrix interfaces with the aid of Graf's addition theorem. Using this theorem the total field can be referred to any coordinate system. A suitable set of cylindrical coordinates reference systems is used in the sequel. Several examples for various arrays configurations are shown. Normalized amplitudes of the displacement field *versus* distance for a given frequency are depicted. In order to illustrate the complex behavior of the wave motion in this heterogeneous model, synthetic seismograms and snapshots are computed. We believe that the results presented here can be used as reference examples for validation and calibration of other techniques.

2. Formulation of the Problem

Let us consider a linear elastic, isotropic and homogeneous space where the anti-plane displacement w is defined in the direction of z . Now we distribute a regular array of elastic cylinders with properties different from those of the surrounding material as depicted in Fig. 1. The propagation of harmonic plane S-waves satisfies the reduced wave equation or Helmholtz's equation:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0 \quad (1)$$

where $x, y =$ cartesian coordinates, $k = \omega/\beta =$ shear wave number, $\omega =$ angular frequency and $\beta = \sqrt{\mu/\rho} =$ shear wave propagation velocity; $\mu =$ shear modulus of the elastic space and $\rho =$ density of the elastic space.

The excitation consist in a plane wave of amplitude w_0 with angle of incidence ψ , propagating in the forward direction to the array of cylindrical inclusions, as shown in Fig. 1. This incident wave is given in the reference system (x_1, y_1) with respect to the first obstacle as

$$w'(x_1, y_1) = w_0 \exp[-ik(x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi)]. \quad (2)$$

In this equation and in the following, the time factor $\exp(i\omega t)$ ($i = \sqrt{-1}$ and $t =$ time) is omitted. The presence of an array of aligned cylinders produces diffraction and scattering of the incoming wave field. Thus, the solution can be represented by

$$w = w'(x_1, y_1) + \sum_{j=1}^{NS} w_j^s(r_j, \theta_j) \quad (3)$$

where, $w_j^s(r_j, \theta_j)$ represents the diffracted waves by the j -th cylinder, in terms of its own coordinate system (r_j, θ_j) , and $NS =$ number of scatterers.

With the aid of separation of variables method, the diffracted field for each scatterer can be written (Abramowitz and Stegun, 1964) as

$$w_j^s(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(kr_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(kr_j) \sin n\theta_j \quad (4)$$

where $A_n^j, B_n^j =$ unknown complex coefficients that will be determined satisfying the boundary conditions and $H_n^{(2)}(\cdot) =$ Hankel function of second kind and order n . The wave functions $H_n^{(2)}(kr_j) \cos n\theta_j$ and $H_n^{(2)}(kr_j) \sin n\theta_j$ conform a complete set of solutions of the reduced wave equation in unbounded regions and satisfies the Sommerfeld's radiation condition (Mow and Pao, 1971). When we treat elastic obstructions part of the incident wave field is refracted, generating a stationary wave inside of each cylinder. Solving the equation (1) it is possible to find that the refracted field in the j -th cylinder can be expressed in the local coordinate system (r_j, θ_j) as

$$w_j(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j J_n(k_c r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j J_n(k_c r_j) \sin n\theta_j \quad (5)$$

where $C_n^j, D_n^j =$ unknown complex coefficients that also will be determined satisfying the boundary conditions and $J_n(\cdot) =$ Bessel function of first kind and order n ; the subscript c indicates cylinder. The functions $J_n(k_c r_j) \cos n\theta_j$ and $J_n(k_c r_j) \sin n\theta_j$ conform a complete set of solutions

of the reduced wave equation in bounded regions. The coefficients A'_n, B'_n, C'_n and D'_n that define the solution of the problem are obtained when the boundary conditions are fulfilled. Let us assume perfect adhesion between the cylinders and the surrounding elastic material, the boundary conditions that must be satisfied at the interfaces matrix-obstruction interfaces are continuity of displacements and stresses, this is:

$$w(r_l, \theta_l)_{r_l=a} = w_l(r_l, \theta_l)_{r_l=a} \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad y \quad l = 1, 2, \dots, NS \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial w(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \Big|_{r_l=a} = \mu_c \frac{\partial w_l(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \Big|_{r_l=a} \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad y \quad l = 1, 2, \dots, NS \quad (7)$$

where a = radius of the cylinders.

In order to obtain the solution of the problem, it is necessary to impose the boundary conditions in each cylinder. To do this, it will be convenient to represent the total field, equation (2), with respect to the arbitrary coordinate systems (r_l, θ_l) . Equations (3) and (4) must be referred to this coordinate system using the Graf's addition theorem (see, Watson, 1966). Thus, the total field w referred to the coordinate system (r_l, θ_l) can be expressed in the following form

$$\begin{aligned} w(r_l, \theta_l) = & w_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m H_m^{(2)}(kd_{ol}) \cos m\theta_{ol} J_m(kr_l) \cos m\theta_l + \right. \\ & \left. 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m H_m^{(2)}(kd_{ol}) \sin m\theta_{ol} J_m(kr_l) \sin m\theta_l \right] + \\ & (1 - \delta_{l1}) \sum_{j=1}^{l-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \cos m\theta_l + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m L_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \sin m\theta_l \right] + \\ & \sum_{m=0}^{\infty} A'_m H_m^{(2)}(kr_l) \cos m\theta_l + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m H_m^{(2)}(kr_l) \sin m\theta_l + \\ & (1 - \delta_{lNS}) \sum_{j=l+1}^{NS} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A'_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \cos m\theta_l + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B'_n \sum_{m=1}^{\infty} L_m^n(kd_{jl}) J_m(kr_l) \sin m\theta_l \right] \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$K_m^n(\cdot) = H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \quad (9)$$

$$L_m^n(\cdot) = -H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \quad (10)$$

in which $\varepsilon_m =$ Neumann factor ($\varepsilon_0 = 1$ and $\varepsilon_m = 2, m \geq 1$), $d_{jl} =$ distance from the centers between the j -th and the l -th cylinders and $\delta_{lj} =$ Kronecker delta ($= 1$ if $l = j$; $= 0$ if $l \neq j$).

Replacing equations (5) and (8) into equations (6) and (7) and handling the orthogonal properties of trigonometric functions, it is possible to obtain four infinite systems of algebraic equations for the coefficients A'_n, B'_n, C'_n and D'_n . However, as we are interested on the solution in the elastic media only, the coefficients C'_n and D'_n can be eliminated, reducing the system of equations to one that has the following form:

$$(1 - \delta_{ll})(-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(kd_{jl}) A'_n + \frac{2}{\varepsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)'}(ka) - F_m H_m^{(2)}(ka)}{J_m'(ka) - F_m J_m(ka)} \right] A'_m + (1 - \delta_{lNS}) \sum_{j=l+1}^{NS} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(kd_{jl}) A'_n = -2w_o(-i)^m \cos m\psi, \quad l = 1, 2, \dots, NS \quad y \quad m = 0, 1, \dots, \infty \quad (11)$$

$$(1 - \delta_{ll})(-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(kd_{jl}) B'_n + \left[\frac{H_m^{(2)'}(ka) - F_m H_m^{(2)}(ka)}{J_m'(ka) - F_m J_m(ka)} \right] B'_m + (1 - \delta_{lNS}) \sum_{j=l+1}^{NS} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(kd_{jl}) B'_n = -2w_o(-i)^m \sin m\psi, \quad l = 1, 2, \dots, NS \quad y \quad m = 0, 1, \dots, \infty \quad (12)$$

where

$$F_m = \sqrt{\frac{\mu_c \rho_c}{\mu \rho} \frac{J_m'(k_c a)}{J_m(k_c a)}} \quad (13)$$

in which prime denotes derivation with respect to the argument.

Solving the systems of equations (11) and (12) the problem is completely solved. Nevertheless, numerically such systems can not be solved exactly. An approximation for the solution can be obtained by reducing the dimensions to a finite number. This is made by means of a suitable truncation of the orders m , and n in such way that the solution converges. Analyzing the resulting systems of equations, it is noted that the type of scatterer (elastic, rigid or cavity) modifies just the diagonal coefficients.

3. Numerical Results

In this section we show some of the most relevant results obtained by the analytical technique described above. Our aim is to illustrate examples in a simple way. Configurations for each model and their respective results are depicted and discussed. Eight terms were used in all the expansions considered here, obtaining up to four-digit accuracy in the range of frequencies studied. Normal and oblique incidence of plane waves are calculated for all the cases presented. The wave field depends on the normalized frequency by

$$\eta_k = \frac{ka}{\pi} = \frac{2a}{\lambda_k},$$

where λ_k = wavelength of the incident S-wave. Thus, the normalized frequency represents the diameter of the cylinder to the wavelength ratio.

In Fig.2 normalized amplitudes of the displacement field against horizontal distance x/a for an array of eight scatterers have been calculated. The coordinate reference system is given in Fig. 1. Four cases are depicted in which the separation between cylinders and distance $y/a > 0$ (opposite side of incidence) change. The amplitude response for the three kinds of material fillers has also been included. Short dashed lines correspond to an array of elastic cylinders with $\rho_p/\rho_s = 0.5$ and $\mu_p/\mu_s = 0.3$, long dashed lines for cavities with $\rho_p/\rho_s = 0.0$ and $\mu_p/\mu_s = 0.0$, and solid lines for rigid cylinders with $\rho_p/\rho_s = 1.538$ and $\mu_p \rightarrow \infty$. Dimensionless frequency $\eta_k = 0.5$ and normal incidence of anti-plane S-waves have been taken for the computations. It is remarkable that, for a given frequency, the amplitudes of displacement field suffer a strong attenuation effect when an array of rigid cylinders is evaluated. The amplitude curves for cavities and elastic cylinders are quite similar, and they appear sensitive to changes in separation between obstacles.

In order to give a detailed view of the drastic decrease of amplitudes by the presence of rigid scatterers previously aimed by Avilés and Sánchez-Sesma (1983), it is convenient to compute the displacements at the opposite side of incidence in a relative far field ($y/a = 150$). This is done in Fig. 3, where normalized amplitudes of the displacement field w/w_0 against distance x/a is depicted. Different separations between cylinders $s_p/a = 2.5, 3.0, 3.5$ and 4.0 , and normalized frequency $\eta_k = 0.5$ under incidence of S-waves were taken for the computations. It can be seen that maximum reductions occur near the center of the array. This effect is clearly appreciated in Fig. 3 for a normalized separation $s_p/a = 3$. In this case, the reductive effect of the system is of the order of 55%, being around of 60% for a separation of $s_p/a = 2.5$. This fact suggests that the system behaves like a single unit at long distances and not as a set of independent scatterers. From Figs. (2) and (3) it is clear to note that at points near the array of rigid obstacles, the reduced fields show large variability, in contrast with the smooth variations observed at long distances. As we expected, when the obstacles are placed closely, having at least a separation of one radius in between, the maximum amplitude reductions take place. As the separation grows, reductions become less significant.

To show the scattering effects at the incidence side, normalized displacement amplitudes for an eight obstacles configuration has been calculated (Fig. 4). Three kinds of material fillers (cavities, elastic inclusions and rigid cylinders) were considered. The distance between centers of scatterers is $s_p/a = 4.0$ for a given frequency $\eta_k = 0.4$. Normalized amplitudes for several distances, sketched by four kinds of symbolized lines are illustrated. Each frame corresponds to a specific material filler. Here, we are able to observe that for the cases with cavities and elastic inclusions (Fig. 4(a) (b)) exists a smooth amplification effect oriented to the center of the array that tends to diminish when we get close to the edges. The array with rigid cylinders clearly show the amplification effects at all places, observing their maximum amplitude at $x/a = 22.25$, $y/a = -20$.

Up to now, with the set of results calculated has been possible to observe a common double effect produced by several configurations of cylinders, amplifications are generated at the incidence side and reductions take place at the opposite side. To observe this effect closely, Fig. 5 depicts the normalized amplitudes of displacement field along line $x/a = 0$, that is at the end of the array, for eight cylinders with separation $s_p/a = 3.0$ and dimensionless frequency $\eta_k = 0.4$. Short dashed line corresponds to an array of elastic cylinders with $\rho_c/\rho = 0.5$ and $\mu_c/\mu = 0.3$, long dashed line for cavities with $\rho_c/\rho = 0.0$ and $\mu_c/\mu = 0.0$, and solid line for rigid scatterers with $\rho_c/\rho = 1.538$ and $\mu_c \rightarrow \infty$. It is clear the strong attenuation effect by the array for the three cases computed, been the rigid cylinders the most attenuating objects. It seems that the scatterers material filler is not relevant to obtain amplitude reductions after the array. However, this fact must be verified by some time domain computations to follow.

In order to show the characteristic time response of the studied models, several computations to obtain the time history in a fixed linear or spatial distribution of receivers were performed. Figs. 6 to 9 show the Fourier synthetic seismograms computed for models of two and four cylindrical scatterers. Normal and oblique incidences of S-waves were considered. Cavities, elastic inclusions and rigid cylinders were taken for the computations. The seismometers are located at the opposite side of the array with respect to the incoming wave field. These kinds of configurations were adopted in order to observe the forward scattering and behavior of the propagating wave front due to the presence of the array.

Fig. 6 shows a simple model of two obstacles with the same radius $r = a = 1$ and separation between centers of $s_p/a = 4.0$. There are 51 receivers at $x = \pm 4a$ and $z = 1.5a$, this configuration will be the same for all the synthetic examples. The source is given by an S-wave field with an incidence angle of $\psi = 90^\circ$, the time variation is constructed in terms of a Ricker pulse with $t_p = 1.5s$ and $t_s = 4s$. The elastic parameters are given by $\rho_c/\rho = 0.0$ and $\mu_c/\mu = 0.0$ for cavities (Fig. 6(a)), $\rho_c/\rho = 0.5$ and $\mu_c/\mu = 0.3$ for elastic cylinders (Fig. 6(b)), and $\rho_c/\rho = 1.538$ and $\mu_c \rightarrow \infty$ for rigid cylinders (Fig. 6(c)). Fig. 7 corresponds to the same model as in Fig. 6, just that for this case, the incidence angle is $\psi = 75^\circ$. We can observe the arrival phases marked as r_1 , c_1 , r_2 , and c_2 that are produced by the interaction between the incident wave and the obstacle 1 and 2 respectively. The letter r means "reflecting", and the letter c means "creeping", following the notation proposed by Benites *et al*, (1992). To observe the wave motion produced by the various configurations sketched here, we remark over the 3rd generation arrival phases, i. e. $r_{1/2}$ and $r_{2/2}$. These phases correspond to the reflected and creeping waves between the boundaries of the two

scatterers, taking into account the order in which the reflection or creeping occurs. The indices are related with the order in which each interaction take place. For example, r_{21} indicates that the wave was reflected first by scatterer 2 and then by scatterer 1, before reach its particular receiver, in similar way for r_{12} . These phases are called “*interactive phases*” (Benites *et al*, 1992). Note that for the cases of cavities and elastic inclusions such phases are separated by time intervals of approximately $2a/\beta$. Normal S-wave incidence clearly shows how the incident field is delayed by the presence of the cavities. In the elastic examples, it is possible to delineate a strong and delayed amplification of the incident field due to the soft properties of obstacles. These creeping waves c_1 and c_2 , are easily identifiable due to their higher amplitude relative to those reflected phases r_1 , r_2 , and r_{21} . The traces for rigid obstacles reveal that creeping and reflecting phases follow the same wave paths.

Fig. 8 shows the same examples as in Fig. 6, just that for a four scatterers array. Again, the response of three kinds of obstacles before an incoming plane S-wave field is depicted. Fig. 9 corresponds to the same parameters configuration as in Fig. 8, just that for the case of $\psi = 75^\circ$. Based on both figures, it is possible to remark the phases generated by the four scatterers, reflections r_3 , r_4 , r_{32} , r_{31} , r_4 , r_{43} , r_{42} and r_{41} , can be now identified. In similar way creeping phases c_3 and c_4 are pointed too. Nevertheless the wave paths appear to be regular, a graphic detail and longer durations is required to improve identification of 4th and 5th order phases. We must note that, for the cavities and elastic inclusions, the wave slopes follow similar propagation paths, rather than for rigid obstacles where propagation suffers an interference effect at those places between cylinders. With the four obstacles examples, we are able to generalize the wave motion and scattering patterns caused by any number of scatterers on linear arrays.

Finally, we show the wave motion and scattering patterns for the previously presented models. We have studied the amplitude spatial distribution during a lapse of propagation time. To do this, we have calculated snapshots series for meshes with 101×101 equally spaced receivers located within squares of lengths $8a$ and $16a$. In all cases twelve frames of displacement field are depicted. Figs. 10 and 11 show snapshots for a two cavity model ($\rho_c/\rho = 0.0$, $\mu_c/\mu = 0.0$) for $\psi = 90^\circ$ and $\psi = 75^\circ$ respectively. The centers of the cavities are located at $x = \pm 2$ and $y = 0$. The observation area is given by a squared grid of receptors with length $8a$. Excitation given by anti-plane S-waves with a Ricker wavelet of $t_p = 0.8$ s. Figs. 12 and 13 show similar previous case just that for elastic cylinders ($\rho_c/\rho = 0.5$, $\mu_c/\mu = 0.3$). These set of results illustrates how the wavefront reaches the array and then reflections and diffractions are produced. Forward and backward scattering patterns are generated at whole space. Delay and degeneration of wavefront produced by the geometrical multiple diffraction from cavities is notorious. In spite of this, diffraction at opposite side of incidence creates a shadow effect or gap due to the cavities, rather than elastic inclusions where an amplification effect is clearly appreciated. Results from elastic inclusions reveal that the wavefront is attenuated at reflecting phases and amplified at creeping phases, due to softer material filler. As time increases the wavefront recovers and the scattering of the wave field caused by the array over the plane wave diminishes.

Figs. 14 and 15 show snapshots for a four cavities model with $\psi = 90^\circ$ and $\psi = 75^\circ$ respectively. The centers of the cavities are located at $x = \pm 2$ and $x = \pm 6$ with $y = 0$. The observation area is given by a squared region of length $16a$. Excitation given by anti-plane S-waves with a Ricker wavelet of $t_p = 1.0$ s. Figs. 16 and 17 show similar previous case, just that for a four elastic

inclusions model ($\rho_c/\rho = 0.5$, $\mu_c/\mu = 0.3$). The same responses described for the two cylinders models are recognized. The scattering patterns from the reflecting and creeping phases are quite clear due to higher number of regular obstacles in the array. The time analyses have allowed the observation of some propagation properties that are not seen by the study in frequency domain. Such is the case of conspicuous amplification peaks produced by the diffraction of the wavefront due to softer elastic inclusions. Now we can verify that the wave motion and the scattering patterns produced by any number of cylinders in linear arrays are able to be characterized by just interaction between some of them.

4. Conclusions

We have studied an analytic solution to compute the transient response and multiple scattering by a linear array of empty, elastic, and rigid cylinders. The formulation is two-dimensional and is constructed by the superposition of the incident field and the waves diffracted by each obstacle. Here, the incident wave field is given by an anti-plane S-waves. The new interpretation of results and relevant examples were discussed. The normalized displacement amplitude relative to the incident field *versus* distance was plotted for specific frequencies. It was possible to identify the wave propagation behavior by means of computed synthetic seismograms and snapshots. It is shown that a conspicuous attenuation effect is observed by the array. A double response is produced by the presence of the elastic obstacles: reductions at the incidence side and amplifications at the opposite side, rather than the rigid cylinders, where the inverse response was identified.

The results reported here allow us to aim new paths of research and practical ways to describe and analyze the seismic response and multiple scattering in heterogeneous media. The analytical formulation reviewed in this paper offers a relatively simple way, with low computation cost, to understand the diffraction and multiple scattering of elastic waves by linear array of regularly distributed obstacles. The advantages and limitations of these techniques give us a complementary view of a not widely explored field of research. We are interested in the close future to develop these analytical formulations for several scatterers in arbitrary or randomly distributed configurations. The treatment of vector problem is been reviewed and constitutes the second part of this work. It is obvious that the 3D problem is extremely expensive in CPU and more, if the numerical computations do not take advantage of the mathematical properties of models. The most popular methods (finite differences, finite elements and spectral methods) are commonly used due to their easy implementation and programming. The 2D analytic formulation presented here appears to be a very low demand computational technique that only requires a good mathematical treatment and a PC. The applications of the numerical and analytical solutions for 3D multiple scattering problems are still open and offer a wide research area in several fields of science and engineering. The solution for 2 and 3D problems are now available using super computers or clusters and it is possible to carry on with complicated models. However, the characterization and the fundamental comprehension of the simplest parameters in a realistic model require more versatile mathematical formulations.

5. Acknowledgements

We wish to thank to Jim Spurlin for his valuable suggestions to this work and Sergio Chávez-Pérez for the critical reading. To Dimitri Komatitsch for the previous comparisons and computations of some results. This work was partially supported by Instituto Mexicano del Petróleo, in The Naturally Fractured Reservoir Program under Grant D01341 and by The Exploration Technologies Competence. Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM (NC-204) and Instituto de Ingeniería, UNAM.

References

- Abramowitz, M. and Irene A. Stegun, (1964), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical tables*, National Bureau of Standards, Applied mathematics series 55.
- Avilés, J. and F. J. Sánchez-Sesma, (1983), Piles as Barriers for Elastic Waves, *J. Geotech. Engineer.*, Vol. 109, No. 9, pp. 1133-1146.
- Benites, R., Aki, K. and K. Yomogida, (1992), Multiple Scattering of SH Waves in 2-D Media with Many Cavities, *Pageoph*. Vol. 133, No. 3, pp. 353-390.
- Davis, C. A., Lee, V.W. and J. P. Bardet, (2001), Transverse Response of Underground Cavities and Pipes to Incident SV Waves, *Earth. Eng. Structl. Dyn.*, Vol. 30, pp. 383-410.
- Foldy, L., (1945), The Multiple Scattering of Waves: 1. General Theory of Isotropic Scattering by Randomly Distributed Scatterers, *Phys. Rev.*, Vol. 67, No. 3 and 4, pp. 107-119.
- Frisch, U., (1968), *Wave Propagation in Random Media*, Academic press, New York.
- Gritto, R., Korneev, V.A. and Johnson, L.R., (1995), Low Frequency Elastic Wave Scattering by an Inclusion: Limits of Applications, *Geophys. J. Int.*, Vol. 120, pp. 677-692.
- Gritto, R., Korneev, V.A. and Johnson, L.R., (1999). Nonlinear Three-Dimensional Inversion of Low Frequency Scattered Elastic Waves, *Pure Appl. Geophys.*, 156, 557--589.
- Ishimaru, A. (1997), *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Oxford University Press, Oxford.
- Kanaun, S. K., Levin, V. M., and F. J. Sabina, (2004), Propagation of Elastic Waves in Composites with Random Set of Spherical Inclusions (Effective Medium Approach), *Wave Motion*, in press.
- Kikuchi, M., (1981), Dispersion and Attenuation of Elastic Waves due to Multiple Scattering from Inclusions, *Phys. Earth Planet Inter.*, Vol. 25, pp. 159-162.
- Lax, M., (1951), Multiple Scattering of Waves, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 23, No. 4, pp. 287-310.

Mow, C. C. and Y. H. Pao, (1971), The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations. *A reported prepared for United States Air Force Project Rand.*

Sheng, P., (1995), *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*, Academic Press, New York.

Tsang, L., Kong, J. A., and K. H. Ding, (2000), *Scattering of Electromagnetic Waves, Vol. 1: Theory and Applications*, Wiley Interscience.

Varadan, V. K., Varadan, V. V. and Y. H. Pao, (1978), Multiple Scattering of Elastic Waves by Cylinders of Arbitrary Cross Section. 1. SH waves., *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 63, No. 5, pp. 1310-1319.

Varadan, V. K. and Varadan, V. V. (1980), *Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering: Focused on the T-Matrix Approach*. Pergamon, New York.

Veksler, N. D., Lavie, A. and Dubus, B., (2000), Peripheral Waves Generated in a Cylindrical Shell with Hemispherical End Caps by a Plane Acoustic Wave at Axial Incidence, *Wave motion*, 4, 349-369.

Waterman, P. C., and R. Truell, (1961), Multiple Scattering of Waves, *J. Math. Phys.*, Vol. 2, pp. 512-537.

Watson, G. N., (1966), *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London, N. W., England.

Yin-bin Liu, Ru-Shan Wu and C. F. Ying, (2000), Scattering of Elastic Waves by an Elastic or Viscoelastic Cylinder, *Geophys. J. Inter.*, Vol. 142, No. 2, pp. 439-460.

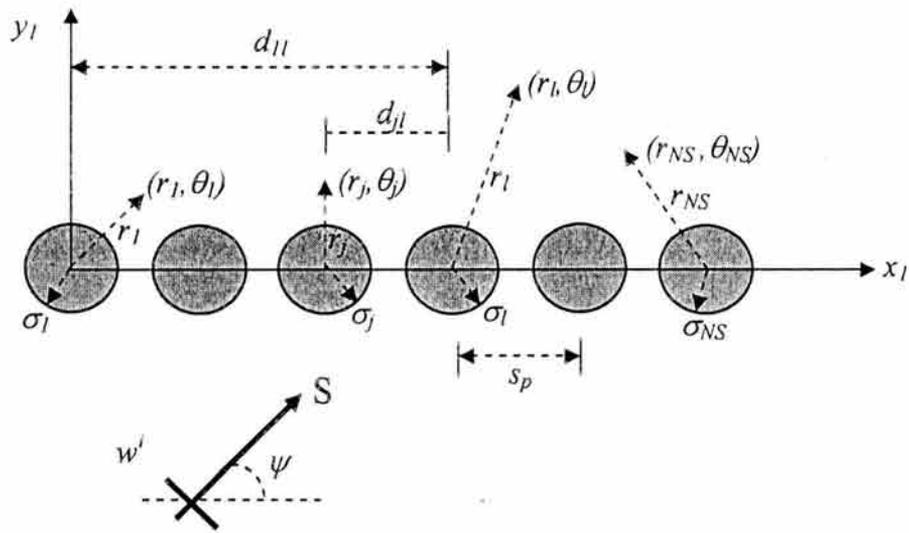


Fig. 1 Regularly distributed array of elastic cylinders, system of reference and incoming anti-plane S-wave.

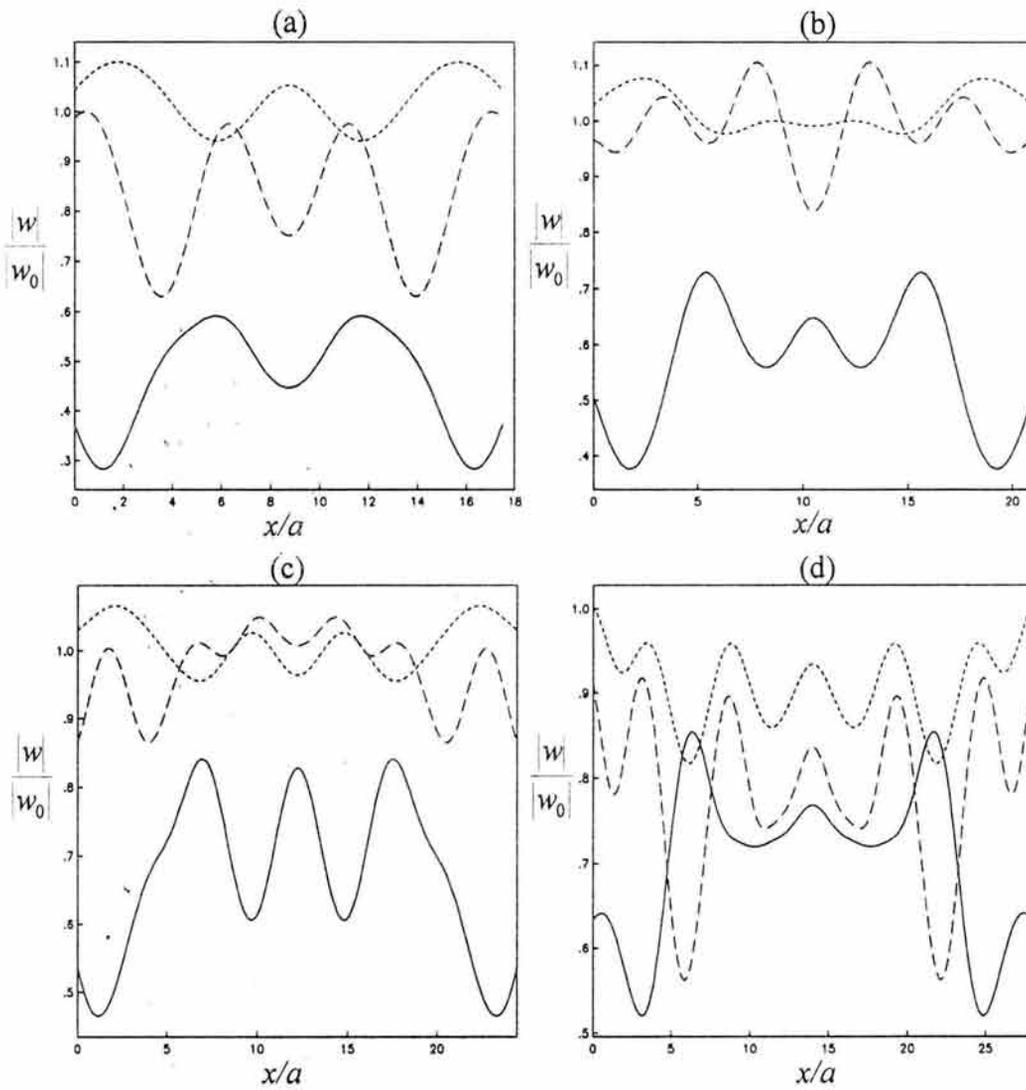


Fig. 2 Normalized displacement amplitudes for the model of Fig. 1 with $NS = 8$. Several distances y/a and various separations between cylinders s_p/a . (a) $y/a = 8.75$, $s_p/a = 2.5$. (b) $y/a = 10.5$, $s_p/a = 3.0$. (c) $y/a = 12.25$, $s_p/a = 3.5$ and (d) $y/a = 14.0$, $s_p/a = 4.0$.

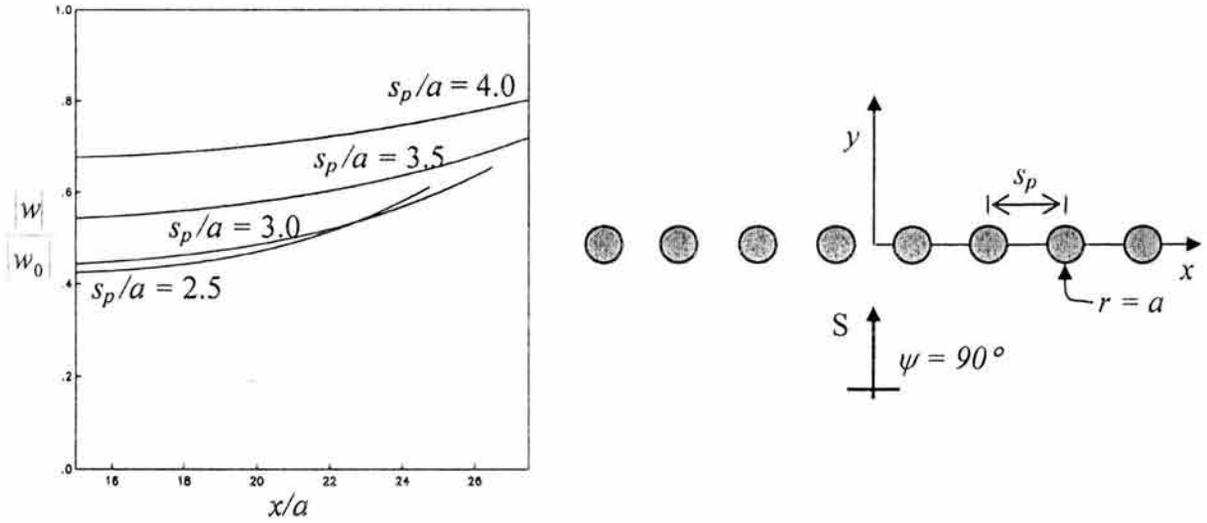


Fig. 3 Normalized displacement amplitudes on $y/a = 150$ for an array of $NS = 8$ rigid cylinders with $\rho_c/\rho = 1.538$ and $\mu_c \rightarrow \infty$. Different separations between obstacles s_p/a , and dimensionless frequency, $\eta_k = 0.5$. Incidence of anti-plane S-waves.

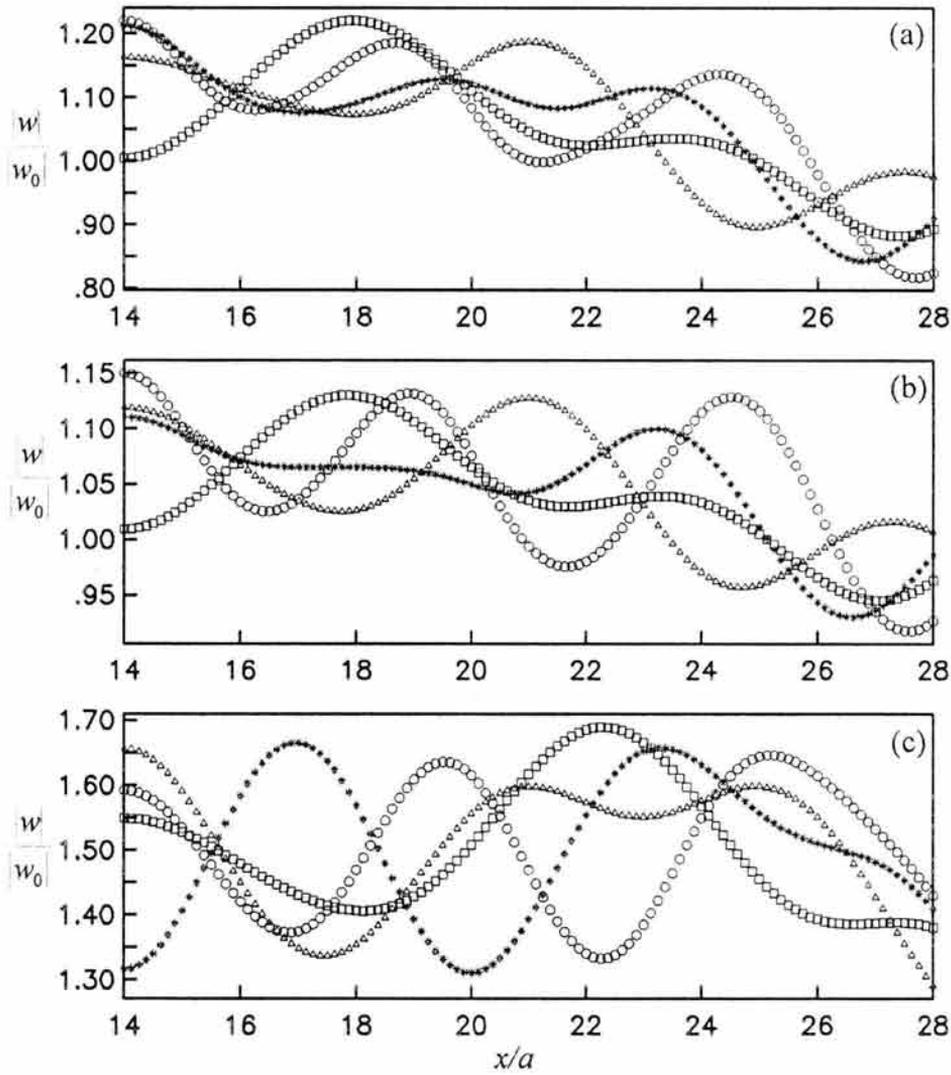


Fig. 4 Normalized displacement amplitudes for the model of Fig. 3 on several distances $y/a = -20$ (squares), $y/a = -15$ (triangles), $y/a = -10$ (asterisks), $y/a = -5$ (circles). Same properties as in Fig. 2 for (a) cavities, (b) elastic obstacles and (c) rigid obstacles. Incidence of anti-plane S-waves, dimensionless frequency $\eta_k = 0.4$.

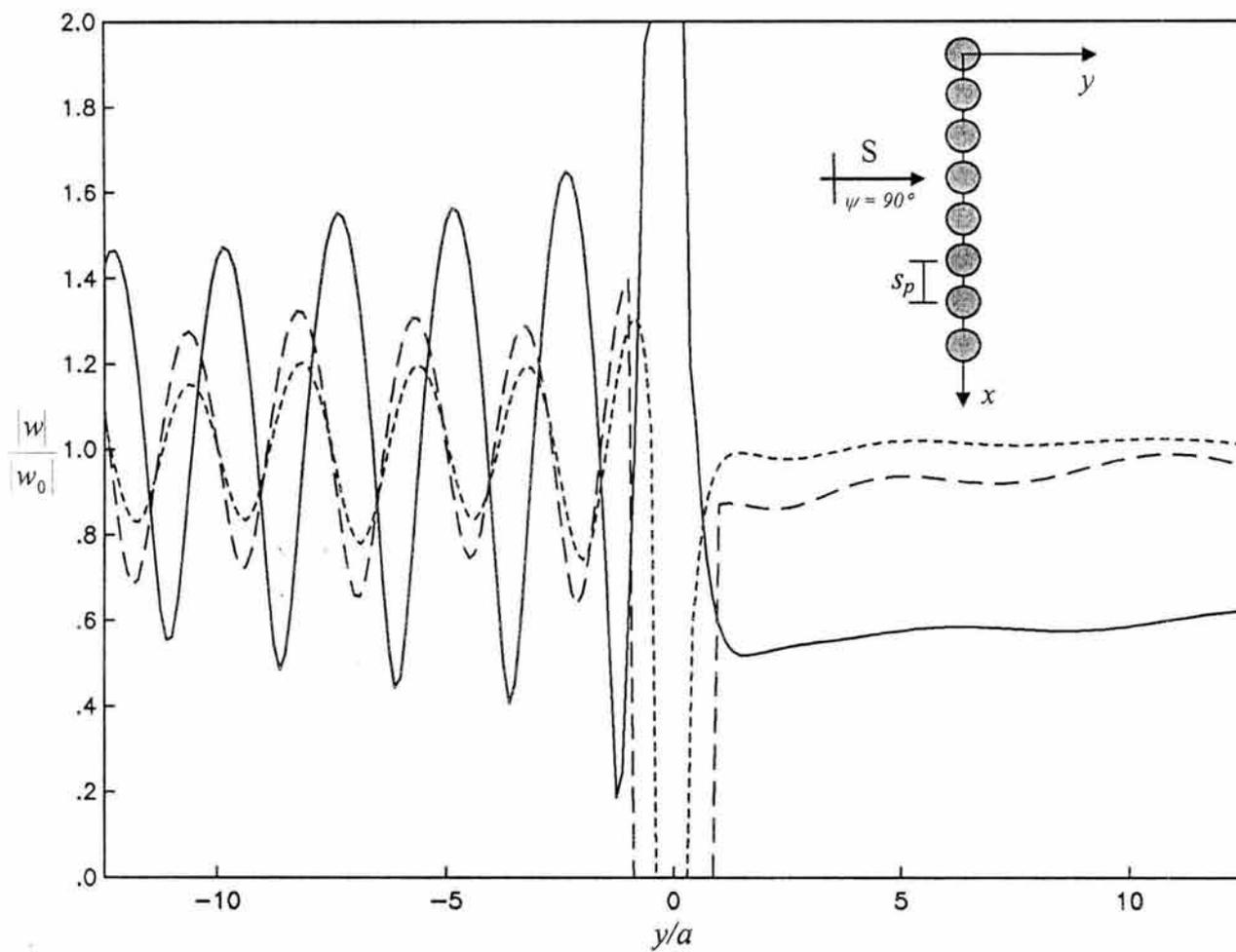


Fig. 5 Normalized displacement amplitudes on $x/a = 0$ for $s_p/a = 3.0$. Short dashed line corresponds to an array of elastic cylinders, long dashed line for cavities, and solid line for rigid scatterers. Incidence of anti-plane S-waves, dimensionless frequency, $\eta_k = 0.4$.

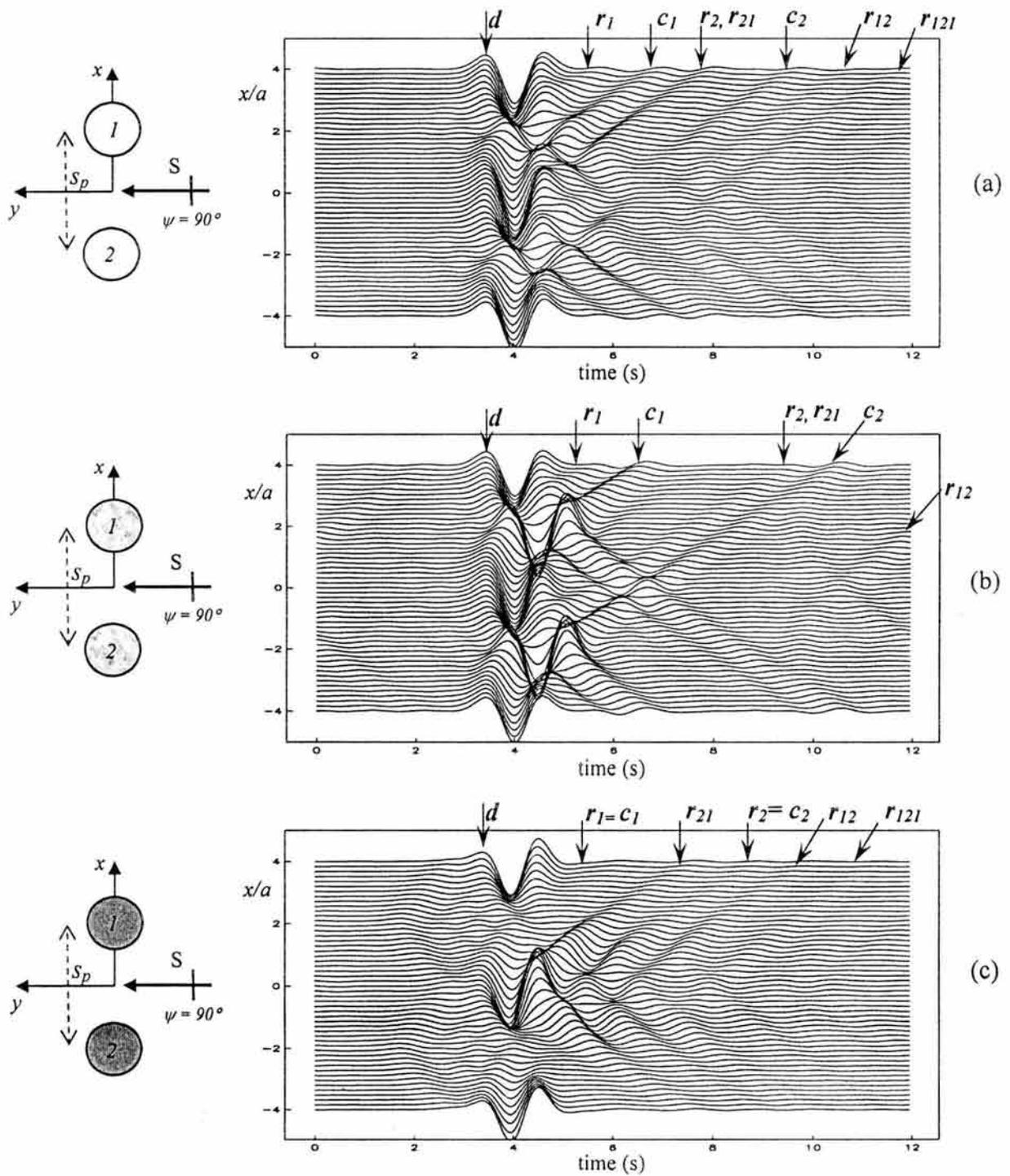


Fig. 6 Synthetic seismograms for the sketched models at left with $NS = 2$. Observation line of 51 receivers on $y/a = 1.5$ for various obstacles properties: (a) cavities, (b) elastic cylinders and (c) rigid cylinders. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-waves and a Ricker wavelet.

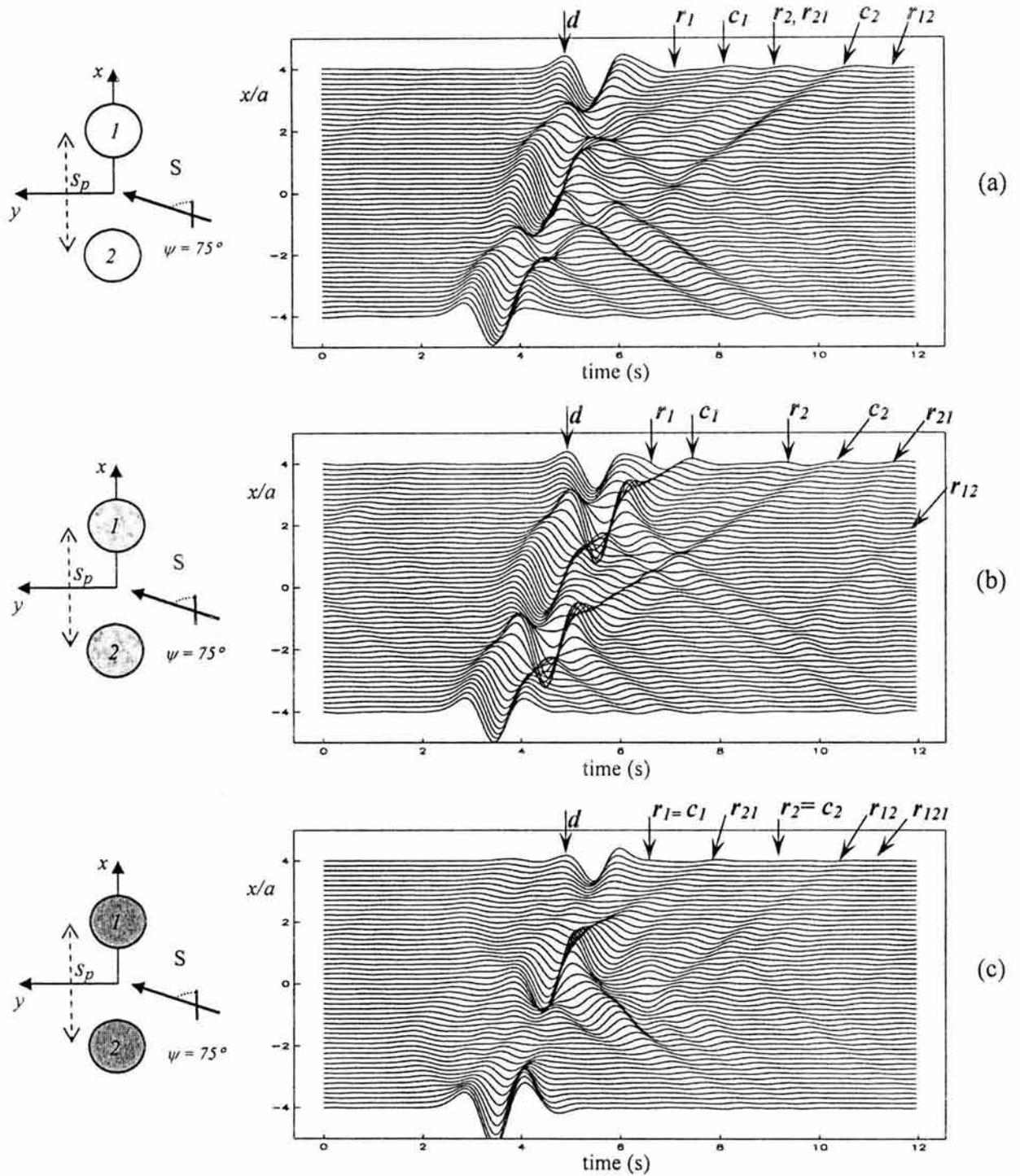


Fig. 7 Synthetic seismograms for the sketched models at left with $NS = 2$. Observation line of 51 receivers on $y/a = 1.5$ for various obstacles properties: (a) cavities, (b) elastic cylinders and (c) rigid cylinders. Excitation given by an oblique incidence of anti-plane S-waves and a Ricker wavelet.

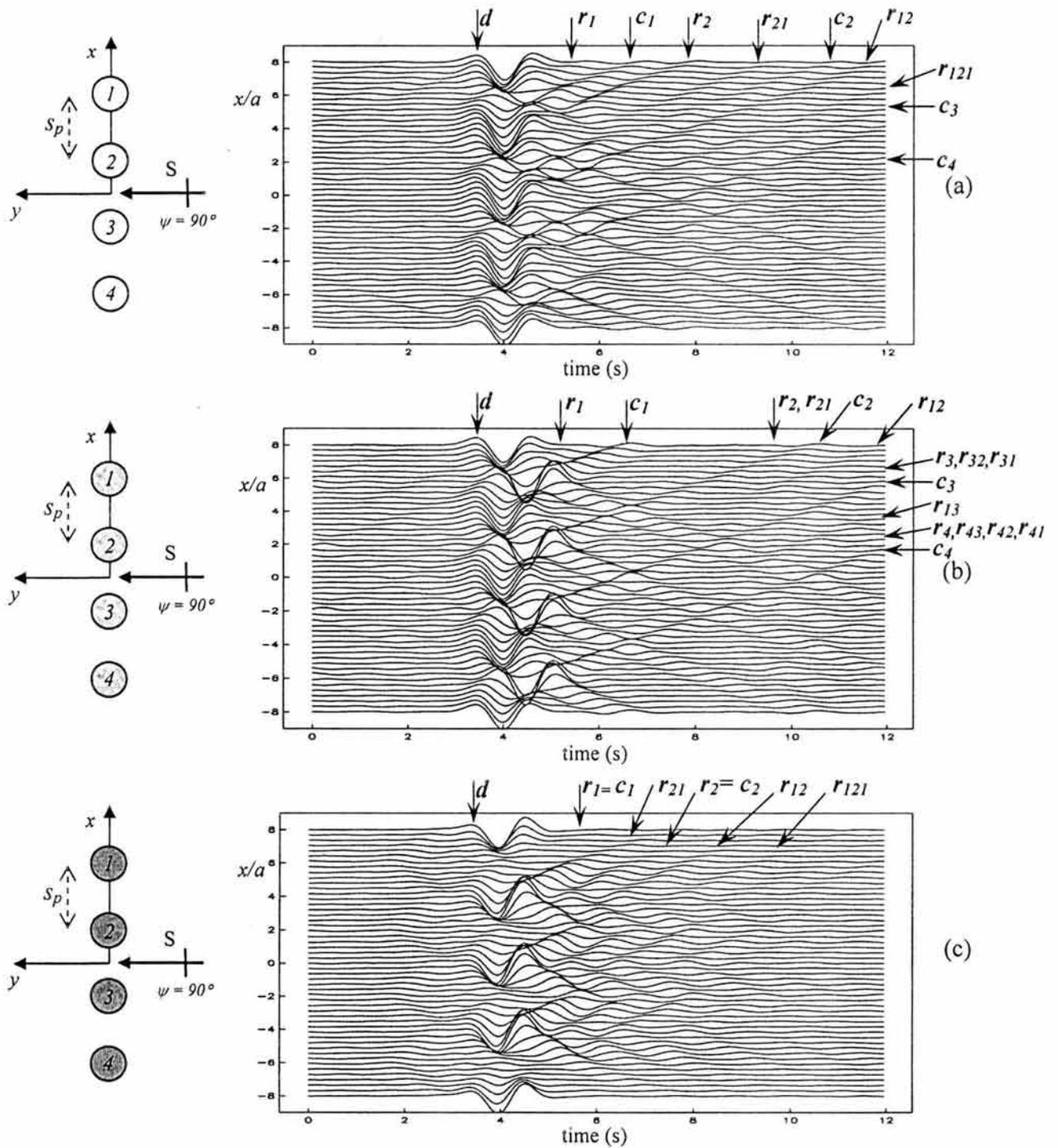


Fig. 8 Synthetic seismograms for the sketched models at left with $NS = 4$. Observation line of 51 receivers on $y/a = 1.5$ for various obstacles properties: (a) cavities, (b) elastic cylinders and (c) rigid cylinders. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-waves and a Ricker wavelet.

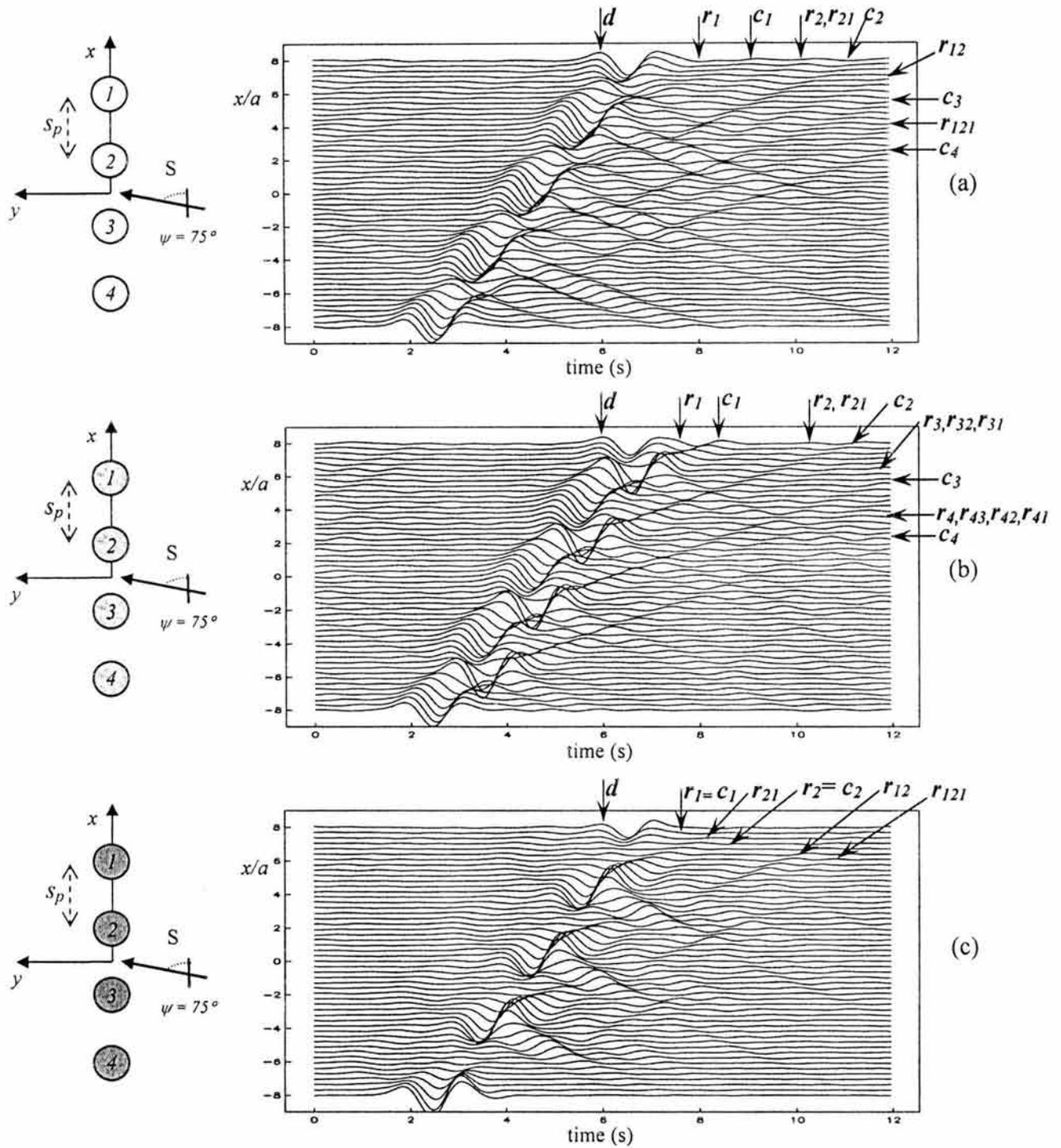


Fig. 9 Synthetic seismograms for the sketched models at left with $NS = 4$. Observation line of 51 receivers on $y/a = 1.5$ for various obstacles properties: (a) cavities, (b) elastic cylinders and (c) rigid cylinders. Excitation given by an oblique incidence of anti-plane S-waves and a Ricker wavelet.

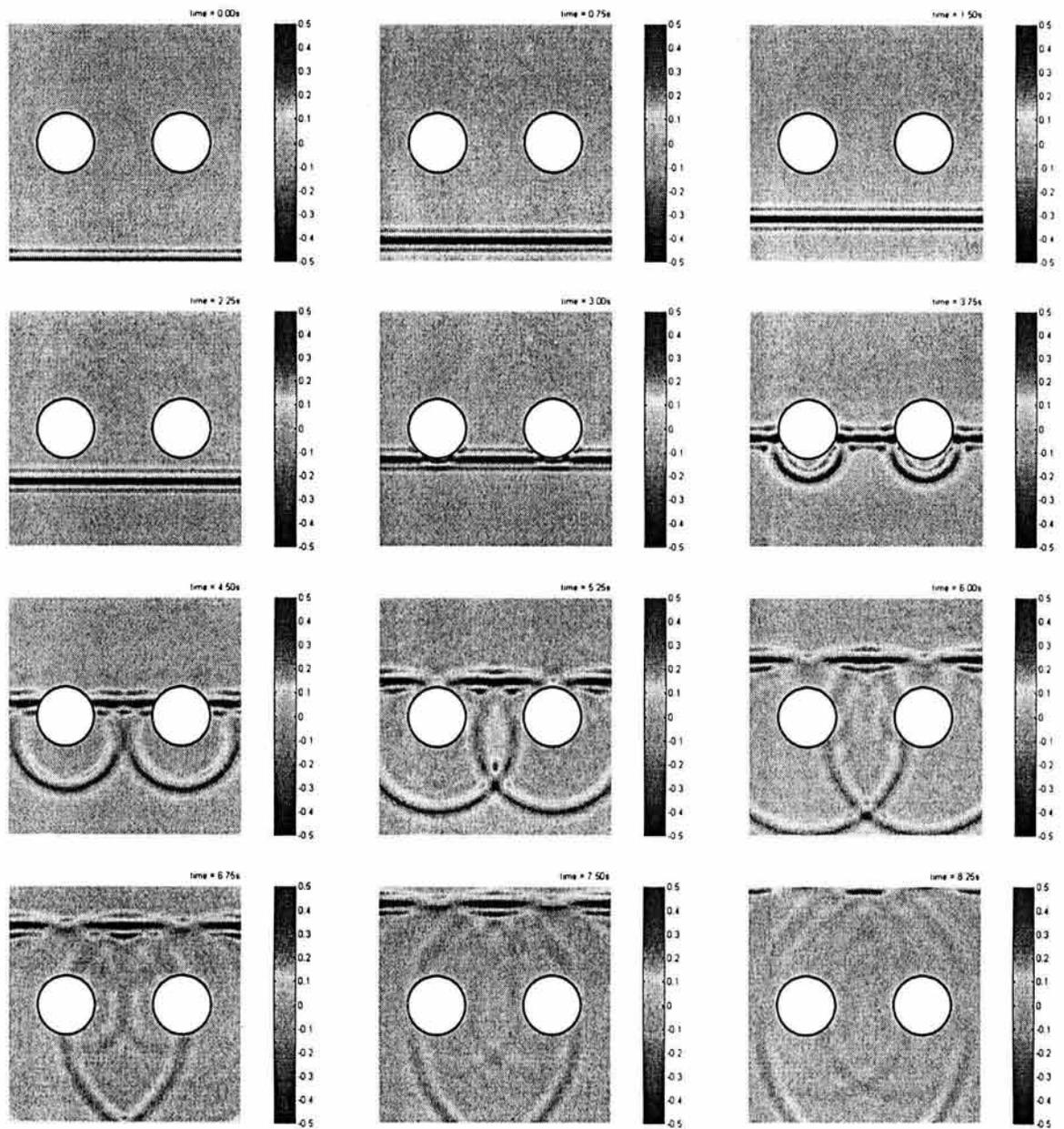


Fig.10 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 6(a) (two cavities). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 8.25s$. The observation area is defined by $-4a \leq x \leq 4a$ and $-4a \leq y \leq 4a$. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-wave and a Ricker wavelet of $t_p = 0.8s$.

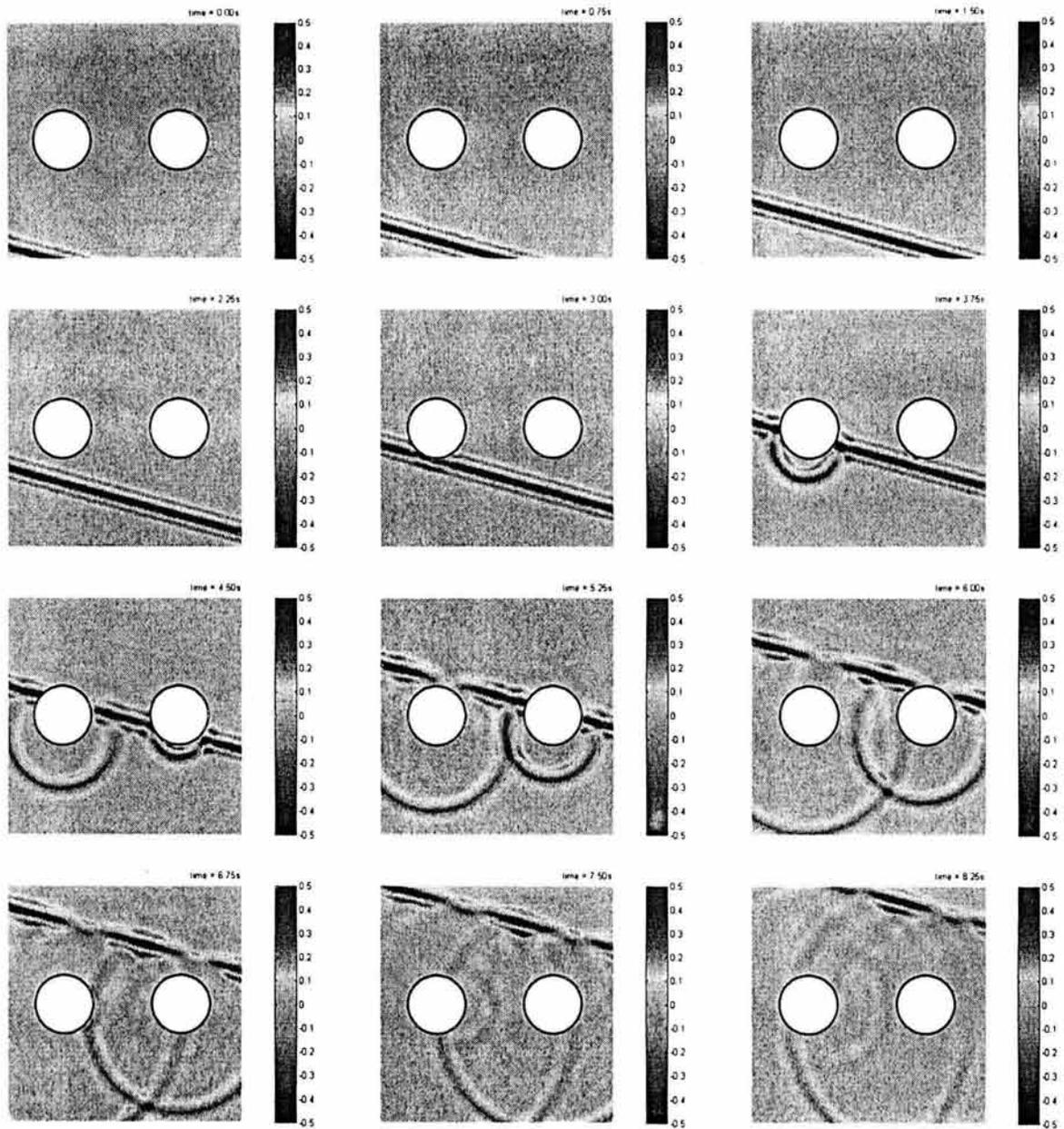


Fig.11 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 7(a) (two cavities). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 8.25s$. The observation area is defined by $-4a \leq x \leq 4a$ and $-4a \leq y \leq 4a$. Excitation given by oblique incidence of anti-plane S-wave $\psi = 75^\circ$ and a Ricker wavelet of $t_p = 0.8s$.

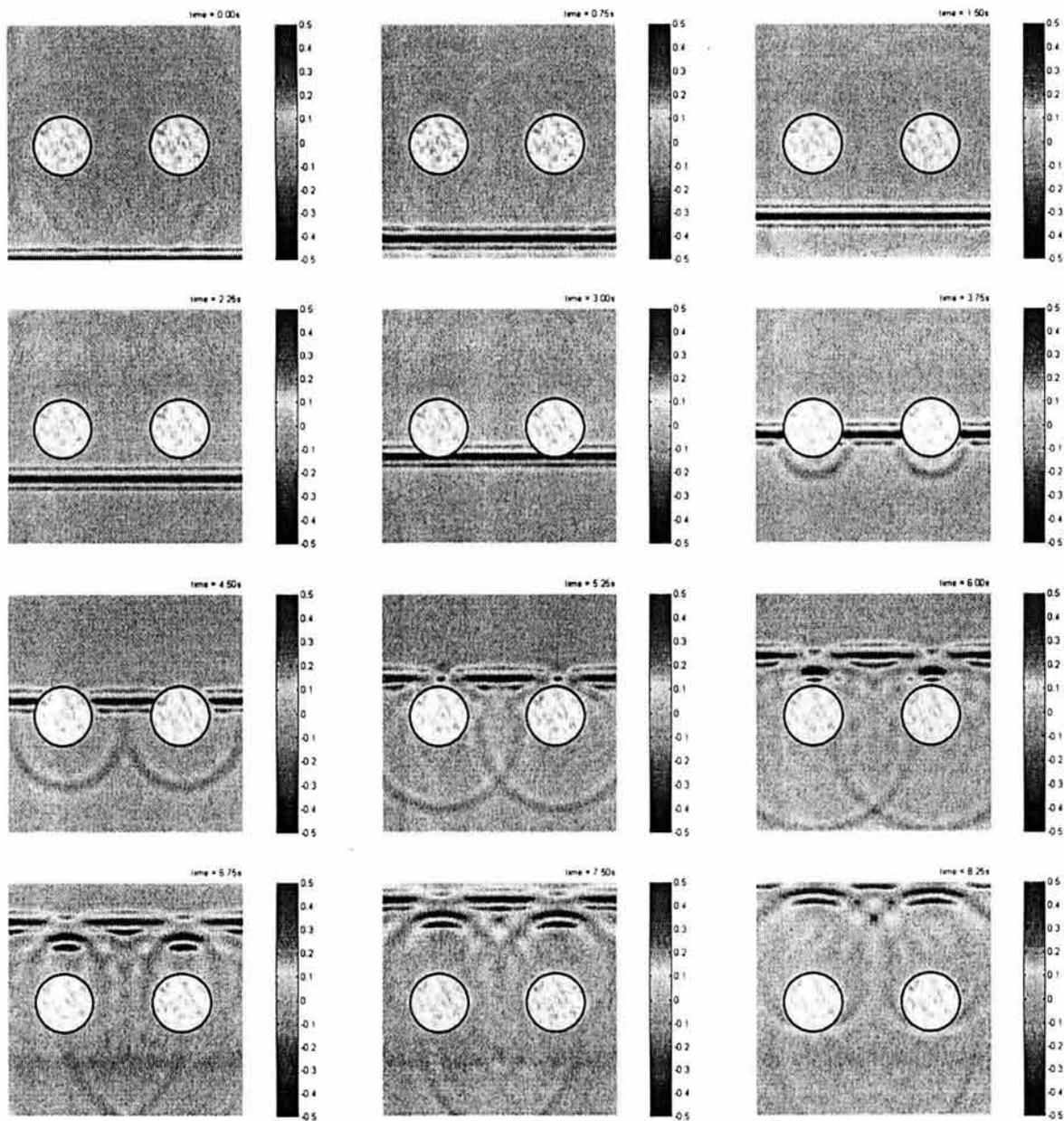


Fig.12 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 6(b) (two elastic inclusions). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 8.25s$. The observation area is defined by $-4a \leq x \leq 4a$ and $-4a \leq y \leq 4a$. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-wave and a Ricker wavelet of $t_p = 0.8s$.

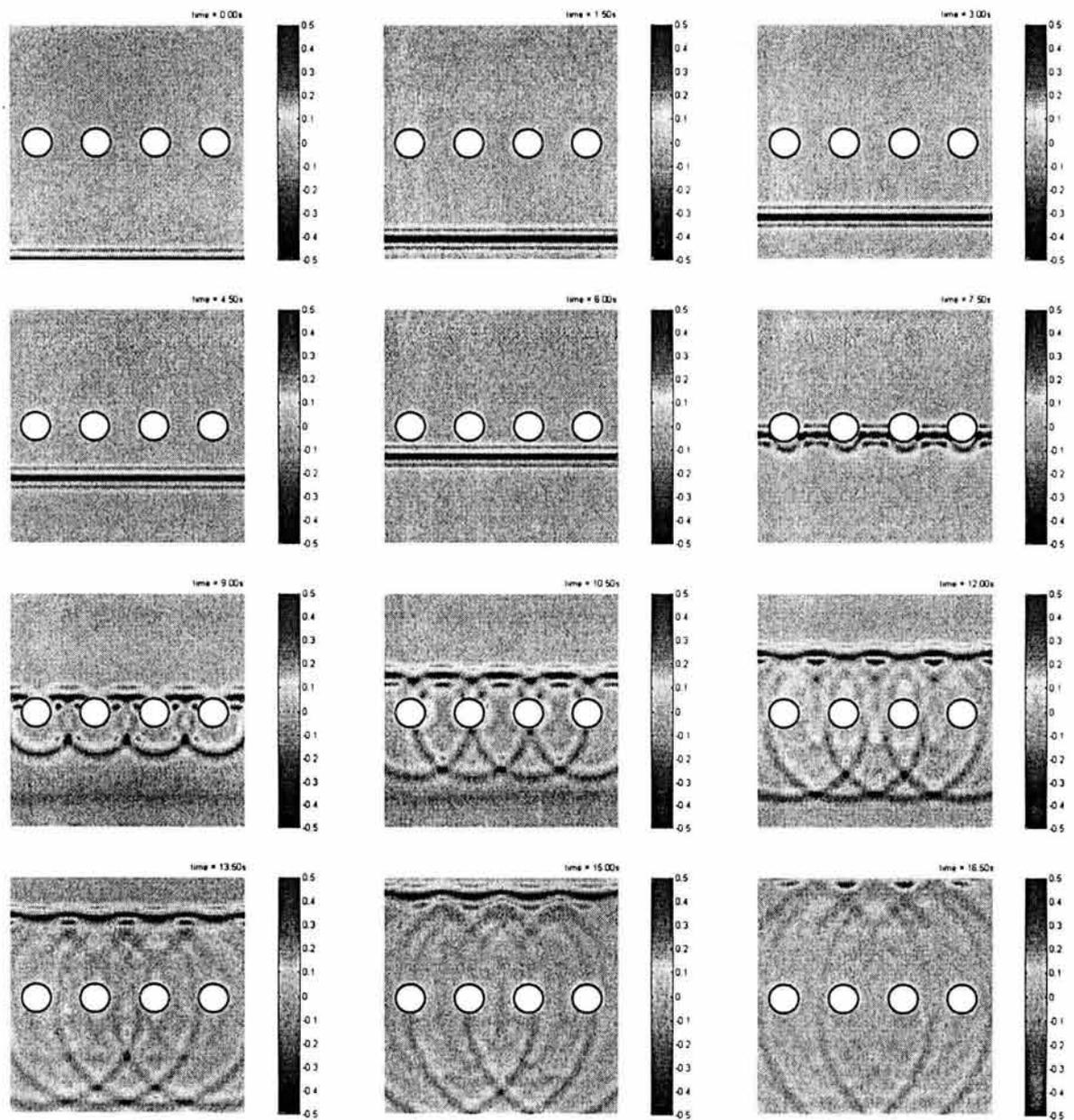


Fig.14 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 8(a) (four cavities). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 16.5s$. The observation area is defined by $-8a \leq x \leq 8a$ and $-8a \leq y \leq 8a$. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-wave and a Ricker wavelet of $t_p = 1.0s$.

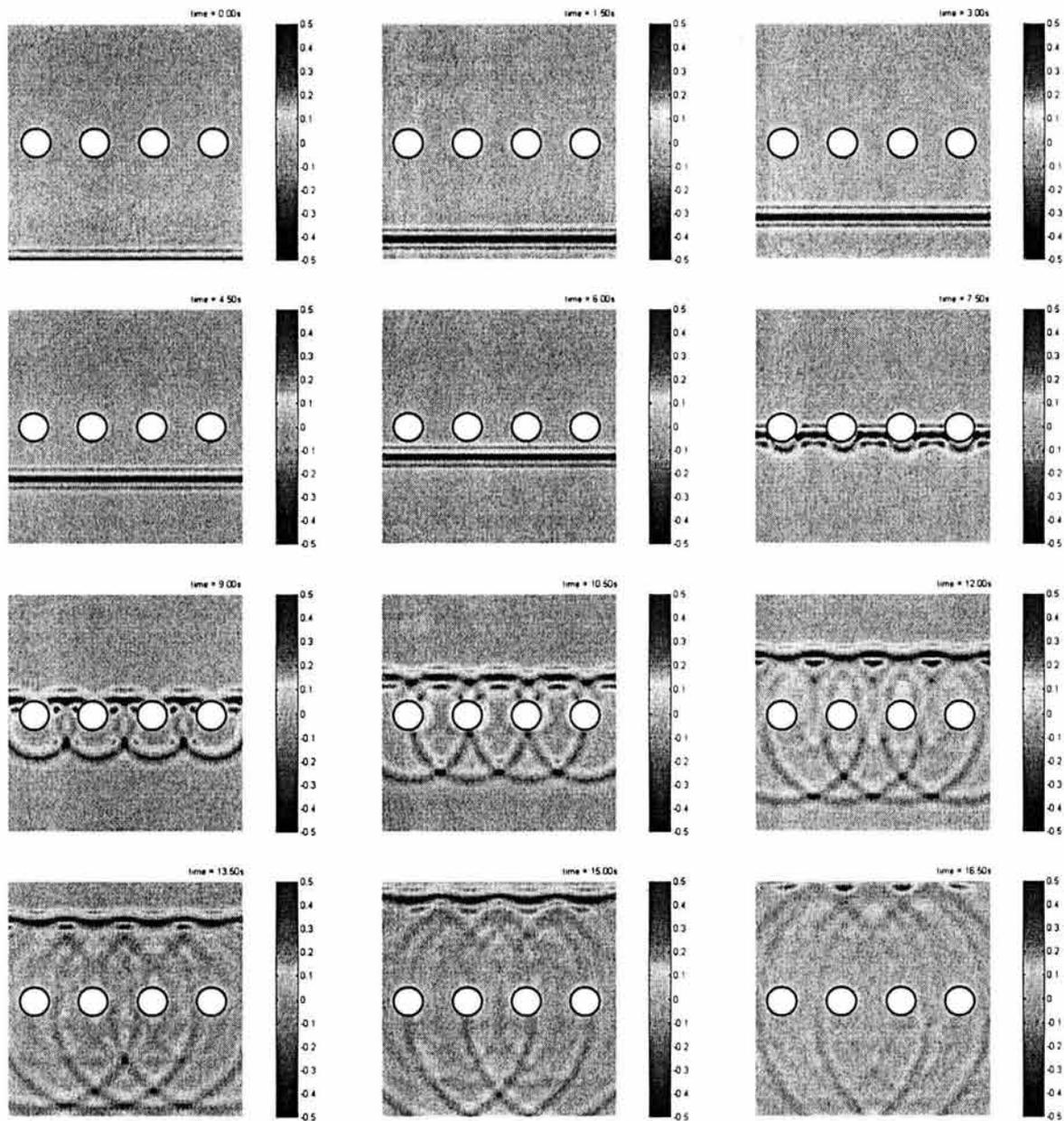


Fig.14 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 8(a) (four cavities). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 16.5s$. The observation area is defined by $-8a \leq x \leq 8a$ and $-8a \leq y \leq 8a$. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-wave and a Ricker wavelet of $t_p = 1.0s$.

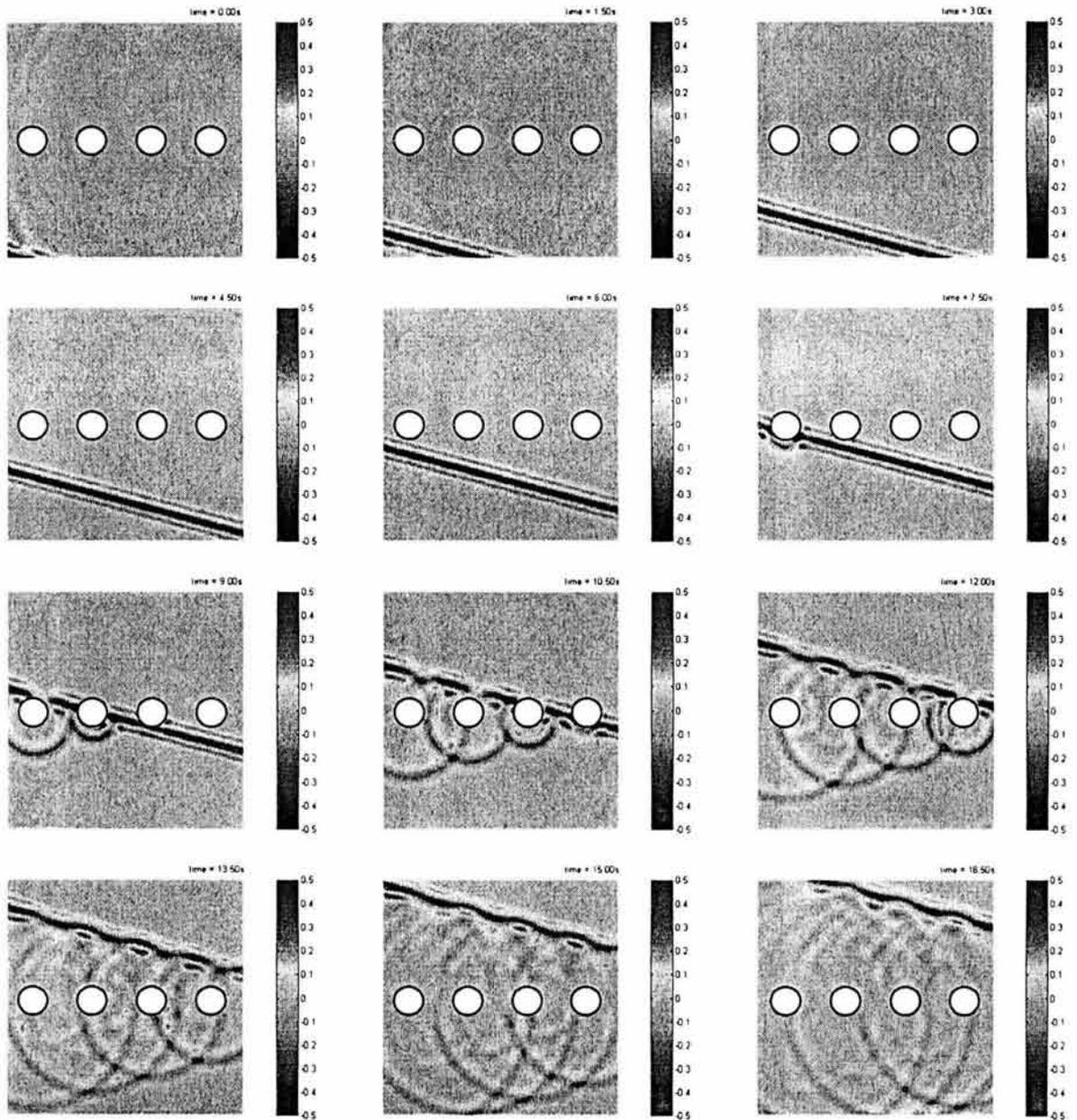


Fig.15 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 9(a) (four cavities). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 16.5s$. The observation area is defined by $-8a \leq x \leq 8a$ and $-8a \leq y \leq 8a$. Excitation given by oblique incidence of anti-plane S-wave $\psi = 75^\circ$ and a Ricker wavelet of $t_p = 1.0s$.

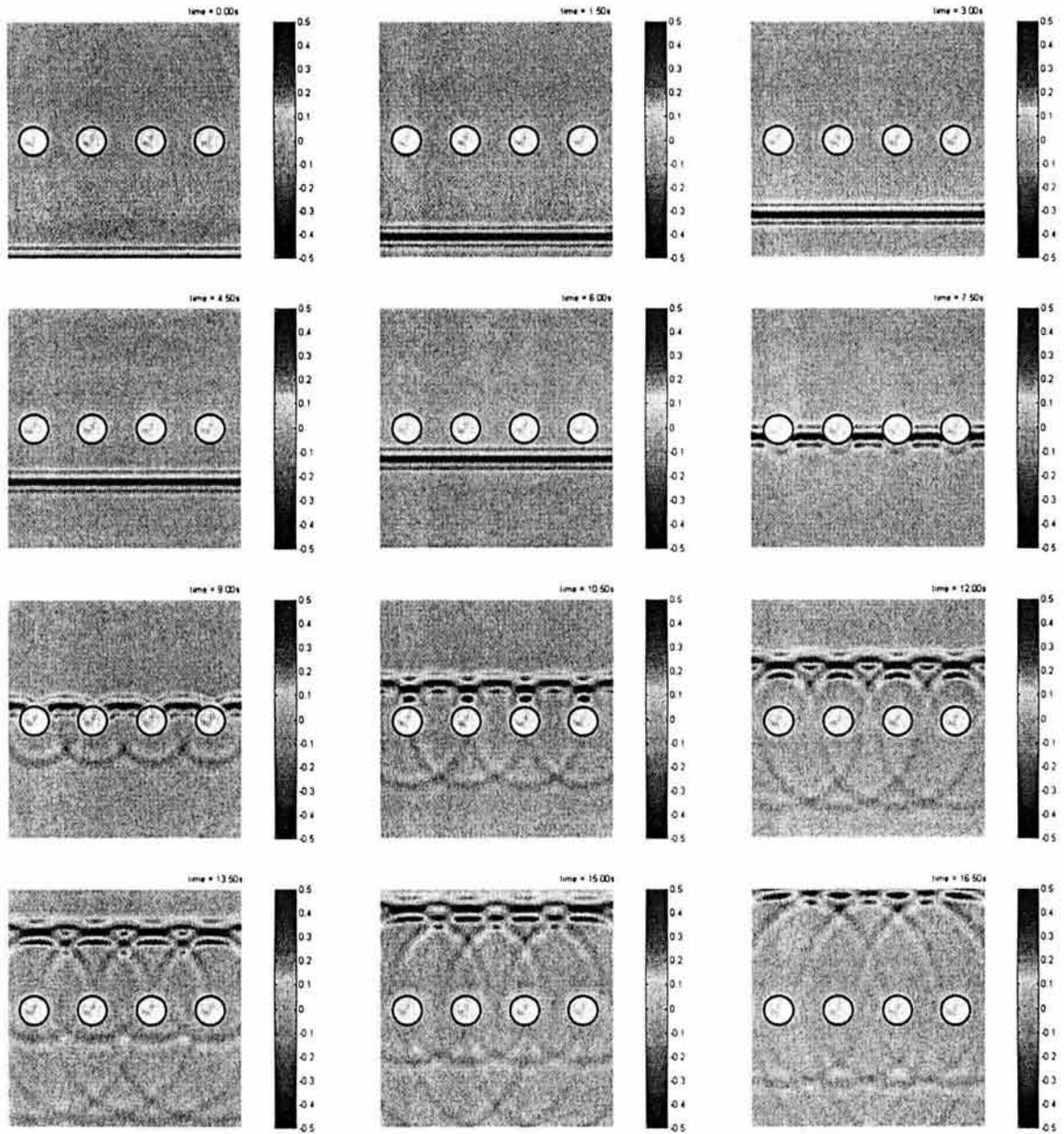


Fig.16 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 8(b) (four elastic inclusions). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0s$ to $t_i = 16.5s$. The observation area is defined by $-8a \leq x \leq 8a$ and $-8a \leq y \leq 8a$. Excitation given by normal incidence of anti-plane S-wave and a Ricker wavelet of $t_p = 1.0s$.

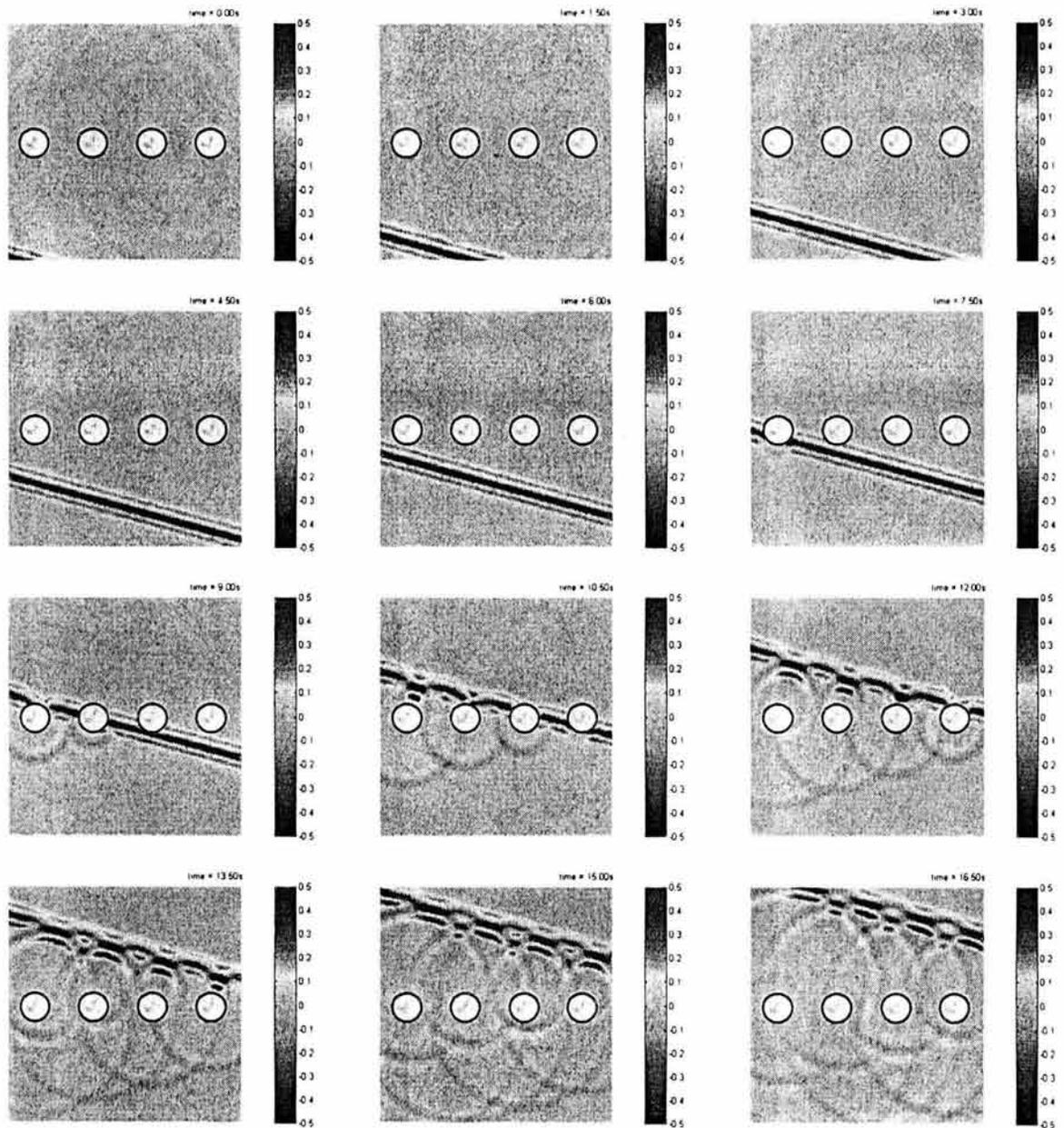


Fig.17 Snapshots of the displacement field for the model given in Fig. 9(b) (four elastic inclusions). Twelve times are depicted from $t_i = 0.0\text{s}$ to $t_i = 16.5\text{s}$. The observation area is defined by $-8a \leq x \leq 8a$ and $-8a \leq y \leq 8a$. Excitation given by oblique incidence of anti-plane S-wave $\psi = 75^\circ$ and a Ricker wavelet of $t_p = 1.0\text{s}$.